Пункт 1: воспользуемся формулой Байеса:

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{p("+"\,|\,\text{брак})p(\text{брак})}{p("+"\,|\,\text{брак})p(\text{брак}) + p("+"\,|\,\text{не брак})p(\text{не брак})}$$

При этом:

$p("+"\,|\,\text{брак}) = 1 - 0.05$ - вероятность того, что прибор отработает правильно.

$p(\text{брак}) = 0.05$ - вероятность брака по условию.

$p("+"\,|\,\text{не брак}) = 0.05$ - ошибка прибора: брака нет, а он показывает, что есть.

$p(\text{не брак}) = 1 - p(\text{брак}) = 0.95$ - вероятность, что брака нет.

Итого

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{0.95 * 0.05}{0.95 * 0.05 + 0.05 * 0.95} = \frac{1}{2}$$

Пункт 2: Можно запускать прибор несколько раз, а затем выдать наиболее частый результат. Утверждается, что тогда ошибка первого и второго рода будет экспоненциально убывать по n, где n - число испытаний.

Пусть p_n - это ошибка первого после n измерений (она же равна ошибке второго рода из-за симметричности).

Понятно, что $p_n \leqslant P(\text{мы ошиблись} > n/2 \text{ раз})$ Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i - индикатор ошибки при i-ом измерении. Тогда это сумма независимых величин с распределением Бернулли с параметром $p = 0.05$ - ошибка первого (второго) рода.

$P(\text{мы ошиблись} > n/2 \text{ раз}) = P(X > n/2)$

Запишем неравенство Чернова: $P(X > (1+\varepsilon)pn) \leqslant e^{-\frac{pn\varepsilon^2}{4}}$

Положим $\varepsilon = 9$, тогда $P(X > n/2) \leqslant e^{-\Omega(n)}$ - убывает экспоненциально.

Но тогда с такой p_n, вероятность правильно ответить после n испытаний будет:

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{(1-p_n) * 0.05}{(1-p_n) * 0.05 + p_n * 0.95} \to 1,\ p_n \to 0$$

Пункт 3: обозначим $\mathrm{p}_{\text{брак}}$ - вероятность брака, а $\mathrm{p}_{\text{ошибка}}$ - вероятность ошибки прибора.

формулу Байеса из первого пункта можно записать как:

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{(1-\mathrm{p}_{\text{ошибка}})\,\mathrm{p}_{\text{брак}}}{(1-\mathrm{p}_{\text{ошибка}})\,\mathrm{p}_{\text{брак}} + \mathrm{p}_{\text{ошибка}}(1-\mathrm{p}_{\text{брак}})}$$

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{p}_{\text{ошибка}}(1-\mathrm{p}_{\text{брак}})}{(1-\mathrm{p}_{\text{ошибка}})\,\mathrm{p}_{\text{брак}}}}$$

$$p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{1}{1 + \frac{(\frac{1}{\mathrm{p}_{\text{брак}}}-1)}{(\frac{1}{\mathrm{p}_{\text{ошибка}}}-1)}}$$

Нетрудно видеть, что $p(\text{брак}\,|\,"+") = \frac{1}{2}$ т.е. прибор честная монетка, равносильно тому, что $\mathrm{p}_{\text{брак}} = \mathrm{p}_{\text{ошибка}}$;

$p_{\text{брак}} < p_{\text{ошибка}}$, равносильно $\frac{1}{p_{\text{брак}}} > \frac{1}{p_{\text{ошибка}}}$, равносильно $\frac{(\frac{1}{p_{\text{брак}}}-1)}{(\frac{1}{p_{\text{ошибка}}}-1)} > 1$, равносильно $p(\text{брак}\,|\,"+") < \frac{1}{2}$, т.е. хуже честной монетки;

Аналогично, $p_{\text{брак}} > p_{\text{ошибка}}$, то $p(\text{брак}\,|\,"+") > 1$, т.е. прибор лучше честной монетки.