定义 0.1

设 V 是 n 维欧式空间，**A** 是 V 内的一个线性变换。如果对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有

$$(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\beta)=(\alpha,\beta)$$

则称 **A** 为 V 内的一个正交变换.

对 V 内任意线性变换 **A**，定义 V 内二元函数

$$f(\alpha,\beta)=(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\beta)$$

我们有 $f(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数。

在 V 内取定一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，设

$$\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\quad \beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$$

A 为正交变换 $\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)\equiv(\alpha,\beta)\Leftrightarrow A'GA=G$[a]

[a] G 是 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的 Gram 矩阵

例题 0.1. p39 第 3 题

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两个向量组，证明存在一个正交变换 **A**，使

$$\mathbf{A}\alpha_i=\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,s)\tag{1}$$

的充分必要条件是

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,s).\tag{2}$$

证明

- 充分性：若 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\forall i,j$，我们不妨设 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 本身构成极大线性无关组，否则取其极大线性无关组即可，公式2保证了这两个极大线性无关组等秩。我们直接构造线性变换 **A**，将每个 α_i 对应到 β_i。由于 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个 s 维子空间 V_s 中的两组基，若有 **A** 在 V_s 上构成正交变换，则可以把 **A** 扩充到 V 上，同样构成线性变换。因此，不妨设 $s=n$，于是 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两组基。下面验证：**A** 正交.
  $\forall\alpha,\beta\in V$，我们有分解 $\alpha=\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k,\beta=\sum_{k=1}^n b_k\beta_k$。故

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\beta)&=(\mathbf{A}\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k,\mathbf{A}\sum_{k=1}^n b_k\beta_k) &(3)\\
&=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_id_j(\mathbf{A}\alpha_i,\mathbf{A}\alpha_j)) &(4)\\
&=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_id_j(\beta_i,\beta_j)) &(5)\\
&=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_id_j(\alpha_i,\alpha_j)) &(6)\\
&=(\alpha,\beta),\qquad\forall\alpha,\beta\in V &(7)
\end{aligned}$$

- 必要性：由正交线性变换的定义可知：

$$(\beta_i,\beta_j)=(\mathbf{A}\alpha_i,\mathbf{A}\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)\tag{8}$$

□

例题 0.2. p55 第 15 题

设 **A** 是 n 维酉空间 V 内的一个线性变换。如果存在一个复系数多项式 $f(\lambda)$，使 $\mathbf{A} = f(\mathbf{A}^*)$，证明在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在这组基下的矩阵成对角形。

定理 0.1

设 **A** 使 n 维酉空间 V 内的一个正规变换，则在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在这组基下的矩阵成对角形。

证明 根据定理0.1，只需证明 **A** 使 n 维酉空间 V 内的一个正规变换即可。

因为

$$A = f(A^*), \quad A^* = f(A) \tag{9}$$

所以

$$AA^* = f(A^*)A^* = A^*f(A^*) = A^*A \tag{10}$$

□

例题 0.3. p55 第 29 题

设 V 是 n 维酉空间.

1. 设 M 是 V 的子空间。在商空间 V/M 内定义内积如下：设 $\bar{\alpha} = \alpha + M, \bar{\beta} = \beta + M$。若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in M^{\perp})$$
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (\beta_1 \in M, \beta_2 \in M^{\perp})$$

   则令 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\alpha_2, \beta_2)$。证明 V/M 关于此内积成酉空间。
2. 设 **A** 为 V 内的一个线性变换。证明在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在该组基下的矩阵成上三角形.

定义 0.2

设 V 是复数域 **C** 上的线性空间，如果给定一个法则，使 V 内任意两个向量 α, β 都按照这个法则对应于 **C** 内一个唯一确定的数，记作 (α, β)，且满足：

1. 对任意 $k_1, k_2 \in \mathbf{C}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V$，有

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) \tag{11}$$

2. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$，因此对任意 $\alpha \in V, (\alpha, \alpha)$ 都是实数
3. 对任意 $\alpha \in V, (\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

则称二元函数 (α, β) 为 V 内向量 α, β 的内积. 定义了这种内积的 **C** 上的线性空间称为酉空间.

证明

- 验证可知:
  1. 对任意 $k_1, k_2 \in \mathbf{C}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V/M$，有

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) \tag{12}$$

  2. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$，因此对任意 $\alpha \in V/M, (\alpha, \alpha)$ 都是实数
  3. 对任意 $\alpha \in V/M, (\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- 考虑酉空间中的 Schmidt 正交化和 QR 分解，显然得证！

□