学习笔记

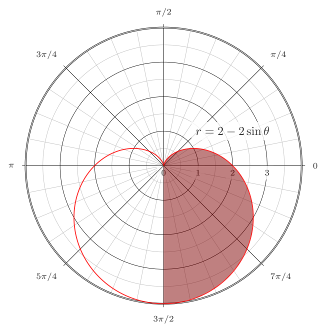
ElegantLaTeX 经典之作

作者：乐绎华

组织：SYSU

时间：February 16, 2024

版本：4.5



过去从未消失，未来已经存在。——史铁生《务虚笔记》

目录

第一部分

数学

第一章 一些链接

香蕉空间

中文数学 wiki

有界变差函数

有界变差函数和绝对连续函数

Lebesgue-Stieltjes 积分

functional monotone class theorem

单调函数左右极限都存在，且单调函数 = 连续函数 a.e.

笔记 汪林《数学分析中的问题和反例》pp143 中说明严格单调函数不可微的点不一定是间断点.

Banach 空间和不动点定理（完）：有趣的 Brouwer 不动点 - dhchen 的文章 - 知乎

区域不变定理

一堆笔记

第二章 竞赛班

学习注意事项：

1. 竞赛课和期末课不同, 竞赛课需要做的是培养自己解决问题的能力, 而不是记忆方法, 学习套路, 我们更多的是强调一种数学直觉, 有明确套路和步骤的问题都属于基础题.
2. 竞赛课尽量强调广泛性, 而不在熟练度上做文章, 换言之, 同类型的题我们基本只会一次, 重复性训练需要靠自己完成.
3. 不要只会做原题, 一个人水平怎么样, 就看他写的答案, 如果基本和参考答案方法一致, 那么这个人数学水平一定不行.
4. 除去一些基础特别好的学生外, 或多或少都会有自己基础知识不足的地方, 学习的时候感到吃力（大多数新学员都是必然的）要学会对应补充知识点.
5. 课程虽然分为非数学类和数学类, 纯属做难度上的区分, 建议都看.

第三章 范畴论

笔记 范畴论中，若存在，则在唯一的同构下唯一.

几篇文章

https://zhuanlan.zhihu.com/p/165040308

https://zhuanlan.zhihu.com/p/593293486

3.1 什么是范畴？

范畴就是一堆东西和这些东西之间的关系, 比如我们在研究整数比大小时, 一堆整数和这些整数之间的大小关系就属于我们讨论的范畴；研究函数映射时, 一堆集合和这些集合之间的映射就属于我们讨论的范畴；研究群论时, 一堆群和这些群之间的同态关系就属于我们讨论的范畴,

这些看似被划分的数学领域实际上可以被抽象成相同的内容. 在这些领域中, 我们讨论的东西被叫做**对象** (objects), 我们讨论的这些东西之间的关系被叫做**态射** (morphisms), 我们通常把一个范畴记为 C.

定义 3.1 (范畴, Category)

- 公理 C1(态射的复合): 如果 f 是一个从对象 A 到对象 B 的箭头,g 是从对象 B 到对象 C 的箭头, 那么我们可以把这两个箭头连起来组成一个从 A 到 C 的箭头. 严谨来说, 存在一个从 A 到 C 的箭头, 记作 $g \circ f$.
- 公理 C2 (复合运算满足结合律): 设 A, B, C, D 为对象, f, g, h 分别为从 A 到 B、从 B 到 C、从 C 到 D 的箭头, 则有
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
- 公理 C3 (单位态射): 对于每个对象 A, 都存在一个箭头 id_A, 使得对于所有从 A 到任意对象的箭头 f, 所有从任意对象到 A 的箭头 g, 都有
$$id_A \circ g = g, \qquad f \circ id_A = f$$

♣

一般来说, 对于范畴 C, 我们把所有对象 (objects) 构成的类记作 $Ob(C)$, 把所有态射 (morphisms) 记为 $Mor(C)$. 如果 f 是一个从对象 A 到对象 B 的态射, 则写作 $f : A \to B$. 对于给定对象 A 和对象 B, 全体从 A 到 B 的态射组成的类记作 $Hom_C(A, B)$. 下标在没有歧义的情况下可以省略.

定义 3.2 (局部小范畴, locally small category)

设 C 为范畴, 如果对于任意对象 A 和 B,$Hom_C(A, B)$ 是一个集合, 则称 C 为局部小范畴 (locally small category).

♣

定义 3.3 (小范畴, small category)

设 C 为局部小范畴, 如果 $Ob(C)$ 是一个集合, 则称 C 为小范畴 (small category).

♣

定义 3.4 (对偶, dual)

设 C 为范畴, 则 C 的对偶范畴 C^{op} 是一个范畴, 对象是 C 当中的对象, 态射是把 C 当中的每一个态射反转（即把箭头的起点变成终点, 终点变成起点）. 准确来说,C^{op} 是一个满足以下条件的范畴:

1. $Ob(C^{op}) = Ob(C)$.
2. 对于任意 $A, B \in Ob(C)$, 都有 $Hom_{C^{op}}(A, B)$=$Hom_C(A, B)$. 通常把 $f \in Hom_C(A, B)$ 在 $Hom_{C^{op}}(A, B)$ 中的态射记作 $f^{op} : B \to A$.

3. 对于任意 $A, B, X \in Ob(C)$, 任意 $f \in Hom_C(A, B), g \in Hom_C(B, X)$, 都有

$$(g \circ f)^{op} = f^{op} \circ g^{op}$$

Note: 在上述等式中, 等号左边表示 g 和 f 先在 C 中复合, 在取对偶范畴当中对应的态射. 右边表示两个态射在对偶范畴上复合.

♣

定义 3.5 (子范畴, subcategory)

设 C 为范畴. 则 C 的子范畴 $\mathcal{D}$ 是一个由 C 的一部分对象和这些对象之间的态射组成的范畴, 满足以下条件:

1. $\mathcal{D}$ 当中每一个对象的单位态射依然存在于 $\mathcal{D}$ 当中.
2. 如果存在 $A, B, C \in Ob(\mathcal{D}), f \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C)$, 则 f 和 g 在 $\mathcal{D}$ 当中存在复合态射, 且与在 C 当中的复合态射 $g \circ f$ 相同.

♣

定义 3.6 (全子范畴)

设 $\mathcal{D}$ 是 C 的子范畴,称 $\mathcal{D}$ 是 C 的全子范畴,若对于任意的 $A, B \in Ob(\mathcal{D})$,有 $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) = Hom_C(A, B)$.

♣

定义 3.7 (满子范畴, full subcategory)

设 $\mathcal{D}$ 是 C 的子范畴. 如果对于任意 $A, B \in Ob(\mathcal{D})$, 都有 $Hom_C(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$, (即对于任意两个对象, 如果它们都在 $\mathcal{D}$ 当中, 则它们之间在 C 上的所有态射都包含在 $\mathcal{D}$ 当中) , 则称 $\mathcal{D}$ 是 C 的满子范畴 (full subcategory).

♣

3.2 对象与箭头那些事

3.2.1 从熟悉的函数单射和满射开始

以往学函数的时候, 我们学过单射和满射. 对于一个集合之间的函数 $f : A \to B$, 如果 f 把不同的元素映射到了不同地方, 则我们称这个函数为**单射** (injective / one-to-one). 如果 B 当中的每个元素都在 f 的值域当中, 那么称 f 为**满射** (surjective / onto).

定义 3.8 (单射 (injective / one-to-one))

X, Y 是集合, 对于映射 $f : X \to Y$, 如果满足

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$$

或者

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X$$

则称 f 是单射.

♣

定义 3.9 (满射 (surjective / onto))

X, Y 是集合, 对于映射 $f : X \to Y$, 如果满足

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. f(x) = y$$

则称 f 是满射.

♣

我们希望能把这些词语翻译成范畴语言, 让范畴当中的态射也有类似于单射和满射的概念. 然而, 上次我们

说过，范畴是把集合等对象看成了一个个不可分割的东西，函数这种概念也变成了简单的箭头。我们没办法从对象里面取出一个元素，看它被映射到了哪里。我们能否在不考虑具体元素的情况下，去描述一个单射/满射呢？答案是可以的：我们可以通过函数复合的性质来判断一个函数是否为单射/满射.

命题 3.1 (单射 ⇔ 左可消)

设 A, B 为集合. 则函数 $f: A \to B$ 为单射 $\Leftrightarrow$ 对任何集合 C 和函数 $g, h: C \to A$, 如果

$$f \circ g = f \circ h$$

则 $g = h$.(这个条件被称为左可消)

证明 (“⇒”) 由于 $f \circ g = f \circ h$, 则 $\forall c \in C, f \circ g(c) = f \circ h(c)$, 即 $f(g(c)) = f(h(c))$, 则 $g(c) = h(c)$, 则 $g = h$.
(“⇐”) 对于 $a_1, a_2 \in A, s.t. f(a_1) = f(a_2)$, 令 $g, h: 0 \to A$ 分别把 0 映射到了 a_1, a_2, 则 $f \circ g = f \circ h$, 则 $g = h$, 故 $a_1 = a_2$,f 为单射. \\\\

命题 3.2 (满射 ⇔ 右可消)

设 A, B 为集合. 则函数 $f: A \to B$ 为满射 $\Leftrightarrow$ 对任何集合 C 和函数 $g, h: B \to C$, 如果

$$g \circ f = h \circ f$$

则 $g = h$.(这个条件被称为右可消)

证明 (“⇒”)$\forall b \in B, \exists a \in A, s.t. y = f(a), \Rightarrow g(b) = g \circ f(a) = h \circ f(a) = h(b), \Rightarrow g = h$.
(“⇐”) 若 $B = \varnothing$, 显然 f 是满射. 假设 $B \neq \varnothing$, 对于 $b \in B, g, h: B \to 0,1$ 其中 $g^{-1}(0) = b, g^{-1}(1) = B - \{b\}, h^{-1}(0) = \varnothing, h^{-1}(1) = B$. 如果 $b \notin \operatorname{Im} f$, 那么 $g \circ f, h \circ f$ 把所有元素都对应到 1, 故 $g \circ f = h \circ f$, 故 $g = h$, 矛盾! 故 $b \in B, \Rightarrow \operatorname{Im} f = B$. \\\\

笔记 这里 (“⇐”) 的证明中用到的思想：把 0,1 分开. 这个操作在 Hahn-Banach 定理9.1中也有用到.

单射和满射的等价定义还有 kernel 和 image 语言的版本，只不过只能对于线性映射. ref 单射和满射等价定义

定义 3.10 (单态射 (monomorphism))

设 $f: A \to B$ 为范畴 C 中的态射. 如果对于任意对象 X 和态射 $g, h: X \to A$, 都有 $f \circ g = f \circ h$ 当且仅当 $g = h$, 则称 f 为单态射, 或者单态 (monomorphism).

定义 3.11 (满态射 (epimorphism))

定义 2.4: 设 $f: A \to B$ 为范畴 C 中的态射. 如果对于任意对象 X 和态射 $g, h: B \to X$, 都有 $g \circ f = h \circ f$ 当且仅当 $g = h$, 则称 f 为满态射, 或者满态 (epimorphism).

笔记 不难看出, 单态和满态是相互对偶的两个概念. 一个态射是单态当且仅当它在对偶范畴当中是满态, 一个态射是满态当且仅当它在对偶范畴当中是单态.

3.2.2 一堆定义和记号

定义 3.12

给定范畴 C 和一个态射 $f: X \to Y$, 我们会在之后碰到一些特殊的态射, 我们撷取几类定义如下:

1. 称 f 为单态射 (monomorphism 或 monic), 若对任意态射 $g, h: Z \to X$, 都有 $fg = fh$ 蕴含 $g = h$;
2. 称 f 为满态射 (epimorphism 或 epic), 若对任意态射 $g, h: Y \to Z$, 都有 $gf = hf$ 蕴含 $g = h$;
3. 称 f 是双态射 (bimorphism), 若它既是单态射又是满态射;
4. 称 f 是一个收缩 (retraction), 若它右可逆, 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $fg = \mathrm{id}_Y$;

5. 称 f 是一个截面 (section) 或嵌入 (embedding), 若它左可逆, 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = \mathrm{id}_X$;
6. 称 f 是一个同构 (isomorphism), 若它可逆. 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = \mathrm{id}_X$ 且 $fg = \mathrm{id}_Y$;
7. 称 f 是一个自同态 (endomorphism), 若 $X = Y$;
8. 称 f 是一个自同构 (automorphism), 若 $X = Y$ 且 f 是同构;

♣

笔记

1. 显然 retraction 都是 epic, 而 section 都是 monic;
2. 所有态射均可逆的范畴称为广群或群胚 (groupoid);
3. 从这里可以看到一些具体结构的影子了, 一些常见的范畴中双态射就是同构 (如群范畴、线性空间范畴), 这样的范畴称为平稳 (balanced) 范畴, 拓扑空间范畴就不是平稳范畴.

定义 3.13

X 上的所有自同态构成类 $\mathrm{End}(X)$, 所有自同构构成类 $\mathrm{Aut}(X)$.

♣

定理 3.1

对于范畴中的态射 f , 试证明下述条件两两等价:

1. f 既是收缩单态射;
2. f 既是嵌入满态射;
3. f 是同构.

♡

并举一例说明双态射未必是同构.

今后若无特别说明, 用记号 $X \simeq Y$ 表示对象的同构 (即存在二者间的同构), 这显然是一个等价关系.

3.3 函子

3.3.1 函子的定义

函子实际上就是范畴之间的态射

定义 3.14 (函子 (functor))

一个范畴 $\mathcal{C}$ 到另一个范畴 $\mathcal{D}$ 的函子 (functor)$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 包含以下资料:

- 映射 $F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$;
- 映射 $F: Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{D})$.

满足

(i) $sF = Fs, tF = Ft$;[a]

(ii) $F(id_X) = id_{F(x)}$;

条件 (i) 相当于对任意两个对象 X, Y, 映射 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导了映射

$$F: Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \tag{3.1}$$

[a] 其中给出态射的定义域 (domain) 或来源 (source); 给出态射的值域 (codomain) 或目标 (target); 有的文献上用 dom 和 cod 表示这两个映射.

♣

定义 3.15 (协变 (covariant) 与反变 (contravariant) 函子)

称函子 F 为协变 (covariant) 函子, 如果

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

称函子 F 为反变 (contravariant) 函子, 如果

$$F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$$

♣

笔记 容易看到,$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反变函子实际上就是 $\mathcal{C}^{op}$ 到 $\mathcal{D}$ 的协变函子. 有些地方也把反变函子成为余函子 (cofunctor).
函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 自然诱导$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到$\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 的函子F^{op} , 但二者没有本质区别;

定义 3.16 (自函子 (endofunctor))

范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的函子称为该范畴的自函子 (endofunctor)($\mathcal{C}\to\mathcal{C}$); 一个最平凡的自函子是恒等函子 $id_{\mathcal{C}}$, 它在对象类和态射类上都是恒等映射. ♣

函子之间有自然的合成. 设又有范畴 $\mathcal{E}$ 及函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$, 则 $G\circ F$ 分别将对象间和态射间的类映射 F,G 复合即可. 这样就有

例题 3.1 小范畴的范畴 Cat 包括以下材料:

- 对象：全体小范畴;
- 态射：小范畴间的函子;
- 恒等态射：恒等函子;
- 态射复合：如上;

在此意义下, 取反范畴的操作给出一个 Cat 上的自函子 op, 它在函子 (即范畴的态射) 层面上的定义是自明的, 并且易见 op∘ op= id_{Cat}.

3.3.2 函子的一些性质

定义 3.17

对于函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$.

1. 称 F 忠实 (faithful), 若对任意两个对象,3.1 中的映射是单射;
2. 称 F 全 (full), 若对任意两个对象, 3.1 中的映射是满射;
3. 称 F 本质满 (essentially surjective), 若 $\mathcal{D}$ 中任意对象都与某个 $F(X)$ 同构;
4. 称 F 是一个嵌入 (embedding), 若它在态射层面是单射, 即对任意态射 f,g 都有 $F(f)=F(g)$ 蕴含 $f=g$.
5. 称 F 是一个同构, 若存在逆函子 $F^{-1}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 $F\circ F^{-1}$ 和 $F^{-1}\circ F$ 分别是两个范畴的恒等函子. ♣

定义 3.18 (函子的像 (image))

对于函子 $F:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$, 我们说 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_0$ 是 F 的像 (image), 若它满足

$$\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_0)=\{Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}):\exists X\in\mathcal{C}'\ \text{s.t.}\ F(X)=Y\},$$

$$\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C}_0)=\{g\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}):\exists f\in\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C}')\ \text{s.t.}\ F(f)=g\},$$

显然 $\mathcal{C}_0$ 确实是一个范畴. 而我们说 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_1$ 是 F 的本质像 (essential image), 若它满足

1. 对 $\mathcal{C}_1$ 中任意对象 X 和 $\mathcal{C}$ 中任意对象 Y , 只要有 $\mathcal{C}$ 中同构 $f:X\to Y$, 就有 Y 也是 $\mathcal{C}_1$ 中对象且 f 是 $\mathcal{C}_1$ 中态射;
2. 像 $\mathcal{C}_0$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的子范畴;
3. $\mathcal{C}_1$ 是所有满足 1.2. 的范畴的子范畴. ♣

笔记 一般来说对于 F 我们自然可以将它的目标缩小为其本质像考虑, 而若 F 全忠实, 则通过这种办法可以将它视为一个本质满的函子, 这样就能提供一个范畴等价.

3.4 积与余积

b 站课程

3.5 拉回与推出，等化子与余等化子

笔记 装 b 话语：原像是集合范畴中的拉回. $f : A \to B$，则 f^{-1}

3.6 极限与余极限

极限与余极限

笔记 极限与余极限就是“积与余积”、“终对象与始对象”、“拉回与推出”、“等化子与余等化子”的进一步抽象化，它是一个锥。

第四章 解析几何

利用系数判定二次曲线型

利用系数判定二次曲面型

平面截二次曲面为圆，计算平面方程，pp111

笔记 二次曲面分类

用二次型判断二次曲面类型

第五章 线性代数

5.1 线性空间

5.1.1 向量与向量空间

定义 5.1 (向量运算满足的 8 条规则)

1. 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3. 加法有单位元：$\alpha+0=\alpha$
4. 加法有逆元：$\alpha+(-\alpha)=0$
5. 纯量乘法：$1\cdot\alpha=\alpha$
6. 向量乘法分配：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
7. 纯量乘法分配：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
8. 纯量乘法结合：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

♣

设 V 是一个集合,$\mathbb{F}$ 是数域, 若在 V 上定义了元素的加法和 $\mathbb{F}$ 中的数对 V 中元素的数乘, 且这两种运算适合上面的 8 条运算规则, 则称 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间或向量空间.

5.1.2 线性映射

线性映射是一类特殊的映射, 它首先作为映射, 符合映射的一些性质??; 其次, 它是线性的, 因此具有一些额外的性质：

定义 5.2 (线性映射, 线性同构, 线性变换)

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的映射, 如果 φ 适合下列条件:

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\alpha,\beta\in V$
2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha),\alpha\in V,k\in\mathbb{F}$,

则称 φ 是向量空间 V 到 U 的线性映射. 若 φone-to-one&onto, 则称 φ 为线性同构.
同一向量空间 V 上的线性映射称为 V 上的线性变换.

♣

映射的核 (kernel) 和像 (image) 如下定义：

定义 5.3

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的线性映射, φ 的全体像元素构成 U 的子空间, 称为 φ 的像空间, 记为 $\operatorname{Im}\varphi$. 像空间的维数称为 φ 的秩.
V 中在 φ 下映射为零向量的全体向量构成 V 的子空间, 称为 φ 的核空间, 记为 $\operatorname{Ker}\varphi$. 核空间的维数称为 φ 的零度.

♣

线性空间中的单射和满射由如下定义：

定义 5.4

U,V 是线性空间, 对于线性映射 $f:U\to V$

- f 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f=0$
- f 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f=V$

♣

命题 5.1 (抽屉原理)

设 A, B 是等势集, 则任意单射（满射）$f: A \to B$ 自动是双射.

证明

- $\operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b), i.e. f(a-b) = 0 \Rightarrow a - b = 0, i.e. a = b \Rightarrow f$ 是单射.
- $\operatorname{Im} f = V \Rightarrow \forall x \in V, x \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists y \in V, s.t. x = f(y) \Rightarrow f$ 是满射. \\\\

定理 5.1 (线性映射维数公式)

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的线性映射, 则

$$\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V$$

5.1.3 线性同构

线性同构刻画了不同线性空间之间的相同本质, 即同构的线性空间具有相同的线性结构 (或从线性结构的观点来看没有任何区别). 要证明线性映射 $\varphi: V \to U$ 是线性同构, 通常一方面需要验证 φ 是单射 (或等价地验证 $\operatorname{Im} \varphi = U$). 但若已知前后两个线性空间的维数相等, 则由**线性映射的维数公式**容易证明,φ 是线性同构当且仅当 φ 是单射, 也当且仅当 φ 是满射, 从而只需要验证 φ 是单射或满射即可得到 φ 是线性同构.

5.2 多项式

定理 5.2 (牛顿 (Newton) 公式)

$$\begin{cases} s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0, & 1 \le k < n; \\ s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^k \sigma_n s_{k-n} = 0, & k \ge n; \end{cases}$$

证明

- $k \ge n$时

  为了出现$\sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 我们受到 Vieta 定理启发, 考虑

  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - \sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

  取$x = x_i$, 则上式 $= x_i^n - \sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$
- $1 \le k < n$时

  考虑$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^k k \sigma_k \overset{?}{=} 0$, 只需证每个形如$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$的单项前系数为0

  由于f最高次数为k, 故$i_1, i_2, \cdots, i_n$中至少有$n-k$项为0, 由对称性, 不妨设$i_{k+1} = i_{k+2} = \cdots = i_n = 0$

  只需证$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$单项前系数为0, 只需证$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$是零多项式, 这显然 (如果在中取$n = k$)

  牛顿公式

5.2.1 多项式可约性

定理 5.3 (分圆多项式)

一个任意的整系数多项式都可以表示成若干个分圆多项式的乘积.

分圆多项式

定理 5.4

首一整系数多项式的有理根必然是整数.

判定方法

命题 5.2

本原的整系数多项式[a] $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

[a]称一个整系数多项式是本原多项式，若它的所有系数都互素.

定理 5.5 (Eisenstein 判别法)

对于 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，如果存在素数 p，使得

$$p\nmid a_n,\ p\mid a_i\qquad(i=0,1,\cdots,n-1)\tag{5.1}$$

$$p^2\nmid a_0\tag{5.2}$$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

定理 5.6 (Perror 判别法)

对于 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，如果

$$|a_{n-1}|>1+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\tag{5.3}$$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

笔记 证明考虑使用鲁歇定理11.4.

5.3 特征值、对角化有关

几个网站：

矩阵可对角化充要条件

极小多项式和 Cayley-Hamilton 定理

Schur 三角化、Cayley-Hamilton 定理、谱分解、同时对角化、矩阵开方

判断 n 阶复矩阵 A(或 n 维复线性空间 V 上的线性变换 φ) 是否可对角化，通常有以下方法：

1. A 有 n 个线性无关的特征向量
2. A 有 n 个不同的特征值
3. A 的特征子空间的直和为 $\mathbb{C}^n$
4. A 的任一特征值的几何重数等于代数重数
5. A 的极小多项式无重根
6. A 的 Jordan 块都是一阶的
7. A 相似于实对称矩阵或者复正规矩阵

定理 5.7 (谱映射理论)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值组成集合 $\operatorname{spec}(A)=\{\lambda_i\}$, 若 p 是多项式，则 $\operatorname{spec}(p(A))=\{p(\lambda_i)\}$.

定理 5.8 (Schur 不等式)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\sum_{\lambda\in\operatorname{spec}(A)}|\lambda|^2\leqslant\|A\|_2^2=\operatorname{tr}(A^*A)$, 等号成立当且仅当 A 可对角化.

定理 5.9 (谱分解 (正规矩阵对角化))

在 $\mathbb{C}$ 上矩阵 A，如果满足 $AA^* = A^*A$，则称 A 复正规

- 若 A 正规，则存在酉矩阵 U 和对角阵 Λ，使得 $A = U\Lambda U^*$.
- 不妨设 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 和 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0)$，其中 $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p| > 0$，则 $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i u_i^*$.

♡

定理 5.10 (同时对角化)

- 可交换复 (实) 正规矩阵可同时合同对角化

♡

笔记 见28

5.4 求矩阵的逆

5.4.1 形式求解

有一个形式求解方法，可以直接看出一类题，无脑算就可以了，算出矩阵的逆之后再带回去验证即可.

例题 5.1 $A, B, AB - I_n$都是n阶可逆阵，求 $\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1}$的逆矩阵

解

$$
\begin{aligned}
\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1} &= \frac{1}{A - \frac{1}{B}} - \frac{1}{A} \\
&\overset{\text{注意这里矩阵乘法顺序，取逆时矩阵位置交换}}{=} B\frac{1}{\left(A - \frac{1}{B}\right)B} - \frac{1}{A} \\
&= B\frac{1}{AB - 1} - \frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}AB\frac{1}{AB - 1} - \frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}\left(AB\frac{1}{AB - 1} - (AB - 1)\frac{1}{AB - 1}\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(AB - (AB - 1)\right)\frac{1}{AB - 1} \\
&= \frac{1}{A}\frac{1}{AB - 1} \\
&= \frac{1}{(AB - 1)A}
\end{aligned}
$$

于是 $\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1}$的逆矩阵为 $(AB - I_n)A$.

例题 5.2 A为$m \times n$矩阵，B为$n \times m$矩阵，使得$I_m + AB$可逆，求$I_n + BA$的逆矩阵

解

$$
\begin{aligned}
(I_n + BA)^{-1} &= \frac{1}{1 + BA} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (BA)^k \\
&= 1 - B\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (AB)^{k-1}\right)A \\
&= 1 - B\frac{1}{1 + AB}A \\
&= I_n - B(I_m + AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

例题 5.3 设A,B均为n阶可逆阵，使得$A^{-1}+B^{-1}$可逆，求$A+B$的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}
(A+B)^{-1} &= \frac{1}{A+B} \\
&= \frac{1}{\left(1+BA^{-1}\right)A} \\
&= \frac{1}{A}\frac{1}{1+BA^{-1}} \\
&= \frac{1}{A}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(BA^{-1}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-B\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(A^{-1}B\right)^{k-1}\right)A^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-B\frac{1}{1+A^{-1}B}A^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{B^{-1}+A^{-1}}A^{-1}\right) \\
&= A^{-1}-A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)A^{-1}
\end{aligned}$$

Sherman – Morrison – Woodbury 公式形式推导：

我们可以借助形式幂级数方法形式上推导出该公式，再带回去验证成立.

定理 5.11 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式)

设A为n阶可逆阵，C为m阶可逆阵，B为$n\times m$矩阵，D为$m\times n$矩阵，使得$C^{-1}+DA^{-1}B$ 可逆，求证：

$$(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1} \tag{5.4}$$

注 这里只进行形式证明，带回去验证即可.

证明 注意到：

$$\begin{aligned}
(A+BCD)^{-1} &= \frac{1}{A+BCD} \\
&\overset{(A+BCD)^{-1}=\left(A\left(I+A^{-1}BCD\right)\right)^{-1}=\left(I+A^{-1}BCD\right)^{-1}A^{-1}}{=} \frac{1}{1+A^{-1}BCD}\frac{1}{A} \\
&= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(A^{-1}BCD\right)^k\right)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(A^{-1}BCD\right)^k\right]\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BCD+A^{-1}BCDA^{-1}BCD-A^{-1}BCDA^{-1}BCDA^{-1}BCD+\cdots\right)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\left(1-DA^{-1}BC+DA^{-1}BCDA^{-1}BC-\cdots\right)(D)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\frac{1}{1+DA^{-1}BC}D\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\frac{1}{C}\frac{1}{C^{-1}+DA^{-1}B}D\frac{1}{A} \\
&= A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}
\end{aligned}$$

直接验证可知：$A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$就是$A+BCD$的逆矩阵.

例题 5.4 设$A,B,A-B$都是n阶可逆矩阵，求$B^{-1}-A^{-1}$的逆矩阵.

解

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}-A^{-1}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{B}-\frac{1}{A}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)BB^{-1}} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{A}B\right)B^{-1}} \\ &= B\frac{1}{1-A^{-1}B} \\ &= B\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A^{-1}B\right)^{k}\right) \\ &= B\left(1+A^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(BA^{-1}\right)^{k-1}\right)B\right) \\ &= B\left(1+A^{-1}\frac{1}{1-BA^{-1}}B\right) \\ &= B\left(1+\frac{1}{A-B}B\right) \\ &= B+B(A-B)^{-1}B\end{aligned}$$

直接验证可知：$B+B(A-B)^{-1}B$就是$B^{-1}-A^{-1}$的逆矩阵.

5.4.2 行 (列) 满秩矩阵的右 (左) 逆

矩阵的左逆和右逆 - 帝民眉的文章 - 知乎

注 左逆和右逆一般来说有无穷多个，这里只是构造出来了一个.

5.5 秩不等式

例题 5.5 设A,B为n阶方阵,$AB=BA$,则有$r(A)+r(B)\geq r(A+B)+r(BA)$

证明 我们采用打洞法,结合退化的操作.

$$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A & B\\ O & B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A+B & B\\ -A & O\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{退化}}\begin{pmatrix}A+B & B(A+B)\\ -A & O\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A+B & O\\ -A & BA\end{pmatrix}$$

于是,$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}A+B & O\\ -A & BA\end{pmatrix}\geq r(A+B)+r(BA)$

其中退化为$\begin{pmatrix}A+B & B\\ -A & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & O\\ O & A+B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B & B(A+B)\\ -A & O\end{pmatrix}$,非可逆线性变换,秩减小

例题 5.6 设A,B为n阶方阵,$AB=BA$,则有$r(A)+r(B)\geq r\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}+r(AB)$

证明 我们采用打洞法,不等式比$r(A)+r(B)\geq r(A+B)+r(AB)$强

$$\begin{pmatrix}A & O & O\\ O & O & B\\ O & O & O\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A & A & O\\ O & B & B\\ O & O & O\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A & A & O\\ O & B & B\\ -BA & -BA+AB & AB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & A & O\\ O & B & B\\ -BA & O & AB\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A & A & O\\ B & B & B\\ O & O & AB\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A & O & O\\ B & O & B\\ O & O & AB\end{pmatrix}$$

于是, $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A & O & O\\ O & O & B\\ O & O & O\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}A & O & O\\ B & O & B\\ O & O & AB\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}+r(AB)$

5.6 行列式

定理 5.12 (Cauchy-Binet)

$A=(a_{ij})$ 是$m\times n$矩阵, $B=(b_{ij})$ 是$n\times m$矩阵. 考察 $|AB|$.

1. 若$m>n$, 则 $|AB|=0$
2. 若$m\leq n$, 则

$$|AB|=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n} A\begin{pmatrix}1 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

推论 5.1

考察AB的r阶子式

1. 若$r>n$, 则AB的任意r阶子式 $=0$
2. 若$r\leq n$, 则AB的r阶子式

$$AB\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq n} A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1 & \cdots & k_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$$

定义 5.5 (余子式和代数余子式)

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式, 划去第 i 行和第 j 列, 剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成了一个 n-1 阶行列式, 称为 $|A|$ 的第 $(i,)j$ 元素的余子式, 记为 M_{ij}. 而 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

笔记 A 的伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})$, 是 (i,j) 位置要反过来.

5.7 Jordan 标准型

利用循环轨道求 Jordan 标准型的过渡矩阵

5.8 一些细节

性质 任何数域都包括有理数域 $\mathbb{Q}$.

笔记 因此用摄动法书写的时候是写取一列 $\{t_k\}\in\mathbb{Q}\to 0$.

5.9 二次型

定理 5.13 (对角占优)

对于半正定阵 A, 若主对角元 $a_{ii}=0$, 则 A 的第 i 行和第 i 列全为 0.

证明 考虑含有 a_{ii} 的二阶主子式 ≥ 0 即可.

定理 5.14 (对角占优)

对于半正定阵，主对角块可以消去同行列的其它块.

证明 对于正定矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 考虑使用分块矩阵的第三类合同初等变换消去 B 得到 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & D - B'A^{-1}B \end{pmatrix}$ 对于半正定阵，考虑证明 $r(A \quad B) = r(A)$ 即可.

定理 5.15 (半正定阵的刻画)

下列关于实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 的命题等价:

1. A 是半正定阵
2. 存在主对角元全为 1 的上三角阵 b 和主对角元全为非负实数的对角阵 D，使得 $A = B'DB$
3. 存在主对角元全为非负实数的上三角阵 C，使得 $A = C'C$.

证明 证明主要是 (1) → (2)，考虑归纳证明，由于 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$ 半正定，所以根据定理5.14可知，可以用主对角元 A_{n-1} 消去同行列的 α, α'，得到分块对角阵，然后归纳即可.

笔记 还可以考虑矩阵 $A = \begin{pmatrix} & \alpha \\ a_11\alpha' & A_{n-1} \end{pmatrix}$

笔记 满足 (3) 的 C 并不唯一.

第六章 数学分析

6.1 基础概念

一致收敛

重积分与参变量积分

引理 6.1 (判别不一致收敛的一个方法)

若对每一 n，s_n 在 $x=c$ 左连续，但数列 $\{s_n(c)\}$ 发散，那么对于任意的 $\delta(0<\delta<c)$，函数列 $\{s_n\}$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必定不一致收敛 (参看《数学分析中的问题和反例》第 6 章问题 13).

定理 6.1 (Puiseux 展开)

定理 6.2 (单调函数的性质)

设 f 是 $[a,b]$ 上定义的递增函数，并设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是符合

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b \tag{6.1}$$

的 $n+1$ 个点. 于是有不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_k+)-f(x_k-)]\le f(b)-f(a). \tag{6.2}$$

命题 6.1

若 f 在 $[a,b]$ 上单调，则 f 的间断点集是可数集.

证明 不妨设 f 在 (a,b) 递增，并设 S_m 是 (a,b) 中一些点的集合，f 在这些点上的跃变超过 $\frac{1}{m}$. 如果 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ 在 S_m 内，则定理6.2告诉我们

$$\frac{n-1}{m}\le f(b)-f(a) \tag{6.3}$$

这表明 S_m 是有限点集. 而 f 在 (a,b) 内的间断点集是 $\bigcup_{m=1}^{\infty}S_m$ 的一个子集，故可数.

定义 6.1 (有界变差函数)

设 f 在 $[a,b]$ 上定义. $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个划分，如果存在 $M>0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le M \tag{6.4}$$

[a].e 对任意划分 P 成立，则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

[a]这个求和的上确界被称为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差 (Total variation)，记作 $TV(f)$ 或者 $V_f(a,b)=\sup\limits_{P}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

笔记 有界变差蕴含有界.

笔记 有界变差性质保加、减、乘，但不一定保商. 若加强为 f 有界离开 0[1]，则保商

[1]即 $\exists m>0$，s.t.$\forall x\in[a,b]$，有 $0<m\le|f(x)|$

命题 6.2 (导函数有界则有界变差)

若 f 在 $[a,b]$ 连续，f' 存在且在 $[a,b]$ 有界，则 f 在 $[a,b]$ 有界变差.

6.2 微分

定理 6.3

曲面 $r(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ 在某点处的切平面方向为

$$(\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)},\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)},\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)})$$

6.3 积佬

积分方法

化为重积分

再重积分一次解决超难三重积分

导一下再积回去

留数计算方法

Jordan 引理计算留数

引理 6.2 (Jordan 引理)

设 m 为正数，C_R 是以原点为中心，R 为半径，位于上半平面的半圆周. 当 $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{z\in C_R}|F(z)|=0$ 时，就有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz=0 \tag{6.5}$$

推论 6.1

当 $m>0$ 时，$F(z),G(z)$ 是上半平面的亚纯函数，且在 $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ 的范围内，当 $z\to\infty$ 时，$F(z),G(z)$ 一致地趋于 0，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\cos mxdx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[F\left(z\right)e^{imz}\right]\right\}(\text{上半平面各极点留数和}) \tag{6.6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)\sin mxdx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[G\left(z\right)e^{imz}\right]\right\}(\text{上半平面各极点留数和}) \tag{6.7}$$

笔记 若 $F(x)$ 是偶函数，$G(x)$ 是奇函数，就有

$$\int_{0}^{\infty}F(x)\cos mxdx=\mathrm{Re}\left\{\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[F\left(z\right)e^{imz}\right]\right\}(\text{上半平面各极点留数和}) \tag{6.8}$$

$$\int_{0}^{\infty}G(x)\sin mxdx=\mathrm{Im}\left\{\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[G\left(z\right)e^{imz}\right]\right\}(\text{上半平面各极点留数和}) \tag{6.9}$$

命题 6.3 (多值函数的积分计算)

计算 $\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx$

其中 $Q(x)$ 是有理函数，a 为非负整数. 当 $z\to 0$ 或 $z\to\infty$ 时，$z^aQ(z)\to 0$. 如图轨道.

于是

$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\sum \mathrm{Res}[z^{a-1}Q(z)] \tag{6.10}$$

$$= \frac{\pi}{\sin a\pi}\sum \mathrm{Res}[(-z)^{a-1}Q(z)] \quad [-\pi < \arg(-z) < \pi] \tag{6.11}$$

6.4 函数性态分析

例题 6.1

证明 $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 不成立

证明 不妨设 $f'''(x) > 0$, 否则用 $-f$ 代替 f

若 $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)f'(x) < 0, f' \uparrow$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) > 0, f \downarrow$

$$\begin{array}{cccccc} & f'(x+h) = & f'(x) + & f''(x)h + & \frac{f'''(\theta(x))}{2}h^2 & \\ x: & \wedge & & \downarrow & \vee & , as\ h \to +\infty, \text{矛盾!} \\ & 0 & \text{Const.} & +\infty & 0 & \end{array}$$

其余情况类似.

查看 axmath 文件

例题 6.2 设函数 $f \in C(\mathbb{R}), f'(x) - f^4(x) \to 0\ (x \to +\infty)$, 证明

$$f(x) \to 0\ (x \to +\infty)$$

答案看这里

例题 6.3 $f \in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$, 证明:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

答案看这里

6.5 细节

介值性与连续性的区别在于如果一个函数具有连续性, 那么它一定具有介值性; 如果一个函数具有介值性, 它不一定具有连续性. 但是, 具有介值性的函数不存在第一类间断点, 它可能存在第二类间断点.

6.6 我造的反例

关于连续函数与 Riemann 可积函数的复合 2023/12/31 构作

6.7 广义可积相对常义可积的区别

下面反例见汪林《数学分析中的问题和反例》208 页以后部分.

问题 6.1 存在 $(0,1)$ 上的一个无界函数，其广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不是对应的积分和数 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

问题 6.2 存在 $(0,1)$ 内的一个单调函数 f，使 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$ 存在，但 f 并不广义可积.

注 如果加上 f 在开区间 $(0,1)$ 单调，那么 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛可推出 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

若再加上 f 在 $x=0$ 或 $x=1$ 处有限，则 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 有限可推出 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛.

问题 6.3 存在 f,g 使得 f 广义可积，g 有界，但 fg 并不广义可积.

注 若加上 f 绝对可积，就有 fg 广义可积.

问题 6.4 存在 f 在 $(0,+\infty)$ 任意有界子区间可积，且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 发散.

笔记 考虑

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

注 但是对于二元函数 $f(x,y)$ 而言，我们有：若 $f(x,y)$ 在定义域 D 内任何有界子区域上可积，则积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

收敛的充要条件使该积分绝对收敛. 也就是说，广义二重积分是一种绝对收敛积分.

问题 6.5 存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 f,h 满足

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1,\quad \int_1^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}$$

而 $\int_1^{+\infty} h(x)f(x)dx$ 却发散.

问题 6.6 存在函数 f，使 $|f|$ 广义可积而 f^2 并不广义可积.

笔记 不论是无界函数 f 还是无界区间，都存在反例.

问题 6.7 存在 $[1,+\infty)$ 上的一个函数 f，使得 f^2 广义可积但是 $|f|$ 并不广义可积.

笔记 只有无界区间时才存在反例，无界函数的情况下，证明 $|f|$ 广义可积考虑

$$|f(x)| \le \frac{1+f^2(x)}{2}$$

即可得到.

注 对于常义积分，f,g 可积蕴含 fg 可积. 但上面两个问题说明：对于广义积分而言，这一点并不成立.

注 上面两个问题说明：

- 对于无穷限广义积分，平方可积和绝对可积互不蕴含.
- 对于有界区间上的无界函数，平方可积蕴含绝对可积，绝对可积不蕴含平方可积.

问题 6.8 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积的正值连续函数 f，但是 $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

注 可以证明，如果 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，那么

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

上面这个问题说明一致收敛性不能用正值连续性代替.

问题 6.9 广义积分的控制收敛定理 设 $\{f_n\}$ 在任何有界区间上一致收敛于 f，且 f_n 在任何有界区间上可积，又存在函数 F，使 $|f_n(x)| \le F(x)(n=1,2,\cdots)$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$$

收敛. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

笔记 证明细节见《数学分析中的问题和反例》pp280，思路是把无穷远点隔开.

问题 6.10 $[1,+\infty)$ 上的一个广义可积的函数列，其极限函数并不广义可积.

注 容易证明，对于一致收敛的可积函数列，其极限函数也是可积的. 上述反例说明，对于广义积分而言，相应的命题并不成立.

6.8 一些反例

命题 6.4

存在具有连续导数的严格递增函数，其导数在已给定的完备疏集上恒为 0.

笔记 设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集，令

$$\psi(x) = d(x,E) = \inf_{y\in E} |x-y|$$

则 ψ 在 $[0,1]$ 上连续，且当 $x \in E$ 时，$\psi(x)=0$，而当 $x \notin E$ 时，$\psi(x)>0$. 在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \int_0^x \psi(t)dt$$

则对任意 $x \in [0,1]$. 都有 $f'(x)=\psi(x)$. 特别地，当 $x \in E$ 时，有 $f'(x)=0$. 此外，f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 为验证这一结论，我们任取两点 x_1 和 x_2，$0 \le x_1 < x_2 \le 1$，由于 E 是疏集，因而在这两点之间存在着不含有 E 中的点的开区间 (α,β)，于是

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(t)dt \ge \int_\alpha^\beta \psi(t)dt = \psi(\xi)(\beta-\alpha)$$

其中 $\alpha < \xi < \beta$. 因为 $\xi \notin E$，所以 $\psi(\xi)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$，得证！

命题 6.5

$[0,1]$ 中测度为 $\alpha(0<\alpha<1$ 的任意实数) 的完备疏集.

笔记 令 $r=\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}$, 则 $0<r<\frac{1}{3}$. 我们先从闭区间 $[0,1]$ 中取走中间长度为 r 的开区间. 第二次从余下的两个闭区间中各自取走中间和长度为 r^2 的开区间, 第三次又从余下的四个闭区间中各自取走中间长度为 r^3 的开区间, 如此继续下去. 这样, 全部取走的开区间的总长为

$$\alpha = r + 2r^2 + 4r^3 + \cdots = r\left[1 + 2r + (2r)^2 + \cdots\right] = \frac{r}{1-2r}.$$

于是, 余下之集的测度为

$$1-\alpha = \frac{1-3r}{1-2r} = \alpha.$$

用这种方法得到的集通常称为具正测度的 Cantor 集, 它是一个完全疏集.

命题 6.6

结合命题6.4和命题6.5可知，存在连续可微的严格递增函数，它的临界点集是一个正测集.

命题 6.7

如果 f 不具备可积的导数，那么下式不成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{2} \tag{6.12}$$

注 若 f 绝对连续，则公式6.12成立.

证明构造见此

6.9 发现

定理 6.4

f 在 I 上可导，则 f' 绝对黎曼可积蕴含 f' 黎曼可积.

笔记 单独靠 f' 有原函数并不能说明 f 可积，单独靠 f' 绝对黎曼可积不能说明 f' 黎曼可积. 但是配合 f' 的介值性就可以了.

详情见这里

函数列一致收敛的极限刻画：

If $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \le |t| \le \pi\}$, then

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\delta) = 0$$

for every $\delta > 0$.

Another way of stating this is to say: for every $\delta > 0, Q_k(t) \to 0$ uniformly on $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

6.10 学会说话 & 分析学方法

6.10.1 汪林《数学分析中的问题和反例》

任意条件收敛级数的项都可以重排而给出发散级数或重排后其和为事先指定的任意数.pp249

非绝对收敛级数，适当地引进括号后变成绝对收敛级数.pp252

存在 $[1, +\infty)$ 上的正值连续函数 f，使 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\sum_1^{+\infty} f(n)$ 不同敛散性. 同敛散性要求 f 非负不增 pp253~254

存在广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛但在每个区间 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上无界的非负连续函数.pp254

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法的区别在于，Dirichlet 判别法将收敛放宽为有界振荡，但将单调有界严格为单调趋于 0，相当于调和掉了振荡的幅度.

pointwise conv. 只考虑固定 x，变化 n；uniformly conv. 考虑变化 n 和 x.

紧集会将局部的性质传递到整体，如果是证紧集内的结果，可以考虑先对某个局部证明，再用有限覆盖原理传递到整体.

度量空间中紧集具有可数稠密子集.pma Ex2.25

$\varphi \in C[a,b], f \in \mathcal{R}[a,b], f \in [A,B] \Rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$ 这里证明用到思想: 我一致连续有了 ε, δ, 我调整 n 使 $\delta \sum \leqslant \sum \leqslant \delta\varepsilon$, 我让 $n = n(\varepsilon, \delta)$ 而不是单纯的 $n(\varepsilon)$, 虽然本质相同, 都是 $n(\varepsilon)$, 但前者可以用到 φ 一致收敛给出的 δ, 相当于多用上了一个性质, 达到相对更强的效果.

连续函数复合可积函数还可积的证明

一致收敛可以将函数列的性质保留到极限函数上.

一致连续函数可以被线性函数控制.

每个幂级数必定是某个函数的 Taylor 展开式; 但是并非每个三角级数都是某个函数的 Fourier 级数.pp281~282

集合有限并保持函数性质，但是可数并不保持.pp283

有界函数列可以收敛于无界函数.(不一致收敛)pp284

不一致有界函数列可以收敛于有界函数.pp284

若一个函数序列一致收敛于某个函数，那么它一定是一致有界的；若一个函数序列一致收敛于某个函数，并且每个函数都是连续的，那么它一定是一致连续的.

连续函数的非一致极限也可能是连续的.pp285

处处收敛 (甚至可以收敛于 0) 的连续函数列，它却无处一致连续.pp286~287

各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数，它却无处一致收敛.pp287~288

一个递减的连续函数列，它收敛于某个连续函数，但并非一致收敛. 但如果加上在紧集上，那么必然一致收敛. 这说明紧集的条件是必要的.pp289

两个一致收敛的函数，它们的乘积不一致收敛. 但如果加上它们在公共定义域 D 上有界，那它们乘积也必然在 D 上有界.pp289

一个一致收敛的函数项级数，具有不一致收敛的重排.pp290~291

存在通用的连续函数列.pp291~293

$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f，如果 f 不是多项式，那么 f 不能用多项式一致逼近.pp293

一个一致收敛的函数项级数，但是无处绝对收敛.pp293

存在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对并一致收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 不一致收敛. 但是这个命题的逆是成立的.pp294

Weiestrass 判别法失效. 存在一个绝对并一致收敛的函数项级数，它没有正值的优级数.pp295

存在一个一致收敛的函数列 $\{f_n\}$，它导数的极限不等于极限函数的导数. 这说明逐项微分原理中 $\{f_n'\}$ 一致连续的条件是必要的.pp296

一个一致收敛的可微函数列，它导函数列无处收敛.pp296

一个无处一致收敛的可微函数列，它导函数的极限等于极限函数的导数.pp296

一致收敛的可积函数列，其极限函数也是可积的. 但是把可积换成一致可积就有反例.pp298

二元函数两个累次极限存在与二重极限存在互不蕴含.pp316

各方向极限存在且相等与两个累次极限存在且相等互不蕴含.pp319

各方向极限存在且相等不蕴含二重极限存在.pp318

函数的连续性和偏导数的存在性，二者互不蕴含.pp321

函数的弱可微和偏导数的存在性，二者互不蕴含.pp322~pp323

偏导数均不连续的可微函数.pp323

蕴含关系:偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow \begin{cases} \text{连续} \\ \text{偏导数存在} \\ \text{弱可微} \end{cases}$ .pp324

存在函数，它的偏导数在某点不连续且在该点附近的任何邻域内无界，但是此函数在该点处仍可微.pp324

有关的一切偏导数都存在，但是复合函数求导公式不成立的函数.e.g.$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.pp329

存在可微函数，它在定义域内只有一个驻点，而且这驻点是极大 (小) 点，但它不是最大 (小) 点. 我们知道若函数在 (a,b)(有限或无限，开或闭) 内可微，且在这个区间内有唯一的驻点，那么这个驻点是极值点蕴含它是最值点.pp331

有无穷多个局部极大值但是没有局部极小值的函数.pp333

一致连续可推出陡弦短，这仅在 $\mathbb{R}^1$ 上成立. 陡弦短蕴含一致连续.pp334

f 陡弦短的充要条件是是 f 一致连续且 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,s.t.$ 当 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时,$\|f(x)-f(y)\|\le M\|x-y\|$.pp334~335

对于可积函数，要考虑存在一些奇点的情况.

存在两个累次积分存在而不相等的函数.pp361

两个累次积分存在且相等，但是二重积分不存在.pp361

二重积分存在但是两个累次积分都不存在. 这说明二重积分存在和单积分存在是相互独立的条件.pp363

二重积分不存在，而只有一个累次积分存在.pp364~365

二重积分存在但只有一个累次积分存在.pp365

广义二重积分发散，但两个累次积分都存在.pp366

广义二重积分存在，但只有一个累次积分存在. 这说明广义二重积分存在和单积分存在是相互独立的.pp368

$f(x),g(x)$ 都在 $[0,+\infty)$ 广义可积，但是 $f(x)g(y)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 并不广义可积.pp369~370

间断二元函数的一个单积分连续.pp370

微分可换序性中 $f(x,y)$ 在 D 上的连续性条件是必要的.pp372

广义单积分连续性判别中，$\varphi(y)$ 一致收敛的条件是必要的.pp372

微分可换序性 (Leibniz 法则) 中 $f'_y(x,y)$ 在 D 上的连续性条件是必要的.pp373

不能用 Weiestrass 判别法找到优函数的一致收敛的参变量积分.pp373~374

一个曲面，它的内接多边形的面积不收敛于它的面积 (圆柱面). 这个例子说明，与曲线弧长相类似的定义对定义曲面的面积是不适用的.pp374~375

第七章 实分析

7.1 Littlewood's three principles of real analysis

1. Every set is nearly a finite union of intervals.
2. Every function is nearly continuous.
3. Every convergent sequence is nearly uniformly convergent.

7.2 测度论

定义 7.1 (环)

设X是集合,$\mathcal{P}(X)$是X的幂集,$\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(X)$.称$\mathcal{R}$为一个环，若$\mathcal{R}$满足：

1. 当$A,B\in\mathcal{R}$时，有限并运算封闭：$A\cup B\in\mathcal{R}$
2. 当$A,B\in\mathcal{R}$时，差集运算封闭：$A\backslash B\in\mathcal{R}$

环中的集合对有限交运算也是封闭的：当$A,B\in\mathcal{R}$时,$A\cap B=A\backslash(A\backslash B)\in\mathcal{R}$ ♣

这个环是近世代数中环15.2的特殊情况，这里的环中加法为对称差运算 $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$，乘法为交集运算 $A\cap B$.

证明

1. 验证 $(\mathcal{R},\Delta)$ 构成 Abel 群
   (a). $\varnothing\in\mathcal{R}$满足$A\Delta\varnothing=\varnothing\Delta A=A$，所以$\varnothing$是零元 (加法群的单位元)
   (b). 对任意$A\in\mathcal{R}$, A的加法逆元是A：
   $$A\Delta A=(A\backslash A)\cup(A\backslash A)=\varnothing$$
   (c). 交换性显然
   (d). 结合律$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$，画$Venn$图显然
2. 验证 $(\mathcal{R},\cap)$ 构成半群
   $$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$
3. 验证分配律
   $\begin{cases}A\cap(B\Delta C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C)\\(B\Delta C)\cap A=(B\Delta A)\cap(C\Delta A)\end{cases}$，由于 $\cap$ 具有交换律，故只需要证明其中一种情况
   $A\cap(B\Delta C)=A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))=A\cap((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c))=(A\cap(B\cap C^c))\cup(A\cap(C\cap B^c))$
   $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup((A\cap C)\setminus(A\cap B))=((A\cap B)\cap(A\cap C)^c)\cup((A\cap C)\cap(A\cap B)^c)$
   $=((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c))\cup((A\cap C)\cap(A^c\cup B^c))=((A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c))\cup((A\cap C\cap A^c)\cup(A\cap C\cap B^c))$
   $=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)=A\cap(B\Delta C)$

综上, $(\mathcal{R},\Delta,\cap)$ 符合近世代数中环的定义.

定义 7.2 (代数)

设 $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ 是环，如果 $\Omega\in\mathcal{R}$，称 $\mathcal{R}$ 是代数.

前面验证了 $(\mathcal{R},\Delta,\cap)$ 构成交换环，并且

$$A\Delta A=\varnothing,\qquad A\cap A=A$$

当 $\mathcal{R}$ 是代数时，环 $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ 有乘法单位元 Ω:

$$A\cap\Omega=\Omega\cap A=A$$ ♣

Borel 测度是一种前 Lebesgue 测度. 它具有最基本的测度的性质，但是在零测集上有一些问题，即可能零测集不可测，但是 Lebesgue 测度就没有这个问题，它是 Borel 测度的完备化.

详情见此知乎文章

7.3 一些定理

定理 7.1 (Brézis-Lieb)

If $\{f_n\}$ is a uniformly bounded sequence in $L^p(0 < p < \infty)$ that converges a.e. to f, then

$$\lim_{n\to\infty} \{\|f_n\|_{L^p} - \|f_n - f\|_{L^p}\} = \|f\|_{L^p}$$

笔记 这就有 Fatou's Lemma.

引理 7.1 (Fatou's Lemma)

$$\|f\|_{L^p} \le \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}$$

笔记 上面的定理7.1告诉我们两者的差是

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p}.$$

第八章 Rudin Papa

8.1 一些定义

定义 8.1 (support)
The support of a complex funtion f on a topological space X is the closure of the set

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

The collection of all continuous complex functions on X whose support is compact is denoted by $C_c(X)$, which is obviously a vertor space. ♣

注 pde 里面经常用卷积，核函数由紧支撑集就能够避免繁琐的收敛性讨论.

8.2 一些定理

Poisson 核

笔记 紧支集函数类把对应到 0 的部分去掉了，这些函数和 $G/\ker\sigma$15.17有点像.

绝对连续 (absolutely continuous) 表示函数的光滑性质，比连续和一致连续条件都要严格，比利普希茨条件宽松，是一类极为重要的函数。绝对连续函数几乎处处可微，是它的导函数的广义原函数。

定义 8.2 (Luzin-N property)
称 f 满足 Luzin-N property，如果它将 Lebesgue 0 测集映到 Lebesgue 0 测集 ♣

定理 8.1 (Banach-Zaretsky 定理)
$f \in C \cap BV$ and property Luzin-N $\Leftrightarrow f \in AC$. ♡

笔记 Banach-Zaretsky 定理 |Luzin (N)-性质与增长引理

定理 8.2 (Riesz Representation Theorem)
X 局部紧 Hausdorff，Λ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 那么存在一个包含所有 X 中 Borel 集的 $\sigma-$algebra $\mathfrak{M}$，有唯一 $\mathfrak{M}$ 上的正测度 μ 代表 Λ，即

$$\Lambda f = \int_X f d\mu, \forall f \in C_c(X) \tag{8.1}$$

并且有如下性质

1. $\mu(K) < \infty, \forall$ compact $K \subset X$.
2. $\forall E \in \mathfrak{M}$，有
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ open}\}.$$
3. $\forall$ 开集 E，或 $\forall E \subset \mathfrak{M}$ with $\mu(E) < \infty$
$$\mu(E) = \sup\{\mu(E) : K \subset E, K \text{ compact}\}.$$
4. 若 $E \in \mathfrak{M}$，$A \subset E$，$\mu(E) = 0$，则 $A \in \mathfrak{M}$. ♡

第九章 泛函分析

9.1 一些空间

下面我们介绍在泛函分析中几个空间的定义, 有 linear space5.1, Hilbert space, normed space, Banach space.

定义 9.1 (normed space)

$(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ is a normed space if

1. $x \longmapsto \|x\| : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$
2. $\|x\| \geq 0, \forall x$
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}, x \in \mathscr{X}$
5. $\|x+\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathscr{X}$

Then let $\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathscr{X} \implies \rho$ is metric.

♣

定义 9.2 (Banach space)

Def $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ is Banach space if ρ is complete.

♣

定义 9.3 (metric linear space)

Def $(\mathscr{X}, \rho)$ metric linear space if

1. $\mathscr{X}$ is vector space.
2. ρ is metric.
3. $f : \begin{array}{c} \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}, g : \begin{array}{c} \mathbb{F} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$ are conti. in ρ.

♣

定义 9.4 (Fréchet space(目前几乎不用))

Def $(\mathscr{X}, \rho)$ is Fréchet space if

1. $\mathscr{X}$ metric linear space.
2. ρ is complete.
3. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \forall x, y, z \in \mathscr{X}$ (translation – invariant)

♣

9.2 泛函分析三大定理

1. Open Mapping Theorem9.1
2. Inverse Mapping Theorem9.2
3. Hahn - Banach Theorem9.3

定理 9.1 (Open Mapping Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ bdd operator & onto.

Then T is open.

♡

定理 9.2 (Inverse Mapping Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ 1-1, onto, bdd operator.
Then $T^{-1} : Y \to X$ is bdd.

笔记 下面三个定理是等价的:
1. Open Mapping Theorem9.1
2. Inverse Mapping Theorem9.2
3. Closed Graph Theorem9.4

这三个定理对于 nonlinear functional 是不成立的.

定理 9.3 (Hahn - Banach Theorem)

X normed space over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $Y \subset X$ subspace(not necessarily closed), $y^* : Y \to \mathbb{F}$ bdd, linear functional. Then y^* can be extended to bdd linear $x^* : X \to \mathbb{F}, s.t. \|x^*\| = \|y^*\|$

笔记 Hahn - Banach 定理有着众多有用的推论.

推论 9.1 (Hahn-Banach 定理)

X normed space over $\mathbb{F}$, $Y \subseteq X$ subspace, $x_0 \in X \backslash Y$. Then $\exists x^* \in X^*, s.t. x^*(x_0) = 1, x^*(Y) = \{0\}$, where $d = \inf_{y \in Y} \|y - x_0\| > 0$.

推论 9.2 (Hahn-Banach 定理)

X normed space over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$ in X. Then $\exists x^* \in X^*, s.t. x^*(x_0) = \|x_0\|, \|x^*\| = 1$

推论 9.3 (Hahn-Banach 定理)

X Banach space, T invertible operator on X. Then $\inf\{\|T - S\| : S \text{ noninvertible on } X\} = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

推论 9.4 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $X \neq Y \in X$. Then $\exists x^* \neq X^*, s.t. x^*(x) \neq x^*(y)$.

推论 9.5 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $x \in X$. Then $x \in X$
Then $\|x\| = \sup_{x^* \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|}$.

笔记 $\|x^*\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}$, $\forall x^* \in X^*$
这是 $\|x^*\|$ 的定义, 这个推论体现了 x 和 x^* 的对偶性质.

推论 9.6 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $Y \subseteq X$subspace. Then $\overline{Y} = X \Leftrightarrow$ "$\forall x^* \in X^*, x^*(y) = 0, \forall y \ \Rightarrow x^* = 0$"

推论 9.7 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, $(x^* : X \to \mathbb{F})$, let $x_0 \in X$, $x_0 \notin \ker x^*$.Then $\forall x \in X$, $x = z + \lambda x_0$ for some $z \in \ker\ x^*, \lambda \in \mathbb{F}$ uniquely.

9.3 其它定理

定理 9.4 (Closed Graph Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ linear transformation. Assume $G_T := \{(x, Tx) : x \in X\}$ closed in $X \times Y$. Then T bdd.

笔记 这个定理有时候可以用来证明线性泛函的连续性.

9.4 谱理论

9.4.1 Fredholm-Riesz-Schauder Theory

引理 9.1

T compact on X, $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \ker(\lambda I - T)$ finite-dim subspace of X.

See proof here.

引理 9.2

T, λ as above.

Then $\mathscr{R}(\lambda I - T)$ closed.

See proof here and here..

引理 9.3

Denote $\ker(\lambda I - T)^n$ by N_λ^n

$\exists k \geq 1, s.t. N_\lambda^1 \subsetneqq N_\lambda^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_\lambda^n = N_\lambda^{n+1} = \cdots$

See proof here

引理 9.4

$\lambda I - T$ onto$\Leftrightarrow$ $\lambda I - T$ 1-1

See proof here.

引理 9.5

$\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ indep. in X^*.

$\Rightarrow \exists \{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subseteq X, s.t. x_i^*(x_i) = \delta_{ij}, \forall i, j$

See proof here.

引理 9.6

$\dim \ker(\lambda I - T) = \dim \ker(\lambda I - T^*) < \infty$

See proof here.

9.5 核

Dirichlet 核与 Fejér 核

第十章 吴培元实变函数 2

10.1 第一节课

定义 10.1

$(\mathscr{X},\mathscr{A},\mu)$ *is measure space.* $1\le p\le\infty$.

$L^p(\mathscr{X},\mu) := \left\{ f:\mathscr{X}\to\mathbb{R}, measurable, \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathscr{X}}|f|^p<\infty, if\ 1\le p<\infty \\ ess.sup\,|f|<\infty, if\ p=\infty \end{array} \right. \right\}$

$\rho(f,g) := \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\mathscr{X}}|f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}, if\ 1\le p<\infty \\ ess.sup\,|f-g|, if\ p=\infty \end{array} \right.$

$\|f\|_p := \left(\int_{\mathscr{X}}|f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

♣

定理 10.1 (Rieze-Fisher Thm(1907))

$L^p(\mathscr{X},\mu)$ is complete metric space.

♡

证明

- $1\le p<\infty$:

笔记 $p=1$ proved last semester.

笔记

1. 先证明 $\|\cdot\|_p$ 中的 Cauchy sequence 在 $\|\cdot\|_1$ 中也是 Cauchy sequence.
2. 由于 $L^1(\mathscr{X},\mu)$ complete , 故该 Cauchy sequence 收敛于某个 $L^1(\mathscr{X},\mu)$ 中的 f in $L^1(\mathscr{X},\mu)$
3. 再证明 $f\in L^p(\mathscr{X},\mu)$
4. 再证明该 Cauchy sequence 收敛于 f in $L^p(\mathscr{X},\mu)$

Let $\{f_n\}$ cauchy in $L^p(\mathscr{X},\mu)$, i.e.

$$\rho(f_m,f_n)\to 0 \implies \int_{\mathscr{X}}|f_n(x)-f_m(x)|^p\to 0 \tag{10.1}$$

- Check: $|f_m-f_n|\to 0, a.e.$ i.e.

$$\forall\varepsilon,\delta>0,\exists N, s.t. m,n\ge N, s.t. \mu(\{x\in\mathscr{X}:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\varepsilon\})<\delta \tag{10.2}$$

Denote $\{x\in\mathscr{X}:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\varepsilon\}$. by $E_{m,n}$. Then $|f_n-f_m|^p$ *integrable* $\Rightarrow\mu(E_{m,n})<\infty$,otherwise $\int_{\mathscr{X}}|f_n-f_m|^p\ge\int_{E_{m,n}}|f_n-f_m|^p\ge\int_{E_{m,n}}\varepsilon^p=\varepsilon^p\mu(E_{m,n})\to\infty$.Therefore, $|f_n-f_m|^p\ge\varepsilon^p\chi_{E_{m,n}}$.

$$\begin{array}{cccccc} & \int|f_n-f_m|^p & \ge\int\varepsilon^p\chi_{E_{m,n}} & =\varepsilon^p\mu(E_{m,n}) & \\ \Rightarrow & \downarrow & & \downarrow & as\ n,m\to\infty. \\ & 0 & \Rightarrow & 0 & \end{array} \tag{10.3}$$

Hence, $\exists f_{n_k}\to f, a.e.$ in $L^1(\mathscr{X},\mu)$

- Check: $f\in L^p(\mathscr{X},\mu)$ $|f_{n_k}|^p\to|f|^p, a.e.$

Fatou's Lemma$\Rightarrow\int|f|^p\le\underline{\lim}_k\int|f_{n_k}|^p\le\sup_n\int|f_n|^p$ $\{f_n\}$ cauchy in $\|\cdot\|_p$. Then $\forall\varepsilon>0,\exists N, s.t.$

$$\|f_n-f_N\|_p<\varepsilon,\forall n\ge N$$

$$\|f_n\|_p\le\|f_n-f_N\|_p+\|f_N\|_p<\varepsilon+\|f_N\|_p\,(\text{which is a const.})<\infty,\forall n\ge N$$

Hence, $L^p(\mathscr{X},\mu)$.

- Check: $f_n\to f$. in $L^p(\mathscr{X},\mu)$.

We have $\begin{cases} \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p \overset{if\ n,n_k\ large}{<} \varepsilon. \\ \left\|f_{n_k} - f\right\|_p = \left(\int \left|f_{n_k} - f\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{Fatou}{\leq} \underline{\lim}_{l} \left(\int \left|f_{n_k} - f_{m_l}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{if\ n_k,m_l\ large}{\leq} \varepsilon \end{cases}$

Then

$$\|f_n - f\|_p \leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p + \left\|f_{n_k} - f\right\|_p \to 0$$

Hence, $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{X}, \mu)$.

- $p = \infty$:

笔记 类似 $1 \leq p < \infty$.

Let $\{f_n\}$ cauchy in $L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$. i.e.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \overset{as\ n,m\ large}{<} \varepsilon\ a.e. \tag{10.4}$$

Therefore, $\{f_n(x)\}$ cauchy for almost all x. i.e. $f_n(x) \to f(x), a.e.$

- Check: $f_n \to f\ in\ \|\cdot\|_\infty$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \overset{as\ n,m\ large}{<} \varepsilon\ a.e. \underset{Let\ m \to \infty}{\Rightarrow} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\ a.e.$$

Hence, $f_n \to f\ in\ \|\cdot\|_\infty$.

- Check: $f \in L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$.

$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, if\ n \geq N$. Then

$$\|f\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \|f - f_N\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon < \infty$$

Hence, $f \in L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$.

In conclusion, every Cauchy sequence conv. in $L^p(\mathscr{X}, \mu), (1 \leq p \leq \infty)$, thus $L^p(\mathscr{X}, \mu), (1 \leq p \leq \infty)$ is complete metric space.(defined in 10.1) \\\\

第一节课的证明

定理 10.2

$(\mathscr{X}, \rho)$ metric space, $\varnothing \neq F_n \subseteq \mathscr{X}$ compact $\forall n$

$\Rightarrow \cap_n F_n \neq \varnothing$.

证明 Select x_{n_k} in each nonempty set F_{n_k}, thus the sequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ in a sequentially compact set F_1. So $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge to a point $x \in F_1$. Since $F_n, \forall n$ is closed, then $x \in F_{n_k}, \forall k$. Obviously, if $x \in F_n$, then $x \in x_m, \forall m \leq n$. Since $x_{n_k} \to \infty$, then $x \in F_n, \forall n$, then $x \in \cap_n F_n$.

定理 10.3 (Baire theory)

第一纲集是一列无内点闭集的并，否则是第二纲集.

定理 10.4 (Baire theorem)

$(\mathscr{X}, \rho)$ complete metric space

$\Rightarrow \mathscr{X}$ is of 2nd category

or $\mathscr{X} = \cup_n \mathscr{X}_n$ where $\mathscr{X}_n$ closed $\Rightarrow \quad \exists x_0, s.t. \mathrm{Int}\mathscr{X}_{n_0} \neq \varnothing$.

引理 10.1

一个空间是可分的当且仅当它有可数稠密子集.

定义 10.2 (sequentially compact space)

假设 X 是拓扑空间，如果 X 的每一个序列都有一个收敛子列，那么 X 就被称为是序列紧致空间。

定理 10.5

$(\mathscr{X}, d)$ metric space, $K \subseteq \mathscr{X}$ sequentially compact space.

$\Rightarrow K$ is closed, bdd, separable.

证明

1. Pick a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ in $\mathscr{X}$, where $x_n \in K, \forall n$, and we request $x_n \to x \in \mathscr{X}$.
   Then $\exists$ a subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $y \in K$. Hence, $x = y \in K$, thus K is closed.
2. We need to show $\sup_{x,y\in K} d(x,y) < \infty$.
   Assume not, then $\forall n, \exists x_n, y_n \in K, s.t. d(x_n, y_n) > n$.
   Pick $z \in K$, then $d(z, x_n) + d(z, y_n) \geq d(x_n, y_n) > n$. Then $d(z, x_n) \geq \frac{n}{2}$ or $d(z, y_n) \geq \frac{n}{2}$. Then $\exists$ a subsequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ of $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots\}$,s.t.$d(x, u_n) \geq \frac{n}{2}$.
   Then $\exists \{u_{n_k}\} \to u$, $d(u, u_{n_k}) + d(u, z) \geq d(u_{n_k}, z) \geq \frac{n}{2}, \forall n$. Let $k \to \infty$, then $d(u, u_{n_k}) \to 0$, then $d(u, z) \geq \frac{n}{2}, \forall n$. Then $d(u, z) = \infty$, however, $u, z \in K \subseteq \mathscr{X}$, which is a metric space. This is a contradiction!
3. We need to show that there is a countable dense subset of K. Pick $x_1 \in K$, let $d_1 := \sup_{x\in K} d(x, x_1) > 0$, then $\exists x_2 \in K, s.t. d(x_1, x_2) \geq \frac{d_1}{2}$. Let $d_2 := \sup_{x\in K} \{d(x, x_1), d(x, x_2)\} > 0$, then $\exists x_3 \in K, s.t. \min(d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)) \geq \frac{d_2}{2}. \cdots$.
   Let $d_n := \sup_{x\in K} d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots, d(x, x_n)$, then $\exists x_{n+1} \in K, s.t. \min(d(x_{n+1}, x_1), d(x_{n+1}, x_2), \cdots, d(x_{n+1}, x_n)) \geq \frac{d_n}{2}, \cdots$. Then we get a sequence in K, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

   - Check: $d_n \to 0$
     $\because d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq 0, \lim_{n\to\infty} := \alpha$. If $\alpha > 0$, then $d(x_m, x_n) \geq \frac{d_n}{2} \geq \frac{\alpha}{2} > 0, n > m$. Then there is no convergent subsequence, which contradicts with the sequentially compact property.
   - Check: $\exists x_n \in B(x_0, \varepsilon), \forall x_0 \in K$
     Pick d_n, with $\varepsilon > d_n^+ > d_n > 0$, if $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \notin B(x_0, \varepsilon)$, then $d(x_0, x_i) \geq \varepsilon > d_n^+, \forall 1 \leq i \leq n+1$, then $\sup_{x\in K} \min(d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots, d(x, x_{n+1})) \geq d_n^+ > d_n$, which contradicts with the definition of d_n.

□

定理 10.6

$(\mathscr{X}, d)$ metric space, $K \subseteq \mathscr{X}$

Then $\mathscr{X}$ compact $\Leftrightarrow \mathscr{X}$ sequentially compact.

推论 10.1

$K \subseteq \mathscr{X} \Rightarrow K$ closed, bdd, separable.

$K \subseteq \mathscr{X} \not\Leftarrow K$ closed, bdd, separable.

定义 10.3 (totally bdd)

$K \subseteq \mathscr{X}$ is totally bdd if $\forall \varepsilon > 0, \exists B(x_1, \varepsilon), \cdots, B(x_n, \varepsilon), s.t. K \subseteq \cup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.

笔记 K totally bdd $\Rightarrow K$ bdd.

K totally bdd $\not\Leftarrow K$ bdd.

第十一章 复分析

一般情况下，X 是一个拓扑空间，f 是 Ω 上的复值函数.

11.1 一些定义

定义 11.1 (curve)

X 中的曲线 (curve) 是一个从 $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}^1$ 中的紧集到 X 的连续映射.

定义 11.2 (Holomorphic function (Analytic function) 全纯函数 (解析函数))

称 f 为 Holomorphic function，若

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{11.1}$$

存在，对于任意 $z_0\in\Omega$. 同时，将 Ω 上的全纯函数集合记为 $H(\Omega)$.

笔记 $H(\Omega)$ 构成一个环 (ring)15.2，运算为函数加法和乘法.

笔记 所有 $f\in H(\Omega)$ 都可以被 Ω 内幂级数表示.

笔记 我们将整个复平面上的 Holomorphic function 称为 Entire function.

定义 11.3 (Meromorphic function(亚纯函数))

A meromorphic function therefore may only have finite-order, isolated poles and zeros and no essential singularities in its domain.

笔记 亚纯函数是全纯函数的一种推广，它定义域内没有 essential singularities，但是允许有离散的 removable singularities 和 poles，依然能保持比较好的性质.

定义 11.4 (closed path 闭合路径)

cloed path = closed curve[a] + path[b].

[a]称一条曲线为闭合曲线 (closed curve)，若它起点和终点相同.

[b]称一条曲线为路径，若它分块连续可微. 导数可以在有限个点处跳跃

定理 11.1

令 γ 为一个闭合路径，令 Ω 为 γ^*[a]的补集 (w.r.t. the plane)，定义

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}\quad(z\in\Omega) \tag{11.2}$$

那么 Ind_γ 是一个 integer-valued function on Ω，它在 Ω 的每个组成部分上为常数，并且在 Ω 的无界组成部分上为 0.

[a]γ^* 表示 γ 的值域

笔记 我们称 Ind_γ 为 the index of z w.r.t. γ.

定义 11.5 (moderate decrease)

称 f moderate decrease，若 f 连续且存在 $A>0$，使得 $|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}$.

笔记 A more restrictive condition is that $f \in \mathcal{S}$, the schwartz space of testing functions, which also implies that $\hat{f}$[1] belongs to $\mathcal{S}$.

11.2 一些定理

定理 11.2

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in H(\Omega)$ iff f 在 Ω 上处处满足 Cauchy-Riemann 方程[a].

[a] 即 u, v 在 Ω 处处可微且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

定理 11.3 (The residue formula)

$f \in H(O)$, O contains circle C and its interior, except for a pole at z_0 inside C. Then

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f. \tag{11.3}$$

笔记 $\operatorname{res}_{z_0} f$ 表示 f 在 z_0 洛朗展开后的系数 a_{-1}.

留数的形式推导

笔记 对于有限个 pole 也对，对于非圆形轮廓 γ 也对.

笔记 关于留数怎么算，见《积分的方法与技巧》pp325.

定理 11.4 (鲁歇定理)

$f, g \in H(O)$, O is an open set containing a circle C and its interior. If

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$$

then f and $f + g$ have the same number of zeros inside the circle C.

定理 11.5 (Open mapping theorem)

If $f \in H$ and nonconstant in a region Ω, then f is open[a].

[a] A mapping is said to be open if it maps open sets to open sets

定理 11.6 (Maximum modulus principle)

If $f \in H$ non-constant in a region Ω, then f cannot attain a maximum in Ω.

证明 假设 f 在 z_0 取得最大模 $|f(z_0)|$，取开圆盘 D，使得 $z_0 \in D$. 那么根据开映射定理，$f(D)$ 也是开的，所以存在 $z \in D$，使得 $|f(z)| > |f(z_0)|$，矛盾！

推论 11.1

Ω is a region with compact closure $\bar{\Omega}$. If $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, then

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \le \sup_{z \in \bar{\Omega} - \Omega} |f(z)| \tag{11.4}$$

[1] $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$，表示傅里叶变换.

第十二章 常微分方程

12.1 一般理论

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{12.1}$$

定理 12.1 (Picard 存在唯一性定理)

对于微分方程及初值条件:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ \ x(t_0)=x_0 \tag{12.2}$$

矩形区域:

$$R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:|t-t_0|\le a,\ \ |x-x_0|\le b\} \tag{12.3}$$

$f(t,x)$ 在 R 上连续，若还满足 Lipschitz 条件 [a]，则我们有初值问题12.2在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上的解存在且唯一，其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},\quad M=\max\{|f(t,x)|:(t,x)\in R\}. \tag{12.5}$$

[a]称 $f(x,t)$ 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L>0$，使得对于任意 $(t,x_1)\in R,(t,x_2)\in R$，有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le L|x_1-x_2| \tag{12.4}$$

都成立. 称 L 为 Lipschitz 常数.

♡

笔记 在实际应用中，Lipschitz 条件往往难以检验. 这时我们常常用 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续来代替. 因为若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续，则必有界，这由 Lagrange 中值定理立刻得到.

若 $f(t,x)$ 在 R 上连续但是不满足 Lipschitz 条件，那么初值问题12.2的解依然存在，但是不唯一. 这就是 Peano 存在定理.

定理 12.2 (Peano 存在定理)

若 $f(t,x)$ 在 R 上连续，则初值问题12.2在区间 $I=[t_0-h,t_0+h]$ 上至少有一个解. 其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},\quad M=\max\{|f(t,x)|:(t,x)\in R\}. \tag{12.6}$$

♡

定理 12.3 (解的延拓理论)

设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开区域，$f(t,x)$ 在 G 内连续. 对初值问题12.2的任一饱和解 $x=\varphi(t)$，积分曲线 $x=\varphi(t)$ 必能到达 G 的边界. 特别地，当 G 为有界区域时，饱和解 $x=\varphi(t)$ 的存在区间为 (a,b)，则当 $t\to b^-$ 和 $t\to a^+$ 时都有

$$\rho((t,\varphi(t)),\partial G)\to 0 \tag{12.7}$$

♡

笔记 对于 Peano 存在定理12.2中的解，我们可以考虑取新的 t_0 为 R 内的解与 ∂R 的交点，这样就又存在一个小矩形 R' 使得解可以再次延伸. 不断重复这种操作直到不能再解延伸，得到的解就称为饱和解. 由这些操作可知，饱和解的存在区间不可能是任何一个闭区间.

笔记 由解的延拓理论12.3不难看出：如果 $G\subseteq\mathbb{R}^2$ 是无界区域，$f(t,x)$ 在 G 内连续，微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的过 G 内任一点 (t_0,x_0) 的解 $x=\varphi(t)$ 可以延拓，以向 t 增大的一方的延拓来说，则解 $x=\varphi(t)$ 或者可以延拓到区间 $[t_0,+\infty)$，或者只能延拓到有限区间 $[t_0,m)$. 如果是后者，则当 $t\to m^-$ 时，要么 $x=\varphi(t)$ 无界，要么 $(t,\varphi(t))$ 趋于 G 的边界.

笔记 就是说要么 t 无界，要么 $x=\varphi(t)$ 无界.

推论 12.1 (解存在于所有 f 连续有界的区间)

若 $f(t,x)$ 在区域 $G=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : T_0<t<T_1, |x|<\infty\}$ 中连续，而且相应的微分方程初值问题饱和解 $x=\varphi(t)$ 有界，则 $\varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0,T_1).

笔记 这个推论12.1的证明是说，如果解 $x=\varphi(t)$ 在 (T_0,T_1) 的任何一个子开区间内结束存在性，则这个解是无界解. 取逆否命题则得到推论12.1.

推论 12.2 (Wintner)

设 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在区域

$$G=\{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^{n+1} : T_0<t<T_1, \|\mathbf{x}\|<\infty\}$$

内连续且满足条件

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|\le L(r),\ r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \tag{12.8}$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$，$L(r)$ 在 $r\ge 0$ 上连续，在 $r<0$ 时为正，且

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dr}{L(r)}=\infty \quad (\alpha>0) \tag{12.9}$$

则 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 的任一饱和解 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 都在区间 (T_0,T_1) 上存在.

笔记 这个定理最重要的是证明的思路，导出矛盾的操作.

证明 我们反证，假设 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 解的最大存在区间为 $(a,b)\subset(T_0,T_1)$，不妨设 $b<T_1$，显然 b 有限. 任取一点 $t_0\in(a,b)$，我们断言 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 (t_0,b) 上有界，于是由解的延拓理论12.3可知，$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 b 处还可以右延拓，这与 (a,b) 是解的最大存在区间矛盾!

下面验证：$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 在 (t_0,b) 上有界. 我们反证，假设无界. 那么存在一列 $\{t_n\}\in(t_0,b)$，显然 $t_n\to b(n\to\infty)$，使得 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_n)\to\infty$. 另一方面，$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 是微分方程的解，则有：

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_ix_i'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i'^2=\sum_{i=1}^{n}x_i'^2=\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\|=\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|\le L(r) \tag{12.10}$$

于是有

$$\int_{t_0}^{t_n}\frac{dr}{L(r)}\le\int_{t_0}^{t_n}dt=t_n-t_0 \tag{12.11}$$

令 $n\to\infty$，就有

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{dr}{L(r)}\le b-t_0<\infty \tag{12.12}$$

这与 $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\frac{dr}{L(r)}=\infty$ 矛盾! □

推论 12.3 (在 $x\in\mathbb{R}^1$ 时)

设 $f(t,x)$ 在域

$$G=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : T_0<t<T_1, |x|<\infty\}$$

内连续，且存在与 t 无关的常数 N，使得

$$|f(t,x)| \leq N|x| \tag{12.13}$$

则微分方程12.2的任一饱和解 $x=\varphi(t)$ 都在区间 (T_0,T_1) 上存在.

定理 12.4 (第一比较定理)

设函数 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(t,x) < F(t,x) \tag{12.14}$$

设 $(t_0,x_0)\in G$，$\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{12.15}$$

和初值问题

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{12.16}$$

的解，且都在区间 (a,b) 上有定义. 则有

$$\varphi(t) < \Phi(t),\quad \forall t\in(t_0,b) \tag{12.17}$$

$$\varphi(t) > \Phi(t),\quad \forall t\in(a,t_0) \tag{12.18}$$

笔记 非常直观地理解，直接画个图，$F(t,x)$ 比 $f(t,x)$ 要陡，于是不等式12.17和不等式12.18是显然的.

在方程的初值问题没有唯一性保证的时候，最大解和最小解的概念是有用的.

定义 12.1 (最大解和最小解)

设 $f(t,x)$ 在矩形区域

$$R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:|t-t_0|\leq a,|x-x_0|\leq b\}$$

上连续，令 $M=\max\{|f(t,x)|:(t,x)\in R\}, h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$. 再设 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题12.2在区间 $I=[t_0-h,t_0+h]$ 上的两个解，使得对初值问题12.2的任意一个解 $\psi(t)$，都有当 $t\in[t_0-h,t_0+h]$ 时，

$$\varphi(t)\leq\psi(t)\leq\Phi(t) \tag{12.19}$$

则称 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题12.2的最小解和最大解.

笔记 由定义知最大解和最小解都是唯一的，且均存在，而且类似于解的延拓定理12.3，我们可以把初值问题12.2的最大解和最小解延拓到域 G 的边界.

定理 12.5

存在 $\delta>0$，使得 $\delta<h$ 且在区间 $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 上，初值问题12.2的最大解和最小解都存在.

定理 12.6 (第二比较定理)

设函数 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式 $f(t,x)\leq F(t,x)$. 设 $(t_0,x_0)\in G$，$\varphi(x)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题12.15和初值问题12.16的解，且都在区间 (a,b) 上有定义，$\Phi(t)$ 是初值问题12.16在区间 (t_0,b) 上的最大解和区间 (a,t_0) 上的最小解. 则有

$$\varphi(t)\leq\Phi(t),\forall t\in(t_0,b) \tag{12.20}$$

$$\varphi(t)\geq\Phi(t),\forall t\in(a,t_0) \tag{12.21}$$

笔记 这个没啥用，主要就是第一比较定理12.4

例题 12.1 若初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx), x(0) = x_0 \tag{12.22}$$

的积分曲线与直线 $x = t$ 当 $t > 0$ 时有交点，则

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

其中 $x_0 > 0$，$x(t)$ 为初值问题的解.

接下来我们考虑带有参数 λ 的高阶微分方程：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \lambda), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \tag{12.23}$$

笔记 我们可以通过平移的方式使得 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$ 变成 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. 因此不妨设初值条件为 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$

定理 12.7 (连续依赖性定理)

设 $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，其中

$$G = \{(t, \mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : |t| \le a, \|\mathbf{x}\|, \|\lambda - \lambda_\mathbf{0}\| \le c\} \tag{12.24}$$

而且 $\mathbf{f}$ 对 $\mathbf{x}$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, \mathbf{x_1}, \lambda) - f(t, \mathbf{x_2}, \lambda)\| \le L\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| \tag{12.25}$$

其中 $L \ge 0$ 是常数. 则初值问题12.23的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域 $D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m : |t| \le h, \|\lambda - \lambda_\mathbf{0}\| \le c\}$ 上连续，其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

$$M = \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)\| : (t, \mathbf{x}, \lambda) \in G\}$$

♡

定理 12.8 (整体连续依赖性定理)

设 $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，其中 G 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上一个开区域，$\mathbf{f}$ 对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件，即 $\forall P \in G$，存在以 P 为中心的矩阵邻域 $\Omega(P) \subset G$，使得 $\mathbf{f}$ 在 $\Omega(P)$ 上是 Lipschitz 的. 设 $\mathbf{x} = \xi(t)$ 是微分方程组12.1的一个解，它至少在区间 $[a, b]$ 上存在. 则存在常数 $\delta > 0$，当初值点 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足条件

$$a \le t_0 \le b, \quad \|\mathbf{x_0} - \xi(t_0)\| \le \delta$$

时，12.1满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0 = \mathbf{x_0})$ 的解 $\varphi(t; t_0, \mathbf{x_0})$ 至少也在 $[a, b]$ 上存在，且在区域

$$D_\delta = \{(t, t_0, \mathbf{x_0}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : t, t_0 \in [a, b], \|\mathbf{x_0} - \xi(t_0)\| \le \delta\}$$

上对 $(t, t_0, \mathbf{x_0})$ 连续.

♡

定理 12.9 (C^1 依赖性定理)

设 G 定义同定理12.7，$\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，且对 $\mathbf{x}, \lambda$ 有连续偏导数. 则初值问题12.23的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域

$$D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m : |t| \le h, \|\lambda - \lambda_\mathbf{0}\| \le c\}$$

上是连续可微的，其中 h, M 的定义同定理12.7.

♡

第十三章 偏微分方程

13.1 基础概念

定义 13.1

如果一个偏微分方程定解问题满足以下条件:

1. 它的解存在;
2. 它的解唯一;
3. 它的解连续地依赖定解条件和定解问题中的已知函数,

则称这个定解问题是适定的; 肉则称这个定解问题是不适定的.

定理 13.1 (大一统公式)

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{13.1}$$

定理 13.2 (格林公式)

$D \subset \mathbb{R}^n$ 是平面上由有线条可求长闭曲线围成的闭区域, 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{13.2}$$

其中 ∂D 取正向.

笔记 在物理中我们用格林公式表示对环流量的计算,$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy$

定理 13.3 (高斯公式)

假设 $V \in \mathbb{R}^3$ 是空间上的一个有界闭区域, 其边界 ∂V 由有限张分块光滑的双侧曲面组成, 并取外法向, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\partial V} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{13.3}$$

$$= \iint_{\partial V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS \tag{13.4}$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为边界 ∂V 的外法线方向的方向余弦.

13.2 调和函数

称函数 $u = u(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为调和函数, 如果它满足 Laplace 方程:

$$\Delta u = 0 \tag{13.5}$$

引理 13.1 (n 维球体积公式)

$$\alpha(n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

笔记 对 n 维球取个截面再积分即可，这个截面是 (n-1) 维球.

证明

$$\alpha(n)=2\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\alpha(n-1)\,dt=2\alpha(n-1)\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dt=\alpha(n-1)\int_0^1(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt \tag{13.6}$$

$$=\alpha(n-1)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\alpha(n-1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=\sqrt{\pi}\alpha(n-1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \tag{13.7}$$

$$\Rightarrow\alpha(n)=\frac{\alpha(n)}{\alpha(1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k-1)}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}=\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

定理 13.4 (平均值公式)

$u\in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，则对于任意的球 $B(x,r)\subset\Omega$，有

$$u(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy \tag{13.8}$$

这里 $\alpha(n)=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的体积.

笔记 平均值公式表明 $\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$ 与 r 无关.

而 $\dfrac{1}{\alpha(n)r^n}\displaystyle\int_{B(x,r)}u(y)\,dy$ 是 $\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$ 对 r 的积分平均，显然相等.

证明

- 为了对 r 求导,$\phi(r):=\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$

  由于积分外和积分区域都有 r，所以我们考虑把 r 消掉一个. 做平移伸缩变换得:

$$\phi(r)\overset{dS(y)=dS(x+rz)=r^{n-1}dS(z)}{=}\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\,dS(z)$$

  对 r 求微商:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\phi(r)&=\frac{d}{dr}\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\,dS(z)=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}\frac{d}{dr}u(x+rz)\,dS(z)\\&=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}z\cdot\frac{du}{dr}(x+rz)\,dS(z)\overset{\text{变回去}}{=}\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{y-x}{r}\cdot\frac{du}{dr}(y)\,dS(y)\\&\overset{\frac{y-x}{r}\text{等于单位法向量}}{=}\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial\boldsymbol{n}}dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\,dy=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\phi(r)\text{ 为常数},u(x)=\lim_{x\to0^+}\phi(x)=\phi(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$$

- 注意到 $\displaystyle\int_{B(x,r)}u(y)\,dy=\int_0^r\int_{\partial B(x,t)}u(y)\,dS(y)dt$，故

$$\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_0^r\int_{\partial B(x,t)}u(y)\,dS(y)dt=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}u(x)\,dt=u(x) \tag{13.9}$$

综上，$u(x)=\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)=\dfrac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy$ \\\\

第十四章 群论

第十五章 近世代数

宝藏网站

15.1 基础观点

定义 15.1 (群)

设 G 是一个非空集合，称其为一个群，如果在 G 上定义了一个代数运算，通常称为乘法，满足：

1. $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in G$(结合律)
2. G 中有一个元素 e，使得
$$ea = ae = a, \forall a \in G$$
称 e 是 G 的单位元
3. 对于 G 中的每个元素 a，存在 $b \in G$，使得
$$ba = ab = e$$
称 a 可逆，把 b 称为 a 的逆元，记作 a^{-1}

如果群 G 的乘法还满足交换律，则称 G 是交换群或 Abel 群.

定义 15.2 (环)

设 R 是一个非空集合，称其为环 (ring)，若 R 上定义了两个代数运算，加法与乘法，满足下面 6 条运算性质：

1. $a + b = b + a, \forall a, b \in R$(加法交换律)
2. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$(加法结合律)
3. R 中有一个元素，记作 0，它具有下述性质：
$$a + 0 = 0 + a, \forall a \in R$$
称 0 是 R 的零元
4. 任给 $a \in R$，都有 $b \in R$，使得
$$a + b = b + a = 0$$
把 b 称为 a 的负元，记作 $-a$
5. $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in R$(乘法结合律)
6. $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in R$(左分配律)
$(b + c)a = ba + ca, \forall a, b, c \in R$(右分配律)

定理 15.1

设 R 是有单位元 $e(\neq 0)$ 的环，则 R 的零因子不是可逆元.
即 R 的可逆元不是零因子.

笔记

- $\mathbb{Z}_m$ 的所有可逆元组成的集合记作 $\mathbb{Z}_m^*$，容易验证它是一个群，被称为 $\mathbb{Z}_m$ 的单位群.
- $\mathbb{Z}_m$ 的每个元素要么是可逆元，要么是零因子.
- $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$, 其中$m = m_1 m_2, (m_1, m_2) = 1$

定理 15.2

在 $\mathbb{Z}_m$ 中,$\overline{a}$ 是可逆元当且仅当 $(m,a)=1$.

定义 15.3 (域)

设 F 是一个有单位元 $e(\neq 0)$ 的交换环, 如果 F 中每个非零元都是可逆元, 那么称 F 是一个域 (field).
即域中不存在非 0 的零因子.

定义 15.4 (域的特征)

设域 F 的单位元为 e. 称域 F 的特征为 0, 若 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 有 $ne\neq 0$; 称域 F 的特征为 p, 若存在一个素数 p, 使得 $pe=0$, 而对于 $0<l<p$, 有 $le\neq 0$.
域 F 的特征记作 $\operatorname{char} F$.

笔记 模 p 剩余类域 $\mathbb{Z}_p$ 的特征为 p; 任一数域的特征为 0. 这就是 $\mathbb{Z}_p$ 与数域的本质区别.

定理 15.3

$m=m_1+m_2,(m_1,m_2)=1$ 则 $\sigma:\overline{x}\mapsto\left(\overline{x},\widetilde{x}\right)$ 是$\mathbb{Z}_m$到$\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$的一个环同构映射, 从而$\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$.

15.2 群

15.2.1 循环群

定义 15.5 (循环群)

设群 G 的运算记作乘法 (或加法), 如果 G 的每一个元素都能写成 G 的某个元素 a 的整数次幂 (或者 a 的整数倍) 的形式, 那么称 G 为循环群, 把 a 叫做 G 的一个生成元, 并把 G 记作 $\langle a\rangle$.

定义 15.6 (阶)

对于群 G 的元素 a, 若存在正整数 n, 使得 $a^n=e$(或 $na=0$), 则把其中最小的正整数 n 称为 a 的阶, 记作 $|a|$; 若 $\forall n\in\mathbb{Z}^*$ 都有 $a^n\neq e$(或$na\neq 0$), 则称 a 是无限阶元素.

命题 15.1 (循环群的判定)

有限群 G 是循环群当且仅当 G 中有个元素阶等于 $|G|$.

证明 考虑有限群中阶的定义,n 是最小的.

命题 15.2

群 G 的运算为乘法, 设 G 中元素 a 的阶为 n, 则 $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$\left|a^k\right|=\frac{n}{(n,k)}$$

证明 考虑 $\frac{n}{(n,k)}$ 与 $\left|a^k\right|$ 相互整除.

命题 15.3

设 G 是有限 Abel 群, 则 G 中有一个元素的阶是其他元素的阶的倍数.

证明 考虑阶最大的元素, 它的阶一定是 $|G|$, 假设有个元素阶不是 $|G|$ 的因子, 那么这个元素和阶最大的元素搞

在一起可以生出一个阶更大的元素, 矛盾!

定理 15.4 (循环群的判定)
设 G 是有限 Abel 群. 如果对于任意的正整数 m, 方程 $x^m = e$ 在 G 中的解的个数不超过 m, 那么 G 是循环群.

证明 设群 G 中阶最大的元素为 a, 阶数记为 n. 由命题15.3,G 中每个元素的阶都是 n 的因数. 故 G 中任意元素 x 都满足 $x^n = e$. 由题意, 这些元素的个数不超过 n, 即 $|G| \leq n$.
由于 a 的阶为 n, 故 $e, a, \cdots, a^{n-1}$ 都在 G 内且两两不同, 故 G 中至少有 n 个元素, 即 $|G| \geq n$.
综上: $|G| = n$. 由命题15.1,G 是循环群.

定理 15.5
设有限域 F, 则 F^* 成循环群.

证明 容易验证 F^* 成群, 再由代数基本定理, 方程 $x^m = e$ 在 F^* 中的解的个数不超过 m, 结合定理15.4, 可知 F^* 是循环群.

推论 15.1
p 是素数, 则 $\mathbb{Z}_p^*$ 是循环群.

定理 15.6
$\mathbb{Z}_m^*$ 是循环群当且仅当 m 为以下形式之一:

$$2, 4, p^r, 2p^r, \quad \text{其中} p \text{是奇素数}, r \in \mathbb{N}^*.$$

定义 15.7 (群同构)
如果群G到群$\widetilde{G}$有一个双射σ, 使得

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \forall a, b \in G$$

那么称σ是G到$\widetilde{G}$的一个群同构映射, 此时称群G与群$\widetilde{G}$是同构的, 记做$G \cong \widetilde{G}$.

命题 15.4
群同构保单位元, 保逆, 保阶.

证明
1. 若e是G的单位元,则$\sigma(e)$是$\widetilde{G}$的单位元,因为$\sigma(a) = \sigma(ae) = \sigma(a)\sigma(e)$,易证单位元左右相同且唯一.
2. $\sigma(e) = \sigma(aa^{-1}) = \sigma(a)\sigma(a^{-1})$,故$\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$,易证逆元唯一.
3. $a^n = e \Leftrightarrow \sigma(a^n) = \sigma(e) \Leftrightarrow \sigma(a)^n = \sigma(e)$.

定理 15.7
- 任意一个无限循环群都与 $(\mathbb{Z}, +)$ 同构
- 对于 $m > 1$, 任意一个 m 阶循环群都与 $(\mathbb{Z}_m, +)$ 同构
- 1 阶循环群都与加法群 $\{0\}$ 同构.

证明 构造群到群的映射, 证明是双射, 且可以拆开.

笔记
- 无限循环群构成一个等价类, 其代表元为 $(\mathbb{Z}, +)$
- $m(m > 1)$ 阶循环群构成一个等价类, 其代表元为 $(\mathbb{Z}_m, +)$

笔记 环 R 对加法构成 Abel 群, 记作 $(R,+)$.

定理 15.8

m_1,m_2 是大于 1 的整数, 则 $(\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2},+)$ 是循环群当且仅当 m_1 与 m_2 互素.

证明 充分性：由定理15.3,$\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$. 由命题15.4,$|\mathbb{Z}_m|=|\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}|$, 对于加法而言, 二者的生成元阶数相等为 $m=m_1m_2$. 由命题15.1,$\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$ 是循环群.

必要性：证逆否命题, 若 $(m_1,m_2)=d>1$ 则 $m_1=l_1d,m_2=l_2d$.对于 $(\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2},+)$ 中任一元素 $\left(\widetilde{a_1},\widetilde{\widetilde{a_2}}\right)$,我们有

$$l_1dl_2\left(\widetilde{a_1},\widetilde{\widetilde{a_2}}\right)=\left(l_1dl_2\widetilde{a_1},l_1dl_2\widetilde{\widetilde{a_2}}\right)=\left(l_2m_1\widetilde{a_1},l_1m_2\widetilde{\widetilde{a_2}}\right)=\left(\widetilde{0},\widetilde{\widetilde{0}}\right)$$

故 $(\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2},+)$ 的阶 $\le l_1dl_2=l_1m_2<m$, 由命题15.1的逆否命题, 这 与 $(\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2},+)$ 是循环群矛盾!

例题 15.1 证明 $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,+)\ncong(\mathbb{Z}_4,+)$

证明 由定理15.8,$(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,+)=\left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right),\left(\overline{0},\overline{1}\right),\left(\overline{1},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{1}\right)\right\}$ 是非循环的4阶 Abel 群.

这些都是2阶元, 没有4阶元, 但 $(\mathbb{Z}_4,+)$ 中有4阶元$\overline{1}$, 故 $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,+)\ncong(\mathbb{Z}_4,+)$

例题 15.2 证明 $(\mathbb{Z}_3\oplus(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2),+)\cong(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6,+)$.

证明 $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6,+)\cong(\mathbb{Z}_2\oplus(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3),+)$

$$\text{令}\sigma:\begin{array}{c}(\mathbb{Z}_3\oplus(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2),+)\to(\mathbb{Z}_2\oplus(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3),+)\\ (a,(b,c))\mapsto(b,(c,a))\end{array}$$

则σ是一个映射, 显然它是一个单射, 也是满射, 从而是双射.

$$\begin{array}{ccccc}\sigma(a_1+a_2,(b_1+b_2,c_1+c_2)) & = \sigma(a_1,(b_1,c_1)) & +\sigma(a_2,(b_2,c_2))\\ \| & \| & \|\\ (b_1+b_2,(c_1+c_2,a_1+a_2)) & =(b_1,(c_1,a_1)) & +(b_2,(c_2,a_2))\end{array}$$

因此,σ保加法.

因此,σ是一个群同构.

例题 15.3 设 G 是一个群, 证明：映射 $\sigma:x\mapsto x^{-1}$ 是 G 到自身的同构映射当且仅到 G 是 Abel 群.

证明 充分性：显然 σ 是双射, 下证 σ 保加法

$$\sigma(x+y)=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}=\sigma(x)\sigma(y)$$

必要性：

$$yx=(x^{-1}y^{-1})^{-1}=\sigma(x^{-1}y^{-1})=\sigma(x^{-1})\sigma(y^{-1})=xy,\quad\forall x,y\in G$$

例题 15.4 如果 G 的阶为偶数, 那么 G 必有二阶元.

证明 若 G 没有二阶元, 则 $\forall x\in G,x\neq e,x\neq x^{-1}$, 故 G 中的非单位元可以 (x,x^{-1}) 两两配对, 故 G 的阶为奇数, 矛盾!

15.3 n 元对称群

定义 15.8

对于集合 Ω 到自身的双射, 容易验证它们构成一个群, 称为 Ω 上的全变换群.

当 Ω 是有限集合时, 这种双射被称为 Ω 上的一个置换.

设 Ω 有 n 个元素, 不妨设 $\Omega=\{1,2\cdots,n\}$, 称 Ω 上的一个置换为 n 元置换, 称 Ω 上的全变换群为 n 元对称群, 记作 S_n.

如果一个 n 元置换：$i_1\mapsto i_2,i_2\mapsto i_3,\cdots,i_r\mapsto i_1$, 则称 σ 为一个 r-轮换, 简称为轮换, 记作 $(i_1,-_2,\cdots,i_r)$.

特别地,2-轮换称为对换.

笔记 不相交的两个轮换对乘法是可交换的.

定理 15.9

非平凡置换可以唯一表为若干无交轮换的乘积.

命题 15.5

轮换与对换:

$$(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r) = (i_1i_r)(i_1i_{r-1})\cdots(i_1i_3)(i_1i_2)$$

命题 15.6

逆:

$$(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r)^{-1} = (i_1i_ri_{r-1}\cdots i_2)$$

证明

- $(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r)(i_1i_ri_{r-1}\cdots i_2) = (i_1)(i_2)\cdots(i_r)$
- $(i_1i_ri_{r-1}\cdots i_2)(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r) = (i_1)(i_2)\cdots(i_r)$ \\\\\\\\

定义 15.9

称 σ 为偶置换, 若它可以表示为偶数个对换的乘积; 称 σ 为奇置换, 若它可以表示为奇数个对换的乘积.
每个 3-轮换都是偶置换, 因为:

$$(ijk) = (ij)(ik)$$

(1) 是偶置换, 因为 $(1) = (12)(12)$.
S_n 中所有偶置换构成集合 A_n, 容易验证 A_n 也是一个群, 称为 n 元交错群. S_n 中任意奇置换乘 (12) 得到偶置换, 任意偶置换乘 (12) 得到奇置换. 故二者一一对应, 则有

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

笔记 由于任意对换 (ij) 可以表示为

$$(ij) = (1i)(1j)(1i).$$

故因此 S_n 可以由 $\{(12),(13),\cdots,(1n)\}$ 生成, 即

$$S_n = \langle (12),(13),\cdots,(1n)\rangle.$$

由于 A_n 中有有偶数个 $(1i)$ 的形式, 因此我们只要考察 $(1i)(1j)$ 能写成什么形式, 注意到

$$(1i)(1j) = (1ji)$$

因此每一个 n 元偶置换 $(n \geqslant 3)$ 可以写成一些 3-轮换的乘积. 从而 A_n 由 3-轮换生成.
这些对换的乘法是从右往左读的.

定义 15.10

如果 G 中的每个元素都能表为 S 中有限多个元素的整数次幂的乘积, 那么称 S 是群 G 的生成元集, 或者说 S 的所有元素生成 G.
如果群 G 有一个生成元集是有限集, 那么称 G 是有限生成的群. 如果这个生成元集是 $\{a_1,a_2,\cdots,a_t\}$, 则记作

$$G = \langle a_1,a_2,\cdots,a_t\rangle.$$

15.4 子群,Lagrange 定理

定义 15.11

- 称H是群G的一个子群, 如果G的非空子集H也成群, 记作$H < G$.
- n元对称群S_n的任一子群称为n元置换群.
- 非空集合Ω上的全变换群S_Ω的任一子群称为Ω上的变换群.

♣

命题 15.7

$H < G \Leftrightarrow a, b \in H$蕴含$ab^{-1} \in H$.

♠

定义 15.12

- 定义等价关系$a \sim b :\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
  则有$\overline{a} := \{x \in G : x \sim a\} = \left\{x \in G : xa^{-1} = h \in H\right\} = \{x \in G : x = ha, h \in H\} =: Ha, a \in H$
  称Ha是H的一个右陪集,a为陪集代表.H的所有右陪集构成一个G的划分, 该集合被称为G关于H的右商集, 记作 $(G/H)_r$.
- 把 $(G/H)_r$ (或 $(G/H)_l$) 的基数称为H在G中的指数, 记作 $[G : H]$.
- 若 $[G : H] = r$, 则有

$$G = H \sqcup a_1 H \sqcup a_2 H \sqcup \cdots \sqcup a_{r-1} H.$$

  称为G关于子集H的左陪集分解式, $\{e, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}$ 称为H在G中的左陪集代表系.

♣

笔记 $\tau : \begin{array}{l} H \to aH \\ h \mapsto ah \end{array}$ 容易验证是双射, 从而H与其任一左陪集aH的基数相同

定理 15.10 (Lagrange 定理)

G是有限群,$H < G$, 则 $|G| = [G : H]\,|H|$, 从而G的任一子群H的阶是G的阶的因数.

♡

定义 15.13

称H是由a生成的子群, 记作 $\langle a\rangle$ 如果$H = \left\{e, a, a^2, \cdots, a^{s-1}\right\}$, s为a的阶.

♣

推论 15.2

- 有限群G的任一元素a, 有a的阶是 $|G|$ 的因数.
- 素数阶群一定是循环群.

♡

定理 15.11 (欧拉定理)

$(a, m) = 1$, 则$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

♡

定理 15.12 (费马小定理)

对任意$a \in \mathbb{N}$, 素数p, 有$a^p \equiv a \pmod{p}$.

♡

定理 15.13

$G = \langle a\rangle$ 是n阶循环群, 则

- G的每个子群都是循环群.
- $\forall s | n, \exists 1 s$阶子群.这些子群构成$G$的全部子群.

♡

笔记 4阶群的同构类只有 $(\mathbb{Z}_4,+)$, $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,+)$.后者称为 Klein群, 也称为四群.

例题 15.5 设A,B是群G的两个非空子集, 若群G的运算为乘法, 则规定$AB:=\{ab:a\in A,b\in B\}$; 若群G 的运算为加法, 则规定 $AB:=\{a+b:a\in A,b\in B\}$.
容易验证

- 群G的子集运算满足结合律.
- 若群G的运算为乘法, 则 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$.

例题 15.6 设 H,K 都是群 G(运算为乘法) 的子群. 证明：HK 为 G 的正规子群当且仅当

$$HK=KH.$$

证明 取逆，证明 $\subseteq,\supseteq$.

例题 15.7 $H,K<G$ 有限, 证明：

$$|HK|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}.$$

证明 见丘维声《近世代数》习题 1.4 第 6 题

例题 15.8 证明：域 F 的乘法群 F^* 的有限子群必为循环群.

证明 由定义15.3, 乘法群 F^* 是 Abel 群, 对于 F^* 的一个有限子群 H, 有 H 是有限 Abel 群. 考虑方程 $x^m=e$ 在域 F 中解不超过 m 个, 故方程 $x^m=e$ 在乘法群 F^* 中解不超过 m 个, 故方程 $x^m=e$ 在有限 Abel 群 H 中解不超过 m 个. 由定理15.4可知,H 是循环群. \\\\

例题 15.9 证明定理15.4的逆命题. 即如果 G 是 n 阶循环群, 则对于任意给定的正整数 m, 方程 $x^m=e$ 在 G 中的解的个数不超过 m.

证明 对于任意给定的正整数 m, 定义集合 $H:=\{x\in G:x^m=e\}$. 容易验证 $e\in H$, 且$b,c\in H$蕴含$bc^{-1}\in H$. 由命题15.7,$H<G$.由于G是n阶循环群, 由定理15.13,知$\exists d|n,s.t.H=\langle a^d\rangle$, 且$H$的阶$s=\frac{n}{d}$.由$H$定义可知：$(a^d)^m=e$.故$s|m,s\le m$, 故 $|H|\leqslant m$. \\\\

例题 15.10 群 G 中元素 a, 如果存在 $b\in G$ 使得 $b^2=a$, 那么称 a 是平方元, 把 b 称为 a 的一个平方根. 证明: 奇数阶群 G 的每个元素 a 都是平方元, 且 a 的平方根唯一.

证明

- 任给$a\in G$, 由定理15.13,a的阶是 $|G|$ 的因数.故 $|a|$ 为奇数$2m+1$, $a=ae=aa^{2m+1}=\left(a^{m+1}\right)^2$.于是$a$为平方元.
- 若b,c都是a的平方根, 则$b^2=a=c^2$,故 $\left(bc^{-1}\right)^2=e$, 故bc^{-1}的阶一定整除2.由于$bc^{-1}\in G$,它的阶是 $|G|$ 的因数. 故bc^{-1}阶数为1, 即$bc^{-1}=e,b=c$. \\\\

15.5 群的直积 (直和)

定理 15.14 (内直积)

设 H,K 是群 G 的两个子群，则 $H\times K\cong G$ 且其同构映射为 $(h,k)\mapsto hk$ 当且仅当下列条件成立:

1. $G=HK$
2. $H\cap K=\{e\}$
3. H 中每个元素与 K 中每个元素可交换.

♡

笔记 我们习惯记作 $G\cong H\times K$，其同构映射为 $(h,k)\mapsto hk$，那么称 G 是它的子群 H 和 K 的内直积. 如果群 G 的运算为加法，习惯上记作 $G=H\oplus K$.

笔记 我们定义从 $H\times K$ 到 G 的一个映射 $\sigma:\begin{array}{l} H\times K\to G\\ (h,k)\mapsto hk\end{array}$

- σ 是满射 $\Leftrightarrow G=HK$
- σ 是单射 $\Leftrightarrow H\cap K=\{e\}$
- $\sigma[(h_1,k_1)(h_2,k_2)]=\sigma(h_1,k_1)\sigma(h_2,k_2)\Leftrightarrow H$ 中每个元素与 K 中每个元素可交换

定理 15.15

设 $H_1, H_2, \cdots, H_s$ 都是群 G 的子群，G 的运算为加法，则 $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s \cong G$ 且其同构映射为 $(h_1, \cdots, h_s) \mapsto h_1 + \cdots + h_s$ 当且仅当下列条件成立：

1. $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_s$
2. $H_i \cap (\sum_{j \neq i} H_j) = \{e\}$
3. H_i 每个元素与 H_j 每个元素可交换，$i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$

其中同构映射为 $(h_1, \cdots, h_s) \mapsto h_1 + \cdots + h_s, h_i \in H_i, i = 1, 2, \cdots s$.

笔记 称 G 是它的子群 $H_1, H_2, \cdots, H_s$ 的内直和，习惯上记作

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s$$

这是把 $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 与 $h_1 + h_2 + \cdots + h_s$ 等同. 此时，G 中每个元素 g 可以唯一地表成 $g = h_1 + h_2 + \cdots + h_s$，其中 $h_i \in H_i, i = 1, 2, \cdots, s$.

定义 15.14

- 域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆矩阵组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级一般线性群，记作 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.
- 域 $\mathbb{F}$ 上的所有行列式为 1 的 n 阶矩阵组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级特殊线性群，记作 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.
- $\mathbb{R}$ 上的所有 n 阶正交矩阵 $(AA^T = I_n)$ 组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级正交群，记作 O_n.
- $\mathbb{R}$ 上的所有行列式为 1 的 n 阶正交矩阵 $(AA^T = I_n)$ 组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级特殊正交群，记作 SO_n.

定义 15.15

- $\mathbb{C}$ 上所有 n 阶酉矩阵 $(AA^* = I_n)$ 所组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为 n 阶酉群，记作 U_n.
- 行列式为 1 的所有 n 阶酉矩阵所组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为 n 阶特殊酉群，记为 SU_n.

15.6 群的同态，正规子群，商群，群同态基本定理

定义 15.16

若群 G 到 $\widetilde{G}$ 有一个映射 σ，使得

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \forall a, b \in G$$

则称 σ 是从群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个同态映射，简称同态.

笔记 同态映射的定义只比同构少了“双射”这个条件.

命题 15.8

设 σ 是群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个同态，则 $\ker\sigma$ 是 G 的一个子群.

命题 15.9

设 σ 是群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个同态，则 σ 是单射当且仅当

$$\ker\sigma = \{e\}$$

命题 15.10

设 σ 是群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个同态，则 $\forall a\in G$，有

$$a(\ker\sigma) = (\ker\sigma)a$$

定义 15.17 (正规子群)

如果群 G 的子群 H 满足：$\forall a\in G$，有

$$aH = Ha$$

那么称 H 是 G 的正规子群，记作 $H\lhd G$.

命题 15.11

$\ker\sigma$ 是 G 的正规子群.

命题 15.12

群 G 的子群 H 是 G 的正规子群当且仅当

$$aHa^{-1} = H, \quad \forall a\in G$$

定义 15.18 (共轭子群)

设 H 为群 G 的一个子群，任取 $a\in G$，则 aHa^{-1} 也是 G 的一个子群，称它为 H 的一个共轭子群.

命题 15.13

群 G 的子群 H 是 G 的正规子群当且仅当 H 的共轭子群都等于 H.

判断 G 的子群是正规子群的常用方法.

命题 15.14 (正规子群的判定)

设 H 是群 G 的一个子群，若任给 $a\in G$，任取 $h\in H$，都有 $aha^{-1}\in H$，则 $H\lhd G$.

命题 15.15 (正规子群的判定)

$H<G$，若 $[G:H]=2$，则 $H\lhd G$.

笔记 正规子群对于研究群的结构有着重要的作用. 设 $N\lhd G$，则 $(G/N)_l=(G/N)_r$，记作 G/H. 其中有一种运算:

$$(aN)(bN) := abN \tag{15.1}$$

笔记 若 $N\lhd G$，则商集 G/N 对于式15.1定义的运算成群，称为群 G 对于它的正规子群 N 的商群.

命题 15.16

设 G 为有限群，$N\lhd G$，则 $|G/N|=\frac{|G|}{|N|}$.

定理 15.16 (自然同态)

设 N 是群 G 的一个正规子群，令

$$\begin{aligned}\pi: \quad & G \to G/N \\ & a \mapsto aN\end{aligned}$$

则 π 是群 G 到商群 G/N 的一个满同态，并且 $\ker\pi = N$. 我们把 π 称为自然同态或标准同态.

定理 15.17 (群同态基本定理)

设 σ 是群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个同态，则 $\ker\sigma$ 是 G 的一个正规子群，且

$$G/\ker\sigma \cong \mathrm{Im}\sigma.$$

笔记 群同态是研究群的结构及其应用的主线.

笔记 利用群同态基本定理可以推导出一些群是同构的. 首先要建立一个合适的映射 σ，证明它是满同态；然后去求同态的核 $\ker\sigma$；最后根据群同态基本定理得同态同构于商群.

定理 15.18 (第一群同构定理)

设 G 是一个群，$H < G, N \lhd G$，则

1. $HN < G$
2. $H \cap N \lhd H$，且 $H/H\cap N \cong HN/N$.

证明

1. 根据例题15.6可知，只需证 $HN = NH$，只需证 $HN \subseteq NH, NH \subseteq HN$.
   - $HN \subseteq NH$: 任取 $h \in H \subset G, n \in H$，因为 $N \lhd G$，所以 $hnh^{-1} \in hNh^{-1} = N$. 从而有
   $$hn = (hnh^{-1})h \in NH.$$
   - $NH \subseteq HN$: 任取 $h \in H \subset G, n \in H$，因为 $N \lhd G$，所以 $h^{-1}nh \in h^{-1}Nh = N$. 从而有
   $$nh = h(h^{-1}nh) \in HN.$$

   从而 $HN < G$.
2. 因为 $NH < G$，且 $N \lhd G$，故 $N \lhd NH$. 令
   $$\begin{aligned}\sigma: \quad & H \to HN/N \\ & h \mapsto hN\end{aligned}$$
   则 σ 是群 G 到 G/N 的自然同态 π 在 H 上的限制，从而 σ 保持乘法运算. 于是 σ 是 H 到 HN/N 的群同态. 任取 HN/N 中的一个元素 $(hn)N$，有 $\sigma(h) = hN = (hn)N$，因此 σ 是满射，于是 $\mathrm{Im}\sigma = HN/N$. 根据群同态基本定理15.17得
   $$H/\ker\sigma \cong HN/N.$$
   我们断言 $\ker\sigma = H \cap N$.
   $h \in \ker\sigma \Leftrightarrow h \in H, \sigma(h) = N \Leftrightarrow h \in H$，且 $hN = N \Leftrightarrow h \in H$，且 $h \in N \Leftrightarrow h \in H \cap N$. 因此 $\ker\sigma = H \cap N$.
   从而 $H \cap N \lhd G$, 且
   $$H/H\cap N \cong HN/N.$$

定理 15.19 (第二群同构定理)

设 G 是一个群，$N \lhd G$，H 是 G 得包含 N 的正规子群，则 $H/N \lhd G/N$，且

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

证明 令

$$\begin{aligned}\sigma:\ & G/N \to G/H \\ & aN \mapsto aH\end{aligned}$$

1. 良定性检验：$aN = bN \Leftrightarrow b^{-1}a \in N \subseteq H \Leftrightarrow aH = bH$.
2. $\mathrm{Im}\sigma = G/H$ 检验满射：由定义可知显然.
3. 同态检验:$\sigma((aN)(bN)) = \sigma(abN) = abH = (aH)(bH) = \sigma(aN)\sigma(bN)$.
   故由群同态基本定理15.17可知：
   $$(G/N)/\ker\sigma \cong G/H.$$
4. $\ker\sigma = H/N$ 检验：$aN \in \ker\sigma \Leftrightarrow \sigma(aN) = H \Leftrightarrow aH = H \Leftrightarrow a \in H \Leftrightarrow aN \in H/N$.
   因此，$\ker\sigma = H/N$，由命题15.11可知，$H/N \lhd G/N$，且 $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

例题 15.11 设 G 和 $\widetilde{G}$ 是两个群，证明：

$$G \times \{\widetilde{e}\} \lhd G \times \widetilde{G}, \quad \{e\} \times \widetilde{G} \lhd G \times \widetilde{G};$$
$$G \times \widetilde{G}/G \times \{\widetilde{e}\} \cong \widetilde{G}, \quad G \times \widetilde{G}/\{e\} \times \widetilde{G} \cong \widetilde{G}.$$

证明 $\begin{aligned}\sigma:\ & G \times \widetilde{G} \to \widetilde{G} \\ & (g,\widetilde{g}) \mapsto \widetilde{g}\end{aligned}$ 接下来的步骤是 Routine 的.

1. Check σ well-defined: $(g.\widetilde{g}) = (h,\widetilde{h}) \Rightarrow \widetilde{g} = \widetilde{h}$.
2. Check σ onto: 由定义显然.
3. Check σ 同态: $\sigma((g,\widetilde{g})(h,\widetilde{h})) = \sigma((gh,\widetilde{g}\widetilde{h})) = \widetilde{g}\widetilde{h} = \sigma(g,\widetilde{g})\sigma(h,\widetilde{h})$.
4. Check $\ker\sigma = G \times \{\widetilde{e}\}$: On one hand, $\forall (g,\widetilde{g}) \in \ker\sigma, \sigma((g,\widetilde{g})) = \widetilde{e}, i.e. \widetilde{g} = \widetilde{e} \Rightarrow (g,\widetilde{g}) \in G \times \{\widetilde{e}\} \Rightarrow \ker\sigma \subseteq G \times \{\widetilde{e}\}$.
   On the other hand, $\forall (g,\widetilde{e}) \in G \times \{\widetilde{e}\}, \sigma(g,\widetilde{e}) = \widetilde{e} \Rightarrow (g,\widetilde{e}) \in \ker\sigma \Rightarrow G \times \{\widetilde{e}\} \subseteq \ker\sigma$. 综上, $\ker\sigma = G \times \{\widetilde{e}\}$.

由群同态基本定理15.17，$G \times \{\widetilde{e}\} \lhd G \times \widetilde{G}, G \times \widetilde{G}/G \times \{\widetilde{e}\} \cong \widetilde{G}$. 另一边证明类似.

例题 15.12 设 $H, K \lhd G$，且 $G = HK, H \cap K = \{e\}$. 证明：G 是 H 与 K 的内直积.

证明 由定理15.14，只需证 H 中每个元素与 K 中每个元素可交换. 由正规子群的定义 $\forall k_1 \in K \subseteq Gh_1 \in H \subseteq G, \exists k_2, h_2 \in H, s.t. k_1h_1 = k_1h_2 = k_2h_2 \Rightarrow k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1} \in H \cap K$. 由于 $H \cap K = \{e\}$，故 $k_1 = k_2, h_1 = h_2$. 因此，$k_1h_1 = k_1h_1, \forall k1 \in K, h_1 \in H$.

定义 15.19 (半直积)

设 G 是一个群，$N \lhd G, H < G$，如果 $G = NH$，且 $N \cap H = \{e\}$，那么称 G 可分解成它的正规子群 N 与子群 H 的半直积，记作 $G = N \rtimes H$

♣

例题 15.13 如果 $G = N \rtimes H$，那么

$$G/H \cong H.$$

证明 由第一群同构定理15.18，$G/N = HN/N \cong H/H \cap N = H/\{e\} \cong H$.

例题 15.14 证明：S_n 可分解成 A_n 与 $\langle(12)\rangle$ 的半直积，其中 $n \geq 3$.

证明 $|A_n\langle(12)\rangle| = \dfrac{|A_n||\langle(12)\rangle|}{|A_n \cap \langle(12)\rangle|} = 2 \cdot \dfrac{n!}{2} = n! = |S_n|$.

从而 $S_n = A_n\langle(12)\rangle$，结合 $A_n \cap A_n(12) = \{e\}$，得证.

例题 15.15 证明：如果置换群 G 含有奇置换，那么 G 必有指数为 2 的子群.

证明 证明见丘维声《近世代数》练习 1.6 第 12 题.

例题 15.16 设 σ 是群 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个满同态，记 $K = \ker\sigma$. 设 $\widetilde{H} < \widetilde{G}$，令 $\sigma^{-1}(\widetilde{H}) = \{g \in G : \sigma(g) \in \widetilde{H}\}$. 证明：

1. $\sigma^{-1}(\widetilde{H}) < G$，且 $K \subseteq \sigma^{-1}(\widetilde{H})$
2. $\widetilde{H} \to \sigma^{-1}(\widetilde{H})$ 是 $\widetilde{G}$ 的所有子群组成的集合 $\widetilde{\Omega}$ 到 G 的所有包含 K 的所有子群组成的集合 Ω 的一个双射.

证明

1. Routine
2. 由 1. 可知，$\widetilde{H} \to \sigma^{-1}(\widetilde{H})$ 是映射. 我们任取 $H < G, K \subseteq G$，记 $\widetilde{H} = \sigma(H)$，要证 $H = \sigma^{-1}(\widetilde{H})$.
   - $\subseteq$: $\forall g \in \sigma^{-1}(\widetilde{H}), \sigma(g) \in \widetilde{H} = \sigma(H) \Rightarrow \exists h \in H, s.t. \sigma(g) = \sigma(h) \Rightarrow \sigma(gh^{-1}) = \sigma(g)\sigma(h)^{-1} = \widetilde{e} \Rightarrow gh^{-1} \in K \subseteq H \Rightarrow g \in H \Rightarrow \sigma^{-1}(\widetilde{H}) \subseteq H$.
   - $\supseteq$: $\forall h \in H$，由 $\widetilde{H}$ 定义，$\sigma(h) \in \widetilde{H} \Rightarrow h \in \sigma^{-1}(\widetilde{H}) \Rightarrow H \subseteq \sigma^{-1}(\widetilde{H})$

   故 $H = \sigma^{-1}(\widetilde{H})$. 我们证明了满射，单射的证明是 Routine 的. 于是 σ 是双射.

定义 15.20 (换位子，换位子群 (导群))

- 对于 $x, y \in G$，我们把 $xyx^{-1}y^{-1}$ 称为 x 与 y 的换位子，记作 $[x, y]$. 我们有
$$xy = yx \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$$
- 群 G 的所有换位子组成的子集生成的子群称为 G 的换位子群或导群，记作 G' 或 $[G, G]$，即
$$G' = \left\langle \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\} \right\rangle.$$
- 群 G 为 Abel 群 $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

命题 15.17

σ 是 $G \to \widetilde{G}$ 的一个同态，则
$$\mathrm{Im}\sigma \text{为 Abel 群} \Leftrightarrow G' \subseteq \ker \sigma.$$

命题 15.18

$G' \lhd G$.

命题 15.19

G/G' 是 Abel 群.

命题 15.20

设 $N \lhd G$，则
$$G/N \text{为 Abel 群} \Leftrightarrow G' \subseteq N.$$

定义 15.21 (可解群和不可解群)

群 G, G' 的换位子群记为 $G^{(2)}, \cdots, G^{(k-1)}$ 的换位子群记作 $G^k, \cdots$. 如果有一个正整数 k，使得 $G^{(k)} = \{e\}$，那么称 G 是可解群，否则称 G 是不可解群.

笔记 若 G 是 Abel 群，则 $G' = \{e\}$. 从而 Abel 群都是可解群.

定理 15.20

群 G 是可解群当且仅当存在 G 的递降的子群列：
$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\}$$
并且每个商群 G_{i-1}/G_i 都是 Abel 群，$i = 1, 2, \cdots, s$.

定理 15.21

可解群的每个子群和同态像都是可解群.

推论 15.3

可解群的商群都是可解群.

定理 15.22

设 N 是群 G 的正规子群，若 N 和 G/N 都是可解群，则 G 是可解群.

笔记 利用群 G 的正规子群 N 和商群 G/N 的结构可了解 G 的结构.

定义 15.22 (单群)

如果群 G 只有平凡的正规子群 $\{e\}$ 和 G，那么称 G 是单群.

定理 15.23

Abel 群 G 是单群当且仅当 G 是素数阶循环群.

定理 15.24

若非 Abel 群 G 是单群，则 G 是不可解群.

推论 15.4

非 Abel 群的可解群不是单群.

笔记 推论15.4告诉我们，非 Abel 单群只能从不可解群中去寻找.

定理 15.25 (Feit-Thompson 定理)

每一个奇数阶群都是可解群.

不可解的有限群必为偶数阶群.

有限群中，所有非 Abel 单群都是偶数阶群.

笔记 [有限单群的分类问题]

1. 素数阶群循环群
2. $n \geq 5$ 的交错群 A_n
3. Lie 型单群 (共 16 族)
4. 26 个散在单群

在定理15.20中，我们用递降子群列来刻画可解群的结构. 现在我们用递降子群来刻画一般群的结构.

定义 15.23

群 G 的一个递降的子群列：

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_r = \{e\} \tag{15.2}$$

称为 G 的一个次正规子群列. 式15.2的商群组

$$G_0/G_1, G_1/G_2, \cdots, G_{r-1}/G_r$$

称为15.2的因子群组，其中含有非单位元的因子群的个数称为15.2的长度.

笔记 注意 G 的一个次正规子群列中，每个 G_i 是前一个的正规子群，但不要求 G_i 是 G 的正规子群.

定义 15.24 (合成群列)

G 的一个次正规子群列15.2如果满足：每个因子群 $G_{i-1}/G_i (i = 1, 2. \cdots, r)$ 都是单群，那么称15.2是 G 的一个合成群列.

笔记 每个群都有次正规子群列.

命题 15.21

每个有限群至少有一个合成群列.

推论 15.5

有限群 G 是可解群当且仅当存在一个递降的子群列：

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_r = \{e\}$$

其中每个商群 $H_{i-1}/H_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 都是素数阶循环群.

定理 15.26 (Jordan-Hölder 定理)

有限群 G 的任意两个无重复项的合成群列有相同的长度，并且其因子群组能用某种方式配对，使得对应的因子群是同构的.

笔记 Jordan-Hölder 定理15.26告诉我们，一个有限群 G 的任一无重复项的合成群列的因子群组 (不计次序) 在同构的意义下是由 G 唯一决定的. 由此体会到单群是有限群的结构的基本建筑块.

15.7 群在集合上的作用，轨道-稳定子定理

定义 15.25 (群作用)

设 G 是一个群，Ω 是一个非空集合. 如果映射

$$\begin{aligned} \sigma: \quad & G \times \Omega \to \Omega \\ & (a, x) \mapsto a \circ x \end{aligned}$$

满足：

$$(a, b) \circ x = a \circ (b \circ x), \qquad \forall a, b \in G, \forall x \in \Omega$$

$$e \circ x = x, \qquad \forall x \in \Omega$$

那么称群 G 在集合 Ω 上有一个作用.

命题 15.22

设群 G 在集合 Ω 上有一个作用，任给 $a \in G$，令

$$\psi(a) = x := a \circ x, \qquad \forall x \in \Omega$$

则 $\psi : a \mapsto \psi(a)$ 是 G 到 S_Ω 的一个群同态.

笔记 同态 ψ 的核 $\ker\psi$ 称为这个作用的核，于是有 $a \in G$是这个作用的核 $\Leftrightarrow a \circ x = x, \quad \forall x \in \Omega$.
当 $\ker\psi = \{e\}$ 时，称这个作用是忠实的，此时 ψ 是 G 到 S_Ω 的一个单同态.

命题15.22逆命题也成立，即：

命题 15.23

设群 G 到非空集合 Ω 上的全变换群 S_Ω 有一个同态 ψ，令

$$a \circ x := \psi(a)x, \qquad \forall a \in G, \forall x \in \Omega$$

则 G 在 Ω 上有一个作用：$(a, x) \mapsto a \circ x$.

笔记 考虑群 G 在集合 Ω 上的作用可以双赢：对于群 G 来说，可以通过 G 在适当集合上的各种作用来研究群 G 的结构；对于集合 Ω 来说，可以选择合适的群在 Ω 上的作用来研究 Ω 的性质.

定理 15.27 (Cayley 定理)

任意一个群都同构于某一集合上的变换群.

推论 15.6

任意一个有限群都同构于一个置换群.

定义 15.26 (共轭作用)

令

$$G \times G \to G$$
$$(a, x) \mapsto axa^{-1}$$

对于任意 $a, b \in G$，任意 $x \in G$ 有

$$(ab) \circ x = (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a = a(b \circ x)a^{-1} = a \circ (b \circ x)$$
$$e \circ x = exe^{-1} = x$$

因此这是一个群 G 在集合 G 上的群作用.

定义 15.27 (中心)

共轭作用的核就是 $Z(G) := \{b \in G : bx = xb, \forall x \in G\}$，称为群 G 的中心.

笔记 群 G 在集合 G 上的作用诱导了群 G 到 S_G 的一个同态 σ，把 a 在 σ 下的像记为 σ_a，于是

$$\sigma_a(x) = a \circ x = axa^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

易验证 σ_a 是一个同构，称为 G 的内自同构.

定义 15.28 (自同构群，内自同构群)

群 G 的所有自同构组成的集合对于映射的乘法成群，称它为 G 的自同构群，记为 $\mathrm{Aut}(G)$.
所有上述的内自同构 σ_a 在 S_G 中构成一个群，称为 G 的内自同构群，记作 $\mathrm{Inn}(G)$.

定理 15.28

$\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

定理 15.29

$\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

性质 [群作用诱导的二元关系] $y \sim x \Leftrightarrow$ 存在 $a \in G$ 使得 $y = a \circ x$.

定义 15.29 (G-轨道)

$G(x) := \{a \circ x : a \in G\}$ 称为 x 的 G-轨道.

定义 15.30 (完全代表系)

集合 Ω 的所有 G-轨道构成 Ω 的一个划分.Ω 等于它的所有两两不交的 G-轨道的并集：

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} G(x_i).$$

且当 $i \neq j$ 时，有 $G(x_i) \cap G(x_j) = \varnothing$.$\{x_i : i \in I\}$ 称为 Ω 的 G-轨道的完全代表系.

定义 15.31 (稳定子群)

$G_x := \{g \in G : g \circ x = x\}$ 是 G 的一个子群，称 G_x 是 x 的稳定子群.

定理 15.30 (轨道-稳定子定理)

G 在集合 Ω 上有一个作用，则对任意 $x \in \Omega$ 有

$$|G(x)| = [G : G_x]$$

即 x 的 G-轨道的基数等于 x 的稳定子群 G_x 在 G 中的指数.

推论 15.7 (有限群的轨道-稳定子定理)

有限群 G 则

$$|G(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

定义 15.32 (共轭类)

任给 $x \in G$，x 的 G-轨道为

$$G(x) = \{a \circ x : a \in G\} = \{axa^{-1} : a \in G\}.$$

右边的集合称为 x 的共轭类.

定义 15.33 (类方程)

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{j=1}^{r} \left|G(x_j)\right|$$

定义 15.34 (中心化子)

$C_G(x) := \{g \in G : gx = xg\}$ 称为 x 在 G 里的中心化子.

定义 15.35 (齐性空间)

如果群 G 在 Ω 上的作用只有一条轨道，那么称 G 在 Ω 上的这个作用是传递的，此时 Ω 是群 G 的一个齐性空间.

定义 15.36 (不动点集)

$F(g) := \{x \in \Omega : g \circ x = x\}$

引理 15.1 (Burnside 引理)

有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，则 Ω 的 G-轨道条数 r 为

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

定义 15.37 (p-群)

15.8 Sylow 定理

引理 15.2

设 $n = p^l m$，其中 $(m, p) = 1$，p 是素数，则对于 $1 \le k \le l$，有

$$p^{l-k} || C_n^{p^k}$$

第十六章 点集拓扑

一些基本概念

第十七章 Basic Topology, Armstrong

Let X, Y be topological space.

定义 17.1 (continuous function)
A function $f : X \to Y$ is continuous if each point x of X and each neighbourhood N pf $f(x)$ in Y the set $f^{-1}(N)$ is a neighbourhood of x in X.

定义 17.2 (homeomorphism)
A function $h : X \to Y$ is called a homeomorphism if it is one-one, onto, continuous, and has a continuous inverse.

定理 17.1 (Tietze extension theorem)
Any real-valued continuous function defined on a closed subset of a metric space can be extended over the whole space.

定理 17.2
The continuous image of a compact space is compact.

定理 17.3
A closed subset of a compact space is compact.

命题 17.1 (Bolzano-Weiestrass property)
An infinite subset of a compact space must have a limit point.

定理 17.4
A function $f : Z \to X \times Y$ is continuous if and only if the two composition functions $p_1 f : Z \to X$, $p_2 f : Z \to Y$ are both continuous.

定义 17.3 (connectedness)
A space X is connected if whenever it is decomposed as the union $A \cup B$ of two nonempty subsets then $\bar{A} \cap B \neq \varnothing$ or $A \cap \bar{B} \neq \varnothing$.

定理 17.5 (criteria of connectedness)
The following conditions on a space X are equivalent.

- X is connected.
- The only subsets of X which is both open and closed are X and the empty set.
- X cannot be expressed as the union of two disjoint nonempty open sets.
- There is no onto continuous function from X to a discrete space which contains more than one point.

定义 17.4 (discrete space)
A discrete space is simply a topological space equipped with the discrete topology. A discrete space is always a metric space, namely the metric space with the same underlying set and with the discrete

metric. ♣

定义 17.5 (discrete topology)
A topology is given by a collection of subsets of a topological space X. The smallest topology has two open sets, the empty set $\varnothing$ and X. The largest topology contains all subsets as open sets, and is called the discrete topology. In particular, every point in X is an open set in the discrete topology. ♣

定理 17.6
The continuous image of a connected space is connected. ♡

推论 17.1
If $h : X \to Y$ is a homeomorphism, then X is connected if and only if Y is connected. In brief, connectedness is a topological property of a space. ♡

定理 17.7
If Z is connected subset of a topological space X, and if $Z \subseteq Y \subseteq \bar{Z}$, then Y is connected. In particular, the closure $\bar{Z}$ of Z is connected. ♡

定理 17.8
Let $\mathscr{F}$ be a family of subsets of a space X whose union is all of X. If each member of $\mathscr{F}$ is connected, and if no two members of $\mathscr{F}$ are separated from one another in X, then X is connected. ♡

引理 17.1 (Lebesgue's lemma)
Let X be a compact metric space and let $\mathscr{F}$ be an open cover of X. Then there exists a real number $\delta > 0$(called a Lebesgue number of $\mathscr{F}$) such that any subsets of X of diameter less than δ is contained in some member of $\mathscr{F}$. ♡

定义 17.6 (path)
A path in a topological space X is a continuous function $\gamma : [0, 1] \to X$. The points $\gamma(0)$ and $\gamma(1)$ are called the beginning andd end point of the path respectively, and γ is said to join $\gamma(0)$ to $\gamma(1)$. Note that if γ^{-1} is defined by $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t), 0 \leq t \leq 1$, then γ^{-1} is a path in X which joins $\gamma(1)$ to $\gamma(0)$. ♣

定义 17.7 (path-connected)
A space is path-connected if any two of its points can be joined by a path. ♣

笔记 A path-connected space is always connected, but the converse is not true.

定义 17.8 (Partition)
Let X be a topological space and let $\mathscr{P}$ be a family of disjoint nonempty subsets of X such that $\cup\mathscr{P} = X$. Such a family is usually called a parition of X. ♣

定义 17.9 (Identification space?)
We form a new space Y called identification space provided that the point of Y are the members of $\mathscr{P}$. ♣

定义 17.10 (Identification map)

Let $f : X \to Y$ be an onto map and suppose that the topology on Y is the largest for which f is continuous.

笔记 Any function $f : X \to Y$ gives rise to a partition of X whose members are the subsets $\{f^{-1}(y)\}$, where $y \in Y$. Let Y_* denote the identification space associated with this partition, and $\pi : X \to Y_*$ the usual map.

定义 17.11 (glueing)

Let X, Y be subsets of a topological space and give each of X, Y and $X \cup Y$ the induced topology. If $f : X \to Z$ and $g : Y \to Z$ are functions which agree on the intersection of X and Y, we can define

$$f \cup g : X \cup Y \to Z$$

by $f \cup g(x) = f(x), \forall x \in X$, and $f \cup g(x) = g(y), \forall y \in Y$. We say that $f \cup g$ is formed by 'glueing together' the function f and g.

引理 17.2 (Glueing lemma)

If X and Y are closed in $X \cup Y$, and if both f and g are continuous, then $f \cup g$ is continuous.

定理 17.9

If $j : X + Y \to X \cup Y$ is an identificationmap, and if both $f : X \to Z$ and $g : Y \to Z$ are continuous, then $f \cup g : X \cup Y \to Z$ is continuous.

Define a funtion $F : \cup X_\alpha \to Z$ by glueing together the $f_\alpha : X_\alpha \to Z$, i.e. $F(x) = f_\alpha(x)$, if $x \in X_\alpha$. Let $\oplus X_\alpha$ denote the disjoint union of the spaces X_α, and let $j : \oplus X_\alpha \to \cup X_\alpha$ be the function which when restricted to each X_α is the inclusion in $\cup X_\alpha$.

定理 17.10

If j is an identification map, and if each f_α is continuous, then F is continuous.

As before, we say that $\cup X_\alpha$ has the identification topology when j is an identification map. If the X_α are finite in numbers, and if X_α is closed in $\cup X_\alpha$, then $\cup X_\alpha$ automatically has the identificaition topology. If the X_α are infinite in number, one must be careful.

定义 17.12 (Attaching map)

let X, Y be spaces, let A be a subspace of Y, and let $f : A \to X$ be a continuous function. Our aim is to attach Y to X using f and to form a new space which we shall denote by $X \cup_f Y$. We begin with the disjoint union $X + Y$ and define a partition so that two points lie in the same subset if and only if they are identified under f. Precisely, the subsets of the partition are:

1. pairs of points $\{a, f(a)\}$ where $a \in A$
2. individual points of $Y - A$
3. individual points of $X - \text{image}(f)$

The identification space associated with this partition is $X \cup_f Y$.The map f is called the attaching map.

笔记 One final comment: if Y is an identification space formed from X, then Y is the image of X under a continuous function and therefore inherits properties such as compactness, connectedness, and path-connectedness from X. However, X may be Hausdorff and yet Y not satisfy the Hausdorff axiom.

定义 17.13 (Topological groups)

A topological group G is both a Hausdorff topological space and a group, the two structure being compatible in the sense that the group multiplication $m : G \to G$, and the function $i : G \to G$ which sends each group element to its inverse, are continuous.

笔记 The function $L_x : G \to G$ defined by $L_x(g) = xg$ is called left translation by the element x. It is clearly one-one and onto, and it is continuous because it is the composition:

$$G \to G \times G \xrightarrow{m} G$$

$$g \mapsto (x, g) \mapsto xg.$$

The inverse of L_x is $L_{x^{-1}}$ and therefore L_x is homeomorphism. Similarly the right translation $R_x : G \to G$ given by $R_x(g) = gx$ is also a homeomorphism.

定理 17.11

Let G be a topological group and let K denote the connected component of G which contains the identity element. Then K is a closed normal subgroup of G.

证明 Components are always closed. For any $x \in K$ the set $Kx^{-1} = R_{x^{-1}}(K)$ is connected(since $R_{x^{-1}}$ is a homeomorphism) and contains $e = xx^{-1}$. Since K is the maximal connected subset of G containing e, we must have $Kx^{-1} \subseteq K$. Therefore $KK^{-1} = K$, and K is a subgroup of G. Normality follows in a similar manner. For any $g \in G$ the set $gKg^{-1} = R_{g^{-1}}L_g(K)$ is connected and contains e. Therefore $gKg^{-1} \subseteq K$.

定理 17.12

In a connected topological group any neighbourhood of the identity element is a set of generators for the whole group.

证明 Let G be a connected topological group and let V be a neighbourhood of e in G. Let $H = \langle V \rangle$ be the subgroup of G generated by the elements of V. If $h \in H$ then the whole neighbourhood $hV = L_h(V)$ of h lies in H, so H is open. We claim that the complement of H is also open. For if $g \in G - H$, consider the set gV. If $gV \cap H$ is nonempty, say $x \in gV \cap H$, then $x = gv$ for some $v \in V$. This gives $g = xv^{-1}$, which implies the contradiction $g \in H$ since both x and v^{-1} lies in H. Therefore the neighbourhood $L_g(V) = gV$ of g lies in $G - H$, and we see that $G - H$ is an open set. Now G is connected and so cannot be partitioned into two disjoint nonempty open sets. Since H is nonempty we must have $G - H = \varnothing$,i.e. $G = H$.

定理 17.13

$O(n)$ and $SO(n)$ are compact.

定义 17.14 (group act)

A topological group G is said to act as a group of homeomorphisms on a space X if each group element induces a homeomorphism of the space in such a way that:

(a) $hg(x) = h(g(x))$[a], $\forall g, h \in G, \forall x \in X$

(b) $e(x) = x, \forall x \in X$, where e is the identity element of G

(c) the function $G \times X \to X$ defined by $(g, x) \mapsto g(x)$ is continuous.

[a] We use the same letter for a group element and the homeomorphism induced by it.

theorem about fundamental group

technique about fundamental group

第十八章 不等式

18.1 米尔黑德 (Muirhead) 不等式

米尔赫德不等式浅谈 - 抚摸象头的文章 - 知乎

定义 18.1

称 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，若有

$$a_1 \geq b_1$$
$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$
$$\cdots$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

♣

定理 18.1 (二元米尔黑德不等式)

设 $x, y > 0$，且 $(a_1, a_2) \succ (b_1, b_2)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} \tag{18.1}$$

等号成立当且仅当 $x = y$ 或 $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

♡

定理 18.2 (三元米尔黑德不等式)

设 $x, y, z > 0$，且 $(a_1, a_2, a_3) \succ (b_1, b_2, b_3)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3} \tag{18.2}$$

等号成立当且仅当 $x = y = z$ 或 $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$.

♡

定理 18.3 (四元米尔黑德不等式)

设 $x, y, z, w > 0$，且 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \succ (b_1, b_2, b_3, b_4)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} w^{a_4} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3} w^{b_4} \tag{18.3}$$

等号成立当且仅当 $x = y = z = w$ 或 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

♡

18.2 等周不等式

等周不等式

第二部分

精神分析

第十九章 爱欲经济学

厌蠢症 & 智性恋

- 比如一个美丽的人连基本常识都不懂，没错她是蠢的，无知的，但是那些厌蠢症可能就讨厌不起来了，至少容忍度变高了，这是人类的偏心，**人类的厌恶情感并不遵循他以为的一个固定标准**，当他欲望一个人，对那个人有爱欲，那么他再不懂基本常识也不会被厌恶，欲望一个人后他所有的缺陷都是可爱的，人们总是以为自己的厌恶是理性的，不会偏心的，实则不然。
- 有些所谓厌蠢的人只是在享受说别人笨，以此来体现自己的聪明，这种情况下他是在享受对他人的厌恶带来的对自身的迷恋，致力于厌恶他人，享受高傲与自负，看谁都蠢，看谁都厌恶 (这种情况往往他们对自己的生活和世界充满了不满，厌恶整个世界意味不想要当下的生活)(**还有人享受他所厌恶的东西则是一种倒错的爱欲**，所以当代很多文化内容都是在表达对某个明星或电影的厌恶排斥)
- 他们也会嫉妒无知者，**嫉妒不想知道的快乐**，不想知道是惰性无机的，但这就是一种**无知的享乐，无知的激情，凭什么你可以不想知道然后却还是怡然自得**，所以有些厌蠢症只是在嫉妒蠢人的享乐。
- 智性恋看似有着对知识的欲望，其实大多只是喜欢有知识的人。他们可能一本书也不看，最终是那个人吸引了他，因为**有知识的人就是有权力力量的人**，这依然是阳具欲望的逻辑。他们欲望有力量的人，而他们同时也是厌蠢的，因为**无知即无力，他们厌恶无知就是厌恶一种能力的匮乏**。
- 如果一个人富豪不会用微信支付，这种能力的欠缺不会让厌蠢者厌恶，因为**他有其他象征功能补充**，比如有金钱的能力，所以有些人厌蠢就是厌弱。
- 当然智性恋者也可能是**想要自身被懂得，因为他懂得很多知识，所以他可能也会懂我，能理解我**，虽然他不想知道自己，但想要知道自己被他人知道了，一种想要被看到的欲望。
- 很多人想要智性恋是想要一个纯洁的爱情，所谓喜欢性感的大脑，是精神恋爱，这种哲学观是**对身体的贬低，是神经症对身体享乐的压抑**。
- 还有一部分智性恋者仍然是**对于小他者的欲望**，因为他觉得自己也是智者，然后喜欢和自己一样有智慧的人交往，如果那个智者也可以喜欢自己，那么这也是对我智慧的承认。
- 之所以说**智性恋不是超越性的**，是因为爱情本身就是具有超越性的，爱情可以和智慧无关，认为超越的爱情和智慧有关恰恰一点也不超越。**爱情和智慧金钱美貌都可以无关**，并不是智性恋比金钱恋就更超越，也不是同性恋就比异性恋就更超越，即使一个人对于智者的爱欲就是想从他那里获得知识，而知识的超越性也不能建立于对于享乐的排斥上，从而觉得获得知识是纯粹的，没有享乐的，但**爱知识也是一种爱欲，当然是有享乐的**，而享乐之间的等级划分又是制造压抑的，

“妓女情结”——男性沙文主义者的终极幻想

- 修正主义西部片 (Revisionist Western) 开始出现，虽然影片的核心依然是传统的英雄主义故事，还是枪林弹雨的同态复仇，但其中已经不乏对女性形象的去脸谱化，以及对英雄杀死坏蛋的合法性的考虑，开始就“蛮荒与文明”、“个人正义与公众法律”之间的矛盾展开讨论。牛仔在文明的浪潮冲击中死去，法律终会代替个人复仇。这是对文明的赞歌，也是对英雄迟暮的挽歌。这种变化持续到了新千年，平权主义得到了大范围的普及，甚至出现了“政治正确”等矫枉过正的现象。但其中不乏出现了众多深入人心、单持孑立的女性形象，都在冲击着西部男子汉的传统形象，成为了歌德“永恒之女性，引我等向上”的完美诠释。
- 现代西部片开始热衷于赋予主角们严重的创伤或缺陷，将主角塑造成在文明框架中矛盾密布、更加忤逆的“反英雄”。他们善恶界限分明，并不屑于遵从现有腐朽规则的制约，自诩义警在法律无法触及到的阴暗旮旯里私刑审判。而在暴力的背后往往都是为情或义的矛盾挣扎还有孤独困苦。**他们认为这个畸形的社会需要被改变，有些人需要被他们拯救，甘之如饴地寻觅着传统西部片中那饱受欺凌地未亡人”。**
- 《出租车司机》影片中有一个非常关键的场景：在 Travis 分手之后，刺杀总统之前，他曾以朋友的身份与 Iris 共进早餐。在店中，Travis 嫉恶如仇，直言道：“你身边的那些人就是些人渣，是全世界组邪恶的人。”他劝 Iris 出来生活，自己则愿意承担所有的开销。但 Iris 却不以为意，她觉得这都是自己独立选择的结果，是嬉皮，她并不讨厌。
- 虽然以暴制暴大快人心，但是在某种意义上讲，她并不需要 Travis 的稻草，Travis 强行赋予了她们“待拯救”的标签，认定她们就是泥沼中的娇花，并通过杀死她们所认可的人来证明自己的力量还有正义感依旧是被社会所需要的，渴望毫无保留地拯救一名（自以为）身处险境地弱势个体，**来满足自己渴望被依赖的诉求**。这就是继承自老西部电影的“妓女情结”。
- 《你从未在此》中，Joe 是一名退伍老兵，被参议院雇佣来拯救被州长拐骗为妓女的女儿 Nina。当 Joe 杀到州长大宅时，导演甚至省略了所有的暴力镜头，观众只能够通过尸体叙事来臆想正义的审判。最后镜头跟随 Joe 一步步走向州长的房间，当我们以为能够像 Travis 一样终于大开杀戒时，**却发现州长已经被 Nina 割喉**。一切的努力都是徒劳，观众崩溃了，**对暴力的诉求被杀死**，长久以来的期待全部落空。Joe 崩溃了，**他自己对 Nina 的救赎全部是一厢情愿，她自始自终都不需要你**。而 Nina 似乎也对他的痛苦心照不宣。
- Joe 在服役和工作期间曾因几位女性死亡造成了严重的创伤。在母亲死后，Joe 曾经打算和母亲的实体一起沉塘，但死前却看到了（当时还处在危险之中）Nina 的幻象，这才让他决定继续活下去（真正的“稻草”）。
- 有这么一个镜头：Joe 站在站台旁边注视着铁轨——死亡，有一位鼻青脸肿的妇女躲在一旁，她经历了什么我们不得而知。Joe 退了回来，拯救像这样的群体就是 Joe 继续活下去的根本动力。
- **而在 Nina 手刃州长之后，Joe 的自我价值被完全否定，这最后的活力都已经不复存在。**
- Travis 推心置腹地劝妓从良，Joe 在 Nina 身上寻求救赎，他们私以为孤寡怜弱的雏妓，实际上就是他们身为边缘人寻求认同和活下去的最后稻草。**“救人者恒自救”**说的就是这个道理。

第二十章 福柯

超时空对话福柯

- 知识就是权力，权力是无处不在的。
- 福柯认为传统西方社会有一种错误的倾向：即把权力视作一种自上而下的、强者对弱者使用的“事物”。虽然福柯并未对权力下过明确的定义，但从他的论述和举例中可以看出，他认为权力不止来自于上位，也来自于下位，类似一种可流动的、存在于社会各处的网状关系。福柯认为问题的关键并不在于“权力是什么”、“权力由谁掌握”，而在于“权力是如何发生、如何运作的”。
- 福柯在《规训与惩罚》开篇对刺客被分尸的酷刑评论道：“这种惩罚方式的野蛮程度不亚于，甚至超过犯罪本身，它使刽子手变得像罪犯，使法官变得像谋杀犯，而受刑者却转变为怜悯甚至赞颂的对象，不仅无法对民众起到警戒的作用，反而让他们看到君主在肆意炫耀暴力，耀武扬威地展示统治者和民众的不对等低维。”在现代，酷刑则可能使司法正义称为输家，因此，福柯特出另一方向：让权力更加精确地作用于灵魂而非肉体，而这就需要规训来帮助实现。
- 全景敞式监狱，甚至一个监视者都不需要，只要囚徒相信了监视者的存在，长此以往，他们的心中就会自己长出一双监视自己的眼睛。**自己同时扮演监视者和被监视者两个身份**，这可远比监视者的凝视更加锐利，**权力通过虚构的关系达到了真正的征服**，使囚徒完成了自我规训。所以此时，**囚徒的灵魂反倒成为了自己肉体的监狱**。
- 福柯认为，规训是权力最终实现操纵人的行为而精心设置的技术，它通过指定规范（诸如层级监视（如公司以职位高低设置工位顺序）、规范化裁决（如公司指定奖惩标准）与检查（如学校考试））来训练出遵循权力意愿去行动的被驯服的肉体。所谓权力，即体现为对人的控制与支配，但这种控制和支配不是借助暴力、酷刑使人服从，而是通过日常规范化的纪律、检查与训练等来达到更深层的精神控制的目的。不只是监狱，它普遍存在于社会各处，且更加高效、更加隐蔽。
- 在《性经验史》第一卷中，福柯便指出反抗对于权力的绝对内在性，即权力无谓于反抗，甚至还需要借由反抗来彰显自身的存在。他认为对权力的常规反抗不仅是徒劳的，甚至可能会反过来使权力重新生产权力，因为权力本身并不是压迫性的，而是生产性的，不过，这个观点也遭到了（被认为是）泛权力论的指责。
- 由于性处于“人口”这一政治、经济问题的中心，因此权力与规训必然会参与其中。“我们必须分析出生率、结婚年龄、合法与非法的出生、性关系的早熟和频率、提高或降低生育率的方式、单身的后果或禁忌的影响等等。”可以说，西方政府将权力之手伸向人们最私密的领域——性，并对它世家各种规定（如什么年龄能结婚、能生几个孩子、提倡单身还是晚婚晚育等等），而这些条款正是无形中形成的性话语机制（**“性的机器”**）的体现。
- 福柯说：“我们到了 18 世纪才有‘性的机器’，到了 19 世纪才有性。在这之前无疑只有肉欲。”意思是说，18 世纪以后，在“性的机器”的运转下，才产生了后来人们普遍接受的性话语体系和性规范体系。因此，现代人的性观念，其实是 19 世纪以后才建构起来的。那么何为“性的机器”呢？在福柯看来，“机器”意味着一套固化的结构和体系，因此“性的机器”则意味着**一套被规范化、结构化的性话语体系**。当然这是一个比喻的说法，福柯意指性话语机制就如同一个大机器一样：人们一旦进入它（性的话语体系），就会**自然地接受着关于性的模式化与标准化的规训**。
- 福柯说：“18 世纪以来，权力机构煽动人们去谈论性，谈得越多越好，权力当局还坚持要听到人们谈论性，并且让性现身说法，发音准确，事无巨细。”**当人们不再遮遮掩掩而是公开地谈论性话题时，权力机构才更容易掌握人们的信息，从而对其更好地加以管制**。（于此同时，性又被视为一种秘密，被公开谈论）而谈论离不开话语，权力就可以通过对话语的规训来完成对性的规训了。（借助这种方式，**权力掩盖了自身的无处不在**）
- 在《知识考古学》中，福柯提出了“知识型”的概念，是指能够在既定的时期把产生认识论形态、产生科学、产生形式化的系统性话语等联系起来的底层架构；是指在每一个话语行程中，向着认识论化、科学化、形式化的过渡所依据的方式；指这些能够相互从属或者在实践中拉开距离的界限的分配；指能够存在于属

于临近的但却不同的话语实践的认识论形态或者科学之间的双边关联。

- 简单地说，知识型就是在某个特征时期内存在于不同学科领域之间的所有关系。它是一个时期内的知识、认识论形态和科学之间彼此连接的方式，是构成各门学科和知识的潜在条件和共同规则，是各种知识形成的可能性条件。它不是知识的形式，也不是某一门具体学科。例如，可以将阴阳五行视作中国古代的知识型。这种话语形式串联了当时的科学（如占星、算数）与哲学。需要注意的是，“知识型”与库恩科学哲学中的“范式”有很大区别，前者包含的概念更广更深，不能混作一物。
- 福柯明确表示过，他的知识考古学并不描述学科。知识型是标志话语实践中陈述形成的一种整体，而这种实践，不只是表现在某一具有科学性地位和科学目的的学科中，我们同样可以在司法文件、文学、哲学、政治性的决策甚至日常话题中，与意见中发现它在起作用。从这一理论出发，福柯认为并非是主体凌驾于话语之上，而是话语操纵着主体，话语才是主体的可能性前提。

第二十一章 拉康

拉康所说的“言说的主体”和“陈述的主体”,“我在我不思之处在，我在我不在之处思”，能够解释罗素悖论，并且瓦解“逻辑学”对现实逻辑的想象性建构。

第二十二章 你想咋滴？

傲娇：既要又不要，教育出来的左右为难

- 请不要尊重我的意愿，请不要听我的话，不要按照我说的行事。还有这样的要求吗？
- 阿姨问小朋友想吃糖吗？小朋友说我不想吃，于是阿姨走开了，但是过了一会发现小朋友在急得抹眼泪，即使如此，阿姨过来再问他，小朋友还是说我不想吃。为什么要这么拧巴呢？
- 有一种家庭教育会造成这种左右为难的困境，就是教小朋友说谎。
- 当小朋友表现出来想要吃糖的时候，不是让他主动表达自己的愿望，说谢谢记住回报阿姨，而是告诉他，你不能这样做，不能这么说，你不能接受阿姨的糖，即使你想要吃糖，只有这样你才能显得谦逊，才是好孩子。父母误以为这样的教育可以使小孩子更加有品质，但是小孩子只学会了撒谎，并陷入了一种左右为难的困境。
- 如果小孩子直接表达自己的需求，就丧失了谦逊；如果要保持谦逊，那就没有糖吃，要吃亏。总是要缺失一块。
- 要是想要不蒙受莫名其妙的损失，就只能祈祷这个阿姨能听懂自己的潜台词：当我说不要的时候，请理解我的意思，立刻把东西给我，而不是直接走掉。
- 这就是那个大名鼎鼎的悖论：我要求你主动满足我的需求。
- 怎么可能又被要求又主动呢？当社会上充斥了接受着这种教育的人，就会充斥着一种虚伪的气氛，指望着靠打暗语来完成交流，谁也不会把话说在明面上，我是来展现我的高风亮节的，你们最好识趣一点，主动给我，主动读懂我的潜台词，否则就是不懂规矩，不会察言观色。这就是我们的特色，人情世故，城府，虚伪，狡诈……
- 说暗语打哑谜的文化充斥着整个东亚文化圈。
- 在恋爱中，女性往往不会把话说在明面上，比如说想要什么礼物了，又不告诉男朋友。但如果他没有读懂潜台词，他没买，就倒大霉了。当男朋友过来跟她说，你到底想要什么的时候，她又说，我你不懂我，我要是直接告诉你我就会显得贪婪了。
- 因为社会的普遍舆论会使直接表达诉求的女性陷入尴尬的、被指责的境地。这导致女性不敢直接地导致自己的诉求。我们在影视作品中看到的更多来说傲娇的是女性。
- 总之傲娇就是这样一种源自于虚伪的教育方式，就是美德不再被看作是自愿，反而被功利地当作是作秀的时候，那么打哑谜说暗语就出现了。
- 它所造成的恶果就是语言彻底失灵，人们无法表达诉求，无论人们说什么，我们都要用某种特定的潜规则来行事。不能做出解释，因为所有解释都失灵了。
- 这确实会出现在现实中，当一个人说请不要怎么怎么样的时候，但对方会微笑着说，我懂规矩，仍然按照自己理解的潜规则行事，而不管对方说了什么，这是何等的恐怖！

第二十三章 青春期

人为制造的青春期

- 青春期是人为制造出来的，不是对生理发展阶段的分类，而是对错位、断裂、反抗等现象的指称。注重社交，局促不安，与家人之间产生矛盾，当无法被统一整合的现象出现的时候，引起了当事人各种各样的反应和表现，根据这些反应和表现，人们会说他进入青春期[1]了。
- 全日制的学校，这种教育制度被发明之前，没有听说过儿童和成人之间有一个明确的过渡时期。而是他们接受一个“成人礼”，之后周围的人把他当作成人而不是儿童来看待，于是这个过渡很快就过去了。
- 但是不断增长的教育时间好像改变了这一切，十八岁以后，大学生已经不是法定意义上的孩子了。但是一些人，比如父母，还是把大学生当作孩子来看待：在大学千万不要早恋啊，孩子什么都不会，我还是租个房子在学校旁边给他洗衣做饭吧。
- 一会被当作大人，一会被当作孩子，我到底是谁？本来已经说好了自己做决定，自己承担责任，但是父母为什么又跟过来了呢？
- 这些过渡期的关键就是没有一条明确的界线，他还没有跨过来，他还没有上过学，他还没有结婚，他还没有这个那个。
- 我们应该按照过渡期之前的孩子形象来生活，还是跨过这个过渡期呢？没有能说得清楚，要靠探索、反抗，实际发生的事情来看，甚至还不够。
- 难道我们应该克己复礼，恢复古代社会运作模式，才能解决这个青春期的问题吗？恢复那种人身依附大家长的制度？这样也就不用纠结什么时候是节点了，要不要反抗，这些令人头疼的问题了。孝顺还是不孝顺？经济独立还是经济不独立呢？只要没有脱离大家庭的控制，不作为拥有选择权的独立个体，不敢称为独立个体的，我们统称为大龄儿童，甚至巨婴。但是，这至少有了个确定的身份，至少名称是确定的了，至少能解决当前的混乱。
- 这就是青春期的思路：虽然他长得比父母还高了，他已经成年了，他已经不再是一个孩子了，但是我们可以说他还在青春期，还是不能自己做决定的，一定要别人帮他做决定[2]，他还没有长大，不能自己做主。他虽然已经成年了，已经三十了，但他在父母眼里还是个小孩，不是说他就是个小孩子，而是说他还在青春期哦，在青春期的延长。
- 这只是青春期，不要疑惑自己到底是个孩子还是成人，这是青春期，这是合理的，这是科学的，大家都是这样的。绝对不能让当事人意识到没有什么青春期，这就人为制造的混乱。千万别让他意识到，千万别露馅了，要是露馅了的话，他就真的要做个明确的决定，要么做大人，要么做孩子，他真的要逃出手掌心，逃出控制了。
- 与其说解决青春期的问题，不如说这个词在社会中的流行传播，本身就是一个问题，相信青春期存在本身就是一个问题。它通过被发明来掩盖这种断裂，好像这种错位已经被解释了，已经是科学的了。
- 家长会沿用孩子并没有脱离青春期，来继续帮他做决定。
- 问题的关键在于否定青春期来结束这种混乱。而不是含糊不清，让他产生模糊的自我定位、自我认知。
- 我们不要从长计议，而是直接先当成年人，在实践和体验中知道怎么当一个成年人[3]。那个准备好了的时间、情况是永远不会到来的，如果你不让他去当一个成年人的话，让他身处一个成年人的情境之中的话。如果不去体验、实践，他就会永远被困在青春期中。

---

[1] 青春期就是一个意义附着点，回溯性地固定了一系列漂浮不定的事件、情绪、行为……

[2] 其实就是，你听从别人教你的方法行事，最终会导向失败，顺从自己的原初想法行事，最终也会导向失败，那为什么不做自己呢？为什么要听从别人告诉你的，满足别人的控制欲吗？哪个人能保证照自己说的去做就一定能做成事呢？

[3] 就是说从来没有什么“水到渠成”，只有在没有准备好的时候去做，去试错，去在实践中感受、体验、成长，才能达到那种所谓的“我准备好了”的状态。