

# RSA-OAEP IND-CCA2 증명

김동현(wlswudpdlf31@kookmin.ac.kr), 국민대 FDL

April 5, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>논문정보</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>보안 개념</b>	<b>3</b>
2.1	OW trapdoor permutation . . . . .	3
2.2	Partial-domain OW trapdoor permutation . . . . .	3
2.3	Set partial-domain OW trapdoor permutation . . . . .	4
2.4	IND security against CCA2 . . . . .	4
2.5	IND security against CCA2 in ROM . . . . .	5
<b>3</b>	<b>RSA-OAEP</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>증명</b>	<b>8</b>
4.1	증명: Reduction and simulation . . . . .	8
4.2	증명: 사건 정의 . . . . .	9
4.3	증명: Analysis of the Decryption Oracle Simulation . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Journal of Cryptology</b>	<b>12</b>
5.1	랜덤 오라클 시뮬레이터 . . . . .	12
5.2	평문 추출기 . . . . .	12
5.3	게임 구성 . . . . .	14
5.3.1	0 번째 게임 . . . . .	14
5.3.2	1 번째 게임 . . . . .	15
5.3.3	2 번째 게임 . . . . .	17
5.3.4	3 번째 게임 . . . . .	19
5.3.5	4 번째 게임 . . . . .	20
5.3.6	5 번째 게임 . . . . .	21
5.3.7	6 번째 게임 . . . . .	22
5.3.8	7 번째 게임 . . . . .	23
5.3.9	8 번째 게임 . . . . .	25
<b>A</b>	<b>보조정리</b>	<b>26</b>

## 1 논문정보

- 제목: RSA-OAEP is Secure under the RSA Assumption
- 저자: Eiichiro Fujisaki1, Tatsuaki Okamoto, David Pointcheval, and Jacques Stern
- 년도: 2001년
- 초록: 최근 Victor Shoup은 적응적 선택 암호문 공격에 대한 OAEP의 보안성에 관한 널리 받아 들여진 결과에 틈이 있음을 지적하였다. 더욱이, 그는 기본 트랩도어 치환의 단방향성만으로는 OAEP의 보안성을 증명할 수 없을 것으로 예상된다는 점을 보였다. 본 논문은 OAEP의 보안성에 대한 또 다른 결과를 제시한다. 즉, 본 논문에서는 무작위 오라클 모델에서, 기본 치환의 부분 영역 단방향성(partial-domain one-wayness) 하에서, OAEP가 적응적 선택 암호문 공격에 대해 의미론적 보안성을 제공함을 증명한다. 따라서, 이는 형식적으로 더 강한 가정을 사용한다. 그럼에도 불구하고, RSA 함수의 부분 영역 단방향성이 (전체 영역) 단방향성과 동치이므로, RSA-OAEP의 보안성은 단순한 RSA 가정만으로도 증명될 수 있음을 알 수 있다. 다만, 그 축소(reduction)는 타이트하지 않다.

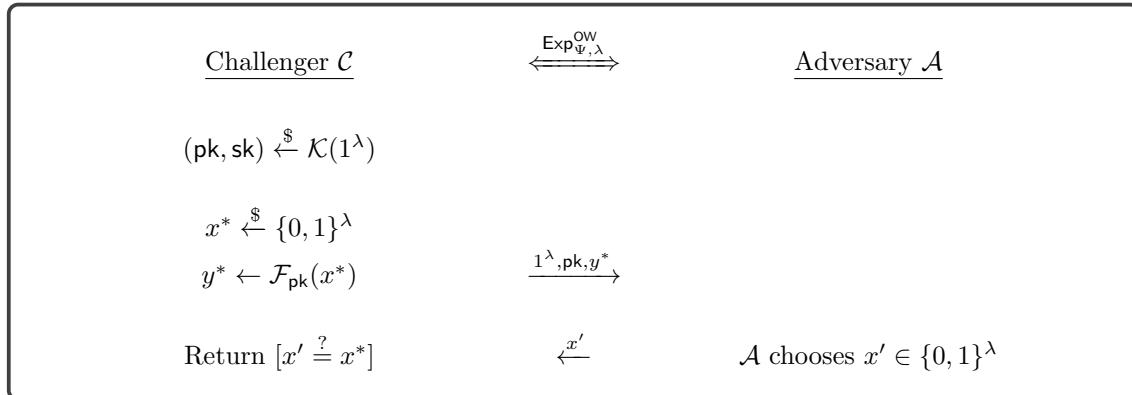
## 2 보안 개념

### 2.1 OW trapdoor permutation

트랩도어 치환 체계(Trapdoor permutation scheme)  $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ 를 다음과 같이 정의한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$ : 확률론적 키 생성 알고리즘으로,  $1^\lambda$ 를 입력 받아  $(\text{pk}, \text{sk})$ 를 생성한다.
- $\mathcal{F}_{\text{pk}}(x)$ : 결정론적 알고리즘으로,  $\text{pk}$ 와  $x \in \{0, 1\}^\lambda$ 를 입력 받아  $y \in \{0, 1\}^\lambda$ 를 출력한다.
- $\mathcal{I}_{\text{sk}}(y)$ : 결정론적 알고리즘으로,  $\text{sk}$ 와  $y \in \{0, 1\}^\lambda$ 를 입력 받아  $x \in \{0, 1\}^\lambda$ 를 출력한다.  $\mathcal{K}(1^\lambda)$ 로 생성한 모든  $(\text{pk}, \text{sk})$ 와 모든  $x \in \{0, 1\}^\lambda$ 에 대해,  $\mathcal{I}_{\text{sk}}(\mathcal{F}_{\text{pk}}(x)) = x$ 를 만족한다.

동작시간(Running time)  $\tau$ 를 가지는 공격자  $\mathcal{A}$ 와 트랩도어 치환 체계  $\Psi$ 에 대한 일방향성(One-wayness) 실험  $\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{OW}}(\mathcal{A}; \tau)$ 을 다음과 같이 정의한다.



$\mathcal{A}$ 의 능력치  $\text{Adv}_{\mathcal{A}; \Psi}^{\text{OW}}(\lambda, \tau)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{OW}}(\mathcal{A}; \tau) := \Pr[\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{OW}}(\mathcal{A}; \tau) = 1].$$

### 2.2 Partial-domain OW trapdoor permutation

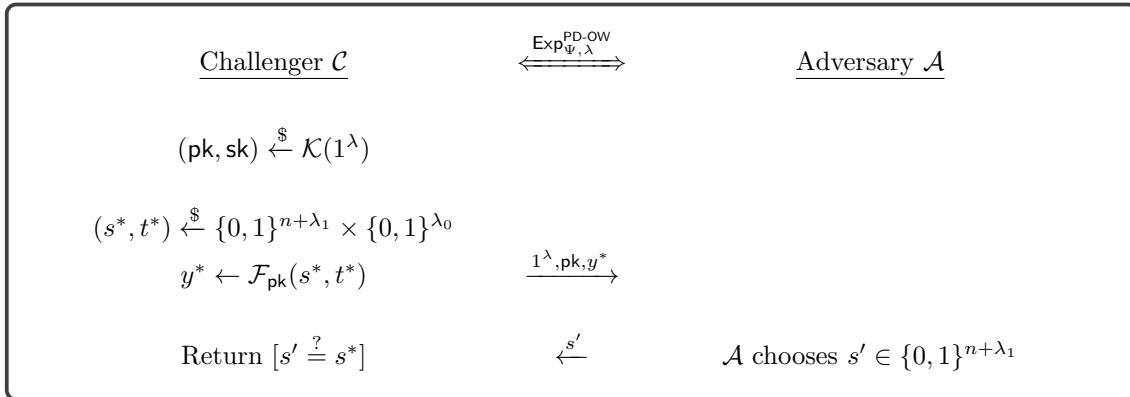
트랩도어 치환  $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ 에서,  $\mathcal{F}_{\text{pk}}(x) : \{0, 1\}^\lambda \rightarrow \{0, 1\}^\lambda$ 를 다음과 같이 표현한다.

$$\mathcal{F}_{\text{pk}} : \{0, 1\}^{n+\lambda_1} \times \{0, 1\}^{\lambda_0} \rightarrow \{0, 1\}^{n+\lambda_1} \times \{0, 1\}^{\lambda_0}.$$

이때  $\lambda = n + \lambda_0 + \lambda_1$ 이다.

**예제 2.1.** 예를 들어,  $x = s \parallel t$ 라고 할 때,  $y \leftarrow \mathcal{F}_{\text{pk}}(x)$  대신  $y \leftarrow \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel t)$ 로 표현할 수 있다.

동작시간  $\tau$ 를 가지는 공격자  $\mathcal{A}$ 와 트랩도어 함수 체계  $\Psi$ 에 대한 부분 일방향성(Partial-domain one-wayness) 실험  $\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau)$ 을 다음과 같이 정의한다.

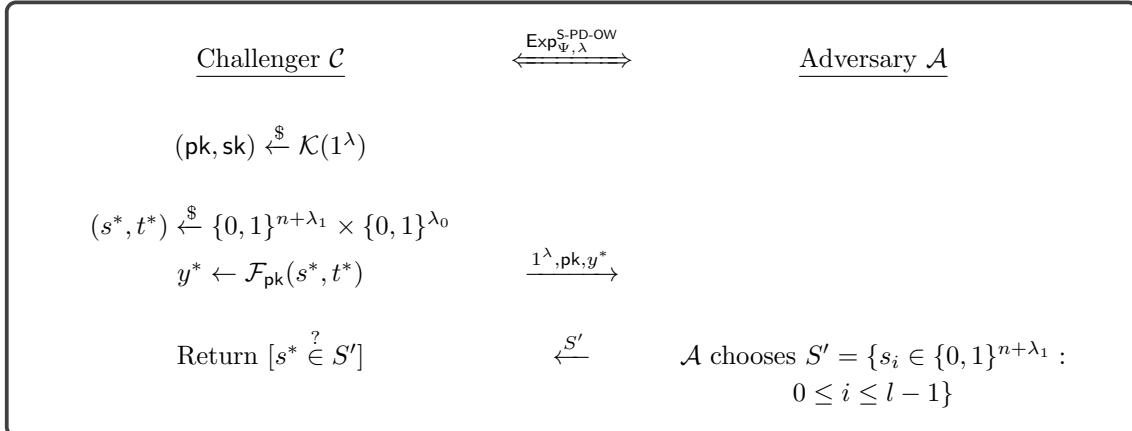


공격자  $\mathcal{A}$ 의 능력치  $\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau) := \Pr[\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau) = 1].$$

### 2.3 Set partial-domain OW trapdoor permutation

동작시간  $\tau$ 를 가지고  $l$ 개의 원소를 출력하는 공격자  $\mathcal{A}$ 와 트랩도어 함수 체계  $\Psi$ 에 대한 집합 부분 일방향성(Set partial-domain one-wayness) 실험  $\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau, l)$ 을 다음과 같이 정의한다.



공격자  $\mathcal{A}$ 의 능력치  $\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau, l)$ 를 다음과 같이 정의한다.

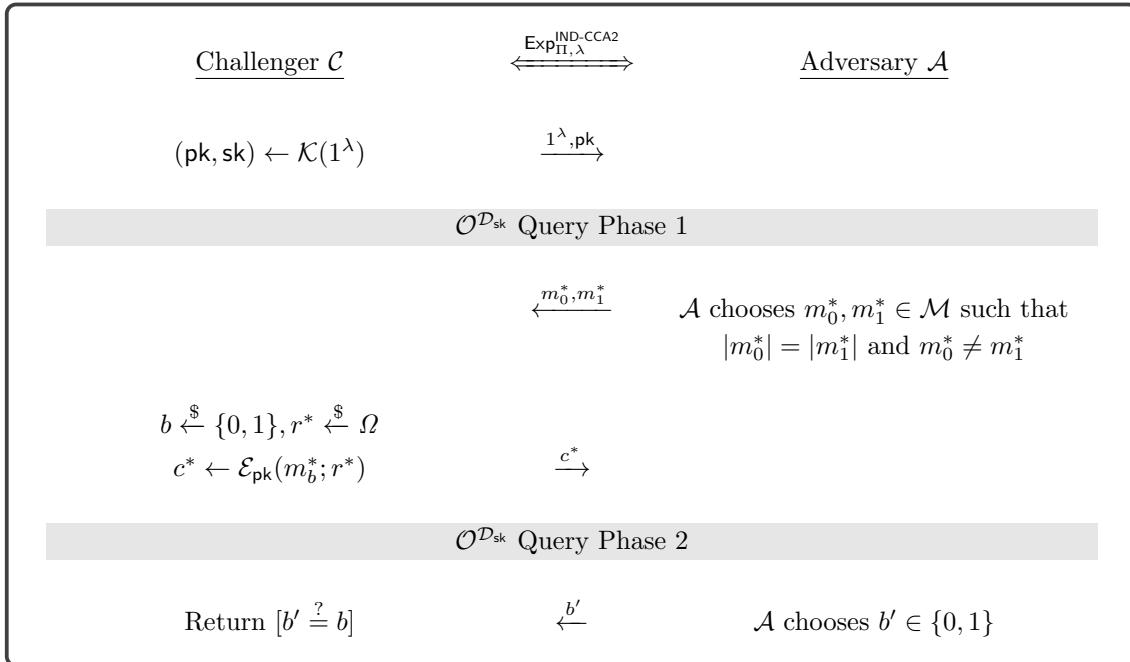
$$\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau, l) := \Pr[\text{Exp}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{A}; \tau, l) = 1].$$

### 2.4 IND security against CCA2

공개키 암호 체계(Public-key encryption scheme)  $\Pi = (\mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ 를 다음과 같이 정의한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$ : 확률론적 키 생성 알고리즘으로,  $1^\lambda$ 를 입력 받아  $(\text{pk}, \text{sk})$ 를 생성한다.
- $\mathcal{E}_{\text{pk}}(m)$ : 암호화 알고리즘으로,  $\text{pk}$ 와  $m \in \mathcal{M}$ 를 입력 받아  $c \in \mathcal{C}$ 를 출력한다. 확률론적 알고리즘으로,  $r \xleftarrow{\$} \Omega$ 를 추가로 입력 받아  $\mathcal{E}_{\text{pk}}(m; r)$ 으로 표현할 수도 있다.
- $\mathcal{D}_{\text{sk}}(c)$ : 결정론적 복호화 알고리즘으로,  $\text{sk}$ 와  $c \in \mathcal{C}$ 를 입력 받아  $m \in \mathcal{M}$ 를 출력한다.

동작시간  $\tau$ 를 가지고 복호화 오라클에  $q$ 회 질의하는 공격자  $\mathcal{A}$ 와 공개키 암호 체계  $\Pi$ 에 대해, 선택 암호문 공격(Adaptive chosen ciphertext attack, 이하 CCA2)에 대한 구별불가능성(Indistinguishability) 실험  $\text{Exp}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q)$ 을 다음과 같이 정의한다.

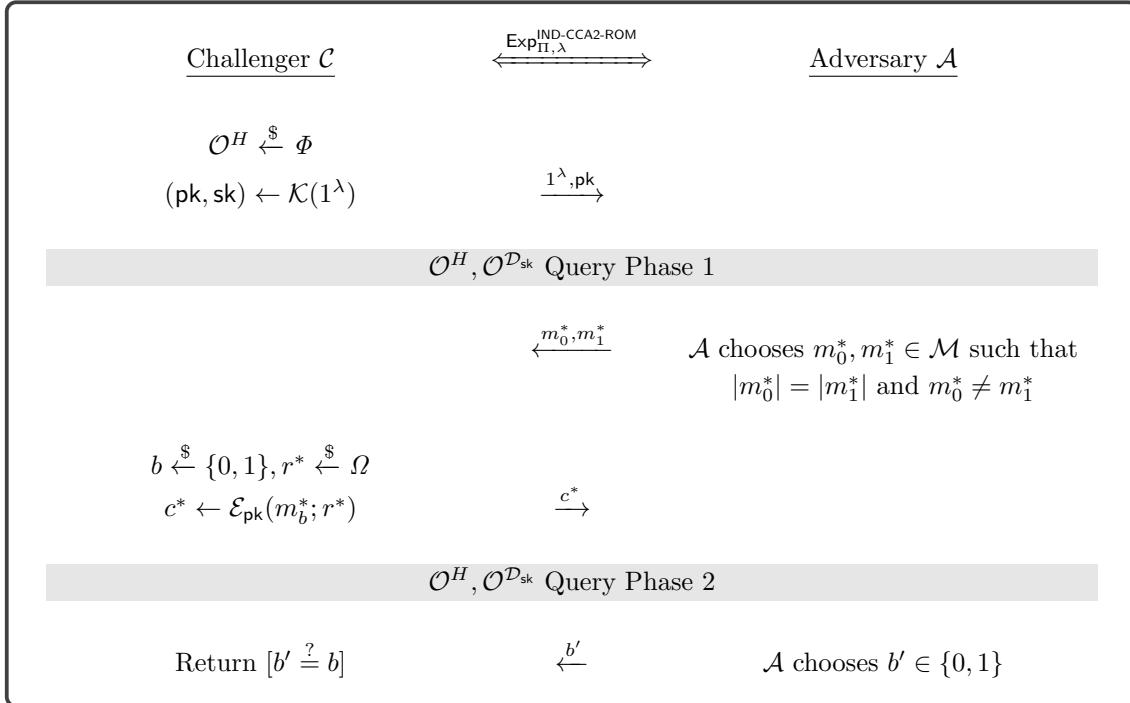


공격자  $\mathcal{A}$ 의 능력치  $\text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q) = 2 \cdot \Pr[\text{Exp}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q) = 1] - 1.$$

## 2.5 IND security against CCA2 in ROM

동작시간  $\tau$ 를 가지고 복호화 오라클에  $q_D$ 회, 랜덤 오라클에  $q_H$ 회 질의하는 공격자  $\mathcal{A}$ 와 공개키 암호체계  $\Pi$ 에 대해, 랜덤 오라클 모델(Random oracle model)에서의 CCA2에 대한 구별불가능성 실험  $\text{Exp}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2-ROM}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H)$ 을 다음과 같이 정의한다.



공격자  $\mathcal{A}$ 의 능력치  $\text{Adv}_{\Pi,\lambda}^{\text{IND-CCA2-ROM}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Adv}_{\Pi,\lambda}^{\text{IND-CCA2-ROM}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H) = 2 \cdot \Pr[\text{Exp}_{\Pi,\lambda}^{\text{IND-CCA2-ROM}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H) = 1] - 1.$$

### 3 RSA-OAEP

다음과 같은 트랩도어 치환  $\mathcal{F}$ 를 고려한다.

$$\mathcal{F}_{\text{pk}} : \{0, 1\}^{n+\lambda_1} \times \{0, 1\}^{\lambda_0} \rightarrow \{0, 1\}^{n+\lambda_1} \times \{0, 1\}^{\lambda_0}.$$

그리고 두 해시 함수  $H, G$ 를 다음과 같이 준비한다.

$$H : \{0, 1\}^{\lambda_0} \rightarrow \{0, 1\}^{\lambda-\lambda_0}, \quad G : \{0, 1\}^{\lambda-\lambda_0} \rightarrow \{0, 1\}^{\lambda_0}.$$

트랩도어 치환 체계  $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ 를 포함하는 OAEP 변환  $(\mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ 는 다음과 같이 동작한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$ : ( $\text{pk}, \text{sk}$ )를 생성한다.  $\text{pk}$ 는 이후 트랩도어 치환  $\mathcal{F}$ 에서 사용하며,  $\text{sk}$ 는  $\mathcal{I}$ 에서 사용한다.
- $\mathcal{E}_{\text{pk}}(m; r)$ :  $m \in \{0, 1\}^n$ 과  $r \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^{\lambda_0}$ 가 주어졌을 때,  $s, t$ 를 다음과 같이 계산한다.

$$s = (m \parallel 0^{\lambda_1}) \oplus G(r), \quad t = r \oplus H(s).$$

$s, t$ 를 계산하는 과정을 도식화하면 그림 1와 같다. 이후 암호문  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s, t)$ 을 출력한다.

- $\mathcal{D}_{\text{sk}}(c)$ :  $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한 후,  $r, M$ 을 다음과 같이 계산한다.

$$r = t \oplus H(s), \quad M = s \oplus G(r).$$

만약  $[M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 이면  $[M]^n$ 을 출력하고, 아니라면 “Reject”를 출력한다. 이 때,  $[M]_{\lambda_1}$ 은  $M$ 의 마지막  $\lambda_1$  비트 LSB를 의미하고,  $[M]^n$ 은  $M$ 의 첫  $n$  비트 MSB를 의미한다.

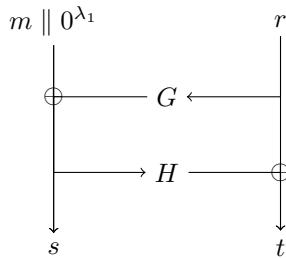


Figure 1:  $\mathcal{E}_{\text{pk}}(m; r)$ 에서  $s, t$ 를 계산하는 과정

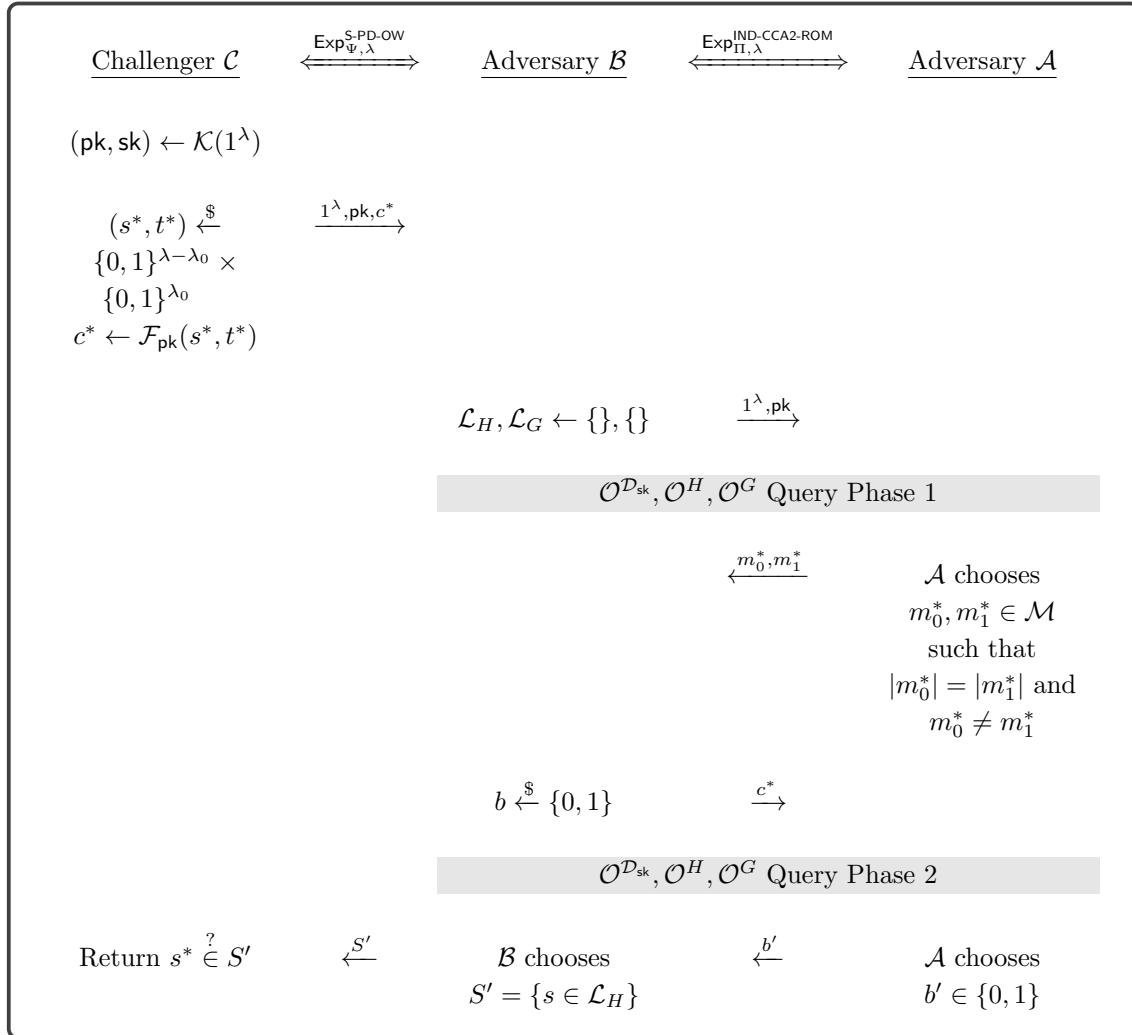
## 4 증명

**보조정리 1.** 공격자  $\mathcal{A}$ 를 OAEP 변환  $(\mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ 에 대해 동작시간  $\tau$ 를 가지고, 복호화 오라클  $\mathcal{O}^D$ 와 랜덤 오라클  $\mathcal{O}^H, \mathcal{O}^G$ 에 각각  $q_D, q_H, q_G$ 회 질의하는 IND-CCA2 공격자라 하자. 이때, 다음을 만족하는 S-PD-OW 공격자  $\mathcal{B}$ 가 존재한다.

$$\text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{B}; \tau', q_H) \geq \frac{\text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H, q_G)}{2} - \frac{2q_D q_G + q_D + q_G}{2^{\lambda_0}} - \frac{2q_D}{2^{\lambda_1}}.$$

여기서,  $\tau' \leq \tau \cdot q_H \cdot q_G \cdot (T_{\mathcal{F}} + O(1))$ 이고,  $T_{\mathcal{F}}$ 는 트랩도어 치환  $\mathcal{F}$ 의 시간 복잡도를 의미한다.

### 4.1 증명: Reduction and simulation



먼저, 공격자  $\mathcal{B}$ 가  $\mathcal{O}^H$ 를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자  $\mathcal{A}$ 가 랜덤 오라클  $\mathcal{O}^H$ 에  $\delta$ 를 질의했다고 하자. 공격자  $\mathcal{B}$ 는 다음과 같이  $H_\delta$ 를 응답한다.

- 만약  $\delta$ 가  $\mathcal{L}_H$ 에 있다면,  $\delta$ 에 대응하는  $H_\delta$ 를 응답한다. (즉,  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ )
- 만약  $\delta$ 가  $\mathcal{L}_H$ 에 없다면,  $H_\delta \stackrel{\$}{\leftarrow} \{0, 1\}^{\lambda_0}$ 을 수행한 후  $H_\delta$ 를 응답한다. 이후  $\mathcal{L}_H \leftarrow \mathcal{L}_H \cap (\delta, H_\delta)$ 를 수행한다.

다음으로, 공격자  $\mathcal{B}$ 가  $\mathcal{O}^G$ 를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자  $\mathcal{A}$ 가 랜덤 오라클  $\mathcal{O}^G$ 에  $\gamma$ 를 질의했다고 하자. 공격자  $\mathcal{B}$ 는 다음과 같이  $G_\gamma$ 를 응답한다.

- 만약  $\gamma$ 가  $\mathcal{L}_G$ 에 있다면,  $\gamma$ 에 대응하는  $G_\gamma$ 를 응답한다.

- 만약  $\gamma$ 가  $\mathcal{L}_G$ 에 없다면, 다음 과정을 진행한다.

- 어떤  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ 에 대해, 만약  $c^* = \mathcal{F}_{\text{pk}}(\delta, \gamma \oplus H_\delta)$ 라면, 우리는 여전히  $G$ 를 올바르게 시뮬레이션할 수 있다. 이 때 응답은  $G_\gamma \leftarrow \delta \oplus (m_b \parallel 0^{\lambda_1})$ 이다.  $\delta = s^*$ 이고  $s^*$ 가 균등하게 분포하므로  $G_\gamma$ 는 균등 분포된 값이 된다.

- 모든  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ 에 대해, 만약  $c^* \neq \mathcal{F}_{\text{pk}}(\delta, \gamma \oplus H_\delta)$ 라면,  $G_\gamma \leftarrow \{0, 1\}^{n+\lambda_1}$ 를 수행한다.

- $G_\gamma$ 를 응답한 후,  $\mathcal{L}_G \leftarrow \mathcal{L}_G \cap (\gamma, G_\gamma)$ 를 수행한다.

마지막으로, 공격자  $\mathcal{B}$ 가  $\mathcal{O}^D$ 를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자  $\mathcal{A}$ 가 랜덤 오라클  $\mathcal{O}^D$ 에  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s, t)$ 를 질의했다고 하자. 공격자  $\mathcal{B}$ 는 다음과 같이 응답한다.

- $\mathcal{L}_G$ 의 질의 응답 쌍  $(\gamma, G_\gamma) \in \mathcal{L}_G$  및  $\mathcal{L}_H$ 의  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ 를 조회하고, 각 리스트에서 선택된 쌍에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma = \delta, \quad \tau = \gamma \oplus H_\delta, \quad \mu = G_\gamma \oplus \delta.$$

만약  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(\sigma, \tau)$ 이면서  $[\mu]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 라면,  $[\mu]^n$ 을 응답한다.

- 그 외에는 Reject를 응답한다.

## 4.2 증명: 사건 정의

Table 1: 오라클 관련 사건 정의

AskG	$r^*$ 가 $\mathcal{O}^G$ 에 질의되었을(has been asked) 사건.
AskH	$s^*$ 가 $\mathcal{O}^H$ 에 질의되었을 사건.
GBad	$\mathcal{O}^G$ 에 $r^*$ 를 질의했지만, $\mathcal{O}^G$ 의 응답이 $s^* \oplus (m_b \parallel 0^{sk})$ 가 아닌 사건. GBad가 발생하면, AskG도 발생한다.
DBad	CPA 시나리오에서 복호화가 실패하는 사건.
Bad	GBad $\vee$ DBad.

공격자  $\mathcal{A}$ 는 복호화 오라클  $\mathcal{O}^D$ 에 암호문  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s, t)$ 를 질의할 수 있다. 질의한 암호문  $c$ 와 관련된 사건을 다음 표와 같이 정의한다.

## 4.3 증명: Analysis of the Decryption Oracle Simulation

**보조정리 2.**  $s^*$ 가  $\mathcal{O}^H$ 에 질의되지 않았을 때,  $\mathcal{O}^D$ 는 질의된 암호문  $c$  ( $c \neq c^*$ )에 대해 출력을 정확히 생성할 수 있으며, 이 확률은 다음보다 크거나 같다.

$$1 - \left( \frac{2}{2^{k_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{k_0}} \right).$$

또한, 시간 제한  $t' \leq q_G \cdot q_H \cdot (T_F + O(1))$  내에서 이를 수행할 수 있다.

Table 2: 복호화 시뮬레이션 관련 사건 정의

SBad	$s = s^*$ 인 사건.
RBad	$r = r^*$ 인 사건. 즉, $H(s) \oplus t = H(s^*) \oplus t^*$ 인 사건.
CBad	$\text{SBad} \vee \text{RBad}$ .
AskR	$r \circ \mathcal{O}^G$ 에 질의되었을 사건. 즉, $H(s) \oplus t$ 이 질의되었을 사건
AskS	$s$ 가 $\mathcal{O}^H$ 에 질의되었을 사건.
AskRS	$\text{AskR} \wedge \text{AskS}$
Fail	복호화 오라클이 질의 $c$ 에 대해 잘못 응답하는 사건. $i$ 번째 질의 $c_i$ 에 대해서는 $\text{Fail}_i$ 로 나타낸다. 여기서 $i = 1, \dots, q_D$ 이다. 어떤 $i$ 에 대해서도 $\text{Fail}_i$ 의 확률을 균등하게 평가(evaluate)할 수 있으므로, 여기서는 사용하지 않는다. Fail 사건은 평문 추출기(plaintext extractor)가 실제 복호화 오라클에서는 허용될 암호문을 거부하는 경우로 제한된다. 실제로, 추출기가 암호문을 허용하는 순간, 해당 암호문이 유효하며 출력 평문과 일치함을 알 수 있다.

*Proof.* 본 증명에서는 다음이 참임을 보인다.

$$\Pr[\text{Fail} \mid \neg \text{AskH}] \leq \frac{2}{2^{\lambda_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{\lambda_0}}.$$

$\Pr[\text{Fail} \mid \neg \text{AskH}]$ 는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\Pr[\text{Fail} \wedge \text{CBad} \mid \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \neg \text{CBad} \mid \neg \text{AskH}].$$

본 증명에서는 먼저  $\Pr[\text{Fail} \wedge \text{CBad} \mid \neg \text{AskH}]$ 를 구한다.  $\text{CBad} = \text{SBad} \vee (\text{RBad} \wedge \neg \text{SBad})$ 를 이용하여, 이 확률을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{Fail} \wedge \text{CBad} \mid \neg \text{AskH}] \\ &= \Pr[\text{Fail} \wedge (\text{SBad} \vee (\text{RBad} \wedge \neg \text{SBad})) \mid \neg \text{AskH}] \\ &= \Pr[(\text{Fail} \wedge \text{SBad}) \vee (\text{Fail} \wedge \text{RBad} \wedge \neg \text{SBad}) \mid \neg \text{AskH}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \wedge \text{SBad} \mid \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \text{RBad} \wedge \neg \text{SBad} \mid \neg \text{AskH}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \wedge \text{SBad} \mid \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{RBad} \wedge \neg \text{SBad} \mid \neg \text{AskH}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \mid \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{RBad} \mid \neg \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}]. \\ &= \Pr[\text{Fail} \wedge \text{AskR} \mid \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \neg \text{AskR} \mid \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{RBad} \mid \neg \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}]. \\ &\leq \Pr[\text{AskR} \mid \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{Fail} \mid \neg \text{AskR} \wedge \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] + \Pr[\text{RBad} \mid \neg \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}]. \end{aligned}$$

세 번째 사건은  $s \neq s^*$ 이고 공격자  $\mathcal{A}$ 가  $s^*$ 에 대해  $\mathcal{O}^H$ 에 질의하지 않았을 때 RBad가 발생함을 의미한다.  $s^*$ 가  $\mathcal{O}^H$ 에 질의되지 않았고  $s \neq s^*$ 일 때,  $H(s^*)$ 는 예측 불가능(unpredictable)하며  $H(s)$ 뿐 아니라  $t, t^*$ 와도 독립적이다. 이때 RBad 사건,  $H(s^*) = H(s) \oplus t \oplus t^*$ 는 최대  $2^{-\lambda_0}$ 의 확률로 발생한다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\text{RBad} \mid \neg \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] \leq 2^{-\lambda_0}.$$

첫 번째 사건은  $s = s^*$ 이며  $H(s^*)$ 는 예측 불가능할 때,  $r \circ \mathcal{O}^G$ 에 대해 질의되었을 사건을 의미한다. 이때,  $H(s)$  또한 예측 불가능하다. 즉,  $r = H(s) \oplus t$ 가 예측 불가능하므로,  $r$ 이  $\mathcal{O}^G$ 에 질의되었을 확률은 최대  $q_G \cdot 2^{-\lambda_0}$ 이다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\text{AskR} \mid \text{SBad} \wedge \neg \text{AskH}] \leq q_G \cdot 2^{-\lambda_0}.$$

두 번째 사건은 복호화 시뮬레이션에서  $H(s)$ 는 예측 불가능하고  $r$ 은  $\mathcal{O}^G$ 에 질의되지 않았을 때, 유효한 암호문  $c$ 를 거부하는 경우이다. 페이스텔 네트워크(Feistel network)의 일대일 성질에 따라  $s = s^*$ 이면  $r \neq r^*$ 이고, 따라서  $G(r)$ 는 예측 불가능하다. 그러므로 이 경우 중복 조건은  $2^{-\lambda_1}$ 보다 큰 확률로 성립할 수 없다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\text{Fail} \mid \neg\text{AskR} \wedge \text{SBad} \wedge \neg\text{AskH}] \leq 2^{-\lambda_1}.$$

세 식을 결합하면, 다음과 같다.

$$\Pr[\text{Fail} \wedge \text{CBad} \mid \neg\text{AskH}] \leq 2^{-k_1} + (q_G + 1) \cdot 2^{-k_0}.$$

다음으로,  $\Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \mid \neg\text{AskH}]$ 를 계산하고 본 증명을 마친다. 만약  $\neg\text{CBad} \wedge \text{AskRS}$ 가 성립한다면, 복호화 시뮬레이션은 실패하지 않는다. 따라서 이 식은 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \mid \neg\text{AskH}] \\ &= \underbrace{\Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \wedge \text{AskRS} \mid \neg\text{AskH}]}_{=0} + \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \wedge \neg\text{AskRS} \mid \neg\text{AskH}] \\ &= \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \wedge \neg\text{AskRS} \mid \neg\text{AskH}]. \end{aligned}$$

이제  $\neg\text{AskH}$ 를 잠시 고려하지 않고, 위 확률을 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \wedge \neg\text{AskRS}] \\ &= \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge (\neg\text{AskR} \vee \neg\text{AskS})] \\ &= \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge (\neg\text{AskR} \vee (\neg\text{AskS} \wedge \text{AskR}))] \\ &= \Pr[(\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge \neg\text{AskR}) \vee (\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge (\neg\text{AskS} \wedge \text{AskR}))] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge \neg\text{AskR}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{SBad} \wedge \neg\text{AskS} \wedge \text{AskR}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{AskR}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \text{AskR} \wedge \neg\text{AskS} \wedge \neg\text{SBad}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{RBad} \mid \neg\text{AskR}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \text{AskR} \mid \neg\text{AskS} \wedge \neg\text{SBad}] \\ &\leq \Pr[\text{Fail} \mid \neg\text{RBad} \wedge \neg\text{AskR}] + \Pr[\text{AskR} \mid \neg\text{AskS} \wedge \neg\text{SBad}]. \end{aligned}$$

첫 번째 사건에서,  $r$ 이  $\mathcal{O}^G$ 에 대해 질의되지 않았고, 추가로  $r \neq r^*$ 인 사건을 고려하면,  $G(r)$ 는 예측할 수 없으며, 따라서  $[s \oplus G(r)]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 이 될 확률은  $2^{-\lambda_1}$ 보다 작다. 그리고 두 번째 사건에서,  $H(s)$ 에 대한 정보 없이  $r$ 이  $\mathcal{O}^G$ 에 대해 질의될 확률은  $q_G \cdot 2^{-\lambda_0}$ 보다 작다. 또한, 이 사건은  $\text{AskH}$ 와 독립적이므로 다음이 성립한다.

$$\Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \wedge \neg\text{AskRS} \mid \neg\text{AskH}] \leq 2^{-\lambda_1} + q_G \cdot 2^{-\lambda_0}.$$

그러므로, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pr[\text{Fail} \mid \neg\text{AskH}] &= \Pr[\text{Fail} \wedge \text{CBad} \mid \neg\text{AskH}] + \Pr[\text{Fail} \wedge \neg\text{CBad} \mid \neg\text{AskH}] \\ &\leq (2^{-\lambda_1} + (q_G + 1) \cdot 2^{-\lambda_0}) + (2^{-\lambda_1} + q_G \cdot 2^{-\lambda_0}). \\ &= \frac{2}{2^{\lambda_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{\lambda_0}}. \end{aligned}$$

이 시뮬레이터의 실행 시간은 가능한 모든 쌍에 대해  $\mathcal{F}_{\text{pk}}(\sigma, \tau)$ 를 계산하는 시간만 포함되며, 따라서 그 시간은 다음과 같이 상한된다.

$$q_G \cdot q_H \cdot (T_{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(1)).$$

□

## 5 Journal of Cryptology

본 절에서는 Journal of Cryptology의 RSA-OAEP is Secure under the RSA Assumption 논문 내용을 정리했다. 기존 논문과 달리 여기서는 여러 개의 GAME을 정의해, 각 GAME의 성공 확률 차이를 활용하여 공격자의 능력치 관계를 표현한다.

### 5.1 랜덤 오라클 시뮬레이터

랜덤 오라클 시뮬레이터  $H$ 를 다음과 같이 정의한다.

$H$ 에 대해 새로운 질의  $\delta$ 가 들어오면, 시뮬레이터는 무작위 값을  $H_\delta$ 로 출력하고, 쌍  $(\delta, H_\delta)$ 를 리스트  $\mathcal{L}_H$ 에 추가한다.

랜덤 오라클 시뮬레이터  $G$ 를 다음과 같이 정의한다.

- $G$ 에 대해 새로운 질의  $\gamma$ 가 들어오면, 시뮬레이터는  $H$ 의 리스트  $\mathcal{L}_H$ 를 살펴보고,  $H$ 에 대해 어떤  $\delta$ 가 질의되었는지를 확인한다.
- 각  $H_\delta$ 에 대해  $z = \gamma \oplus H_\delta$ 를 계산하고,  $c^* = \mathcal{F}_{pk}(\delta, z)$ 가 성립하는지 확인한다. 만약 어떤  $\delta$ 에 대해 이 관계가 성립한다면, 시뮬레이터는  $G$ 의 응답을 다음과 같이 줄 수 있다.

$$G_\gamma = \delta \oplus (m_b \parallel 0^{\lambda_1}).$$

이때  $\delta = s^*$ 이고,  $s^*$ 은 균등하게 분포된 값이므로,  $G_\gamma$ 도 균등 분포된(random) 값이다.

- 그렇지 않은 경우에는  $G_\gamma$ 를 랜덤한 값으로 정의한다. 두 경우 모두  $(\gamma, G_\gamma)$ 를  $G$ 의 리스트  $\mathcal{L}_G$ 에 추가한다.

**메모 5.1.** 만약 도전 암호문  $c^*$ 가 결정되기 전에  $G$ 에 질의한다면,  $G_\gamma$ 를 무작위 값으로 설정하여 응답한다.

### 5.2 평문 추출기

**메모 5.2.** 평문 추출기(plaintext extractor)를 이해하기 위해서는 Plaintext Awareness 개념을 알아야 하는 듯 하다. 여기서는 간단하게 이해하자면, 평문 추출기는 시뮬레이터가 그 오라클을 흉내 내기 위해 만든 도구이다. 실제 복호를 하는 것이 아니고, 복호 결과를 추출하는 의미로 평문 추출기로 부른다.

평문추출기  $\mathcal{PE}$ 를 다음과 같이 정의한다.

평문 추출기  $\mathcal{PE}$ 의 입력은 다음과 같다.

- 무작위 오라클  $G, H$ 에 대한 질의 응답 쌍을 모아 놓은 두 개의 리스트  $\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_H$ .
- 유효한 암호문  $c^*$ .
- 후보 암호문  $c$ . 이때,  $c \neq c^*$ 이다.

추출기  $\mathcal{PE}$ 의 동작 방식은 다음과 같다.

- 암호문  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel t)$ 가 주어지면,  $\mathcal{L}_G$ 에 있는 모든  $(\gamma, G_\gamma)$ 와  $\mathcal{L}_H$ 에 있는 모든  $(\delta, H_\delta)$ 에 대해 다음을 계산한다.

$$\sigma = \delta, \quad \theta = \gamma \oplus H_\delta, \quad \mu = G_\gamma \oplus \delta.$$

- 그리고 다음 조건을 검사한다.

$$c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(\sigma \parallel \theta) \quad \text{and} \quad [\mu]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}.$$

- 조건이 만족되면,  $\mathcal{PE}$ 는  $\mu$ 의 앞부분, 즉  $[\mu]^n$ 을 평문으로 출력하고 종료한다. 조건을 만족하는 조합이 없다면,  $\mathcal{PE}$ 는 Reject 메시지를 반환한다.

리스트의 순서에 관계없이,  $\mathcal{PE}$ 의 출력은 항상 유일하게 정의된다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 함수  $\mathcal{F}$ 가 순열이므로,  $\sigma = s$ 는 유일하게 결정되고, 따라서  $\delta$ 도 유일하게 결정된다. 또한  $\mathcal{L}_G$ 와  $\mathcal{L}_H$ 는 각각 함수  $G$ 와  $H$ 에 대한 입력 출력 쌍들이며, 하나의 입력에 대해 대응되는 출력은 최대 하나이기 때문에,  $H_\delta$  역시 유일하게 결정된다. 마찬가지로  $\theta = t$ 도 유일하게 결정되며, 따라서  $\gamma$ 와  $G_\gamma$ 도 유일하게 결정된다. 결국 선택될 수 있는  $\mu$ 는 최대 하나이며, 그 출력 여부는 조건  $[\mu]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 을 만족하는지에 따라 결정된다.

**메모 5.3.** 원래 복호화 오라클은 출력이 항상 유일하게 정의되기 때문에,  $\mathcal{PE}$ 의 출력도 항상 유일하게 정의됨을 보여야 한다. 공격자가  $\mathcal{PE}$ 에 같은 입력을 넣었을 때, 다른 출력을 얻으면 안된다. 순열이 아니여도  $\mathcal{F}$ 가 일대일 함수라면 여전히  $\mathcal{PE}$ 의 출력이 유일할 것 같다.

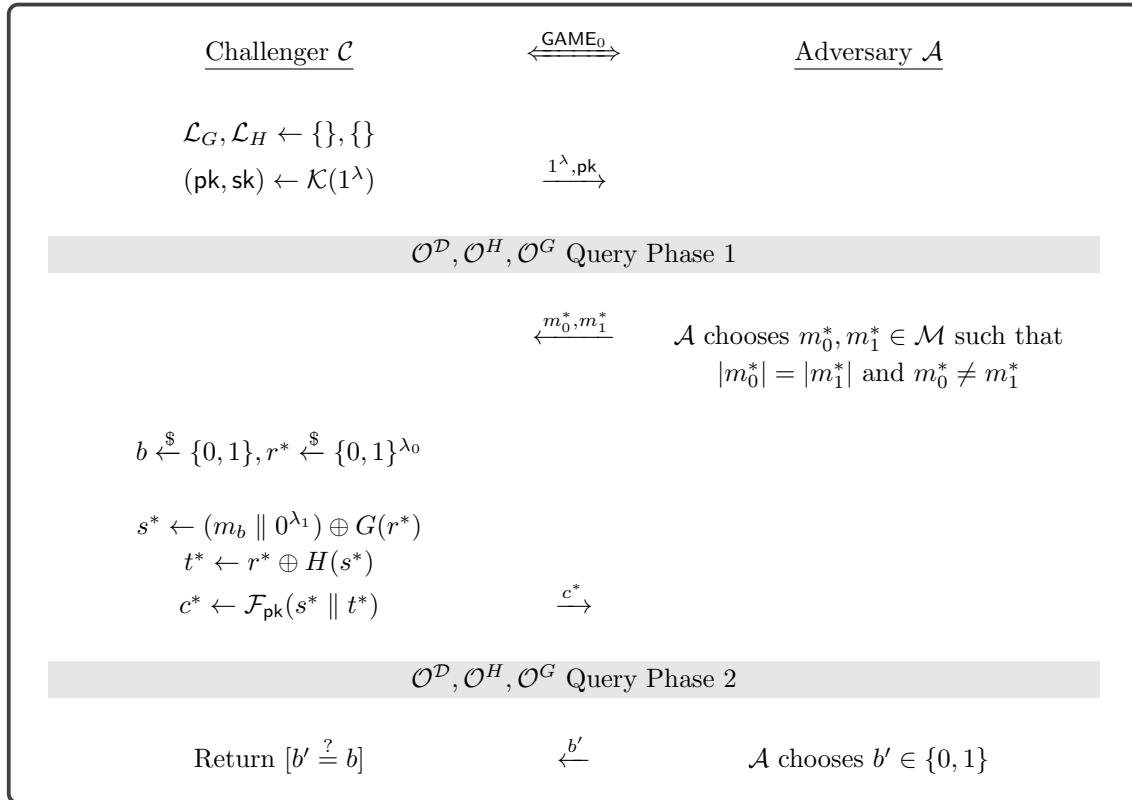
### 5.3 게임 구성

이후에서  $c^*$ 는 암호화 오라클로부터 얻은 도전 암호문을 의미한다. 우리는 복호화 오라클 대신 평문 추출기를 사용하는 상황을 상정하고 있으며, 의미론적 보안을 모순시키려는 맥락에서,  $c^*$ 가 메시지  $m_b$ 에 대한 암호문이라고 가정한다. 또한  $c^*$ 의 난수 시드를  $r^*$ 라고 표기한다. 이때 다음 관계가 성립한다.

$$r^* = H(s^*) \oplus t^* \quad \text{and} \quad G(r^*) = s^* \oplus (m_b \parallel 0^{\lambda_1})$$

이후의 모든 별표가 없는 변수들은 복호화 질의에 해당한다. 우리는 이제 이전 증명의 간단한 확장으로서, 복호화 오라클을 활용하는 완전한 증명을 제시한다. 이 증명에서는 앞서 정의한 평문 추출기가 실패할 수 있는 모든 경우를 순차적으로 배제해가며 논리를 전개한다.

#### 5.3.1 0 번째 게임

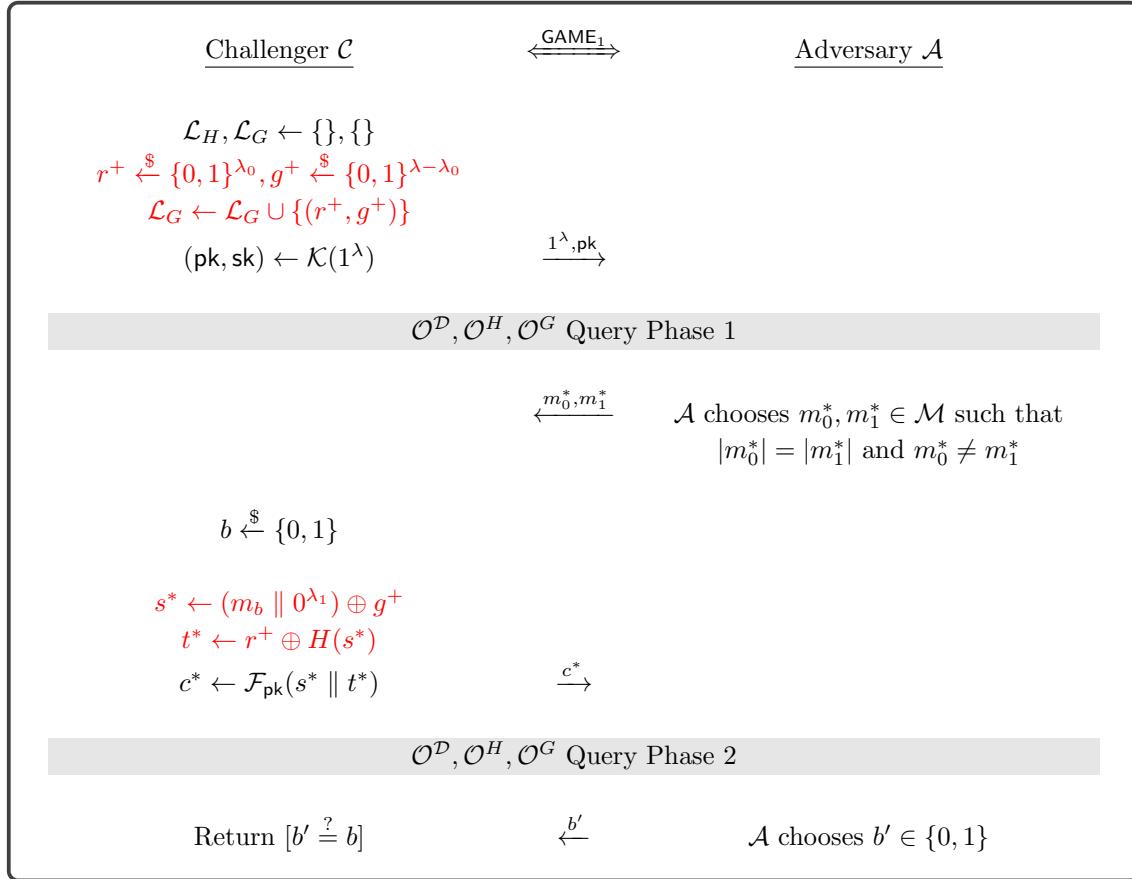


**메모 5.4.** GAME0는 IND-CCA2 실험과 동일하다. 여기서 사용하는 복호화 오라클  $\mathcal{O}^D$ 는 평문 추출기가 아니라는 점에 주의한다.

GAME0에서 공격자는 도전 암호문을 복호화 오라클에 질의할 수 없다. 이벤트  $S_0$ 는 GAME0가 1을 반환하는 사건을 의미하며, 이후 게임 단계에서도 유사하게  $S_i$ 로 표기한다. 정의에 따라, 다음이 성립한다.

$$\text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H, q_G) = 2 \cdot \left| \Pr[S_0] - \frac{1}{2} \right|.$$

## 5.3.2 1 번째 게임



GAME<sub>1</sub>에서는 난수 시드  $r^*$ 의 값을 명시적으로 드러내고, 그 생성을 게임 초반으로 이동시키는 것이다. 즉, 사전에 무작위로 다음 값을 선택한다:

$$r^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{\lambda_0}, \quad g^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{\lambda-\lambda_0}.$$

그리고 이후부터는  $r^*$  대신  $r^+$ ,  $G(r^*)$  대신  $g^+$ 를 사용한다.

**메모 5.5.** GAME<sub>0</sub>에서  $s^*$ 를 만들 때,  $r^*$ 를  $G$ 에 통과시켜  $G(r^*)$ 를 구하고,  $G(r^*)$ 를 이용하여  $s^*$ 를 만든다. 그러나 GAME<sub>0</sub>에서는  $G(r^*)$ 를 계산하지 않는다. 대신  $g^+$ 를 무작위로 생성하고,  $g^+$ 를 이용하여  $s^*$ 를 만든다.

GAME<sub>1</sub>은 다음 두 규칙을 따른다.

- $r^* = r^+, s^* = (m_b \parallel 0^{\lambda_1}) \oplus g^+$ 이고, 이로부터 다음이 유도된다.

$$t^* = r^+ \oplus H(s^*), \quad c^* = f(s^* \parallel t^*).$$

- 무작위 오라클  $G$ 에 대해  $r^+$ 로 질의가 들어오면, 응답은 항상  $g^+$ 이다.

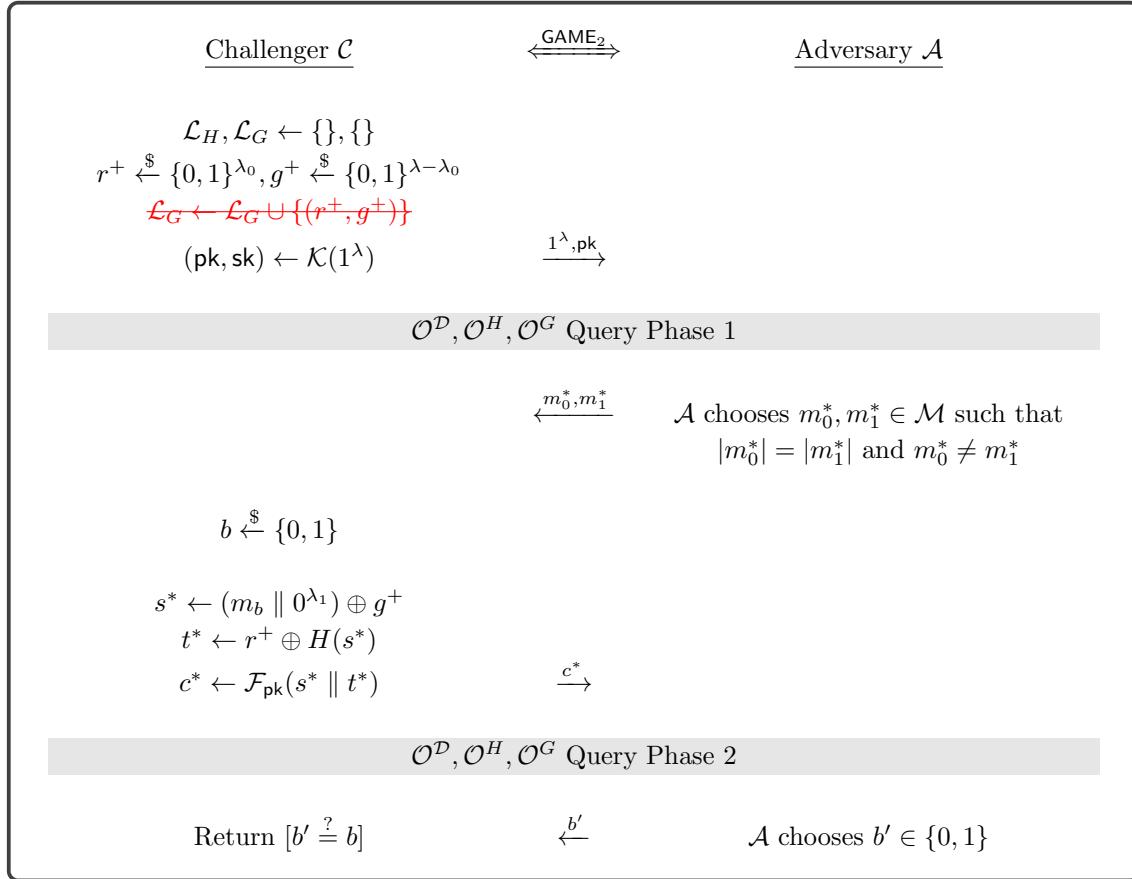
**메모 5.6.** 즉, GAME<sub>0</sub>에서 GAME<sub>1</sub>으로 바뀌면서 달라진 것은,  $G(r^*)$  대신 무작위 값을 사용하여  $s^*$ 를 만든다는 점 뿐이라고 생각하면 된다.

우리는  $(r^*, G(r^*))$  쌍을 정확히 동일한 분포를 가지는  $(r^+, g^+)$ 로 대체한 것이므로 다음을 만족한다.

$$\Pr[S_1] = \Pr[S_0].$$

**메모 5.7.** GAME<sub>1</sub>으로 바뀌면서 달라진 것은  $G(r^*)$  대신 무작위 값  $g^+$ 을 사용한다는 점이다.  $g^+$ 는 균등분포,  $G(r^*)$ 도 무작위 오라클 정의에 의해 균등분포, 즉, 동일한 확률분포를 가진다. 그 외 모든 구조가 동일하므로, 공격자는 GAME<sub>0</sub>와 GAME<sub>1</sub>에서 동일한 전략을 사용한다. 따라서,  $\Pr[S_1] = \Pr[S_0]$  을 만족한다.

## 5.3.3 2 번째 게임



이 게임에서는 위에서 정의한 두 번째 규칙을 제거하고, 무작위 오라클  $G$ 에 대한 질의를 원래대로 복원한다. 따라서  $g^+$ 는  $s^*$ 를 구성할 때만 사용되고, 그 이후 계산에는 전혀 등장하지 않는다. 이로 인해,  $\mathcal{A}$ 의 입력은 비트  $b$ 에 의존하지 않는 확률 분포를 따르게 된다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\Pr[S_2] = \frac{1}{2}.$$

**예모 5.8.**  $g^+$ 는 무작위로 생성한 값으로,  $s^* = (m_b \parallel 0^{\lambda_1}) \oplus g^+$ 를 계산할 때 외에는 전혀 등장하지 않는다. 원래는  $r^+$ 를  $G$ 에 질의하면  $g^+$ 가 나오는 두 번째 룰에 의해  $g^+$ 가 등장했었기 때문에, 공격자가  $G$ 에  $r^+$ 를 질의하면 정보를 얻을 수 있었으나, 이젠 얻을 수 없다. 따라서 공격자가 어떤  $m_0, m_1$ 을 보내더라도 이와 무관하게 무작위값  $g^+$ 가 사용된다. 그래서  $\mathcal{A}$ 가 입력  $c^*$ 를 받았을 때 이 게임의 성공확률은 정확히  $1/2$ 이다.

$\text{GAME}_1$ 과  $\text{GAME}_2$ 는  $r^*$ 가 오라클  $G$ 에 질의되는 경우에 한해 서로 다를 수 있다.

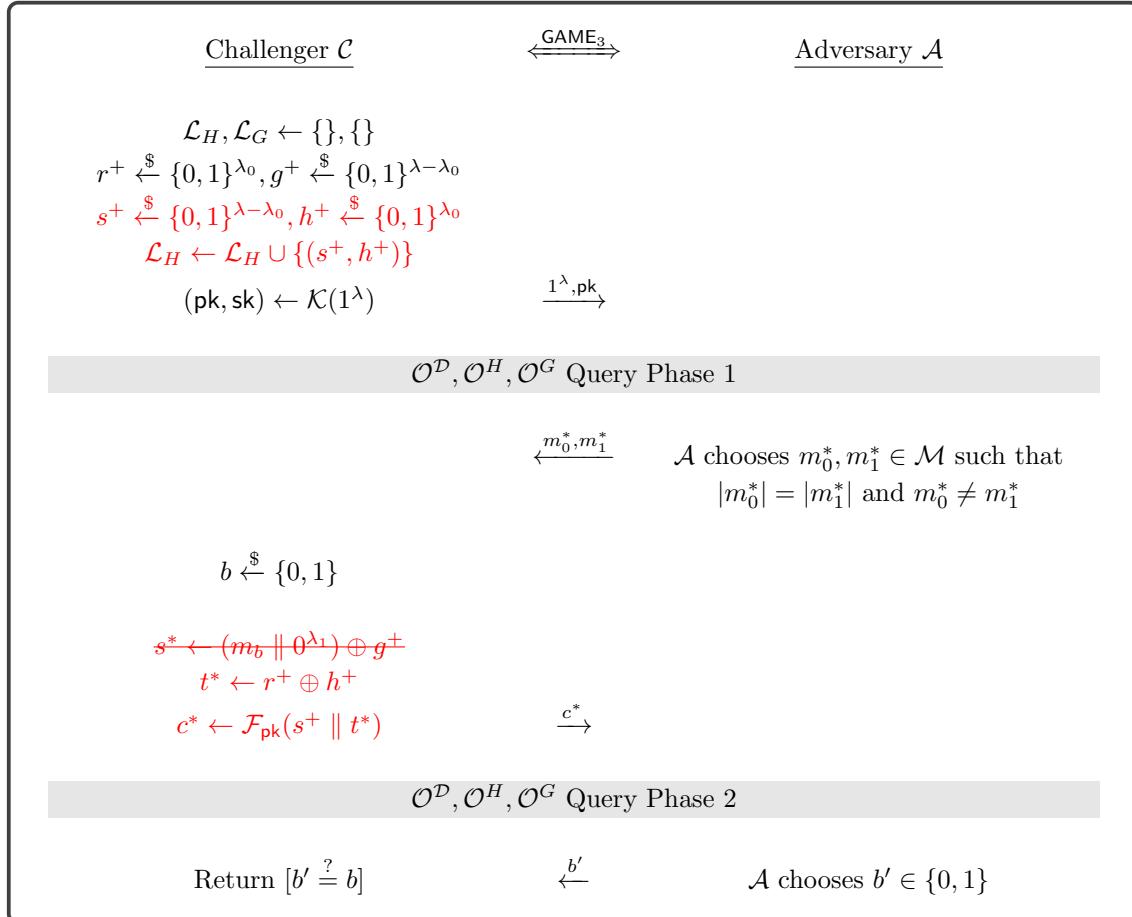
**예모 5.9.**  $\text{GAME}_1$ 에서는  $G(r^*)$ 가  $g^+$ 로 설정되어  $r^*$ 를 질의할 때  $g^+$ 를 응답하지만,  $\text{GAME}_2$ 에서는  $r^*$ 를 질의하면, 무작위 값을 응답한다. 응답한 무작위 값이 우연히  $g^+$ 일 수 있지만, 거의 다르다.  $r^*$ 가 아닌 다른 값을 질의하는 경우는 두 게임에서 오라클  $G$ 는 동일하게 동작하지만,  $r^*$ 가 질의하면 다르게 동작한다. 따라서,  $r^*$ 가 오라클  $G$ 에 질의되는 경우에 한해 두 게임이 서로 다르게 동작할 수 있다.

$\text{AskG}_2$ 는  $\text{GAME}_2$ 에서  $r^*$ 가 공격자에 의해 오라클  $G$ 에 질의되는 사건이다. 이후에서 우리는 모든  $\text{GAME}_i$ 에 대해 동일한 표기  $\text{AskG}_i$ 를 사용한다. 보조정리(Appendix 참고)에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$|\Pr[S_2] - \Pr[S_1]| \leq \Pr[\text{AskG}_2].$$

**메모 5.10.** 오라클  $G$ 에 질의하는 사건을 고려할 때, 공격자 뿐만 아니라 복호화 오라클이  $G$ 에 질의하는 것도 고려한다. 즉,  $\text{Ask}_G$ 는 공격자 및 복호화 오라클에 의해  $r^*$ 가  $G$ 에 질의되는 사건을 의미한다. 복호화 오라클은  $(s, t) \leftarrow g(c)$ 를 계산한 뒤  $r \leftarrow t \oplus H(s)$  및  $M \leftarrow G(r) \oplus s$ 를 계산하는데, 이 때  $r$ 이  $G$ 에 질의된다.

## 5.3.4 3 번째 게임

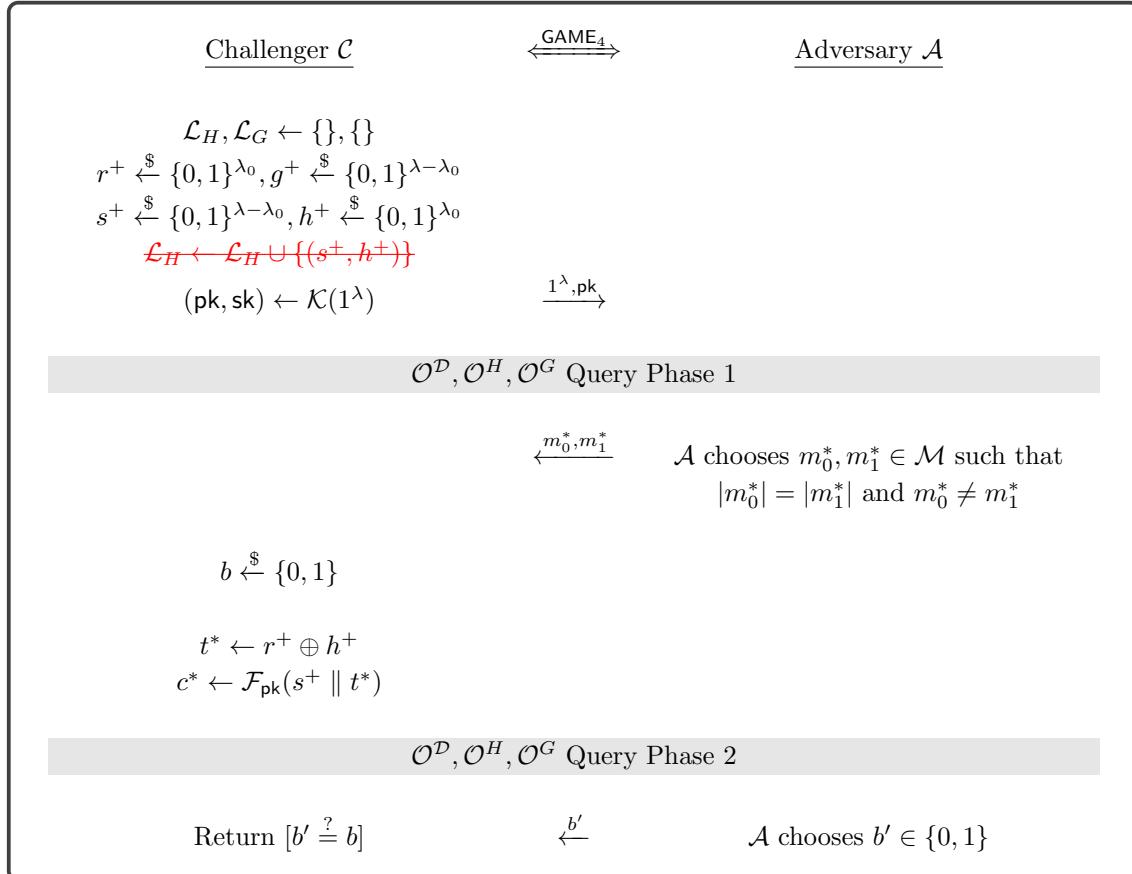


이번에는  $s^+ \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^{\lambda - \lambda_0}, h^+ \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^{\lambda_0}$ 를 무작위로 선택하고,  $s^*$  대신  $s^+, H(s^*)$  대신  $h^+$ 를 사용한다. 게임의 규칙은 GAME<sub>2</sub>와 유사하다. 이 때, 다음을 만족한다.

$$\Pr[\text{AskG}_3] = \Pr[\text{AskG}_2].$$

**메모 5.11.** GAME<sub>2</sub>에서 GAME<sub>3</sub>로 변경하는 과정은 GAME<sub>0</sub>에서 GAME<sub>1</sub>으로 변경하는 과정과 유사하다. GAME<sub>1</sub>에서 설명한 것과 마찬가지로,  $(s^*, H(s^*))$ 와  $s^+, h^+$ 의 확률분포는 동일하다. 즉, 공격자는 두 게임에서 동일하게 동작하며,  $G$ 에 질의하는 동작도 동일하다. 따라서,  $\Pr[\text{AskG}_3] = \Pr[\text{AskG}_2]$ 를 만족한다.

## 5.3.5 4 번째 게임



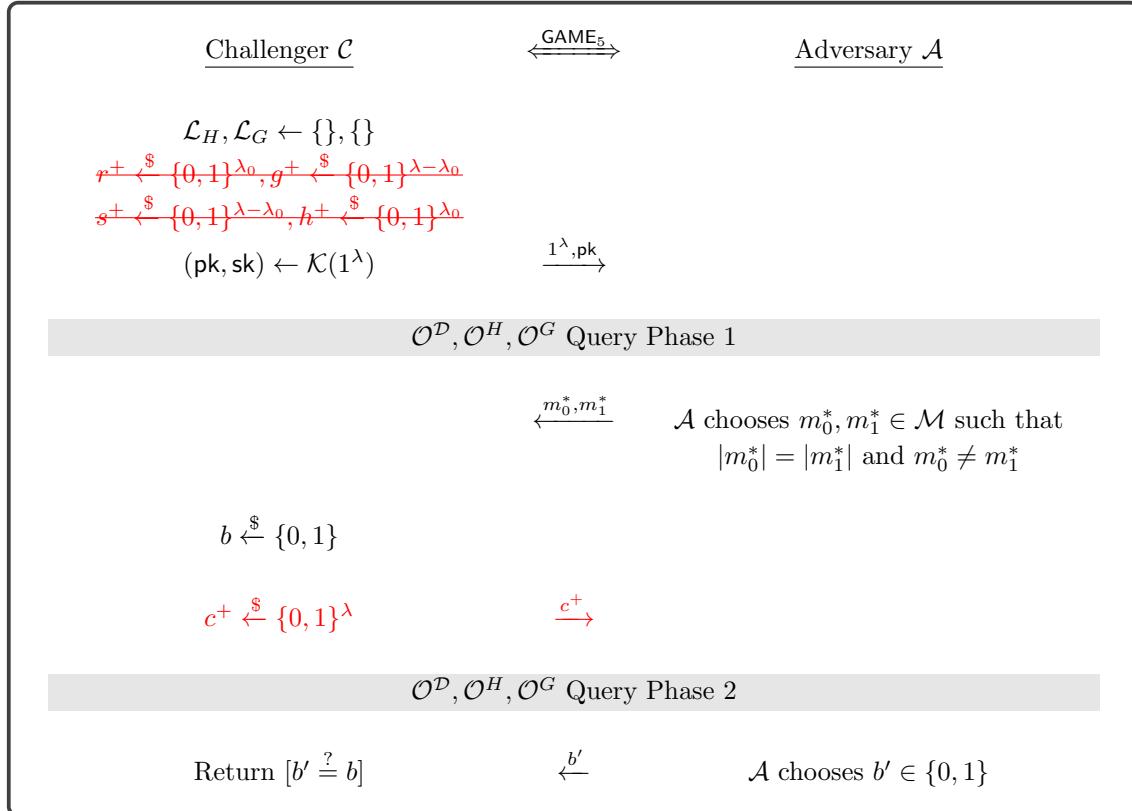
이번 게임에서는 GAME<sub>3</sub>의 두 번째 규칙을 제거한다. 그러면 GAME<sub>2</sub>와 유사하게, 다음이 성립한다.

$$|\Pr[\text{AskG}_4] - \Pr[\text{AskG}_3]| \leq \Pr[\text{AskH}_4].$$

여기서 AskH<sub>4</sub>는 GAME<sub>4</sub>에서 공격자 또는 복호화 오라클에 의해  $s^*$ 가  $H$  오라클에 질의되는 사건을 나타낸다.

**메모 5.12.** GAME<sub>3</sub>와 GAME<sub>4</sub>에서 공격자가  $H$ 에  $s^*$ 가 아닌 다른 값을 질의하면 두 게임에서  $H$ 는 동일하게 동작하지만,  $s^*$ 를 질의하면, GAME<sub>3</sub>의 오라클은  $h^+$ 를, GAME<sub>4</sub>의 오라클은 무작위 값을 응답하기 때문에 공격자의 동작이 달라질 수 있다. 따라서 위 부등식을 만족한다. 이 도출 과정은 GAME<sub>2</sub>에서 부등식 도출 과정과 유사하다.

## 5.3.6 5 번째 게임



$\text{GAME}_5$ 에서는 챌린지 암호문  $c^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$ 을 무작위로 선택하고, 단순히  $c^* = c^+$ 로 설정한다. 이 경우 다음을 만족한다.

$$\Pr[\text{AskH}_5] = \Pr[\text{AskH}_4].$$

**예모 5.13.**  $\text{GAME}_4$ 에서  $s^*$ 와  $t^*$ 는  $g^+$ 와  $h^+$ 에 의해 균등분포를 따른다.  $\mathcal{F}$ 는 순열이므로,  $c^* = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s^* \parallel t^*)$ 도 균등분포를 따른다. 따라서  $c^+$ 와 동일한 균등분포를 따르므로, 공격자는  $\text{GAME}_5$ 에서도 동일하게 동작한다. 그러므로  $\Pr[\text{AskH}_5] = \Pr[\text{AskH}_4]$ 를 만족한다.

### 5.3.7 6 번째 게임

**메모 5.14.** GAME<sub>5</sub>에서 복호화 오라클  $D$ 는 다음과 같이 동작한다.

- $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한 후,  $r = t \oplus H(s), M = s \oplus G(r)$ 을 계산한다.
- 만약  $[M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 이면  $[M]^n$ 을 출력하고, 아니라면 “Reject”를 출력한다.

이번 게임에서는 복호화 오라클이  $c$ 에 대응하는  $r$  값이 공격자에 의해 이전에  $G$  오라클에 질의되지 않았을 때, Reject를 반환하게 만든다.

- $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한 후,  $r = t \oplus H(s)$ 을 계산한다.
- $r \in G$ 에 질의되지 않았다면(즉,  $\mathcal{L}_G$ 에  $r$ 이 없다면), “Reject”를 출력한다.
- $M = s \oplus G(r)$ 을 계산한다.  
(여기서  $G(r)$ 은 계산해서 얻는 것이 아닌,  $\mathcal{L}_G$ 에서 꺼내온 것)
- 만약  $[M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 이면  $[M]^n$ 을 출력하고, 아니라면 “Reject”를 출력한다.

이는  $c$ 가 유효한 암호문인데도  $r \in G$ 에 질의되지 않은 경우에만 차이를 발생시킨다.

**메모 5.15.** GAME<sub>5</sub>에서는 공격자가 이전에  $r$ 을  $G$ 에 질의하지 않았을 때, 복호화 오라클에서  $r$ 을  $G$ 에 질의하고, 우연히 조건  $[s \oplus G(r)]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 가 성립하여 Reject 대신 평문을 반환할 수 있다. 그러나 GAME<sub>6</sub>에서는  $r$   $G$ 에 질의되지 않았다면 무조건 Reject를 반환한다. 즉,  $[s \oplus G(r)]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 가 성립할 때, 두 게임에서 공격자의 전략이 달라질 수 있다.

$G(r)$ 이 균등분포를 따르므로, 다음과 같은 등식이 성립할 확률은 다음과 같다.

$$\Pr[[s \oplus G(r)]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}] = \frac{1}{2^{\lambda_1}}.$$

모든 복호화 질의를 고려하면, 다음 부등식을 얻는다.

$$|\Pr[\text{AskH}_6] - \Pr[\text{AskH}_5]| \leq \frac{q_D}{2^{\lambda_1}}.$$

**메모 5.16.**  $r \in G$ 에 질의되지 않았다는 것은,  $\mathcal{L}_G$  내 모든  $(\gamma, G_\gamma)$ 에 대해  $t = \gamma \oplus H(s)$ 를 계산하면  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel t)$ 가 성립하지 않는다는 것이다( $\mathcal{F}$ 는 순열). 따라서 GAME<sub>7</sub>의 복호화 오라클을 다음과 같이 해석할 수 있다.

- 암호문  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel t)$ 가 주어지면,  $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한다.
- 모든  $(\gamma, G_\gamma) \in \mathcal{L}_G$ 에 대해 다음을 계산한다.

$$\theta = \gamma \oplus H(s), \quad M = s \oplus G_\gamma.$$

- 다음 조건을 검사한다.  
 $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel \theta), \quad [M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}.$
- 조건을 만족하면  $[M]^n$ 을 출력한다. 조건을 만족하는 경우가 없다면 “Reject”를 출력한다.

### 5.3.8 7 번째 게임

이번 게임에서는, 복호화 오라클이  $c$ 에 대응하는  $s$  값이 공격자에 의해 이전에 오라클  $H$ 에 질의되지 않은 경우 Reject를 반환하게 만든다.

- $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한다.
- $s$ 가  $H$ 에 질의되지 않았다면(즉,  $\mathcal{L}_H$ 에  $s$ 가 없다면), Reject를 반환한다.
- $r = t \oplus H(s)$ 을 계산한다.  
(여기서  $H(s)$ 은 계산해서 얻는 것이 아닌,  $\mathcal{L}_H$ 에서 꺼내온 것)
- $r \circ | G$ 에 질의되지 않았다면(즉,  $\mathcal{L}_G$ 에  $r$ 이 없다면), “Reject”를 출력한다.
- $M = s \oplus G(r)$ 을 계산한다.  
(여기서  $G(r)$ 은 계산해서 얻는 것이 아닌,  $\mathcal{L}_G$ 에서 꺼내온 것)
- 만약  $[M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$ 이면  $[M]^n$ 을 출력하고, 아니라면 “Reject”를 출력한다.

이 변경은  $c$ 가 유효한 암호문이고,  $r$ 은 오라클  $G$ 에 이미 질의된 반면,  $s$ 는 여전히  $H$ 에 질의되지 않았을 경우에만 차이를 발생시킨다.

**메모 5.17.** 이는 GAME<sub>6</sub>에서의 변경과 비슷하다.

$r = H(s) \oplus t$ 는 균등 분포를 따르므로,  $r$ 이  $G$ 에 질의되었을 확률은  $q_G/2^{\lambda_0}$ 보다 작다. 이전 게임에서는 복호화 오라클이  $G$ 에 추가 질의를 하지 않는다는 점에 유의한다.

**메모 5.18.** GAME<sub>7</sub>에서는  $s$ 가  $H$ 에 질의되지 않았다면, 무조건 Reject를 반환하지만, GAME<sub>6</sub>에서는 복호화 오라클이  $s$ 를  $H$ 에 질의하여,  $r = H(s) \oplus t$ 를 계산하고,  $r$ 이  $G$ 에 질의되었는지 확인한다. 즉  $r$ 이  $G$ 에 질의되었는지에 따라 유효한 암호문을 출력할 수도 있다. 따라서  $r$ 이  $G$ 에 질의되었는지에 따라 두 게임에서 공격자의 전략이 달라질 수도 있다.

**메모 5.19.** GAME<sub>6</sub>부터 복호화 오라클은  $r$ 을  $G$ 에 질의하지 않는다. 따라서 우리는 공격자의  $G$  오라클 질의만 고려하는 것이 가능하다. 그러므로  $r$ 이  $G$ 에 질의되었을 확률은  $q_G/2^{\lambda_0}$ 보다 작다고 할 수 있다.

모든 복호화 질의를 고려하면 다음 부등식을 얻는다.

$$|\Pr[\mathsf{AskH}_7] - \Pr[\mathsf{AskH}_6]| \leq \frac{q_D q_G}{2^{\lambda_0}}.$$

**메모 5.20.** GAME<sub>6</sub>에서 복호화 오라클을 재해석한 것과 같이, GAME<sub>7</sub>에서도 복호화 오라클을 재해석할 수 있다. 즉,  $r$ 이  $G$ 에 질의되었더라도,  $s$ 가  $H$ 에 질의되지 않았다는 것은, 모든  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ 에 대해  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(\delta \parallel t)$ 가 성립하지 않는다는 것이다.

- 암호문  $c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(s \parallel t)$ 가 주어지면,  $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 을 계산한다.
- 모든  $(\gamma, G_\gamma) \in \mathcal{L}_G$ 와 모든  $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$ 에 대해 다음을 계산한다.

$$\sigma = \delta, \quad \theta = \gamma \oplus H_\delta, \quad M = \delta \oplus G_\gamma.$$

- 다음 조건을 검사한다.

$$c = \mathcal{F}_{\text{pk}}(\delta \parallel \theta), \quad [M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}.$$

- 조건을 만족하면  $[M]^n$ 을 출력한다. 조건을 만족하는 경우가 없다면 “Reject”를 출력한다.

### 5.3.9 8 번째 게임

GAME<sub>8</sub>에서는 복호화 오라클을 평문 추출기로 완전히 대체한다. 평문 추출기는 GAME<sub>7</sub>의 복호화 오라클을 완벽히 시뮬레이션할 수 있다.

**메모 5.21.** GAME<sub>7</sub>의 복호화 오라클을 재해석한 메모를 보면,  $(s, t) = \mathcal{I}_{\text{sk}}(c)$ 를 계산할 필요가 없으므로, 이를 생략하면 이 복호화 오라클은 평문 추출기랑 동일한 형태를 가진다.

따라서, 다음을 만족한다.

$$\Pr[\text{AskH}_8] = \Pr[\text{AskH}_7].$$

또한, 다음을 만족하는 공격자  $\mathcal{B}$ 가 존재한다.

$$\Pr[\text{AskH}_8] \leq \text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{B}; \tau', q_H).$$

**메모 5.22.**  $s^*$ 를 질의하는 공격자  $\mathcal{A}$ 를 서브루틴으로 사용하는 공격자  $\mathcal{B}$ 가 존재할 수 있다. 공격자  $\mathcal{B}$ 는 공격자  $\mathcal{A}$ 의 질의 목록을 그대로 답변한다. (자세한건 이전 세미나에서 Reduction한 그림 참고.)

따라서, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H, q_G) &= |\Pr[S_0] - \Pr[S_2]| \\ &\leq \Pr[\text{AskG}_2] \\ &\leq \Pr[\text{AskG}_4] + \Pr[\text{AskH}_4] \\ &\leq \frac{q_G + q_D}{2^{\lambda_0}} + \Pr[\text{AskH}_5] \\ &\leq \frac{q_G + q_D}{2^{\lambda_0}} + \frac{q_D}{2^{\lambda_1}} + \Pr[\text{AskH}_6] \\ &\leq \frac{q_G + q_D}{2^{\lambda_0}} + \frac{q_D}{2^{\lambda_1}} + \frac{q_D q_G}{2^{\lambda_0}} + \Pr[\text{AskH}_7] \\ &\leq \frac{q_G + q_D + q_D q_G}{2^{\lambda_0}} + \frac{q_D}{2^{\lambda_1}} + \text{Adv}(\mathcal{B}; q_H, \tau'). \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Adv}_{\Pi, \lambda}^{\text{IND-CCA2}}(\mathcal{A}; \tau, q_D, q_H, q_G) \leq \text{Adv}_{\Psi, \lambda}^{\text{S-PD-OW}}(\mathcal{B}; \tau', q_H) + \frac{q_G + q_D + q_D q_G}{2^{\lambda_0}} + \frac{q_D}{2^{\lambda_1}}.$$

## A 보조정리

**보조정리 3.**  $E_1, E_2, F_1, F_2$ 를 하나의 확률 공간 상에 정의된 사건들이라고 하자. 만약

$$\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] = \Pr[E_2 \wedge \neg F_2], \quad \Pr[F_1] = \Pr[F_2] = \varepsilon$$

가 성립한다면, 다음을 만족한다.

$$|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]| \leq \varepsilon$$

*Proof.*  $|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]|$ 은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$|\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] + \Pr[E_1 \wedge F_1] - \Pr[E_2 \wedge \neg F_2] - \Pr[E_2 \wedge F_2]|.$$

가정에 의해  $\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] = \Pr[E_2 \wedge \neg F_2]$ 이므로, 다음과 같이 식을 줄일 수 있다.

$$|\Pr[E_1 \wedge F_1] - \Pr[E_2 \wedge F_2]|.$$

위 식을 조건부 확률로 표현하면 다음과 같다.

$$|\Pr[E_1 | F_1] \cdot \Pr[F_1] - \Pr[E_2 | F_2] \cdot \Pr[F_2]|.$$

가정에 의해  $\Pr[F_1] = \Pr[F_2] = \varepsilon$ 이므로, 위 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon \cdot |\Pr[E_1 | F_1] - \Pr[E_2 | F_2]|.$$

어떤 사건의 조건부 확률은 언제나 0 이상 1 이하이므로,  $|\Pr[E_1 | F_1] - \Pr[E_2 | F_2]| \leq 1$ 을 만족한다. 따라서 다음을 만족한다.

$$|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]| = \varepsilon \cdot |\Pr[E_1 | F_1] - \Pr[E_2 | F_2]| \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

□

**메모 A.1.** 두 사건  $E_1, E_2$ 의 확률이 어떤 Bad 사건  $F$ 가 발생할 때만 차이가 발생한다면, 두 사건의 확률 차이는 Bad 사건의 확률 이하로 조절된다는 의미이다. 암호학에서는, 두 게임 간 차이를 분석할 때 사용할 수 있다. 예를 들어,

- $S_1$ : GAME<sub>1</sub>에서의 성공 사건
- $S_2$ : GAME<sub>2</sub>에서의 성공 사건
- $\varepsilon$ : 각각의 게임에서 발생할 수 있는 Bad 사건의 확률

이라고 할 때, 두 게임이 Bad 사건 외에서는 동일하게 동작하면, 두 게임의 성공 확률 차이는 Bad 사건의 확률 이하로 상한된다. 즉,  $|\Pr[S_1] - \Pr[S_2]| \leq \varepsilon$ 이다.