기수: 15 이름: 김재현

26-1 DSL 정규 세션

Math for ML

- □ 본 과제는 학회 정규 세션 「Linear Algebra」, 「Basic Statistics」 및 「Math for ML」 일부 내용을 다루며, 개념의 이해와 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack의 질의응답을 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.
- □ 2/11 (수) 23시 59분까지 Github 에 PDF 파일 하나로 제출해주십시오. Github에 제출하는 방법을 모른다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1　선형대수 기초 (Linear Algebra Basic)

1. $Ax = b$의 동치 조건

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음 조건들은 동치(equivalent)입니다.

(a) 행렬 A는 가역적(invertible)이다.

(b) 임의의 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여 방정식 $Ax = b$는 유일한 해를 갖는다.

(c) 동차 방정식(Homogeneous equation) $Ax = 0$은 오직 자명한 해(trivial solution, $x = 0$)만을 갖는다.

1-1. 다음과 같은 삼변수 함수 $f(x, y, z)$가 주어져 있습니다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1.5z^2 + xy + yz + zx$$

(1) 이 함수의 헤시안 행렬(Hessian Matrix) A를 구하고 PD(Positive Definite), PSD, ND, NSD 중 무엇인지 판별하시오.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + z$　$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + z$　$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z + y + x$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5) - (2-\lambda) + (\lambda - 1)$

$= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) + (\lambda-1)$

$= (\lambda-1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 7) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 7)$

$\therefore$ PD

(2) 위에서 구한 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 계산하시오.

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdots$　$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

(3) 만약 특정 상수 k에 대해 함수의 항 xy가 kxy로 변하여 $\det(A) = 0$이 된다면, 조건 (b)는 여전히 성립하는가? 그 이유를 행렬식(determinant)과 관련지어 설명하시오.

X. det(A)=0 이면 해가 없거나 무한히 많은 해를 갖는다.

1-2. (Optional)

(1) (a), (b), (c) 세 조건들이 동치임을 증명하시오.

(2) 행렬 A가 가역적이라고 가정할 때, 임의의 b에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 해 x가 항상 존재함을 대수적으로 유도하여 증명하고 해당 증명의 의미를 서술하시오.

문제 2 특이값 분해 (SVD)

특이값 분해(SVD)는 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

> 1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$를 구합니다.
>
> 2) 0이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$를 구합니다.

다음 행렬 B에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T를 각각 구하시오.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1. \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0. \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

기수: 15 이름: 김재현

문제 3 Convex Sets & Functions

3-1. Convex Set

1. 다음 집합들이 Convex set인지 증명하시오.

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$$
$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\}$$

C_1) $x_1+y_1 \leq 1 \quad x_2+y_2 \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 1.\quad \theta(x_1+y_1) + (1-\theta)(x_2+y_2)$

~~[illegible]~~

$\leq \theta + (1-\theta) = 1$

$\therefore$ convex set

C_2) ~~[illegible]~~

$\|\theta x + (1-\theta)y\|_1 \leq \theta\|x\|_1 + (1-\theta)\|y\|_1 \leq 1$

$\therefore$ convex set

C_3) $(\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta)y_2)$

$\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \geq \theta e^{x_1} + (1-\theta)e^{x_2}$

$e^{\theta x_1 + (1-\theta)x_2} \leq \theta e^{x_1} + (1-\theta)e^{x_2}$

$\therefore$ convex set

2. 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 convex function일 때, f의 epigraph인 집합 S가 convex set임을 보이시오.

$$S = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

3-2. Convex Function

1. Convex 함수의 합성

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 실수 값을 갖는 함수라고 합시다.

(a) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 convex일 때, $f(x) + g(x)$ 또한 convex임을 보이시오.

$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$, g도 마찬가지. $h = f+g$. $\quad f+g \leq \theta(f(x_1)+g(x_1)) + (1-\theta)(f(x_2)+g(x_2))$

$\therefore$ h도 convex

(b) A와 b가 호환되는 크기의 행렬과 벡터라고 합시다. $f(x)$가 convex라면 $f(Ax + b)$ 또한 convex임을 보이시오.

$Ax+b$는 선형변환 + 이동. 좌표계만 바뀌는 거라서 선형성이 깨지지 않음.

b는 영향없고

2. Convex Optimization

또 다른 함수 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$를 고려해 봅시다.

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

오직 convex 함수의 정의만을 사용하여, $f(x)$가 $x \in \mathbf{R}^d$에서 convex임을 보이시오.

$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$.

$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \|A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) - b\|^2 = \|\theta \underbrace{(Ax_1 - b)}_{u} + (1-\theta)\underbrace{(Ax_2 - b)}_{v}\|^2$

$= \|\theta u + (1-\theta)v\|^2$

$= \theta^2\|u\|^2 + (1-\theta)^2\|v\|^2 + 2\theta(1-\theta)u^Tv$

$\leq \theta\|u\|^2 + (1-\theta)\|v\|^2$

$\therefore f(x)$는 $\|Ax-b\|^2$에서 convex

기수: 15 이름: 김재현

문제 4 정보이론 (Information Theory)

4-1. Entropy

확률분포 $p(x, y)$가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

다음 값들을 구하시오.

(a) $H(X), H(Y)$. $H(x) = -\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$ $H(y) = -\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$

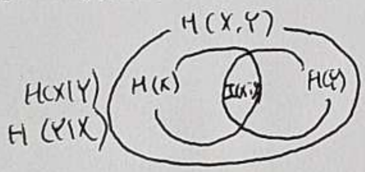
(b) $H(X \mid Y), H(Y \mid X)$. $H(X|Y) = \frac{1}{3}\log 1 + \frac{1}{3}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\log\frac{1}{2}$ $H(Y|X) = \frac{2}{3}\log\frac{1}{2}$

(c) $H(X, Y)$. $H(X,Y) = 3\log 3$.

(d) $H(Y) - H(Y \mid X)$. $-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\log 2 + \frac{2}{3}\log 3 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log 2$
$= \log 3$

(e) $I(X;Y)$. $= H(Y) - H(Y|X) = \log 3$

(f) (a)부터 (e)까지 구한 양(quantity)들을 벤 다이어그램으로 나타내시오.



4-2. KL-divergence

(a) $D(q\|p) = D(p\|q)$가 성립하지 않는 반례를 제시하시오. $D(p\|q) = \sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}$

$p = (0.9, 0.1)$
$q = (0.5, 0.5)$ $D(p\|q) = 0.9\log\frac{0.9}{0.5} + 0.1\log\frac{0.1}{0.5} \neq D(q\|p) = 0.5\log\frac{0.5}{0.9} + 0.5\log\frac{0.5}{0.1}$

(b) $D(p\|q) \geq 0$임을 보이시오. (Hint : Jensen's Inequality)

$\cancel{\sum p\log\frac{p}{q} \leq \log(\sum}$

$\sum p\log\frac{q}{p} \leq \log(\sum p\cdot\frac{q}{p}) = \log 1 = 0$. -1 곱하면

$-\sum p\log\frac{q}{p} = \sum p\log\frac{p}{q} \geq 0$.

Reference

- Elements of Information Theory (2nd Ed.), T. M. Cover & J. A. Thomas
- Convex Optimization for ML, Prof. Changho Suh

Data Science Lab
담당자: 14 기 박창용, 어희정, 여준호
qkrckddyd0@yonsei.ac.kr
heejung.uh@gmail.com
asap03153@gmail.com