◦ 확률과정. — 그냥 concept만 여기 적자.

#

측계과정

stochastic process 시계열을 포함으로 생각할 수 있다.

확률과정이란? 확률변수 가운 일반적인 연속 대상, 마르코프 연쇄, 포아송과정, 시계열등.

서론.

마르코프 연쇄

전이확률/천이확률

전방전이확률

m-단계 전이확률

전이확률 행렬(전이행렬)

과거와 콜모고로프의 방정식 $P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$, $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$

상태의 분류

$i \leftrightarrow j$ 반사성, $i \leftrightarrow j$ 이면 $j \leftrightarrow i$ 대칭성, $i \leftrightarrow j$ 이고 $j \leftrightarrow k$ 이면 $i \leftrightarrow k$ 추이성

*동치 관계 ; 위 세가지 조건을 만족하는 관계 $C_i = j \mid i \leftrightarrow j$

기약(Irreducible) 마르코프 연쇄 ; 동치류가 하나 (= 모든 상태가 서로 상호 도달)

비기약(reducible) " ; " 2개 이상

마르코프 연쇄의 전이확률이 오랜시간 경과하면? $P^{(n)}$의 각 열이 일정한 값으로 수렴.

$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ ⇒ 상태 j가 필요하고 충분한 조건은 상태의 수렴성.

버스의 도착시간 가상변수를 따르면 20분을 기다리든 30분을 기다리든 기대하는 시간의 기대값은 동일하다.

↳ 비기억성을 갖는 연속확률변수는 지수분포 밖에 없다

◦ 지수분포 ; 현실세계에서 비기억성을 가정하고 하면 비현실적이다. 그러나 이를 가정하면 계산의 용이성이 생김.

$$P(x \le t+h \mid X > t) = \frac{P(t < X \le t+h)}{P(X > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}$$

양변에 $\lim_{h\to 0} \frac{P(x \le t+h \mid X > t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{(1-F(t))h} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = r(t)$

$r(t)$; t시간까지 생존한 채 t를 지나면서 고장일 조건부 확률, 실패율 위험률(hazard) 함수.

$R(t) = \int_0^t r(t)$ ⇒ $F(t) = 1 - e^{-R(t)}$, $f(t) = r(t) e^{-R(t)}$, $r(t)$가 주어지면 X의 분포를 알 수 있음.

◦ 포아송 과정 ; 독립증분 - 서로 겹치지 않는 시간 구간에서 일어나는 사건의 발생수가 독립일때

정상증분 - 사건의 발생수가 그때의 시간구간의 길이에 따라 좌우될때

⇒ 모든 t인 포아송 과정에서 도착시간들을 $X_0, \cdots$ 라 한다면 서로독립이고 모두 같은 지수분포를 따른다

$X_1, \cdots$ 이 서로 독립이고 모두 t인 지수분포를 따른다면, t시간까지 발생한 사건의 실제 과정은 도착률 t인 포아송 과정이다.

◦ 계산과정 ; 계산 - 시간이 지나면 증가 새로운 표본 관찰 표본을 얻음

$A(t)$; t까지 총 계산표본 $\{n : S_n(\text{n번째 계산까지 걸리는 시간}) \le t\}$, $A(t)$를 계산과정이라 함.

⇒ n번 갱신까지 걸린 시간.

◦ 지수분포 ; 수명분포 $f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$

사용 { 수명분포 / 위험률

◦ 라플라스 변환 ; 음이 아닌 확률변수를 측정 다룸.

$L(\theta) = E(e^{-\theta X}) = \int_0^\infty e^{-\theta x} f(x)\,dx \ (\theta \ge 0)$ ⇒ θ는 불규칙 값을 가짐.

◦ 연속시간형 마르코프 과정.

이산시간은 상태에 머무는 시간에 관심 X

cf. 연속시간에서는 상태 i에 머무는 시간 T_i는 지수분포를 따름 (비기억성을 갖는 유일한 분포) ← 지수분포라면 마르코프성질에 위배.

생사과정 ; 계계들의 시간의 경과함에 따라 새로 생기거나 없어지는 현상을 포함하는 확률과정

$P_{i,i+1} = P(\text{현재상태가 } i+1 \mid \text{현재 상태 } i \text{에 들어옴}) = P(\tau_2 < T_i) = \int_0^\infty (1-e^{-\lambda_i t}) \mu_i e^{-\mu_i t} dt = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$

τ_i = 출생간격, T_n 사망경과시간.

◦ 마팅게일 ; 이름은 도박사가 이길때까지 판돈을 두배씩 늘려가는 게임이라는 뜻의 불어를 유래로 이다.

→ 확률이론 전개에 강력한 도구, 금융·IT 경영·산업 영역에 통계학·수산업·통신업 등 응용영역

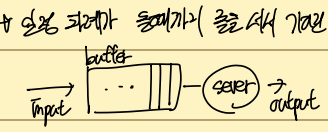
흔 과정 $X_n = X_0 + \sum b_i \tau_i$ (b_i: 베팅금액, τ_i 독립게임 확률 결과)

① $E(X_{n+1} \mid \tau_1, \tau_2, \cdots) = E(X_n \mid \tau_1, \tau_2, \cdots) + E(b_{n+1}\tau_{n+1} \mid \tau_1, \cdots) = X_n + b_{n+1} E(\tau_{n+1}) = X_n$ ← $E(\tau_n) = 0$ 일때 이용.

② $E(|X_n|) < \infty$ 이면 X_n을 마팅게일 이라 함.

◦ 대기행렬 이론

→ 일정 크기까지 들어가기 줄을 서서 기다리 서비스를 받고 떠나는 체계를 대기행렬 체계라 함



→ 마코비안 대기행렬 체계 도착과정이 1인 포아송, 서비스 분포에 밀도에 있어 지수분포를 따르는 대기행렬 시스템

◦ 브라운 운동 ; 미소 입자들이 불규칙하게 운동하는 현상. 기하학적 - 연속 상태공간의 연속시간형

마르코프 - 독립증분을 가진 확률과정

$X(t) = \mu t + \sigma B(t)$ (μ: 추세모수, σ^2: 확산모수)

→ 독립증분을 가져 마르코프 성질을 만족.

기하브라운 운동 $X(t)$가 브라운 운동 과정일때 $Y(t) = e^{X(t)}$를 만족하는 확률과정 ⇒ 주식가격 모형화 유용.