RSA-OAEP IND-CCA2 증명

김동현(wlswudpdlf31@kookmin.ac.kr)

March 28, 2025

Contents

1 논문정보

- 제목: RSA-OAEP is Secure under the RSA Assumption
- 저자: Eiichiro Fujisaki1, Tatsuaki Okamoto, David Pointcheval, and Jacques Stern
- 년도: 2001년
- 초록: 최근 Victor Shoup은 적응적 선택 암호문 공격에 대한 OAEP의 보안성에 관한 널리 받아들여진 결과에 틈이 있음을 지적하였다. 더욱이, 그는 기본 트랩도어 치환의 단방향성만으로는 OAEP의 보안성을 증명할 수 없을 것으로 예상된다는 점을 보였다. 본 논문은 OAEP의 보안성에 대한 또 다른 결과를 제시한다. 즉, 본 논문에서는 무작위 오라클 모델에서, 기본 치환의 부분 영역 단방향성(partial-domain one-wayness) 하에서, OAEP가 적응적 선택 암호문 공격에 대해 의미론적 보안성을 제공함을 증명한다. 따라서, 이는 형식적으로 더 강한 가정을 사용한다. 그럼에도 불구하고, RSA 함수의 부분 영역 단방향성이 (전체 영역) 단방향성과 동치이므로, RSA-OAEP의 보안성은 단순한 RSA 가정만으로도 증명될 수 있음을 알 수 있다. 다만, 그 축소(reduction)는 타이트하지 않다.

2 보안 개념

2.1 OW trapdoor permutation

트랩도어 치환 체계(Trapdoor permutation scheme) $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$를 다음과 같이 정의한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$: 확률론적 키 생성 알고리즘으로, 1^λ를 입력 받아 $(\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$를 생성한다.
- $\mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(x)$: 결정론적 알고리즘으로, pk와 $x \in \{0,1\}^\lambda$를 입력 받아 $y \in \{0,1\}^\lambda$를 출력한다.
- $\mathcal{I}_{\mathsf{sk}}(y)$: 결정론적 알고리즘으로, sk와 $y \in \{0,1\}^\lambda$를 입력 받아 $x \in \{0,1\}^\lambda$를 출력한다. $\mathcal{K}(1^\lambda)$로 생성한 모든 $(\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$와 모든 $x \in \{0,1\}^\lambda$에 대해, $\mathcal{I}_{\mathsf{sk}}(\mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(x)) = x$를 만족한다.

동작시간(Running time) τ를 가지는 공격자 $\mathcal{A}$와 트랩도어 치환 체계 Ψ에 대한 일방향성(One-wayness) 실험 $\mathsf{Exp}^{\mathsf{OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau)$을 다음과 같이 정의한다.

Challenger $\mathcal{C}$	$\overset{\mathsf{Exp}^{\mathsf{OW}}_{\Psi,\lambda}}{\Longleftrightarrow}$	Adversary $\mathcal{A}$
$(\mathsf{pk}, \mathsf{sk}) \xleftarrow{\$} \mathcal{K}(1^\lambda)$		
$x^* \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$ $y^* \leftarrow \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(x^*)$	$\xrightarrow{1^\lambda, \mathsf{pk}, y^*}$	
Return $[x' \overset{?}{=} x^*]$	$\xleftarrow{x'}$	$\mathcal{A}$ chooses $x' \in \mathcal{X}$

$\mathcal{A}$의 능력치 $\mathsf{Adv}^{\mathsf{OW}}_{\mathcal{A};\Psi}(\lambda, \tau)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau) := \Pr[\mathsf{Exp}^{\mathsf{OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau) = 1].$$

2.2 Partial-domain OW trapdoor permutation

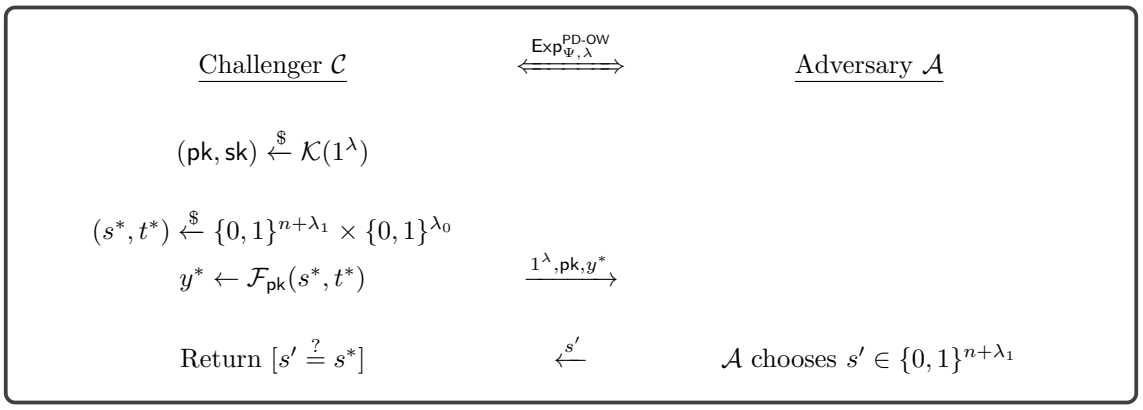
트랩도어 치환 $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$에서, $\mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(x) : \{0,1\}^\lambda \to \{0,1\}^\lambda$를 다음과 같이 표현한다.

$$\mathcal{F}_{\mathsf{pk}} : \{0,1\}^{n+\lambda_1} \times \{0,1\}^{\lambda_0} \to \{0,1\}^{n+\lambda_1} \times \{0,1\}^{\lambda_0}.$$

이때 $\lambda = n + \lambda_0 + \lambda_1$이다.

메모 2.1. 예를 들어, $x = s \parallel t$라고 할 때, $y \leftarrow \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(x)$ 대신 $y \leftarrow \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(s \parallel t)$로 표현할 수 있다.

동작시간 τ를 가지는 공격자 $\mathcal{A}$와 트랩도어 함수 체계 Ψ에 대한 부분 일방향성(Partial-domain one-wayness) 실험 $\mathsf{Exp}^{\mathsf{PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau)$을 다음과 같이 정의한다.

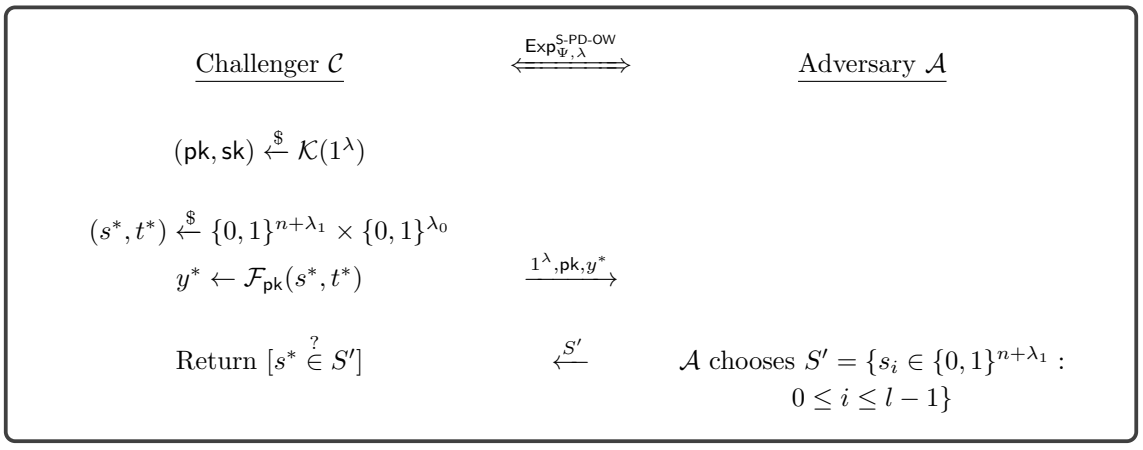


공격자 $\mathcal{A}$의 능력치 $\mathsf{Adv}^{\mathsf{PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau) := \Pr[\mathsf{Exp}^{\mathsf{PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau) = 1].$$

2.3 Set partial-domain OW trapdoor permutation

동작시간 τ를 가지고 l개의 원소를 출력하는 공격자 $\mathcal{A}$와 트랩도어 함수 체계 Ψ에 대한 집합 부분 일방향성(Set partial-domain one-wayness) 실험 $\mathsf{Exp}^{\mathsf{S\text{-}PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,l)$을 다음과 같이 정의한다.



공격자 $\mathcal{A}$의 능력치 $\mathsf{Adv}^{\mathsf{S\text{-}PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,l)$를 다음과 같이 정의한다.

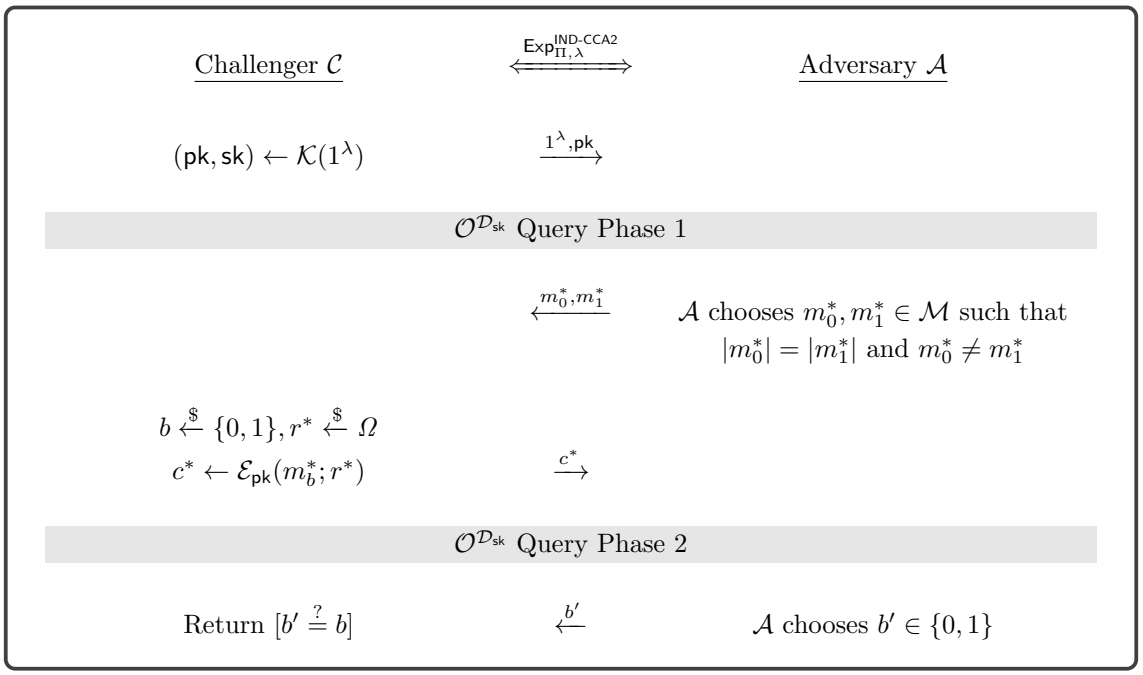
$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{S\text{-}PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,l) := \Pr[\mathsf{Exp}^{\mathsf{S\text{-}PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,l) = 1].$$

2.4 IND security against CCA2

공개키 암호 체계(Public-key encryption scheme) $\Pi = (\mathcal{K},\mathcal{E},\mathcal{D})$를 다음과 같이 정의한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$: 확률론적 키 생성 알고리즘으로, 1^λ를 입력 받아 $(\mathsf{pk},\mathsf{sk})$를 생성한다.
- $\mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m)$: 암호화 알고리즘으로, pk와 $m \in \mathcal{M}$를 입력 받아 $c \in \mathcal{C}$를 출력한다. 확률론적 알고리즘으로, $r \xleftarrow{\$} \Omega$를 추가로 입력 받아 $\mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m;r)$으로 표현할 수도 있다.
- $\mathcal{D}_{\mathsf{sk}}(c)$: 결정론적 복호화 알고리즘으로, sk와 $c \in \mathcal{C}$를 입력 받아 $m \in \mathcal{M}$를 출력한다.

동작시간 τ를 가지고 복호화 오라클에 q회 질의하는 공격자 $\mathcal{A}$와 공개키 암호 체계 Π에 대해, 선택 암호문 공격(Adaptive chosen ciphertext attack, 이하 CCA2)에 대한 구별불가능성(Indistinguishability) 실험 $\mathsf{Exp}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q)$을 다음과 같이 정의한다.

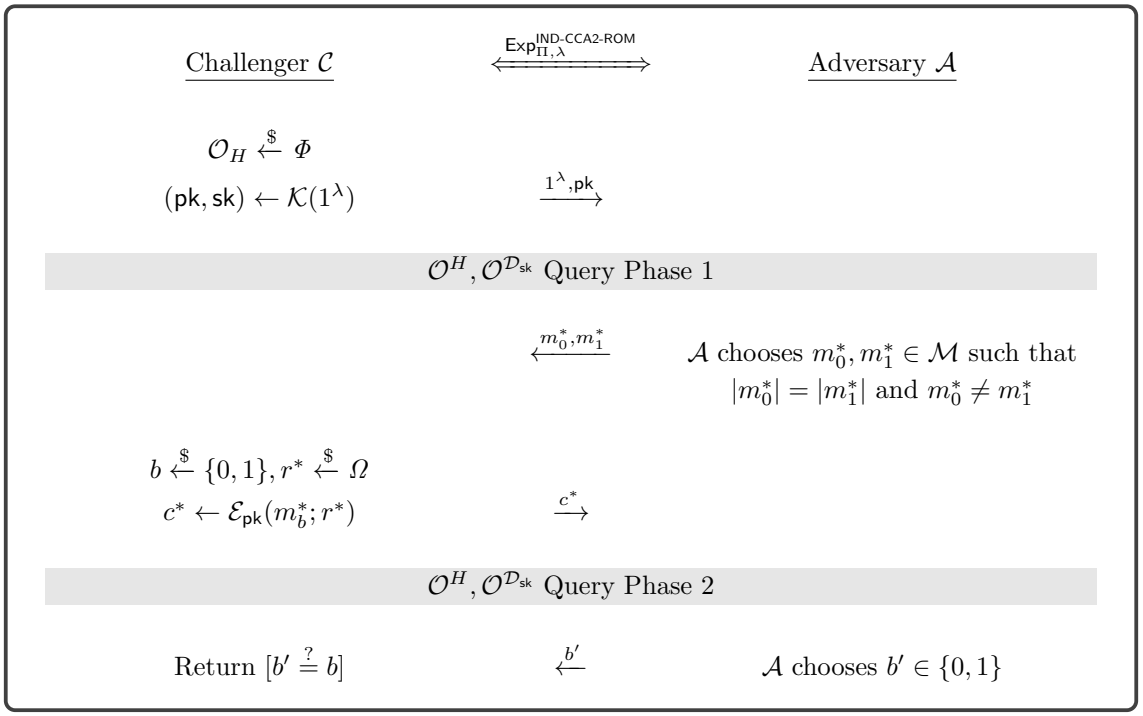


공격자 $\mathcal{A}$의 능력치 $\mathsf{Adv}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q) = 2 \cdot \Pr[\mathsf{Exp}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q) = 1] - 1.$$

2.5 IND security against CCA2 in ROM

동작시간 τ를 가지고 복호화 오라클에 $q_{\mathcal{D}}$회, 랜덤 오라클에 q_H회 질의하는 공격자 $\mathcal{A}$와 공개키 암호체계 Π에 대해, 랜덤 오라클 모델(Random oracle model)에서의 CCA2에 대한 구별불가능성 실험 $\mathsf{Exp}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2\text{-}ROM}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q_{\mathcal{D}},q_H)$을 다음과 같이 정의한다.



공격자 $\mathcal{A}$의 능력치 $\mathsf{Adv}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2\text{-}ROM}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q_{\mathcal{D}},q_H)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2\text{-}ROM}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q_{\mathcal{D}},q_H) = 2\cdot\Pr[\mathsf{Exp}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2\text{-}ROM}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A};\tau,q_{\mathcal{D}},q_H)=1]-1.$$

3 RSA-OAEP

다음과 같은 트랩도어 치환 $\mathcal{F}$를 고려한다.

$$\mathcal{F}_{\mathsf{pk}} : \{0,1\}^{n+\lambda_1} \times \{0,1\}^{\lambda_0} \to \{0,1\}^{n+\lambda_1} \times \{0,1\}^{\lambda_0}.$$

그리고 두 해시 함수 H, G를 다음과 같이 준비한다.

$$H : \{0,1\}^{\lambda_0} \to \{0,1\}^{\lambda-\lambda_0} \quad G : \{0,1\}^{\lambda-\lambda_0} \to \{0,1\}^{\lambda_0}.$$

트랩토어 치환 체계 $\Psi = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$를 포함하는 OAEP 변환 $(\mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$는 다음과 같이 동작한다.

- $\mathcal{K}(1^\lambda)$: $(\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$를 생성한다. pk는 이후 트랩도어 치환 $\mathcal{F}$에서 사용하며, sk는 $\mathcal{I}$에서 사용한다.
- $\mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m; r)$: $m \in \{0,1\}^n$과 $r \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{\lambda_0}$가 주어졌을 때, s, t를 다음과 같이 계산한다.

  $$s = (m \parallel 0^{\lambda_1}) \oplus G(r), \quad t = r \oplus H(s).$$

  s, t를 계산하는 과정을 도식화하면 그림 1와 같다. 이후 암호문 $c = \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(s, t)$를 출력한다.
- $\mathcal{D}_{\mathsf{sk}}(c)$: $(s, t) = \mathcal{I}_{\mathsf{sk}}(c)$을 계산한 후, r, M을 다음과 같이 계산한다.

  $$r = t \oplus H(s) \quad M = s \oplus G(r).$$

  만약 $[M]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$이면 $[M]^n$을 출력하고, 아니라면 "Reject"를 출력한다.

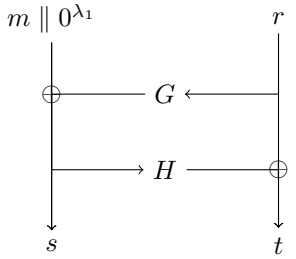


Figure 1: $\mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m; r)$에서 s, t를 계산하는 과정

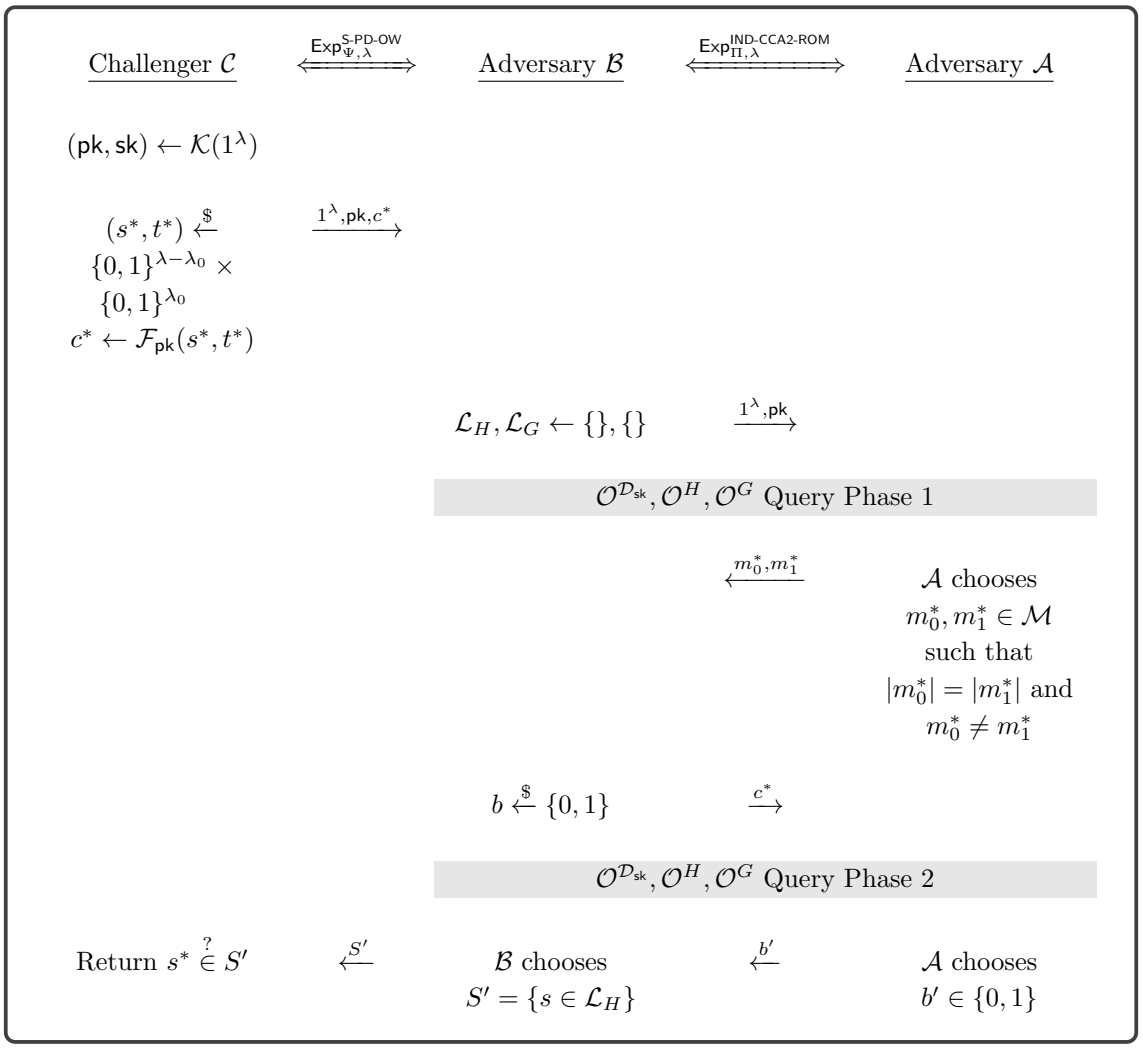
4 증명

보조정리 1. *공격자 $\mathcal{A}$를 OAEP 변환 $(\mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$에 대해 동작시간 τ를 가지고, 복호화 오라클 $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$와 랜덤 오라클 $\mathcal{O}^{H}, \mathcal{O}^{G}$에 각각 $q_{\mathcal{D}}, q_H, q_G$회 질의하는 IND-CCA2 공격자라 하자. 이때, 다음을 만족하는 S-PD-OW 공격자 $\mathcal{B}$가 존재한다.*

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{S\text{-}PD\text{-}OW}}_{\Psi,\lambda}(\mathcal{B}; \tau', q_H) \geq \frac{\mathsf{Adv}^{\mathsf{IND\text{-}CCA2}}_{\Pi,\lambda}(\mathcal{A}; \tau, q_{\mathcal{D}}, q_H, q_G)}{2} - \frac{2q_{\mathcal{D}}q_G + q_{\mathcal{D}} + q_G}{2^{\lambda_0}} - \frac{2q_{\mathcal{D}}}{2^{\lambda_1}}.$$

여기서, $\tau' \leq \tau \cdot q_H \cdot q_G \cdot (T_{\mathcal{F}} + O(1))$이고, $T_{\mathcal{F}}$는 트랩도어 치환 $\mathcal{F}$의 시간 복잡도를 의미한다.

4.1 증명: Reduction and simulation



먼저, 공격자 $\mathcal{B}$가 $\mathcal{O}^H$를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자 $\mathcal{A}$가 랜덤 오라클 $\mathcal{O}^H$에 δ를 질의했다고 하자. 공격자 $\mathcal{B}$는 다음과 같이 H_δ를 응답한다.

1. 만약 δ가 $\mathcal{L}_H$에 있다면, δ에 대응하는 H_δ를 응답한다. (즉, $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$)
2. 만약 δ가 $\mathcal{L}_H$에 없다면, $H_\delta \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{\lambda_0}$을 수행한 후 H_δ를 응답한다. 이후 $\mathcal{L}_H \leftarrow \mathcal{L}_H \cap (\delta, H_\delta)$를 수행한다.

다음으로, 공격자 $\mathcal{B}$가 $\mathcal{O}^G$를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자 $\mathcal{A}$가 랜덤 오라클 $\mathcal{O}^G$에 γ를 질의했다고 하자. 공격자 $\mathcal{B}$는 다음과 같이 G_γ를 응답한다.

1. 만약 γ가 $\mathcal{L}_G$에 있다면, γ에 대응하는 G_γ를 응답한다.
2. 만약 γ가 $\mathcal{L}_G$에 없다면, 다음 과정을 진행한다.
   (a) 어떤 $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$에 대해, 만약 $c^* = \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(\delta, \gamma \oplus H_\delta)$라면, 우리는 여전히 G를 올바르게 시뮬레이션할 수 있다. 이 때 응답은 $G_\gamma \leftarrow \delta \oplus (m_b \parallel 0^{\lambda_1})$이다. $\delta = s^\star$이고 $s^\star$가 균등하게 분포하므로 G_γ는 균등 분포된 값이 된다.
   (b) 모든 $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$에 대해, 만약 $c^* \neq \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(\delta, \gamma \oplus H_\delta)$라면, $G_\gamma \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{n+\lambda_1}$를 수행한다.
   (c) G_γ를 응답한 후, $\mathcal{L}_G \leftarrow \mathcal{L}_G \cap (\gamma, G_\gamma)$를 수행한다.

마지막으로, 공격자 $\mathcal{B}$가 $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$를 동작시키는 시뮬레이션을 정의한다. 공격자 $\mathcal{A}$가 랜덤 오라클 $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$에 $c = \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(s,t)$를 질의했다고 하자. 공격자 $\mathcal{B}$는 다음과 같이 응답한다.

1. $\mathcal{L}_G$의 질의 응답 쌍 $(\gamma, G_\gamma) \in \mathcal{L}_G$ 및 $\mathcal{L}_H$의 $(\delta, H_\delta) \in \mathcal{L}_H$를 조회하고, 각 리스트에서 선택된 쌍에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma = \delta, \quad \tau = \gamma \oplus H_\delta, \quad \mu = G_\gamma \oplus \delta.$$

   만약 $c = \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(\sigma, \tau)$이면서 $[\mu]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$라면, $[\mu]^n$을 응답한다.

2. 그 외에는 Reject를 응답한다.

4.2 증명: 사건 정의

Table 1: 오라클 관련 사건 정의

AskG	r^*가 $\mathcal{O}^G$에 질의되었을(has been asked) 사건.
AskH	s^*가 $\mathcal{O}^H$에 질의되었을 사건.
GBad	$\mathcal{O}^G$에 r^*를 질의했지만, $\mathcal{O}^G$의 응답이 $s^* \oplus (m_b \parallel 0^{\mathsf{sk}})$가 아닌 사건. GBad가 발생하면, AskG도 발생한다.
DBad	~~CPA 시나리오에서 복호화가 실패하는 사건.~~
Bad	~~GBad $\vee$ DBad.~~

공격자 $\mathcal{A}$는 복호화 오라클 $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$에 암호문 $c = \mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(s,t)$를 질의할 수 있다. 질의한 암호문 c와 관련된 사건을 다음 표와 같이 정의한다.

Table 2: 복호화 시뮬레이션 관련 사건 정의

SBad	$s = s^*$인 사건.
RBad	$r = r^*$인 사건. 즉, $H(s) \oplus t = H(s^*) \oplus t^*$인 사건.
CBad	SBad $\vee$ RBad.
AskR	r이 $\mathcal{O}^G$에 질의되었을 사건. 즉, $H(s) \oplus t$이 질의되었을 사건
AskS	s가 $\mathcal{O}^H$에 질의되었을 사건.
AskRS	AskR $\wedge$ AskS
Fail	복호화 오라클이 질의 c에 대해 잘못 응답하는 사건. i번째 질의 c_i에 대해서는 Fail_i로 나타낸다. 여기서 $i = 1, \cdots, q_{\mathcal{D}}$이다. 어떤 i에 대해서도 Fail_i의 확률을 균등하게 평가(evaluate)할 수 있으므로, 여기서는 사용하지 않는다. Fail 사건은 평문 추출기(plaintext extractor)가 실제 복호화 오라클에서는 허용될 암호문을 거부하는 경우로 제한된다. 실제로, 추출기가 암호문을 허용하는 순간, 해당 암호문이 유효하며 출력 평문과 일치함을 알 수 있다.

4.3 증명: Analysis of the Decryption Oracle Simulation

보조정리 2. *$s^\star$가 $\mathcal{O}^H$에 질의되지 않았을 때, $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$는 질의된 암호문 c $(c \neq c^\star)$에 대해 출력을 정확히 생성할 수 있으며, 이 확률은 다음보다 크거나 같다.*

$$1 - \left(\frac{2}{2^{k_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{k_0}}\right).$$

또한, 시간 제한 $t' \leq q_G \cdot q_H \cdot (T_{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(1))$ 내에서 이를 수행할 수 있다.

Proof. 본 증명에서는 다음이 참임을 보인다.

$$\Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{AskH}] \leq \frac{2}{2^{\lambda_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{\lambda_0}}.$$

$\Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{AskH}]$는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}].$$

본 증명에서는 먼저 $\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}]$를 구한다. $\mathsf{CBad} = \mathsf{SBad} \vee (\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad})$를 이용하여, 이 확률을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge (\mathsf{SBad} \vee (\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad})) \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&= \Pr[(\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{SBad}) \vee (\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad}) \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{SBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{SBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \mid \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{RBad} \mid \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}]. \\
&= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{AskR} \mid \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{AskR} \mid \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{RBad} \mid \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}]. \\
&\leq \Pr[\mathsf{AskR} \mid \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{AskR} \wedge \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{RBad} \mid \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}].
\end{aligned}$$

세 번째 사건은 $s \neq s^\star$이고 공격자 $\mathcal{A}$가 $s^\star$에 대해 $\mathcal{O}^H$에 질의하지 않았을 때 RBad가 발생함을 의미한다. $s^\star$가 $\mathcal{O}^H$에 질의되지 않았고 $s \neq s^\star$일 때, $H(s^\star)$는 예측 불가능(unpredictable)하며 $H(s)$뿐 아니라 t, $t^\star$와도 독립적이다. 이때 RBad 사건, $H(s^\star) = H(s) \oplus t \oplus t^\star$ 는 최대 $2^{-\lambda_0}$의 확률로 발생한다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\mathsf{RBad} \mid \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] \leq 2^{-\lambda_0}.$$

첫 번째 사건은 $s = s^\star$이며 $H(s^\star)$는 예측 불가능할 때, r이 $\mathcal{O}^G$에 대해 질의되었을 사건을 의미한다. 이때, $H(s)$ 또한 예측 불가능하다. 즉, $r = H(s) \oplus t$가 예측 불가능하므로, r이 $\mathcal{O}^G$에 질의되었을 확률은 최대 $q_G \cdot 2^{-\lambda_0}$이다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\mathsf{AskR} \mid \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] \leq q_G \cdot 2^{-\lambda_0}.$$

두 번째 사건은 복호화 시뮬레이션에서 $H(s)$는 예측 불가능하고 r은 $\mathcal{O}^G$에 질의되지 않았을 때, 유효한 암호문 c를 거부하는 경우이다. 페이스텔 네트워크(Feistel network)의 일대일 성질에 따라 $s = s^\star$이면 $r \neq r^\star$이고, 따라서 $G(r)$는 예측 불가능하다. 그러므로 이 경우 중복 조건은 $2^{-\lambda_1}$보다 큰 확률로 성립할 수 없다. 즉, 다음과 같다.

$$\Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{AskR} \wedge \mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskH}] \leq 2^{-\lambda_1}.$$

세 식을 결합하면, 다음과 같다.

$$\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \leq 2^{-k_1} + (q_G + 1) \cdot 2^{-k_0}.$$

다음으로, $\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}]$를 계산하고 본 증명을 마친다. 만약 $\neg\mathsf{CBad} \wedge \mathsf{AskRS}$가 성립한다면, 복호화 시뮬레이션은 실패하지 않는다. 따라서 이 식은 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&= \underbrace{\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \wedge \mathsf{AskRS} \mid \neg\mathsf{AskH}]}_{=0} + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \wedge \neg\mathsf{AskRS} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \wedge \neg\mathsf{AskRS} \mid \neg\mathsf{AskH}].
\end{aligned}$$

이제 $\neg\mathsf{AskH}$를 잠시 고려하지 않고, 위 확률을 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \wedge \neg\mathsf{AskRS}] \\
&= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge (\neg\mathsf{AskR} \vee \neg\mathsf{AskS})] \\
&= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge (\neg\mathsf{AskR} \vee (\neg\mathsf{AskS} \wedge \mathsf{AskR}))] \\
&= \Pr[(\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskR}) \vee (\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge (\neg\mathsf{AskS} \wedge \mathsf{AskR}))] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskR}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{SBad} \wedge \neg\mathsf{AskS} \wedge \mathsf{AskR}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{AskR}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{AskR} \wedge \neg\mathsf{AskS} \wedge \neg\mathsf{SBad}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{RBad} \mid \neg\mathsf{AskR}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{AskR} \mid \neg\mathsf{AskS} \wedge \neg\mathsf{SBad}] \\
&\leq \Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{RBad} \wedge \neg\mathsf{AskR}] + \Pr[\mathsf{AskR} \mid \neg\mathsf{AskS} \wedge \neg\mathsf{SBad}].
\end{aligned}$$

첫 번째 사건에서, r이 $\mathcal{O}^G$에 대해 질의되지 않았고, 추가로 $r \neq r^*$인 사건을 고려하면, $G(r)$는 예측할 수 없으며, 따라서 $[s \oplus G(r)]_{\lambda_1} = 0^{\lambda_1}$이 될 확률은 $2^{-\lambda_1}$보다 작다. 그리고 두 번째 사건에서, $H(s)$에 대한 정보 없이 r이 $\mathcal{O}^G$에 대해 질의될 확률은 $q_G \cdot 2^{-\lambda_0}$보다 작다. 또한, 이 사건은 AskH와 독립적이므로 다음이 성립한다.

$$\Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \wedge \neg\mathsf{AskRS} \mid \neg\mathsf{AskH}] \leq 2^{-\lambda_1} + q_G \cdot 2^{-\lambda_0}.$$

그러므로, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Pr[\mathsf{Fail} \mid \neg\mathsf{AskH}] &= \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] + \Pr[\mathsf{Fail} \wedge \neg\mathsf{CBad} \mid \neg\mathsf{AskH}] \\
&\leq (2^{-\lambda_1} + (q_G + 1) \cdot 2^{-\lambda_0}) + (2^{-\lambda_1} + q_G \cdot 2^{-\lambda_0}). \\
&= \frac{2}{2^{\lambda_1}} + \frac{2q_G + 1}{2^{\lambda_0}}.
\end{aligned}$$

이 시뮬레이터의 실행 시간은 가능한 모든 쌍에 대해 $\mathcal{F}_{\mathsf{pk}}(\sigma, \tau)$를 계산하는 시간만 포함되며, 따라서 그 시간은 다음으로 상한된다.

$$q_G \cdot q_H \cdot (T_{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(1)).$$

□

5 Journal of Cryptology

본 절에서는 Journal of Cryptology의 RSA-OAEP is Secure under the RSA Assumption 논문 내용을 정리했다. 기존 논문과 달리 여기서는 여러 개의 GAME을 정의해, 각 GAME의 성공 확률 차이를 활용하여 공격자의 능력치 관계를 표현한다.

5.1 평문 추출기

평문추출기 $\mathcal{PE}$를 다음과 같이 정의한다.

메모 5.1. 평문 추출기(plaintext extractor)는 시뮬레이터가 그 오라클을 흉내 내기 위해 만든 도구이다. 실제 복호를 하는 것이 아니고, 복호 결과를 추출하는 의미로 평문 추출기로 부른다.

평문 추출기 $\mathcal{PE}$의 입력은 다음과 같다.

- 무작위 오라클 G, H에 대한 질의 응답 쌍을 모아 놓은 두 개의 리스트 $\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_H$.
- 유효한 암호문 y^*.
- 후보 암호문 $y \neq y^*$. 추출기는 y를 복호해야한다.

추출기 $\mathcal{PE}$의 동작 방식은 다음과 같다.

- 암호문 $y = f(s \parallel t)$가 주어지면, $\mathcal{L}_G$에 있는 모든 (γ, G_γ)와 $\mathcal{L}_H$에 있는 모든 (δ, H_δ)에 대해 다음을 계산한다.

$$\sigma = \delta, \quad \theta = \gamma \oplus H_\delta, \quad \mu = G_\gamma \oplus \delta.$$

- 그리고 다음 조건을 검사한다.

$$y = f(\sigma \parallel \theta) \quad \text{and} \quad [\mu]_{k_1} = 0^{k_1}.$$

- 조건이 만족되면, $\mathcal{PE}$는 μ의 앞부분, 즉 $[\mu]^n$을 평문으로 출력하고 종료한다. 조건을 만족하는 조합이 없다면, $\mathcal{PE}$는 Reject 메시지를 반환한다.

메모 5.2. 평문 추출기 $\mathcal{PE}$가 y^*를 입력받는 이유는, y^*는 공격자가 받은 챌린지 암호문이기 때문에, 해당 암호문을 복호하지 않도록 막기 위해서이다.

리스트의 순서에 관계없이, $\mathcal{PE}$의 출력은 항상 유일하게 정의된다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 함수 f가 순열이므로, $\sigma = s$는 유일하게 결정되고, 따라서 δ도 유일하게 결정된다. 또한 $\mathcal{L}_G$와 $\mathcal{L}_H$는 각각 함수 G와 H에 대한 입력 출력 쌍들이며, 하나의 입력에 대해 대응되는 출력은 최대 하나이기 때문에, H_δ 역시 유일하게 결정된다. 마찬가지로 $\theta = t$도 유일하게 결정되며, 따라서 γ와 G_γ도 유일하게 결정된다. 결국 선택될 수 있는 μ는 최대 하나이며, 그 출력 여부는 조건 $[\mu]_{k_1} = 0^{k_1}$을 만족하는지에 따라 결정된다.

메모 5.3. 원래 복호화 오라클은 출력이 항상 유일하게 정의되기 때문에, $\mathcal{PE}$의 출력도 항상 유일하게 정의됨을 보여야 한다. 공격자가 $\mathcal{PE}$에 같은 입력을 넣었을 때, 다른 출력을 얻으면 안된다.

5.2 게임 구성

이후에서 y^*는 암호화 오라클로부터 얻은 도전 암호문을 의미한다. 우리는 복호화 오라클 대신 평문 추출기를 사용하는 상황을 상정하고 있으며, 의미론적 보안을 모순시키려는 맥락에서, y^*가 메시지 m_b에 대한 암호문이라고 가정한다. 또한 y^*의 난수 시드를 r^*라고 표기한다. 이때 다음 관계가 성립한다.

$$r^* = H(s^*) \oplus t^* \quad \text{and} \quad G(r^*) = s^* \oplus (m_b \parallel 0^{k_1})$$

이후의 모든 별표가 없는 변수들은 복호화 질의에 해당한다. 우리는 이제 이전 증명의 간단한 확장으로서, 복호화 오라클을 활용하는 완전한 증명을 제시한다. 이 증명에서는 앞서 정의한 평문 추출기가 실패할 수 있는 모든 경우를 순차적으로 배제해가며 논리를 전개한다.

5.2.1 0 번째 게임

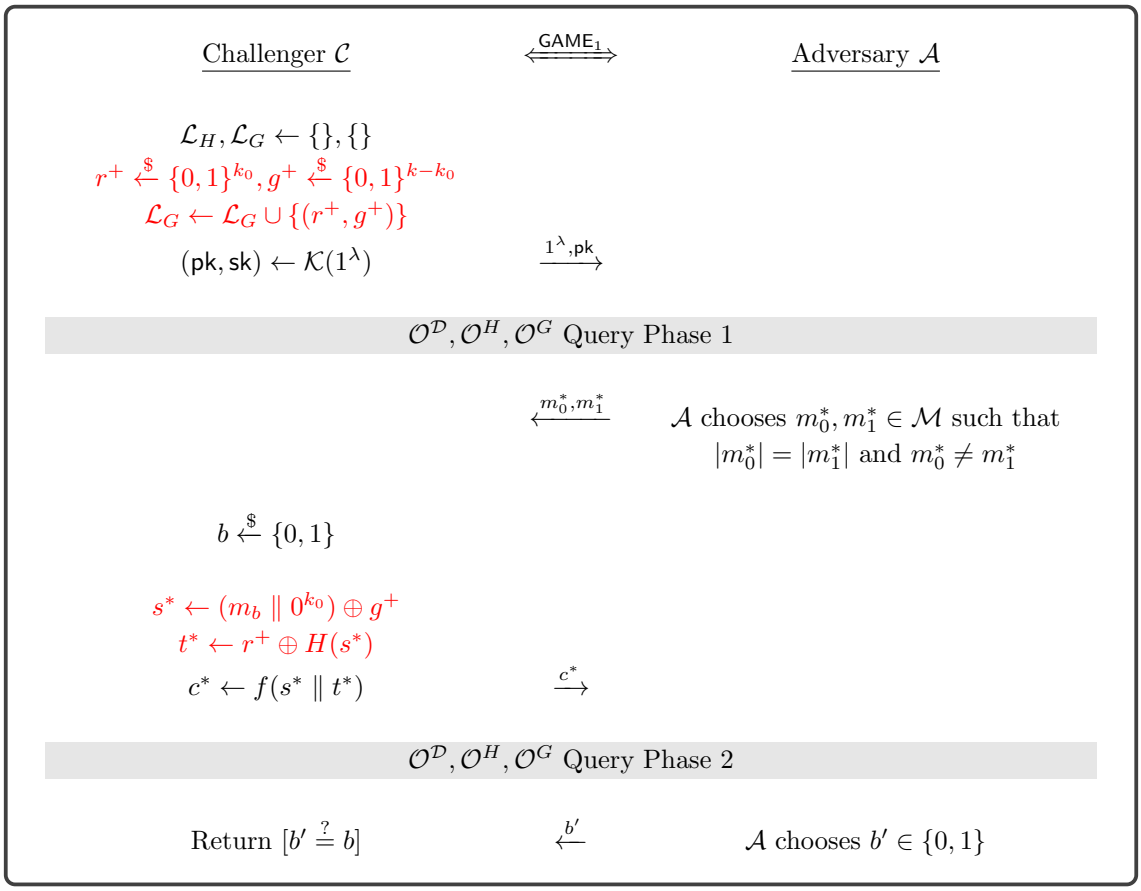
Challenger $\mathcal{C}$	$\xleftrightarrow{\mathsf{GAME}_0}$	Adversary $\mathcal{A}$
$\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_H \leftarrow \{\}, \{\}$ $(\mathsf{pk}, \mathsf{sk}) \leftarrow \mathcal{K}(1^\lambda)$	$\xrightarrow{1^\lambda, \mathsf{pk}}$	
$\mathcal{O}^{\mathcal{D}}, \mathcal{O}^H, \mathcal{O}^G$ Query Phase 1		
	$\xleftarrow{m_0^*, m_1^*}$	$\mathcal{A}$ chooses $m_0^*, m_1^* \in \mathcal{M}$ such that $\lvert m_0^* \rvert = \lvert m_1^* \rvert$ and $m_0^* \neq m_1^*$
$b \xleftarrow{\$} \{0,1\}, r^* \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{k_0}$		
$s^* \leftarrow (m_b \parallel 0^{k_0}) \oplus G(r^*)$ $t^* \leftarrow r^* \oplus H(s^*)$ $c^* \leftarrow f(s^* \parallel t^*)$	$\xrightarrow{c^*}$	
$\mathcal{O}^{\mathcal{D}}, \mathcal{O}^H, \mathcal{O}^G$ Query Phase 2		
Return $[b' \stackrel{?}{=} b]$	$\xleftarrow{b'}$	$\mathcal{A}$ chooses $b' \in \{0,1\}$

메모 5.4. GAME_0는 IND-CCA2 실험과 동일하다. 여기서 사용하는 복호화 오라클 $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$는 평문 추출기가 아니라는 점에 주의한다.

GAME_0에서 공격자는 도전 암호문을 복호화 오라클에 질의할 수 없다. 이벤트 S_0는 GAME_0가 1을 반환하는 사건을 의미하며, 이후 게임 단계에서도 유사하게 S_i로 표기한다. 정의에 따라, 다음이 성립한다.

$$\Pr[S_0] = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

5.2.2 1 번째 게임



GAME_1에서는 난수 시드 r^*의 값을 명시적으로 드러내고, 그 생성을 게임 초반으로 이동시키는 것이다. 즉, 사전에 무작위로 다음 값을 선택한다:

$$r^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{k_0}, \quad g^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{k-k_0}.$$

그리고 이후부터는 r^* 대신 r^+, $G(r^*)$ 대신 g^+를 사용한다.

메모 5.5. GAME_0에서 s^*를 만들 때, r^*를 G에 통과시켜 $G(r^*)$를 구하고, $G(r^*)$를 이용하여 s^*를 만든다. 그러나 GAME_0에서는 $G(r^*)$를 계산하지 않는다. 대신 g^+를 무작위로 생성하고, g^+를 이용하여 s^*를 만든다.

GAME_1은 다음 두 규칙을 따른다.

- $r^* = r^+, s^* = (m_b \parallel 0^{k_1}) \oplus g^+$이므로, 다음 관계가 성립한다.

$$t^* = r^* \oplus H(s^*), \quad x^* = s^* \parallel t^*, \quad y^* = f(x^*).$$

- 무작위 오라클 G에 대해 r^+로 질의가 들어오면, 응답은 항상 g^+이다.

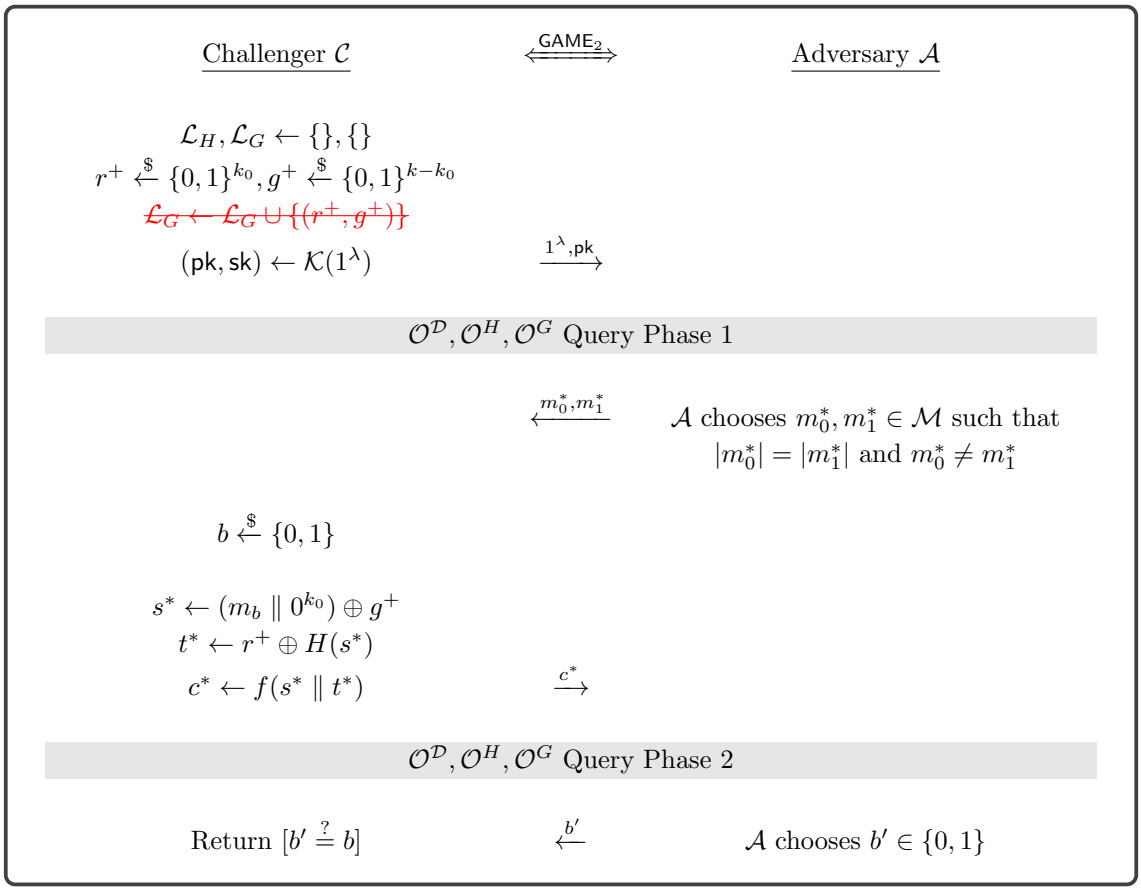
메모 5.6. 즉, GAME_0에서 GAME_1으로 바뀌면서 달라진 것은, $G(r^*)$ 대신 무작위 값을 사용하여 s^*를 만든다는 점 뿐이라고 생각하면 된다.

우리는 $(r^*, G(r^*))$ 쌍을 정확히 동일한 분포를 가지는 (r^+, g^+)로 대체한 것이므로 다음을 만족한다.

$$\Pr[S_1] = \Pr[S_0]$$

메모 5.7. GAME_1으로 바뀌면서 달라진 것은 $G(r^*)$ 대신 무작위 값 g^+을 사용한다는 점이다. g^+는 균등분포, $G(r^*)$도 무작위 오라클 정의에 의해 균등분포, 즉, 동일한 확률분포를 가진다. 그 외 모든 구조가 동일하므로, 공격자는 GAME_0와 GAME_1에서 동일한 전략을 사용한다. 따라서, $\Pr[S_1] = \Pr[S_0]$을 만족한다.

5.2.3 2 번째 게임



이 게임에서는 위에서 정의한 두 번째 규칙을 제거하고, 무작위 오라클 G에 대한 질의를 원래대로 복원한다. 따라서 g^+는 x^*를 구성할 때만 사용되고, 그 이후 계산에는 전혀 등장하지 않는다. 이로 인해, $\mathcal{A}$의 입력은 비트 b에 의존하지 않는 확률 분포를 따르게 된다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\Pr[S_2] = \frac{1}{2}.$$

메모 5.8. g^+는 무작위로 생성한 값으로, $s^* = (m_b \parallel 0^{k_1}) \oplus g^+$를 계산할 때 외에는 전혀 등장하지 않는다. 원래는 r^+를 G에 질의하면 g^+가 나오는 두 번째 룰에 의해 g^+가 등장했었기 때문에, 공격자가 G에 r^+를 질의하면 정보를 얻을 수 있었으나, 이젠 얻을 수 없다. 따라서 s^*에 대한 정보, 더 나아가 c^*에 대한 정보를 공격자는 절대 얻을 수 없다. 그래서 $\mathcal{A}$가 입력 c^*를 받더라도 이 게임의 성공확률은 정확히 1/2이다.

GAME_1과 GAME_2는 r^*가 오라클 G에 질의되는 경우에 한해 서로 다를 수 있다.

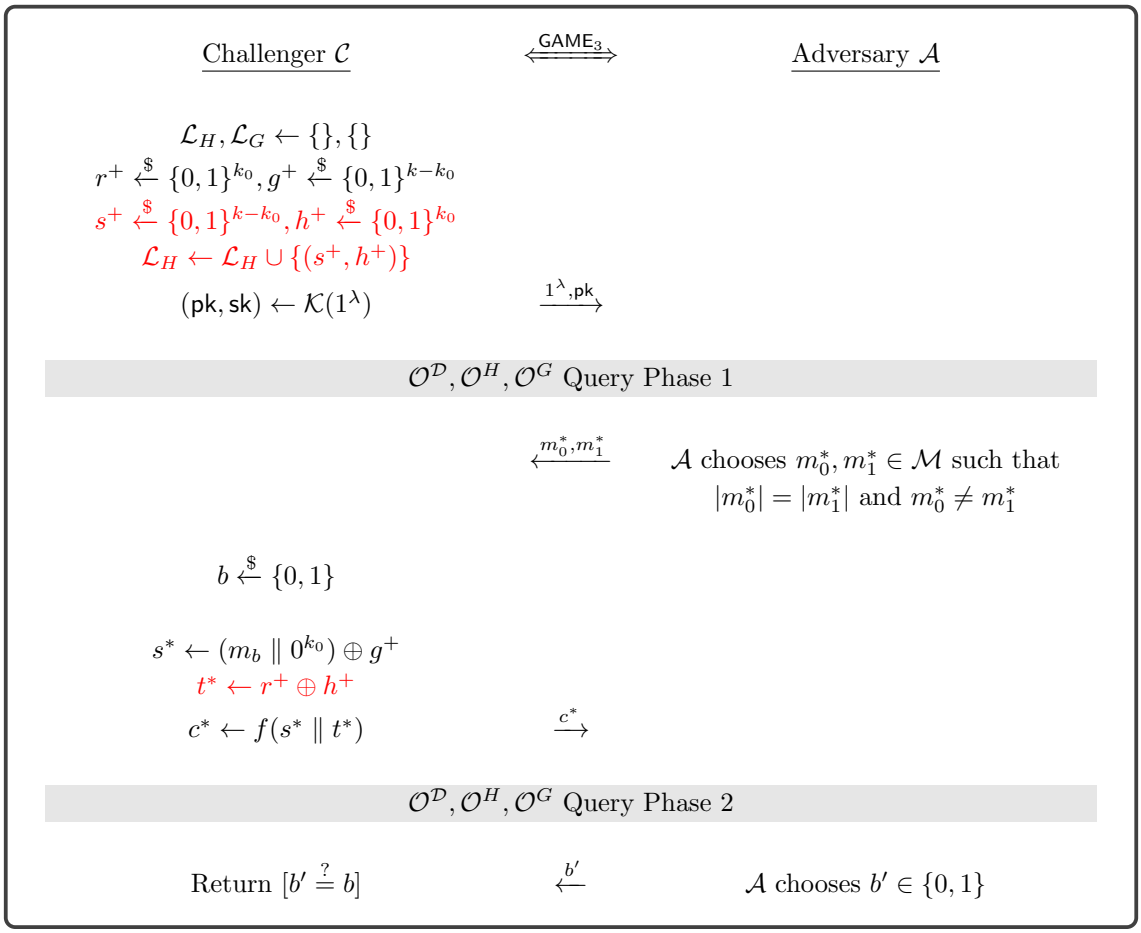
메모 5.9. GAME_1에서는 $G(r^*)$가 g^+로 설정되어 r^*를 질의할 때 g^+를 응답하지만, GAME_2에서는 r^*를 질의하면, 무작위 값을 응답한다. 응답한 무작위 값이 우연히 g^+일 수 있지만, 거의 다르다. r^*가 아닌 다른 값을 질의하는 경우는 두 게임에서 오라클 G는 동일하게 동작하지만, r^*가 질의하면 다르게 동작한다. 따라서, r^*가 오라클 G에 질의되는 경우에 한해 두 게임이 서로 다르게 동작할 수 있다.

AskG_2는 GAME_2에서 r^*가 공격자에 의해 오라클 G에 질의되는 사건이다. 이후에서 우리는 모든 GAME_i에 대해 동일한 표기 AskG_i를 사용한다. 보조정리에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$|\Pr[S_2] - \Pr[S_1]| \leq \Pr[\mathsf{AskG}_2].$$

메모 5.10. 오라클 G에 질의하는 사건을 고려할 때, 공격자 뿐만 아니라 복호화 오라클이 G에 질의하는 것도 고려한다. 즉, AskG_2는 공격자 및 복호화 오라클에 의해 r^*가 G에 질의되는 사건을 의미한다. 복호화 오라클은 $(s,t) \leftarrow g(c)$를 계산한 뒤 $r \leftarrow t \oplus H(s)$ 및 $M \leftarrow G(r) \oplus s$를 계산하는데, 이 때 r이 G에 질의된다.

5.2.4 3 번째 게임

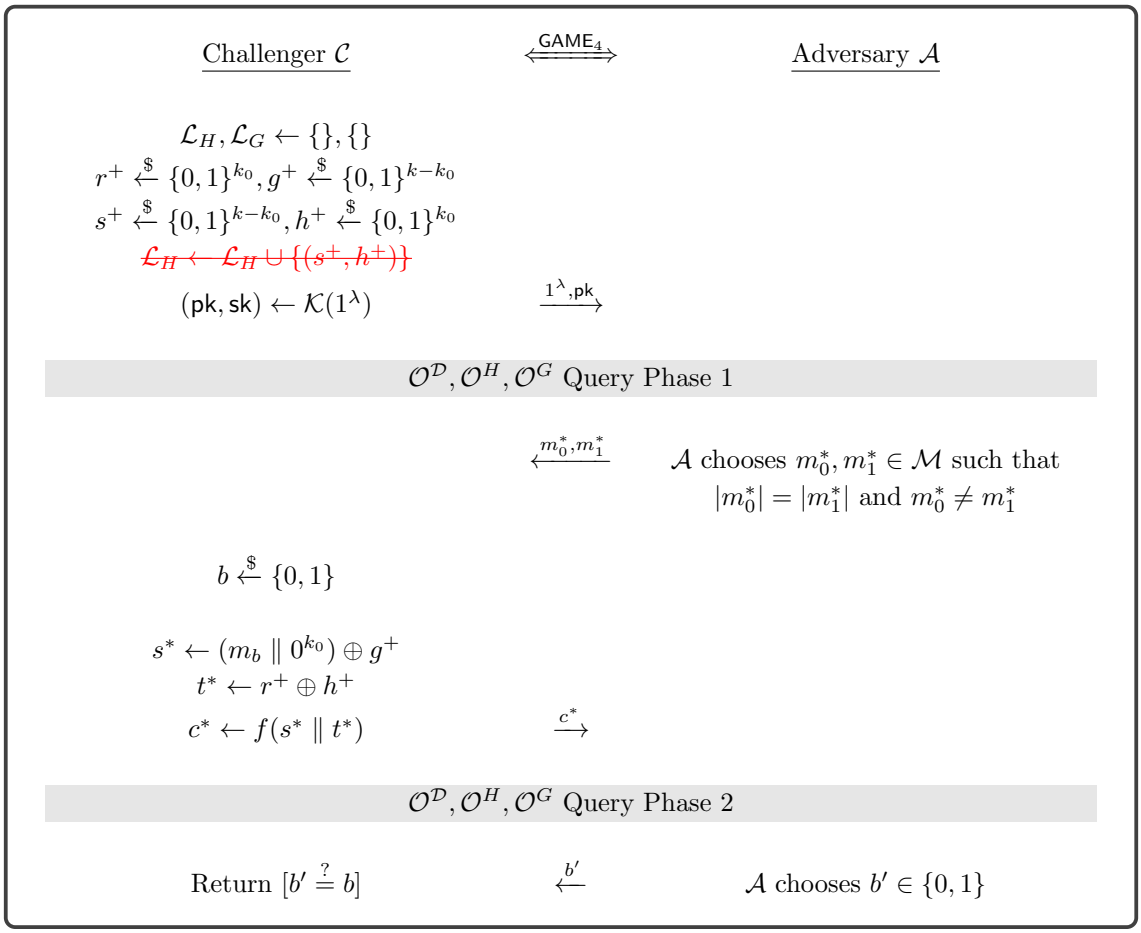


이번에는 $s^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{k-k_0}, h^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{k_0}$를 무작위로 선택하고, s^* 대신 s^+, $H(s^*)$ 대신 h^+를 사용한다. 게임의 규칙은 GAME_2와 유사하다. 이 때, 다음을 만족한다.

$$\Pr[\mathrm{AskG}_3] = \Pr[\mathrm{AskG}_2].$$

메모 5.11. GAME_2에서 GAME_3로 변경하는 과정은 GAME_0에서 GAME_1으로 변경하는 과정과 유사하다. GAME_1에서 설명한 것과 마찬가지로, $(s^*, H(s^*))$와 s^+, h^+의 확률분포는 동일하다. 즉, 공격자는 두 게임에서 동일하게 동작하며, G에 질의하는 동작도 동일하다. 따라서, $\Pr[\mathrm{AskG}_3] = \Pr[\mathrm{AskG}_2]$를 만족한다.

5.2.5 4 번째 게임



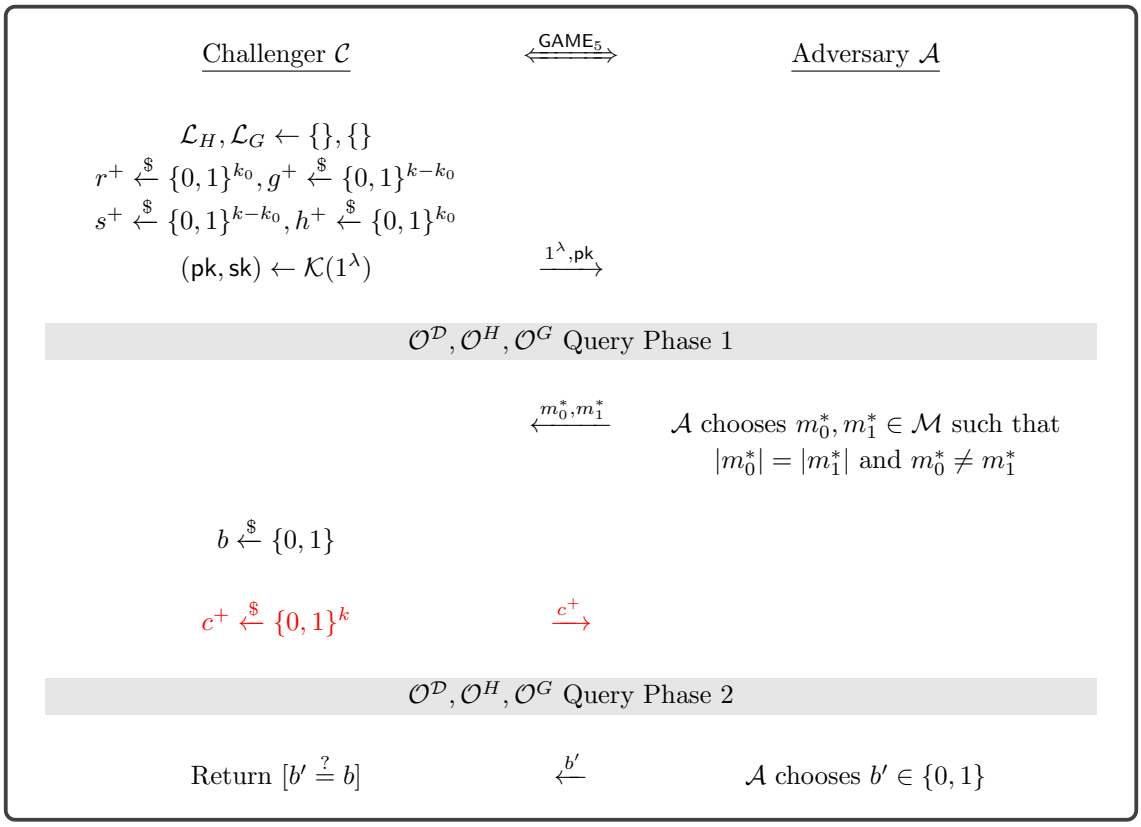
이번 게임에서는 GAME_3의 두 번째 규칙을 제거한다. 그러면 GAME_2와 유사하게, 다음이 성립한다.

$$|\Pr[\mathrm{AskG}_4] - \Pr[\mathrm{AskG}_3]| \leq \Pr[\mathrm{AskH}_4].$$

여기서 AskH_4는 GAME_4에서 공격자 또는 복호화 오라클에 의해 s^*가 H 오라클에 질의되는 사건을 나타낸다.

메모 5.12. GAME_3와 GAME_4에서 공격자가 H에 s^*가 아닌 다른 값을 질의하면 두 게임에서 H는 동일하게 동작하지만, s^*를 질의하면, GAME_3의 오라클은 h^+를, GAME_4의 오라클은 무작위 값을 응답하기 때문에 공격자의 동작이 달라질 수 있다. 따라서 위 부등식을 만족한다. 이 도출 과정은 GAME_2에서 부등식 도출 과정과 유사하다.

5.2.6 5 번째 게임



GAME_5에서는 챌린지 암호문 $y^+ \xleftarrow{\$} \{0,1\}^k$을 무작위로 선택하고, 단순히 $y^\star = y^+$로 설정한다. 이 경우 다음을 만족한다.

$$\Pr[\mathrm{AskH}_5] = \Pr[\mathrm{AskH}_4].$$

메모 5.13. GAME_4에서 s^*와 t^*는 g^+와 h^+에 의해 균등분포를 따른다. f는 치환이므로, $c^* = f(s^* \parallel t^*)$도 균등분포를 따른다. 따라서 c^+와 동일한 균등분포를 따르므로, 공격자는 GAME_5에서도 동일하게 동작한다. 그러므로 $\Pr[\mathrm{AskH}_5] = \Pr[\mathrm{AskH}_4]$를 만족한다.

A 보조정리

보조정리 3. *E_1, E_2, F_1, F_2를 하나의 확률 공간 상에 정의된 사건들이라고 하자. 만약*

$$\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] = \Pr[E_2 \wedge \neg F_2], \quad \Pr[F_1] = \Pr[F_2] = \varepsilon$$

가 성립한다면, 다음을 만족한다.

$$|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]| \leq \varepsilon$$

Proof. $|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]|$은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$|\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] + \Pr[E_1 \wedge F_1] - \Pr[E_2 \wedge \neg F_2] - \Pr[E_2 \wedge F_2]|.$$

가정에 의해 $\Pr[E_1 \wedge \neg F_1] = \Pr[E_2 \wedge \neg F_2]$이므로, 다음과 같이 식을 줄일 수 있다.

$$|\Pr[E_1 \wedge F_1] - \Pr[E_2 \wedge F_2]|.$$

위 식을 조건부 확률로 표현하면 다음과 같다.

$$|\Pr[E_1 \mid F_1] \cdot \Pr[F_1] - \Pr[E_2 \mid F_2] \cdot \Pr[F_2]|.$$

가정에 의해 $\Pr[F_1] = \Pr[F_2] = \varepsilon$이므로, 위 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon \cdot |\Pr[E_1 \mid F_1] - \Pr[E_2 \mid F_2]|.$$

어떤 사건의 조건부 확률은 언제나 0 이상 1 이하이므로, $|\Pr[E_1 \mid F_1] - \Pr[E_2 \mid F_2]| \leq 1$을 만족한다. 따라서 다음을 만족한다.

$$|\Pr[E_1] - \Pr[E_2]| = \varepsilon \cdot |\Pr[E_1 \mid F_1] - \Pr[E_2 \mid F_2]| \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

□

메모 A.1. 두 사건 E_1, E_2의 확률이 어떤 Bad 사건 F가 발생할 때만 차이가 발생한다면, 두 사건의 확률 차이는 Bad 사건의 확률 이하로 조절된다는 의미이다. 암호학에서는, 두 게임 간 차이를 분석할 때 사용할 수 있다. 예를 들어,

- S_1: GAME_1에서의 성공 사건
- S_2: GAME_2에서의 성공 사건
- ε: 각각의 게임에서 발생할 수 있는 Bad 사건의 확률

이라고 할 때, 두 게임이 Bad 사건 외에서는 동일하게 동작하면, 두 게임의 성공 확률 차이는 Bad 사건의 확률 이하로 상한된다. 즉, $|\Pr[S_1] - \Pr[S_2]| \leq \varepsilon$이다.