学习笔记

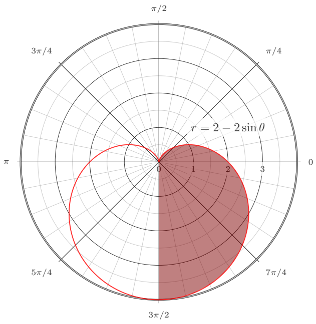
GorgeousLaTeX 经典之作

作者：乐绎华

组织：SYSU

时间：June 4, 2024

版本：5.0 β 自制魔改版本



过去从未消失，未来已经存在。——史铁生《务虚笔记》

目录

第一部分

数学

第一章 一些链接

香蕉空间

中文数学 wiki

有界变差函数

有界变差函数和绝对连续函数

Lebesgue-Stieltjes 积分

functional monotone class theorem

单调函数左右极限都存在，且单调函数 = 连续函数 a.e.

笔记 汪林《数学分析中的问题和反例》pp143 中说明严格单调函数不可微的点不一定是间断点.

Banach 空间和不动点定理（完）：有趣的 Brouwer 不动点 - dhchen 的文章 - 知乎

区域不变定理

一堆笔记

泛函分析中的范畴论

对于无限集，单射 (满射) 不会自动是双射

笔记 考虑 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $x\mapsto 2x$，这是单射但不是满射.

Frobenius 内积、范数

解微分方程的刘维尔公式

高观点看有限覆盖定理

代数几何：Scheme

A possible application of the thought of Galois theory

卷积的性质

Codi 画图

tikz 画交换图 quiz

LaTeX 画图网站

Tikz 画箭头的教程

Tikz 所有画图手册

度量空间

点集拓扑结合范畴论

代数拓扑——同伦论、van Kampen 定理、闭曲面基本群

LaTeX 画图

双拼训练

齐泽克《less than nothing》

第二章 竞赛班

学习注意事项:

1. 竞赛课和期末课不同, 竞赛课需要做的是培养自己解决问题的能力, 而不是记忆方法, 学习套路, 我们更多的是强调一种数学直觉, 有明确套路和步骤的问题都属于基础题.
2. 竞赛课尽量强调广泛性, 而不在熟练度上做文章, 换言之, 同类型的题我们基本只会一次, 重复性训练需要靠自己完成.
3. 不要只会做原题, 一个人水平怎么样, 就看他写的答案, 如果基本和参考答案方法一致, 那么这个人数学水平一定不行.
4. 除去一些基础特别好的学生外, 或多或少都会有自己基础知识不足的地方, 学习的时候感到吃力（大多数新学员都是必然的）要学会对应补充知识点.
5. 课程虽然分为非数学类和数学类, 纯属做难度上的区分, 建议都看.

2.1 第九届

2.1.1 非数学类

第 1 次课

- O,o 的定义
- Taylor 公式的 peano 余项
- 几个求极限的题，直接用 o 余项即可
- 幂指形式转化为 $e^?$ 计算阶
- Taylor 展开计算 $\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$ 的阶
- 中值定理保持阶不变

第 2 次课

- 对 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\ln n$ 的渐进估计，用 0 阶 E-M 公式
- 证明 string 公式，并对 $n!$ 进行更强的估阶
- 和式与积分同阶，对 $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2}$
- 分部积分改善阶
- 同阶的应用
- 和式 (积分) 与极限交换的定理，e.g. 控制收敛定理，fubini 定理，levi 定理，Fatou's Lemma

第 3 次课

- stolz 定理
- 解微分方程法，算函数极限
- stolz 和洛必达一样，可以降阶
- stolz 对数列渐进估阶
- abel 变换和分部积分一样，处理 $\frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n}$
- 洛朗展开对 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ 进行无穷阶渐进展开

第 6 次课

- $f(2x)=f(x)$
- 函数
- 强求通项
- Cauchy 方程
- 既凹又凸是直线

- 连续函数单射等价于严格单调
- $f(f(x))$ 的性态分析

第 7 次课

- darboux 中值定理，导函数不一定连续，但是具有介值性
- taylor 中值定理
- K 值法，e.g.$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\theta)$
  1. 换存在点的部分为 K
  2. 变其中一个数字为 x
  3. 用罗尔求导
  4. K= 你要证的东西
- hermite 插值多项式（不拟合导数点的时候就是拉格朗日插值）
  - 模型 $p^{(n)}(\theta) = f^{(n)}(\theta)$
- 分部积分法（同样是本质的）
- 结合第一积分中值定理实现超级罗尔

第 8 次课

- 反解微分方程，常数变易
- 双中值问题
- 反复积分第二中值定理

  设 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明：$\exists x \in (0,1], s.t. \int_0^x yf(y)dy = 0$

第 9 次课

- 函数性态分析，反解微分方程
- 函数性态分析
- 双绝对值技巧，在变易函数的基础上要平方一下
- f' 严格小于 0，推出 $f \to \infty$

第 10 次课

- 导数存在定理
- $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(2x) - f(x)$
- taylor 余项推出的不等式，e.g.$|f(x)| \le \frac{M}{4}(b-a)^2$
- 对函数最大值点的性态分析
- 凹凸性分析

第 11 次课

- 对中值参数使用 taylor 公式把它暴露出来
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}$
- 含参积分求导公式
- 磨光函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$
- 用 $\sin x, \arctan x$ 复数形式计算高阶导数
- 构造微分方程或生成级数求高阶导
- $\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$
- 没做练习

第 12 次课

- 估值类积分不等式
- 凸性类，看到凸性就兴奋
- Jensen 不等式
- Cauchy 不等式配凑类
- 等周不等式 (这种题型非常特殊，记忆方法即可)

- 傅里叶级数和帕塞瓦尔恒等式
- 待定系数

  $f(x) \in C[0,1]$, 证明:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)dx\right)^2$$

  分析:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \int_{-1}^{1}(x+b)^2dx \geq \left[\int_{-1}^{1} f(x)x + bf(x)dx\right]^2$$
$$\int_{-1}^{1}(x+b)^2dx = \frac{6b^2+2}{3}$$

第 13 次课 下面的积分形式属于简写，没有给出函数的要求，见原文件补充

- 切比雪夫不等式（证法：构造重积分）

$$\int_E fd\mu \int_E gd\mu \leqslant \mu(E)\int_E fgd\mu$$

- young 不等式

$$\int_0^a fdx + \int_0^b f^{-1}dx \geqslant ab$$

- 反向 Cauchy 不等式

$$\mu^2(E) \leqslant \int_E fd\mu \int_E \frac{1}{f}d\mu \leqslant \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}})^2\mu^2(E)$$

- gronwall 不等式

$$u(t) \leqslant \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \forall t \in [a,b] \Rightarrow u(t) \leqslant a(t) + \int_a^t a(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds$$

- 高中做法：直接求导

  非负函数 $f(x) \in C^1[0,+\infty), f(0)=0, f'(x) \leq \frac{1}{2}$, 证明: $\forall a>1$, 有 $\int_0^\infty f^a(x)dx \leq \left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{\frac{a+1}{2}}$
- 配凑积分号内 ≥ 0 但积分 <0 的矛盾

  $f(x) \geq 0$, 且在 $\mathbb{R}$ 上可积, 并且满足 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^2f(x)dx = 1, \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = 0$, 证明: $\int_{-\infty}^u f(x)dx \leq \frac{1}{1+u^2}, \forall u \leq 0, \int_{-\infty}^u f(x)dx \geq \frac{u^2}{1+u^2}, \forall u \geq 0$
- 海森堡不等式

$$(\int_{\mathbb{R}} f^2dx)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2f^2dx \int_{\mathbb{R}} |f'|^2dx$$

第 14 次课

- 压缩区间

  $a>0, f(x) \in C^1[0,a]$ 证明：$|f(x)| \leqslant \frac{\int_0^a |f(y)|dx}{a} + \int_0^a |f'(y)|dy$
- 直接把 $|f(x)|$ 放成最值
- taylor 展开拉格朗日余项，配合导数有界

  $f(x) \in C^1[0,2], f(0)=f(2)=1, |f'(x)| \leqslant 1$, 证明：$1 \leqslant \int_0^2 f(x)dx \leqslant 3$
- 看到凹凸性就兴奋，想切割线放缩；不涉及导数，割线放缩
- opial 不等式 $f(x) \in C^1[a,b], f(a)=0$ 则

$$\int_a^b |f(x)|^p \int_a^b |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}dx$$

- 推论 若还有 $f(b)=0$ 证明：

$$\int_a^b |f(x)|^p \int_a^b |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}dx$$

- 普特南（辛普森公式插值） 确定最小常数 $C,\forall$ 在 $[0,1]$ 有根的 3 次多项式 $p(x)$，使得 $\int_0^1 |p(x)|\,dx \leqslant C\max|p(x)|$
- $f(x)\in C[a,b], s.t.: 0\leqslant f(x)\leqslant M$，证明：

$$(\int_a^b f(x)\cos x dx)^2(\int_a^b f(x)\sin x dx)^2+\frac{M^2(b-a)^2}{12}\geqslant(\int_a^b f(x)dx)^2$$

第 15 次课

- 不定积分猜原函数
- 化重积分

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy},\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\,(b>a\geq 0)$$

- 引入收敛因子，laplace 变换的本质
- 区间再现，$[a,b]$ 反过来，无穷区间倒代换
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ 拆开两段
- 级数类型

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{1+e^x}dx,\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}dx,\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx,\int_0^{\pi}\frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}dx\,(|q|\neq 1)$$

- 化和类型
- 使用特殊函数计算积分 Γ,β
- 含参积分求导类型（本质上和二重积分一样）
- Frullani（傅汝兰尼）积分 - 知乎 (zhihu.com)
- 常见无穷积展开和有理分式展开

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),z\in\mathbb{C}$$

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\pi^2n^2},z\in\mathbb{C}$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right),z\in\mathbb{C}$$

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}},z\in\mathbb{C}$$

- Gamma 函数的一些注解 - 知乎 (zhihu.com)
- Gamma 函数的那些事儿（2）——欧拉常数与 Digamma 函数 - 知乎 (zhihu.com)

第 17 次课

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)-f(x)dx$
- 非负函数 $f(x)\in C(\mathbb{R}),\forall k\geq 1,\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,dx\leq M$, 证明:$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx\leq M$
- 积分收敛时可以找到趋于 0 的子列, 积分绝对收敛时可以找到性态非常好的趋于 0 的子列

  专题:对$f\in C[a,+\infty)$, 探讨 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$收敛时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 得性态. 我们已经知道 $\exists x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$

  加强：若 $\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$, 则存在$x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_nf(x_n)=0$
- 和级数一样, 级数分部取 N(Toeplitz)$\Leftrightarrow$ 积分 Cauchy 收敛

  $f\in C[a,+\infty)$, 设 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛, 当 $f(x)$ 递减时, 那么 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$.
- f 一致连续,$\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛, 蕴含 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.
- 广义级数敛散性判别法（类似级数的比值判别法和根值判别法）
- 判断级数收敛

第 18 次课

- 微分方程求解逻辑是先猜后证，求全部解时才需要求出奇解，否则只需要求出通解.
- 高阶线性微分方程的常数变易法
- 对于 $y''+ay'+by=f(x)$ 的非齐次特解形式 $\int_0^x g(x-t)f(t)dt$, 这里的 g 是 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的齐次解, 即 $y''+ay'+by=0$ 在 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解
- 证明线性微分方程的解有界
- y 和 y 的各阶导数次数相同类型（换元 $y=e^{\int z dx}$）
- 对于一般的变系数二阶线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$，一般来说只能猜出一个解，然后用降次方法求出另一个解，三种降次方法：
  - 刘维尔公式
  - 令 $u=\frac{y'}{y}$，转化为一阶黎卡提方程
  - 定义朗斯基行列式，这个是刘维尔公式的证明
- 一阶微分方程积分因子法 (不好用)
- $y'=f(x,y)$
- $x=f(y,y')$
- $F(x,y')=0$

第 19 次课

- 已知准线，母线，求柱面
- 判断柱面
- 锥面的求法，一个顶点一条母线
- 旋转曲面求法
- 参数形式的柱面、锥面和旋转曲面
- 正交变换
- 曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ 的类型

2.1.2 数学类

第 1 次课

- 黎曼可积函数可由阶梯函数逼近
- 黎曼可积函数可由连续函数逼近
- 在积分意义下，可积函数和分段常值函数没有区别
- 黎曼引理，证明考虑用连续函数逼近
- $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数可由 $\mathbb{R}$ 上有紧支集的函数逼近
- 阶的估计，和式与积分同阶
- E-M 公式
- 定积分定义的无穷阶加边

第 2 次课和第 3 次课

- 分部积分改善阶
- $\sum$ 正余弦函数 (等差数列) $=\dfrac{\sin\left(\frac{\text{公差}}{2}\right)\sum \text{正余弦函数}(\text{等差数列})}{\sin\left(\frac{\text{公差}}{2}\right)}$
- abel 变换改善阶
- 黎曼引理，证明考虑用连续函数逼近
- Laplace 方法，你要把一个东西弄成 exp 的形式，再搞最大值点
- 拉格朗日反演

第 5 次课

- 闭区间到自身的连续函数必有不动点

- 若不收敛有界数列 $\{x_n\}$ 满足,$\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, 则 $\{x_n\}$ 的聚点是个区间.
- $f(x+1)=f(x)+1$ 钓鱼题
- 加强归纳法

第 6 次课

- 续证 $f(x+1)=f(x)+1$
- 反向 stolz
- 反向洛必达
- 函数 stolz
- 微分学方法和积分学方法可以相互转化，但是导函数不一定存在可积性，所以微分学方法处理的结果其实不如积分学方法强

第 11 次课

- 导数极限式 =0，证明 f 线性
- 实函数可以分为奇函数和偶函数之和
- schwarz 可导
- schwarz 导数的拉格朗日中值定理
- schwarz 导数的罗尔中值定理
- schwarz 导数 ≥ 0 蕴含递增
- 非负函数 $f(x)\in C^1[0,+\infty), f(0)=0, f'(x)\leq\frac{1}{2}$, 证明: $\forall a>1$, 有 $\int_0^\infty f^a(x)dx\leq\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{\frac{a+1}{2}}$
- 配凑积分号内 ≥ 0 但积分 <0 的矛盾 $f(x)\geq 0$, 且在 $\mathbb{R}$ 上可积, 并且满足 $\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}x^2f(x)dx=1, \int_{\mathbb{R}}xf(x)dx=0$, 证明: $\int_{-\infty}^u f(x)dx\leq\frac{1}{1+u^2}, \forall u\leq 0, \int_{-\infty}^u f(x)dx\geq\frac{u^2}{1+u^2}, \forall u\geq 0$

第 15 次课

对于实对称矩阵性质来说，一般可以平行推广到复 hermite 矩阵.

- 分块矩阵初等变换，效果是不改变秩，保留行列式信息
- 打洞可以计算分块矩阵的逆
- 结论: 设 A 是 $m*n$ 矩阵, B 是 $n*m$ 矩阵, 则有 $|E-AB|=|E-BA|$
- 当$\lambda\neq 0, |\lambda E_m-AB|=\lambda^m\left|E_m-\frac{1}{\lambda}AB\right|=\lambda^m\left|E_n-\frac{1}{\lambda}BA\right|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$
- 结论：设 A,B,C 是矩阵 (未必方阵, 只要下面式子有意义, 就有)
$$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$$
- 设 A,B 是方阵, 有 $AB=BA$, 证明: $r(A)+r(B)\geq r(A+B)+r(AB)$
- 设 A 是 n 阶矩阵, C 是 m 阶矩阵, 若 $|A|\neq 0, \left|D-CA^{-1}B\right|\neq 0$, 计算 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}^{-1}$
- 计算分块上三角阵的伴随 $(A^*=|A|A^{-1})$
- A^* 和 A^{-1} 是 A 的多项式
- 证明: $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ 是 A 的特征多项式, $a_n=1, f(A)=0$,
- 求逆矩阵的形式幂级数法（先猜后证，收敛性都不用管）
- 初等变换下的相似合同
  - 对行列做相同的初等变换得到矩阵是合同的
  - 对行列做共轭的初等变换得到矩阵是相似的
    - 比如交换行列；j 行乘 k 加到 i 行，同时 i 列乘 (-k) 加到 j 列；某行乘 k，对应的列乘 $\frac{1}{k}$
  - $A\sim BA\cong B$，都是存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP=B$ 或 $P^TAP=B$
  - 更强的是正交相似，有 $P^{-1}=P^T$
- 分块初等变换下的合同、相似
- 正定矩阵必可逆，因为特征值都是正的，行列式 >0
- 半正定矩阵：实对称，且 $x^TAx\geq 0, \forall x$

- 结论：半正定矩阵的行列式小于对角线之积，a_{ij} 是 A 的对角元.
- 证明思想：不妨设为正定，分块矩阵打洞，使维数降低产生递推

第 16 次课

- A,B,C,D 是同阶方阵, 若 $AC=CA$, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$
  - 证明考虑初等变换
- 零化多项式，极小多项式定义及性质
- 分块矩阵的极小多项式是各个块的 lcd
- 分块矩阵的特征多项式是各个块的乘积
- Jordan 块
- 相同特征值的 Jordan 块的块数是该特征值的几何重数，特征值在对角线出现
- Jordan 型计算
- 几何重数 $\le$ 代数重数，从 Jordan 看来是显然的
- 结论：矩阵的相似不随域扩张而改变
- 涉及到需要在一些更大的域上考虑的问题，可以思考一下如果硬做是不是一个线性方程组的解的问题，线性方程组的解的情况往往和域无关，这样如果在更大的域成立，在本来的域也对
- A 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 则 A^* 的全部特征值为上述 n 个特征值任取 $n-1$ 个的乘积
- 结论：设 A 是 n 阶矩阵，则 $r(A^n)=r(A^{n+1})$，这从 Jordan 来看是显然的
- 正是因为命题大多可标准型化，从而直接看出来，所以线性代数很难有非平凡的问题
- 结论：设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，则 $r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)=r(A^T)$
- 盖尔圆盘 (对角占优)，n 阶复矩阵 (a_{ij}) 特征值一定在某个 $|z-a_{ii}|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ 中
- A 实对称, 则 $\lambda_{min}\le\frac{x^TAx}{x^Tx}\le\lambda_{max}$
- 决赛真题，五、六、八、十二
- $AB=A+B\Rightarrow AB=BA$, 因为 $(A-E)(B-E)=E\Rightarrow(B-E)(A-E)=E\Rightarrow(B-E)(A-E)=E\Rightarrow BA=A+B$
- $AB=BA$ 则 A,B 可以同时相似上三角化
- 不妨设标准型 (对角阵，考试中需要说明为什么可以不妨设)

第 17 次课

- j-c 分解：$A\in M_n(\mathbb{C})$ 则 $\exists B,C\in M_n(\mathbb{C}),s.t.$
  - $A=B+C,C$ 幂零,B 可对角化,$BC=CB$
  - 更强的，$\exists$ 无常数项的 $p,q\in\mathbb{C}[x]s.t.B=p(A),C=q(A)$
  - 且 B,C 是唯一的
- $A\in GL(\mathbb{C})$, 则 $\exists B,C\in M_n(\mathbb{C}),s.t.$
  - $A=CB,C$ 特征值全为单位元,B 可对角化,$BC=CB$
  - 更强的，$\exists$ 无常数项的 $p,q\in\mathbb{C}[x],s.t.B=p(A),C=q(A)$
  - 且 B,C 是唯一的
- 证明考虑 Jordan 标准型分解，中国剩余定理构造 p，令 $q=x-p$ 即可
- 结论：可对角化的两个矩阵可以同时相似对角化
- 结论：两个可交换的复矩阵可以同时相似上三角化
- $AX=XB$ 有非 0 解的充分必要条件是 A,B 有公共特征值
- 对于 $A\in M_n(\mathbb{C})$，考虑线性变换：

$$\sigma_A:M_n(\mathbb{C})\longrightarrow M_n(\mathbb{C}),X\mapsto AX-XA$$

  我们有 σ_A 的 j-c 分解:$\sigma_A=\sigma_B+\sigma_C$
- 奇异值分解的证明

第 18 次课

- 设 A 是 $m\times m$ 矩阵,B 是 $n\times n$ 矩阵,X 是 $m\times n$ 矩阵, 研究 $AX=XB$ 解空间

  - 上述方程本质是线性方程组的解，因此维数不随域扩张而改变. 于是我们在复数域 (代数闭域) 上演技即可.
  - 先分块 Jordan 分解，研究每个块即可
  - 经过分块再分块计算，可知，$AX = XB$ 解空间维数 (交结数) 等于 A, B 分解成单个 Jordan 块的阶数取 min 的求和.

    设 s_0 是 A, B 的公共特征值数，$J_1, \cdots, J_{s_0}$ 分别和 $T_1, \cdots, T_{s_0}$ 特征值对应相同
    - 设 J_i 由 $n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ip_i}$ 阶相同特征值对应 Jordan 块构成
    - 设 T_i 由 $t_{i1}, t_{i2}, \cdots, t_{iq_i}$ 阶相同特征值对应的 Jordan 块构成.T_i 有对应分块是因为对于特征值相同的 Jordan 块，A 的广义特征子空间是 B 的不变子空间.
  - 故 $\dim W$（交结数）$= \sum_{i=1}^{s_0} \sum_{r=1}^{p_i} \sum_{l=1}^{q_i} \min(n_{ir}, t_{il})$
- 推论：设 s_0 是 A, B 的公共特征值数, 则 $AX = XB$ 必有一个秩 $\geq s_0$ 的解
  - 因为第一次对 A, B 分块的时候，对角线上有 s_0 个块可以提供至少一个非 0 解
- 推论：计算与 n 阶矩阵 A 可交换的矩阵空间的维数（不随与扩张而改变）
  - 设 J_i 由 $n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{im_i}$ 阶相同特征值对应 Jordan 块构成
  - 故 $\dim C(A) = \sum_{i=1}^{s_0} \sum_{r=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_i} \min(n_{ir}, n_{il})$
- $F(A)$ 是矩阵 A 的多项式空间，熟知 $\dim F(A) = A$ 的极小多项式次数,$F(A) \subseteq C(A)$. 则下面的性质等价:
  - $F(A) = C(A)$
  - $\dim F(A) = \dim C(A)$
  - $\sum_{i=1}^{s_0} \max(n_{i,1}, n_{i,2}, \cdots, n_{i,m_i}) = \sum_{i=1}^{s_0} \sum_{r=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_i} \min(n_{i,r}, n_{i,l})$
  - $m_i = 1, 1 \leq i \leq s_0$
  - 每种特征值都只有一个 Jordan 块
  - 每种特征值几何重数都是 1
  - 对每个特征值 $\lambda, r(\lambda E - A) = n - 1$
  - 特征多项式 = 极小多项式
  - 不变子空间个数有限!
- 研究 A 的不变子空间，不妨设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的线性变换，设特征多项式 $f(\lambda)$ 有标准分解 $p_1^{r_1}(\lambda) p_2^{r_2}(\lambda) \cdots p_s^{r_s}(\lambda)$，其中 $p_i(\lambda), i = 1, 2, \cdots, s$ 两两互素.

  由课本定理：$V = \ker\ f(A) = \oplus_{i=1}^{n} \ker\ p_i^{r_i}(A)$.

  $\ker\ p_i^{r_i}(A)$ 显然是 A 的不变子空间

  而且可以证明对于任意 V 中的不变自控间 U，可以写成 $U = \oplus_{i=1}^{n} (U \cap \ker\ p_i^{r_i}(A))$
  - 用多项式把 u_i 暴露出来，见此题

  可以验证：$A|_{\ker\ p_i^{r_i}(A)}$ 的特征多项式 $\ker\ p_i^{r_i}(A)$.

  $U \cap \ker\ p_i^{r_i}(A)$ 是 $A|_{\ker\ p_i^{r_i}(A)}$ 的不变子空间.

  任取 W_i 是 $A|_{\ker\ p_i^{r_i}(A)}$ 的不变子空间，都有 $\oplus_{i=1}^{s} W_i$ 是 A 的不变子空间.
- 由上面的分析，因此我们只需要考虑 A 的特征多项式 $f(\lambda) = p^r(\lambda), p(\lambda)$ 不可约，研究 A 的不变子空间.
  - 这里验证了:如果 A 的特征多项式 = 极小多项式,那么 A 的所有不变子空间形如 $\ker\ p^s(A), 1 \leq s \leq r$，故不变子空间个数有限.
  - 如果 A 的特征多项式 $\neq$ 极小多项式，那么 A 的不变子空间由无穷个.
    - 证明：设 A 的极小多项式为 $p^s(A), 1 \leq s < r$，任取 $a \in V, a \neq 0$，考虑 a 生成的不变子空间 $V_a = \langle a, Aa, A^2 a, \cdots \rangle$，由于 $p^s(A) = 0$，这告诉我们 $V_a = \langle a, Aa, A^2 a, \cdots, A^{ds-1} a \rangle$,$\dim V_a < \dim V = rd$，因此，任意 V_a 都是 V 的非平凡不变子空间，由覆盖原理，V_a 有无穷多个.

第 19 次课

- 双中心化子定理：设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，记 $C(A)$ 是和 A 可交换的矩阵空间，则如果一个矩阵 X 和所有 $C(A)$ 中的矩阵可交换，那么 $\exists p \in \mathbb{F}[x]$，使得 $X = p(A)$
  - 即证 A 的全体多项式空间 $P(A) = C(C(A))$

- 如果我们已经对只有一种特征值的情况证明了这个命题，那就证明了这整个命题
  - 这一点的说明要用到中国剩余定理
- 下面假设 A 只有一个特征值，不妨设 A 为幂零矩阵，否则用 $A-\lambda I_n$ 代替 A 即可
- 对于矩阵方程 $J_m(\lambda)X = XJ_n(\lambda)$，解空间维数 $\min\{m,n\}$，全体 X 形如如下写法：

$$\begin{pmatrix} & d & c & b & a \\ & & d & c & b \\ & & & d & c \\ & & & & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c & b & a \\ & c & b \\ & & c \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- 事实上，每一步都是显然的
- 结论：设 A_a 是一族两两可交换的复矩阵，则存在一个可逆复矩阵 P，使得 $P^{-1}A_aP$ 是上三角矩阵
  - 分析：归纳，对矩阵数量归纳？矩阵有无穷个，甚至不可数，放弃对矩阵归纳
    有限量只有维数，所谓归纳，只要把维数降下去就可以了，特征子空间 V_λ 就是最好选择，为了能找到真子空间 V_λ，所以必须要有一个非数量矩阵
  - 特征子空间是全空间：数量矩阵，问题显然
  - 特征子空间不是全空间：$\dim\ V_\lambda < n$ 归纳
- 结论：设 A_a 是一族两两可交换的可对角化的复矩阵，则存在一个可逆复矩阵 P，使得 $P^{-1}A_aP$ 是对角矩阵
  - 对于非数量矩阵 A 有直和分解：$V=\oplus_{i=1}^{s}V_{\lambda_i}$，$\dim V_{\lambda_i}<n$，又 V_{λ_i} 是所有 A_a-，因此 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 是一组两两可交换的可对角化的复矩阵
    - 证明 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 是一组两两可交换的可对角化的复矩阵，这并不显然
    - 因为 A_a 的极小多项式无重根，而 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 一定适合 A_a 的极小多项式，故 A_a 的极小多项式整除 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 的极小多项式，故 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 的极小多项式也无重根，故 $A_a|_{V_{\lambda_i}}$ 也可对角化.
- 结论：设 A_a 是一族两两可交换的实对称矩阵，则存在一个实正交矩阵 P，使得 $P^{-1}A_aP$ 是对角矩阵
- 对应的复版本酉相似也有此结果
- 结论：设 A_a 是一族两两可交换的复矩阵，则 A_a 有公共的特征向量
  - 因为有 P 可逆，使得 $P^{-1}A_aP$ 上三角，故 P 的第一列为所求
- 结论：设 A_a 是一族两两可交换的奇数阶实矩阵，则它们有公共的实特征向量
- 结论：设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 (维数可以无穷，域随便)，$f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^*$，记 $N=\cap_{i=1}^{n}\ker f_i$ 那么如下条件等价：对 $f\in X^*$
  - f 可以被 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性表出
  - $N\subset\ker f$
- “下推上”这里就是映射提升技巧
  - 构造线性映射 $\pi:X\to\mathbb{F}^n, x\mapsto(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)).\ker\pi=N$
    定义 $g:\pi(X)\to\mathbb{F},\pi(x)\mapsto f(x)$
  - - 首先证明 g 是映射，断言 g 线性，因为 $\pi(x)=0\Rightarrow x\in N\subset\ker N\Rightarrow f(x)=0$ 这保证了 g 是良定的
  - 我们把 $\pi(X)$ 线性延拓到整个 $\mathbb{F}^n$ 上，$\exists c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{F}$，s.t.$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i, f(x)=g\circ\pi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_if(x_i),\forall x\in X$
- 推论：n 维线性空间 n 个线性函数线性无关的充分必要条件是它们可分点，即 $\forall a\neq0$，都有这 n 个线性函数里面的某个 f，使得 $f(a)\neq0$

第 28 次课

- AB,BA 有相同的非 0Jordan
  - 证明考虑化为有理标准型并对应分块
- 矩阵 C 属于特征值 λ 的 Jordan 块唯一的被秩 $r(\lambda E-C)^k,k\geq0$ 决定

- 证明见引理
- 上面这个结论用来证明 AB, BA 的非 0Jordan 块完全相同
- 推论：$A, B \in M_n(\mathbb{C})$，那么 $AB \sim BA$ 的充要条件是 $r(AB)^i = r(BA)^i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$
  - 直接写出 Jordan 之后乘法计算是显然的
- 已知 AB，求 BA

  Schur 三角化，Cayley-Hamilton 定理，谱分解，同时对角化，矩阵开方 - 知乎 (zhihu.com)
- 实正规矩阵的正交相似标准型
  - 在 $\mathbb{C}$ 上矩阵 A，如果满足 $AA^* = A^*A$，则称 A 复正规
  - A 为复正规矩阵是酉相似对角化的充要条件
  - $\mathbb{R}$ 上矩阵 A，如果满足 $AA^T = A^TA$，称 A 实正规
  - 实正规矩阵 A 是正交相似标准型如下：
    - 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \cdots, a_t \pm b_t$，其中所有 $\lambda_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}$，并且 $b_j \neq 0$，则标准型为 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_t & -b_t \\ b_t & a_t \end{pmatrix})$
  - 引理：若 A 实正规，λ 是 A 的特征值，则 λ 是 A^T 的特征值
    - 证明思路利用 A 实正规构造 $A^TA = AA^T$ 的形式
- 应用：设 A 是可逆实反对称矩阵，证明 A 的秩是偶数且 $|A| > 0$
  - 证明:因为 A 是是正规的,以及 A 的特征值是 0 或纯虚数,我们有 $A \sim diag(\begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & -b_s \\ b_s & 0 \end{pmatrix}), b_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, s$
- 实对称矩阵的同时合同相似对角化
  - 回忆一个正定矩阵 A 和一个实对称矩阵 B 可以同时合同对角化
    - 证明考虑不妨设 $A = E$，然后取 T，使得 $T^{-1}BT = .T^{-1}ET = E$，因此我们完成了证明
- 两个半正定矩阵可以同时合同对角化
  - 引理：设 A 半正定，若 $A(i, i) = 0$，则所在行列全为 0
- 复数域上矩阵 A 相似于对角线全为 0 的矩阵充分必要条件是 $tr(A) = 0$
  - "$\Leftarrow$" 强行构造归纳

第 29 次课

- n 维欧式向量空间 V 中，两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 n+1 个
  - 归纳证明
- 实对称矩阵 A 正交相似于对角线全为 0 的矩阵充分必要条件是 $tr(A) = 0$
  - "$\Leftarrow$" 类似复矩阵情况，但是对角线全 $\neq 0$ 的情况很有想象力！
- n 维欧氏空间 V 中的 s 个向量 a_i 满足 $\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0, c_i \geqslant 0, s \in \mathbb{N}, c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$,

  $: \exists a \in V, s.t. (a, a_i) > 0.$

  要用到泛函分析的思想、定理
- $\mathbb{R}^n$ 中集 K 的凸包 coK 中的元素可以由项数不超过 $n+1$ 的 K 中的元素凸组合表示出来

第 30 次课

- $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的对乘法的同构映射
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的对乘法和加法的同构映射
- 函数 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性无关的充要条件 (一个 $m \times m$ 行列式 $\neq 0$)
- (丘赛真题) 设 $X \subset C[0, 1]$ 是有限维子空间，证明：X 中的函数列逐点收敛蕴含着一致收敛
  - 想法：把函数列逐点收敛转化成系数的收敛，从而一致收敛

第 31 次课

- 设 4 阶复矩阵 A 满足 $tr(A^i) = i, i = 1, 2, 3, 4$, 求 $|A|$
  - 运用 newton 公式

- 矩阵函数，考察 E_{ij}
- 2016 丘赛

第 32 次课

- 复矩阵同时相似上三角化
- $r(AB-BA)\le 1$ 蕴含 $\ker A, \mathrm{Im}A$ 至少有一个是 B 的不变子空间.
- 引理：如果 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，那么 $BX^T=XB^T$ 一定存在可逆解.
- 辛矩阵经典习题：设 $S\in\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ 满足 $S\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}S^T=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}$，证明 $|S|=1$

第 33 次课

- 设 M 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个子空间，M 中矩阵的秩 $\le r$，证明这样的 M 的最大维数是 rn.
- 重点结论（考试的时候假装证明直接使用）：加边行列式：

  设 A 是 $n-1$ 阶矩阵，α,β 是 $n-1$ 维向量，b 是一个数字，那么
  $$\begin{vmatrix}A & \alpha\\ \beta^T & b\end{vmatrix}=|A|\,b-\sum_{1\le i,j\le n-1}A_{ij}\alpha_i\beta_j$$
  这里 α_i 是 α 第 i 个分量，β_j 是 β 第 j 个分量.A_{ij} 是对应的 A 的代数余子式.
  - 证明：按最后一行 Laplace 展开即可
- 推论：$\begin{vmatrix}A & \alpha\\ \beta^T & 0\end{vmatrix}=-\beta^TA^*\alpha$.
- 推论:$\mathbb{C}^{n\times n}$ 中不可逆矩阵的维数至多是 $n(n-1)$

  证明：在上面结果取 $r=n-1$ 即可
- 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n}$ 是 n 阶可对角化复矩阵，证明：
  1. $\forall k=1,2,\cdots,2n, \mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus \mathrm{Im}A_k$
  2. 若 $A_iA_j=0, i<j$，证明至少有 n 个 A_i 为 0 矩阵.
- 近年来最难的 cmc 高代题

  设 V 是有限维欧式空间，V_1,V_2 是 V 的非平凡子空间，$V=V_1\oplus V_2$

  p_1,p_2 是 V_1,V_2 正交投影，$\varphi=p_1+p_2$，证明：$0<\det\varphi\le 1$，且 $\det\varphi=1\Leftrightarrow V_1,V_2$ 正交.

第三章 范畴论

笔记 范畴论中，若存在，则在唯一的同构下唯一.

几篇文章

https://zhuanlan.zhihu.com/p/165040308

https://zhuanlan.zhihu.com/p/593293486

3.1 什么是范畴?

范畴就是一堆东西和这些东西之间的关系, 比如我们在研究整数比大小时, 一堆整数和这些整数之间的大小关系就属于我们讨论的范畴; 研究函数映射时, 一堆集合和这些集合之间的映射就属于我们讨论的范畴; 研究群论时, 一堆群和这些群之间的同态关系就属于我们讨论的范畴,

这些看似被划分的数学领域实际上可以被抽象成相同的内容. 在这些领域中, 我们讨论的东西被叫做**对象** (objects), 我们讨论的这些东西之间的关系被叫做**态射** (morphisms), 我们通常把一个范畴记为 C.

定义 3.1 (范畴, Category)

- 公理 C1(态射的复合): 如果 f 是一个从对象 A 到对象 B 的箭头,g 是从对象 B 到对象 C 的箭头, 那么我们可以把这两个箭头连起来组成一个从 A 到 C 的箭头. 严谨来说, 存在一个从 A 到 C 的箭头, 记作 $g \circ f$.
- 公理 C2 (复合运算满足结合律): 设 A, B, C, D 为对象, f, g, h 分别为从 A 到 B、从 B 到 C、从 C 到 D 的箭头, 则有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- 公理 C3 (单位态射): 对于每个对象 A, 都存在一个箭头 id_A, 使得对于所有从 A 到任意对象的箭头 f, 所有从任意对象到 A 的箭头 g, 都有

$$id_A \circ g = g, \qquad f \circ id_A = f$$

一般来说, 对于范畴 C, 我们把所有对象 (objects) 构成的类记作 $Ob(C)$, 把所有态射 (morphisms) 记为 $Mor(C)$. 如果 f 是一个从对象 A 到对象 B 的态射, 则写作 $f : A \to B$. 对于给定对象 A 和对象 B, 全体从 A 到 B 的态射组成的类记作 $Hom_C(A, B)$. 下标在没有歧义的情况下可以省略.

定义 3.2 (局部小范畴, locally small category)

设 C 为范畴, 如果对于任意对象 A 和 B,$Hom_C(A, B)$ 是一个集合, 则称 C 为局部小范畴 (locally small category).

定义 3.3 (小范畴, small category)

设 C 为局部小范畴, 如果 $Ob(C)$ 是一个集合, 则称 C 为小范畴 (small category).

定义 3.4 (对偶, dual)

设 C 为范畴, 则 C 的对偶范畴 C^{op} 是一个范畴, 对象是 C 当中的对象, 态射是把 C 当中的每一个态射反转（即把箭头的起点变成终点, 终点变成起点）. 准确来说,C^{op} 是一个满足以下条件的范畴:

1. $Ob(C^{op}) = Ob(C)$.
2. 对于任意 $A, B \in Ob(C)$, 都有 $Hom_{C^{op}}(A, B)$=$Hom_C(A, B)$. 通常把 $f \in Hom_C(A, B)$ 在 $Hom_{C^{op}}(A, B)$ 中的态射记作 $f^{op} : B \to A$.

3. 对于任意 $A, B, X \in Ob(C)$, 任意 $f \in Hom_C(A, B), g \in Hom_C(B, X)$, 都有

$$(g \circ f)^{op} = f^{op} \circ g^{op}$$

Note: 在上述等式中, 等号左边表示 g 和 f 先在 C 中复合, 在取对偶范畴当中对应的态射. 右边表示两个态射在对偶范畴上复合.

定义 3.5 (子范畴, subcategory)

设 C 为范畴. 则 C 的子范畴 $\mathcal{D}$ 是一个由 C 的一部分对象和这些对象之间的态射组成的范畴, 满足以下条件:

1. $\mathcal{D}$ 当中每一个对象的单位态射依然存在于 $\mathcal{D}$ 当中.
2. 如果存在 $A, B, C \in Ob(\mathcal{D}), f \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C)$, 则 f 和 g 在 $\mathcal{D}$ 当中存在复合态射, 且与在 C 当中的复合态射 $g \circ f$ 相同.

定义 3.6 (全子范畴)

设 $\mathcal{D}$ 是 C 的子范畴,称 $\mathcal{D}$ 是 C 的全子范畴,若对于任意的 $A, B \in Ob(\mathcal{D})$,有 $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) = Hom_C(A, B)$.

定义 3.7 (满子范畴, full subcategory)

设 $\mathcal{D}$ 是 C 的子范畴. 如果对于任意 $A, B \in Ob(\mathcal{D})$, 都有 $Hom_C(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$,(即对于任意两个对象, 如果它们都在 $\mathcal{D}$ 当中, 则它们之间在 C 上的所有态射都包含在 $\mathcal{D}$ 当中), 则称 $\mathcal{D}$ 是 C 的满子范畴 (full subcategory).

3.2 对象与箭头那些事

3.2.1 从熟悉的函数单射和满射开始

以往学函数的时候, 我们学过单射和满射. 对于一个集合之间的函数 $f: A \to B$, 如果 f 把不同的元素映射到了不同地方, 则我们称这个函数为单射 (injective / one-to-one). 如果 B 当中的每个元素都在 f 的值域当中, 那么称 f 为满射 (surjective / onto).

定义 3.8 (单射 (injective / one-to-one))

X, Y 是集合, 对于映射 $f: X \to Y$, 如果满足

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$$

或者

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X$$

则称 f 是单射.

定义 3.9 (满射 (surjective / onto))

X, Y 是集合, 对于映射 $f: X \to Y$, 如果满足

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. f(x) = y$$

则称 f 是满射.

我们希望能把这些词语翻译成范畴语言, 让范畴当中的态射也有类似于单射和满射的概念. 然而, 上次我们

说过, 范畴是把集合等对象看成了一个个不可分割的东西, 函数这种概念也变成了简单的箭头. 我们没办法从对象里面取出一个元素, 看它被映射到了哪里. 我们能否在不考虑具体元素的情况下, 去描述一个单射/满射呢? 答案是可以的: 我们可以通过函数复合的性质来判断一个函数是否为单射/满射.

命题 3.1 (单射 ⇔ 左可消)

设 A, B 为集合. 则函数 $f: A \to B$ 为单射 ⇔ 对任何集合 C 和函数 $g, h: C \to A$, 如果

$$f \circ g = f \circ h$$

则 $g = h$.(这个条件被称为左可消)

证明 (“⇒”) 由于 $f \circ g = f \circ h$, 则 $\forall c \in C, f \circ g(c) = f \circ h(c)$, 即 $f(g(c)) = f(h(c))$, 则 $g(c) = h(c)$, 则 $g = h$.
(“⇐”) 对于 $a_1, a_2 \in A, s.t. f(a_1) = f(a_2)$, 令 $g, h: 0 \to A$ 分别把 0 映射到了 a_1, a_2, 则 $f \circ g = f \circ h$, 则 $g = h$, 故 $a_1 = a_2$,f 为单射. \\\\

命题 3.2 (满射 ⇔ 右可消)

设 A, B 为集合. 则函数 $f: A \to B$ 为满射 ⇔ 对任何集合 C 和函数 $g, h: B \to C$, 如果

$$g \circ f = h \circ f$$

则 $g = h$.(这个条件被称为右可消)

证明 (“⇒”)$\forall b \in B, \exists a \in A, s.t. y = f(a), \Rightarrow g(b) = g \circ f(a) = h \circ f(a) = h(b), \Rightarrow g = h$.
(“⇐”) 若 $B = \varnothing$, 显然 f 是满射. 假设 $B \neq \varnothing$, 对于 $b \in B, g, h: B \to 0,1$ 其中 $g^{-1}(0) = b, g^{-1}(1) = B - \{b\}, h^{-1}(0) = \varnothing, h^{-1}(1) = B$. 如果 $b \notin \operatorname{Im} f$, 那么 $g \circ f, h \circ f$ 把所有元素都对应到 1, 故 $g \circ f = h \circ f$, 故 $g = h$, 矛盾! 故 $b \in B, \Rightarrow \operatorname{Im} f = B$. \\\\

笔记 这里 (“⇐”) 的证明中用到的思想: 把 0,1 分开. 这个操作在 Hahn-Banach 定理20.1中也有用到.

单射和满射的等价定义还有 kernel 和 image 语言的版本, 只不过只能对于线性映射. ref 单射和满射等价定义

定义 3.10 (单态射 (monomorphism))

设 $f: A \to B$ 为范畴 C 中的态射. 如果对于任意对象 X 和态射 $g, h: X \to A$, 都有 $f \circ g = f \circ h$ 当且仅当 $g = h$, 则称 f 为单态射, 或者单态 (monomorphism).

定义 3.11 (满态射 (epimorphism))

定义 2.4: 设 $f: A \to B$ 为范畴 C 中的态射. 如果对于任意对象 X 和态射 $g, h: B \to X$, 都有 $g \circ f = h \circ f$ 当且仅当 $g = h$, 则称 f 为满态射, 或者满态 (epimorphism).

笔记 不难看出, 单态和满态是相互对偶的两个概念. 一个态射是单态当且仅当它在对偶范畴当中是满态, 一个态射是满态当且仅当它在对偶范畴当中是单态.

3.2.2 一堆定义和记号

定义 3.12

给定范畴 C 和一个态射 $f: X \to Y$, 我们会在之后碰到一些特殊的态射, 我们撷取几类定义如下:

1. 称 f 为单态射 (monomorphism 或 monic), 若对任意态射 $g, h: Z \to X$, 都有 $fg = fh$ 蕴含 $g = h$;
2. 称 f 为满态射 (epimorphism 或 epic), 若对任意态射 $g, h: Y \to Z$, 都有 $gf = hf$ 蕴含 $g = h$;
3. 称 f 是双态射 (bimorphism), 若它既是单态射又是满态射;
4. 称 f 是一个收缩 (retraction), 若它右可逆, 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $fg = \mathrm{id}_Y$;

5. 称 f 是一个截面 (section) 或嵌入 (embedding), 若它左可逆, 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = \mathrm{id}_X$;
6. 称 f 是一个同构 (isomorphism), 若它可逆. 即存在态射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = \mathrm{id}_X$ 且 $fg = \mathrm{id}_Y$;
7. 称 f 是一个自同态 (endomorphism), 若 $X = Y$;
8. 称 f 是一个自同构 (automorphism), 若 $X = Y$ 且 f 是同构;

笔记

1. 显然 retraction 都是 epic, 而 section 都是 monic;
2. 所有态射均可逆的范畴称为广群或群胚 (groupoid);
3. 从这里可以看到一些具体结构的影子了, 一些常见的范畴中双态射就是同构 (如群范畴、线性空间范畴), 这样的范畴称为平稳 (balanced) 范畴, 拓扑空间范畴就不是平稳范畴.

定义 3.13

X 上的所有自同态构成类 $\mathrm{End}(X)$, 所有自同构构成类 $\mathrm{Aut}(X)$.

定理 3.1

对于范畴中的态射 f , 试证明下述条件两两等价:

1. f 既是收缩单态射;
2. f 既是嵌入满态射;
3. f 是同构.

并举一例说明双态射未必是同构.

今后若无特别说明, 用记号 $X \simeq Y$ 表示对象的同构 (即存在二者间的同构), 这显然是一个等价关系.

3.3 函子

3.3.1 函子的定义

函子实际上就是范畴之间的态射

定义 3.14 (函子 (functor))

一个范畴 $\mathcal{C}$ 到另一个范畴 $\mathcal{D}$ 的函子 (functor)$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 包含以下资料:

- 映射 $F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$;
- 映射 $F: Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{D})$.

满足

(i) $sF = Fs, tF = Ft$;[a]

(ii) $F(id_X) = id_{F(x)}$;

条件 (i) 相当于对任意两个对象 X, Y, 映射 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导了映射

$$F: Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \tag{3.1}$$

[a]其中给出态射的定义域 (domain) 或来源 (source); 给出态射的值域 (codomain) 或目标 (target); 有的文献上用 dom 和 cod 表示这两个映射.

定义 3.15 (协变 (covariant) 与反变 (contravariant) 函子)

称函子 F 为协变 (covariant) 函子, 如果

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

称函子 F 为反变 (contravariant) 函子, 如果

$$F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$$

笔记 容易看到,$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反变函子实际上就是 $\mathcal{C}^{op}$ 到 $\mathcal{D}$ 的协变函子. 有些地方也把反变函子成为余函子 (cofunctor).
函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 自然诱导$\mathcal{C}^{\rm op}$ 到$\mathcal{D}^{\rm op}$ 的函子$F^{\rm op}$, 但二者没有本质区别;

定义 3.16 (自函子 (endofunctor))

范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的函子称为该范畴的自函子 (endofunctor)（$\mathcal{C}\to\mathcal{C}$）; 一个最平凡的自函子是恒等函子 $id_{\mathcal{C}}$, 它在对象类和态射类上都是恒等映射.

函子之间有自然的合成. 设又有范畴 $\mathcal{E}$ 及函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$, 则 $G\circ F$ 分别将对象间和态射间的类映射 F,G 复合即可. 这样就有

例题 3.1.

小范畴的范畴 Cat 包括以下材料:
- 对象：全体小范畴;
- 态射：小范畴间的函子;
- 恒等态射：恒等函子;
- 态射复合：如上;

在此意义下, 取反范畴的操作给出一个 Cat 上的自函子 op, 它在函子 (即范畴的态射) 层面上的定义是自明的, 并且易见 op∘ op= id_{Cat}.

3.3.2 函子的一些性质

定义 3.17

对于函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$.
1. 称 F 忠实 (faithful), 若对任意两个对象,3.1 中的映射是单射;
2. 称 F 全 (full), 若对任意两个对象, 3.1 中的映射是满射;
3. 称 F 本质满 (essentially surjective), 若 $\mathcal{D}$ 中任意对象都与某个 $F(X)$ 同构;
4. 称 F 是一个嵌入 (embedding), 若它在态射层面是单射, 即对任意态射 f,g 都有 $F(f)=F(g)$ 蕴含 $f=g$.
5. 称 F 是一个同构, 若存在逆函子 $F^{-1}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 $F\circ F^{-1}$ 和 $F^{-1}\circ F$ 分别是两个范畴的恒等函子.

定义 3.18 (函子的像 (image))

对于函子 $F:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$, 我们说 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_0$ 是 F 的像 (image), 若它满足

$$\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_0)=\{Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}):\exists X\in\mathcal{C}'\ \text{s.t.}\ F(X)=Y\},$$

$$\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C}_0)=\{g\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}):\exists f\in\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C}')\ \text{s.t.}\ F(f)=g\},$$

显然 $\mathcal{C}_0$ 确实是一个范畴. 而我们说 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_1$ 是 F 的本质像 (essential image), 若它满足
1. 对 $\mathcal{C}_1$ 中任意对象 X 和 $\mathcal{C}$ 中任意对象 Y , 只要有 $\mathcal{C}$ 中同构 $f:X\to Y$, 就有 Y 也是 $\mathcal{C}_1$ 中对象且

f 是 C_1 中态射;
2. 像 C_0 是 C_1 的子范畴;
3. C_1 是所有满足 1.2. 的范畴的子范畴.

笔记 一般来说对于 F 我们自然可以将它的目标缩小为其本质像考虑, 而若 F 全忠实, 则通过这种办法可以将它视为一个本质满的函子, 这样就能提供一个范畴等价.

3.4 积与余积

b 站课程

3.5 拉回与推出，等化子与余等化子

笔记 装 b 话语：原像是集合范畴中的拉回. $f : A \to B$，则 f^{-1}

3.6 极限与余极限

极限与余极限

笔记 极限与余极限就是“积与余积”、“终对象与始对象”、“拉回与推出”、“等化子与余等化子”的进一步抽象化，它是一个锥。

第四章 解析几何

利用系数判定二次曲线型

利用系数判定二次曲面型

平面截二次曲面为圆，计算平面方程，pp111

笔记 二次曲面分类

用二次型判断二次曲面类型

第五章 线性代数

5.1 线性空间

5.1.1 向量与向量空间

定义 5.1 (向量运算满足的 8 条规则)

1. 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3. 加法有单位元：$\alpha+0=\alpha$
4. 加法有逆元：$\alpha+(-\alpha)=0$
5. 纯量乘法：$1\cdot\alpha=\alpha$
6. 向量乘法分配：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
7. 纯量乘法分配：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
8. 纯量乘法结合：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

♣

设 V 是一个集合,$\mathbb{F}$ 是数域, 若在 V 上定义了元素的加法和 $\mathbb{F}$ 中的数对 V 中元素的数乘, 且这两种运算适合上面的 8 条运算规则, 则称 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间或向量空间.

5.1.2 线性映射

线性映射是一类特殊的映射, 它首先作为映射, 符合映射的一些性质??; 其次, 它是线性的, 因此具有一些额外的性质：

定义 5.2 (线性映射, 线性同构, 线性变换)

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的映射, 如果 φ 适合下列条件:

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta), \alpha, \beta\in V$
2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha), \alpha\in V, k\in\mathbb{F}$,

则称 φ 是向量空间 V 到 U 的线性映射. 若 φone-to-one&onto, 则称 φ 为线性同构.
同一向量空间 V 上的线性映射称为 V 上的线性变换.

♣

映射的核 (kernel) 和像 (image) 如下定义：

定义 5.3

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的线性映射, φ 的全体像元素构成 U 的子空间, 称为 φ 的像空间, 记为 $\operatorname{Im}\varphi$. 像空间的维数称为 φ 的秩.
V 中在 φ 下映射为零向量的全体向量构成 V 的子空间, 称为 φ 的核空间, 记为 $\operatorname{Ker}\varphi$. 核空间的维数称为 φ 的零度.

♣

线性空间中的单射和满射由如下定义：

定义 5.4

U, V 是线性空间, 对于线性映射 $f: U\to V$

- f 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f=0$
- f 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f=V$

♣

命题 5.1 (抽屉原理)

证明

- $\operatorname{Ker} f=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=0 \Rightarrow f(a)=f(b), i.e. f(a-b)=0 \Rightarrow a-b=0, i.e. a=b \Rightarrow f$ 是单射.
- $\operatorname{Im} f=V \Rightarrow \forall x \in V, x \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists y \in V, s.t. x=f(y) \Rightarrow f$ 是满射. \\\\\\\\

定理 5.1 (线性映射维数公式)

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 到 U 的线性映射, 则

$$\dim \operatorname{Im} \varphi+\dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi}=\dim V$$

5.1.3 线性同构

线性同构刻画了不同线性空间之间的相同本质, 即同构的线性空间具有相同的线性结构 (或从线性结构的观点来看没有任何区别). 要证明线性映射 $\varphi: V \rightarrow U$ 是线性同构, 通常一方面需要验证 φ 是单射 (或等价地验证 $\operatorname{Im} \varphi=U$). 但若已知前后两个线性空间的维数相等, 则由线性映射的维数公式容易证明,φ 是线性同构当且仅当 φ 是单射, 也当且仅当 φ 是满射, 从而只需要验证 φ 是单射或满射即可得到 φ 是线性同构.

5.2 多项式

定理 5.2 (牛顿 (Newton) 公式)

$$\left\{\begin{array}{ll}
s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1+(-1)^k k \sigma_k=0, & 1 \leq k<n; \\
s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1}+(-1)^k \sigma_n s_{k-n}=0, & k \geq n;
\end{array}\right.$$

证明

- $k \geq n$时

  为了出现$\sigma_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), \cdots, \sigma_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, 我们受到 Vieta 定理启发, 考虑

  $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right) \cdots\left(x-x_n\right)=x^n-\sigma_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) x^{n-1}+\cdots+(-1)^n \sigma_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$

  取$x=x_i$, 则上式 $=x_i^n-\sigma_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) x_i^{n-1}+\cdots+(-1)^n \sigma_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0, i=1,2, \cdots, n$
- $1 \leq k<n$时

  考虑$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\cdots+(-1)^k k \sigma_k \stackrel{?}{=} 0$, 只需证每个形如$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$的单项前系数为0

  由于f最高次数为k, 故$i_1, i_2, \cdots, i_n$中至少有$n-k$项为0, 由对称性, 不妨设$i_{k+1}=i_{k+2}=\cdots=i_n=0$

  只需证$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$单项前系数为0, 只需证$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0\right)$是零多项式, 这显然 (如果在中取$n=k$)

  牛顿公式

5.2.1 多项式可约性

定理 5.3 (分圆多项式)

一个任意的整系数多项式都可以表示成若干个分圆多项式的乘积.

分圆多项式

定理 5.4

首一整系数多项式的有理根必然是整数.

判定方法

命题 5.2

本原的整系数多项式[a] $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

[a] 称一个整系数多项式是本原多项式，若它的所有系数都互素.

定理 5.5 (Eisenstein 判别法)

对于 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，如果存在素数 p，使得

$$p\nmid a_n,\ p\mid a_i\qquad(i=0,1,\cdots,n-1)\tag{5.1}$$

$$p^2\nmid a_0\tag{5.2}$$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

定理 5.6 (Perror 判别法)

对于 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，如果

$$|a_{n-1}|>1+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\tag{5.3}$$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

笔记 证明考虑使用鲁歇定理19.4.

5.3 特征值、对角化有关

几个网站：

矩阵可对角化充要条件

极小多项式和 Cayley-Hamilton 定理

Schur 三角化、Cayley-Hamilton 定理、谱分解、同时对角化、矩阵开方

判断 n 阶复矩阵 A(或 n 维复线性空间 V 上的线性变换 φ) 是否可对角化，通常有以下方法：

1. A 有 n 个线性无关的特征向量
2. A 有 n 个不同的特征值
3. A 的特征子空间的直和为 $\mathbb{C}^n$
4. A 的任一特征值的几何重数等于代数重数
5. A 的极小多项式无重根
6. A 的 Jordan 块都是一阶的
7. A 相似于实对称矩阵或者复正规矩阵

定理 5.7 (谱映射理论)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值组成集合 $\operatorname{spec}(A)=\{\lambda_i\}$, 若 p 是多项式，则 $\operatorname{spec}(p(A))=\{p(\lambda_i)\}$.

定理 5.8 (Schur 不等式)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\sum_{\lambda\in\operatorname{spec}(A)}|\lambda|^2\leqslant\|A\|_2^2=\operatorname{tr}(A^*A)$, 等号成立当且仅当 A 可对角化.

定理 5.9 (谱分解 (正规矩阵对角化))

在 $\mathbb{C}$ 上矩阵 A，如果满足 $AA^* = A^*A$，则称 A 复正规

- 若 A 正规，则存在酉矩阵 U 和对角阵 Λ，使得 $A = U\Lambda U^*$.
- 不妨设 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 和 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0)$，其中 $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p| > 0$，则 $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i u_i^*$.

定理 5.10 (同时对角化)

- 可交换复 (实) 正规矩阵可同时合同对角化

笔记 见28

5.4 奇异值

定理 5.11

矩阵的奇异值等于特征值当且仅当矩阵可正交相似对角化[a].

[a]能不能更弱?

证明见此

5.5 求矩阵的逆

5.5.1 形式求解

有一个形式求解方法，可以直接看出一类题，无脑算就可以了，算出矩阵的逆之后再带回去验证即可.

例题 5.1.

$A, B, AB - I_n$都是n阶可逆阵，求 $\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1}$的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}
\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1} &= \frac{1}{A - \frac{1}{B}} - \frac{1}{A} \\
&\overset{\text{注意这里矩阵乘法顺序，取逆时矩阵位置交换}}{=} B\frac{1}{\left(A - \frac{1}{B}\right)B} - \frac{1}{A} \\
&= B\frac{1}{AB - 1} - \frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}AB\frac{1}{AB - 1} - \frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}\left(AB\frac{1}{AB - 1} - (AB - 1)\frac{1}{AB - 1}\right) \\
&= \frac{1}{A}(AB - (AB - 1))\frac{1}{AB - 1} \\
&= \frac{1}{A}\frac{1}{AB - 1} \\
&= \frac{1}{(AB - 1)A}
\end{aligned}$$

于是 $\left(A - B^{-1}\right)^{-1} - A^{-1}$的逆矩阵为 $(AB - I_n)A$.

例题 5.2.

A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，使得I_m+AB可逆，求I_n+BA的逆矩阵

解

$$
\begin{aligned}
(I_n+BA)^{-1} &= \frac{1}{1+BA} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (BA)^k \\
&= 1-B\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(AB)^{k-1}\right)A \\
&= 1-B\frac{1}{1+AB}A \\
&= I_n-B(I_m+AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

例题 5.3.

设A,B均为n阶可逆阵，使得$A^{-1}+B^{-1}$可逆，求$A+B$的逆矩阵

解

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{-1} &= \frac{1}{A+B} \\
&= \frac{1}{(1+BA^{-1})A} \\
&= \frac{1}{A}\frac{1}{1+BA^{-1}} \\
&= \frac{1}{A}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(BA^{-1}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-B\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(A^{-1}B\right)^{k-1}\right)A^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-B\frac{1}{1+A^{-1}B}A^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{B^{-1}+A^{-1}}A^{-1}\right) \\
&= A^{-1}-A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)A^{-1}
\end{aligned}
$$

Sherman – Morrison – Woodbury 公式形式推导：

我们可以借助形式幂级数方法形式上推导出该公式，再带回去验证成立.

定理 5.12 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式)

设A为n阶可逆阵，C为m阶可逆阵，B为$n\times m$矩阵，D为$m\times n$矩阵，使得$C^{-1}+DA^{-1}B$ 可逆，求证：

$$
(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1} \tag{5.4}
$$

注 这里只进行形式证明，带回去验证即可.

证明 注意到:

$$
\begin{aligned}
(A+BCD)^{-1} &= \frac{1}{A+BCD} \\
&\overset{(A+BCD)^{-1}=\left(A\left(I+A^{-1}BCD\right)\right)^{-1}=\left(I+A^{-1}BCD\right)^{-1}A^{-1}}{=} \frac{1}{1+A^{-1}BCD}\frac{1}{A} \\
&= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(A^{-1}BCD\right)^k\right)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(A^{-1}BCD\right)^k\right]\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BCD+A^{-1}BCDA^{-1}BCD-A^{-1}BCDA^{-1}BCDA^{-1}BCD+\cdots\right)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\left(1-DA^{-1}BC+DA^{-1}BCDA^{-1}BC-\cdots\right)(D)\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\frac{1}{1+DA^{-1}BC}D\frac{1}{A} \\
&= \frac{1}{A}+\left(-A^{-1}BC\right)\frac{1}{C}\frac{1}{C^{-1}+DA^{-1}B}D\frac{1}{A} \\
&= A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}
\end{aligned}
$$

直接验证可知 : $A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$就是$A+BCD$的逆矩阵.

例题 5.4.

设$A,B,A-B$都是n阶可逆矩阵，求$B^{-1}-A^{-1}$的逆矩阵.

解

$$
\begin{aligned}
\left(B^{-1}-A^{-1}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{B}-\frac{1}{A}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)BB^{-1}} \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{A}B\right)B^{-1}} \\
&= B\frac{1}{1-A^{-1}B} \\
&= B\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A^{-1}B\right)^k\right) \\
&= B\left(1+A^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(BA^{-1}\right)^{k-1}\right)B\right) \\
&= B\left(1+A^{-1}\frac{1}{1-BA^{-1}}B\right) \\
&= B\left(1+\frac{1}{A-B}B\right) \\
&= B+B(A-B)^{-1}B
\end{aligned}
$$

直接验证可知 : $B+B(A-B)^{-1}B$就是$B^{-1}-A^{-1}$的逆矩阵.

5.5.2 行 (列) 满秩矩阵的右 (左) 逆

矩阵的左逆和右逆 - 帝民眉的文章 - 知乎

注 左逆和右逆一般来说有无穷多个，这里只是构造出来了一个.

5.6 秩不等式

例题 5.5.

设A,B为n阶方阵, $AB=BA$, 则有$r(A)+r(B)\geq r(A+B)+r(BA)$

证明 我们采用打洞法, 结合退化的操作.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A+B & B \\ -A & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{退化}} \begin{pmatrix} A+B & B(A+B) \\ -A & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & BA \end{pmatrix}$$

于是, $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & BA \end{pmatrix} \geq r(A+B)+r(BA)$

其中退化为$\begin{pmatrix} A+B & B \\ -A & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B(A+B) \\ -A & O \end{pmatrix}$, 非可逆线性变换, 秩减小

例题 5.6.

设A,B为n阶方阵, $AB=BA$, 则有$r(A)+r(B)\geq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}+r(AB)$

证明 我们采用打洞法, 不等式比$r(A)+r(B)\geq r(A+B)+r(AB)$强

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & O & B \\ O & O & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A & A & O \\ O & B & B \\ O & O & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A & A & O \\ O & B & B \\ -BA & -BA+AB & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A & O \\ O & B & B \\ -BA & O & AB \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A & A & O \\ B & B & B \\ O & O & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} A & O & O \\ B & O & B \\ O & O & AB \end{pmatrix}$$

于是, $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & O & B \\ O & O & O \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A & O & O \\ B & O & B \\ O & O & AB \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}+r(AB)$

5.7 行列式

定理 5.13 (Cauchy-Binet)

$A=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵, $B=(b_{ij})$是$n\times m$矩阵. 考察$|AB|$.

1. 若$m>n$, 则$|AB|=0$
2. 若$m\leq n$, 则

$$|AB|=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ 1 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

推论 5.1

考察AB的r阶子式

1. 若$r>n$, 则AB的任意r阶子式$=0$

2. 若$r \le n$, 则AB的r阶子式

$$AB\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

定义 5.5 (余子式和代数余子式)

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式, 划去第 i 行和第 j 列, 剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成了一个 n-1 阶行列式, 称为 $|A|$ 的第 $(i,)j$ 元素的余子式, 记为 M_{ij}. 而 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

笔记 A 的伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})$, 是 (i,j) 位置要反过来.

5.8 Jordan 标准型

利用循环轨道求 Jordan 标准型的过渡矩阵

5.9 一些细节

性质 1.

任何数域都包括有理数域 $\mathbb{Q}$.

笔记 因此用摄动法书写的时候是写取一列 $\{t_k\}\in\mathbb{Q}\to 0$.

5.10 二次型

定理 5.14 (对角占优)

对于半正定阵 A, 若主对角元 $a_{ii}=0$, 则 A 的第 i 行和第 i 列全为 0.

证明 考虑含有 a_{ii} 的二阶主子式 ≥ 0 即可.

定理 5.15 (对角占优)

对于半正定阵, 主对角块可以消去同行列的其它块.

证明 对于正定矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 考虑使用分块矩阵的第三类合同初等变换消去 B 得到 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix}$ 对于半正定阵, 考虑证明 $r(A \quad B)=r(A)$ 即可.

定理 5.16 (半正定阵的刻画)

下列关于实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 的命题等价:

1. A 是半正定阵
2. 存在主对角元全为 1 的上三角阵 b 和主对角元全为非负实数的对角阵 D, 使得 $A=B'DB$
3. 存在主对角元全为非负实数的上三角阵 C, 使得 $A=C'C$.

证明 证明主要是 (1) → (2)，考虑归纳证明，由于 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$ 半正定，所以根据定理5.15可知，可以用主对角元 A_{n-1} 消去同行列的 α, α'，得到分块对角阵，然后归纳即可.

笔记 还可以考虑矩阵 $A = \begin{pmatrix} & \alpha \\ a_1 1\alpha' & A_{n-1} \end{pmatrix}$

笔记 满足 (3) 的 C 并不唯一.

5.11 杂题

问题 5.1 A, B 是 n 阶实方阵，且 $AB = BA$，证明：$\det(A^2 + AB + B^2) = 0$.

证明

$$\begin{aligned} A^2 + AB + B^2 &= (A - e^{\frac{2\pi i}{3}} B)(A - e^{\frac{4\pi i}{3}} B) \\ &= (A - e^{\frac{2\pi i}{3}} B)(A - \overline{e^{\frac{2\pi i}{3}}} B) \\ &= (A - e^{\frac{2\pi i}{3}} B)\overline{(A - e^{\frac{2\pi i}{3}} B)} \text{正定}. \end{aligned}$$

第六章 内积空间

6.1 内积的表示和正交基

定义 6.1 (Frobenius 内积)

习题 9.1.8. 证明: 下列 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 分别定义了 n 阶实矩阵空间和 n 阶复矩阵空间上的内积 (称为 Frobenius 内积): (1) 设 V 为 n 阶实矩阵空间, 对任意的 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right),\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$, 定义

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij};$$

(2) 设 V 为 n 阶复矩阵空间, 对任意的 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right),\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$, 定义

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}'\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

♣

定义 6.2 (Gram 矩阵)

考虑有限维内积空间. 我们要讨论的第一个问题是: 给定内积空间的一组基以后, 如何用坐标向量来表示向量的内积. 具体来说, 设 V 是欧氏空间 (酉空间), $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组基. 如果 $\left(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\right)=g_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n),\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{v}_1+b_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{v}_n$, 问: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 等于什么? 用向量内积的性质, 很容易给出这个问题的答案. 当 V 是欧氏空间时,

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{v}_i,\sum_{j=1}^{n}b_j\boldsymbol{v}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_ig_{ij}b_j.$$

我们把上述结论写成矩阵形式:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&\cdots&g_{1n}\\g_{21}&g_{22}&\cdots&g_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\g_{n1}&g_{n2}&\cdots&g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&\cdots&g_{1n}\\g_{21}&g_{22}&\cdots&g_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\g_{n1}&g_{n2}&\cdots&g_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_n)\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix}$$

称为基向量 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 的 Gram (格列姆) 矩阵或内积空间 V 在给定基下的度量矩阵. 于是, 我们得到了内积在给定基下的表示:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是向量 α,β 在给定基下的坐标向量.

设 V 是酉空间, 我们类似可证若 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{v}_1+b_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{v}_n$, 令

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_n)\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}\overline{\boldsymbol{y}},$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量, $\boldsymbol{H}$ 是一个正定 Hermite 矩阵.

问题 6.1 证明: 向量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 线性无关的充分必要条件是它们的 Gram 矩阵为非异阵.

定义 6.3 (子空间的正交和)

定义 9.2.3 设 V 是 n 维内积空间, $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是 V 的子空间. 如果对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V_i$ 和任意的 $\boldsymbol{\beta}\in V_j$ 均有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V=V_1+V_2+\cdots+V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 的正交和, 记为

$$V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k.$$

定义 6.4 (正交投影)

定义 9.2 .4 设 $V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$, 定义 V 上的线性变换 $\boldsymbol{E}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 如下: 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_i+\cdots+\boldsymbol{v}_k$ $(\boldsymbol{v}_i\in V_i)$, 令 $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_i$. 容易验证 $\boldsymbol{E}_i$ 是 V 上的线性变换, 且满足

$$\boldsymbol{E}_i^2=\boldsymbol{E}_i,\quad \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=0(i\neq j),\quad \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{I}_V.$$

线性变换 $\boldsymbol{E}_i$ 称为 V 到 V_i 上的正交投影 (简称投影).

命题 6.1

命题 9.2.1 设 U 是内积空间 V 的子空间, $V=U\perp U^{\perp}$. 设 $\boldsymbol{E}$ 是 V 到 U 上的正交投影, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 有

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\beta})).$$

6.2 伴随

定义 6.5 (线性变换的表示矩阵)

我们将考察内积空间中的线性变换, 内积空间中的线性变换常常被称为线性算子.

现设 V 是 n 维内积空间 (不妨设之为酉空间) 取 V 的一组标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 假设 φ 是 V 上的线性变换, 且它在这组基下的表示矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

又设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n$. 记 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量, 则

$$(\varphi(\alpha),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}'\overline{\left(\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{y}\right)}.$$

记矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}'$ 在 V 上定义的线性变换为 $\boldsymbol{\psi}$, 即对任意的 $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n$, 定义 $\psi(\beta)=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n$, 其中

$$c_i=\bar{a}_{1i}b_1+\bar{a}_{2i}b_2+\cdots+\bar{a}_{ni}b_n(i=1,2,\cdots,n),$$

即 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\beta})$ 的坐标向量

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

于是 (9.3.1) 式表明

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 成立. 读者很容易验证上述结论对欧氏空间也成立.

定义 6.6 (伴随)

定义 9.3.1 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在 V 上的线性算子 φ^*, 使等式

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随算子, 简称为 φ 的伴随.[a]

[a] φ 的伴随算子是唯一的，这一点的验证是 Routine 的.

命题 6.2

由伴随的唯一性知道定义6.5中由 $\overline{\boldsymbol{A}}'$ 定义的线性变换 ψ 就是 φ 的伴随, 而 $\boldsymbol{\psi}$ 的表示矩阵就是 $\overline{\boldsymbol{A}}'$.

命题 6.3

n 维线性空间 V 中，φ 是 V 上的线性算子

1. 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间;
2. 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$.

6.3 内积空间的同构、正交变换和酉变换

定义 6.7 (同构)

我们知道若在 V 中取定一组基, 将 V 中向量映射到它在这组基下坐标向量的映射是一个线性同构. 现在设 V 是 n 维欧氏空间, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 又设 $\mathbb{R}_n$ 是 n 维实列向量空间, $\mathbb{R}_n$ 的内积取为标准内积. 令 φ 为 $V \to \mathbb{R}_n$ 的线性映射, 它将 V 中向量 $\boldsymbol{x}$ 变为其坐标向量, 即若 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 我们已经知道 $\boldsymbol{\varphi}$ 是同构. 此外若令 $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$, 则

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

因此映射 φ 是一个保持内积的同构. 因为向量的长度、向量之间的距离都是由内积决定的, 故 φ 保持向量的长度和向量之间的距离. 当 V 是酉空间时, 类似的结论也成立. 于是我们可以把对抽象内积空间的研究归结为对 $\mathbb{R}_n$ 或 $\mathbb{C}_n$ 的研究.

定义 6.8 (保积同构)

定义 9.4.1 设 V 与 U 是域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, $\mathbb{K}$ 是实数域或复数域, φ 是 $V \to U$ 的线性映射. 若对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 有

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

则称 φ 是 $V \to U$ 的保持内积的线性映射. 又若 φ 作为线性映射是同构, 则称 φ 是内积空间 V 到 U 上的保积同构.[a]

[a] φ 是保积同构等价于 φ 将 V 的任一组标准正交基变成 U 的一组标准正交基.

定义 6.9 (正交变换、酉变换)

定义 9.4.2 设 φ 是内积空间 V 上保持内积的线性变换, 若 V 是欧氏空间, 则称 φ 为正交变换或正交算子; 若 V 是酉空间, 则称 φ 为酉变换或酉算子.

定理 6.1 (正交变换 (酉变换) 的线性映射表现)

定理 9.4.2 设 φ 是欧氏空间或酉空间上的线性变换, 则 φ 是正交变换或酉变换的充分必要条件是 φ 非异, 且

$$\varphi^* = \varphi^{-1}.$$

证明

设 φ 是欧氏空间 V 上的正交变换, 则对 V 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 有

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = \left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \varphi\left(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\beta})\right)\right) = \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\beta})\right)$$

此即 $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

反过来, 若 $\varphi^* = \varphi^{-1}$, 则

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}^* \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),$$

即 φ 保持内积, 故 φ 是正交变换. 对酉变换可类似证明.

定义 6.10 (正交变换 (酉变换) 的矩阵表现)

定义 9.4.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵, 若 $A' = A^{-1}$, 则称 A 是正交矩阵. 设 C 是 n 阶复方阵, 若 $\overline{\boldsymbol{C}}' = \boldsymbol{C}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{C}$ 是酉矩阵.[a]

[a] 由正交矩阵与酉矩阵的定义可知正交矩阵适合条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 酉矩阵适合条件 $A\bar{A}' = \bar{A}'A = I_n$.

定理 6.2

定理 9.4.3 设 φ 是欧氏空间 (酉空间) V 上的正交变换 (酉变换), 则在 V 的任一组标准正交基下, φ 的表示矩阵是正交矩阵 (酉矩阵).

上述定理的逆命题也是正确的, 即若线性变换 φ 在一组标准正交基下的表示矩阵为正交 (酉) 矩阵, 则 φ 是正交 (酉) 变换. 这由线性变换与其表示矩阵的关系即得.

定理 6.3

定理 9.4.7 若 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵, 则

1. $\boldsymbol{A}$ 的行列式值的模长等于 1 [a];
2. $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模长等于 1 .

[a] 对于正交矩阵来说就是 ± 1

定理 6.4

定理 9.4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实（复）矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交（酉）矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是一个主对角线上的元素均大于等于零的上三角阵，并且若 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵，则这样的分解必唯一.

证明

证明设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块. 考虑 n 维实列向量空间 $\mathbb{R}_n$，并取其标准内积，我们先通过类似于 Gram-Schmidt 方法的正交化过程，把 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 变成一组两两正交的向量 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$，并且 $\boldsymbol{w}_k$ 或者是零向量或者是单位向量.

我们用数学归纳法来定义上述向量. 假设 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{k-1}$ 已经定义好，现来定义 $\boldsymbol{w}_k$. 令

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\left(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_j\right)\boldsymbol{w}_j.$$

若 $\boldsymbol{v}_k=0$，则令 $\boldsymbol{w}_k=0$；若 $\boldsymbol{v}_k\neq 0$，则令 $\boldsymbol{w}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|}$. 容易验证 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$ 是一组两两正交的向量，$\boldsymbol{w}_k$ 或者是零向量或者是单位向量，并且满足

$$\boldsymbol{u}_k=\sum_{j=1}^{k-1}\left(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_j\right)\boldsymbol{w}_j+\|\boldsymbol{v}_k\|\boldsymbol{w}_k,k=1,2,\cdots,n$$

由 (9.4.5) 式可得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n)\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个上三角阵且主对角线上的元素依次为 $\|\boldsymbol{v}_1\|,\|\boldsymbol{v}_2\|,\cdots,\|\boldsymbol{v}_n\|$，均大于等于零，并且由 (9.4.5) 式知，如果 $\boldsymbol{w}_k=0$，则 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 行元素全为零.

假设 $\boldsymbol{w}_{i_1},\boldsymbol{w}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{w}_{i_r}$ 是其中的非零向量全体，由定理 9.2 .2 可将它们扩张为 $\mathbb{R}_n$ 的一组标准正交基 $\{\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n\}$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_j=\boldsymbol{w}_j,j=i_1,i_2,\cdots,i_r$. 令 $\boldsymbol{Q}=(\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n)$，由定理 9.4 . 4 知 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵. 注意到若 $\boldsymbol{w}_k=0$，则 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 行元素全为零，此时用 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_k$ 代替 $\boldsymbol{w}_k$ 仍然可使 (9.4.6) 式成立，因此

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=(\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n)\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R},$$

从而得到了 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解. 复矩阵情形的证明完全类似. 至于非异阵 QR 分解的唯一性，我们作为习题留给读者自己证明.

问题 6.2 例 9.4.3 求下列矩阵的 QR 分解:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

解 采用与定理 9.4 .8 证明中相同的记号，经过计算可得:

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1=(1,1,0)',\quad \boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)'$$

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-\sqrt{2}\boldsymbol{w}_1=(1,-1,1)',\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)'$$

$$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{u}_3-3\sqrt{2}\boldsymbol{w}_1-2\sqrt{3}\boldsymbol{w}_2=(0,0,0)',\quad \boldsymbol{w}_3=(0,0,0)'$$

从而有

$$A=(u_1,u_2,u_3)=(w_1,w_2,w_3)\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&3\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&2\sqrt{3}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

用 $\widetilde{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)'$ 代替 w_3 可得 A 的 QR 分解为

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&3\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&2\sqrt{3}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

问题 6.3 习题 9.4.5 设 A,B 是 n 阶正交矩阵且 $|A|+|B|=0$, 求证: $|A+B|=0$.

问题 6.4 习题 9.4.6 求证: 正定实对称阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 为单位阵.

问题 6.5 习题 9.4.7. 设 V,U 都是 n 维欧氏空间, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 分别是 V 和 U 的一组基 (不一定是标准正交基), 线性映射 $\varphi:V\to U$ 满足 $\varphi(e_i)=f_i(i=1,2,\cdots,n)$. 求证: φ 是保积同构的充分必要条件是这两组基的 Gram 矩阵相等, 即

$$G(e_1,e_2,\cdots,e_n)=G(f_1,f_2,\cdots,f_n).$$

问题 6.6 习题 9.4.12. 证明: n 维欧氏空间 V 中任一正交变换均可表示为不超过 n 个镜像变换之积.

> 上述结论称为 Cartan-Dieudonné (嘉当-迪厄多内) 定理.

证明

证明见定理11.2.

6.4 自伴随算子

引理 6.1

引理 9.5.1 欧氏空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵, 酉空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

定义 6.11 (正交相似、酉相似)

定义 9.5.1 设 A,B 是 n 阶实矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使 $B=P'AP$, 则称 B 和 A 正交相似. 设 A,B 是 n 阶复矩阵, 若存在酉矩阵 P, 使 $B=\overline{P}'AP$, 则称 B 和 A 酉相似.[a]

[a]这样的相似显然是一种等价关系.

笔记 我们的问题是寻找一类矩阵的正交 (酉) 相似标准型. 显而易见, 正交 (酉) 相似比普通的相似要求更高, 因此对一般的矩阵寻求它们的正交 (酉) 相似标准型将是很困难的. 在这一节里我们将把注意力限制在一类特殊的矩阵一实对称阵和 Hermite 矩阵上.

定义 6.12 (自伴随算子)

定义 9.5.2 设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是 φ 的伴随, 若 $\varphi^*=\varphi$, 则称 φ 是自伴随算子. 当 V 是欧氏空间时, φ 也称为对称算子或对称变换; 当 V 是酉空间时, φ 也称为 Hermite 算子或 Hermite 变换.

笔记 欧氏空间上的自伴随算子在任一组标准正交基下的表示矩阵都是实对称阵. 同理, 酉空间上的自伴随算子在任一组标准正交基下的表示矩阵都是 Hermite 矩阵.

定理 6.5

定理 9.5.1 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则 φ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交.

证明

设 λ 是 φ 的特征值, x 是属于 λ 的特征向量, 则

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{x}))\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

因为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \neq 0$, 故 $\bar{\lambda} = \lambda$, 即 λ 是实数. 又若设 μ 是 φ 的另一个特征值, $\boldsymbol{y}$ 是属于 μ 的特征向量, 注意到 λ,μ 都是实数, 故有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{y}))\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

由于 $\lambda \neq \mu$, 故 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, 即 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

推论 6.1

推论 9.5.1 Hermite 矩阵的特征值全是实数, 实对称阵的特征值也全是实数. 这两种矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交.

定理 6.6

定理 9.5.2 设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

证明

首先需要说明的是, 若 V 是欧氏空间, 则由于自伴随算子 φ 的特征值都是实数, 故有实的特征向量. 不妨设 u 是 φ 的特征向量, 令 $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$, 则 $\boldsymbol{v}_1$ 是 φ 的长度等于 1 的特征向量. 我们对维数 n 用归纳法. 若 $\dim V = 1$, 结论已成立. 设对小于 n 维的内积空间结论成立. 令 W 为由 $\boldsymbol{v}_1$ 张成的子空间, $W^\perp$ 为 W 的正交补空间, 则 W 是 φ 的不变子空间且

$$V = W \oplus W^\perp, \quad \dim W^\perp = n-1.$$

由命题 9.3.1 可知 $W^\perp$ 是 $\varphi^* = \varphi$ 的不变子空间. 将 φ 限制在 $W^\perp$ 上仍是自伴随算子. 由归纳假设, 存在 $W^\perp$ 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$, 使 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且 $\{\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 是其特征向量. 因此, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 构成了 V 的一组标准正交基, φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

定理 6.7

定理 9.5.3

- 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 且 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为实对角阵, 且 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量.

证明

由定理 9.5.2 6.6即知实对称阵正交相似于对角阵, Hermite 矩阵酉相似于实对角阵. 从 §6.2 知道 $\boldsymbol{P}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 又 $\boldsymbol{P}$ 是正交 (酉) 矩阵, 故这些列向量两两正交且长度等于 1.

上述对角阵称为实对称 (Hermite) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交 (酉) 相似标准型. 对角阵主对角线上的元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值.

现在的问题是实对称 (Hermite) 矩阵在正交 (酉) 相似关系下的全系不变量是什么呢?

推论 6.2

推论 9.5.2 实对称阵的全体特征值是实对称阵在正交相似关系下的全系不变量, Hermite 矩阵的全体特征值是 Hermite 矩阵在酉相似关系下的全系不变量.

证明

只需证特征值相同的对角阵是正交 (酉) 相似的，考虑交换行列的初等变换即可.

定理 6.8

定理 9.5.4 设 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 f 经过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可以化为下列标准型:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

因此, f 的正惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数, 负惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数, f 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

证明

注意到正交相似既是相似又是合同, 故由定理 9.5.3 即得结论.

推论 6.3

推论 9.5.3 设 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型, 则 f 是正定型当且仅当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是正数, f 是负定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是负数, f 是半正定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非负, f 是半负定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非正.

6.5 复正规算子

我们现在来讨论这样一个问题: 如果 n 维酉空间 V 上的线性变换 φ 在一组标准正交基下的表示矩阵是对角阵, 则 φ 必须满足什么条件? 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的标准正交基, φ 在这组基下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$$

则

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = c_i \boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

即 φ 以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为特征值, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为对应的特征向量. 设 φ^* 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 的伴随, 则 φ^* 在这组基下的表示矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}' = \operatorname{diag}\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n\}.$$

于是, 我们有

$$\bar{A}'A = A\bar{A}', \varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$$

定义 6.13 (正规算子)

定义 9.6.1 设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是其伴随, 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 φ 是 V 上的正规算子. 为了不引起混淆, 我们也称酉空间 (欧氏空间) V 上的正规算子 φ 为复正规算子 (实正规算子). 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'$, 则称其为复正规矩阵. 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$, 则称其为实正规矩阵.

引理 6.2

引理 9.6.1 设 φ 是内积空间 V 上的正规算子, 则对任意的 $\alpha \in V$, 成立

$$\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|.$$

证明

由 φ 的正规性, 有

$$\begin{aligned}\|\varphi(\alpha)\|^2 &= (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \varphi^*\varphi(\alpha)) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \varphi\varphi^*(\alpha)) = (\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha)) \\ &= \|\varphi^*(\alpha)\|^2. \square\end{aligned}$$

笔记 这里用到了伴随算子的性质: $(\varphi(x), x) = (x, \varphi^*(x))$.

命题 6.4

命题 9.6.1 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的正规算子.

1. 向量 $\boldsymbol{u}$ 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量的充分必要条件为 $\boldsymbol{u}$ 是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量;
2. 属于 φ 不同特征值的特征向量必正交.

引理 6.3

引理 9.6.2 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 又 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 设 φ 在这组基下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角阵, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

证明

若 A 是对角阵, 则 $A\bar{A}' = \bar{A}'A$, 故 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 即 φ 是正规算子. 反之, 设 φ 是正规算子. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是上三角阵, 可记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), a_{ij} = 0(i > j)$. 于是 $\varphi(e_1) = a_{11}e_1$, 再由上面的命题6.4[a]可知 $\varphi^*(e_1) = \bar{a}_{11}e_1$. 另一方面, 有

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{e}_1) = \bar{a}_{11}\boldsymbol{e}_1 + \bar{a}_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \bar{a}_{1n}\boldsymbol{e}_n.$$

因此 $a_{1j} = 0$ 对一切 $j > 1$ 成立. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是上三角阵, 所以

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_{22}e_2,$$

故又有 $\varphi^*(e_2) = \bar{a}_{22}\boldsymbol{e}_2$ 及 $a_{2j} = 0(j > 2)$. 不断这样做下去即得 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵.

[a] 这里用到了正规性

定理 6.9 (Schur (舒尔) 定理)

定理 9.6 .1 (Schur (舒尔) 定理) 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

证明

对 V 的维数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 设对 $n-1$ 维酉空间结论成立, 现证 n 维酉空间的情形. 由于 V 是复线性空间, 故 φ^* 总存在特征值与特征向量, 即有

$$\varphi^*(e)=\lambda e.$$

设 W 是由 e 张成的一维子空间的正交补空间, 由命题 9.3 .1 知 W 是 $(\varphi^*)^*=\varphi$ 的不变子空间, 将 φ 限制在 W 上得到 W 上的一个线性变换. 注意到 $\dim W=n-1$, 故由归纳假设, 存在 W 的一组标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}$, 使 $\varphi|_W$ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵. 令 $e_n=\frac{e}{\|e\|}$, 则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 成为 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

推论 6.4

推论 9.6.1 (Schur 定理) 任一 n 阶复矩阵均酉相似于一个上三角阵.

定理 6.10

定理 9.6.2 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则 φ 为正规算子的充分必要条件是存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵是对角阵. 特别, 这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

定理 6.11

定理 9.6.3 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为复正规矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.

问题 6.7 习题 9.6.2. 设复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是斜 Hermite 矩阵, 即 $\overline{\boldsymbol{A}}'=-\boldsymbol{A}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 必酉相似于对角阵

$$\operatorname{diag}\{c_1,c_2,\cdots,c_n\},$$

其中 c_i 是零或纯虚数.

问题 6.8 习题 9.6.4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复正规矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数.

问题 6.9 习题 9.6.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复正规矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是模长等于 1 的复数.

问题 6.10 习题 9.6.6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复正规矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵 (即存在正整数 k, 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$) 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

问题 6.11 习题 9.6.7. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的正规算子, 求证: 对 φ 的任一特征值 λ_0, 总有

$$V=\operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_0\boldsymbol{I}_V)\perp\operatorname{Im}(\varphi-\lambda_0\boldsymbol{I}_V).$$

问题 6.12 习题 9.6.8. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值, 求证:

$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2\le\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2$$

等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为复正规矩阵.

6.6 实正规矩阵

由上一节我们知道, 适合 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正规矩阵. 实正规矩阵的正交相似标准型比复正规矩阵的酉相似标准型要复杂一些, 这是因为任一复矩阵总有复特征值与复特征向量, 而实正规矩阵可能没有实特征

值及实特征向量: 为了求得实正规矩阵的正交相似标准型, 我们采用“几何”的方法.

首先利用欧氏空间 V 上的正规算子 φ 的极小多项式的不可约分解可将 V 分解为若干个不变子空间的正交直和, 并且 φ 限制在每个不变子空间上的极小多项式不超过二次. 这样, 问题就归结为研究极小多项式次数不超过二次的正规算子. 因为极小多项式为一次的线性变换就是数量变换, 所以接下去就对极小多项式为二次不可约多项式的正规算子进行讨论. 这样就可以得到实正规矩阵的正交相似标准型.

引理 6.4

引理 9.7.1 设 V 是 n 维欧氏空间, $f(x)$ 是一个实系数多项式, 若 φ 是 V 上的正规算子, 则 $f(\varphi)$ 也是 V 上的正规算子.

证明

直接多项式拆开交换.

引理 6.5

引理 9.7 .2 设 φ 是欧氏空间 V 上的正规算子, $f(x), g(x)$ 是互素的实系数多项式. 假设 $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} g(\boldsymbol{\varphi})$, 则

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

笔记 应用中国剩余定理.

证明

因为 $f(x), g(x)$ 互素, 故存在实系数多项式 $s(x), t(x)$, 使

$$f(x)s(x) + g(x)t(x) = 1,$$

于是

$$f(\boldsymbol{\varphi})s(\boldsymbol{\varphi}) + g(\boldsymbol{\varphi})t(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{I}.$$

因此 $\boldsymbol{u} = g(\varphi)t(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u})$,

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (g(\boldsymbol{\varphi})t(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (t(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}), g(\boldsymbol{\varphi})^*(\boldsymbol{v}))\,.$$

由上面的引理知 $g(\boldsymbol{\varphi})$ 是正规算子且 $g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}) = 0$, 再由引理 9.6 .1 得 $g(\boldsymbol{\varphi})^*(\boldsymbol{v}) = 0$, 因此 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

定理 6.12

定理 9.7.1 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子. 令 $g(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式, $g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 为 $g(x)$ 的所有互不相同的首一不可约因式, 且 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)(i = 1, \cdots, k)$, 则

1. $g(x) = g_1(x) \cdots g_k(x)$, 其中 $\deg g_i(x) \le 2$;
2. $V = W_1 \perp \cdots \perp W_k$;
3. W_i 是 φ 的不变子空间, 用 φ_i 表示 φ 在 W_i 上的限制, 则 φ_i 是 W_i 上的正规算子且 $g_i(x)$ 是 φ_i 的极小多项式.

证明

1. 设 φ 在 V 的一组标准止交基下的表示矩阵为正规矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 也是复正规矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $g(x)$ 在复数域上无重根, 从而在实数域上无重因式. 又不可约实系数多项式的次数小于等于 2 , 故 (1) 的结论成立.
2. 令 $f_i(x) = g(x)/g_i(x)$, 则 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 互素. 由 §5.3 习题 7 知, 存在实系数多项式 $h_1(x), \cdots, h_k(x)$, 使
$$f_1(x)h_1(x) + \cdots + f_k(x)h_k(x) = 1.$$
对任意的 $\boldsymbol{v} \in V$
$$\boldsymbol{v} = f_1(\boldsymbol{\varphi})h_1(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}) + \cdots + f_k(\boldsymbol{\varphi})h_k(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}).$$
注意到 $g_i(\boldsymbol{\varphi})f_i(\boldsymbol{\varphi}) = g(\boldsymbol{\varphi}) = 0$, 故对任一 i, $f_i(\boldsymbol{\varphi})h_i(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} g_i(\boldsymbol{\varphi}) = W_i$, 于是由 (9.7.1) 式知[a]
$$V = W_1 + \cdots + W_k.$$
当 $i \neq j$ 时, $g_i(x)$ 与 $g_j(x)$ 互素, 由引理 9.7.2 得到 $W_i \perp W_j$, 故
$$V = W_1 \perp \cdots \perp W_k.$$
3. 任取 $\boldsymbol{u} \in W_i = \operatorname{Ker} g_i(\boldsymbol{\varphi})$, 注意到 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 故
$$g_i(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{\varphi} g_i(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}) = 0, \quad g_i(\boldsymbol{\varphi})\left(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{\varphi}^* g_i(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}) = 0,$$
于是 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) \in W_i$ 且 $\varphi^*(\boldsymbol{u}) \in W_i$, 因此 W_i 既是 φ 的不变子空间, 也是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的不变子空间. 由伴随的定义容易验证 $\varphi_i = \varphi|_{W_i}$ 的伴随 φ_i^* 等于 $\varphi^*|_{W_i}$, 于是
$$\boldsymbol{\varphi}_i\varphi_i^* = \boldsymbol{\varphi}|_{W_i}\, \varphi^*\big|_{W_i} = \boldsymbol{\varphi}^*|_{W_i}\, \boldsymbol{\varphi}\big|_{W_i} = \boldsymbol{\varphi}_i^*\varphi_i$$
即 φ_i 是 W_i 上的正规算子. 由于 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\boldsymbol{\varphi})$, 故 $0 = g_i(\boldsymbol{\varphi})|_{W_i} = g_i\left(\boldsymbol{\varphi}|_{W_i}\right) = g_i\left(\varphi_i\right)$, 即 φ_i 适合多项式 $g_i(x)$, 于是 φ_i 的极小多项式 $m_i(x) \mid g_i(x)$. 注意到 $g_i(x)$ 首一不可约, 故只能是 $m_i(x) = g_i(x)$.

[a] 这是证明全空间可以分为各个子空间和的常规操作.

接下去我们要讨论极小多项式是二次不可约多项式的实正规算子的表示矩阵, 先对比较简单的情形即极小多项式为 x^2+1 的正规算子进行讨论, 再过渡到一般情形.

引理 6.6

引理 9.7.3 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x) = x^2+1$. 设 $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})$, 则
$$\varphi^*(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}, \varphi^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$
且 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|, \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

证明

由 $\varphi(u)=\varphi^2(v)=-v$, 得

$$0=\|\varphi(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{u}\|^2+\|\varphi(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v}\|^2$$
$$=\|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2-2(\varphi(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u})+\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2+2(\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})+\|\boldsymbol{v}\|^2$$

因为 φ 是正规算子, 由引理 9.6.1 知 $\|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2=\|\varphi^*(\boldsymbol{v})\|^2,\|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2=\|\varphi^*(\boldsymbol{u})\|^2$. 于是

$$0=\|\varphi^*(\boldsymbol{v})\|^2+2\left(\varphi^*(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}\right)+\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u})\|^2-2\left(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\right)+\|\boldsymbol{v}\|^2$$
$$=\|\varphi^*(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\|^2.$$

从而 $\varphi^*(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u},\varphi^*(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}$. 又

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=(\varphi^*(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\varphi(\boldsymbol{u}))=(\boldsymbol{u},-\boldsymbol{v})=-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

因此 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=0$, 即 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u}$. 最后

$$\|\boldsymbol{v}\|^2=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\varphi^*(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\varphi(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|^2.$$

推论 6.5

引理 9.7.4 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x)=(x-a)^2+b^2$, 其中 a,b 都是实数且 $b\neq 0$. 设 $\boldsymbol{v}\in V,\boldsymbol{u}=b^{-1}(\boldsymbol{\varphi}-a\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v})$, 则 $\|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|,\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$, 且

$$\varphi(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u},\varphi(\boldsymbol{u})=-b\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}$$
$$\varphi^*(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u},\varphi^*(\boldsymbol{u})=b\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}$$

笔记 令 $\boldsymbol{\psi}=b^{-1}(\varphi-a\boldsymbol{I})$, 再套用引理6.6即可.

定理 6.13

定理 9.7.2 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, φ 的极小多项式为 $g(x)=(x-a)^2+b^2$, 其中 a,b 是实数且 $b\neq 0$, 则存在 V 的 s 个二维子空间 $V_1,\cdots,V_s$, 使

$$V=V_1\perp\cdots\perp V_s$$

且每个 V_i 都有标准正交基 $\{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i\}$ 满足

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{u}_i\right)=a\boldsymbol{u}_i-b\boldsymbol{v}_i,\quad \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{v}_i\right)=b\boldsymbol{u}_i+a\boldsymbol{v}_i.$$

定理 6.14 (正规标准型)

定理 9.7.3 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子, 则存在一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r,c_{2r+1},\cdots,c_n\right\},$$

其中 $c_j(j=2r+1,\cdots,n)$ 是实数, $\boldsymbol{A}_i$ 为形如

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{pmatrix}$$

的二阶实矩阵.

笔记 这是本节的核心定理.

推论 6.6 (正交矩阵)

定理 9.7.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_r; 1, \cdots, 1; -1, \cdots, -1\right\},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}, i=1, \cdots, r.$$

笔记 正交矩阵是一种正规矩阵，结合行列式为 1(因为 $a^2+b^2>0$).

推论 6.7 (实反对称阵)

定理 9.7.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{B}_r; 0, \cdots, 0\right\},$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{pmatrix}0 & b_i \\ -b_i & 0\end{pmatrix}, i=1, \cdots, r.$$

笔记 这说明实反对称阵的秩必是偶数, 且其实特征值必为 0 , 虚特征值为纯虚数.

问题 6.13 1. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, 其极小多项式为 $g(x)=(x-a)^2+b^2$, 其中 $b \neq 0$, 证明: φ 是 V 上的自同构且

$$\varphi^*=\left(a^2+b^2\right)\varphi^{-1}.$$

笔记 证明是 Routine 的.

问题 6.14 2. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, ψ 是 V 上的线性算子, 满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 证明: $\varphi^*\psi=\psi\varphi^*$

笔记

矩阵观点： 不妨设 φ 对应正规标准型，一阶块显然成立，不妨考虑二阶分块，由于相同特征值的分块下，可交换矩阵有相同分块对角形式，不妨考虑相同特征值的二阶分块，运用习题6.14的结论，显然成立.

线性变换观点： φ^* 是 φ 的多项式，显然与 ψ 可交换.

笔记 具体证明见11.43

问题 6.15 3. 设 A, B 是 n 阶实正规矩阵, 求证: 若 A, B 相似, 则它们必正交相似.

笔记 相似说明 A, B 特征值完全相同，于是他们的正规标准型也相同.

问题 6.16 4. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 若 $\det\varphi=1$, 则称 φ 是一个旋转; 若 $\det\varphi=$ -1 , 则称 φ 是一个反射. 求证:

1. 奇数维空间的旋转必有保持不动的非零向量, 即存在 $0 \neq \boldsymbol{v} \in V$, 使 $\varphi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$;
2. 反射必有反向的非零向量, 即存在 $0 \neq \boldsymbol{v} \in V$, 使 $\varphi(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$.

笔记 显然.

问题 6.17 5. 证明: n 阶实方阵必正交相似于下列分块上三角阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \boldsymbol{A}_r & & & \\ & & & c_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_k\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1, \cdots, r)$ 是二阶实矩阵, 其特征值为 $a_i \pm b_i\sqrt{-1}, c_j(j=1, \cdots, k)$ 是实数.

笔记 证明见11.38

问题 6.18 6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是实方阵且分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

是实正规矩阵, 求证: $C = O$ 且 A, B 也是实正规矩阵.

笔记 Routine. 结合对于实矩阵 C, 有 $Tr(CC') = 0 \Rightarrow C = O$.

问题 6.19 7. 利用第 5 题和第 6 题证明实正规矩阵的正交相似标准型定理.

笔记 见11.40

问题 6.20 8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶实正规矩阵, 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 求证: 存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P'AP}$ 与 $P'BP$ 同时为正交相似标准型.

笔记 见11.44

6.7 谱分解与极分解

定理 6.15 (谱分解)

定理 9.8.1 设 V 是有限维内积空间, φ 是 V 上的线性算子, 当 V 是酉空间时 φ 为正规算子; 当 V 是欧氏空间时 φ 为自伴随算子. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 φ 的全体不同特征值, W_i 为 φ 属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 的正交直和. 设 $\boldsymbol{E}_i$ 是 V 到 W_i 上的正交投影, 则 φ 有下列分解式:

$$\boldsymbol{\varphi} = \lambda_1 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{E}_k.$$

引理 6.7

引理 9.8.1 设 $f_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}$, 则 $\boldsymbol{E}_j = f_j(\varphi)$.

证明

当 $i \neq j$ 时, $\boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j = 0$, 故

$$\varphi^2 = \lambda_1^2 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2^2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_k^2 \boldsymbol{E}_k.$$

同理不难证明

$$\boldsymbol{\varphi}^n = \lambda_1^n \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2^n \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_k^n \boldsymbol{E}_k$$

对一切正整数 n 成立. 若设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

则

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}) &= a_0 \boldsymbol{I} + a_1 \boldsymbol{\varphi} + \cdots + a_n \boldsymbol{\varphi}^n \\ &= a_0 \left(\sum_{i=1}^k \boldsymbol{E}_i \right) + a_1 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \boldsymbol{E}_i \right) + \cdots + a_n \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^n \boldsymbol{E}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) \boldsymbol{E}_i. \end{aligned}$$

由 $f_j(\lambda_j) = 1, f_j(\lambda_i) = 0 (i \neq j)$ 即得 $f_j(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{E}_j$.

推论 6.8

推论 9.8.1 设 φ 是酉空间 V 上的线性算子, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是存在复系数多项式 $f(x)$, 使 $\varphi^* = f(\varphi)$.

证明

若存在复系数多项式 $f(x)$, 使 $\varphi^* = f(\varphi)$, 则 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 即 φ 是正规算子. 若 φ 是正规算子, 由定理 9.8.1 知 φ 存在谱分解:

$$\boldsymbol{\varphi} = \lambda_1 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{E}_k.$$

注意到 $\boldsymbol{E}_i$ 是自伴随算子, 故

$$\varphi^* = \bar{\lambda}_1 \boldsymbol{E}_1 + \bar{\lambda}_2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \bar{\lambda}_k \boldsymbol{E}_k.$$

采用与引理 9.8.1 相同的记号, 令 $f(x) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j f_j(x)$, 则

$$f(\varphi) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j f_j(\varphi) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \boldsymbol{E}_j = \varphi^*$$

定义 6.14 (正定 (半正定) 自伴随算子)

定义 9.8 .1 设 φ 是内积空间 V 上的自伴随算子, 若对任意的非零向量 $\alpha \in V$, 总有 $(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) > 0((\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \geq 0)$, 则称 φ 为正定 (半正定) 自伴随算子.

容易证明, φ 是正定自伴随算子当且仅当 φ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵是正定 Hermite 矩阵 (酉空间时) 或正定实对称阵 (欧氏空间时); φ 是半正定自伴随算子当且仅当 φ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵是半正定 Hermite 矩阵 (酉空间时) 或半正定实对称阵 (欧氏空间时).

虽然下面的定理用标准型很容易证明, 但是用谱分解来证明亦不失为一个好方法.

定理 6.16 (特征值与 (半) 正定性)

定理 9.8 .2 设 φ 是酉空间 V 上的正规算子. 若 φ 的特征值全是实数, 则 φ 是自伴随算子; 若 φ 的特征值全是非负实数, 则 φ 是半正定自伴随算子; 若 φ 的特征值全是正实数, 则 φ 是正定自伴随算子; 若 φ 的特征值的模长等于 1 , 则 φ 是酉算子.

证明

设 φ 的谱分解为

$$\boldsymbol{\varphi}=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k,$$

则

$$\varphi^*=\bar{\lambda}_1\boldsymbol{E}_1+\bar{\lambda}_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\bar{\lambda}_k\boldsymbol{E}_k.$$

若 φ 的特征值全是实数, 则 $\varphi^*=\varphi$, 即 φ 是自伴随算子. 若 λ_i 全是非负实数, 则对任意的非零向量 $\alpha\in V$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})$$

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_2\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})$$

从而

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1\left\|\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha})\right\|^2+\lambda_2\left\|\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha})\right\|^2+\cdots+\lambda_k\left\|\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})\right\|^2\geq 0.$$

同理, 若特征值全是正实数, 则 φ 是正定自伴随算子. 最后, 若 $|\lambda_i|=1$, 则

$$\begin{aligned}\varphi\varphi^*&=\lambda_1\bar{\lambda}_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\bar{\lambda}_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\bar{\lambda}_k\boldsymbol{E}_k\\&=|\lambda_1|^2\boldsymbol{E}_1+|\lambda_2|^2\boldsymbol{E}_2+\cdots+|\lambda_k|^2\boldsymbol{E}_k\\&=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

即 φ 是酉算子.

下面的定理也可用代数方法证明, 但是唯一性的证明会比较困难, 而用谱分解定理证明则比较容易.

定理 6.17

定理 9.8.3 设 V 是有限维内积空间, φ 是 V 上的半正定自伴随算子, 则存在 V 上唯一的半正定自伴随算子 ψ, 使 $\psi^2=\varphi$.

证明

设 φ 的谱分解为

$$\varphi=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k.$$

令 $d_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,k)$, 则

$$\boldsymbol{\psi}=d_1\boldsymbol{E}_1+d_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+d_k\boldsymbol{E}_k$$

适合 $\psi^2=\varphi$ 且 ψ 也是半正定自伴随算子. 现设 θ 是 V 上的半正定自伴随算子且 $\theta^2=\varphi$, 我们要证明 $\theta=\psi$. 令

$$\boldsymbol{\theta}=b_1\boldsymbol{F}_1+b_2\boldsymbol{F}_2+\cdots+b_r\boldsymbol{F}_r$$

是 $\boldsymbol{\theta}$ 的谱分解, 其中 $\boldsymbol{F}_i$ 是正交投影算子且 b_i 为非负实数. 由 $\boldsymbol{\theta}^2=\varphi$ 得.

$$\varphi=b_1^2\boldsymbol{F}_1+b_2^2\boldsymbol{F}_2+\cdots+b_r^2\boldsymbol{F}_r.$$

因为非负实数 b_i 互不相同, 故 $b_1^2,b_2^2,\cdots,b_r^2$ 是 φ 的全体不同特征值, 于是 $r=k$, $b_i^2=\lambda_i$, 从而 $b_i=d_i$ (这里允许差一个次序). 注意到 $\boldsymbol{E}_i(V)$ 及 $\boldsymbol{F}_i(V)$ 都是 φ 的关于特征值 λ_i 的特征子空间, 因此 $\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{E}_i$, 这就证明了 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\psi}$.

推论 6.9

推论 9.8 .2 设 A 是半正定实对称 (Hermite) 矩阵, 则必存在唯一的半正定实对称 (Hermite) 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

定理 6.18 (极分解)

定理 9.8.4 设 V 是 n 维酉空间 (欧氏空间), φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉算子 (正交算子) ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一.

证明

若已有 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ω 为酉算子 (正交算子), ψ 为半正定自伴随算子, 则

$$\varphi^*=\psi^*\omega^*=\psi\omega^*,$$

$$\varphi^*\varphi=\psi\omega^*\omega\psi=\psi^2.$$

由定义容易验证 $\varphi^*\varphi$ 是半正定自伴随算子, 故由定理 9.8 .3 知, ψ 被 φ 唯一确定.

推论 6.10

推论 9.8.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 以及 n 阶半正定实对称阵 $\boldsymbol{S}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QS}$. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵, 则存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 以及 n 阶半正定 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{H}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{UH}$. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为非异阵时, 上述分解式被唯一确定.

矩阵极分解的另一形式[1]读者不难自己写出. 从定理 9.8.4 6.18的证明过程很容易得到非异阵极分解的计算方法, 我们将通过下面的例子进行阐述. 对于奇异阵的极分解, 若将定理 9.8.4 6.18的证明过程转化为计算方法则过于繁琐, 因此我们将通过 §9.9 矩阵的奇异值分解来求相应的极分解.

练习 1 例 9.8.1 求下列非异阵的极分解:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10&7&11\\5&10&5\\-5&-1&2\end{pmatrix}.$$

经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}150&125&125\\125&150&125\\125&125&150\end{pmatrix}.$$

采用与例 9.5.2 相同的计算方法可得正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{25,25,400\}$. 令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&20\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}10&5&5\\5&10&5\\5&5&10\end{pmatrix},$$

[1]即设 V 是 n 维酉空间 (欧氏空间), φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉算子 (正交算子) ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使 $\varphi=\psi\omega$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一.

练习 2 则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix}10&7&11\\5&10&5\\-5&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&5&5\\5&10&5\\5&5&10\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&0&\frac{4}{5}\\0&1&0\\-\frac{4}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

问题 6.21 1. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是 $\varphi=\varphi_1+\mathrm{i}\varphi_2$, 其中 φ_1,φ_2 为自伴随算子且 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$.

问题 6.22 2. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ω 为酉算子, ψ 为半正定自伴随算子且 $\omega\psi=\psi\omega$.

问题 6.23 3. 证明: 谱分解定理之逆也成立, 即若酉空间 V 上存在一组线性算子 $\{\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_k\}$, 适合 $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{I},\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=0(i\neq j),\boldsymbol{E}_i^2=\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_i^*$, 并且线性算子 $\varphi=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k$, 则 φ 是正规算子.

问题 6.24 4. 求证: n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充分必要条件是存在同阶实对称阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

问题 6.25 5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 列满秩实矩阵, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}'$, 求证: 存在 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}$ 且 $\boldsymbol{P}=QQ'$.

问题 6.26 6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, 求证: 存在可逆矩阵 Q, 使 $QAQ=A'$.

问题 6.27 7. 求下列非异阵的极分解:

1. $\begin{pmatrix}11&-5\\-2&10\end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix}20&4&0\\0&0&1\\4&20&0\end{pmatrix}$.

6.8 奇异值分解

定义 6.15 (奇异值与奇异向量)

定义 9.9.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, 如果存在非负实数 σ 以及 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, m 维非零实列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\sigma\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}=\sigma\boldsymbol{\alpha},$$

则称 σ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 关于 σ 的右奇异向量与左奇异向量.

为了从几何上描述奇异值问题, 我们引人线性映射的伴随概念, 它可以看成是内积空间上线性变换的伴随概念的推广.

定义 6.16 (线性映射的伴随)

定义 9.9.2 设 V,U 分别是 n 维, m 维欧氏空间, φ 是 $V\to U$ 的线性映射. 若存在 $U\to V$ 的线性映射 φ^*, 使对任意的 $\boldsymbol{v}\in V,\boldsymbol{u}\in U$, 都有

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v},\varphi^*(\boldsymbol{u}))$$

成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随.[a]

[a] φ 的伴随 φ^* 存在且唯一.

笔记 对比定义6.6.

从伴随的定义我们不难发现, 若取定 V 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, U 的一组标准正交基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$, 设 φ 在这两组基下的表示矩阵为 A, 则 φ^* 在这两组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}'$, 证明也和线性变换的情形相同. 因此, 奇异值与奇异向量的几何定义即为下列等式成立:

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \sigma \boldsymbol{u}, \quad \varphi^*(\boldsymbol{u}) = \sigma \boldsymbol{v},$$

其中 $\sigma \geq 0, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} \in U$ 都是非零向量. 不难验证 $\varphi^*\varphi$ 是 V 上的半正定自伴随算子, $\varphi\varphi^*$ 是 U 上的半正定自伴随算子. 又

$$\varphi^*\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\varphi}^*(\sigma u) = \sigma\varphi^*(\boldsymbol{u}) = \sigma^2\boldsymbol{v},$$

因此, σ^2 是 $\varphi^*\varphi$ 的特征值, v 是 $\varphi^*\varphi$ 的属于 σ^2 的特征向量. 同理, σ^2 也是 $\varphi\varphi^*$ 的特征值, u 是 $\varphi\varphi^*$ 的属于 σ^2 的特征向量.

定理 6.19 (奇异值分解的线性映射表示)

定理 9.9.2 设 V, U 分别是 n 维, m 维欧氏空间, φ 是 $V \to U$ 的线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

是一个 r 阶对角阵, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 φ 的非零奇异值.

证明

因为 $\varphi^*\varphi$ 是 V 上的半正定自伴随算子, 故存在 V 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 使 $\varphi^*\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为 n 阶对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}$, 其中 $r = \mathrm{r}(\varphi^*\varphi) = \mathrm{r}(\varphi)$ 且 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ 为 $\varphi^*\varphi$ 的正特征值, 从而有

$$\varphi^*\varphi(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq r; \varphi^*\varphi(e_j) = 0, r+1 \leq j \leq n.$$

令 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(i = 1, 2, \cdots, r)$ 为算术平方根. 注意到对任意的 $1 \leq i \leq r$,

$$\|\varphi(e_i)\|^2 = (\varphi(e_i), \varphi(e_i)) = (\varphi^*\varphi(e_i), e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \sigma_i^2\|e_i\|^2 = \sigma_i^2,$$

即 $\|\varphi(e_i)\| = \sigma_i$; 对任意的 $1 \leq i \neq j \leq r$,

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\varphi^*\varphi(e_i), e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = 0$$

又对任意的 $r+1 \leq j \leq n$

$$\|\varphi(e_j)\|^2 = (\varphi(e_j), \varphi(e_j)) = (\varphi^*\varphi(e_j), e_j) = 0,$$

即 $\varphi(e_j) = 0$. 令

$$f_i = \frac{1}{\sigma_i}\varphi(e_i), i = 1, 2, \cdots, r$$

则 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 是 U 中一组两两正交的单位向量, 由定理 9.2 .2 可将它们扩张为 U 的一组标准正交基 $\{f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_m\}$. 于是在 V 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 U 的标准正交基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 下, φ 满足:

$$\varphi(e_i) = \sigma_i f_i, 1 \leq i \leq r; \varphi(e_j) = 0, r+1 \leq j \leq n$$

由 φ^* 在上述两组标准正交基下的表示矩阵是 φ 的表示矩阵的转置可得

$$\varphi^*(f_i) = \sigma_i e_i, 1 \leq i \leq r; \quad \varphi^*(f_j) = 0, r+1 \leq j \leq m$$

这就得到了要证的结论.

笔记 这就是奇异值分解的几何角度的证明过程. 奇异值分解的证明过程就是求解过程.

推论 6.11

推论 9.9.1 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 则存在 m 阶正交矩阵 P 以及 n 阶正交矩阵 Q, 使

$$P'AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

是一个 r 阶对角阵, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 A 的非零奇异值.

$P'AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 称为矩阵 A 的正交相抵标准型, 而 $A = P\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}Q'$ 则称为矩阵 A 的奇异值分解. 矩阵的奇异值分解在信息理论、控制理论和大数据科学等领域有着重要的应用.

如何计算 $m \times n$ 实矩阵 A 的奇异值分解? 事实上, 从定理 9.9.2 的证明过程中可以得到具体的计算方法. 首先, 求出 $A'A$ 的正交相似标准型, 即求出 n 阶正交矩阵 Q, 使

$$Q'A'AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}$$

其中 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 且 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$ 为 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的正特征值. 其次, 设 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为列分块, 令

$$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i},\quad \boldsymbol{\beta}_i=\frac{1}{\sigma_i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i, i=1,2,\cdots,r,$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是两两正交长度为 1 的 m 维列向量, 将它们扩张为 $\mathbb{R}_m$ 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$. 最后，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 为 m 阶正交矩阵，则

$$AQ=P\begin{pmatrix} S & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

从而

$$A=P\begin{pmatrix} S & O\\ O & O\end{pmatrix}Q'$$

即为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解. 在上述计算过程中, 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的选取并不唯一; 当 $\boldsymbol{Q}$ 取定之后, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<m$, 则正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的选取也不唯一. 因此在奇异值分解中, 除了 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{O}\}$ (即 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值) 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定之外, 正交矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 的选取一般都不唯一.

从 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解很容易得到 $\boldsymbol{A}$ 的极分解. 事实上, 由 11.1 式可得

$$A=(PQ')\,Q\begin{pmatrix} S & O\\ O & O\end{pmatrix}Q'$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}'$ 是 n 阶正交矩阵, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{O}\}\boldsymbol{Q}'$ 是 n 阶半正定实对称阵, 从而 $A=RB$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 的极分解. 通过奇异值分解来求极分解, 在处理奇异阵时很有用.

例题 6.1.

例 9.9.1 求下列矩阵的奇异值分解和极分解:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

证明

经计算可得

$$A'A=\begin{pmatrix}2&2&6\\2&5&12\\6&12&30\end{pmatrix}.$$

采用与例 9.5 .2 相同的计算方法可得正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

使 $Q'A'AQ=\operatorname{diag}\{36,1,0\}$. 设 Q 的 3 个列向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 令

$$\sigma_1=6,\quad \beta_1=\frac{1}{6}A\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{30}}(5,1,2)',$$

$$\sigma_2=1,\quad \beta_2=A\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1)'.$$

添加单位向量 $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)'$, 使 β_1,β_2,β_3 成为 $\mathbb{R}_3$ 的一组标准正交基. 令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则 P 为正交矩阵. 由 (9.9.1) 式可得 A 的奇异值分解为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

由 (9.9.2) 式可得 A 的极分解为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}.$$

如果我们选取 $-\beta_3$ 与 β_1,β_2 组成 $\mathbb{R}_3$ 的一组标准正交基, 令 $P_1=(\beta_1,\beta_2,-\beta_3)$, 则可得 A 的另一种奇异值分解, 由此诱导的 A 的另一种极分解为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}.$$

例题 6.2.

例 9.9.2 设 V,U 分别是 n 维, m 维欧氏空间, φ,ψ 是 $V\to U$ 的线性映射, φ^* 和 ψ^* 分别是 φ 和 ψ 的伴随. 若 $\varphi^*\varphi=\psi^*\psi$, 证明: 存在 U 上的正交变换 ω, 使 $\varphi=\omega\psi$.

证明

我们将沿用定理 9.9.2 证明中的记号. 设在 V 的标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下, $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\psi}$ 的表示矩阵为 n 阶对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0\}$, 则由定理 9.9.2 的证明知存在 U 的标准正交基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m\}$, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为分块对角阵 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{O}\}$. 同理, 存在 U 的另一组标准正交基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$, 使 $\boldsymbol{\psi}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 下的表示矩阵也是 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{O}\}$. 现定义 U 上的线性变换 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{g}_i)=\boldsymbol{f}_i(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $\boldsymbol{\omega}$ 是 U 上的正交变换且

$$\omega\psi(\boldsymbol{e}_i)=\omega(\sigma_i\boldsymbol{g}_i)=\sigma_i\omega(\boldsymbol{g}_i)=\sigma_i\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i),i=1,\cdots,r;$$

$$\omega\psi(\boldsymbol{e}_j)=\omega(0)=0=\varphi(\boldsymbol{e}_j),j=r+1,\cdots,n,$$

故 $\varphi=\omega\psi$.

6.9 最小二乘群

定理 6.20 (向量到一个空间的距离)

定理 9.10.1 设 W 是有限维内积空间 V 的子空间, $\boldsymbol{v}\in V$, 则 (1) 在 W 中存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}$, 使 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 最小且这时 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\perp W$; (2) 若 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$ 是 W 的标准正交基, 又 $\{\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的标准正交基, 这样 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 就成为 V 的一组标准正交基, 则

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2+\cdots+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_m)\,\boldsymbol{e}_m$$

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_{m+1})\,\boldsymbol{e}_{m+1}+\cdots+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_n)\,\boldsymbol{e}_n$$

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|=\left(|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_{m+1})|^2+\cdots+|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明

证明设 $\boldsymbol{w}$ 是 W 中任一向量, 要证明 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|\le\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$. 注意到这时 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})$, 其中 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\perp W,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\in W$. 因此, 由勾股定理有

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|^2.$$

若 $\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{u}$, 则

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2>\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|^2.$$

这样我们不仅证明了 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 的最小性, 也证明了 $\boldsymbol{u}$ 的唯一性.

问题 6.28 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵, 求证: 对任意的 m 维实列向量 $\boldsymbol{\beta}$, n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}$ 一定有解.

第七章 矩阵

例题 7.1.

例 2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 α, 有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

证明

若 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵, 则对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})' = -\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 而 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是数, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})' = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 比较上面两个式子便有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$. 反之, 若

上式对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha} = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{\alpha} = 0$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵, 故由上题可得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}' = -\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵.

第八章 线性空间与线性方程组

例题 8.1.

例 3.48 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵组成的向量空间, V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{F}$ 上对称矩阵和反对称矩阵组成的子集. 求证: V_1 和 V_2 都是 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$.

证明

由于对称矩阵之和仍是对称矩阵, 一个数乘以对称矩阵仍是对称矩阵, 因此 V_1 是 V 的子空间. 同理 V_2 也是 V 的子空间. 又由例 2.10 可知, 任一 n 阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 故 $V = V_1 + V_2$. 若一个矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵, 则它一定是零矩阵. 这就是说 $V_1 \cap V_2 = 0$. 于是 $V = V_1 \oplus V_2$.

第九章 特征值

定理 9.1

例 6.19 (特征值的降阶公式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $m\geq n$. 求证:

$$|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda^{m-n}\,|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|\,.$$

特别地, 若 A,B 都是 n 阶矩阵, 则 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

定理 9.2

例 6.39 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 A 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: A 在 $\mathbb{F}$ 上可上三角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

证明

对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设对 $n-1$ 阶矩阵结论成立, 现对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行证明. 设 $\lambda_1\in\mathbb{F}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则由线性方程组的求解理论可知, 存在特征向量 $e_1\in\mathbb{F}^n$, 使得 $Ae_1=\lambda_1e_1$. 由基扩张定理, 可将 e_1 扩张为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 于是

$$(\boldsymbol{A}e_1,\boldsymbol{A}e_2,\cdots,\boldsymbol{A}e_n)=(e_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶矩阵. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵, 且. 由上式可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$. 由此可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)\,|\lambda\boldsymbol{I}_{n-1}-\boldsymbol{A}_1|$, 从而 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值也全在 $\mathbb{F}$ 中, 故由归纳假设, 存在 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 是上三角矩阵. 令

$$R=P\begin{pmatrix}1 & O\\ O & Q\end{pmatrix}$$

则 R 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵, 且

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & Q\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ O & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ O & Q^{-1}A_1Q\end{pmatrix}$$

是上三角矩阵.

定理 9.3

例 6.91 设 A,B 分别为 m,n 阶矩阵, V 为 $m\times n$ 矩阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为: $\varphi(X)=AX-XB$. 求证: φ 是线性自同构的充要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值. 此时, 对任一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 存在唯一解.

证明

证明若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值, 则由例 6.88 可知, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的单映射, 从而是线性自同构. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值 λ_0, 则 λ_0 也是 B' 的特征值. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为对应的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\neq\boldsymbol{O}$ 且

$$\varphi\left(\alpha\boldsymbol{\beta}'\right)=(A\alpha)\boldsymbol{\beta}'-\alpha\left(B'\boldsymbol{\beta}\right)'=\lambda_0\alpha\boldsymbol{\beta}'-\lambda_0\alpha\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{O},$$

于是 $\operatorname{Ker}\varphi\neq 0$, 从而 φ 不是线性自同构.

第十章 二次型

例题 10.1.

例 8.12 证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵;

(2) 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵 B 和主对角元全为正数的对角矩阵 D, 使得 $A = B'DB$;

(3) 存在主对角元全为正数的上三角矩阵 C, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

设 $C = (c_{ij})$ 为主对角元全为正数的上三角矩阵, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 则 $c_{11}c_{1j} = a_{1j}$, 从而 $c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0, c_{1j} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}(2 \le j \le n)$, 即 C 的第一行元素被唯一确定. 同理不断地讨论下去, 可得这样的 C 存在并被正定阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定. 因为 S 是由 C 的主对角元构成的对角矩阵, 故由 C 的唯一性可得 S 的唯一性, 从而可得 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^2$ 以及 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的唯一性. 因此, 例 8.1210 中关于正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的两种分解 (2) 和 (3) 都是存在且唯一的, 其中分解 (3) 通常称为正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Cholesky 分解. 另外, 上述两种分解也有非常重要的几何意义, 它们与 Gram-Schmidt 正交化方法密切相关, 我们将在 §9.3 阐述相关的细节.

例题 10.2.

例 8.78 证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵;

(2) 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和主对角元全为非负实数的对角矩阵 D, 使得 $A = B'DB$

(3) 存在主对角元全为非负实数的上三角矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

定理 10.1

例 8.75 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 为半正定实对称矩阵, 求证: $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明

证法 1 根据线性方程组的求解理论, 要证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 只要证明线性方程组 $\binom{A}{B'}x=0$ 与 $Ax=0$ 同解即可. 显然前面线性方程组的解是后面线性方程组的解, 下面证明反之也成立. 设 $Ax_0=0$, 其中 x_0 是实列向量, 则有

$$\begin{pmatrix} x_0' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}=x_0'Ax_0=0$$

由例 8.71 可知 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\binom{\boldsymbol{x}_0}{0}=0$, 即有 $\binom{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}'}\boldsymbol{x}_0=0$ 成立, 从而结论得证.

证法 2 由 $\boldsymbol{M}$ 的半正定性可得 $\boldsymbol{A}$ 的半正定性, 因此存在非异实矩阵 C, 使得 $C'AC=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 考虑如下合同变换:

$$\begin{pmatrix} C' & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & O \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C'AC & C'B \\ B'C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O & B_1 \\ O & O & B_2 \\ B_1' & B_2' & D \end{pmatrix},$$

由例 8.70 可知 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{O}$. 对分块矩阵 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$ 左乘 $\boldsymbol{C}'$, 相当于实施初等行变换, 再对左边的分块 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{C}$, 相当于实施初等列变换, 注意到矩阵的秩在初等变换下不改变, 故有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C};\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

半正定阵的性质 4 (例 8.75) 可看成是半正定阵的性质 2 (例 8.70) 的推广.

第十一章 内积空间

11.1 内积空间与 Gram 矩阵

例题 11.1.

例 9.3 设 V 为 n 维内积空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 分别是 V 的两组基. 设基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的 Gram 矩阵为 G, 基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 的 Gram 矩阵为 H, 从基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 到基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 的过渡矩阵为 C. 求证: 若 V 为欧氏空间, 则 $H = C'GC$; 若 V 为酉空间, 则 $\boldsymbol{H} = C'G\bar{C}$.

证明

设 V 为酉空间, $\boldsymbol{G} = (g_{ij}), \boldsymbol{H} = (h_{ij}), \boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 则 $\boldsymbol{f}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_i$, 于是

$$h_{kl} = (\boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{f}_l) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} c_{jl}\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ik}\overline{c_{jl}}\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ik}g_{ij}\overline{c_{jl}}.$$

上式左边是 $\boldsymbol{H}$ 的第 (k,l) 元素, 右边是 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{G}\overline{\boldsymbol{C}}$ 的第 (k,l) 元素, 从而结论得证.

向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 的 Gram 矩阵的几何意义是, 这 m 个向量张成的平行 $2m$ 面体的体积等于其 Gram 矩阵的行列式的算术平方根 (证明可参考例 9.15):

$$V(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)|^{\frac{1}{2}}.$$

特别地, 设 $V = \mathbb{R}^n$ (取标准内积), n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为其列分块, 则 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, 于是 $V(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{2}} = \mathrm{abs}(|\boldsymbol{A}|)$. 因此, n 阶行列式的绝对值等于其 n 个列向量张成的平行 $2n$ 面体的体积, 这就是 n 阶行列式的几何意义.

例题 11.2.

证明: 在 n 维欧氏空间 V 中, 两两夹角大于直角的向量个数至多是 $n+1$ 个.

证明

用反证法证明. 假设存在 $n+2$ 个两两夹角大于直角的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\boldsymbol{\alpha}_{n+2}\in V$, 则由 $\dim V=n$ 可知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 必线性相关, 即存在不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$, 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=0$. 将此式按照系数正负整理为如下形式:

$$\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{c_j<0}(-c_j)\,\boldsymbol{\alpha}_j.$$

由 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$ 不全为零不妨设存在某个 $c_i>0$. 若 (9.4) 式两边都等于零, 则有

$$0=\left(\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}\right)=\sum_{c_i>0} c_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}\right)<0,$$

矛盾. 因此 (9.4) 式两边都非零, 从而也存在某个 $c_j<0$, 于是

$$0<\left(\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\left(\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{c_j<0}(-c_j)\,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{c_i>0}\sum_{c_j<0} c_i\left(-c_j\right)\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)<0,$$

矛盾. 例如, 不妨设 $V=\mathbb{R}^n$ (取标准内积), 则向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(n,-1,\cdots,-1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,n,\cdots,-1)',\boldsymbol{\alpha}_n=(-1,-1,\cdots,n)',\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=(-1,-1,\cdots,-1)'$ 就满足两两夹角大于直角. 因此, $n+1$ 就是两两夹角大于直角的向量个数的最佳上界, 结论得证.

利用内积与正定实对称矩阵 (正定 Hermite 矩阵) 之间的关系, 我们可以用代数方法来解决几何问题, 也可以用几何方法来处理代数问题, 下面是几个典型的例题.

例题 11.3.

设 V 是 n 维欧氏空间, $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个实数, 求证: 存在唯一的向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得对任意的 i, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=c_i$.

证明

设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$, 则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=c_i(1\le i\le n)$ 等价于如下线性方程组:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)\,x_1+(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\,x_2+\cdots+(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n)\,x_n=c_1,\\ (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\,x_1+(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\,x_2+\cdots+(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n)\,x_n=c_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots+\\ (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_1)\,x_1+(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_2)\,x_2+\cdots+(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_n)\,x_n=c_n.\end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵是基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 的 Gram 矩阵, 故其行列式非零, 从而上述方程组有唯一解, 于是满足条件的 α 存在且唯一.

例题 11.4.

例 9.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 对任意的 n 维实列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 有

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})^2\le(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\,.$$

证明

证法 1 由例 8.63 可知, 对任意正实数 t, $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 都是正定阵, 这决定了 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积, 故由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{y}).$$

注意到上式两边都是关于 t 的连续函数, 同时取极限, 令 $t\to 0+$, 即得结论.

证法 2 由于 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 故存在实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 考虑 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})^2=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x},\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^2\le\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

证法 3 因为 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵, 故对任意的实数 t, 有

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})t^2+2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})t+(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})'\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ge 0.$$

若 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, 则由例 8.71 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, 从而 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{y}=0$, 于是结论成立. 若 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ne 0$, 则上述关于 t 的二次方程恒大于等于零当且仅当其判别式小于等于零, 由此即得要证的结论.

例题 11.5.

例 9.10 证明: 在 $\mathbb{R}^n$ (取标准内积) 中存在一个非零线性变换 φ, 使 $\varphi(\alpha)\perp\alpha$ 对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 成立, 但是在 $\mathbb{C}^n$ (取标准内积) 中这样的非零线性变换不存在.

证明

任取一个 n 阶非零实反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\varphi(\alpha)=\boldsymbol{A}\alpha$, 则由例 2.57 可得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$. 下面给出 $\mathbb{C}^n$ 情形的 3 种证法. 用反证法来证明, 设在 $\mathbb{C}^n$ (取标准内积) 中存在满足条件的非零线性变换 φ.

证法 1 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准单位列向量, φ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 则对任意的 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, $\varphi(\alpha)=\boldsymbol{A}\alpha$. 由假设可知, 对任意的 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, 有 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\overline{\boldsymbol{\alpha}}=0$. 取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i$, 代人条件可得 $a_{ii}=0(1\le i\le n)$. 取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j$, 代人条件可得 $a_{ij}+a_{ji}=0(1\le i<j\le n)$. 取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_j$, 代人条件可得 $a_{ij}-a_{ji}=0(1\le i<j\le n)$. 于是 $a_{ij}=a_{ji}=0(1\le i<j\le n)$, 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 这与 $\varphi\ne 0$ 矛盾!

证法 2 首先, 我们证明 φ 的特征值全部为零. 设 λ_0 是 φ 的特征值, α 是对应的特征向量, 则 $0=(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})=(\lambda_0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$, 由于 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\ne 0$, 故只能是 $\lambda_0=0$. 其次, 由 Jordan 标准型理论可知, 存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{r_1}(0),\boldsymbol{J}_{r_2}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(0)\right\}$. 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 不可对角化, 则必存在某个 $r_i>1$, 不妨设 $r_1>1$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{e}_1)=0,\varphi(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1$. 由 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_2)=0$ 可得 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=0$, 再由 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=0$ 可得 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)=0$, 从而 $\boldsymbol{e}_1=0$, 这与假设矛盾, 于是 φ 可对角化. 最后, 由 φ 的 Jordan 标准型是零矩阵可知 $\varphi=0$, 这与假设矛盾.

证法 3 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=&\frac{1}{4}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\frac{1}{4}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&+\frac{\mathrm{i}}{4}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta})-\frac{\mathrm{i}}{4}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta})=0.\end{aligned}$$

令 $\beta=\varphi(\alpha)$, 由内积的正定性可得 $\varphi(\alpha)=0$ 对任意的 $\alpha\in\mathbb{C}^n$ 成立, 即 $\varphi=0$, 这与假设矛盾. 因此在 $\mathbb{C}^n$ 中满足条件的非零线性变换不存在.

11.2 Gram-Schmidt 正交化方法和正交补空间

设 V 为 n 维内积空间, 则由例 9.4 可知, 任一 n 阶正定实对称矩阵 (正定 Hermite 矩阵) $\boldsymbol{H}$ 都能成为 V 的某组基的 Gram 矩阵. 特别地, 取 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}_n$, 则存在 V 的一组基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$, 使得它的 Gram 矩阵就是单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$, 即 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 由例 9.311.1 我们也可以具体地构造出一组标准正交基, 以下不妨设 V 是欧氏空间. 首先, 任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 设其 Gram 矩阵为 G, 则 G 是正定实对称矩阵. 其次, 通过对称初等变换法可将 $\boldsymbol{G}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$, 即存在 n 阶非异实矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n$. 最后, 令

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{C},$$

即 $\boldsymbol{f}_j=\sum_{i=1}^n c_{ij}\boldsymbol{e}_i$, 则 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的一组基, 并且它的 Gram 矩阵就是 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n$. 从上述过程不难看出, 因为当 $n\geq 2$ 时, 过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有无穷多种选法, 所以可构造出 V 的无穷多组标准正交基.

从几何的层面上看, 上述构造标准正交基的代数方法虽然简单, 但缺乏几何直观和意义. 然而, Gram-Schmidt 方法却是一个从几何直观入手的向量组的正交化方法, 具有重要的几何意义. Gram-Schmidt 方法 (具体公式参考 § 9.1.2) 粗略地说就是, 如果前 $k-1$ 个向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}$ 已经两两正交, 那么只要将第 k 个向量 $\boldsymbol{u}_k$ 减去其在 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}$ 张成子空间上的正交投影, 即可得到与 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}$ 都正交的向量 $\boldsymbol{v}_k$. 特别地, 若 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组基, 则通过 Gram-Schmidt 方法可得到一组正交基 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$, 再将每个基向量标准化, 即可得到 V 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$. 这 3 组基之间的关系为

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n)\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是主对角元全为 1 的上三角矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是主对角元全为正实数的上三角矩阵. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n),\boldsymbol{D}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$ 分别是对应的 Gram 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是正定实对称矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是正定对角矩阵, 由例 9.3 可得 $\boldsymbol{A}$ 的如下分解:

$$A=B'DB=C'C$$

这就是10 中关于正定实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两种分解, 再由例 8.1210 后面的注可知上述两种分解的唯一性. 因此, 基 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 的 Gram 矩阵的分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$ 一一对应于通过 Gram-Schmidt 方法得到的正交基 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$, 而 Gram 矩阵的 Cholesky 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 则一一对应于通过 Gram-Schmidt 正交化和标准化得到的标准正交基 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$.

除了求标准正交基之外, Gram-Schmidt 方法还有许多其他的应用. 设 V 是内积空间, $\boldsymbol{u}$ 是 V 中的向量, $\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_k\}$ 是子空间 W 的一组标准正交基, 则由 GramSchmidt 方法可知 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$ 与 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_k$ 正交. 令 $\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$, 则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 且 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0$, 于是 $\|\boldsymbol{u}\|^2=\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{w}\|^2$. 由此可得 (1) Bessel 不等式: $\|\boldsymbol{u}\|^2\geq\|\boldsymbol{w}\|^2=\sum_{i=1}^k|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_i)|^2$; (2) 向量 $\boldsymbol{u}$ 到子空间 W 的距离为 $\|\boldsymbol{v}\|$, 即 $\min_{\boldsymbol{x}\in W}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{v}\|$.

例题 11.6. QR 分解

例 9.13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交 (酉) 矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是一个主对角元全大于等于零的上三角矩阵, 并且若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则这样的分解必唯一.

证明

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块. 考虑 n 维实列向量空间 $\mathbb{R}^n$, 并取其标准内积, 我们先通过类似于 Gram-Schmidt 方法的正交化过程, 把 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 变成一组两两正交的向量 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$, 并且 $\boldsymbol{w}_k$ 或者是零向量或者是单位向量.

我们用数学归纳法来定义上述向量 $\boldsymbol{w}_k(1\le k\le n)$. 假设 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{k-1}$ 已经定义好, 现来定义 $\boldsymbol{w}_k$. 令

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k-\sum_{j=1}^{k-1}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_j)\,\boldsymbol{w}_j.$$

若 $\boldsymbol{v}_k=0$, 则令 $\boldsymbol{w}_k=0$; 若 $\boldsymbol{v}_k\neq 0$, 则令 $\boldsymbol{w}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|}$. 容易验证 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$ 是一组两两正交的向量, w_k 或者是零向量或者是单位向量, 并且满足:

$$\boldsymbol{u}_k=\sum_{j=1}^{k-1}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_j)\,\boldsymbol{w}_j+\|\boldsymbol{v}_k\|\,\boldsymbol{w}_k,\quad 1\le k\le n.$$

由上式可得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n)\,\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个上三角矩阵且主对角元依次为 $\|\boldsymbol{v}_1\|,\|\boldsymbol{v}_2\|,\cdots,\|\boldsymbol{v}_n\|$, 全大于等于零, 并且由 (9.5) 式可知, 如果 $\boldsymbol{w}_k=0$, 则 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 行元素全为零.

假设 $\boldsymbol{w}_{i_1},\boldsymbol{w}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{w}_{i_r}$ 是其中的非零向量全体, 则可将它们扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n\}$, 其中 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_j=\boldsymbol{w}_j\,(j=i_1,i_2,\cdots,i_r)$. 令 $\boldsymbol{Q}=(\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n)$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵. 注意到若 $\boldsymbol{w}_k=0$, 则 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 行元素全为零, 此时用 $\tilde{\boldsymbol{w}}_k$ 代替 w_k 仍然可使 (9.6) 式成立, 因此

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=(\widetilde{\boldsymbol{w}}_1,\widetilde{\boldsymbol{w}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{w}}_n)\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

从而得到了 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解. 若可逆实矩阵 A 有两个 QR 分解 $A=QR=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$, 则 $Q^{-1}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_1^{-1}$. 因为正交矩阵的逆矩阵和乘积仍是正交矩阵, 上三角矩阵的逆矩阵和乘积仍是上三角矩阵, 故 $Q^{-1}Q_1=\boldsymbol{R}R_1^{-1}$ 是正交上三角矩阵, 从而是正交对角矩阵. 又因为正交对角矩阵的主对角元只能是 1 或 -1 , 且 $\boldsymbol{R}R_1^{-1}$ 的主对角元全大于零, 故 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_1^{-1}=\boldsymbol{I}_n$, 从而 $R_1=R, Q_1=Q$, 分解唯一性得证. 复矩阵情形的证明完全类似.

例题 11.7.

例 8.1210 和例 8.7810 证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的命题等价: (1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵 (半正定阵); (2) 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和主对角元全为正数 (非负实数) 的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $A=B'DB$; (3) 存在主对角元全为正数 (非负实数) 的上三角矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

证明

证法 2 因为半正定阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 所以由可逆性和例 8.78 的结论很容易推出例 8.12 的结论, 下面只证明例 8.78 .

(1) $\Rightarrow$ (3)(2) : 因为 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 故存在实矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}$. 设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}$ 是 QR 分解, 其中 Q 是正交矩阵, C 是主对角元全大于等于零的上三角矩阵, 则 $A=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C})'(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 由例 9.13 11.2的证明可知, 若 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 的第 (i,i) 元素 $c_{ii}=0$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行元素全为零. 令 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\{c_{11}^2,c_{22}^2,\cdots,c_{nn}^2\}$, 且 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 定义为: 若 $c_{ii}>0$, 则 $b_{ij}=\frac{c_{ij}}{c_{ii}}(1\le j\le n)$; 若 $c_{ii}=0$, 则 $b_{ij}=\delta_{ij}(1\le j\le n)$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号. 容易验证 $\boldsymbol{B}$ 是主对角元全等于 1 的上三角矩阵且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'D\boldsymbol{B}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3) $\Rightarrow$ (1) 都是显然的.

事实上, 正定阵的 Cholesky 分解和非异阵的 QR 分解从某种意义上看是等价的. 上面的证明即是由非异阵的 QR 分解推出正定阵的 Cholesky 分解. 反之, 对任一非异实矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 设 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}$ 是 Cholesky 分解, 其中 $\boldsymbol{R}$ 是主对角元全大于零的上三角矩阵. 令 $Q = AR^{-1}$, 则 $Q'Q = (AR^{-1})'(AR^{-1}) = (\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}^{-1} = (\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$, 即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵, 从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ 是 QR 分解. 从几何的层面上看, 上述两种矩阵分解都等价于 Gram-Schmidt 正交化和标准化过程, 所以它们之间的等价性是自然的.

引理 11.1

例 9.16 证明下列不等式:

$$0 \le |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)| \le \|\boldsymbol{u}_1\|^2 \|\boldsymbol{u}_2\|^2 \cdots \|\boldsymbol{u}_m\|^2,$$

后一个等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{u}_i$ 两两正交或者某个 $\boldsymbol{u}_i = 0$.

定理 11.1 (Hadamard 不等式)

例 9.17 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵, 证明下列 Hadamard 不等式:

$$|\boldsymbol{A}|^2 \le \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

证明

设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量, 则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 可以看成是 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下的 Gram 矩阵. 由例 9.16 可得

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{G}| \le \prod_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{u}_j\|^2 = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2.$$

- 例 9.16 和例 9.17 还可以直接由例 8.68 得到. 另外, 利用 Hadamard 不等式可以证明如下结论: 若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 满足 $|a_{ij}| \le M (1 \le i, j \le n)$, 则 $|\boldsymbol{A}| \le M^n \cdot n^{\frac{n}{2}}$. 这些证明的细节留给读者自行完成.
- 例 9.15 和例 9.16 的结论对复内积空间也成立, 不过证明中有两个细微之处需要修改, 请读者自行完成. 因此对 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 用相同的方法可以证明:

$$|\det \boldsymbol{A}|^2 \le \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

有限维内积空间 V 是任一子空间 U 与其正交补空间 $U^\perp$ 的正交直和, 因此我们经常利用正交补空间配合数学归纳法证明关于内积空间以及线性算子的某些重要命题. 关于正交补空间的验证, 常常利用有限维空间中的维数关系, 它可以使证明更加简洁. 我们先来看正交补空间性质的两道例题.

命题 11.1

例 9.18 设 U_1, U_2, U 是 n 维内积空间 V 的子空间, 求证:

1. $(U^\perp)^\perp = U$;
2. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
3. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$;
4. $V^\perp = 0, 0^\perp = V$.

证明

1. 因为 $V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$, 故 $\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U$. 另一方面, 显然有 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, 因此 $(U^\perp)^\perp = U$.
2. 显然 $(U_1+U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp, (U_1+U_2)^\perp \subseteq U_2^\perp$, 于是 $(U_1+U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$. 反之, 对任一 $\boldsymbol{\alpha} \in U_1^\perp \cap U_2^\perp, \boldsymbol{\beta} \in U_1+U_2$, 记 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1 \in U_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in U_2$, 则
$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2) = 0,$$
故 $\boldsymbol{\alpha} \in (U_1+U_2)^\perp$, 于是 $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1+U_2)^\perp$. 因此 $(U_1+U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
3. 由 (1) 及 (2), 有 $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$.
4. 显然成立.

例题 11.8.

例 9.20 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的解空间为 U, 求 $U^\perp$ 适合的线性方程组.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则解空间 U 是 $\mathbb{R}^n$ (取标准内积) 的 $n-r$ 维子空间. 取 U 的一组基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r})$ 为 $n \times (n-r)$ 实矩阵, 则由例 9.19 (2) 的证明可得 $U^\perp = \{\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}^\perp$, 因此 $U^\perp$ 适合的线性方程组为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x} = 0$.

例题 11.9.

例 9.21 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 求证: 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解的充要条件是向量 β 属于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} = 0$ 解空间的正交补空间.

证明

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为列分块, $U = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\mathbb{R}^m$ (取标准内积) 的子空间, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{\beta} \in U$. 另一方面, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} = 0$ 的解空间即为 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{y}) = 0, 1 \le i \le n\} = U^\perp$, 注意到 $U = (U^\perp)^\perp$, 故结论得证.

例题 11.10.

例 9.22 设 V 为 n 阶实矩阵全体构成的欧氏空间 (取 Frobenius 内积[a]), V_1, V_2 分别为 n 阶实对称矩阵全体和 n 阶实反对称矩阵全体构成的子空间, 求证:
$$V = V_1 \perp V_2.$$

[a] 就是下面这个迹的定义

证明

一方面, 由例 3.48 可知 $V = V_1 \oplus V_2$. 另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{A} \in V_1, \boldsymbol{B} \in V_2$, 由迹的交换性可得
$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}') = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}') = -(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = -(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$
于是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0$, 从而 $V_1 \perp V_2$, 因此 $V = V_1 \perp V_2$.

11.3 伴随

例题 11.11.

例 9.29 设 V 是由 n 阶实矩阵全体构成的欧氏空间 (取 Frobenius 内积), V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(A)=PAQ$, 其中 $P,Q\in V$.

1. 求 φ 的伴随 φ^*;
2. 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是可逆矩阵, 求证: φ 是正交算子的充要条件是 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=c\boldsymbol{I}_n$, $QQ'=c^{-1}\boldsymbol{I}_n$, 其中 c 是正实数;
3. 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是可逆矩阵, 求证: φ 是自伴随算子的充要条件是 $\boldsymbol{P}'=\pm\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}'=\pm\boldsymbol{Q}$
4. 若 P,Q 都是可逆矩阵, 求证: φ 是正规算子的充要条件是 P,Q 都是正规矩阵.

笔记 这里的经典手法就是：若有 $P'PA=A(QQ')^{-1},\forall A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$，令 $A=I_n$，就有 $P'P=(QQ')^{-1}$，于是 $P'P$ 与任何 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 可交换，于是 $P'P=cI_n$ 是数量矩阵 $(c\neq 0)$，进一步导出所需结论.

11.4 保积同构、正交变换和正交矩阵

设 $\varphi:V\to U$ 是内积空间之间的线性同构, 若 φ 保持内积, 则称为保积同构. 若两个线性空间之间存在线性同构, 则它们具有相同的线性结构, 从而在考虑线性问题时可将它们等同起来. 同理, 若两个内积空间之间存在保积同构, 则它们具有相同的内积结构, 从而在考虑内积问题时也可将它们等同起来, 这也是研究保积同构的意义所在. 本节将从 4 个方面研究保积同构的性质及其应用.

两个维数相同的欧氏空间 (酉空间) 之间的线性映射 $\varphi:V\to U$ 是保积同构当且仅当 φ 保持内积或保持范数, 当且仅当 φ 把 V 的某一组 (任一组) 标准正交基映为 U 的一组标准正交基. 我们已经知道一组基的 Gram 矩阵完全决定了内积结构, 因此也有如下保积同构的判定准则.

例题 11.12.

例 9.35 设 V,U 都是 n 维欧氏空间, $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 分别是 V 和 U 的一组基 (不一定是标准正交基), 线性映射 $\varphi:V\to U$ 满足 $\varphi(e_i)=\boldsymbol{f}_i(1\le i\le n)$. 求证: φ 是保积同构的充要条件是这两组基的 Gram 矩阵相等, 即

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)$$

例题 11.13.

例 9.38 设 V,U 都是 n 维欧氏空间, $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$ 分别是 V 和 U 中的向量组. 证明: 存在保积同构 $\varphi:V\to U$, 使得

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(1\le i\le m)$$

成立的充要条件是这两组向量的 Gram 矩阵相等.

11.4.1 正交变换与镜像变换

实 (复) 内积空间 V 上的保积自同构称为正交变换 (酉变换), 这是内积空间理论中一个重要的研究对象. 前面关于保积同构的判定准则都适用于正交变换 (酉变换), 此外利用伴随算子, 我们还有如下判定准则: 线性变换

φ 是正交变换 (酉变换) 当且仅当 $\varphi^* = \varphi^{-1}$, 当且仅当 φ 在 V 的某一组 (任一组) 标准正交基下的表示矩阵为正交矩阵 (酉矩阵).

定理 11.2

例 9.39 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 实矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在 m 阶正交矩阵 Q, 使得 $A = QB$.

镜像变换是一种正交变换, 它特别简单, 容易研究, 而一般的正交变换都可以表示为镜像变换之积, 这就使它在正交变换中显得特别重要. 例 9.40[1] 介绍了镜像变换的定义; 例 9.41 介绍了镜像矩阵的定义以及和镜像变换的基本关系; 例 9.42 是常用的构造镜像变换的方法; 例 9.43 是一个著名的结论, 称为 Cartan-Dieudonné 定理, 它把正交变换 (正交矩阵) 表示为若干个镜像变换 (镜像矩阵) 之积. 证明采用数学归纳法, 这也是处理这类问题的常用方法.

定理 11.3

例 9.41 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维实列向量且 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} = 1$, 这样的 $\boldsymbol{M}$ 称为镜像矩阵. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 求证: φ 是镜像变换的充要条件是 φ 在 V 的某一组 (任一组) 标准正交基下的表示矩阵为镜像矩阵.

证明

先证必要性. 设 φ 是镜像变换, 则由例 9.40 可知, φ 在 V 的某一组标准正交基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{-1, 1, \cdots, 1\} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'$, 其中 $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, \cdots, 0)'$. 设 φ 在 V 的任一组标准正交基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{M}$, 则 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 正交相似, 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'$, 于是

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\right)\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{I}_n - 2(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta})'.$$

令 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 1 且 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$.

再证充分性. 设 φ 在 V 的某一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} = 1$. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 令 $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$. 对 V 中任一向量 $\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$, 记 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$, 则

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}.$$

由线性变换和表示矩阵的一一对应可得

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{v},$$

注意到 $\boldsymbol{v}$ 的长度为 1 , 故 $\boldsymbol{\varphi}$ 是镜像变换.

定理 11.4

例 9.42 设 u, v 是欧氏空间中两个长度相等的不同向量, 求证: 必存在镜像变换 $\boldsymbol{\varphi}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

定理 11.5

例 9.43 n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为不超过 n 个镜像变换之积.

---

[1] 设 $\boldsymbol{v}$ 是 n 维欧氏空间 V 中长度为 1 的向量, 定义线性变换:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{v},$$

$\boldsymbol{\varphi}$ 是正交变换且 $\det(\boldsymbol{\varphi}) = -1$

证明

对 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时, 正交变换 φ 或是恒等变换, 或是 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}$, 后者已是镜像变换, 而恒等变换可看成是零个镜像变换之积, 故结论成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 现设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正交变换. 若 φ 是恒等变换, 则可看成是零个镜像变换之积, 故结论成立. 下设 φ 不是恒等变换, 取 V 的一组标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 则存在某个 i, 使得 $\varphi(e_i)\neq e_i$. 不失一般性, 可设 $\varphi(e_1)\neq e_1$, 因为 $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)\|=\|\boldsymbol{e}_1\|=1$, 故由例 9.42 可知, 存在镜像变换 $\boldsymbol{\psi}$, 使得 $\boldsymbol{\psi\varphi}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1$. 注意到 $\psi\varphi$ 也是正交变换, 故 $(\psi\varphi)^*(e_1)=(\psi\varphi)^{-1}(e_1)=e_1$, 于是 $V_1=L(e_1)^\perp$ 是 $\boldsymbol{\psi\varphi}$ 的不变子空间. 由归纳假设, $\boldsymbol{\psi\varphi}|_{V_1}=\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\psi}_2\cdots\boldsymbol{\psi}_k$, 其中 $k\leq n-1$, 且每个 $\boldsymbol{\psi}_i$ 都是 V_1 上的镜像变换. 我们可将 ψ_i 扩张到全空间 V 上, 满足 $\psi_i(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1$, 不难验证得到的线性变换都是 V 上的镜像变换 (仍记为 ψ_i). 注意到 $\psi^{-1}=\psi^*=\psi$, 故

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}^{-1}\boldsymbol{\psi}_1\cdots\boldsymbol{\psi}_k=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}_1\cdots\boldsymbol{\psi}_k$$

可表示为不超过 n 个镜像变换之积, 结论得证!

11.5 用正交变换法化简二次型

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型, $\boldsymbol{A}$ 为相伴的实对称矩阵, 则通过非异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(\boldsymbol{x})$ 化为只含平方项的标准型. 然而从几何的层面上看, 上述处理方法并不理想. 主要原因是在考虑几何对象的分类问题时，所作的线性变换通常都要求保持度量, 即在欧氏空间中等价于保持内积或范数, 因为这对应于两组标准正交基之间的基变换, 所以过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必须是正交矩阵 (更严格地还可以进一步要求 $|P|=1$). 因此从几何的层面上看, 我们需要考虑实二次型和实对称矩阵在正交相似 (也是正交合同) 变换下的标准型. 由实对称矩阵的正交相似标准型理论可知, 存在正交矩阵 P, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值. 因此通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(\boldsymbol{x})$ 化为标准型

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

具体地, 用正交变换化简二次型的步骤是:

1. 写出二次型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 及其线性无关的特征向量.
2. 若 λ_i 是 $k(k>1)$ 重特征值, 则用 Gram-Schmidt 正交化方法将它的 k 个线性无关的特征向量正交化. 由于属于不同特征值的特征向量必互相正交, 故单特征值对应的特征向量不必正交化.
3. 假设已经得到 n 个两两正交的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 令 $\boldsymbol{\beta}_i=\frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}(1\leq i\leq n)$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是一组两两正交的单位特征向量. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 就是要求的正交矩阵, 此时 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 注意 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是属于特征值 λ_i 的特征向量.

> 如果实二次型中含有未知参数, 通常我们先求出这个参数, 再按上面的步骤求正交矩阵. 因为在正交变换过程中, 特征值保持不变, 所以常常利用特征值的性质确定参数. 比如常用的有: 特征值之和等于矩阵的迹; 特征值之积等于矩阵的行列式值等.

11.6 实对称矩阵的正交相似标准型

实对称矩阵的正交相似标准型是一个强有力的工具. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正交相似, 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 由于 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}^{-1}$, 故 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 既合同又相似, 因此利用正交相似标准型可以得到比一般的合同标准型更加深入的结果. 下面分 4 个方面阐述相关的内容.

11.6.1 实二次型值的估计以及实对称矩阵特征值的估计

定理 11.6

例 9.52 (Hermite 矩阵版本) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 其特征值为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 求证: 对任意的 n 维复列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 均有

$$\lambda_1 \overline{\boldsymbol{\alpha}}' \boldsymbol{\alpha} \le \overline{\boldsymbol{\alpha}}' \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha} \le \lambda_n \overline{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\alpha},$$

且前一个不等式等号成立的充要条件是 α 属于特征值 λ_1 的特征子空间, 后一个不等式等号成立的充要条件是 α 属于特征值 λ_n 的特征子空间.

定理 11.7

例 9.53 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值分别为

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n, \quad \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n.$$

求证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全落在 $[\lambda_1+\mu_1, \lambda_n+\mu_n]$ 中.

定理 11.8

例 9.54 设 $\lambda = a + bi$ 是 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 和 Hermite 矩阵 $-\mathrm{i}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$ 的特征值分别为

$$\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n, \quad \nu_1 \le \nu_2 \le \cdots \le \nu_n.$$

求证: $\mu_1 \le 2a \le \mu_n, \nu_1 \le 2b \le \nu_n$.

定理 11.9

例 9.55 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n.$$

求证: 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$\sqrt{\mu_1} \le |\lambda| \le \sqrt{\mu_n}.$$

证明

设 α 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 将此式共轭转置可得 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{A}' = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}'$, 再将上述两式乘在一起可得 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = |\lambda|^2\overline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{\alpha}$, 最后由例 9.52 (Hermite 矩阵版本) 即得结论.

定理 11.10

例 9.57 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $\boldsymbol{M}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M})$ 定义为 $\rho(\boldsymbol{M}) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为 n 阶实矩阵, 使得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 为半正定实对称矩阵, 证明: $\rho(\boldsymbol{B})^2 \le \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{C})$.

问题 11.1 例 9.58 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为非负矩阵, 即所有的元素 $a_{ij} \ge 0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求证: 存在某个特征值 $\lambda_j = \rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$, 并可取到 λ_j 的某个特征向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为非负向量, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 的所有元素都大于等于零.

证明

任取一个特征值 λ_k, 使得 $|\lambda_k| = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$, 并取 λ_k 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 即有 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_k\boldsymbol{\alpha}$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_k\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$. 以下不妨设 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 令 $\boldsymbol{\beta} = (|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)'$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 是非负向量且 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$. 注意到 $a_{ij} \ge 0(1 \le i, j \le n)$, 故由例 9.52 可得如下不等式:

$$\begin{aligned} |\lambda_k|\,\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} = |\lambda_k\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A\alpha}| &= \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_ia_j\right| \\ &\le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,|a_i|\,|a_j| = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A\beta} \le \lambda_n\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = \lambda_n\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}, \end{aligned}$$

于是 $\lambda_n \ge |\lambda_k| \ge 0$. 再由假设可知 $\lambda_n = |\lambda_k| = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$, 因此上述不等式取等号. 特别地, $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A\beta} = \lambda_n\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}$, 故由例 9.52 中不等式取等号的充要条件可知, $\boldsymbol{\beta}$ 就是属于特征值 λ_n 的非负特征向量.

11.6.2 正定阵和半正定阵性质的研究

定理 11.11

例 9.60 设 B 是 n 阶半正定实对称矩阵, $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的全体特征值, 证明: 对任意给定的正整数 $k > 1$, 存在一个只和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 有关的实系数多项式 $f(x)$, 满足: $\boldsymbol{B} = f\left(\boldsymbol{B}^k\right)$.

证明

设 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 使得 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{BQ} = \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, 其中 $\mu_i \ge 0$. 设 $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \cdots, \mu_{i_s}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的全体不同特征值, $\lambda_i = \mu_i^k (1 \le i \le n)$, 则 $\lambda_i \ge 0$ 且 $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_s}$ 两两互异. 作 Lagrange 插值多项式 (参考例 4.11):

$$f(x) = \sum_{j=1}^s \mu_{i_j}\frac{(x-\lambda_{i_1})\cdots\left(x-\lambda_{i_{j-1}}\right)\left(x-\lambda_{i_{j+1}}\right)\cdots(x-\lambda_{i_s})}{\left(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_1}\right)\cdots\left(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_{j-1}}\right)\left(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_{j+1}}\right)\cdots\left(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_s}\right)}.$$

显然 $f\left(\lambda_{i_j}\right) = \mu_{i_j}(1 \le j \le s)$, 从而 $f(\lambda_i) = \mu_i (1 \le i \le n)$, 于是

$$\operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\} = \operatorname{diag}\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)\} = f(\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}).$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}f(\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\})\boldsymbol{Q}' \\ &= f(\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}\boldsymbol{Q}') = f\left((\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}\boldsymbol{Q}')^k\right) = f\left(\boldsymbol{B}^k\right) \end{aligned}$$

定理 11.12

例 9.61 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 对任意的正整数 $k > 1$, 必存在唯一的 n 阶半正定实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^k$. 这样的半正定阵 $\boldsymbol{B}$ 称为半正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方根, 记为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{k}}$.

证明

证明设 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i \geq 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\operatorname{diag}\left\{\lambda_1^{\frac{1}{k}}, \lambda_2^{\frac{1}{k}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{k}}\right\}\boldsymbol{P}'$, 则 $\boldsymbol{B}$ 为半正定阵且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^k$, 这就证明了 k 次方根的存在性.
设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方根, 则对 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值 μ_i, μ_i^k 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即 μ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值的非负 k 次方根. 由例 9.60 可知, 存在一个只和 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的非负 k 次方根有关的实系数多项式 $f(x)$, 使得 $\boldsymbol{B} = f\left(\boldsymbol{B}^k\right) = f(\boldsymbol{A})$. 设 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的另一个 k 次方根, 则同上讨论也有 $\boldsymbol{C} = f(\boldsymbol{A})$, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, 这就证明了 k 次方根的唯一性.

定理 11.13

例 9.63 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 为正定阵 (半正定阵) 的充要条件是

$$c_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} > 0 (\geq 0), \quad 1 \leq r \leq n.$$

♡

证明

证明由正定阵 (半正定阵) 的性质可知必要性成立, 下证充分性. 由例 1.47 可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}\lambda + (-1)^n c_n,$$

其中所有的 $c_i > 0 (\geq 0)$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即 $f(\lambda)$ 的根全是实数, 故由例 5.41 (3) 可知, $f(\lambda)$ 的根全大于零 (全大于等于零), 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵 (半正定阵).

若 $\boldsymbol{A}$ 为半正定实对称矩阵, 则存在实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 有了 k 次方根这一工具后, 通常可以取 $C = A^{\frac{1}{2}}$, 这样往往可以有效地化简问题. 这一技巧在后面一些例题中会经常用到.

定理 11.14 ((半) 正定矩阵相乘)

例 9.64 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 半正定或者 $\boldsymbol{B}$ 半正定, 则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全是实数;

(2) 若 A, B 都半正定, 则 AB 的特征值全是非负实数;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 B 正定的充要条件是 AB 的特征值全是正实数.

♡

证明

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 则由例 6.19 可知, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ 有相同的特征值. 注意到 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ 仍是实对称矩阵, 故其特征值全是实数, 于是 AB 的特征值也全是实数. 同理可证 B 为半正定阵的情形.

(2) 采用与 (1) 相同的讨论, 注意到 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ 仍是半正定阵, 故其特征值全是非负实数, 于是 AB 的特征值也全是非负实数.

(3) 采用与 (1) 相同的讨论, 注意到 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ 是正定阵, 故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全是正实数当且仅当 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ 的特征值全是正实数, 这当且仅当 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ 是正定阵, 从而当且仅当 B 是正定阵.

下面两道例题已用合同标准型证明过, 这里用正交相似标准型再证明一次.

定理 11.15

例 8.29 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 证明: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵的充要条件是对任意的 n 阶正定实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) > 0$ (2) $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵的充要条件是对任意的 n 阶半正定实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) \geq 0$.

♡

证明

证法 2 (1) 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵, 则由例 9.64 (3) 可知, $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零, 从而 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})>0$. 再证充分性. 用反证法, 设 $\boldsymbol{A}$ 不是正定阵, 则由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值小于零, 不妨设 $\lambda_1<0$. 设 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 使得.538 . $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}\{N,1,\cdots,1\}\boldsymbol{P}'$, 其中 N 是充分大的正实数, 则 B 为正定阵, 且

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP})\left(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{BP}\right)\right)=N\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n<0,$$

这与假设矛盾. 因此 $\boldsymbol{A}$ 必为正定阵.

(2) 利用例 9.64 (2) 即可证明必要性, 而充分性的证明与 (1) 完全类似.

定理 11.16

例 8.30 设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=0$.

证明

证法 2 必要性是显然的, 下证充分性. 注意到 $0=\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{AB}^{\frac{1}{2}}\right)$, 并且 $\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{AB}^{\frac{1}{2}}$ 为半正定阵, 故 $\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{AB}^{\frac{1}{2}}$ 的主对角元或特征值全为零. 由例 8.70 或实对称矩阵的正交相似标准型可知

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{AB}^{\frac{1}{2}}=\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\right)'\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\right),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{O}$, 从而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{O}$.

定理 11.17

例 8.69 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})\geq|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{n}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}}$, 并求等号成立的充要条件.

定理 11.18

例 9.67 设 A,B 都是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: AB [a]是正定实对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

[a] AB 正定但是不一定对称.

证明

由例 9.64 (3) 可知, $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零, 因此 $\boldsymbol{AB}$ 是正定阵当且仅当它是实对称矩阵, 即 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=BA$.

定理 11.19

例 9.68 设 A,B 都是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $AB=BA$, 求证: $A-B$ 是正定阵的充要条件是 A^2-B^2 是正定阵.

证明

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$, 其中 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定阵. 由例 9.64 (3) 可知, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 的特征值全大于零, 即当且仅当 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 为正定阵.

11.6.3 利用正交相似标准型化简矩阵问题

当矩阵问题的条件和结论在正交相似变换下不改变时，可以将其中一个实对称矩阵化为正交相似标准型来处理，这一技巧与运用相抵、相似以及合同标准型的技巧是类似的. 我们来看 4 道典型的例题.

定理 11.20

例 9.69 设 A,C 都是 n 阶正定实对称矩阵，求证：矩阵方程 $AX+XA=C$ 存在唯一解 B，并且 B 也是正定实对称矩阵.

证明

设 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，其中 $\lambda_i>0$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A\mapsto P'AP, X\mapsto P'XP, C\mapsto \boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ 下不改变，故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为正交相似标准型. 设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij}),\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$ 等价于方程组 $(\lambda_i+\lambda_j)x_{ij}=c_{ij}$，由此可唯一地解出 $x_{ij}=\frac{c_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}(1\le i,j\le n)$，从而矩阵方程有唯一解 $B=\left(\frac{c_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}\right)$. 显然 B 是实对称矩阵，任取 B 的特征值 λ 及其特征向量 α，将等式 $AB+BA=C$ 左乘 α'，右乘 α 可得

$$\alpha'\boldsymbol{A}(B\alpha)+(B\alpha)'A\alpha=\alpha'C\alpha,$$

即有 $2\lambda\alpha'A\alpha=\alpha'C\alpha$，于是 $\lambda=\frac{\alpha'C\alpha}{2\alpha'A\alpha}>0$，因此 B 为正定阵.

本题还可以作如下推广：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶亚正定阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶正定（半正定）实对称矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ 存在唯一解 $\boldsymbol{B}$，并且 $\boldsymbol{B}$ 也是正定（半正定）实对称矩阵. 矩阵方程解的存在唯一性可由例 6.91 得到，正定（半正定）的证明类似于上面的讨论. 另外，本题的逆命题并不成立，即若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵，$\boldsymbol{B}$ 为正定（半正定）阵，则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 不一定是正定（半正定）阵. 例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}$，其中 $0\le\varepsilon\ll 1$. 请读者自行验证具体的细节.

定理 11.21

例 9.70 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，证明：若 $\boldsymbol{A}$ 半正定，则存在正交矩阵 P，使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0\},\quad \boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{0,\cdots,0,\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}.$$

证明

由于 $\boldsymbol{A}$ 半正定，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，其中 $\lambda_i>0(1\le i\le r),\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A\mapsto Q'AQ, B\mapsto Q'BQ$ 下不改变，故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}$ 为正交相似标准型 $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，则由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 可得 $(\lambda_i+\lambda_j)b_{ij}=0$. 当 i,j 至少有一个落在 $[1,r]$ 中时，有 $\lambda_i+\lambda_j>0$，从而 $b_{ij}=0$，于是 $\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}_{n-r}\}$，其中 $\boldsymbol{B}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 右下角的 $n-r$ 阶主子阵. 由于 $\boldsymbol{B}_{n-r}$ 是一个实对称矩阵，故存在 $n-r$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{R}'\boldsymbol{B}_{n-r}\boldsymbol{R}=\operatorname{diag}\{\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}$. 令 $\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{R}\}$，则 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶正交矩阵，使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0\},\quad \boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{0,\cdots,0,\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}.$$

定理 11.22

例 9.71 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称矩阵，满足 $\boldsymbol{AS}+\boldsymbol{SA}=\boldsymbol{O}$. 证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>0$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{S})=n$.

证明

由于 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$, 其中 $\lambda_i>0(1\le i\le r),\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}\mapsto\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}$ 为正交相似标准型 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\right\}$. 设 $\boldsymbol{S}=\left(b_{ij}\right)$, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\left(\lambda_i+\lambda_j\right)b_{ij}=0$. 当 i,j 至少有一个落在 $[1,r]$ 中时, 有 $\lambda_i+\lambda_j>0$, 从而 $b_{ij}=0$, 于是 $\boldsymbol{S}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{O},\boldsymbol{S}_{n-r}\right\}$, 其中 $\boldsymbol{S}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 右下角的 $n-r$ 阶主子阵. 注意到 $\boldsymbol{S}_{n-r}$ 是一个实反对称矩阵, 故由例 8.17 可知 $\left|\boldsymbol{S}_{n-r}\right|\ge 0$, 从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|=\left|\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{S}_{n-r}\right\}\right|=|\boldsymbol{\Lambda}|\cdot\left|\boldsymbol{S}_{n-r}\right|\ge 0.$$

因此, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>0$ 当且仅当 $\left|\boldsymbol{S}_{n-r}\right|>0$, 即当且仅当 $\operatorname{r}\left(\boldsymbol{S}_{n-r}\right)=n-r$, 这也当且仅当 $\operatorname{r}(\boldsymbol{A})+\operatorname{r}(\boldsymbol{S})=\operatorname{r}(\boldsymbol{\Lambda})+\operatorname{r}\left(\boldsymbol{S}_{n-r}\right)=r+(n-r)=n$.

问题 11.2 第 2 章解答题 11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵, 证明: $\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2\right)\le\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)$, 并求等号成立的充要条件.

证明

证法 2 设 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A\mapsto P'AP,B\mapsto P'BP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}$ 为正交相似标准型 $\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$. 设 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$, 则经计算可知. 541 .

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)-\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2\right)&=\sum_{i,j=1}^n\lambda_i^2b_{ij}^2-\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_jb_{ij}^2\\&=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2-2\lambda_i\lambda_j\right)b_{ij}^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2b_{ij}^2\ge 0,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\lambda_ib_{ij}=\lambda_jb_{ij}(1\le i<j\le n)$, 这也当且仅当 $\lambda_ib_{ij}=\lambda_jb_{ij}(1\le i,j\le n)$, 即当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 成立.

11.6.4 可对角化判定准则 7：相似于实对称矩阵

定理 11.23

例 9.72 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

证明

证法 1 注意到 $\boldsymbol{B}$ 正定, 故由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 可得

$$\boldsymbol{B}^{\frac12}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-\frac12}=\boldsymbol{B}^{-\frac12}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}^{\frac12}=\left(\boldsymbol{B}^{\frac12}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-\frac12}\right)',$$

即 $\boldsymbol{B}^{\frac12}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-\frac12}$ 是实对称矩阵, 又 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}^{\frac12}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-\frac12}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

证法 2 设 $V=\mathbb{R}^n$, 取由正定阵 B 定义的内积, φ 为由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法定义的线性变换. 由条件 $A'B=BA$ 经过简单的计算不难验证 $(\varphi(x),y)=(x,\varphi(y))$ 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 成立, 因此 φ 是 V 上的自伴随算子, 从而可对角化, 于是 $\boldsymbol{A}$ 也可对角化.

注若 $\boldsymbol{B}$ 只是半正定阵, 则例 9.72 的结论一般并不成立. 例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

定理 11.24

例 9.73 设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: AB 可对角化.

证明

证明设 $\boldsymbol{C}$ 为非异实矩阵, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 相似于

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}')^{-1}=(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\right).$$

注意到 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1})'$ 仍然是半正定阵, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}$ 是合同标准型 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}$. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$ 为对应的分块, 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.
为 $\boldsymbol{B}$ 半正定, 故由例 8.75 可得 $\operatorname{r}(\boldsymbol{B}_{11}:\boldsymbol{B}_{12})=\operatorname{r}(\boldsymbol{B}_{11})$, 于是存在实矩阵 $\boldsymbol{M}$, 使得 $\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{M}$. 考虑如下相似变换:

$$\begin{pmatrix}I&M\\O&I\end{pmatrix}AB\begin{pmatrix}I&-M\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&M\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-M\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&O\\O&O\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{AB}$ 相似于 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}_{11},\boldsymbol{O}\}$, 这是一个实对称矩阵, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 可对角化.

由例 9.64 (2) 或上述证明中 $\boldsymbol{B}_{11}$ 的半正定性可知, $\boldsymbol{AB}$ 相似于主对角元全大于等于零的对角矩阵. 另外, 若 A 是正定阵, B 是实对称矩阵, 则 AB 也可对角化. 事实上, AB 相似于 $A^{-\frac{1}{2}}(AB)A^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$, 这是一个实对称矩阵, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 可对角化. 又若 A 是半正定阵, B 是实对称矩阵, 则 AB 一般不可对角化. 例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 不可对角化.

定理 11.25 (三对角矩阵的对角化可能)

例 9.74 设 n 阶实矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&&&\\a_{21}&a_{22}&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\&&&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{pmatrix},$$

求证: 若 $a_{i,i+1}a_{i+1,i}\geq 0(1\leq i\leq n-1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数; 若 $a_{i,i+1}a_{i+1,i}>0(1\leq i\leq n-1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上可对角化.

证明

在三对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 若存在某个 $a_{i,i+1}=0$ 或 $a_{i+1,i}=0$, 则 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda I-A_1||\lambda I-A_2|$, 其中 A_1,A_2 是满足相同条件的低阶三对角矩阵. 不断这样做下去, 故我们只要证明若 $a_{i,i+1}a_{i+1,i}>0(1\leq i\leq n-1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上可对角化即可. 考虑如下相似变换: 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行乘以 $\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}$, 再将第二列乘以 $\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}}$, 这样第 $(1,2)$ 元素和第 $(2,1)$ 元素都变成了 $\sqrt{a_{12}a_{21}}$; 第 $(1,1)$ 元素和第 $(2,2)$ 元素保持不变; 第 $(2,3)$ 元素变为 $a_{23}\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}$, 第 $(3,2)$ 元素变为 $a_{32}\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}}$. 一般地, 令 $d_{i+1}=\sqrt{\frac{a_{12}a_{23}\cdots a_{i,i+1}}{a_{21}a_{32}\cdots a_{i+1,i}}}$, 依次将第 $i+1$ 行乘以 d_{i+1}, 再将第 $i+1$ 列乘以 $d_{i+1}^{-1}(1\leq i\leq n-1)$, 最后可得到 $\boldsymbol{A}$ 实相似于一个实对称矩阵, 从而 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上可对角化.

定理 11.26 (三对角阵的可对角化问题)

例 6.65 设 a, b, c 为复数且 $bc \neq 0$, 证明下列 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

证明

证法 2 简记三对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}(a, b, c)$, 要证 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 只要证 $\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{I}_n$ 可对角化即可, 故不妨设 $a = 0$. 由于 $bc \neq 0$, 故按照上面的方法, 依次将第 $i+1$ 行乘以 $\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^i}$, 再将第 $i+1$ 列乘以 $\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^i}(1 \leq i \leq n-1)$, 则可得到 $\boldsymbol{A}$ 复相似于三对角矩阵 $\boldsymbol{T}(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) = \sqrt{bc} \cdot \boldsymbol{T}(0, 1, 1)$. 因为三对角矩阵 $\boldsymbol{T}(0, 1, 1)$ 是实对称矩阵, 故 $\sqrt{bc} \cdot \boldsymbol{T}(0, 1, 1)$ 可对角化, 从而 $\boldsymbol{A}$ 也可对角化.

11.7 同时合同对角化

定理 11.27

例 9.75 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是同阶实对称矩阵, 求证: 必存在可逆矩阵 C, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_n, \quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值.

证明

因为 A 正定, 故存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP = I_n$. 由于 $P'BP$ 仍为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q, 使得

$$\boldsymbol{Q}'\left(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}. \tag{11.1}$$

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 满足上式的要求. 注意到

$$\boldsymbol{C}'(\lambda\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \cdots, \lambda - \lambda_n\},$$

故 λ_i 是多项式 $|\lambda\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$ 的根, 又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以也是 $\left|\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$ 的根, 即为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值.

定理 11.28

例 9.76 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定实对称矩阵. 求证:

$$|A + B| \geq |A| + |B|,$$

等号成立的充要条件是 $n = 1$ 或当 $n \geq 2$ 时, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

证明

由例 9.75 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n,\quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

因为 B 半正定, 故 $C'BC$ 也半正定, 从而 $\lambda_i\geq 0$. 注意到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{C}'||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|&=|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)\\&\geq 1+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}'|(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)|\boldsymbol{C}|,\end{aligned}$$

故有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$, 等号成立当且仅当 $n=1$ 或当 $n\geq 2$ 时, 所有的 $\lambda_i=0$, 这也当且仅当 $n=1$ 或当 $n\geq 2$ 时, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 9.76 也可通过与例 8.18 和例 8.45 完全类似的讨论来得到, 具体的细节留给读者完成. 另外, 利用摄动法可将例 9.76 推广到两个矩阵都是半正定阵的情形. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 则对任意的正实数 t, $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 是正定阵, 因此由例 9.76 可得 $|\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n|+|\boldsymbol{B}|$, 令 $t\to 0+$ 即得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. 当然, 也可以分情况讨论来证明. 若 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$, 则结论显然成立; 若 $|\boldsymbol{A}|>0$ 或 $|\boldsymbol{B}|>0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 正定, 直接利用例 9.76 即得结论.

定理 11.29

例 9.77 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定实对称矩阵, 求证:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq 2^n|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}},$$

等号成立的充要条件是 $A=B$.

证明

由例 9.75 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n,\quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

因为 B 正定, 故 $C'BC$ 也正定, 从而 $\lambda_i>0$. 注意到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{C}'||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|&=|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)\\&\geq 2^n\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}=2^n\,|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}\,|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}=|\boldsymbol{C}'|\left(2^n|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}\right)|\boldsymbol{C}|,\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq 2^n|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}$, 等号成立当且仅当所有的 $\lambda_i=1$, 也当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 9.77 也可通过摄动法或分情况讨论推广到两个矩阵都是半正定阵的情形, 具体的细节留给读者完成.

定理 11.30

例 9.78 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{B}$, 求证: $B^{-1}\geq\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明

由例 9.75 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n,\quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

因为 B 正定, 故 $C'BC$ 也正定, 从而 $\lambda_i>0$. 一方面, 我们有

$$\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n\},$$

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 半正定, 故 $\lambda_i\le 1$, 从而 $\lambda_i^{-1}\ge 1$. 另一方面, 我们有

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}')^{-1}=\boldsymbol{I}_n,\quad \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{C}')^{-1}=\operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\},$$

于是

$$\boldsymbol{C}^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'=\operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1}-1,\lambda_2^{-1}-1,\cdots,\lambda_n^{-1}-1\}$$

为半正定阵, 因此 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是半正定阵.

定理 11.31

例 9.79 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\ge\boldsymbol{B}$, 求证: $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\ge\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$.

证明 由例 9.75 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{I}_n,\quad \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

因为 $\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ 正定, 故 $(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^{-1}$ 也正定, 从而 $\lambda_i>0$. 设正定阵 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{D}=(d_{ij})$, 则 $d_{ii}>0$. 注意到 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}$, 故有

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})^2-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C})^2=\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{C}\ge\boldsymbol{O},$$

于是 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}$ 是半正定阵, 从而其 (i,i) 元素 $d_{ii}(1-\lambda_i^2)\ge 0$, 故 $0<\lambda_i\le 1$. 因此

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}'\operatorname{diag}\{1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n\}\boldsymbol{C}\ge\boldsymbol{O},$$

从而结论得证.

定理 11.32

例 9.80 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 其中 A 正定且 B 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均半正定, 求证: $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的所有根全落在 $[0,1]$ 中, 并且 $|\boldsymbol{A}|\ge|\boldsymbol{B}|$.

证明 证明由例 9.75 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n,\quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

其中 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值, 即是 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的根. 因为 $\boldsymbol{B}$ 半正定, 故 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 也半正定, 从而 $\lambda_i\ge 0$. 因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 半正定, 故 $\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n\}$ 也半正定, 从而 $\lambda_i\le 1$, 因此 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的所有根 λ_i 全落在 $[0,1]$ 中. 由 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\le 1$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\ge|\boldsymbol{B}|$. 另外, 这一不等式也可由例 9.76 的半正定版本得到.

例 9.76 是一个重要的不等式, 下面我们来看它的两个应用.

定理 11.33

例 8.56 设 A,D 是方阵, $M=\begin{pmatrix}A & B\\ B' & D\end{pmatrix}$ 是正定实对称矩阵, 求证: $|M|\le|A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B=O$.

证明 证法 2 注意到 $\boldsymbol{A}$ 正定, 故可对题中矩阵进行下列对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix},$$

得到的矩阵仍正定, 从而 $D-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是正定阵. 因为第三类分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & D \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|.$$

注意到 $\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是半正定阵, 故由例 9.76 可得

$$|D| \geq \left|D-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| + \left|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \geq \left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|,$$

上述不等式的两个等号都成立当且仅当 $B'A^{-1}B=O$. 由 $O=B'A^{-1}B=\left(\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\right)'\left(\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\right)$ 取迹后可得 $\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 于是上述不等式的两个等号都成立当且仅当 $B=O$. 综上所述, 我们有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \leq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|,$$

等号成立当且仅当 $B=O$.

定理 11.34

例 9.81 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 实矩阵, 又假设它们都是行满秩的. 令 $M=AB'(BB')^{-1}BA'$, 求证: M 和 $AA'-M$ 都是半正定阵, 并且 $|M|\leq|AA'|$.

证明 证明设 $C=\binom{A}{B}$, 则 $CC'=\binom{A}{B}(A',B')=\begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB' \end{pmatrix}$ 是半正定阵. 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是行满秩阵, 故由第 8 章解答题 6 可得 $\boldsymbol{AA}',\boldsymbol{BB}'$ 都是正定阵, 从而 $(BB')^{-1}$ 也是正定阵, 于是 $M=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'(BB')^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'$ 是半正定阵. 对矩阵 $\boldsymbol{CC}'$ 实施对称分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AA'-AB'(BB')^{-1}BA' & O \\ BA' & BB' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AA'-M & O \\ O & BB' \end{pmatrix},$$

由此即得 $\boldsymbol{AA}'-\boldsymbol{M}$ 是半正定阵. 再由例 9.76 的半正定版本或例 9.80 即得 $|\boldsymbol{M}|\leq|AA'|$.

例 9.75 的结论一般并不能推广到一个是半正定阵, 另一个是实对称矩阵的情形. 例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 经过简单的计算可知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不能同时合同对角化. 不过下面的命题告诉我们, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是半正定阵, 则它们可以同时合同对角化.

定理 11.35

11.8 Schur 定理

对于一般的复 (实) 矩阵, 我们当然不能期望它酉相似 (正交相似) 于对角矩阵. 但对于复矩阵, 我们可以证明它必酉相似于上三角矩阵, 这就是著名的 Schur 定理. 下面我们给出一个简洁的代数证明, 其几何证明请参考教材 [1].

定理 11.36

例 9.85 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 求证: 存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 是上三角矩阵.

证明

证明由例 6.39 9.2可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}$ 是上三角矩阵. 又由例 9.13 11.2可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}$, 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{R})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{R})^{-1}=\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^{-1}\right)\boldsymbol{U}^{-1}.$$

因为上三角矩阵的逆阵是上三角矩阵, 上三角矩阵的乘积是上三角矩阵, 故 RMR^{-1} 仍是上三角矩阵, 从而 $U^{-1}AU=RMR^{-1}$ 是上三角矩阵.

定理 11.37

例 9.86 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 虚数 $a+b\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i}$ 是对应的特征向量, 其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是实列向量. 求证: $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 必线性无关. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵, 则 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 相互正交且长度相同 (取实列向量空间的标准内积).

定理 11.38

例 9.87 证明: n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 必正交相似于下列分块上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boldsymbol{A}_r & & & & \\ & & & c_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & c_k \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(1\le i\le r)$ 是二阶实矩阵且 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征值具有 $a_i\pm b_i\mathrm{i}\,(b_i\ne0)$ 的形状, $c_j(1\le j\le k)$ 是实数.

证明

证明对阶数 n 进行归纳. 当 $n=0$ 时表示归纳过程已结束, 当 $n=1$ 时结论显然成立. 现设对阶小于 n 的矩阵结论成立, 下分两种情况对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行讨论.

首先, 假设 $\boldsymbol{A}$ 有实特征值 λ. 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的特征值, 故 λ 也是 $\boldsymbol{A}'$ 的特征值. 将 $\boldsymbol{A}$ 看成是 n 维实列向量空间 $\mathbb{R}^n$ (取标准内积) 上的线性变换, 显然 $\boldsymbol{A}'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随. 设 $\boldsymbol{e}_n$ 是 $\boldsymbol{A}'$ 的属于特征值 λ 的单位特征向量, 则 $L(\boldsymbol{e}_n)^\perp$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间. 将 $\boldsymbol{A}$ 限制在 $L(\boldsymbol{e}_n)^\perp$ 上, 由归纳假设, 存在 $L(\boldsymbol{e}_n)^\perp$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$, 使得线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵. 于是在标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下, 线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的表示矩阵就是要求的矩阵 C. 因为线性变换 $\boldsymbol{A}'$ 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{C}'$, 故由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{e}_n=\lambda\boldsymbol{e}_n$ 可知 $\lambda=c_k$.

其次, 假设 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值, 并设 $a+b\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的虚特征值. 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的特征值, 故 $a+b\mathrm{i}$ 也是 $\boldsymbol{A}'$ 的特征值. 假设 $\boldsymbol{A}'$ 的属于特征值 $a+b\mathrm{i}$ 的特征向量为 $\alpha+\beta\mathrm{i}$, 其中 α,β 是实列向量, 则有

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}).$$

比较实部和虚部得到

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}-b\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}=b\boldsymbol{\alpha}+a\boldsymbol{\beta}.$$

由例 9.86 可知, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 必线性无关. 设 $U=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则上式表明 U 是线性变换 $\boldsymbol{A}'$ 的不变子空间, 于是 $U^\perp$ 是 $\boldsymbol{A}'$ 的伴随 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间. 注意到 $\dim U^\perp=n-2$, 故由归纳假设, 存在 $U^\perp$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-2}$, 使得线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_{r-1}\end{pmatrix}.$$

在 U 中选取一组标准正交基 e_{n-1},e_n, 则在标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下, 线性变换 A 的表示矩阵为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & *\\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{A}_{r-1} & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix}.$$

由于线性变换 $\boldsymbol{A}'$ 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{D}'$, 故 $\boldsymbol{A}_r$ 是 $\boldsymbol{A}'$ 在 U 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n$ 下的表示矩阵. 又 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}'$ 在 U 的基 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 下的表示矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}_r$ 相似于 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 从而它的特征值也为 $a\pm b\mathrm{i}$.

定理 11.39

例 9.89 设 A,B 是实方阵且分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 是实正规矩阵, 求证: $C=O$ 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 也是正规矩阵.

证明

由已知

$$\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A' & O\\ C' & B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A' & O\\ C' & B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{AA}'+\boldsymbol{CC}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$. 由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}'+\boldsymbol{CC}')=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}')$, 故可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{CC}')=0$, 再由 $\boldsymbol{C}$ 是实矩阵可推出 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A},\boldsymbol{BB}'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$.

利用例 9.87 11.38和例 9.89 11.39的结论, 可以给出实正规矩阵正交相似标准型的一个代数证明, 它和教材 [1] 中的纯几何证明完全不同.

定理 11.40

例 9.90 设 A 是 n 阶实正规矩阵, 求证: 存在正交矩阵 P, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_r, c_{2r+1}, \cdots, c_n\},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} (1 \le i \le r)$ 是二阶实矩阵, $c_j (2r+1 \le j \le n)$ 是实数.

证明

由例 9.87, $\boldsymbol{A}$ 正交相似于例 9.87 中的分块上三角矩阵, 再反复用例 9.89 的结论可知这是个分块对角矩阵. 又因为每一块都是正规矩阵, 故或是二阶正规矩阵 $\boldsymbol{A}_i$, 或是实数 c_j (一阶矩阵). 对于二阶正规矩阵的情形, 由例 9.86 的证明过程可知, 若设 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征值为 $a_i + b_i\mathrm{i}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\mathrm{i}$, 令 $\boldsymbol{P}_i = \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)$, 则 $\boldsymbol{P}_i$ 为二阶正交矩阵, 且 $\boldsymbol{P}_i'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$.

11.9 复正规算子与复正规矩阵

11.10 实正规矩阵与实正规算子

定理 11.41

例 9.106 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充要条件是存在某个实系数多项式 $g(x)$, 使得 $\varphi^* = g(\boldsymbol{\varphi})$.

证明

- 证法 1 先证充分性. 若 $\varphi^*=g(\varphi)$, 则 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$ 显然成立. 再证必要性. 设 φ 在 V 的某组标准正交基下的表示矩阵为正交相似标准型
$$A=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_r & b_r\\ -b_r & a_r\end{pmatrix},c_{2r+1},\cdots,c_n\right\}$$
其中 a_i,b_i,c_j 都是实数并且 $b_i\neq 0$. 由线性变换与矩阵的一一对应, 我们只要证明存在某个实系数多项式 $g(x)$, 使得 $A'=g(A)$ 即可. 由于分块对角矩阵主对角线上的分块调换次序是一个正交相似变换 (这也等价于调换基向量的次序), 故不妨将完全相同的分块放在一起, 于是可假设 A 已是如下形状:
$$A=\operatorname{diag}\{B_1,\cdots,B_s,B_{s+1},\cdots,B_t\}$$
其中 $B_i=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{pmatrix}\right\},1\leq i\leq s;B_j=\operatorname{diag}\{c_j,\cdots,c_j\},s+1\leq j\leq t.$ 注意到 B_i 适合多项式 $g_i(x)=(x-a_i)^2+b_i^2(1\leq i\leq s),B_j$ 适合多项式 $g_j(x)=x-c_j(s+1\leq j\leq t)$, 故 $\{g_1(x),g_2(x),\cdots,g_t(x)\}$ 是一组两两互素的多项式. 令 $f_i(x)=2a_i-x(1\leq i\leq s),f_j(x)=x(s+1\leq j\leq t)$, 则容易验证 $B_i'=f_i(B_i)\ (1\leq i\leq s),B_j'=f_j(B_j)\ (s+1\leq j\leq t)$, 因此由例 7.31 可知, 存在实系数多项式 $g(x)$, 使得 $A'=g(A)$.
- 证法 2 充分性同证法 1 , 下证必要性. 设 A 是 φ 在某组标准正交基下的表示矩阵, 我们只要证明存在某个实系数多项式 $g(x)$, 使得 $A'=g(A)$ 即可. 由于 A 是实正规矩阵, 故可以自然地看成是复正规矩阵, 由例 9.95 可知, 存在复系数多项式 $f(x)$, 使得 $A'=f(A)$. 将 $f(x)$ 各项系数的实部和虚部分开得到两个实系数多项式 $g(x),h(x)$, 使得 $f(x)=g(x)+ih(x)$, 于是可得 $A'=g(A)+ih(A)$, 从而只能是 $A'=g(A),h(A)=O$, 结论得证.

定理 11.42

例 9.107 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充要条件是 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ω 是正交算子, ψ 是半正定自伴随算子, 且 $\omega\psi=\psi\omega$.

证明

充分性的证明同例 9.96 充分性的证明, 下证必要性. 设 φ 在 V 的某组标准正交基下的表示矩阵为正交相似标准型
$$A=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_r & b_r\\ -b_r & a_r\end{pmatrix},c_{2r+1},\cdots,c_n\right\},$$
其中 a_i,b_i,c_j 都是实数并且 $b_i\neq 0$. 由线性变换与矩阵的一一对应, 我们只要证明存在乘法可交换的正交矩阵 P 和半正定实对称矩阵 S, 使得 $A=PS$ 即可. 令 $k_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2},a_i=k_i\cos\theta_i,b_i=k_i\sin\theta_i,1\leq i\leq r$. 若 $c_j=0$, 则令 $k_j=0,d_j=1$ 或 -1 ; 若 $c_j\neq 0$, 则令 $k_j=|c_j|,d_j=\frac{c_j}{|c_j|},2r+1\leq j\leq n$. 令
$$P=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r\\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r\end{pmatrix},d_{2r+1},\cdots,d_n\right\},$$
$$S=\operatorname{diag}\{k_1,k_1,\cdots,k_r,k_r,k_{2r+1},\cdots,k_n\},$$
则容易验证这就是所要求的分解.

定理 11.43

例 9.109 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, ψ 是 V 上某一线性算子, 满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 求证: $\varphi^*\psi=\psi\varphi^*$.

证明

- 证法 1 我们引用一下教材 [1] 中证明实正规算子正交相似标准型的几何方法. 设 $g(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式, 则 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots g_t(x)$ 在实数域上可以分解为互异的首一不可约多项式 $g_i(x)$ 的乘积. 令 $V_i=\operatorname{Ker} g_i(\boldsymbol{\varphi})$, 则
$$V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_t,$$
$\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{\varphi}|_{V_i}$ 是 V_i 上的正规算子且极小多项式为 $g_i(x)$. 若 $g_i(x)=(x-a_i)^2+b_i^2$, 则存在 V_i 的标准正交基, 使得 φ_i 的表示矩阵为 $\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i\end{pmatrix}\right\}$; 若 $g_i(x)=x-c_i$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_i=c_i\boldsymbol{I}_{V_i}$. 具体的证明请参考教材 [1] §9.7. 回到本题的证明, 由于 $\boldsymbol{\varphi}\psi=\psi\boldsymbol{\varphi}$, 故易证 V_i 也是 ψ 的不变子空间. 令 $\psi_i=\psi|_{V_i}$, 则有 $\varphi_i\psi_i=\psi_i\varphi_i$. 若 $g_i(x)=(x-a_i)^2+b_i^2$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 满足例 9.108 的条件, 从而 $\boldsymbol{\varphi}_i^*=\left(a_i^2+b_i^2\right)\boldsymbol{\varphi}_i^{-1}$, 于是由 $\boldsymbol{\varphi}_i^{-1}\boldsymbol{\psi}_i=\boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^{-1}$ 即得 $\boldsymbol{\varphi}_i^*\boldsymbol{\psi}_i=\boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$; 若 $g_i(x)=x-c_i$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{\varphi}_i^*=c_i\boldsymbol{I}_{V_i}$, 此时 $\varphi_i^*\psi_i=\psi_i\varphi_i^*$ 显然成立. 因为 $\varphi^*\psi=\psi\varphi^*$ 在每一个 V_i 上都成立, 所以在 V 上也成立. 我们也可以平行地给出代数的证明, 类似于例 9.106 证法 1 中的讨论, 可假设 φ 在某组标准正交基下的表示矩阵已是如下形状的标准型:
$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_s,\boldsymbol{B}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{B}_t\}$$
其中 $\boldsymbol{B}_i=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i\end{pmatrix}\right\}, 1\le i\le s; \boldsymbol{B}_j=\operatorname{diag}\left\{c_j,\cdots,c_j\right\}, s+1\le j\le t.$ 设 $\boldsymbol{\psi}$ 在同一组基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 因为 $\boldsymbol{B}_i$ 的特征值互不相同, 故由例 6.90 可知, $\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_t\}$, 从而 $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{B}_i$. 注意到 $\boldsymbol{B}_i'=\left(a_i^2+b_i^2\right)\boldsymbol{B}_i^{-1}(1\le i\le s), \boldsymbol{B}_j'=\boldsymbol{B}_j(s+1\le j\le t)$, 故可得 $\boldsymbol{B}_i'\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{B}_i'$, 于是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'$, 从而 $\varphi^*\psi=\psi\varphi^*$ 成立.
- 证法 2 由例 9.106 可知, 存在实系数多项式 $g(x)$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^*=g(\boldsymbol{\varphi})$. 因为 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 ψ 乘法可交换, 所以 φ^* 也与 ψ 乘法可交换.

11.11 实正规矩阵的正交相似标准型

11.12 同时正交对角化与同时正交标准化

在 §6.3 中, 我们讨论过乘法交换性诱导的同时上三角化和同时对角化的问题, 接下来我们将讨论这样两个问题:

1. 同时正交 (酉) 对角化对实对称矩阵 (复正规矩阵) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 何时存在正交矩阵 (酉矩阵) $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{BP}$ 都是对角矩阵 ($\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{AP}$ 和 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{BP}$ 都是对角矩阵). 这个问题的几何版本是: 对欧氏空间上的自伴随算子 (酉空间上的正规算子) φ 和 ψ, 该内积空间中何时存在一组由它们的公共特征向量构成的标准正交基. 例 9.123 回答了这个问题, 例 9.124 将这一结论推广到多个矩阵或线性变换的情形. 处理这类问题的关键是要找出线性变换的公共特征向量, 然后使用归纳法.
2. 同时正交标准化对实正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 何时存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{BP}$ 都是正交相似标准型. 例 9.125 回答了这个问题, 例 9.126 将这一结论推广到多个矩阵或线性变换的情形. 因为实矩阵未必有实特征值和实特征向量, 所以我们采用实与复之间相互转换的方法来解决这个问题. 这也是解决实矩阵或实空间问题的一个常用方法, 在 §9.11 实正规算子和实正规矩阵的有关讨论中经常用到它.

定理 11.44

例 9.125 设 A, B 是两个 n 阶实正规矩阵且 $AB = BA$, 求证: 存在正交矩阵 P, 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为正交相似标准型.

证明

同上可将 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 看成是 n 维列向量空间 (取标准内积) 上的线性变换. 对维数 n 进行归纳. 当 $n = 0$ 时表示归纳过程已经结束, 当 $n = 1$ 时结论显然成立. 假设对维数小于 n 的空间结论成立, 现考虑 n 维空间的情形. 因为 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量, 但未必是实向量. 如果是实向量, 可设它的长度为 1 , 记之为 $\boldsymbol{e}_1$. 由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是正规算子, 故由例 9.28 可知, $\boldsymbol{e}_1$ 也是 $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ 的特征向量, 从而由例 9.26 可知, $L(\boldsymbol{e}_1)^\perp$ 是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的不变子空间, 并且线性变换 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 限制在 $L(\boldsymbol{e}_1)^\perp$ 上仍为乘法可交换的正规算子, 从而由归纳假设即得结论. 因此我们只需讨论复特征向量的情形. 设这个公共的特征向量为 $\alpha = u + v\mathrm{i}$, 其中 u, v 都是实向量, 再设

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\mathrm{i}) = (a_1 + b_1\mathrm{i})(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\mathrm{i}), \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{i}) = (a_2 + b_2\mathrm{i})(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{i}).$$

由例 9.86 的证明过程及其结论, 我们可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u} - b_1\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u} + a_1\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u} + b_1\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}'\boldsymbol{v} = -b_1\boldsymbol{u} + a_1\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = a_2\boldsymbol{u} - b_2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = b_2\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}'\boldsymbol{u} = a_2\boldsymbol{u} + b_2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}'\boldsymbol{v} = -b_2\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v};$$

并且 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. 不妨假设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是单位向量, 于是在二维子空间 $L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 上, 线性变换 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 下的表示矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

设 $W = L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^\perp$, 因为 $L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 也是 $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ 的不变子空间, 故由例 9.26 可知, W 是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的不变子空间, 并且线性变换 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 限制在 W 上仍为乘法可交换的正规算子. 由归纳假设, 存在 W 的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_3, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 使得 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在这组基下的表示矩阵同时为正交相似标准型. 令 $e_1 = u, e_2 = \boldsymbol{v}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的表示矩阵同时为正交相似标准型.

例 9.125 的几何版本是: 设 φ, ψ 是 n 维欧氏空间 V 上两个乘法可交换的正规算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使得 φ, ψ 在这组基下的表示矩阵同时为正交相似标准型. 我们也可以沿着教材 [1] 中建立实正规算子正交相似标准型理论的主线, 给出上述结论的纯几何证明. 下面的例题是例 9.125 关于个数的推广, 其证明与例 9.125 的证明完全类似. 上述两个证明细节留给读者自行完成.

11.13 谱分解、极分解、奇异值分解及其应用

11.13.1 谱分解及其应用

11.13.2 极分解及其应用

11.13.3 奇异值分解及其应用

11.13.4 广义逆及其应用

第十二章 阶的概念以及大 O 与小 o 的运算

12.1 一些黑话

定义 12.1 (小 o)

若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $f(x)$ 对于 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷小量，记为

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to x_0.$$

定义 12.2 (等价)

若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 对于 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是等价的，记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0\text{或}f(x)=g(x)(1+o(1)),\quad x\to x_0.$$

定义 12.3 (大 O)

设 $g(x)>0$，若存在常数 $A>0$，使得

$$|f(x)|\le Ag(x),\quad x\in(a,b)$$

成立，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的强函数，记为

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\in(a,b).$$

如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在有限，则存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)=O(1),\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在有限，则存在 $A>0$，使得

$$f(x)=O(1),\quad |x|>A.$$

在定义12.2中，常数 A 被称作“大 O 常数”，它与变量 x 无关，在一般情况下，这点不做特别说明. 但是“大 O 常数”可能与参变量有关，例如，在

$$\sin xy=O(1)$$

中，“大 O 常数”与参数 y 无关，但在

$$\sin xy=O(x)$$

中，“大 O 常数”与参数 y 有关，此时我们常用 $O_y(\cdots)$ 代替 $O(\cdots)$，以表明“大 O 常数”与参数 y 有关，例如

$$\sin xy = O_y(x).$$

定义 12.4 (同阶)

假设当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大（小）量，且存在常数 $A>0, B>0$，使得

$$Af(x) \leq g(x) \leq Bf(x), \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

成立，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是同阶无穷大（小）量，记为

$$f(x) \approx g(x), \quad x \to x_0.$$

笔记 对于 $x \to -\infty, x \to +\infty$ 以及 $x \to \infty$ 的情形，同阶无穷大（小）量的定义类似.

例题 12.1. 对于指数，对数的估阶说明

设 $\epsilon > 0$ 及 A 是任意常数，则对于任意的 $a>0$，有

$$x^A = o((1+a)^{\epsilon x}), \quad x \to \infty, \tag{12.1}$$

$$(\log x)^A = o(x^{\epsilon}), \quad x \to \infty, \tag{12.2}$$

$$(f(x))^A = o(e^{\epsilon f(x)}), \quad x \to \infty, \tag{12.3}$$

其中 $f(x)$ 是单调上升的函数，且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

12.2 大 O 与小 o 的运算

性质 运算基本法则

1. 若 $f(x)$ 是无穷大量，$x \to x_0$，并且 $\varphi(x) = O(1)$，则
$$\varphi(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$
2. 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = O(\psi)$，则
$$f(x) = O(\psi).$$
3. 若 $f(x) = O(\varphi), \phi = o(\psi)$，则
$$f(x) = o(\psi(x)).$$
4. $O(f) + O(g) = O(f+g)$.
5. $O(f)O(g) = O(fg)$.
6. $o(1)O(f) = o(f)$.
7. $O(1)o(f) = o(f)$.
8. $O(f) + o(f) = O(f)$.
9. $o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.
10. $o(f)o(g) = o(fg)$.

11. $\{O(f)\}^k = O_k(f^k), k \in \mathbb{N}$.
12. $\{o(f)\}^k = o(f^k)$.
13. $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$.
14. $f = o(g), g \sim \varphi \Rightarrow g \sim \varphi \pm f$.
15. 若 $f, g > 0, \forall x, f(x) = o(g(x)), x \to \infty$，则

$$\int_A^B f(x)dx = o(\int_A^B g(x)dx), \quad B > A \to \infty.$$

特别地，若存在 A_0 使得 $\int_{A_0}^\infty g(x)dx < \infty$，则

$$\int_A^\infty f(x)dx = o(\int_A^\infty g(x)dx), \quad A \to \infty.$$

16. 若 $a_n, b_n > 0, \forall n, a_n = o(b_n), n \to \infty$，则

$$\sum_N^M a_n = o(\sum_N^M b_n), \quad M > N \to \infty.$$

特别地，若 $\sum_1^\infty b_n < \infty$，则

$$\sum_N^\infty a_n = o(\sum_N^\infty b_n), \quad N \to \infty.$$

笔记 以上的法则都易验证.

例题 12.2.

设 $a_n = O(b_n), n \geq 1$, 并且基数 $\sum_{n=1}^\infty b_n < \infty$, 则存在常数 C, 使得

$$\sum_{k=1}^n a_k = C + O(\sum_{k=n+1}^\infty b_k), \quad n \to \infty.$$

解 显然 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ 收敛，因此存在常数 C 使得 $\sum_{k=1}^\infty a_k = C$，于是

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^\infty a_k - \sum_{k=n+1}^\infty a_k = C + O(\sum_{k=n+1}^\infty b_k), \quad n \to \infty.$$

! 在上面的例题中，如果使用估计 $\sum_{k=1}^n a_k = O(\sum_{k=1}^n b_k)$, 那么只能得到估计 $\sum_{k=1}^n a_k = O(1)$，由此可见，稍微细致的估计技巧常能产生更为精确的结果.

12.3 几个基本定理的应用

定理 12.1 (Taylor 展开大 O 余项)

在 x_0 的某个邻域内，若 $f^{(n)}(x)$ 存在，且 $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$，则

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O\left(|x - x_0|^n\right)$$

在 x_0 的该邻域内成立.

推论 12.1

下面的估计式成立:

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5),\ x \to 0$
2. $\cos x = x - \frac{x^2}{2} + O(x^4),\ x \to 0$
3. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7),\ x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3),\ x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2),\ x \to 0$
6. $e^x = 1 + x + O(x^2),\ x \to 0$

更一般地，把上面的 x 换成满足 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ 的 $f(x)$ 依然成立. 例如:

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + O(|\sin x|^3), \quad x \to 0.$$

一些常见估阶

$x \to 0$ 时

$$x\log(1+x) = x(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

$$(1+x)^x = \exp(x\log(1+x)) = \exp(x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4),$$

$x \to \infty$ 时

$$x\log(1+\frac{1}{x}) = x(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3}x^3 + O(\frac{1}{x^4})) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + O(\frac{1}{x^3})$$

$$(1+\frac{1}{x})^x = \exp(x\log(1+\frac{1}{x})) = \exp 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3}x^2 + O(\frac{1}{x^3}) = e(1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{12x^2}) + O(\frac{1}{x^3})$$

可以利用阶来判断（不变号的）无穷级数收敛性. 比如

$$\int_1^{\infty} \frac{x^m \arctan x}{1+x^n} dx, \quad n > 0.$$

其中 $\frac{x^m \arctan x}{1+x^n} = \frac{\pi}{2}x^{m-n}(1+o(1))$，所以只要判断 $n-m$ 与 1 的大小即可判断收敛性.

定理 12.2 (求和与小 o 换序)

设 $b_n > 0$，$\sum_1^\infty b_n = \infty$，且 $a_n = o(b_n), n \to \infty$，则

$$\sum_1^N a_n = o(\sum_1^N b_n), \quad N \to \infty.$$

笔记 定理12.2对应的积分版本也成立.

定理 12.3 (系数同阶蕴含整体同阶)

设 $\{b_n\}$ 是正数列，$a_n = o(b_n)$,

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n, \quad g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n.$$

又设当 $0 \le x < 1$ 时，级数

$$\sum_0^\infty b_n x^n < \infty,$$

并且

$$\sum_0^{\infty} b_n x^n \to \infty, \quad x \to 1-,$$

则

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to 1-.$$

12.4 Γ-函数与 String 公式

定义 12.5 (Γ-函数)

设 x 是复数，定义

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \Re(x) > 0.$$

引理 12.1

一致收敛可换序

引理 12.2 (*Gamma*-函数做比)

$\forall \alpha, \beta > 0$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy$$

引理 12.3 (*Gamma*-函数二重公式)

对于 $x > 0$

$$\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

定理 12.4

设 $x > 0$

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

引理 12.4

设 a 是常数，则

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a} + O\left(x^{-a-1}\right).$$

12.5 渐进级数

性质 1. 渐进级数相等

$$F(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{x^k}, F(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{x^k}$$

则 $C_k = B_k, \forall k$

性质 1. 渐进级数的加法和乘法运算

渐进级数满足一般级数的加法和乘法法则.

性质 1. 渐进级数的积分

渐进级数 $F(x) \approx \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{C_k}{x^k}$ 积分号与求和可换序.

一般地，渐近级数不能进行逐项微分.

第十三章 级数与积分

13.1 无穷级数与无穷乘积的收敛性

< 基本知识 >

已经知道，若 $\alpha > 1$，则下面的级数收敛（n_0 是适当的自然数）当 $a \leq 1$ 时，它们都发散：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}, \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log n(\log ogn)^{\alpha}}$$

$$\cdots, \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log logn \cdots (\log \cdots \log n)^{\alpha}}.$$

这些级数在收敛性问题中常常作为“标尺”与其它级数相比较.

定理 13.1 (Guass) 设 $\lambda > 1$，且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^{\lambda}}), \quad n \geq n_0,$$

其中 n_0 是常数. 则级数

$$\sum a_n \begin{cases} \text{收敛, 当} \alpha > 1 \\ \text{发散, 当} \alpha \leq 1 \end{cases}$$

证明 证明考虑化成‘exp’的形式，带大 O 小 o 估阶即可.

定理 13.2 设

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}), \quad n \geq 1,$$

则级数

$$\sum (-1)^n a_n \begin{cases} \text{收敛, 当} \alpha < 0 \\ \text{发散, 当} \alpha \geq 0 \end{cases}$$

第十四章 数学分析

14.1 基础概念

一致收敛
重积分与参变量积分
泰勒展开的各种余项

引理 14.1 (判别不一致收敛的一个方法)

若对每一 n，s_n 在 $x=c$ 左连续，但数列 $\{s_n(c)\}$ 发散，那么对于任意的 $\delta(0<\delta<c)$，函数列 $\{s_n\}$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必定不一致收敛 (参看《数学分析中的问题和反例》第 6 章问题 13).

定理 14.1 (Puiseux 展开)

定理 14.2 (单调函数的性质)

设 f 是 $[a,b]$ 上定义的递增函数，并设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是符合

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b \tag{14.1}$$

的 $n+1$ 个点. 于是有不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_k+)-f(x_k-)]\le f(b)-f(a). \tag{14.2}$$

命题 14.1

若 f 在 $[a,b]$ 上单调，则 f 的间断点集是可数集.

证明 不妨设 f 在 (a,b) 递增，并设 S_m 是 (a,b) 中一些点的集合，f 在这些点上的跃变超过 $\frac{1}{m}$. 如果 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ 在 S_m 内，则定理14.2告诉我们

$$\frac{n-1}{m}\le f(b)-f(a) \tag{14.3}$$

这表明 S_m 是有限点集. 而 f 在 (a,b) 内的间断点集是 $\bigcup_{m=1}^{\infty}S_m$ 的一个子集，故可数.

定义 14.1 (有界变差函数)

设 f 在 $[a,b]$ 上定义. $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个划分，如果存在 $M>0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le M \tag{14.4}$$

[a].e 对任意划分 P 成立，则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

[a]这个求和的上确界被称为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差 (Total variation)，记作 $TV(f)$ 或者 $V_f(a,b)=\sup\limits_P\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

笔记 有界变差蕴含有界.

笔记 有界变差性质保加、减、乘，但不一定保商. 若加强为 f 有界离开 0[1]，则保商

[1]即 $\exists m>0$，s.t.$\forall x\in[a,b]$，有 $0<m\le|f(x)|$

命题 14.2 (导函数有界则有界变差)

若 f 在 $[a,b]$ 连续，f' 存在且在 $[a,b]$ 有界，则 f 在 $[a,b]$ 有界变差.

14.2 微分

定理 14.3

曲面 $r(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ 在某点处的切平面方向为

$$(\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)},\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)},\frac{\partial f(u,v)}{\partial(u,v)})$$

14.3 积佬

积分方法

化为重积分

再重积分一次解决超难三重积分

导一下再积回去

留数计算方法

Jordan 引理计算留数

计算重积分的一些方法

余面积公式

命题 14.3

无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的计算.

如果 $f(z)$ 满足

$$\lim_{z\to+\infty,\mathrm{Re}z\geq 0} z^2 f(z) \tag{14.5}$$

那么，R 充分大时

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_R} z^2 f(z)\,\frac{1}{z^2}dz\right| \leq \int_{C_R}\left|z^2 f(z)\right|\frac{1}{R^2}dl \tag{14.6}$$

$$\leq \int_{C_R}(|a|+1)\cdot\frac{1}{R^2}dl=\frac{|a|+1}{R^2}\cdot\pi R\to 0\,(R\to+\infty) \tag{14.7}$$

引理 14.2 (Jordan 引理)

设 m 为正数，C_R 是以原点为中心，R 为半径，位于上半平面的半圆周. 当 $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{z\in C_R}|F(z)|=0$ 时，就有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz=0 \tag{14.8}$$

推论 14.1

当 $m>0$ 时，$F(z),G(z)$ 是上半平面的亚纯函数，且在 $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ 的范围内，当 $z\to\infty$ 时，$F(z),G(z)$ 一致地趋于 0，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos mx dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[F(z)\,e^{imz}\right]\right\}\text{(上半平面各极点留数和)} \tag{14.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\sin mx dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}\left[G(z)\,e^{imz}\right]\right\}\text{(上半平面各极点留数和)} \tag{14.10}$$

笔记 若 $F(x)$ 是偶函数，$G(x)$ 是奇函数，就有

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx dx = \operatorname{Re}\left\{\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}\left[F(z)\, e^{imz}\right]\right\}\text{(上半平面各极点留数和)} \tag{14.11}$$

$$\int_0^\infty G(x)\sin mx dx = \operatorname{Im}\left\{\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}\left[G(z)\, e^{imz}\right]\right\}\text{(上半平面各极点留数和)} \tag{14.12}$$

命题 14.4 (多值函数的积分计算)

计算 $\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx$

其中 $Q(x)$ 是有理函数，a 为非负整数. 当 $z \to 0$ 或 $z \to \infty$ 时，$z^a Q(z) \to 0$. 如图轨道.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\sum \operatorname{Res}[z^{a-1}Q(z)] \qquad (14.13)\\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi}\sum \operatorname{Res}[(-z)^{a-1}Q(z)] \quad [-\pi < \arg(-z) < \pi] \qquad (14.14)\end{aligned}$$

命题 14.5

计算 Dirichlet 积分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{14.15}$$

解 [傅里叶] 证明首先, 由于 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在每个有界区间 $(0,a]$ 上都是有界连续函数, 因而是黎曼可积的. 其次, 根据无穷积分的狄利克雷判别法, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的. 因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

最后这个等式是通过作积分变元变换 $x=(2n+1)t$ 得到的. 由于函数 $\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=\frac{\sin t - t}{t\sin t}$ 是 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上的有界连续函数, 因而是黎曼可积的, 所以应用黎曼引理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

对任意正整数 n, 有

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= \sin[(2n-1)t+2t]\\ &= \sin(2n-1)t\cos 2t + \cos(2n-1)t\sin 2t\\ &= \sin(2n-1)t\left(1-2\sin^2 t\right) + 2\cos(2n-1)t\cos t\sin t\\ &= \sin(2n-1)t + 2\cos 2nt\sin t\end{aligned}$$

因此, 如果记

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

则有

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nt\,\mathrm{d}t\\ &= I_{n-1} + \frac{1}{n}\sin 2nt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1}.\end{aligned}$$

从这个递推公式我们得到

$$I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

所以,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{2}.$$

证毕.

解 [复分析] 把积分改写成

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

在该式的右边第二个积分中, 若令 $x=-t$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 当 $x=\infty$ 时, $t=-\infty$, 那么该积分就成为

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\epsilon}^{-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

把被积函数 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}$ 延拓到复平面时, 被积函数变成 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$, 它有一个单极点 $z=0$, 出现在实轴上. 在做围道时要绕过这个极点, 如图 7.15 所示, 在实轴 x 的下方绕过零点.

积分路径是从 $-R$ 出发, 行进到 $-\varepsilon$, 沿 C_{ε} 到达 ε, 在从 ε 到 R, 最后沿着 C_R 半圆弧回到 $-R$. 在这条封闭围道内有一个极点 $z=0$, 按照留数定理有

$$\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{C_e}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z+\int_{\epsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(0)\tag{14.16}$$

其中留数是

$$\operatorname{Res}f(0)=\lim_{z\to0}(z-0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=\lim_{z\to0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=1\tag{14.17}$$

在前面已证明过半圆弧 C_R 上的积分是

$$\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=0\tag{14.18}$$

在半圆弧 C_t 上的积分, 由于从 $-\varepsilon$ 到 ε, 恰好是辐角 θ 从 π 到 2π, 所以积分为

$$\int_{C_c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-e(\sin\theta-i\cos\theta)}\mathrm{d}\theta\tag{14.19}$$

其中 ε 是 $z=0$ 处的半圆的半径, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $\mathrm{e}^{-\varepsilon(\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta)}\to1$, 因此

$$\int_{C_\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=\lim\mathrm{i}_{\epsilon\to0}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\epsilon(\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta)}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}(2\pi-\pi)=\mathrm{i}\pi\tag{14.20}$$

式 (7.74) 中的第一、第三两个积分, 当 $\varepsilon\to0,R\to\infty$ 时, 有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\tag{14.21}$$

把公式14.18,14.20,14.21诸式代人公式14.16, 得到

$$2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\pi=2\pi\mathrm{i}\quad\text{或}\quad2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}$$

最后得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

14.4 杂题

定理 14.4

对正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$，记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则

- 若 $p > 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛
- 若 $0 \le p \le 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 同敛散.

证明

- $p > 1$时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \le \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} dx = \int_{S_1}^{\lim\limits_{n\to\infty} S_n} \frac{1}{x^p} dx < \infty$
- $0 \le p \le 1$时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A < \infty$, 则 $\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{a_n}{A^p}$ 收敛

  若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, 则$0 \le p < 1$时, $\frac{\frac{a_n}{S_n^p}}{\frac{a_n}{S_n}} = S_n^{1-p} \to +\infty$, 则只需证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散

  $\sum_{k=n+1}^{n+t} \frac{a_k}{S_k} \ge \sum_{k=n+1}^{n+t} \frac{a_k}{S_{n+t}} = \frac{S_{n+t} - S_n}{S_{n+t}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+t}}$, 令$t \to +\infty$, 则 $\sum_{k=n+1}^{n+t} \frac{a_k}{S_k} \ge 1$.

  由柯西收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散.

14.5 函数性态分析

例题 14.1.

证明 $f(x) f'(x) f''(x) f'''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 不成立

证明 不妨设$f'''(x) > 0$, 否则用 $-f$代替f

若$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) f'(x) < 0, f' \uparrow$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) > 0, f \downarrow$

$$\begin{array}{cccccc} & f'(x+h) = & f'(x) + & f''(x) h + & \frac{f'''(\theta(x))}{2} h^2 & \\ x: & \wedge & & \downarrow & \vee & , as\ h \to +\infty, \text{矛盾!} \\ & 0 & \text{Const.} & +\infty & 0 & \end{array}$$

其余情况类似.

查看 axmath 文件

例题 14.2.

设函数$f \in C(\mathbb{R})$, $f'(x) - f^4(x) \to 0\ (x \to +\infty)$, 证明

$$f(x) \to 0\ (x \to +\infty)$$

答案看这里

例题 14.3.

$f \in C(\mathbb{R})$，且 $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=0$，证明：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

答案看这里

14.6 细节

介值性与连续性的区别在于如果一个函数具有连续性，那么它一定具有介值性；如果一个函数具有介值性，它不一定具有连续性. 但是，具有介值性的函数不存在第一类间断点，它可能存在第二类间断点.

14.7 我造的反例

关于连续函数与 Riemann 可积函数的复合 2023/12/31 构作

14.8 广义可积相对常义可积的区别

下面反例见汪林《数学分析中的问题和反例 》208 页以后部分.

问题 14.1 存在 $(0,1)$ 上的一个无界函数，其广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不是对应的积分和数 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

问题 14.2 存在 $(0,1)$ 内的一个单调函数 f，使 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$ 存在，但 f 并不广义可积.

注 如果加上 f 在开区间 $(0,1)$ 单调，那么 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛可推出 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

若再加上 f 在 $x=0$ 或 $x=1$ 处有限，则 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 有限可推出 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛.

问题 14.3 存在 f,g 使得 f 广义可积，g 有界，但 fg 并不广义可积.

注 若加上 f 绝对可积，就有 fg 广义可积.

问题 14.4 存在 f 在 $(0,+\infty)$ 任意有界子区间可积，且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但 $\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 发散.

笔记 考虑

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

注 但是对于二元函数 $f(x,y)$ 而言，我们有：若 $f(x,y)$ 在定义域 D 内任何有界子区域上可积，则积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

收敛的充要条件使该积分绝对收敛. 也就是说，广义二重积分是一种绝对收敛积分.

问题 14.5 存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 f,h 满足

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=1,\quad \int_1^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}$$

而 $\int_1^{+\infty} h(x)f(x)dx$ 却发散.

问题 14.6 存在函数 f，使 $|f|$ 广义可积而 f^2 并不广义可积.

笔记 不论是无界函数 f 还是无界区间，都存在反例.

问题 14.7 存在 $[1,+\infty)$ 上的一个函数 f，使得 f^2 广义可积但是 $|f|$ 并不广义可积.

笔记 只有无界区间时才存在反例，无界函数的情况下，证明 $|f|$ 广义可积考虑

$$|f(x)| \le \frac{1+f^2(x)}{2}$$

即可得到.

注 对于常义积分，f,g 可积蕴含 fg 可积. 但上面两个问题说明：对于广义积分而言，这一点并不成立.

注 上面两个问题说明：

- 对于无穷限广义积分，平方可积和绝对可积互不蕴含.
- 对于有界区间上的无界函数，平方可积蕴含绝对可积，绝对可积不蕴含平方可积.

问题 14.8 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积的正值连续函数 f，但是 $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

注 可以证明，如果 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，那么

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

上面这个问题说明一致收敛性不能用正值连续性代替.

问题 14.9 广义积分的控制收敛定理 设 $\{f_n\}$ 在任何有界区间上一致收敛于 f，且 f_n 在任何有界区间上可积，又存在函数 F，使 $|f_n(x)| \le F(x)(n=1,2,\cdots)$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$$

收敛. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

笔记 证明细节见《数学分析中的问题和反例》pp280，思路是把无穷远点隔开.

问题 14.10 $[1,+\infty)$ 上的一个广义可积的函数列，其极限函数并不广义可积.

注 容易证明，对于一致收敛的可积函数列，其极限函数也是可积的. 上述反例说明，对于广义积分而言，相应的命题并不成立.

14.9 一些反例

命题 14.6

存在具有连续导数的严格递增函数，其导数在已给定的完备疏集上恒为 0.

笔记 设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集，令

$$\psi(x) = d(x,E) = \inf_{y\in E}|x-y|$$

则 ψ 在 $[0,1]$ 上连续，且当 $x\in E$ 时，$\psi(x)=0$，而当 $x\notin E$ 时，$\psi(x)>0$. 在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \int_0^x \psi(t)dt$$

则对任意 $x\in[0,1]$. 都有 $f'(x)=\psi(x)$. 特别地，当 $x\in E$ 时，有 $f'(x)=0$. 此外，f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 为验证这一结论，我们任取两点 x_1 和 x_2，$0\le x_1<x_2\le 1$，由于 E 是疏集，因而在这两点之间存在着不含有 E 中的点的开区间 (α,β)，于是

$$f(x_2)-f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}\psi(t)dt \ge \int_\alpha^\beta \psi(t)dt = \psi(\xi)(\beta-\alpha)$$

其中 $\alpha<\xi<\beta$. 因为 $\xi\notin E$，所以 $\psi(\xi)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$，得证！

命题 14.7

$[0,1]$ 中测度为 $\alpha(0<\alpha<1$ 的任意实数) 的完备疏集.

笔记 令 $r=\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}$, 则 $0<r<\frac{1}{3}$. 我们先从闭区间 $[0,1]$ 中取走中间长度为 r 的开区间. 第二次从余下的两个闭区间中各自取走中间和长度为 r^2 的开区间, 第三次又从余下的四个闭区间中各自取走中间长度为 r^3 的开区间, 如此继续下去. 这样, 全部取走的开区间的总长为

$$\alpha=r+2r^2+4r^3+\cdots=r\left[1+2r+(2r)^2+\cdots\right]=\frac{r}{1-2r}.$$

于是, 余下之集的测度为

$$1-\alpha=\frac{1-3r}{1-2r}=\alpha.$$

用这种方法得到的集通常称为具正测度的 Cantor 集, 它是一个完全疏集.

命题 14.8

结合命题14.6和命题14.7可知，存在连续可微的严格递增函数，它的临界点集是一个正测集.

命题 14.9

如果 f 不具备可积的导数，那么下式不成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(1)-f(0)}{2} \tag{14.22}$$

注 若 f 绝对连续，则公式14.22成立.

证明构造见此

14.10 发现

定理 14.5

f 在 I 上可导，则 f' 绝对黎曼可积蕴含 f' 黎曼可积.

笔记 单独靠 f' 有原函数并不能说明 f 可积，单独靠 f' 绝对黎曼可积不能说明 f' 黎曼可积. 但是配合 f' 的介值性就可以了.

详情见这里

函数列一致收敛的极限刻画：

If $\eta_k(\delta)=\sup\{Q_k(t):\delta\le|t|\le\pi\}$, then

$$\lim_{k\to\infty}\eta_k(\delta)=0$$

for every $\delta>0$.

Another way of stating this is to say: for every $\delta>0, Q_k(t)\to 0$ uniformly on $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

14.11 学会说话 & 分析学方法

14.11.1 汪林《数学分析中的问题和反例》

任意条件收敛级数的项都可以重排而给出发散级数或重排后其和为事先指定的任意数.pp249

非绝对收敛级数，适当地引进括号后变成绝对收敛级数.pp252

存在 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数 f，使 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\sum_1^{+\infty}f(n)$ 不同敛散性. 同敛散性要求 f 非负不增 pp253~254

存在广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛但在每个区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上无界的非负连续函数.pp254

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法的区别在于，Dirichlet 判别法将收敛放宽为有界振荡，但将单调有界严格为单调趋于 0，相当于调和掉了振荡的幅度.

pointwise conv. 只考虑固定 x，变化 n；uniformly conv. 考虑变化 n 和 x.

紧集会将局部的性质传递到整体，如果是证紧集内的结果，可以考虑先对某个局部证明，再用有限覆盖原理传递到整体.

度量空间中紧集具有可数稠密子集.pma Ex2.25

$\varphi\in C[a,b], f\in\mathcal{R}[a,b], f\in[A,B]\Rightarrow\varphi\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$ 这里证明用到思想: 我一致连续有了 ε,δ, 我调整 n 使 $\delta\sum\leqslant\sum\leqslant\delta\varepsilon$, 我让 $n=n(\varepsilon,\delta)$ 而不是单纯的 $n(\varepsilon)$, 虽然本质相同, 都是 $n(\varepsilon)$, 但前者可以用到 φ 一致收敛给出的 δ, 相当于多用上了一个性质, 达到相对更强的效果.

连续函数复合可积函数还可积的证明

一致收敛可以将函数列的性质保留到极限函数上.

一致连续函数可以被线性函数控制.

每个幂级数必定是某个函数的 Taylor 展开式; 但是并非每个三角级数都是某个函数的 Fourier 级数.pp281~282

集合有限并保持函数性质，但是可数并不保持.pp283

有界函数列可以收敛于无界函数.(不一致收敛)pp284

不一致有界函数列可以收敛于有界函数.pp284

若一个函数序列一致收敛于某个函数，那么它一定是一致有界的；若一个函数序列一致收敛于某个函数，并且每个函数都是连续的，那么它一定是一致连续的.

连续函数的非一致极限也可能是连续的.pp285

处处收敛 (甚至可以收敛于 0) 的连续函数列，它却无处一致连续.pp286~287

各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数，它却无处一致收敛.pp287~288

一个递减的连续函数列，它收敛于某个连续函数，但并非一致收敛. 但如果加上在紧集上，那么必然一致收敛. 这说明紧集的条件是必要的.pp289

两个一致收敛的函数，它们的乘积不一致收敛. 但如果加上它们在公共定义域 D 上有界，那它们乘积也必然在 D 上有界.pp289

一个一致收敛的函数项级数，具有不一致收敛的重排.pp290~291

存在通用的连续函数列.pp291~293

$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f，如果 f 不是多项式，那么 f 不能用多项式一致逼近.pp293

一个一致收敛的函数项级数，但是无处绝对收敛.pp293

存在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对并一致收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 不一致收敛. 但是这个命题的逆是成立的.pp294

Weiestrass 判别法失效. 存在一个绝对并一致收敛的函数项级数，它没有正值的优级数.pp295

存在一个一致收敛的函数列 $\{f_n\}$，它导数的极限不等于极限函数的导数. 这说明逐项微分原理中 $\{f_n'\}$ 一致连续的条件是必要的.pp296

一个一致收敛的可微函数列，它导函数列无处收敛.pp296

一个无处一致收敛的可微函数列，它导函数的极限等于极限函数的导数.pp296

一致收敛的可积函数列，其极限函数也是可积的. 但是把可积换成一致可积就有反例.pp298

二元函数两个累次极限存在与二重极限存在互不蕴含.pp316

各方向极限存在且相等与两个累次极限存在且相等互不蕴含.pp319

各方向极限存在且相等不蕴含二重极限存在.pp318

函数的连续性和偏导数的存在性，二者互不蕴含.pp321

函数的弱可微和偏导数的存在性，二者互不蕴含.pp322~pp323

偏导数均不连续的可微函数.pp323

蕴含关系:偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow \begin{cases} \text{连续} \\ \text{偏导数存在} \\ \text{弱可微} \end{cases}$ .pp324

存在函数，它的偏导数在某点不连续且在该点附近的任何邻域内无界，但是此函数在该点处仍可微.pp324

有关的一切偏导数都存在，但是复合函数求导公式不成立的函数.e.g.$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.pp329

存在可微函数，它在定义域内只有一个驻点，而且这驻点是极大 (小) 点，但它不是最大 (小) 点. 我们知道若函数在 (a,b)(有限或无限，开或闭) 内可微，且在这个区间内有唯一的驻点，那么这个驻点是极值点蕴含它是最值点.pp331

有无穷多个局部极大值但是没有局部极小值的函数.pp333

一致连续可推出陡弦短，这仅在 $\mathbb{R}^1$ 上成立. 陡弦短蕴含一致连续.pp334

f 陡弦短的充要条件是是 f 一致连续且 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,s.t.$ 当 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时,$\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$.pp334~335

对于可积函数，要考虑存在一些奇点的情况.

存在两个累次积分存在而不相等的函数.pp361

两个累次积分存在且相等，但是二重积分不存在.pp361

二重积分存在但是两个累次积分都不存在. 这说明二重积分存在和单积分存在是相互独立的条件.pp363

二重积分不存在，而只有一个累次积分存在.pp364~365

二重积分存在但只有一个累次积分存在.pp365

广义二重积分发散，但两个累次积分都存在.pp366

广义二重积分存在，但只有一个累次积分存在. 这说明广义二重积分存在和单积分存在是相互独立的.pp368

$f(x),g(x)$ 都在 $[0,+\infty)$ 广义可积，但是 $f(x)g(y)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 并不广义可积.pp369~370

间断二元函数的一个单积分连续.pp370

微分可换序性中 $f(x,y)$ 在 D 上的连续性条件是必要的.pp372

广义单积分连续性判别中，$\varphi(y)$ 一致收敛的条件是必要的.pp372

微分可换序性 (Leibniz 法则) 中 ${f'}_y(x,y)$ 在 D 上的连续性条件是必要的.pp373

不能用 Weiestrass 判别法找到优函数的一致收敛的参变量积分.pp373~374

一个曲面，它的内接多边形的面积不收敛于它的面积 (圆柱面). 这个例子说明，与曲线弧长相似的定义对定义曲面的面积是不适用的.pp374~375

第十五章 实分析

15.1 Littlewood's three principles of real analysis

1. Every set is nearly a finite union of intervals.
2. Every function is nearly continuous.
3. Every convergent sequence is nearly uniformly convergent.

定义 15.1 (uniformly integrable)

Say $\mathcal{F}$ uniformly integrable over E if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall m(A) < \delta, \forall f \in \mathcal{F}$，有

$$\int_A |f| < \varepsilon \tag{15.1}$$

♣

定义 15.2 (rapidly Cauchy)

Let X be a linear space normed by $\|\cdot\|$. A sequence $\{f_n\}$ in X is said to be rapidly Cauchy provided there is a convergent series of positive numbers $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ for which

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_k^2 \text{[a][b]}, \quad \forall k \tag{15.2}$$

[a] ε_k^2 can be replaced by $\varepsilon_k^{1+\delta}$ without changing some of the properties of "rapidly Cauchy". Like 14.3

[b] 不完全是，这应该是我的错觉.

[a] ε_k^2 can be replaced by $\varepsilon_k^{1+\delta}$ without changing some of the properties of "rapidly Cauchy". Like 14.3

[b] 不完全是，这应该是我的错觉.

♣

15.2 测度论

定义 15.3 (环)

设X是集合,$\mathcal{P}(X)$是X的幂集,$\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$.称$\mathcal{R}$为一个环，若$\mathcal{R}$满足：

1. 当$A, B \in \mathcal{R}$时，有限并运算封闭：$A \cup B \in \mathcal{R}$
2. 当$A, B \in \mathcal{R}$时，差集运算封闭：$A \backslash B \in \mathcal{R}$

环中的集合对有限交运算也是封闭的：当$A, B \in \mathcal{R}$时,$A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \in \mathcal{R}$

♣

这个环是近世代数中环28.2的特殊情况，这里的环中加法为对称差运算 $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$，乘法为交集运算 $A \cap B$.

证明

1. 验证 $(\mathcal{R}, \Delta)$ 构成 Abel 群
   (a). $\varnothing \in \mathcal{R}$满足$A \Delta \varnothing = \varnothing \Delta A = A$，所以$\varnothing$是零元（加法群的单位元）
   (b). 对任意$A \in \mathcal{R}$, A的加法逆元是A:
   $$A \Delta A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \varnothing$$
   (c). 交换性显然
   (d). 结合律$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$，画$Venn$图显然
2. 验证 $(\mathcal{R}, \cap)$ 构成半群
   $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
3. 验证分配律

$$\begin{cases} A\cap(B\Delta C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C)\\ (B\Delta C)\cap A=(B\Delta A)\cap(C\Delta A)\end{cases}$$,由于 $\cap$ 具有交换律, 故只需要证明其中一种情况

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))=A\cap((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c))=(A\cap(B\cap C^c))\cup(A\cap(C\cap B^c))$$

$$(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)=((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup((A\cap C)\setminus(A\cap B))=((A\cap B)\cap(A\cap C)^c)\cup((A\cap C)\cap(A\cap B)^c)$$

$$=((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c))\cup((A\cap C)\cap(A^c\cup B^c))=((A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c))\cup((A\cap C\cap A^c)\cup(A\cap C\cap B^c))$$

$$=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)=A\cap(B\Delta C)$$

综上, $(\mathcal{R},\Delta,\cap)$ 符合近世代数中环的定义.

定义 15.4 (代数)

设 $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ 是环, 如果 $\Omega\in\mathcal{R}$, 称 $\mathcal{R}$ 是代数.

前面验证了 $(\mathcal{R},\Delta,\cap)$ 构成交换环, 并且

$$A\Delta A=\varnothing,\qquad A\cap A=A$$

当 $\mathcal{R}$ 是代数时, 环 $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ 有乘法单位元 Ω:

$$A\cap\Omega=\Omega\cap A=A$$

♣

Borel 测度是一种前 Lebesgue 测度. 它具有最基本的测度的性质，但是在零测集上有一些问题，即可能零测集不可测，但是 Lebesgue 测度就没有这个问题，它是 Borel 测度的完备化.

详情见此知乎文章

15.3 一些定理

定理 15.1 (Brézis-Lieb)

If $\{f_n\}$ is a uniformly bounded sequence in $L^p(0<p<\infty)$ that converges a.e. to f, then

$$\lim_{n\to\infty}\{\|f_n\|_{L^p}-\|f_n-f\|_{L^p}\}=\|f\|_{L^p}$$

♡

笔记 这就有 Fatou's Lemma.

引理 15.1 (Fatou's Lemma)

$$\|f\|_{L^p}\le\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^p}$$

♡

笔记 上面的定理15.1告诉我们两者的差是

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p}.$$

第十六章 Royden 实分析

16.1 一些黑话

如果没有特殊说明，在本章中出现的符号有如下默认含义：

表 16.1: Notations

符号	含义
$\mathcal{F}$	一族集合或者函数
E	集合或者可测集 (不一定有限测度)
F	闭集
G	开集
D	一个区域
∂D	区域 D 的边界
$\to$	收敛 (对于数列)、逐点收敛 (对于函数列)、强收敛
$\rightharpoonup$	弱收敛
$\rightrightarrows$	一致收敛 (对于数列和函数列)
unif.	一致
inte.	可积的
meas.	可测 (函数)(measurable)
bdd	有界的 (bounded)
pw.	逐点地 (pointwise)
$\forall$	对于任意 (给定) 的
$\exists$	存在、可以找到一个
$\exists!$	存在唯一的
$f \in C(E)$	f 在 E 上连续
$f \in D(E)$	f 在 E 上一阶可微
$f \in C^1(E)$	f 在 E 上连续可微[1]
$f \in AC(E)$	f 在 E 上全连续
BV	有界变差
$\\|\cdot\\|$	一个范数，作为度量空间的的度量
$\mathrm{sgn}(f)$[2]	f 的正负符号
f^*	函数 f 在 $L^p(1 \le p < \infty)$ 上的对偶函数[3]
f_{n_k}	不加说明地表示 f_n 的子列
s.t.	使得 (such that)
$\coprod$	无交并
$\uparrow$	递增
$\downarrow$	递减
q	p 的共轭[4]

注

- 如果给出了可测集 E，那么一般来说，所有的讨论都是在 E 上的.
- 关于趋近 ($\to$)，在不引起歧义的情况下，例如我们用 $\int_E f_n \to \int_E f$ 代替 $\int_E f_n \to \int_E f(n \to \infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$.
- 在给定可测集 E 的情况下，我们把 $L^p(E)(1 \le p \le \infty)$ 简写成 L^p.
- 我们使用 f_n，它表示双重含义 (根据上下文确定)：函数 f_n 或者函数列 $\{f_n\}$.

[1] 即 f 在 E 可微且导函数连续.

[2] 有性质：$\mathrm{sgn}(f) \cdot f = |f|$.

[3] 即 $f^* = \\|f\\|_p^{1-p} \cdot \mathrm{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$.

[4] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 没有特殊说明的话，$f_n \to f$ 蕴含 $f_n \in X, f \in X$.
- 我们说零测集是针对 lebesgue 测度而言.

注 接下来的写法基本都是简写，在于提炼关键内容，省去多余的文字.

16.2 第一部分

16.2.1 第 0 章：集合、映射与关系的预备知识

公理 16.1 (De Morgan's identities)

$$X \sim [\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F] = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}[X \sim F] \tag{16.1}$$

$$X \sim [\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F] = \bigcup_{F\in\mathcal{F}}[X \sim F] \tag{16.2}$$

注 $B \sim A$ is the complement of A in B.

注 $\mathcal{F}$ is a collection of sets of functions.

笔记 Even if a function not invertible, for a set E, we can define $f^{-1}(E)$ to be the set $\{a \in A : f(a) \in E\}$; it is called the inverse image of E under f.

性质 1. 逆映射的集合性质

$$f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2) \tag{16.3}$$

$$f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2) \tag{16.4}$$

$$f^{-1}(E_1 \sim E_2) = f^{-1}(E_1) \sim f^{-1}(E_2) \tag{16.5}$$

定义 16.1 (choice function)

$\mathcal{F}$ a nonempty family of nonempty sets. A choice function $f \in \mathcal{F}$ is a function f from $\mathcal{F}$ to $\cup_{F\in\mathcal{F}}F$ with the property that $\forall F \in \mathcal{F}$, $f(F)$ is a member of F.

公理 16.2 (Zermelo's Axiom of Choice)

$\mathcal{F}$ a nonempty family of nonempty sets. Then $\exists$ a choice func. on $\mathcal{F}$.

定义 16.2 (partially ordered, totally ordered, upper bound, maximal member)

非空 X 上有个关系 R，若 xRx' 且 $x'Rx$ 蕴含 $x = x'$，则称 X 为偏序集 (partially ordered). 若任意两个 $x, x' \in E$ 之间都存在关系 R，则称 X 为全序集 (totally ordered). 若有一个 $x \in X$，使得对于任意 $x' \in X$，都有 $x'Rx$，则称 x 为上界 (upper bound). 若对于任意 $x' \in X$，xRx' 蕴含 $x = x'$，则称 x 为最大成员 (maximal member).

公理 16.3 (Zorn's Lemma)

X a partially ordered set s.t. every totally ordered subset has an upper bound. Then X has a maximal member.

16.2.2 第 1 章：实数系统：集合，序列和函数

笔记 看 Rudin PMA 就能了解这一章.

16.2.3 第 2 章：Lebesgue 测度

- 区间的测度是它的长度
- 测度是平移不变量[1]
- 测度可列可加[2].

定义 16.3 (外测度 (outer measure))

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

命题 16.1

- 区间的外测度就是它的长度
- 外测度是平移不变量
- 外测度可列次可加[a]

[a] $m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$

笔记 外测度并不是可列可加的，甚至不是有限可加.

定义 16.4 (可测集)

E 可测 (measurable)，若有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$$

笔记 其中 $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$ 是显然的 (根据可列次可加). 于是 A 可测等价于 $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$

命题 16.2

- 外测度为 0 蕴含测度为 0，特别地，可数集都可测.
- 可测集的可数并依然可测.
- 区间都可测.

定义 16.5

可数开集之交记为G_δ，可说闭集之交记为F_σ. G_δ, F_σ 都可测. Borel σ-algebra是最小的 σ-algebra，其成员称为 Borel set.

定理 16.1

开集可以从外部逼近 E[a]，闭集可以从内部逼近 E，G_δ, F_σ 可以逼近任意实数集.

[a] E 可测

[1] $m(E+y) = m(E)$

[2] $m(\coprod_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$

引理 16.1 (Borel-Cantelli Lemma)

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一族可数可测集，且 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$. 那么几乎所有 $x \in \mathbb{R}$ 都在有限多个 E_k 中.

证明

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k]) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) = 0$$

□

注 Lebesgue 测度的可列可加性赋予了 Lebesgue 积分远好于 Riemann 积分的性质.

接下来是这一章测度论的精华.

定理 16.2 (Vitali)

$\mathbb{R}$ 中任何外测度为 0 的集合都包含一个不可测的子集.

定理 16.3

存在不相交的实数集 A, B，使得

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

证明 反证：假设 $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ 成立，则与定理16.2矛盾.

有两个问题：

- 零测集是否是可数集？
- 可数集是否是 Borel 集？

这两个都是错的.

命题 16.3

- Cantor 集C 是不可数闭集，也是零测集.
- Cantor-Lebesgue 函数[1] $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ 是一个递增连续函数. 它的导数在 $O := [0,1] \sim C$ 存在且为 0，但 $m(O) = 1$.
- $\psi(x) := \varphi(x) + x, \psi : [0,1] \to [0,2]$[2]，严格递增.
  - 它将 $mathbfC$ 映射到一个有正测度的可测集.
  - 它将一个可测集，$mathbfC$ 的子集，映射到一个不可测集.
- 存在一个可测集，$mathbfC$ 的子集，不是 Borel 集.

16.2.4 第 3 章：Lebesgue 可测函数

定义 16.6 (可测函数)

对于 $f : X \to Y$ 若 Y 中任何开集的原像都在 X 中可测，则称 f 为可测函数.

笔记 可测性保函数加法，数乘，函数乘法，复合，取最大最小值.

命题 16.4

$f_n \to f$，f_n meas. Then f meas.

[1] Cantor-Lebesgur 函数是一种 singular continuous 函数，即导数几乎处处为 0 但本身非常数，见L-S 积分

[2] 这个函数非常厉害！

命题 16.5

阶梯函数可以逼近简单函数 (simple function)[a]，简单函数可以逼近可测函数. 而且这些逼近可以以任意方式，比如从下面或上面逼近，夹住等等。

[a]就是一堆特征函数 χ_{E_i} 线性求和.

注意我们下面的写法主要参考16.1中约定的符号.

定理 16.4 (Egoroff's Thm)

E finite, $f_n \to f$ meas. Then $\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset E$, s.t.

$$f_n \to f \text{ unif. on } F \text{ and } m(E \sim F) < \varepsilon$$

定理 16.5 (Lusin's Thm)

f meas. on E. Then $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C(\mathbb{R}), F \subseteq E$, s.t.

$$f = g \text{ on } F \text{ and } m(E \sim F) < \varepsilon$$

16.2.5 第 4 章：Lebesgue 积分

Riemann 积分就是分割，然后上下确界逼近，就是用阶梯函数逼近.

Dirichelet 函数[3]的上积分为 1，下积分为 0. 它并不 Riemann 可积，但是 Lebesgue 可积，因为 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 是 $[0,1]$ 中的零测集，故 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分值为 0.

Lebesgue 是用简单函数逼近. 以后我们说可积 (inte.) 是指 Lebesgue 可积.

我们直接略过没用的 proposition，直接看收敛性的大定理。

定理 16.6 (Bounded Convergence Thm)

f_n meas. on finite E. If f_n unif. bdd[a]. Then if $f_n \to f$, then $\int_E f_n \to \int_E f$.

[a]$\exists M \geq 0$, s.t.$|f_n| \leq M$ on E, $\forall n$.

定理 16.7 (Chebychev's Inequality)

$f \geq 0$ meas. on E. Then $\forall \lambda > 0$,

$$m\{x \in E : f(x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_E f$$

定理 16.8 (Fatou's Lemma)

$f_n \geq 0$ meas. on E. If $f_n \to f$ a.e. on E, then $\int_E f \leq \liminf \int_E f$

定理 16.9 (Monotone Convergence Thm)

$f_n \geq 0 \uparrow$ on E. If $f_n \to f$ a.e. on E, then $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$.

推论 16.1 (和函数列收敛)

$\{u_n\}$, $u_n \geq 0$ meas. on E. If $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pw. a.e. on E, then $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$.

[3] $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ on $[0,1]$

定义 16.7 (可积)

称可测集 E 上非负可测函数 f 可积，若 $\int_E f < \infty$.[a]

[a]这样的 f 在 E 上是几乎处处有限的.

定理 16.10 (Beppo Levi's Lemma)

$\{f_n\}\uparrow, f_n \geq 0$ on E. If $\{\int_E f_n\}$ bdd, then $\{f_n\} \to f$ meas. and finite a.e. on E and

$$\int_E f_n \to \int_E f < \infty$$

定理 16.11 (Lebesgue Dominated Convergence Thm)

$\{f_n\}$ meas. on E. Suppose g inte. on E and dominated f_n[a]. Then if $f_n \to f$ a.e. on E, then f inte. and $\int_E f_n \to \int_E f$.

[a]$\forall n, |f_n| \leq g$ on E

定理 16.12 (General Dominated Convergence Thm)

$f_n \to f$ meas. a.e. on E. $g_n \geq 0, g_n \to g$ meas. a.e. on E. $\{g_n\}$ dominates $\{g_n\}$[a]. If $\int_E g_n = \int_E g < \infty$, then $\int_E f_n \to \int_E f$.

[a]$|f_n| \leq g_n$ on $E, \forall n$

命题 16.6

- f meas. on E. If f inte. over E, then $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,s.t. if $A \subseteq E$ meas. and $m(A) < \delta$, then $\int_A |f| < \varepsilon$.
- Conversely, in the case $m(E) < \infty$, if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,s.t. $\forall A \subseteq E$, A meas. and $m(A) < \delta$, then $\int_A |f| < \varepsilon$. Then f inte. over E.

定义 16.8 (uniformly integrable[4])

Say $\mathcal{F}$[a] unif. inte. over E if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t.$\forall f \in \mathcal{F}$,

$$\text{if } A \subseteq E \text{ is measurable and } m(A) < \delta, \text{ then } \int_A |f| < \varepsilon$$

[a]若 $\mathcal{F}$ 是有限的，那么显然 $mathcalF$ 一致可积

命题 16.7

E finite, $\{f_n\}$ unif. inte. and $f_n \to f$ a.e. on E, then f inte. on E.

定理 16.13 (Vitali Convergence Thm)

E finite, $\{f_n\}$ unif. inte. If $f_n \to f$ a.e. on E, then f inte. on E and $\int_E f_n \to \int_E f$.

定理 16.14

E finite. $h_n \geq 0$ inte. $h_n \to h \equiv 0$ a.e. on$E$. Then $\int_E h_n \to 0$ iff h_n unif. inte. over E.

16.2.6 第 5 章：Lebesgue 积分：Further topics

命题 16.8

f inte. over E. Then $\forall \varepsilon > 0, \exists E_0$ finite, s.t. $\int_{E\sim E_0} |f| < \varepsilon$.

定义 16.9 (tight)

Say $\mathcal{F}$ tight if $\forall \varepsilon > 0, \exists E_0 \subseteq E$ finite, s.t. $\int_{E\sim E_0} |f| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}$.

定理 16.15 (General Vitali Convergence Thm)

$\{f_n\}$ unif. inte. and tight on E. $f_n \to f$ a.e. on E. Then f inte. and $\int_E f_n \to \int_E f$.

推论 16.2

$h_n \geq 0$ inte. on E. $h_n(x) \to 0$ for almost all $x \in E$. Then $\int_E h_n \to 0$ iff h_n unif. inte. and tight over E.

定义 16.10 (convergent in maesure)

f_n, f meas. and finite a.e. on E. Say f_n converge in measure on E to f if $\forall \eta > 0$,

$$m\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \eta\} \to 0$$

注 若 f_n 逐点收敛于 f，则 f_n 依测度收敛于 f，反之不对. 这说明依测度收敛比逐点收敛要弱，可能会保留更好的性质.

定理 16.16 (Riesz)

If $f_n \to f$ in measure on E, then $\exists$ a subsequence $\{f_{n_k}\}$ that converges pointwise a.e. on E to f.

推论 16.3

$\{f_n\}$ inte. on E. $f_n \geq 0$. Then

$$\int_E f_n \to 0 \text{ iff } \{f_n\} \to 0 \text{ in measure on } E \text{ and } f_n \text{ is unif. inte. and tight over } E$$

16.2.7 第 6 章：微分与积分

16.2.8 第 7 章：L^p 空间：完备性和估计

命题 16.9

E finite, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, then $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$. Furthermore,

$$\|f\|_{p_1} \leq c\,\|f\|_{p_2},\ \forall f \in L^{p_2}(E), \tag{16.6}$$

where $c = [m(E)]^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}$ if $p_2 < \infty$ and $c = [m(E)]^{\frac{1}{p_1}}$ if $p_2 = \infty$.

16.2.9 第 8 章：L^p 空间：对偶与弱收敛

定理 16.17 (Riesz Representation Thm for the Dual of $L^p(E)$)

E, $1 \le p < \infty$, $\forall g \in L^q(E)$, define the bdd linear functional $\mathcal{R}_g$ on $L^p(E)$ by

$$\mathcal{R}_g(f) = \int_E g \cdot f, \forall f \in L^p(E) \tag{16.7}$$

Then $\forall$ bdd linear functional T on $L^p(E)$, $\exists!$ function $g \in L^q(E)$, s.t.

$$\mathcal{R}_g = T, \text{ and } \|T\|_* = \|g\|_q \tag{16.8}$$

笔记 Radamacher functions is bdd in $L^p[0,1]$ but fail to have any subsequences that converges(strongly) in $L^p[0,1]$.

定义 16.11 (converge weakly)

X normed linear space. $\{f_n\} \in X$ is said to converge weakly to f in X provided

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f), \ \forall T \in X^*$$

Write $f_n \rightharpoonup f$ in X.

定理 16.18 (Radon-Riesz Thm)

E, $1 < p < \infty$. $\{f_n\} \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$. Then

$$\{f_n\} \to f \text{ in } L^p(E) \text{ iff } \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

定理 16.19

E, $1 < p < \infty$, $L^p(E)$ 中任何有界序列都有弱收敛子列.

第十七章 Rudin Papa

17.1 一些定义

定义 17.1 (support)

The support of a complex funtion f on a topological space X is the closure of the set

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

The collection of all continuous complex functions on X whose support is compact is denoted by $C_c(X)$, which is obviously a vertor space.

注 pde 里面经常用卷积，核函数由紧支撑集就能够避免繁琐的收敛性讨论.

17.2 一些定理

Poisson 核

笔记 紧支集函数类把对应到 0 的部分去掉了，这些函数和 $G/\ker\sigma$28.17有点像.

绝对连续 (absolutely continuous) 表示函数的光滑性质，比连续和一致连续条件都要严格，比利普希茨条件宽松，是一类极为重要的函数。绝对连续函数几乎处处可微，是它的导函数的广义原函数。

定义 17.2 (Luzin-N property)

称 f 满足 Luzin-N property，如果它将 Lebesgue 0 测集映到 Lebesgue 0 测集

定理 17.1 (Banach-Zaretsky 定理)

$f \in C \cap BV$ and property Luzin-N $\Leftrightarrow$ $f \in AC$.

笔记 Banach-Zaretsky 定理 |Luzin (N)-性质与增长引理

定理 17.2 (Riesz Representation Theorem)

X 局部紧 Hausdorff，Λ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 那么存在一个包含所有 X 中 Borel 集的 $\sigma-$algebra $\mathfrak{M}$，有唯一 $\mathfrak{M}$ 上的正测度 μ 代表 Λ，即

$$\Lambda f = \int_X f d\mu, \forall f \in C_c(X) \tag{17.1}$$

并且有如下性质

1. $\mu(K) < \infty, \forall$ compact $K \subset X$.
2. $\forall E \in \mathfrak{M}$，有
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ open}\}.$$
3. $\forall$ 开集 E，或 $\forall E \subset \mathfrak{M}$ with $\mu(E) < \infty$
$$\mu(E) = \sup\{\mu(E) : K \subset E, K \text{ compact}\}.$$
4. 若 $E \in \mathfrak{M}$，$A \subset E$，$\mu(E) = 0$，则 $A \in \mathfrak{M}$.

第十八章 吴培元实变函数 2

18.1 第一节课

定义 18.1

$(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *is measure space*. $1 \le p \le \infty$.

$L^p(\mathscr{X}, \mu) := \left\{ f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}, measurable, \left\{ \begin{array}{c} \int_{\mathscr{X}} |f|^p < \infty, if\ 1 \le p < \infty \\ ess.sup\,|f| < \infty, if\ \ p = \infty \end{array} \right. \right\}$

$\rho(f, g) := \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_{\mathscr{X}} |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}, if\ 1 \le p < \infty \\ ess.sup\,|f-g|, if\ \ p = \infty \end{array} \right.$

$\|f\|_p := \left(\int_{\mathscr{X}} |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

定理 18.1 (Rieze-Fisher Thm(1907))

$L^p(\mathscr{X}, \mu)$ is complete metric space.

证明

- $1 \le p < \infty$:

笔记 $p = 1$ proved last semester.

笔记

1. 先证明 $\|\cdot\|_p$ 中的 Cauchy sequence 在 $\|\cdot\|_1$ 中也是 Cauchy sequence.
2. 由于 $L^1(\mathscr{X}, \mu)$ complete , 故该 Cauchy sequence 收敛于某个 $L^1(\mathscr{X}, \mu)$ 中的 f in $L^1(\mathscr{X}, \mu)$
3. 再证明 $f \in L^p(\mathscr{X}, \mu)$
4. 再证明该 Cauchy sequence 收敛于 f in $L^p(\mathscr{X}, \mu)$

Let $\{f_n\}$ cauchy in $L^p(\mathscr{X}, \mu)$, i.e.

$$\rho(f_m, f_n) \to 0 \implies \int_{\mathscr{X}} |f_n(x) - f_m(x)|^p \to 0 \tag{18.1}$$

- Check: $|f_m - f_n| \to 0, a.e.$ i.e.

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \exists N, s.t. m, n \ge N, s.t. \mu(\{x \in \mathscr{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}) < \delta \tag{18.2}$$

Denote $\{x \in \mathscr{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}$. by $E_{m,n}$. Then $|f_n - f_m|^p$ *integrable* $\Rightarrow \mu(E_{m,n}) < \infty$,otherwise $\int_{\mathscr{X}} |f_n - f_m|^p \ge \int_{E_{m,n}} |f_n - f_m|^p \ge \int_{E_{m,n}} \varepsilon^p = \varepsilon^p \mu(E_{m,n}) \to \infty$.Therefore, $|f_n - f_m|^p \ge \varepsilon^p \chi_{E_{m,n}}$.

$$\begin{array}{ccccc} & \int |f_n - f_m|^p & \ge \int \varepsilon^p \chi_{E_{m,n}} & = \varepsilon^p \mu(E_{m,n}) & \\ \Rightarrow & \downarrow & & \downarrow & as\ n, m \to \infty. \\ & 0 & \Rightarrow & 0 & \end{array} \tag{18.3}$$

Hence, $\exists f_{n_k} \to f, a.e.$ in $L^1(\mathscr{X}, \mu)$

- Check: $f \in L^p(\mathscr{X}, \mu)$ $\left|f_{n_k}\right|^p \to |f|^p, a.e.$

Fatou's Lemma$\Rightarrow \int |f|^p \le \varliminf_{k} \int \left|f_{n_k}\right|^p \le \sup_n \int |f_n|^p$ $\{f_n\}$ cauchy in $\|\cdot\|_p$. Then $\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t.$

$$\|f_n - f_N\|_p < \varepsilon, \forall n \ge N$$

$$\|f_n\|_p \le \|f_n - f_N\|_p + \|f_N\|_p < \varepsilon + \|f_N\|_p \text{ (which is a const.)} < \infty, \forall n \ge N$$

Hence, $L^p(\mathscr{X}, \mu)$.

- Check: $f_n \to f$. in $L^p(\mathscr{X}, \mu)$.

We have $\begin{cases} \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p \overset{if\ n,n_k\ large}{<} \varepsilon. \\ \left\|f_{n_k} - f\right\|_p = \left(\int \left|f_{n_k} - f\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{Fatou}{\leq} \underline{\lim}_{l} \left(\int \left|f_{n_k} - f_{m_l}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{if\ n_k,m_l\ large}{\leq} \varepsilon \end{cases}$

Then

$$\|f_n - f\|_p \leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p + \left\|f_{n_k} - f\right\|_p \to 0$$

Hence, $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{X}, \mu)$.

- $p = \infty$:

笔记 类似 $1 \leq p < \infty$.

Let $\{f_n\}$ cauchy in $L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$. i.e.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \overset{as\ n,m\ large}{<} \varepsilon\ a.e. \tag{18.4}$$

Therefore, $\{f_n(x)\}$ cauchy for almost all x. i.e. $f_n(x) \to f(x), a.e.$

- Check: $f_n \to f\ in\ \|\cdot\|_\infty$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \overset{as\ n,m\ large}{<} \varepsilon\ a.e. \underset{Let\ m\to\infty}{\Rightarrow} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\ a.e.$$

Hence, $f_n \to f\ in\ \|\cdot\|_\infty$.

- Check: $f \in L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$.

$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, if\ n \geq N$. Then

$$\|f\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \|f - f_N\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon < \infty$$

Hence, $f \in L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$.

In conclusion, every Cauchy sequence conv. in $L^p(\mathscr{X}, \mu), (1 \leq p \leq \infty)$, thus $L^p(\mathscr{X}, \mu), (1 \leq p \leq \infty)$ is complete metric space.(defined in 18.1) \\\\

第一节课的证明

定理 18.2

$(\mathscr{X}, \rho)$ metric space, $\varnothing \neq F_n \subseteq \mathscr{X}$ compact $\forall n$

$\Rightarrow \cap_n F_n \neq \varnothing$.

证明 Select x_{n_k} in each nonempty set F_{n_k}, thus the sequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ in a sequentially compact set F_1. So $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge to a point $x \in F_1$. Since $F_n, \forall n$ is closed, then $x \in F_{n_k}, \forall k$. Obviously, if $x \in F_n$, then $x \in x_m, \forall m \leq n$. Since $x_{n_k} \to \infty$, then $x \in F_n, \forall n$, then $x \in \cap_n F_n$.

定理 18.3 (Baire theory)

第一纲集是一列无内点闭集的并，否则是第二纲集.

定理 18.4 (Baire theorem)

$(\mathscr{X}, \rho)$ complete metric space

$\Rightarrow \mathscr{X}$ is of 2nd category

or $\mathscr{X} = \cup_n \mathscr{X}_n$ where $\mathscr{X}_n$ closed $\Rightarrow \exists x_0, s.t.\mathrm{Int}\mathscr{X}_{n_0} \neq \varnothing$.

引理 18.1

一个空间是可分的当且仅当它有可数稠密子集.

定义 18.2 (sequentially compact space)

假设 X 是拓扑空间，如果 X 的每一个序列都有一个收敛子列，那么 X 就被称为是序列紧致空间。

定理 18.5

$(\mathscr{X}, d)$ metric space, $K \subseteq \mathscr{X}$ sequentially compact space.
$\Rightarrow K$ is closed, bdd, separable.

证明

1. Pick a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ in $\mathscr{X}$, where $x_n \in K, \forall n$, and we request $x_n \to x \in \mathscr{X}$.
   Then $\exists$ a subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $y \in K$. Hence, $x = y \in K$, thus K is closed.
2. We need to show $\sup_{x,y \in K} d(x, y) < \infty$.
   Assume not, then $\forall n, \exists x_n, y_n \in K, s.t. d(x_n, y_n) > n$.
   Pick $z \in K$, then $d(z, x_n) + d(z, y_n) \geq d(x_n, y_n) > n$. Then $d(z, x_n) \geq \frac{n}{2}$ or $d(z, y_n) \geq \frac{n}{2}$. Then $\exists$ a subsequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ of $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots\}$,s.t.$d(x, u_n) \geq \frac{n}{2}$.
   Then $\exists \{u_{n_k}\} \to u$, $d(u, u_{n_k}) + d(u, z) \geq d(u_{n_k}, z) \geq \frac{n}{2}, \forall n$. Let $k \to \infty$, then $d(u, u_{n_k}) \to 0$, then $d(u, z) \geq \frac{n}{2}, \forall n$. Then $d(u, z) = \infty$, however, $u, z \in K \subseteq \mathscr{X}$, which is a metric space. This is a contradiction!
3. We need to show that there is a countable dense subset of K. Pick $x_1 \in K$, let $d_1 \coloneqq \sup_{x \in K} d(x, x_1) > 0$, then $\exists x_2 \in K, s.t. d(x_1, x_2) \geq \frac{d_1}{2}$. Let $d_2 \coloneqq \sup_{x \in K} \{d(x, x_1), d(x, x_2)\} > 0$, then $\exists x_3 \in K, s.t. \min(d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)) \geq \frac{d_2}{2}$. $\cdots$.
   Let $d_n \coloneqq \sup_{x \in K} d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots, d(x, x_n)$, then $\exists x_{n+1} \in K, s.t. \min(d(x_{n+1}, x_1), d(x_{n+1}, x_2), \cdots, d(x_{n+1}, x_n)) \geq \frac{d_n}{2}, \cdots$. Then we get a sequence in K, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

   - Check: $d_n \to 0$
     $\because d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq 0, \lim_{n\to\infty} \coloneqq \alpha$. If $\alpha > 0$, then $d(x_m, x_n) \geq \frac{d_n}{2} \geq \frac{\alpha}{2} > 0, n > m$. Then there is no convergent subsequence, which contradicts with the sequentially compact property.
   - Check: $\exists x_n \in B(x_0, \varepsilon), \forall x_0 \in K$
     Pick d_n, with $\varepsilon > d_n^+ > d_n > 0$, if $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \notin B(x_0, \varepsilon)$, then $d(x_0, x_i) \geq \varepsilon > d_n^+, \forall 1 \leq i \leq n+1$, then $\sup_{x \in K} \min(d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots, d(x, x_{n+1})) \geq d_n^+ > d_n$, which contradicts with the definition of d_n.

□

定理 18.6

$(\mathscr{X}, d)$ metric space, $K \subseteq \mathscr{X}$
Then $\mathscr{X}$ compact $\Leftrightarrow \mathscr{X}$ sequentially compact.

推论 18.1

$K \subseteq \mathscr{X} \Rightarrow K$ closed, bdd, separable.
$K \subseteq \mathscr{X} \nLeftarrow K$ closed, bdd, separable.

定义 18.3 (totally bdd)

$K \subseteq \mathscr{X}$ is totally bdd if $\forall \varepsilon > 0, \exists B(x_1, \varepsilon), \cdots, B(x_n, \varepsilon), s.t. K \subseteq \cup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.

笔记 K totally bdd $\Rightarrow K$ bdd.
K totally bdd $\nLeftarrow K$ bdd.

第十九章 复分析

一般情况下，X 是一个拓扑空间，f 是 Ω 上的复值函数.

19.1 一些定义

定义 19.1 (curve)

X 中的曲线 (curve) 是一个从 $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}^1$ 中的紧集到 X 的连续映射.

定义 19.2 (Holomorphic function (Analytic function) 全纯函数 (解析函数))

称 f 为 Holomorphic function，若

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{19.1}$$

存在，对于任意 $z_0\in\Omega$. 同时，将 Ω 上的全纯函数集合记为 $H(\Omega)$.

笔记 $H(\Omega)$ 构成一个环 (ring)28.2，运算为函数加法和乘法.

笔记 所有 $f\in H(\Omega)$ 都可以被 Ω 内幂级数表示.

笔记 我们将整个复平面上的 Holomorphic function 称为 Entire function.

定义 19.3 (Meromorphic function(亚纯函数))

A meromorphic function therefore may only have finite-order, isolated poles and zeros and no essential singularities in its domain.

笔记 亚纯函数是全纯函数的一种推广，它定义域内没有 essential singularities，但是允许有离散的 removable singularities 和 poles，依然能保持比较好的性质.

定义 19.4 (closed path 闭合路径)

cloed path = closed curve[a] + path[b].

[a]称一条曲线为闭合曲线 (closed curve)，若它起点和终点相同.

[b]称一条曲线为路径，若它分块连续可微. 导数可以在有限个点处跳跃

定理 19.1

令 γ 为一个闭合路径，令 Ω 为 γ^{*}[a]的补集 (w.r.t. the plane)，定义

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}\quad(z\in\Omega) \tag{19.2}$$

那么 Ind_γ 是一个 integer-valued function on Ω，它在 Ω 的每个组成部分上为常数，并且在 Ω 的无界组成部分上为 0.

[a]γ^* 表示 γ 的值域

笔记 我们称 Ind_γ 为 the index of z w.r.t. γ.

定义 19.5 (moderate decrease)

称 f moderate decrease，若 f 连续且存在 $A>0$，使得 $|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}$.

笔记 A more restrictive condition is that $f \in \mathcal{S}$, the schwartz space of testing functions, which also implies that $\hat{f}$[1] belongs to $\mathcal{S}$.

19.2 一些定理

定理 19.2

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in H(\Omega)$ iff f 在 Ω 上处处满足 Cauchy-Riemann 方程[a].

[a]即 u, v 在 Ω 处处可微且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

定理 19.3 (The residue formula)

$f \in H(O)$, O contains circle C and its interior, except for a pole at z_0 inside C. Then

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f. \tag{19.3}$$

笔记 $\operatorname{res}_{z_0} f$ 表示 f 在 z_0 洛朗展开后的系数 a_{-1}.

留数的形式推导

笔记 对于有限个 pole 也对，对于非圆形轮廓 γ 也对.

笔记 关于留数怎么算，见《积分的方法与技巧》pp325.

定理 19.4 (鲁歇定理)

$f, g \in H(O)$, O is an open set containing a circle C and its interior. If

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$$

then f and $f + g$ have the same number of zeros inside the circle C.

定理 19.5 (Open mapping theorem)

If $f \in H$ and nonconstant in a region Ω, then f is open[a].

[a]A mapping is said to be open if it maps open sets to open sets

定理 19.6 (Maximum modulus principle)

If $f \in H$ non-constant in a region Ω, then f cannot attain a maximum in Ω.

证明 假设 f 在 z_0 取得最大模 $|f(z_0)|$，取开圆盘 D，使得 $z_0 \in D$. 那么根据开映射定理，$f(D)$ 也是开的，所以存在 $z \in D$，使得 $|f(z)| > |f(z_0)|$，矛盾！

推论 19.1

Ω is a region with compact closure $\bar{\Omega}$. If $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, then

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \le \sup_{z\in\bar{\Omega}-\Omega} |f(z)| \tag{19.4}$$

[1] $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$，表示傅里叶变换.

第二十章 泛函分析

20.1 一些空间

下面我们介绍在泛函分析中几个空间的定义, 有 linear space5.1, Hilbert space, normed space, Banach space.

定义 20.1 (normed space)

$(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ is a normed space if

1. $x \longmapsto \|x\| : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$
2. $\|x\| \geq 0, \forall x$
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}, x \in \mathscr{X}$
5. $\|x+\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathscr{X}$

Then let $\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathscr{X} \implies \rho$ is metric.

定义 20.2 (Banach space)

Def $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ is Banach space if ρ is complete.

定义 20.3 (metric linear space)

Def $(\mathscr{X}, \rho)$ metric linear space if

1. $\mathscr{X}$ is vector space.
2. ρ is metric.
3. $f : \begin{array}{c} \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}, g : \begin{array}{c} \mathbb{F} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$ are conti. in ρ.

定义 20.4 (Fréchet space(目前几乎不用))

Def $(\mathscr{X}, \rho)$ is Fréchet space if

1. $\mathscr{X}$ metric linear space.
2. ρ is complete.
3. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \forall x, y, z \in \mathscr{X}$ (translation − invariant)

20.2 泛函分析三大定理

1. Open Mapping Theorem20.1
2. Inverse Mapping Theorem20.2
3. Hahn - Banach Theorem20.3

定理 20.1 (Open Mapping Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ bdd operator & onto.

Then T is open.

定理 20.2 (Inverse Mapping Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ 1-1, onto, bdd operator.
Then $T^{-1} : Y \to X$ is bdd.

笔记 下面三个定理是等价的:

1. Open Mapping Theorem20.1
2. Inverse Mapping Theorem20.2
3. Closed Graph Theorem20.4

这三个定理对于 nonlinear functional 是不成立的.

定理 20.3 (Hahn - Banach Theorem)

X normed space over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $Y \subset X$ subspace(not necessarily closed), $y^* : Y \to \mathbb{F}$ bdd, linear functional. Then y^* can be extended to bdd linear $x^* : X \to \mathbb{F}, s.t. \|x^*\| = \|y^*\|$

笔记 Hahn - Banach 定理有着众多有用的推论.

推论 20.1 (Hahn-Banach 定理)

X normed space over $\mathbb{F}$, $Y \subseteq X$ subspace, $x_0 \in X \backslash Y$. Then $\exists x^* \in X^*, s.t. x^*(x_0) = 1, x^*(Y) = \{0\}$, where $d = \inf\limits_{y \in Y} \|y - x_0\| > 0$.

推论 20.2 (Hahn-Banach 定理)

X normed space over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$ in X. Then $\exists x^* \in X^*, s.t. x^*(x_0) = \|x_0\|, \|x^*\| = 1$

推论 20.3 (Hahn-Banach 定理)

X Banach space, T invertible operator on X. Then $\inf\{\|T - S\| : S$ noninvertible on $X\} = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

推论 20.4 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $X \neq Y \in X$. Then $\exists x^* \neq X^*, s.t. x^*(x) \neq x^*(y)$.

推论 20.5 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $x \in X$. Then $x \in X$
Then $\|x\| = \sup\limits_{x^* \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|}$.

笔记 $\|x^*\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}$, $\forall x^* \in X^*$
这是 $\|x^*\|$ 的定义, 这个推论体现了 x 和 x^* 的对偶性质.

推论 20.6 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $Y \subseteq X$subspace. Then $\overline{Y} = X \Leftrightarrow$ "$\forall x^* \in X^*, x^*(y) = 0, \forall y \ \Rightarrow x^* = 0$"

推论 20.7 (Hahn-Banach 定理)

X normed space, $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, $(x^* : X \to \mathbb{F})$, let $x_0 \in X$, $x_0 \notin \ker x^*$.Then $\forall x \in X$, $x = z + \lambda x_0$ for some $z \in \ker\ x^*, \lambda \in \mathbb{F}$ uniquely.

20.3 其它定理

定理 20.4 (Closed Graph Theorem)

X,Y Banach spaces, $T : X \to Y$ linear transformation. Assume $G_T := \{(x, Tx) : x \in X\}$ closed in $X \times Y$. Then T bdd.

笔记 这个定理有时候可以用来证明线性泛函的连续性.

20.4 谱理论

20.4.1 Fredholm-Riesz-Schauder Theory

引理 20.1

T compact on X, $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \ker(\lambda I - T)$ finite-dim subspace of X.

See proof here.

引理 20.2

T, λ as above.

Then $\mathscr{R}(\lambda I - T)$ closed.

See proof here and here..

引理 20.3

Denote $\ker(\lambda I - T)^n$ by N_λ^n

$\exists k \geq 1, s.t. N_\lambda^1 \subsetneqq N_\lambda^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_\lambda^n = N_\lambda^{n+1} = \cdots$

See proof here

引理 20.4

$\lambda I - T$ onto$\Leftrightarrow$ $\lambda I - T$ 1-1

See proof here.

引理 20.5

$\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ indep. in X^*.

$\Rightarrow \exists \{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subseteq X, s.t. x_i^*(x_i) = \delta_{ij}, \forall i, j$

See proof here.

引理 20.6

$\dim\ker(\lambda I - T) = \dim\ker(\lambda I - T^*) < \infty$

See proof here.

20.5 核

Dirichlet 核与 Fejér 核

第二十一章 Stein 傅里叶分析

内容提要

- 傅里叶系数相等的函数是否相等?
- 傅里叶级数部分和与狄利克雷核
- 卷积
- 好核 (good kernel)
- 不同的求和 (Cesàro 和、Abel 和)

笔记 关键思想就是：想要推导出矛盾，可以考虑若假设成立，那么按照一种方法算出来 A 的阶 $\leq O(\log N)$，另一种方法算出来 A 的阶是 $O(n^{1-\alpha})$，故矛盾.

定义 21.1

对于定义在 $[0,1]$ 上的函数 $g(x)$,

傅里叶系数：$\hat{g}(n) = a_n = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx$

傅里叶级数：$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$

部分和：$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}$

笔记 对于定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数，只需要进行一个伸缩变换就可以了.

定义 21.2 (Dirichlet 核)

定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的三角多项式

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

定义 21.3 (Poisson 核)

$\theta \in [-\pi,\pi], 0 \leq r < 1$

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

[a]

[a] Poisson 核是好核

问题 21.1 是否有 f 的傅里叶级数和收敛到 f？即

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta), \forall\theta$$

笔记 需要更强的光滑性.

定理 21.1

f 在圆周上可积，$\hat{f}(n) = 0, \forall n$. 则 $f(\{f\text{的连续点}\}) = 0$.

证明 不妨考虑实值函数，选取连续点为 0，若 $f(0) > 0$[1]，由于傅里叶系数全为 0，考虑数值集中在 0 处的三角

[1] $f(0) < 0$ 类似

多项式 $p(\theta)$[2]，于是 $f(\theta)p(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的积分为 0，但是另一方面，$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p(\theta)d\theta \sim f(0) > 0$. 矛盾！

推论 21.1

f 在圆周上连续，$\hat{f}(n) = 0, \forall n$. 则 $f = 0$.

推论 21.2

若 f 在圆周上连续，f 的傅里叶级数绝对收敛，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$. 那么 f 的傅里叶系数一致收敛到 f,i.e.

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta) \text{ uniformly in } \theta. \tag{21.1}$$

证明 对于任意给定的 θ，由于 f 的傅里叶系数绝对收敛，不妨设 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta} = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta)$ 收敛到 $g(\theta)$，显然连续[3]. 于是 f 和 g 有相同的傅里叶级数[4]且二者连续，于是 $f-g$ 的傅里叶系数都为 0. 由推论21.1，可知 $f = g$，即

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta) \text{ uniformly in } \theta. \tag{21.2}$$

[5]

推论 21.3

若 f 在圆周上二阶连续可微[a]，那么

$$\hat{f}(n) = O(1/|n|^2) \quad as \ |n| \to \infty$$

于是 f 的傅里叶级数绝对收敛并一致收敛到 f.

[a]可以被减弱到 f 有 $\alpha(\alpha > 1/2)$-赫尔德连续.

证明 分部积分改善阶.

定义 21.4 (卷积)

f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数，我们定义它们在 $[-\pi,\pi]$ 上的卷积 $f * g$:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

Dirichlet 核：

$$\begin{tikzcd}
D_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \arrow[r, "*f"] \arrow[d, "*f"] & S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} \arrow[d, equal] \\
\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\right)dy \arrow[r, equal] & \displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx}
\end{tikzcd}$$

Poisson 核：

[2]图像上类似于狄拉克函数

[3]前面有限项是一堆连续函数的求和，故连续，后面无限项求和又可以任意小 (因为绝对收敛)

[4]因为 $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}$ 一致收敛，故积分与求和可换序.

[5]求完极限后 g 与 f 都完全相等了，就无所谓 θ 的选取了. 仔细琢磨这个关于 θ 一致.

$$
\begin{tikzcd}
P_r(\theta)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \arrow[r, "*f"] \arrow[d, "*f"] & A_r(f)(\theta)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}a_n e^{in\theta} \arrow[d, equal] \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-in(\varphi-\theta)}\right)d\varphi \arrow[r, equal, "\text{一致收敛，故可换序}"] & \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi\right)e^{in\theta}
\end{tikzcd}
$$

性质 1.

若 f,g,h 都是 2π 周期可积函数. 那么

(i). $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

(ii). $(cf)*g=c(f*g)=f*(cg), \forall c\in\mathbb{C}$

(iii). $f*g=g*f$

(iv). $(f*g)*h=f*(g*h)$

(v). $f*g$ 是连续的

(vi). $\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$

我们只证明 (v)，其它的都是显然的.

$$
\begin{tikzcd}
f,g\text{可积} \arrow[d, "\text{引理21.1}"'] \arrow[dr, dashed, bend left] & \\
f,g\text{连续} \arrow[r, Rightarrow] & f*g\text{连续}
\end{tikzcd}
$$

证明 若 f,g 连续，则 f,g 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致连续.

$$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)|\leq\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y)-g(x_2-y)]dy\right|\longrightarrow 0\ (as\ \ |x_1-x_2|\to 0)$$

故 $f*g$连续.

若 f,g 仅仅可积，我们有如下引理：

引理 21.1

若 f 在圆周上可积[a]，那么存在一列圆周上的连续函数 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f_k(x)|\leq\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|,\quad \forall k=1,2,\cdots$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_k(x)|\,dx\to 0\quad as\ k\to\infty$$

[a]这里的可积都是常义黎曼可积，常义黎曼可积就意味着在闭区间上积分有限，被积函数有界

证明

$$f*g-f_k*g_k=(f-f_k)*g+f_k*(g-g_k)$$

由函数列 $\{f_k\},\{g_k\}$ 的性质：

$$\begin{aligned}
|(f-f_k)*g(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)-f_k(x-y)|\,|g(y)|\,dy\\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_y|g(y)|\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)-f_k(y)|\,dy\\
&\to 0 \quad as\ k\to\infty.
\end{aligned}$$

□

定义 21.5 (好核)

圆周上的一族核 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 被称为一族好核，如果它满足如下性质：

(a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1,\quad \forall n\ge 1$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx$ 关于 n 一致有界

(c) 对于任意 $\delta>0$，$\displaystyle\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_n(x)|\,dx\to 0,\quad as\ n\to\infty.$

♣

定理 21.2

令 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族好核，f 是圆周上的可积函数. 那么

$$\lim_{n\to\infty}(f*K_n)(x)=f(x)$$

其中 x 是 f 的连续点. 若 f 处处连续，那么上述极限是一致的.

♡

笔记 因为这个定理21.2，$\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 被称为 approximation to the identity.

笔记 好核 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每个 $K_n(x)$(n 很大时) 都集中在 $x=0$ 处.

证明

$$\begin{tikzcd}
 & |(f*K_n)(x)-f(x)| \arrow[d, equal] & \\
 & \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_n(y)dy-f(x)\right| \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy \arrow[d] & & \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy \arrow[d] \\
\text{被}f\text{在}x\text{处的连续性控制} & & \text{被 }\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_n(x)|\,dx\to 0(n\to\infty)\text{控制}
\end{tikzcd}$$

命题 21.1

Dirichlet 核21.2不是好核. 因为 $\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|\ge c\log N,\quad as\ N\to\infty.$

♠

定义 21.6 (Cesàro 平均)

对于复数列 $\{c_k\}_{k\ge 0}$，记部分和 $s_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$

$$\sigma_N=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{N-1}}{N}$$

σ_N 就被称为数列 $\{s_k\}$ 或级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ 的 N 阶 Cesàro 平均.

♣

定义 21.7

我们定义傅里叶级数的 N 阶 Cesàro 平均：

$$\sigma_N(f)(x)=\frac{S_0(f)(x)+\cdots+S_{N-1}(f)(x)}{N}$$

由于 $S_n(f)=f*D_n$，我们定义

$$\sigma_N(f)(x)=(f*F_N)(x)$$

其中 N 阶 Fejér 核是

$$F_N(x)=\frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}$$

引理 21.2

$$F_N(x)=\frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

并且 Fejér 核是好核.

定理 21.3

若 f 在圆周上可积，那么在每个 f 连续的点处，f 的傅里叶级数在 Cesàro 平均意义下收敛到 f.

推论 21.4

若 f 在圆周上可积，并且 $\hat{f}(n)=0,\forall n$，于是 $f\{f\text{的连续点}\}=0$.

证明 因为所有的部分和都是 0，所以所有的 Cesàro 平均都是 0.

推论 21.5

圆周上的连续函数 f 可以被三角多项式一致地逼近.

证明 只需要取这一列三角多项式为 f 的傅里叶级数的 N 阶 Cesàro 平均即可.

定义 21.8 (Abel 平均)

复级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ 被称为 Abel 可求和到 s 的，如果 $\forall r\in[0,1)$，级数

$$A(r)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kr^k$$

收敛，并且

$$\lim_{r\to1}A(r)=s.$$

笔记 Abel 可求和性比 Cesàro 可求和性更加强大.

Exercise

定理 21.4 (Abel 分部求和公式)

令 $\{a_n\}_{n=1}^N$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^N$ 是两个有限复数序列. 记 $B_k=\sum_{n=1}^k b_n$ 为 $\sum b_n$ 的部分和，补充定义 $B_0=0$.

$$\sum_{n=M}^{N}a_nb_n=a_NB_N-a_MB_{M-1}-\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

笔记 We can deduce from this formula Dirichlet's test for convergence of a series: if the partial sums of the series $\sum b_n$ are bounded, and $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers that decreases monotonically to 0 , then $\sum a_n b_n$ converges.

命题 21.2

$f \in C^k$ 是 2π 周期函数，那么

$$\hat{f}(n) = O(1/|n|^k) \quad as \quad |n| \to \infty.$$

证明 分部积分改善阶.

命题 21.3

若一列复数 $\sum c_n$ 收敛到 s，那么 $\sum c_n$ 在 Cesàro 平均的意义下收敛到 s.

证明 Abel 分部求和.

命题 21.4

若一列复数 $\sum c_n$ 在 Cesàro 平均的意义下收敛到 s(有限)，那么 $\sum c_n$ 在 Abel 平均的意义下收敛到 s.

证明 Abel 分部求和.

命题 21.5

存在在 Abel 平均的意义下收敛但在 Cesàro 平均的意义下发散的级数. 比如 $\sum(-1)^{n-1}n$.

引理 21.3

若 $\sum c_n$ 在 Cesàro 平均的意义下收敛，则 $c_n/n \to 0$.

$$\begin{tikzcd}
\text{收敛} \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & \{(-1)^n\}_{n\geq 1} & \text{Cesàro 可求和} \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "/" marking] \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & \{(-1)^{n-1}n\}_{n\geq 1} & \text{Abel 可求和} \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

定理 21.5

若 $\sum c_n$ 在 Cesàro[a]平均的意义下收敛到 σ，且 $c_n = o(1/n)$，那么 $\sum c_n$ 收敛到 σ.

[a]在 Abel 平均的意义下也对.

命题 21.6

若 f 在 θ 处跳跃间断，那么

$$\lim_{r\to 1} A_r(f)(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}, \quad 0 \leq r < 1$$

类似地，

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}$$

Littlewood provided a refinement of Tauber's theorem21.5:

定理 21.6

若 $\sum c_n$ 在 Abel[a]平均的意义下收敛到 s，$c_n = O(1/n)$，那么 $\sum c_n$ 收敛到 s.

[a]显然在 Cesàro 平均的意义下也对

第二十二章 常微分方程

22.1 一般理论

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}) \tag{22.1}$$

定理 22.1 (Picard 存在唯一性定理)

对于微分方程及初值条件:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \tag{22.2}$$

矩形区域:

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\} \tag{22.3}$$

$f(t,x)$ 在 R 上连续，若还满足 Lipschitz 条件 [a]，则我们有初值问题22.2在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的解存在且唯一，其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\},\quad M = \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in R\}. \tag{22.5}$$

[a]称 $f(x,t)$ 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L > 0$，使得对于任意 $(t,x_1) \in R, (t,x_2) \in R$，有

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L\,|x_1 - x_2| \tag{22.4}$$

都成立. 称 L 为 Lipschitz 常数.

笔记 在实际应用中，Lipschitz 条件往往难以检验. 这时我们常常用 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续来代替. 因为若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续，则必有界，这由 Lagrange 中值定理立刻得到.

若 $f(t,x)$ 在 R 上连续但是不满足 Lipschitz 条件，那么初值问题22.2的解依然存在，但是不唯一. 这就是 Peano 存在定理.

定理 22.2 (Peano 存在定理)

若 $f(t,x)$ 在 R 上连续，则初值问题22.2在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上至少有一个解. 其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\},\quad M = \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in R\}. \tag{22.6}$$

定理 22.3 (解的延拓理论)

设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开区域，$f(t,x)$ 在 G 内连续. 对初值问题22.2的任一饱和解 $x = \varphi(t)$，积分曲线 $x = \varphi(t)$ 必能到达 G 的边界. 特别地，当 G 为有界区域时，饱和解 $x = \varphi(t)$ 的存在区间为 (a,b)，则当 $t \to b^-$ 和 $t \to a^+$ 时都有

$$\rho((t,\varphi(t)), \partial G) \to 0 \tag{22.7}$$

笔记 对于 Peano 存在定理22.2中的解，我们可以考虑取新的 t_0 为 R 内的解与 ∂R 的交点，这样就又存在一个小矩形 R' 使得解可以再次延伸. 不断重复这种操作直到不能再解延伸，得到的解就称为饱和解. 由这些操作可知，饱和解的存在区间不可能是任何一个闭区间.

笔记 由解的延拓理论22.3不难看出：如果 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 是无界区域，$f(t,x)$ 在 G 内连续，微分方程 $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ 的过 G 内任一点 (t_0,x_0) 的解 $x = \varphi(t)$ 可以延拓，以向 t 增大的一方的延拓来说，则解 $x = \varphi(t)$ 或者可以延拓到区间 $[t_0, +\infty)$，或者只能延拓到有限区间 $[t_0, m)$. 如果是后者，则当 $t \to m^-$ 时，要么 $x = \varphi(t)$ 无界，要么 $(t, \varphi(t))$ 趋于 G 的边界.

笔记 就是说要么 t 无界，要么 $x=\varphi(t)$ 无界.

推论 22.1 (解存在于所有 f 连续有界的区间)

若 $f(t,x)$ 在区域 $G=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2: T_0<t<T_1, |x|<\infty\}$ 中连续，而且相应的微分方程初值问题饱和解 $x=\varphi(t)$ 有界，则 $\varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0,T_1).

笔记 这个推论22.1的证明是说，如果解 $x=\varphi(t)$ 在 (T_0,T_1) 的任何一个子开区间内结束存在性，则这个解是无界解. 取逆否命题则得到推论22.1.

推论 22.2 (Wintner)

设 $\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 在区域

$$G=\{(t,\mathrm{x})\in\mathbb{R}^{n+1}: T_0<t<T_1, \|\mathrm{x}\|<\infty\}$$

内连续且满足条件

$$\|\mathrm{f}(t,\mathrm{x})\|\le L(r),\ r=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{22.8}$$

其中 $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$，$L(r)$ 在 $r\ge 0$ 上连续，在 $r<0$ 时为正，且

$$\int_\alpha^\infty \frac{dr}{L(r)}=\infty \quad (\alpha>0) \tag{22.9}$$

则 $\dfrac{d\mathrm{x}}{dt}=\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 的任一饱和解 $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)$ 都在区间 (T_0,T_1) 上存在.

笔记 这个定理最重要的是证明的思路，导出矛盾的操作.

证明 我们反证，假设 $\dfrac{d\mathrm{x}}{dt}=\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 解的最大存在区间为 $(a,b)\subset(T_0,T_1)$，不妨设 $b<T_1$，显然 b 有限. 任取一点 $t_0\in(a,b)$，我们断言 $\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 在 (t_0,b) 上有界，于是由解的延拓理论22.3可知，$\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 在 b 处还可以右延拓，这与 (a,b) 是解的最大存在区间矛盾!

下面验证：$\mathrm{f}(t,\mathrm{x})$ 在 (t_0,b) 上有界. 我们反证，假设无界. 那么存在一列 $\{t_n\}\in(t_0,b)$，显然 $t_n\to b(n\to\infty)$，使得 $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t_n)\to\infty$. 另一方面，$\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)$ 是微分方程的解，则有：

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i x_i'}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}\le\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sum_{i=1}^n x_i'^2=\sum_{i=1}^n x_i'^2=\left\|\frac{d\mathrm{x}}{dt}\right\|=\|\mathrm{f}(t,\mathrm{x})\|\le L(r) \tag{22.10}$$

于是有

$$\int_{t_0}^{t_n}\frac{dr}{L(r)}\le\int_{t_0}^{t_n}dt=t_n-t_0 \tag{22.11}$$

令 $n\to\infty$，就有

$$\int_{t_0}^\infty\frac{dr}{L(r)}\le b-t_0<\infty \tag{22.12}$$

这与 $\displaystyle\int_{t_0}^\infty\frac{dr}{L(r)}=\infty$ 矛盾! □

推论 22.3 (在 $x\in\mathbb{R}^1$ 时)

设 $f(t,x)$ 在域

$$G=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2: T_0<t<T_1, |x|<\infty\}$$

内连续，且存在与 t 无关的常数 N，使得

$$|f(t,x)| \le N|x| \tag{22.13}$$

则微分方程22.2的任一饱和解 $x=\varphi(t)$ 都在区间 (T_0,T_1) 上存在.

定理 22.4 (第一比较定理)

设函数 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(t,x) < F(t,x) \tag{22.14}$$

设 $(t_0,x_0)\in G$，$\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{22.15}$$

和初值问题

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{22.16}$$

的解，且都在区间 (a,b) 上有定义. 则有

$$\varphi(t)<\Phi(t),\quad \forall t\in(t_0,b) \tag{22.17}$$

$$\varphi(t)>\Phi(t),\quad \forall t\in(a,t_0) \tag{22.18}$$

笔记 非常直观地理解，直接画个图，$F(t,x)$ 比 $f(t,x)$ 要陡，于是不等式22.17和不等式22.18是显然的.

在方程的初值问题没有唯一性保证的时候，最大解和最小解的概念是有用的.

定义 22.1 (最大解和最小解)

设 $f(t,x)$ 在矩形区域

$$R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : |t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}$$

上连续，令 $M=\max\{|f(t,x)|:(t,x)\in R\}, h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$. 再设 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题22.2在区间 $I=[t_0-h,t_0+h]$ 上的两个解，使得对初值问题22.2的任意一个解 $\psi(t)$，都有当 $t\in[t_0-h,t_0+h]$ 时，

$$\varphi(t)\le\psi(t)\le\Phi(t) \tag{22.19}$$

则称 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题22.2的最小解和最大解.

笔记 由定义知最大解和最小解都是唯一的，且均存在，而且类似于解的延拓定理22.3，我们可以把初值问题22.2的最大解和最小解延拓到域 G 的边界.

定理 22.5

存在 $\delta>0$，使得 $\delta<h$ 且在区间 $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 上，初值问题22.2的最大解和最小解都存在.

定理 22.6 (第二比较定理)

设函数 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式 $f(t,x)\le F(t,x)$. 设 $(t_0,x_0)\in G$，$\varphi(x)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题22.15和初值问题22.16的解，且都在区间 (a,b) 上有定义，$\Phi(t)$ 是初值问题22.16在区间 (t_0,b) 上的最大解和区间 (a,t_0) 上的最小解. 则有

$$\varphi(t)\le\Phi(t),\forall t\in(t_0,b) \tag{22.20}$$

$$\varphi(t)\ge\Phi(t),\forall t\in(a,t_0) \tag{22.21}$$

笔记 这个没啥用，主要就是第一比较定理22.4

例题 22.1.

若初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx), x(0) = x_0 \tag{22.22}$$

的积分曲线与直线 $x = t$ 当 $t > 0$ 时有交点，则

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

其中 $x_0 > 0$，$x(t)$ 为初值问题的解.

接下来我们考虑带有参数 λ 的高阶微分方程：

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = f(t, \mathrm{x}, \lambda), \quad \mathrm{x}(0) = 0 \tag{22.23}$$

笔记 我们可以通过平移的方式使得 $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}_0$ 变成 $\mathrm{x}(0) = 0$. 因此不妨设初值条件为 $\mathrm{x}(0) = 0$

定理 22.7 (连续依赖性定理)

设 $\mathrm{f} : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，其中

$$G = \{(t, \mathrm{x}, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |t| \le a, \|\mathrm{x}\|, \|\lambda - \lambda_0\| \le c\} \tag{22.24}$$

而且 f 对 x 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, \mathrm{x}_1, \lambda) - f(t, \mathrm{x}_2, \lambda)\| \le L \|\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2\| \tag{22.25}$$

其中 $L \ge 0$ 是常数. 则初值问题22.23的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域 $D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t| \le h, \|\lambda - \lambda_0\| \le c\}$ 上连续，其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

$$M = \max\{\|\mathrm{f}(t, \mathrm{x}, \lambda)\| : (t, \mathrm{x}, \lambda) \in G\}$$

定理 22.8 (整体连续依赖性定理)

设 $\mathrm{f} : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，其中 G 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上一个开区域，f 对 x 满足局部 Lipschitz 条件，即 $\forall P \in G$，存在以 P 为中心的矩阵邻域 $\Omega(P) \subset G$，使得 f 在 $\Omega(P)$ 上是 Lipschitz 的. 设 $\mathrm{x} = \xi(t)$ 是微分方程组22.1的一个解，它至少在区间 $[a, b]$ 上存在. 则存在常数 $\delta > 0$，当初值点 (t_0, x_0) 满足条件

$$a \le t_0 \le b, \quad \|\mathrm{x}_0 - \xi(t_0)\| \le \delta$$

时，22.1满足初值条件 $\mathrm{x}(t_0 = \mathrm{x}_0)$ 的解 $\varphi(t; t_0, \mathrm{x}_0)$ 至少也在 $[a, b]$ 上存在，且在区域

$$D_\delta = \{(t, t_0, \mathrm{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t, t_0 \in [a, b], \|\mathrm{x}_0 - \xi(t_0)\| \le \delta\}$$

上对 (t, t_0, x_0) 连续.

定理 22.9 (C^1 依赖性定理)

设 G 定义同定理22.7，$\mathrm{f} : G \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，且对 x, λ 有连续偏导数. 则初值问题22.23的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域

$$D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t| \le h, \|\lambda - \lambda_0\| \le c\}$$

上是连续可微的，其中 h, M 的定义同定理22.7.

第二十三章 偏微分方程

23.1 基础概念

定义 23.1

如果一个偏微分方程定解问题满足以下条件：

1. 它的解存在;
2. 它的解唯一;
3. 它的解连续地依赖定解条件和定解问题中的已知函数,

则称这个定解问题是适定的；肉则称这个定解问题是不适定的.

定理 23.1 (大一统公式)

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{23.1}$$

定理 23.2 (格林公式)

$D \subset \mathbb{R}^n$ 是平面上由有线条可求长闭曲线围成的闭区域, 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{23.2}$$

其中 ∂D 取正向.

笔记 在物理中我们用格林公式表示对环流量的计算,$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy$

定理 23.3 (高斯公式)

假设 $V \in \mathbb{R}^3$ 是空间上的一个有界闭区域, 其边界 ∂V 由有限张分块光滑的双侧曲面组成, 并取外法向, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\partial V} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{23.3}$$

$$= \iint_{\partial V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS \tag{23.4}$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为边界 ∂V 的外法线方向的方向余弦.

23.2 调和函数

称函数 $u = u(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为调和函数, 如果它满足 Laplace 方程:

$$\Delta u = 0 \tag{23.5}$$

引理 23.1 (n 维球体积公式)

$$\alpha(n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

笔记 对 n 维球取个截面再积分即可，这个截面是 (n-1) 维球.

证明

$$\alpha(n)=2\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\alpha(n-1)\,dt=2\alpha(n-1)\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dt=\alpha(n-1)\int_0^1(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt \tag{23.6}$$

$$=\alpha(n-1)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\alpha(n-1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=\sqrt{\pi}\alpha(n-1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \tag{23.7}$$

$$\Rightarrow\alpha(n)=\frac{\alpha(n)}{\alpha(1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k-1)}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}=\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

定理 23.4 (平均值公式)

$u\in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，则对于任意的球 $B(x,r)\subset\Omega$，有

$$u(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy \tag{23.8}$$

这里 $\alpha(n)=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的体积.

笔记 平均值公式表明 $\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$ 与 r 无关.

而 $\dfrac{1}{\alpha(n)r^n}\displaystyle\int_{B(x,r)}u(y)\,dy$ 是 $\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$ 对 r 的积分平均，显然相等.

证明

- 为了对 r 求导,$\phi(r):=\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$

  由于积分外和积分区域都有 r，所以我们考虑把 r 消掉一个. 做平移伸缩变换得:

  $$\phi(r)\overset{dS(y)=dS(x+rz)=r^{n-1}dS(z)}{=}\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\,dS(z)$$

  对 r 求微商:

  $$\frac{d}{dr}\phi(r)=\frac{d}{dr}\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\,dS(z)=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}\frac{d}{dr}u(x+rz)\,dS(z)$$

  $$=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}z\cdot\frac{du}{dr}(x+rz)\,dS(z)\overset{\text{变回去}}{=}\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{y-x}{r}\cdot\frac{du}{dr}(y)\,dS(y)$$

  $$\overset{\frac{y-x}{r}\text{等于单位法向量}}{=}\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial \boldsymbol{n}}dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\,dy=0$$

  $$\Rightarrow\phi(r)\text{为常数},u(x)=\lim_{x\to0^+}\phi(x)=\phi(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)$$

- 注意到 $\displaystyle\int_{B(x,r)}u(y)\,dy=\int_0^r\int_{\partial B(x,t)}u(y)\,dS(y)dt$，故

  $$\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_0^r\int_{\partial B(x,t)}u(y)\,dS(y)dt=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}u(x)\,dt=u(x) \tag{23.9}$$

综上, $u(x)=\dfrac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)=\dfrac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\,dy$ \\\\

第二十四章 傅里叶分析与现代偏微分方程

定义 24.1

对于 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ 和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$，记

$$\alpha\pm\beta=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n),$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

$$\alpha\le\beta\text{意指}\alpha_i\le\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

按照这些记号，n 变元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的次数不超过 m 的多项式可写成

$$P(x)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha x^\alpha\quad(a_\alpha\text{均为常数})$$

这里符号 $\sum\limits_{|\alpha|\le m}$ 表示关于所有满足条件 $|\alpha|\le m$ 的 n 重指标 α 求和.

对每个 $i=1,2,\cdots,n$，把偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 简记为 ∂_i，即

$$\partial_i u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

再记 $\partial=(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$. 对 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$，用 $\partial^\alpha,(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ 等符号表示偏导数 $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，即

$$\partial^\alpha u(x)=(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}u(x)=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

♣

定理 24.1 (多重 Newton 二项公式)

对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ 和任意 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ 成立

$$(\xi+\eta)^\alpha=\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\xi^\beta\eta^{\alpha-\beta}=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\xi^\beta\eta^\gamma \tag{24.1}$$

其中符号 $\sum\limits_{\beta\le\alpha}$ 表示关于所有满足条件 $\beta\le\alpha$ 的 n 重指标 β 和 γ 求和. 约定 $0^0=1$.

♡

定理 24.2 (多元 Taylor 展开公式)

如果 n 元函数 u 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 点附近具有直至 m 阶的偏导数，则

$$u(x)=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha+o(|x-x_0|^m),\quad\text{当}\,x\to x_0 \tag{24.2}$$

♡

定理 24.3 (多元 Leibniz 公式)

在 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集 Ω 上，函数 u 和 v 都具有直至 m 阶的偏导数，则对任意满足条件 $|\alpha| \leq m$ 的 n 重指标 α，在 Ω 上成立

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta u \partial^{\alpha-\beta} v = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta u \partial^\gamma v.$$

定理 24.4 (多元逆 Leibniz 公式)

在与前一公式相同的 tiaoo

定理 24.5

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在函数 $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 具有以下性质：

1. $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $\varphi_\varepsilon = 1, \forall x \in \bar{\Omega}$
3. $\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \bar{\Omega_\varepsilon}$
4. 对于任一 $alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，存在与 ε 及 Ω 无关的常数 $C_\alpha > 0$ 使成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}. \tag{24.3}$$

笔记 半范数和范数的区别在于：对于半范数 p,

$$sep = smallp(x) = 0 \not\Longrightarrow x = 0$$

第二十五章 Honors Algebra

宝藏网站

Galois 理论

定义 25.1 (Galois extension)

We say an algebraic extension K of F is Galois if it is separable and normal.

定义 25.2 (separable)

K/F

- We say K is separable over F if every element $\alpha \in K$ is separable over F.
- We say an element $\alpha \in K$ is separable or inseparable if its minimal polynomial $m_{\alpha,F}(x)$ is.

定义 25.3 (normal)

K/F, K is normal if for any irreducible polynomial $f(x) \in F[x]$ that has one zero in K, $f(x)$ splits completely over K.

定义 25.4 ($\mathrm{Aut}(L/K)$)

$\mathrm{Aut}(L/K) :=$ {Automorphisms of L that fix K pointwise}

i.e. if $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$, then $\sigma(L) = L$ is an isomorphism and $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$.

定义 25.5 (L^G)

Given L a field, let G be a group of some automorphism of L.

Define $L^G := \{\alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha,\ \forall \alpha \in G\}$, called the fixed field of G, which is a subfield of L.

定理 25.1 (Galois 理论)

Let K be a finete Galois extension with $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

1. There is a one-to-one correspondence between $\{subgroups\ H \leq G\}$ and $\{intermediate\ fields\ E\ of\ K/F\}$

第二十六章 抽象代数的问题和反例

问题 26.1 若 G 是有限群,$a,b,c\in G$, 则 abc 和 bca 的阶相等

abc 和 bac 的阶不一定相等

问题 26.2 G 是群，$a,b\in G$，就算 $o(a),o(b)$ 互素，但是 $o(ab)=o(a)o(b)$ 也不一定成立. 再加上 $ab=ba$ 就成立 (显然).

问题 26.3 G 是群，$a,b\in G$，则 $o(ab)=o(ba)=o(ba)^{-1}=o(a^{-1}b^{-1})$.

问题 26.4 群 G 中元素 a 的阶为 n, 正整数 $k<n$，则 $o(a^k)=\frac{n}{\gcd(n,k)}$.

问题 26.5 问题 1.1.60 设 G 是群, $g\in G, a$ 的阶为 $n=n_1n_2$, 并且 n_1 与 n_2 互素, 则一定存在 n_1 阶元素 g_1 和 n_2 阶元素 g_2, 使得 $g=g_1g_2$ 吗?

证明 是的. 既然 n_1 与 n_2 互素, 因此存在整数 p 和 q, 使得 $pn_1+qn_2=1$, 并且容易知道 $pn_1\equiv 1\,(\mathrm{mod} n_2)$ 和 $qn_2\equiv 1\,(\mathrm{mod} n_1)$, 故

$$g=g^{pn_1}g^{qn_2}.$$

不难验证 g^{n_1} 的阶为 n_2, g^{n_2} 的阶为 n_1. 令 $g_1=g^{n_1}, g_2=g^{n_2}$, 则 $g=g_1g_2$, 并且 $g_1g_2=g_2g_1$.

问题 26.6 问题 1.1.61 设 G 是群, $g\in G, a$ 的阶为 $n=n_1n_2$, 并且 n_1 与 n_2 互素, 则使得 $g=g_1g_2$ 的 n_1 阶元素 g_1 和 n_2 阶元素 g_2, 并满足 $g_1g_2=g_2g_1$ 的 g_1 和 g_2 一定是唯一的吗?

证明 是的. 假设 $g_1', g_2'\in G, o\left(g_1'\right)=n_2, o\left(g_2'\right)=n_1, g=g_1'g_2'$, 并且 $g_1'g_2'=g_2'g_1'$. 既然 $g_1g_2=g_1'g_2'$, 因此 $(g_1g_2)^{n_1}=\left(g_1'g_2'\right)^{n_1}$, 故 $g_2^{n_1}=\left(g_2'\right)^{n_1}$, 从而, $g_2^{pn_1}=\left(g_2'\right)^{pn_1}$. 由于 g_2 和 g_2' 的阶都是 n_2, 并且 $pn_1\equiv 1\,(\mathrm{mod} n_2)$, 因而, $g_2=g_2'$. 所以, 由 $g_1g_2=g_1'g_2'$ 可得 $g_1=g_1'$. 即唯一性得证.

问题 26.7 问题 1.1.62 设 G 是群, $g\in G, a$ 的阶为 $n=n_1n_2$, 并且 n_1 与 n_2 互素, 则使得 $g=g_1g_2$ 的 n_1 阶元素 g_1 和 n_2 阶元素 g_2 一定是唯一的吗?

笔记 不一定. 在对称群 S_9 中, 对于 $g=(124)(35)(6789)$, 由于 3 个轮换都是不相交的, 故 g 的阶为 3,2 和 4 的最小公倍数 12 . 容易验证 $12=3\times 4$, 并且 g 可以有两种不同的方式写成 3 阶元素和 4 阶元素的乘积.

$$g_1=(124),\quad g_2=(35)(6789)$$

和

$$g_1'=(123),\quad g_2'=(2435)(6789).$$

另外, 明显地, 有 $g_1g_2\neq g_2g_1$.

问题 26.8 若 G 是有限群, 则 G 中阶大于 2 的元素个数一定是偶数 (包括 0).

笔记 考虑 a 与 a^{-1} 配对.

问题 26.9 问题 1.1.67 若 G 是奇数阶 (大于 1) 的有限群, 则除了 G 的单位元, G 一定包含阶为奇数的元素吗?

笔记 是的. 如果 G 的阶是大于 1 的奇数, 则存在 $a\in G, a\neq e$. 由 Lagrange 定理可知, a 的阶一定整除 G 的阶, 因此, a 的阶一定是奇数.

问题 26.10 问题 1.1.68 若 G 是偶数阶的有限群, 则 G 一定包含阶为 2 的元素吗?

笔记 是的. 设 $H=\left\{a\in G\mid a\neq a^{-1}\right\}$, 则容易知道 H 的阶为偶数. 由于 G 是偶数阶的有限群, 故 G 中满足 $a=a^{-1}$ 的元素个数也是偶数, 由 $e=e^{-1}$ 可知一定还有至少一个不是单位元的元素 b, 满足 $b=b^{-1}$, 所以, b 为 G 中的 2 阶元素.

问题 26.11 问题 1.1.69 设 G 是 n 阶的有限群, 则一定存在从 G 到一个 n 阶循环群的双射 f, 使得对任意 $x\in G$, 都有 x 的阶整除 $f(x)$ 的阶吗?

笔记 不知道, 这是 I. M. Isaacs 给出的公开问题. F. Ladisch 已经证明当 G 是可解群时结论成立.

问题 26.12 问题 1.2 .2 设 H 是群 G 的子集, 对 H 中的任意元 a 和 b 都有 $ab\in H$, 则 H 一定是 G 的子群吗?

笔记 不一定. 对于全体非零有理数 Q^*, 在乘法下是群, 全体非零整数 Z 是 Q^* 的子集, 对 Z 中的任意元 a 和 b 都有 $ab\in Z$, 但 Z 不是 Q^* 的子群.

问题 26.13 问题 1.2.3 设 H 是有限群 G 的子集, 对 H 中的任意元 a 和 b 都有 $ab\in H$, 则 H 一定是 G 的子群吗?

笔记 是的. 这是由于对任意 $a\in H$, 有 $a^n\in H$ 对任意正整数 n 都成立, 但 G 是有限群, 故一定存在 n, 使得 $a^n=e$, 因此, $e\in H$, 并且 $a^{-1}=a^{n-1}$, 所以, H 一定是 G 的子群.

问题 26.14 问题 1.2.7 若群 G 包含 3 个以上元素, 并且群 G 没有非平凡子群, 则群 G 一定是有限群, 并且它的阶一定是素数吗?

笔记 是的. 如果 G 不是有限群, 由于存在 $a\in G, a\neq e$, 故一定有 $G=\langle a\rangle$, 不然的话, $<a>$ 就是 G 的非平凡子群.

由 $G=\langle a\rangle$ 可知, G 有非平凡子群 $\left\langle a^3\right\rangle$, 矛盾. 所以, G 一定是有限群. 明显地, 若 G 的阶不是素数, 则对于 $|G|$ 的每个因子 k, G 一定有非平凡子群 $\left\langle a^k\right\rangle$, 所以, G 的阶一定是素数.

问题 26.15 问题 1.2 .8 任意一个无限群都一定有非平凡子群吗?

笔记 是的. 设 G 是无限群, 取 $a\in G, a\neq e$, 如果 $o(a)=n<\infty, <a>$ 是 n 阶有限群, 则 $H=\left\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\right\}$ 是 G 的真子群. 若 a 的阶是无穷, 则 $K=<a^3>$ 是 G 的真子群.

问题 26.16 问题 1.2 .9 非交换群的真子群都一定是非交换群吗?

笔记 不一定. S_3 是非交换群, 但 S_3 的真子群 $H=\{(1),(23)\}$ 是交换群.

问题 26.17 问题 1.2.10 交换群 G 的 n 阶元素全体和单位元 e 记为 H, 则 H 不一定构成 G 的子群.

问题 26.18 问题 1.2.11 非交换群 G 的 n 阶元素全体和单位元 e 记为 H, 则 H 不一定构成 G 的子群.

问题 26.19 问题 1.2.31 设 G 是群, G 的中心 $Z(G)$, 若 f 是 G 到 G 自同构, 则 $Z(G)$ 一定包含 $f(Z(G))$ 吗?

笔记 是的. 设 $a\in Z(G), b\in G$, 则由 f 是 G 到 G 自同构可知存在 $b_1\in g$, 使得 $f(b_1)=b$, 故

$$b\cdot f(a)=f(b_1)f(a)=f(b_1a)=f(ab_1)=f(a)f(b_1)=f(a)b.$$

问题 26.20 因此, $f(a)\in Z(G)$, 所以, $f(Z(G))\subseteq Z(G)$. 问题 1.2.32 若 $n\geqslant 3$, 则二面体群 D_n 的中心是什么?

笔记 若 $n\geqslant 3$ 是奇数, 则 D 的中心是 $\{e\}$. 若 $n\geqslant 3$ 是偶数, 则 D 的中心是 $\left\{e,r^{\frac{n}{2}}\right\}$.

问题 26.21 问题 1.2.35 若 G 是有限群, 则容易知道 G 是有限生成的. 反过来, 若 G 是有限生成的, 则 G 一定是有限群吗?

笔记 不一定. 如整数加法群 $Z=<1>$ 是有限生成的, 但 Z 不是有限群. 剩余类整数加法群 $Z_3=<\bar{1}>$ 是有限生成的, Z_3 是有限群.

问题 26.22 问题 1.2.36 有理数加法群 Q 是有限生成的吗?

笔记 不是. 假如 $Q=<\frac{b_1}{a_1},\cdots,\frac{b_n}{a_n}>$, 则对于 $\frac{1}{2a_1a_2\cdots a_n}\in Q$, 存在整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得

$$c_1\frac{b_1}{a_1}+c_1\frac{b_2}{a_2}+\cdots+c_n\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2a_1a_2\cdots a_n}.$$

从而

$$\frac{2m}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n},$$

这里 m 为整数, 矛盾. 所以, 有理数加法群 Q 不是有限生成的.

问题 26.23 问题 1.2 .38 有限生成的群的子群都一定是有限生成的吗?

笔记 不一定. 设 G 是由实数矩阵

$$a=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

生成的乘法群, H 在 G 中对角线元素都是 1 的矩阵全体构成的子群, 则

$$G=\left\{\begin{bmatrix}2^n&2^mx\\0&1\end{bmatrix}\mid m,n,x\in Z\right\},\quad H=\left\{\begin{bmatrix}1&2^mx\\0&1\end{bmatrix}\mid m,x\in Z\right\}.$$

记

$$M(x)=\begin{bmatrix}1&x\\0&1\end{bmatrix},$$

则 $H=\{M(2^mx)\mid m,x\in Z\}$. 由于 $M(x)M(y)=M(y)M(x)=M(x+y)$, 故 H 是 G 的一个交换子群. 假

如 H 由有限个元素 $M\left(2^{m_1x_1}\right),\cdots,M\left(2^{m_rx_r}\right)$ 生成, 令 $m_0=\min\{m_1,\cdots,m_r\}$, 则 $M\left(2^{m_0-1}\right)\in H$, 但它不是 $M(0),M\left(2^{m_1x_1}\right),\cdots,M\left(2^{m_rx_r}\right)$ 和它们的逆中有限个元素生成的, 矛盾. 所以, H 不是有限生成的.

问题 26.24 问题 1.2 .45 若 p 是素数, 则 p 阶群一定是循环群吗?

笔记 是的. 对于任意 $a\in G,a\neq e$, 设 H 为 a 生成的子群, 则由 Lagrange 定理可知 $|H|$ 整除 $|G|=p$, 因此, $|H|=p$, 因而, $o(a)=p$, 所以, $G=<a>$ 是循环群.

问题 26.25 问题 1.2 .46 若 p 是素数, 则 p^2 阶群一定是循环群吗?

笔记 不一定. 容易验证 $Z_2\times Z_2$ 的阶是 2^2, 但它不是循环群.

问题 26.26 问题 1.2.47 无限循环群的子群 $\langle a^m\rangle$ 和 $\langle a^n\rangle$ 相等的充要条件是什么?

笔记 无限循环群的子群 $<a^m>$ 和 $<a^n>$ 相等的充要条件是 $m=n$ 或 $m=-n$.

问题 26.27 问题 1.2.48 若 s 整除 n, 则 n 阶循环群的子群 $\langle a^r\rangle$ 和 $\langle a^s\rangle$ 相等的充要条件是什么?

笔记 n 阶循环群的子群 $<a^r>$ 和 $<a^s>$ 相等的充要条件是 r 与 n 的最大公因数是 s.

问题 26.28 问题 1.2 .56 设 G 为群, H,K 是 G 的循环子群, 若 $|H|=|K|$, 但是 $H\neq K$, 则是否一定有 $H\cap K=\{e\}$ 呢?

笔记 不一定. 设

$$G=Z_2\times Z_4,H=<(\bar{1},\bar{3})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1})\},$$
$$K=<(\bar{0},\bar{1})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{3})\},$$

则 $|H|=|K|$, 但 $H\cap K=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2})\}$.

问题 26.29 问题 1.2 .58 二面体群 D_n 是两个非交换元生成的非交换群, 反过来, 任意由两个 2 阶元生成的非交换有限群一定与二面体群同构吗?

笔记 是的. 设 $G=\langle x,y\rangle,x^2=e,y^2=e$, 既然 G 不是交换群, 因此, $xy\neq yx$. 由于 G 是有限群, 故 xy 的阶是有限的, 记为 n. 设 $a=xy,b=y$, 则 $G=\langle x,y\rangle=\langle xy,y\rangle=\langle a,b\rangle$, 并且 $a^n=e,b^2=e$.

由 a 的阶为 n 可知 n 整除 G 的阶, 既然 $b\notin\langle a\rangle$, 因此, $|G|>n$, 又因为 b 的阶为 2 , 故 2 整除 $|G|$, 因此 $|G|\geqslant 2n$. 假如 $n\leqslant 2$, 则 $a^2=e$, 故 $xyxy=e$. 既然 x 和 y 的阶都是 2 , 因而, $xy=y^{-1}x^{-1}=yx$, 但这与 x 和 y 不交换矛盾. 故 $n>2$.

既然 x 和 y 的阶都是 2 , 故 $bab^{-1}=yxyy=yx,a^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$, 因此, $bab^{-1}=a^{-1}$. 记 $D_n=<r,s\mid r^n=e,s^2=e,srs=r^{-1}>$, 定义 $f\left(r^js^k\right)=a^jb^k$, 则 f 为 D_n 到 G 的满同态, 故 $|G|\leqslant 2n$, 从而, $|G|=2n$, 所以, G 与 D_n 同构.

问题 26.30 问题 1.2.61 设 H_1 和 H_2 是群 G 的子群, H_1H_2 是 G 的子群的充要条件是什么?

笔记 设 H_1 和 H_2 是群 G 的子群, 则 H_1H_2 是 G 的子群的充要条件为 $H_1H_2=\mathrm{H_2H_1}$.

实际上, 若 $H_1H_2=H_2H_1$, 则容易验证 H_1H_2 对于乘法和求逆都封闭, 因此, H_1H_2 是 G 的子群. 反过来, 若 H_1H_2 是 G 的子群, 则对任意的 $a\in H_1,b\in H_2$, 有

$$ba=(eb)(ae)\in(H_1H_2)(H_1H_2)\subseteq H_1H_2,$$

从而 $H_2H_1\subseteq H_1H_2$. 由于 $a\in H_1,b\in H_2$ 时, 据 H_1H_2 是 G 的子群可知 $(ab)^{-1}\in H_1H_2$, 故

$$ab=\left((ab)^{-1}\right)^{-1}\in(H_1H_2)^{-1}\subseteq H_2^{-1}H_1^{-1}\subseteq H_2H_1,$$

因而, $H_1H_2\subseteq H_2H_1$, 所以, $H_1H_2=H_2H_1$.

问题 26.31 问题 1.2.63 若 H 和 K 是群 G 的子群, 则 KH 是 G 的子群当且仅当 HK 是 G 的子群吗?

笔记 是的. 若 HK 是 G 的子群, 则对于任意 $g\in KH$, 有 $h\in H,k\in K$, 使得 $g=kh$. 由于 H 和 K 是群 G 的子群, 故 $g^{-1}=h^{-1}k^{-1}\in HK$. 由 HK 是 G 的子群可知 $g\in HK$, 所以, $KH\subseteq HK$.

由于 $KH\subseteq HK,H$ 和 K 都是 G 的子群, 故对于任意 $h\in H,k\in K$, 有 $k^{-1}h^{-1}\in KH\subseteq HK$, 因此存在 $h_1\in H,k_1\in K$, 使得 $k^{-1}h^{-1}=h_1k_1\in HK$, 因而, $hk=k_1^{-1}h_1^{-1}\in KH$, 即 $HK\subseteq KH$, 所以, $KH=HK$, 故 HK 是 G 的子群.

问题 26.32 问题 1.2.64 设 H 和 K 是有限群 G 的两个子群, 并且 $|H|+|K|>|G|$, 则一定有 $G=HK$ 吗?

笔记 一定. 明显地, 对于任意 $g \in G$, 由于 H 是子群, 故 $H^{-1} = H$, 因此 $\left|H^{-1}\right| = |H|$, 由 $\left|H^{-1}g\right| = \left|H^{-1}\right|$ 有 $\left|H^{-1}g\right| = |H|$. 由于 $|H| + |K| > |G|$, 故 $H^{-1}g \bigcap K$ 不是空集, 因此存在 $b \in H^{-1}g \cap K$, 所以, 有某个 $a \in H$, 使得 $b = a^{-1}g$, 因而, $g = ab$, 即 $G = HK$ 成立.

问题 26.33

问题 1.2.65 设 H 和 K 是有限群 G 的两个子群, 并且 $G = HK$, 则一定有 $|H| + |K| > |G|$ 吗?

笔记 不一定. 设 a 的阶为 6 , 则 $G =< a >$ 是 6 阶循环群, 对于 G 的子群 $H = \left\{e, a^2, a^4\right\}$ 和 $K = \left\{e, a^3\right\}$, 有 $G = HK$, 但 $|H| + |K| = 5 < |G|$.

问题 26.34 问题 1.2 .67 设 H, K_1 和 K_2 是群 G 的子集, 则一定有 $H\left(K_1 \cup K_2\right) = HK_1 \bigcup HK_2$ 吗?

笔记 是的. 对于任意 $a \in H\left(K_1 \bigcup K_2\right)$, 有 $h \in H, k \in K_1 \bigcup K_2$, 使得 $a = hk$. 若 $k \in K_1$, 则 $a = hk \in HK_1$, 从而 $a \in HK_1 \cup HK_2$. 若 $k \in K_2$, 则 $a = hk \in HK_2$, 从而 $a \in HK_1 \cup HK_2$. 因此, $H\left(K_1 \cup K_2\right) \subseteq HK_1 \cup HK_2$. 反过来, 对于任意 $a \in HK_1 \cup HK_2$, 有 $a \in HK_1$ 或 $a \in HK_2$, 若 $a \in HK_1$, 则存在 $h \in H, k \in K_1$, 使得 $a = hk$, 于是 $k \in K_1 \bigcup K_2$, 因此, $a \in H\left(K_1 \cup K_2\right)$. 若 $a \in HK_2$, 则类似可证 $a \in H\left(K_1 \cup K_2\right)$. 因而 $HK_1 \cup HK_2 \subseteq H\left(K_1 \bigcup K_2\right)$.

问题 26.35 问题 1.2.68 设 H, K_1 和 K_2 是群 G 的子集, 则一定有 $H\left(K_1 \cap K_2\right) = HK_1 \bigcap HK_2$ 吗?

笔记 不一定. 在对称群 S_4 中, 取

$$H = \{(1), (12)\}, K_1 = \{(1), (34)\},$$

$$K_2 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

则

$$H\left(K_1 \cap K_2\right) = \{(1), (12)\}.$$

$$HK_1 \cap HK_2 = \{(1), (12), (34), (12)(34)\},$$

所以, $H\left(K_1 \cap K_2\right) = HK_1 \cap HK_2$ 不成立.

问题 26.36 问题 1.2.74 若群 G 有且只有 3 个子群, 则 G 一定是循环群吗?

笔记 是的. 明显地, 若群 G 的阶是无穷, 则 G 一定不止只有 3 个子群, 因此, G 一定是有限群. 对于 G 中的非单位元 $a, H = \langle a\rangle$ 是 G 的子群, 若 $G = \langle a\rangle$, 则 G 是循环群. 若 $G \neq \langle a\rangle$, 则对于 $b \in G, b \notin \langle a\rangle$, 有 $G = \langle b\rangle$, 否则的话, $K = \langle b\rangle$ 是 G 的另一个子群, 但这与 G 只有子群 $\{e\}, H$ 和 G 矛盾, 所以, G 一定是循环群.

问题 26.37 问题 1.2.76 若群 G 的所有 (真) 子群都是交换群, 则 G 一定是交换群吗?

笔记 不一定. 所有真子群都是交换群的非交换群称为内交换群, 如 S_3 就是内交换群. Miller 和 Moreno 在 1903 年就研究了内交换群.

问题 26.38 问题 1.3.7 若轮换 σ 和 ϕ 是不相交的, 则一定有 $\sigma\phi = \phi\sigma$ 吗?

是的. 容易验证.

问题 26.39 问题 1.3.8 若轮换 σ 和 ϕ 满足 $\sigma\phi = \phi\sigma$, 则轮换 σ 和 ϕ 一定是不相交的吗?

不一定. 在对称群 S_3 中, 若 $\sigma = (123), \phi = (321)$, 则 $\sigma\phi = \phi\sigma = (1)$, 但 σ 与 ϕ 是相交的.

问题 26.40 问题 1.3.11 任何一个置换都一定可以表示成若干个对换的乘积吗?

是的. 明显地, 只需证明任意轮换都可以表示成若干个对换的乘积. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_d$ 是不同的文字, 则容易验证 $\left(i_1 i_2 \cdots i_d\right) = \left(i_1 i_2\right)\left(i_2 i_3\right) \cdots \left(i_{d-2} i_{d-1}\right)\left(i_{d-1} i_d\right)$. 如 $(254) = (25)(54)$.

问题 26.41 问题 1.3 . 17 两个不相交轮换 σ 和 ρ 的乘积 $\sigma\rho$ 的阶一定是 σ 的阶与 ρ 的阶的最小公倍数吗?

是的.

笔记 若相交, 则不一定.

问题 26.42 问题 1.3.18 如何求置换 σ 的阶?

将置换 σ 写成不相交的循环的乘积, 则置换 σ 的阶为其不相交的循环的长度的最小公倍数. 如 σ 为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (254)(36)$. 因此, σ 的阶为 6 .

问题 26.43 问题 1.3.19 设 $n \geqslant 2, S_n$ 有两个元素的生成元吗?

有. 设 $\sigma = (12)$ 和 $\tau = (12 \cdots n)$, 则 σ 和 τ 生成 S_n. 实际上, 只需证明任意对换都可以写成 σ, τ 以及它们的逆的复合, 如 $\tau\sigma\tau^{-1}, \tau^2\sigma\tau^{-2}, \cdots$.

问题 26.44 问题 1.3.24 判断置换 σ 的奇偶性的常用方法是什么?

可将置换 σ 写成对换的乘积, 若一共有 k 个对换, 则 σ 的奇偶性可由 $(-1)^k$ 来确定.

问题 26.45 问题 1.3.26 若置换 σ 的阶是偶数, 则 σ 一定是偶置换吗?

不一定. 若 $\sigma=(12)$, 则 $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$, 故 σ 是奇置换, 并且 σ 的阶是偶数 2 .

问题 26.46 问题 1.3.27. 置换 σ 的奇偶性与 σ^{-1} 一定一样吗?

是的. 若 σ 是置换, 则 $\operatorname{sgn}\left(\sigma\sigma^{-1}\right)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)$, 由 $\operatorname{sgn}\left(\sigma\sigma^{-1}\right)=\operatorname{sgn}((1))=1$ 可知, 置换 σ 的奇偶性与 σ^{-1} 一样.

问题 26.47 问题 1.3.28 若循环 σ 的长度是奇数, 则 σ^2 一定是循环吗?

是的. 不难验证, 若循环 $\sigma=(a_1a_2\cdots a_{2k+1})$, 则 $\sigma^2=(a_1a_3a_5\cdots a_{2k+1}a_2a_4a_6\ \cdots a_{2k})$. 因此, σ^2 一定是循环.

问题 26.48 问题 1.3.33 设 H 是 S_n 的子群, 若 H 包含奇置换, 则 H 有多少偶置换?

H 一定有 $\frac{|H|}{2}$ 个偶置换. 这是由于 H 包含奇置换 σ, 故对于任意奇置换 α, $\sigma\alpha$ 一定是 H 中的偶置换, 并且, 对于 H 中的奇置换 $\alpha,\beta\in H,\alpha\neq\beta$ 时, 一定有 $\sigma\alpha\neq\sigma\beta$, 因而, H 中奇置换与偶置换的个数是一样的, 所以, H 一定有 $\frac{|H|}{2}$ 个偶置换.

问题 26.49 问题 1.3.35 设 H 是 S_n 的真子群, 则一定存在 $1\leqslant m\leqslant n$, 使得 $H=\{\sigma\mid\sigma\in S_n,\sigma(m)=m\}$ 吗?

不一定. 对于对称群 S_3 的真子群 $H=\{(1),(132),(123)\}$, 不存在 $1\leqslant m\leqslant 3$, 使得 $H=\{\sigma\mid\sigma\in S_3,\sigma(m)=m\}$.

问题 26.50 问题 1.3.37 二面体群 D_4 与对称群 S_4 的子群同构吗?

是的. 二面体群 $D_4=<r,f>$, 并且 $f^2=1,r^4=1,fr=r^{-1}f$, D_4 可用 S_4 的 8 阶子群来表示, 可记为

$$D_4=\{(1),(1234),(12)(24),(1432),(24),(14)(23),(13),(12)(34)\}.$$

令 $r=(1234),f=(24)$, 则容易验证 $D_4=\langle r,f\rangle$.

问题 26.51 问题 1.3 .38 二面体群 D_4 有哪些子群?

二面体群 D_4 有 8 个真子群, 分别为

$$H_1=\{(1),(13)\},\quad H_2=\{(1),(24)\},\quad H_3=\{(1),(12)(34)\},$$
$$\{(1),(14)(23)\},\quad Z=\{(1),(13)(24)\},\quad C=\{(1),(1234),(13)(24),(1432)\},$$
$$N_1=\{(1),(13),(24),(13)(24)\},\quad N_2=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

问题 26.52 问题 1.4.2 设 H 是 G 的一个子群, 则 G 的左陪集 aH 和右陪集 Ha 是 G 的子群吗?

不一定. 设 $H=\{(1),(13)\}$, 则 H 为 S_3 的子群, 但 $(12)H=\{(12),(132)\}$, 因此陪集 (12)H 不是 S_3 的子群.

问题 26.53 问题 1.4.11 设 H 是 G 的一个子群, $a,b\in G$, 若 $aH=bH$, 则一定有 $a^2H=b^2H$ 吗?

不一定. 设 D_4 为二面体群, D_4 的 8 个元素如下:

$$\rho_0=(1),\quad \rho_1=(1234),$$
$$\rho_2=(13)(24),\quad \rho_3=(1432),$$
$$\mu_1=(12)(34),\quad \mu_2=(14)(23),$$
$$\delta_1=(13),\quad \delta_2=(24).$$

令 $H=\{\rho_0,\mu_2\}$, 则 $\rho_1H=\delta_2H=\{\rho_1,\delta_2\}$, 并且 $\rho_1^2H=\rho_2H=\{\rho_2,\mu_1\}$, 但 $\delta_2^2H=\rho_0H=H=\{\rho_0,\mu_2\}$.

问题 26.54 问题 1.4.12 设 H 是 G 的一个子群, $a,b\in G$, 若 $Ha=bH$, 则一定有 $aH=bH$, 并且 $Ha=Hb$ 吗?

是的. 由于 $bH=Ha$, 故 $b\in bH=Ha$, 因此, $b\in Ha$, 因而存在 $h\in H$, 使得 $b=ha$. 容易知道 $Hb=H(ha)=(Hh)a=Ha$. 同理可以证明 $aH=bH$.

问题 26.55 问题 1.4.13 设 H 和 K 是 G 的子群, $a,b\in G$, 若 $aH=bK$, 则一定有 $H=K$ 吗?

是的. 由于 $aH=bK$, 故 $H=a^{-1}bK$, 因此 $a^{-1}b=a^{-1}be\in a^{-1}bK=H$. 令 $h=a^{-1}b$, 则 $H=hK$, 因此 $h^{-1}H=K$, 从而 $h^{-1}H=h^{-1}(hK)=K$. 由 H 是子群和 $h=a^{-1}b\in H$ 可知 $h^{-1}H=H$, 所以, $H=K$.

笔记 注意上面两个证明中的想法.

问题 26.56 问题 1.4.16 存在群 $|G|=\infty$, 对于 G 的任意非平凡子群 H, 指数 $[G:H]$ 一定有限吗?

存在. 设 $G=\langle a\rangle$ 为无限循环群, 则对 G 的任意非平凡子群 $H=\langle a^m\rangle$, 这里 m 为 H 中所含元素的最小正指数. 不难验证 $G=aH\bigcup aH\cup\cdots a^{m-1}H$, 并且对于任意 $i\neq j$, 有 $a^iH\cap a^jH$ 是空集, 所以, 指数 $[G:H]$ 一定是 m.

问题 26.57 问题 1.4.17 存在无限群 $|G|$, 对于 G 的任意真子群 H, 指数 $[G:H]$ 都是无穷吗?

是的. 有理数加法群对于 G 的任意真子群 H, 指数 $[G:H]$ 都是无穷.

问题 26.58 问题 1.4.20 设 G 是一个 n 阶有限群, m 整除 n, 则一定存在 m 阶的元素 $a\in G$ 吗?

不一定. 交错群 A_4 的阶为 12,6 整除 12 , 但 $A_4=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)\ (23),\ (123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243)\}$, A_4 有 3 个 2 阶元素 $(12)(34)$, $(13)(24)$ 和 $(14)(23)$, 有 8 个 3 阶元素 $(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234)$ 和 (243), A_4 没有 6 阶的元素.

问题 26.59 问题 1.4.22 Lagrange 定理的逆命题成立吗?

不成立. 给定一个有限群 G 和一个整除 G 的阶的整数 m,G 并不一定有阶数为 m 的子群. 对称群 S_4 中所有偶置换所构成的群 A_4, 它的阶是 12 , 但对于 12 的因数 $6,A_4$ 没有 6 阶的子群.

问题 26.60 问题 1.4.23 什么样的群是 Lagrange 的?

设 G 为有限群, 若每个整除 G 的阶的整数 m,G 一定有阶数为 m 的子群, 则称群 G 是 Lagrange 的. 这类群的研究可见 McLain 和 Humphreys 的文章.

问题 26.61 问题 1.4.29 若群 G 只有 11 个真子群, 则 G 的阶是多少?

含有 11 个真子群的群只有阶为 p^{12} 的循环群, 这里 p 是素数, 这是 Miller G A 在 1939 年证明的.

问题 26.62 问题 1.5.5 若 H_1 是 H_2 的正规子群, H_2 是 G 的正规子群, 则 H_1 是否一定是 G 的正规子群呢?

不一定. 容易验证, $H_1=\{e,(12)(34)\}$ 是 $H_2=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ 的正规子群, H_2 是对称群 S_4 的正规子群, 但 H_1 不是对称群 S_4 的正规子群.

问题 26.63 问题 1.5.6 若 H 是群 G 的子群, K 是群 G 的正规子群, 则 $H\cap K$ 一定是 G 的正规子群吗?

不一定. 设 D_4 是二面体群, 则 D_4 的 8 个元素如下:

$$\rho_0=(1),\quad \rho_1=(1234),$$
$$\rho_2=(13)(24),\quad \rho_3=(1432),$$
$$\mu_1=(12)(34),\quad \mu_2=(14)(23),$$
$$\delta_1=(13),\quad \delta_2=(24).$$

设 $G=D_4,K=\{\rho_0,\rho_2,\mu_1,\mu_2\},H=\{\rho_0,\mu_1\}$, 则 K 是 G 的正规子群, H 是 G 的子群, 但 $H\cap K$ 不是 G 的正规子群.

问题 26.64 问题 1.5.7 若 H 是群 G 的子群, K 是群 G 的正规子群, 则 $H\cap K$ 一定是 K 的正规子群吗?

是的. 容易验证.

问题 26.65 问题 1.5.8 设 H 是群 G 的子群, 若指数 $[G:H]=2$, 则 H 一定是 G 的正规子群吗?

是的. 当 $a\in H$ 时, 明显地, 有 $aH=Ha$. 若 $a\notin H$, 则 aH 是 H 的一个不同于 H 的左陪集. 由于 $[G:H]=2,H$ 在 G 中只有两个左陪集, 故 $aH=G\backslash H$. 同理 $Ha=G\backslash H$, 所以 $aH=Ha$, 因此 H 是群 G 的正规子群.

问题 26.66 问题 1.5.9 设 H 是群 G 的子群, 若指数 $[G:H]=3$, 则 H 一定是 G 的正规子群吗?

不一定. 对于 S_3 的子群 $H=\{(1),(12)\}$, 有 $[S_3:H]=3$, 并且 $(123)H=\{(123),(13)\},H(123)=\{(123),(12)\}$, 因此 $(123)H\neq H(123)$, 所以, H 不是 S_3 的正规子群.

问题 26.67 问题 1.5.10 设 H 是群 G 的正规子群, 若指数 $[G:H]=m$, 则 $a^m\in H$ 一定对任意 $a\in G$ 成立吗?

是的. 设 $a\in G$, 则由 $[G:H]=m$ 可知商群 G/H 的阶一定是 m, 因此, aH 的阶整除 m, 故 $(aH)^m=H$, 因而, $a^mH=(aH)^m=H$, 所以, $a^m\in H$.

问题 26.68 问题 1.5.14 设 H 和 K 是群 G 的正规子群, 若 $ab=ba$ 对任意 $a\in H,b\in K$ 成立, 则 $H\cap K=\{e\}$ 一定成立吗?

不一定. 设加法群 $G=Z\oplus Z\oplus Z,H=\{0\}\oplus Z\oplus Z,K=Z\oplus\{0\}\oplus Z$, 则对任意 $a\in H,b\in K$, 有 $ab=ba$, 但 $H\cap K=\{(0,0,0)\}$ 不成立.

问题 26.69 问题 1.5.15 设 G 是群, 若存在大于 1 的正整数 n, 使得对于任意 $a, b \in G$, 都有 $(ab)^n = a^n b^n$, 则 $H = \{a^n \mid a \in G\}$ 一定是 G 的正规子群吗?

是的. 由于对于任意 $a, b \in H$, 都有 $a = a_1^n, b = b_1^n$, 故 $ab^{-1} = a_1^n b_1^{-n} = a_1^n \left(b_1^{-1}\right)^n \in H$, 因此, H 是 G 的子群. 另外, 对于任意 $g \in G, a = a_1^n \in H$, 都有 $gag^{-1} = ga_1^n g^{-1} = \left(ga_1 g^{-1}\right)^n \in H$, 所以, H 是 G 的正规子群.

第二十七章 群论

自由群的泛性质刻画
泛性质视角下的自由群和自由积
精心制作但是似乎有点概念问题的自由积说明
一般线性群的定义

性质 1.

有右 (左) 逆和右 (左) 单位元的半群，就是群.
有左 (右) 逆和右 (左) 单位元的半群，不一定是群.

引理 27.1 (Zassenhaus Lemma)

令 H, K 为 G 的子群，H^*, K^* 分别是 H, K 的正规子群，就有

- $H^*(H \cap K^*)$ 是 $H^*(H \cap K)$ 的正规子群
- $K^*(H^* \cap K)$ 是 $K^*(H \cap K)$ 的正规子群
- $\dfrac{H^*(H \cap K)}{H^*(H \cap K^*)} \cong \dfrac{H \cap K}{(H^* \cap K)(H \cap K^*)} \cong \dfrac{K^*(H \cap K)}{K^*(H^* \cap K)}$

注 这个引理在证明 Jordan-Hölder 定理时用到了.

由于记不住 $\mathrm{Stab}_G(x), \mathrm{Orb}_G(x), \mathrm{Ad}_g(x), C_G(S), Z(G), N_G(H)$ 的定义，就记录在这里：

定义 27.1 ($\mathrm{Stab}_G(x), \mathrm{Orb}_G(x)$)

令 G 是一个在集合 X 上的群作用，则对于任意 $x \in X$

- 定义 x 处的 $\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\}$
- 定义 x 的轨道 $\mathrm{Orb}_G(x) := G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq X$

定义 27.2 ($\mathrm{Ad}_g(x)$)

考虑群 G 和共轭群作用：对于 $g \in G$，$\mathrm{Ad}_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$.

1. 称 $a, b \in G$ 共轭，若对于某个 $g \in G$，有 $a = gbg^{-1}$ 成立. 即 $a \in \mathrm{Orb}_G(b)$ 或 (等价地)$b \in \mathrm{Orb}_G(a)$
2. 在共轭作用下的 G 的轨道称为共轭类

定义 27.3 ($C_G(S), Z(G), N_G(H)$)

G 是一个群，H 是其子群，$S \subseteq G$ 是一个子集

1. 子群 $C_G(S) := \{g \in G : \forall s \in S, gsg^{-1} = s\}$ 称为 S 在 G 中的中心化子
2. 子群 $Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G,\ ghg^{-1} = h\} = C_G(G)$ 称为 G 的中心
3. 子群 $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ 被称为 H 在 G 中的正规化子

性质 1.

1. 显然由定义：$\mathrm{Stab}_G(g) = C_G(g)$.
2. 共轭作用诱导出同态：$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(G)$. 于是 $Z(G) = \ker(\mathrm{Ad})$.
3. $H \leq G$ 是正规的当且仅当 $N_G(H) = G$.

4. 如果我们在集合 {G的所有子群} 上，考虑群 G 的共轭作用：

$$\mathrm{Ad}_g : H \mapsto gHg^{-1} \tag{27.1}$$

那么 $N_G(H) = \mathrm{Stab}_G(H)$.

5. $N_G(H) = \mathrm{Stab}_G(H)$ 包含子群 H，且 H 是正规子群.

定义 27.4 ($\mathrm{Stab}_G(A)$ 的定义)

群 $G \circlearrowright$ 集合$S, A \subseteq S$，定义 $\mathrm{Stab}_G(A) = \{g \in G : g(a) \in A, \forall a \in A\}$.[a]

[a]注意这里 S, A 是普通的集合，一般上不能说 $g \in A$.

笔记 注意符号 $ga, g \in G, a \in A$，ga 表示 $g(a)$，不一定等于 $g \cdot a$，有可能等于 gag^{-1}.

我废了，我不会证 sylow 定理，根本理解不了

sylow 定理证明

定理 27.1 (Sylow 定理)

令 G 为有限群，$|G| = p^r m, r, m \in \mathbb{N}$，且 $p \nmid m$.

- Sylow 第一定理：Sylow p-子群[a]存在.
- Sylow 第二定理：若 P 是 G 的一个 Sylow p-子群，且 $Q \leq G$ 是 p 幂阶子群，那么存在 $g \in G$，使得 $Q \leq gPg^{-1}$[b]. 换句话说就是
  - 所有的 Sylow p-子群都是共轭的.
  - 所有的 p 幂子群都包含在某个 Sylow p-子群内.
- Sylow 第三定理：$n_p := |\mathrm{Syl}_p(G)|$[c]满足
  - $n_p \equiv 1 \mod p$.
  - $n_p | m$.

[a]G 中阶数为 p^r 的子群.

[b]$Q \leq gPg^{-1}$ 也是 Sylow p-子群.

[c]$|\mathrm{Syl}_p(G)| := \{G$的 Sylow p-子群$\}$

命题 27.1

P, Q 是 G 的子群，$P \cap Q$ 也是 G 的子群，它也是 P, Q 的子群，于是 $|P \cap Q| \mid |P|, |P \cap Q| \mid |Q|$.

命题 27.2

当 $Q \cong \mathbb{Z}_q$ 时 (阶为 q 的循环群)，其自同构群 Aut (Q) 同构于 $\mathbb{Z}_q^*$，即模 q 的单位元群。

命题 27.3

$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$

性质 1.

设 ψ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的一个自同构. 因为 $\mathbb{Z}_p$ 是循环群，故 ψ 的映射由 ψ 对于生成元的作用唯一地确定，由于 $\mathbb{Z}_p$ 有 $\varphi(p) = p - 1$，即 $|\mathbb{Z}_p^\times|$ 个生成元. 故对于给定的一个生成元 a，ψ 可能把它映射到 $\varphi(p) = p - 1$ 种

生成元. 故 $\left|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)\right| = \psi(p) = p-1$，于是 $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$.

第二十八章 丘维声《近世代数》

基础观点

无特殊说明，我们用 G 表示一个群，Ω 表示一个集合，p 表示一个素数.

定义 28.1 (群)

设 G 是一个非空集合，称其为一个群，如果在 G 上定义了一个代数运算，通常称为乘法，满足：

1. $(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in G$(结合律)
2. G 中有一个元素 e，使得
$$ea = ae = a, \forall a \in G$$
称 e 是 G 的单位元
3. 对于 G 中的每个元素 a，存在 $b \in G$，使得
$$ba = ab = e$$
称 a 可逆，把 b 称为 a 的逆元，记作 a^{-1}

如果群 G 的乘法还满足交换律，则称 G 是交换群或 Abel 群.

定义 28.2 (环)

设 R 是一个非空集合，称其为环 (ring)，若 R 上定义了两个代数运算，加法与乘法，满足下面 6 条运算性质：

1. $a + b = b + a, \forall a,b \in R$(加法交换律)
2. $(a+b)+c = a+(b+c), \forall a,b,c \in R$(加法结合律)
3. R 中有一个元素，记作 0，它具有下述性质：
$$a + 0 = 0 + a, \forall a \in R$$
称 0 是 R 的零元
4. 任给 $a \in R$，都有 $b \in R$，使得
$$a + b = b + a = 0$$
把 b 称为 a 的负元，记作 $-a$
5. $(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in R$(乘法结合律)
6. $a(b+c) = ab + ac, \forall a,b,c \in R$(左分配律)
$(b+c)a = ba + ca, \forall a,b,c \in R$(右分配律)

定理 28.1

设 R 是有单位元 $e(\neq 0)$ 的环，则 R 的零因子不是可逆元.
即 R 的可逆元不是零因子.

笔记

- $\mathbb{Z}_m$ 的所有可逆元组成的集合记作 $\mathbb{Z}_m^*$，容易验证它是一个群，被称为 $\mathbb{Z}_m$ 的单位群.
- $\mathbb{Z}_m$ 的每个元素要么是可逆元，要么是零因子.
- $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$，其中 $m = m_1 m_2, (m_1, m_2) = 1$

定理 28.2

在 $\mathbb{Z}_m$ 中,$\bar{a}$ 是可逆元当且仅当 $(m,a)=1$.

定义 28.3 (域)

设 F 是一个有单位元 $e(\neq 0)$ 的交换环, 如果 F 中每个非零元都是可逆元, 那么称 F 是一个域 (field).
即域中不存在非 0 的零因子.

定义 28.4 (域的特征)

设域 F 的单位元为 e. 称域 F 的特征为 0, 若 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 有 $ne\neq 0$; 称域 F 的特征为 p, 若存在一个素数 p, 使得 $pe=0$, 而对于 $0<l<p$, 有 $le\neq 0$.
域 F 的特征记作 $\operatorname{char} F$.

笔记 模 p 剩余类域 $\mathbb{Z}_p$ 的特征为 p; 任一数域的特征为 0. 这就是 $\mathbb{Z}_p$ 与数域的本质区别.

定理 28.3

$m=m_1+m_2,(m_1,m_2)=1$ 则 $\sigma:\bar{x}\mapsto\left(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}\right)$ 是$\mathbb{Z}_m$到$\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$的一个环同构映射, 从而$\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}$.

28.1 循环群

定义 28.5 (循环群)

设群 G 的运算记作乘法 (或加法), 如果 G 的每一个元素都能写成 G 的某个元素 a 的整数次幂 (或者 a 的整数倍) 的形式, 那么称 G 为循环群, 把 a 叫做 G 的一个生成元, 并把 G 记作 $\langle a\rangle$.

定义 28.6 (阶)

对于群 G 的元素 a, 若存在正整数 n, 使得 $a^n=e$(或 $na=0$), 则把其中最小的正整数 n 称为 a 的阶, 记作 $|a|$; 若 $\forall n\in\mathbb{Z}^*$ 都有 $a^n\neq e$(或$na\neq 0$), 则称 a 是无限阶元素.

命题 28.1 (循环群的判定)

有限群 G 是循环群当且仅当 G 中有个元素阶等于 $|G|$.

证明 考虑有限群中阶的定义,n 是最小的.

命题 28.2

群 G 的运算为乘法, 设 G 中元素 a 的阶为 n, 则 $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$\left|a^k\right|=\frac{n}{(n,k)}$$

证明 考虑 $\frac{n}{(n,k)}$ 与 $\left|a^k\right|$ 相互整除.

命题 28.3

设 G 是有限 Abel 群, 则 G 中有一个元素的阶是其他元素的阶的倍数.

证明 考虑阶最大的元素, 它的阶一定是 $|G|$, 假设有个元素阶不是 $|G|$ 的因子, 那么这个元素和阶最大的元素搞在一起可以生出一个阶更大的元素, 矛盾!

定理 28.4 (循环群的判定)
设 G 是有限 Abel 群. 如果对于任意的正整数 m, 方程 $x^m = e$ 在 G 中的解的个数不超过 m, 那么 G 是循环群.

证明 设群 G 中阶最大的元素为 a, 阶数记为 n. 由命题28.3,G 中每个元素的阶都是 n 的因数. 故 G 中任意元素 x 都满足 $x^n = e$. 由题意, 这些元素的个数不超过 n, 即 $|G| \le n$.
由于 a 的阶为 n, 故 $e, a, \cdots, a^{n-1}$ 都在 G 内且两两不同, 故 G 中至少有 n 个元素, 即 $|G| \ge n$.
综上：$|G| = n$. 由命题28.1,G 是循环群.

定理 28.5
设有限域 F, 则 F^* 成循环群.

证明 容易验证 F^* 成群, 再由代数基本定理, 方程 $x^m = e$ 在 F^* 中的解的个数不超过 m, 结合定理28.4, 可知 F^* 是循环群.

推论 28.1
p 是素数, 则 $\mathbb{Z}_p^*$ 是循环群.

定理 28.6
$\mathbb{Z}_m^*$ 是循环群当且仅当 m 为以下形式之一:

$$2, 4, p^r, 2p^r, \quad \text{其中} p \text{是奇素数}, r \in \mathbb{N}^*.$$

定义 28.7 (群同构)
如果群G到群$\tilde{G}$有一个双射σ, 使得

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \forall a, b \in G$$

那么称σ是G到$\tilde{G}$的一个群同构映射, 此时称群G与群$\tilde{G}$是同构的, 记做$G \cong \tilde{G}$.

命题 28.4
群同构保单位元, 保逆, 保阶.

证明
1. 若e是G的单位元,则$\sigma(e)$是$\tilde{G}$的单位元,因为$\sigma(a) = \sigma(ae) = \sigma(a)\sigma(e)$,易证单位元左右相同且唯一.
2. $\sigma(e) = \sigma(aa^{-1}) = \sigma(a)\sigma(a^{-1})$,故$\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$,易证逆元唯一.
3. $a^n = e \Leftrightarrow \sigma(a^n) = \sigma(e) \Leftrightarrow \sigma(a)^n = \sigma(e)$.

定理 28.7
- 任意一个无限循环群都与 $(\mathbb{Z}, +)$ 同构
- 对于 $m > 1$, 任意一个 m 阶循环群都与 $(\mathbb{Z}_m, +)$ 同构
- 1 阶循环群都与加法群 $\{0\}$ 同构.

证明 构造群到群的映射, 证明是双射, 且可以拆开.

笔记
- 无限循环群构成一个等价类, 其代表元为 $(\mathbb{Z}, +)$
- $m(m > 1)$ 阶循环群构成一个等价类, 其代表元为 $(\mathbb{Z}_m, +)$

笔记 环 R 对加法构成 Abel 群, 记作 $(R, +)$.

定理 28.8

m_1, m_2 是大于 1 的整数，则 $(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}, +)$ 是循环群当且仅当 m_1 与 m_2 互素.

证明 充分性：由定理28.3,$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$. 由命题28.4,$|\mathbb{Z}_m| = \left|\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}\right|$, 对于加法而言，二者的生成元阶数相等为 $m = m_1 m_2$. 由命题28.1,$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$ 是循环群.
必要性：证逆否命题，若 $(m_1, m_2) = d > 1$ 则 $m_1 = l_1 d, m_2 = l_2 d$.对于 $(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}, +)$ 中任一元素 $\left(\tilde{a_1}, \tilde{\tilde{a_2}}\right)$, 我们有

$$l_1 d l_2 \left(\tilde{a_1}, \tilde{\tilde{a_2}}\right) = \left(l_1 d l_2 \tilde{a_1}, l_1 d l_2 \tilde{\tilde{a_2}}\right) = \left(l_2 m_1 \tilde{a_1}, l_1 m_2 \tilde{\tilde{a_2}}\right) = \left(\tilde{0}, \tilde{\tilde{0}}\right)$$

故 $(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}, +)$ 的阶 $\leq l_1 d l_2 = l_1 m_2 < m$, 由命题28.1的逆否命题，这 与 $(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}, +)$ 是循环群矛盾!

例题 28.1.

证明 $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +) \ncong (\mathbb{Z}_4, +)$

证明 由定理28.8,$(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +) = \left\{\left(\bar{0}, \bar{0}\right), \left(\bar{0}, \bar{1}\right), \left(\bar{1}, \bar{0}\right), \left(\bar{1}, \bar{1}\right)\right\}$ 是非循环的4阶 Abel 群.
这些都是2阶元，没有4阶元，但 $(\mathbb{Z}_4, +)$ 中有4阶元$\bar{1}$, 故 $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +) \ncong (\mathbb{Z}_4, +)$

例题 28.2.

证明 $(\mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), +) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6, +)$.

证明 $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3), +)$

令σ : $$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), +) &\to (\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3), +) \\ (a, (b, c)) &\mapsto (b, (c, a)) \end{aligned}$$

则σ是一个映射, 显然它是一个单射, 也是满射, 从而是双射.

$$\begin{array}{ccc} \sigma(a_1 + a_2, (b_1 + b_2, c_1 + c_2)) & = \sigma(a_1, (b_1, c_1)) & + \sigma(a_2, (b_2, c_2)) \\ \| & \| & \| \\ (b_1 + b_2, (c_1 + c_2, a_1 + a_2)) & = (b_1, (c_1, a_1)) & + (b_2, (c_2, a_2)) \end{array}$$

因此, σ保加法.
因此, σ是一个群同构.

例题 28.3.

设 G 是一个群，证明：映射 $\sigma : x \mapsto x^{-1}$ 是 G 到自身的同构映射当且仅到 G 是 Abel 群.

证明 充分性：显然 σ 是双射，下证 σ 保加法

$$\sigma(x + y) = (xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1} = x^{-1} y^{-1} = \sigma(x)\sigma(y)$$

必要性：

$$yx = (x^{-1} y^{-1})^{-1} = \sigma(x^{-1} y^{-1}) = \sigma(x^{-1})\sigma(y^{-1}) = xy, \quad \forall x, y \in G$$

例题 28.4.

如果 G 的阶为偶数，那么 G 必有二阶元.

证明 若 G 没有二阶元，则 $\forall x \in G, x \neq e, x \neq x^{-1}$, 故 G 中的非单位元可以 (x, x^{-1}) 两两配对，故 G 的阶为奇数，矛盾！

28.2 图形的对称 (性) 群

定义 28.8 (正交点变换 (isometry))

平面上 (或空间中) 的一个变换 σ 如果保持任意两地男的距离不变，那么称 σ 是平面上 (或空间中) 的一个正交点变换 (或保距变换)(isometry).

定义 28.9 (对称 (性) 变换)

平面上 (或空间中) 的一个正交点变换 σ 如果使得图形 Γ 的像与自身重合，那么称 σ 是图形 Γ 的对称 (性) 变换.

定义 28.10 (对称性群)

把图形 Γ 的所有对称 (性) 变换组成的集合记作 G, 则 G 构成一个群, 即图形 Γ 的对称 (性) 群 (symmetry group).

定义 28.11 (n 元对称群)

$D_n \coloneqq \langle \sigma, \tau : \sigma^n = \tau^2 = I, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$. 其中 σ, τ 是 D_n 的两个生成元.D_n 是非 Abel 群.

定义 28.12 (二面体群)

正 n 边形的对称 (性) 群 D_n 称为二面体群 (dihedralgroup). 且 $|D_n| = 2n$.

28.3 n 元对称群

定义 28.13

对于集合 Ω 到自身的双射, 容易验证它们构成一个群, 称为 Ω 上的全变换群.

当 Ω 是有限集合时, 这种双射被称为 Ω 上的一个置换.

设 Ω 有 n 个元素, 不妨设 $\Omega = \{1, 2\cdots, n\}$, 称 Ω 上的一个置换为 n 元置换, 称 Ω 上的全变换群为 n 元对称群, 记作 S_n.

如果一个 n 元置换: $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \cdots, i_r \mapsto i_1$, 则称 σ 为一个 r-轮换, 简称为轮换, 记作 $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$.

特别地,2-轮换称为对换.

笔记 不相交的两个轮换对乘法是可交换的.

定理 28.9

非平凡置换可以唯一表为若干无交轮换的乘积.

命题 28.5

轮换与对换：

$$(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \cdots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$$

命题 28.6

逆：

$$(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r)^{-1} = (i_1 i_r i_{r-1} \cdots i_2)$$

证明

- $(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r)(i_1i_ri_{r-1}\cdots i_2)=(i_1)(i_2)\cdots(i_r)$
- $(i_1i_ri_{r-1}\cdots i_2)(i_1i_2i_3\cdots i_{r-1}i_r)=(i_1)(i_2)\cdots(i_r)$ \\\\

定义 28.14

称 σ 为偶置换, 若它可以表示为偶数个对换的乘积; 称 σ 为奇置换, 若它可以表示为奇数个对换的乘积.
每个 3-轮换都是偶置换, 因为:

$$(ijk)=(ij)(ik)$$

(1) 是偶置换, 因为 (1) = (12)(12).
S_n 中所有偶置换构成集合 A_n, 容易验证 A_n 也是一个群, 称为 n 元交错群. S_n 中任意奇置换乘 (12) 得到偶置换, 任意偶置换乘 (12) 得到奇置换. 故二者一一对应, 则有

$$|A_n|=\frac{|S_n|}{2}=\frac{n!}{2}$$

笔记 由于任意对换 (ij) 可以表示为

$$(ij)=(1i)(1j)(1i).$$

故因此 S_n 可以由 $\{(12),(13),\cdots,(1n)\}$ 生成, 即

$$S_n=\langle(12),(13),\cdots,(1n)\rangle.$$

由于 A_n 中有有偶数个 $(1i)$ 的形式, 因此我们只要考察 $(1i)(1j)$ 能写成什么形式, 注意到

$$(1i)(1j)=(1ji)$$

因此每一个 n 元偶置换 $(n\geqslant 3)$ 可以写成一些 3-轮换的乘积. 从而 A_n 由 3-轮换生成.
这些对换的乘法是从右往左读的.

定义 28.15

如果 G 中的每个元素都能表为 S 中有限多个元素的整数次幂的乘积, 那么称 S 是群 G 的生成元集, 或者说 S 的所有元素生成 G.
如果群 G 有一个生成元集是有限集, 那么称 G 是有限生成的群. 如果这个生成元集是 $\{a_1,a_2,\cdots,a_t\}$, 则记作

$$G=\langle a_1,a_2,\cdots,a_t\rangle.$$

28.4 子群,Lagrange 定理

定义 28.16

- 称H是群G的一个子群, 如果G的非空子集H也成群, 记作$H<G$.
- n元对称群S_n的任一子群称为n元置换群.
- 非空集合Ω上的全变换群S_Ω的任一子群称为Ω上的变换群.

命题 28.7

$H<G\Leftrightarrow a,b\in H$蕴含$ab^{-1}\in H$.

定义 28.17

- 定义等价关系$a \sim b :\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
  则有$\bar{a} := \{x \in G : x \sim a\} = \left\{x \in G : xa^{-1} = h \in H\right\} = \{x \in G : x = ha, h \in H\} =: Ha, a \in H$
  称Ha是H的一个右陪集,a为陪集代表.H的所有右陪集构成一个G的划分,该集合被称为G关于H的右商集,记作$(G/H)_r$.
- 把$(G/H)_r$ (或$(G/H)_l$) 的基数称为H在G中的指数,记作$[G:H]$.
- 若$[G:H] = r$,则有
$$G = H \sqcup a_1H \sqcup a_2H \sqcup \cdots \sqcup a_{r-1}H.$$
  称为G关于子集H的左陪集分解式,$\{e, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}$称为$H$在$G$中的左陪集代表系.

笔记 $\tau: \begin{array}{l} H \to aH \\ h \mapsto ah \end{array}$ 容易验证是双射,从而H与其任一左陪集aH的基数相同

定理 28.10 (Lagrange 定理)

G是有限群,$H < G$,则$|G| = [G:H]\,|H|$,从而G的任一子群H的阶是G的阶的因数.

定义 28.18

称H是由a生成的子群,记作$\langle a \rangle$如果$H = \left\{e, a, a^2, \cdots, a^{s-1}\right\}$,$s$为$a$的阶.

推论 28.2

- 有限群G的任一元素a,有a的阶是$|G|$的因数.
- 素数阶群一定是循环群.

定理 28.11 (欧拉定理)

$(a, m) = 1$,则$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

定理 28.12 (费马小定理)

对任意$a \in \mathbb{N}$,素数p,有$a^p \equiv a \pmod{p}$.

定理 28.13

$G = \langle a \rangle$是n阶循环群,则

- G的每个子群都是循环群.
- $\forall s | n, \exists 1 s$阶子群.这些子群构成$G$的全部子群.

笔记 4阶群的同构类只有$(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +)$.后者称为 Klein群,也称为四群.

例题 28.5.

设A, B是群G的两个非空子集,若群G的运算为乘法,则规定$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$;若群$G$ 的运算为加法,则规定 $AB := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

容易验证

- 群G的子集运算满足结合律.
- 若群G的运算为乘法,则$(A \cup B)\, C = (AC) \cup (BC)$.

例题 28.6.

设 H,K 都是群 G(运算为乘法) 的子群. 证明：HK 为 G 的正规子群当且仅当

$$HK = KH.$$

证明 取逆，证明 $\subseteq, \supseteq$.

例题 28.7.

$H,K < G$ 有限, 证明：

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

证明 见丘维声《近世代数》习题 1.4 第 6 题

例题 28.8.

证明：域 F 的乘法群 F^* 的有限子群必为循环群.

证明 由定义28.3, 乘法群 F^* 是 Abel 群, 对于 F^* 的一个有限子群 H, 有 H 是有限 Abel 群. 考虑方程 $x^m = e$ 在域 F 中解不超过 m 个, 故方程 $x^m = e$ 在乘法群 F^* 中解不超过 m 个, 故方程 $x^m = e$ 在有限 Abel 群 H 中解不超过 m 个. 由定理28.4可知,H 是循环群. \\\\

例题 28.9.

证明定理28.4的逆命题. 即如果 G 是 n 阶循环群, 则对于任意给定的正整数 m, 方程 $x^m = e$ 在 G 中的解的个数不超过 m.

证明 对于任意给定的正整数 m, 定义集合 $H := \{x \in G : x^m = e\}$. 容易验证 $e \in H$, 且$b, c \in H$蕴含$bc^{-1} \in H$. 由命题28.7,$H < G$.由于G是n阶循环群, 由定理28.13,知$\exists d|n, s.t.H = \left\langle a^d \right\rangle$, 且$H$的阶$s = \frac{n}{d}$.由$H$定义可知：$\left(a^d\right)^m = e$.故$s|m, s \leq m$, 故 $|H| \leqslant m$. \\\\

例题 28.10.

群 G 中元素 a, 如果存在 $b \in G$ 使得 $b^2 = a$, 那么称 a 是平方元, 把 b 称为 a 的一个平方根. 证明: 奇数阶群 G 的每个元素 a 都是平方元, 且 a 的平方根唯一.

证明

- 任给$a \in G$, 由定理28.13,a的阶是 $|G|$ 的因数.故 $|a|$ 为奇数$2m+1$, $a = ae = aa^{2m+1} = \left(a^{m+1}\right)^2$.于是$a$为平方元.
- 若b, c都是a的平方根, 则$b^2 = a = c^2$,故 $\left(bc^{-1}\right)^2 = e$, 故$bc^{-1}$的阶一定整除2.由于$bc^{-1} \in G$,它的阶是 $|G|$ 的因数. 故bc^{-1}阶数为1, 即$bc^{-1} = e, b = c$. \\\\

28.5 群的直积 (直和)

定理 28.14 (内直积)

设 H,K 是群 G 的两个子群，则 $H\times K\cong G$ 且其同构映射为 $(h,k)\mapsto hk$ 当且仅当下列条件成立:

1. $G=HK$
2. $H\cap K=\{e\}$
3. H 中每个元素与 K 中每个元素可交换.

笔记 我们习惯记作 $G\cong H\times K$，其同构映射为 $(h,k)\mapsto hk$，那么称 G 是它的子群 H 和 K 的内直积. 如果群 G 的运算为加法，习惯上记作 $G=H\oplus K$.

笔记 我们定义从 $H\times K$ 到 G 的一个映射 $\begin{aligned}\sigma:\ & H\times K\to G\\ & (h,k)\mapsto hk\end{aligned}$

- σ 是满射 $\Leftrightarrow G=HK$
- σ 是单射 $\Leftrightarrow H\cap K=\{e\}$
- $\sigma[(h_1,k_1)(h_2,k_2)]=\sigma(h_1,k_1)\sigma(h_2,k_2)\Leftrightarrow H$ 中每个元素与 K 中每个元素可交换

定理 28.15

设 $H_1,H_2,\cdots,H_s$ 都是群 G 的子群，G 的运算为加法，则 $H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_s\cong G$ 且其同构映射为 $(h_1,\cdots,h_s)\mapsto h_1+\cdots+h_s$ 当且仅当下列条件成立:

1. $G=H_1+H_2+\cdots+H_s$
2. $H_i\cap(\sum_{j\neq i}H_j)=\{e\}$
3. H_i 每个元素与 H_j 每个元素可交换，$i\neq j,1\leq i,j\leq s$

其中同构映射为 $(h_1,\cdots,h_s)\mapsto h_1+\cdots+h_s,h_i\in H_i,i=1,2,\cdots s$.

笔记 称 G 是它的子群 $H_1,H_2,\cdots,H_s$ 的内直和，习惯上记作

$$G=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_s$$

这是把 $(h_1,h_2,\cdots,h_s)$ 与 $h_1+h_2+\cdots+h_s$ 等同. 此时，G 中每个元素 g 可以唯一地表成 $g=h_1+h_2+\cdots+h_s$，其中 $h_i\in H_i,i=1,2,\cdots,s$.

定义 28.19

- 域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆矩阵组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级一般线性群，记作 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.
- 域 $\mathbb{F}$ 上的所有行列式为 1 的 n 阶矩阵组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级特殊线性群，记作 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.
- $\mathbb{R}$ 上的所有 n 阶正交矩阵 $(AA^T=I_n)$ 组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级正交群，记作 O_n.
- $\mathbb{R}$ 上的所有行列式为 1 的 n 阶正交矩阵 $(AA^T=I_n)$ 组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为域 $\mathbb{F}$ 上 n 级特殊正交群，记作 SO_n.

定义 28.20

- $\mathbb{C}$ 上所有 n 阶酉矩阵 $(AA^*=I_n)$ 所组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为 n 阶酉群，记作 U_n.
- 行列式为 1 的所有 n 阶酉矩阵所组成的集合，对于矩阵乘法成一个群，称它为 n 阶特殊酉群，记为 SU_n.

28.6 群的同态，正规子群，商群，群同态基本定理

定义 28.21

若群 G 到 $\tilde{G}$ 有一个映射 σ，使得

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b),\quad \forall a,b\in G$$

则称 σ 是从群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个同态映射，简称同态.

笔记 同态映射的定义只比同构少了“双射”这个条件.

命题 28.8

设 σ 是群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个同态，则 $\ker\sigma$ 是 G 的一个子群.

命题 28.9

设 σ 是群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个同态，则 σ 是单射当且仅当

$$\ker\sigma=\{e\}$$

命题 28.10

设 σ 是群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个同态，则 $\forall a\in G$，有

$$a(\ker\sigma)=(\ker\sigma)a$$

定义 28.22 (正规子群)

如果群 G 的子群 H 满足：$\forall a\in G$，有

$$aH=Ha$$

那么称 H 是 G 的正规子群，记作 $H\lhd G$.

命题 28.11

$\ker\sigma$ 是 G 的正规子群.

命题 28.12

群 G 的子群 H 是 G 的正规子群当且仅当

$$aHa^{-1}=H,\quad \forall a\in G$$

定义 28.23 (共轭子群)

设 H 为群 G 的一个子群，任取 $a\in G$，则 aHa^{-1} 也是 G 的一个子群，称它为 H 的一个共轭子群.

命题 28.13

群 G 的子群 H 是 G 的正规子群当且仅当 H 的共轭子群都等于 H.

判断 G 的子群是正规子群的常用方法.

命题 28.14 (正规子群的判定)

设 H 是群 G 的一个子群，若任给 $a\in G$，任取 $h\in H$，都有 $aha^{-1}\in H$，则 $H\lhd G$.

命题 28.15 (正规子群的判定)

$H < G$，若 $[G:H]=2$，则 $H \lhd G$.

笔记 正规子群对于研究群的结构有着重要的作用. 设 $N \lhd G$，则 $(G/N)_l = (G/N)_r$，记作 G/H. 其中有一种运算:

$$(aN)(bN) := abN \tag{28.1}$$

笔记 若 $N \lhd G$，则商集 G/N 对于式28.1定义的运算成群，称为群 G 对于它的正规子群 N 的商群.

命题 28.16

设 G 为有限群，$N \lhd G$，则 $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$.

定理 28.16 (自然同态)

设 N 是群 G 的一个正规子群，令

$$\begin{aligned} \pi: \quad G &\to G/N \\ a &\mapsto aN \end{aligned}$$

则 π 是群 G 到商群 G/N 的一个满同态，并且 $\ker\pi = N$. 我们把 π 称为自然同态或标准同态.

定理 28.17 (群同态基本定理)

设 σ 是群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个同态，则 $\ker\sigma$ 是 G 的一个正规子群，且

$$G/\ker\sigma \cong \mathrm{Im}\sigma.$$

笔记 群同态是研究群的结构及其应用的主线.

笔记 利用群同态基本定理可以推导出一些群是同构的. 首先要建立一个合适的映射 σ，证明它是满同态；然后去求同态的核 $\ker\sigma$；最后根据群同态基本定理得同态同构于商群.

定理 28.18 (第一群同构定理)

设 G 是一个群，$H < G, N \lhd G$，则

1. $HN < G$
2. $H \cap N \lhd H$，且 $H/H\cap N \cong HN/N$.

证明

1. 根据例题28.4可知，只需证 $HN = NH$，只需证 $HN \subseteq NH, NH \subseteq HN$.
   - $HN \subseteq NH$: 任取 $h \in H \subset G, n \in H$，因为 $N \lhd G$，所以 $hnh^{-1} \in hNh^{-1} = N$. 从而有
     $$hn = (hnh^{-1})h \in NH.$$
   - $NH \subseteq HN$: 任取 $h \in H \subset G, n \in H$，因为 $N \lhd G$，所以 $h^{-1}nh \in h^{-1}Nh = N$. 从而有
     $$nh = h(h^{-1}nh) \in HN.$$

   从而 $HN < G$.
2. 因为 $NH < G$，且 $N \lhd G$，故 $N \lhd NH$. 令
   $$\begin{aligned} \sigma: \quad H &\to HN/N \\ h &\mapsto hN \end{aligned}$$
   则 σ 是群 G 到 G/N 的自然同态 π 在 H 上的限制，从而 σ 保持乘法运算. 于是 σ 是 H 到 HN/N 的群同态. 任取 HN/N 中的一个元素 $(hn)N$，有 $\sigma(h) = hN = (hn)N$，因此 σ 是满射，于是 $\mathrm{Im}\sigma = HN/N$. 根据群同态基本定理28.17得
   $$H/\ker\sigma \cong HN/N.$$

我们断言 $\ker\sigma = H\cap N$.

$h\in\ker\sigma \Leftrightarrow h\in H, \sigma(h) = N \Leftrightarrow h\in H$，且 $hN = N \Leftrightarrow h\in H$，且 $h\in N \Leftrightarrow h\in H\cap N$. 因此 $\ker\sigma = H\cap N$.

从而 $H\cap N\lhd G$, 且

$$H/H\cap N \cong HN/N.$$

定理 28.19 (第二群同构定理)

设 G 是一个群，$N\lhd G$，H 是 G 得包含 N 的正规子群，则 $H/N\lhd G/N$，且

$$(G/N)/(H/N)\cong G/H.$$

证明 令

$$\begin{aligned}\sigma:\quad & G/N \to G/H\\ & aN \mapsto aH\end{aligned}$$

1. 良定性检验：$aN = bN \Leftrightarrow b^{-1}a\in N\subseteq H \Leftrightarrow aH = bH$.
2. $\mathrm{Im}\sigma = G/H$ 检验满射：由定义可知显然.
3. 同态检验:$\sigma((aN)(bN)) = \sigma(abN) = abH = (aH)(bH) = \sigma(aN)\sigma(bN)$.
   故由群同态基本定理28.17可知：
   $$(G/N)/\ker\sigma \cong G/H.$$
4. $\ker\sigma = H/N$ 检验：$aN\in\ker\sigma \Leftrightarrow \sigma(aN) = H \Leftrightarrow aH = H \Leftrightarrow a\in H \Leftrightarrow aN\in H/N$.
   因此，$\ker\sigma = H/N$，由命题28.11可知，$H/N\lhd G/N$，且 $(G/N)/(H/N)\cong G/H$.

例题 28.11.

设 G 和 $\tilde{G}$ 是两个群，证明：

$$G\times\{\tilde{e}\}\lhd G\times\tilde{G},\qquad \{e\}\times\tilde{G}\lhd G\times\tilde{G};$$

$$G\times\tilde{G}/G\times\{\tilde{e}\}\cong\tilde{G},\qquad G\times\tilde{G}/\{e\}\times\tilde{G}\cong\tilde{G}.$$

证明 $\begin{aligned}\sigma:\quad & G\times\tilde{G}\to\tilde{G}\\ & (g,\tilde{g})\mapsto\tilde{g}\end{aligned}$ 接下来的步骤是 Routine 的.

1. Check σ well-defined: $(g.\tilde{g}) = (h,\tilde{h}) \Rightarrow \tilde{g} = \tilde{h}$.
2. Check σ onto: 由定义显然.
3. Check σ 同态: $\sigma((g,\tilde{g})(h,\tilde{h})) = \sigma((gh,\tilde{g}\tilde{h})) = \tilde{g}\tilde{h} = \sigma(g,\tilde{g})\sigma(h,\tilde{h})$.
4. Check $\ker\sigma = G\times\{\tilde{e}\}$: On one hand, $\forall(g,\tilde{g})\in\ker\sigma, \sigma((g,\tilde{g})) = \tilde{e}, i.e. \tilde{g} = \tilde{e} \Rightarrow (g,\tilde{g})\in G\times\{\tilde{e}\} \Rightarrow \ker\sigma\subseteq G\times\{\tilde{e}\}$.
   On the other hand, $\forall(g,\tilde{e})\in G\times\{\tilde{e}\}, \sigma(g,\tilde{e}) = \tilde{e} \Rightarrow (g,\tilde{e})\in\ker\sigma \Rightarrow G\times\{\tilde{e}\}\subseteq\ker\sigma$. 综上, $\ker\sigma = G\times\{\tilde{e}\}$.

由群同态基本定理28.17，$G\times\{\tilde{e}\}\lhd G\times\tilde{G}$,$G\times\tilde{G}/G\times\{\tilde{e}\}\cong\tilde{G}$. 另一边证明类似.

例题 28.12.

设 $H,K\lhd G$，且 $G = HK, H\cap K = \{e\}$. 证明：G 是 H 与 K 的内直积.

证明 由定理28.14，只需证 H 中每个元素与 K 中每个元素可交换. 由正规子群的定义 $\forall k_1\in K\subseteq Gh_1\in H\subseteq G, \exists k_2, h_2\in H, s.t. k_1h_1 = k_1h_2 = k_2h_2 \Rightarrow k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1}\in H\cap K$. 由于 $H\cap K = \{e\}$，故 $k_1 = k_2, h_1 = h_2$. 因此，$k_1h_1 = k_1h_1, \forall k1\in K, h_1\in H$.

定义 28.24 (半直积)

设 G 是一个群，$N \lhd G, H < G$，如果 $G = NH$，且 $N \cap H = \{e\}$，那么称 G 可分解成它的正规子群 N 与子群 H 的半直积，记作 $G = N \rtimes H$

例题 28.13.

如果 $G = N \rtimes H$，那么

$$G/H \cong H.$$

证明 由第一群同构定理28.18，$G/N = HN/N \cong H/H \cap N = H/\{e\} \cong H$.

例题 28.14.

证明：S_n 可分解成 A_n 与 $\langle(12)\rangle$ 的半直积，其中 $n \geq 3$.

证明 $|A_n \langle(12)\rangle| = \dfrac{|A_n||\langle(12)\rangle|}{|A_n \cap \langle(12)\rangle|} = 2 \cdot \dfrac{n!}{2} = n! = |S_n|$.
从而 $S_n = A_n \langle(12)\rangle$，结合 $A_n \cap A_n(12) = \{e\}$，得证.

例题 28.15.

证明：如果置换群 G 含有奇置换，那么 G 必有指数为 2 的子群.

证明 证明见丘维声《近世代数》练习 1.6 第 12 题.

例题 28.16.

设 σ 是群 G 到 $\tilde{G}$ 的一个满同态，记 $K = \ker \sigma$. 设 $\tilde{H} < \tilde{G}$，令 $\sigma^{-1}(\tilde{H}) = \{g \in G : \sigma(g) \in \tilde{H}\}$. 证明：

1. $\sigma^{-1}(\tilde{H}) < G$，且 $K \subseteq \sigma^{-1}(\tilde{H})$
2. $\tilde{H} \to \sigma^{-1}(\tilde{H})$ 是 $\tilde{G}$ 的所有子群组成的集合 $\tilde{\Omega}$ 到 G 的所有包含 K 的所有子群组成的集合 Ω 的一个双射.

证明

1. Routine
2. 由 1. 可知，$\tilde{H} \to \sigma^{-1}(\tilde{H})$ 是映射. 我们任取 $H < G, K \subseteq G$，记 $\tilde{H} = \sigma(H)$，要证 $H = \sigma^{-1}(\tilde{H})$.
   - $\subseteq$: $\forall g \in \sigma^{-1}(\tilde{H}), \sigma(g) \in \tilde{H} = \sigma(H) \Rightarrow \exists h \in H, s.t. \sigma(g) = \sigma(h) \Rightarrow \sigma(gh^{-1}) = \sigma(g)\sigma(h)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow gh^{-1} \in K \subseteq H \Rightarrow g \in H \Rightarrow \sigma^{-1}(\tilde{H}) \subseteq H$.
   - $\supseteq$: $\forall h \in H$，由 $\tilde{H}$ 定义，$\sigma(h) \in \tilde{H} \Rightarrow h \in \sigma^{-1}(\tilde{H}) \Rightarrow H \subseteq \sigma^{-1}(\tilde{H})$

   故 $H = \sigma^{-1}(\tilde{H})$. 我们证明了满射，单射的证明是 Routine 的. 于是 σ 是双射.

28.7 可解群，单群，Jordan-Hölder 定理

定义 28.25 (换位子，换位子群 (导群))

- 对于 $x, y \in G$，我们把 $xyx^{-1}y^{-1}$ 称为 x 与 y 的换位子，记作 $[x, y]$. 我们有

$$xy = yx \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$$

- 群 G 的所有换位子组成的子集生成的子群称为 G 的换位子群或导群，记作 G' 或 $[G,G]$，即
$$G' = \left\langle \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\} \right\rangle.$$
- 群 G 为 Abel 群 $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

命题 28.17

σ 是 $G \to \tilde{G}$ 的一个同态，则
$$\mathrm{Im}\sigma\text{为 Abel 群} \Leftrightarrow G' \subseteq \ker\sigma.$$

命题 28.18

$G' \lhd G$.

命题 28.19

G/G' 是 Abel 群.

命题 28.20

设 $N \lhd G$，则
$$G/N\text{为 Abel 群} \Leftrightarrow G' \subseteq N.$$

定义 28.26 (可解群和不可解群)

群 G, G' 的换位子群记为 $G^{(2)}, \cdots, G^{(k-1)}$ 的换位子群记作 $G^k, \cdots$. 如果有一个正整数 k, 使得 $G^{(k)} = \{e\}$，那么称 G 是可解群，否则称 G 是不可解群.

笔记 若 G 是 Abel 群，则 $G' = \{e\}$. 从而 Abel 群都是可解群.

定理 28.20

群 G 是可解群当且仅当存在 G 的递降的子群列：
$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\}$$
并且每个商群 G_{i-1}/G_i 都是 Abel 群，$i = 1, 2, \cdots, s$.

定理 28.21

可解群的每个子群和同态像都是可解群.

推论 28.3

可解群的商群都是可解群.

定理 28.22

设 N 是群 G 的正规子群，若 N 和 G/N 都是可解群，则 G 是可解群.

笔记 利用群 G 的正规子群 N 和商群 G/N 的结构可了解 G 的结构.

定义 28.27 (单群)

如果群 G 只有平凡的正规子群 $\{e\}$ 和 G，那么称 G 是单群.

定理 28.23

Abel 群 G 是单群当且仅当 G 是素数阶循环群.

定理 28.24

若非 Abel 群 G 是单群，则 G 是不可解群.

推论 28.4

非 Abel 群的可解群不是单群.

笔记 推论28.4告诉我们，非 Abel 单群只能从不可解群中去寻找.

定理 28.25 (Feit-Thompson 定理)

每一个奇数阶群都是可解群.

不可解的有限群必为偶数阶群.

有限群中，所有非 Abel 单群都是偶数阶群.

笔记 [有限单群的分类问题]

1. 素数阶群循环群
2. $n \geq 5$ 的交错群 A_n
3. Lie 型单群 (共 16 族)
4. 26 个散在单群

在定理28.20中，我们用递降子群列来刻画可解群的结构. 现在我们用递降子群来刻画一般群的结构.

定义 28.28

群 G 的一个递降的子群列：

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_r = \{e\} \tag{28.2}$$

称为 G 的一个次正规子群列. 式28.2的商群组

$$G_0/G_1, G_1/G_2, \cdots, G_{r-1}/G_r$$

称为28.2的因子群组，其中含有非单位元的因子群的个数称为28.2的长度.

笔记 注意 G 的一个次正规子群列中，每个 G_i 是前一个的正规子群，但不要求 G_i 是 G 的正规子群.

定义 28.29 (合成群列)

G 的一个次正规子群列28.2如果满足：每个因子群 $G_{i-1}/G_i (i = 1, 2. \cdots, r)$ 都是单群，那么称28.2是 G 的一个合成群列.

笔记 每个群都有次正规子群列.

命题 28.21

每个有限群至少有一个合成群列.

推论 28.5

有限群 G 是可解群当且仅当存在一个递降的子群列：

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_r = \{e\}$$

其中每个商群 $H_{i-1}/H_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 都是素数阶循环群.

定理 28.26 (Jordan-Hölder 定理)

有限群 G 的任意两个无重复项的合成群列有相同的长度，并且其因子群组能用某种方式配对，使得对应的因子群是同构的.

笔记 Jordan-Hölder 定理28.26告诉我们，一个有限群 G 的任一无重复项的合成群列的因子群组 (不计次序) 在同构的意义下是由 G 唯一决定的. 由此体会到单群是有限群的结构的基本建筑块.

练习 3 求 D_n 的换位子群，其中 $n \geq 3$.

解 由于 $\langle\sigma^2\rangle \lhd D_n$(容易验证)，$[D_n : \langle\sigma^2\rangle] = \frac{2n}{\frac{n}{(n,2)}} = 2(n,2)$，要么是 2 要么是 4，由于 2,4 阶群都是 Abel 群，所以 $D_n' \subseteq \langle\sigma^2\rangle$. 由于 $\sigma^2 = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$(由定义)，故 $\langle\sigma^2\rangle \subseteq D_n'$，故 $D_n' = \langle\sigma^2\rangle$. □

练习 4 求 S_n 的换位子群，其中 $n \geq 3$.

解 由于 $A_n \lhd S_n$，$[S_n : A_n] = 2$，故 S_n/A_n 是素数阶循环群，故是 Abel 群. 于是 $S_n' \subseteq A_n$，而 A_n 可以由 3-对换生成，对于任意的三对换 (ijk)，有 $(ijk) = (ijk)^{-2} = (ikj)^2 = [(ij)(ik)]^2 = (ij)(ik)(ij)(ik) = (ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1} \in S_n'$，故 $A_n \subseteq S_n'$. 故 $A_n = S_n'$. □

练习 5 证明：当 $n \geq 5$ 时，$A_n' = A_n$.

解 证明见丘维声《近世代数》1.7 练习 4.

引理 28.1

$n \geq 5$ 时，A_n 可以由 $\{(abl) : 1 \leq l \leq n, a \neq l, b \neq l\}$ 生成，其中 $a \neq b, a, b \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

证明 证明见丘维声《近世代数》1.7 练习 7.

练习 6 证明：$(\mathbb{Z}, +)$ 的每一个子群都是由一个非负整数生成的子群.

解 设 $H < (\mathbb{Z}, +)$，那么 $0 \in H$，若 H 非平凡，那么存在 $a, (-a) \in \mathbb{Z} \cap H$. 因此不妨设 a 为正整数，由定义显然有 $\langle a\rangle \subseteq H, \forall a \in H$. 假设 H 中最小的正整数为 a，$\forall m \in H, m = qa + r, 0 \leq r < m$. 若 $r = a - qm \neq 0$，就与 a 是 H 中最小的正整数矛盾. 故 $r = 0$. 因此 $H \subseteq \langle a\rangle$. 故 $\langle a\rangle = H$.

练习 7 $p^r\mathbb{Z}/H$ 是素数阶循环群当且仅当 H 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的什么样的子群？

解 $H < p^r\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$，则 $H = n\mathbb{Z} < p^r\mathbb{Z}$，则 $n \in p^r\mathbb{Z}$，于是 n 可以写成 $p^r m$ 的形式，于是 $H = p^r m\mathbb{Z}$. 因此存在映射

$$\sigma : p^r\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$$

$$p^r x \mapsto \bar{x}$$

容易验证它是良好定义的，$\ker\sigma = p^r m\mathbb{Z}, \mathrm{Im}\sigma = \mathbb{Z}_m$. 故由群同态基本定理，$p^r\mathbb{Z}/p^r m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$. 于是 $p^r\mathbb{Z}$ 是素数阶循环群当且仅当 m 是素数.

28.8 群在集合上的作用，轨道-稳定子定理

定义 28.30 (群作用)

设 G 是一个群，Ω 是一个非空集合. 如果映射

$$\begin{aligned}\sigma:\quad & G\times\Omega\to\Omega\\ &(a,x)\mapsto a\circ x\end{aligned}$$

满足：

$$(ab)\circ x=a\circ(b\circ x),\qquad \forall a,b\in G,\forall x\in\Omega$$

$$e\circ x=x,\qquad \forall x\in\Omega$$

那么称群 G 在集合 Ω 上有一个作用.

命题 28.22

设群 G 在集合 Ω 上有一个作用，任给 $a\in G$，令

$$\psi(a)=x:=a\circ x,\qquad \forall x\in\Omega$$

则 $\psi:a\mapsto\psi(a)$ 是 G 到 S_Ω 的一个群同态.

笔记 同态 ψ 的核 $\ker\psi$ 称为这个作用的核，于是有 $a\in G$是这个作用的核 $\Leftrightarrow a\circ x=x,\quad \forall x\in\Omega$. 当 $\ker\psi=\{e\}$ 时，称这个作用是忠实的，此时 ψ 是 G 到 S_Ω 的一个单同态.

命题28.22逆命题也成立，即：

命题 28.23

设群 G 到非空集合 Ω 上的全变换群 S_Ω 有一个同态 ψ，令

$$a\circ x:=\psi(a)x,\qquad \forall a\in G,\forall x\in\Omega$$

则 G 在 Ω 上有一个作用：$(a,x)\mapsto a\circ x$.

笔记 考虑群 G 在集合 Ω 上的作用可以双赢：对于群 G 来说，可以通过 G 在适当集合上的各种作用来研究群 G 的结构；对于集合 Ω 来说，可以选择合适的群在 Ω 上的作用来研究 Ω 的性质.

定理 28.27 (Cayley 定理)

任意一个群都同构于某一集合上的变换群.

推论 28.6

任意一个有限群都同构于一个置换群.

定义 28.31 (共轭作用)

令

$$G\times G\to G$$

$$(a,x)\mapsto axa^{-1}$$

对于任意 $a,b\in G$，任意 $x\in G$ 有

$$(ab)\circ x=(ab)x(ab)^{-1}=a(bxb^{-1})a=a(b\circ x)a^{-1}=a\circ(b\circ x)$$

$$e\circ x=exe^{-1}=x$$

因此这是一个群 G 在集合 G 上的群作用.

定义 28.32 (中心)

共轭作用的核就是 $Z(G) := \{b \in G : bx = xb, \forall x \in G\}$，称为群 G 的中心.

笔记 群 G 在集合 G 上的作用诱导了群 G 到 S_G 的一个同态 σ，把 a 在 σ 下的像记为 σ_a，于是

$$\sigma_a(x) = a \circ x = axa^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

易验证 σ_a 是一个同构，称为 G 的内自同构.

定义 28.33 (自同构群，内自同构群)

群 G 的所有自同构组成的集合对于映射的乘法成群，称它为 G 的自同构群，记为 $\mathrm{Aut}(G)$.
所有上述的内自同构 σ_a 在 S_G 中构成一个群，称为 G 的内自同构群，记作 $\mathrm{Inn}(G)$.

定理 28.28

$\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

定理 28.29

$\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

性质 1. 群作用诱导的二元关系

$y \sim x \Leftrightarrow$ 存在 $a \in G$ 使得 $y = a \circ x$.

定义 28.34 (G-轨道)

$G(x) := \{a \circ x : a \in G\}$ 称为 x 的 G-轨道.

定义 28.35 (完全代表系)

集合 Ω 的所有 G-轨道构成 Ω 的一个划分.Ω 等于它的所有两两不交的 G-轨道的并集：

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} G(x_i).$$

且当 $i \neq j$ 时，有 $G(x_i) \cap G(x_j) = \varnothing$.$\{x_i : i \in I\}$ 称为 Ω 的 G-轨道的完全代表系.

定义 28.36 (稳定子群)

$G_x := \{g \in G : g \circ x = x\}$ 是 G 的一个子群，称 G_x 是 x 的稳定子群.

定理 28.30 (轨道-稳定子定理)

G 在集合 Ω 上有一个作用，则对任意 $x \in \Omega$ 有

$$|G(x)| = [G : G_x]$$

即 x 的 G-轨道的基数等于 x 的稳定子群 G_x 在 G 中的指数.

推论 28.7 (有限群的轨道-稳定子定理)

有限群 G 则

$$|G(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

定义 28.37 (共轭类)

任给 $x \in G$，x 的 G-轨道为

$$G(x) = \{a \circ x : a \in G\} = \{axa^{-1} : a \in G\}.$$

右边的集合称为 x 的共轭类.

定义 28.38 (类方程)

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{j=1}^{r} \left|G(x_j)\right|$$

定义 28.39 (中心化子)

$C_G(x) := \{g \in G : gx = xg\}$ 称为 x 在 G 里的中心化子.

定义 28.40 (齐性空间)

如果群 G 在 Ω 上的作用只有一条轨道，那么称 G 在 Ω 上的这个作用是传递的，此时 Ω 是群 G 的一个齐性空间.

定义 28.41 (不动点集)

$F(g) := \{x \in \Omega : g \circ x = x\}$

引理 28.2 (Burnside 引理)

有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，则 Ω 的 G-轨道条数 r 为

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

定义 28.42 (不动点)

G 在 Ω 上有一个作用，对于 $x \in \Omega$，若 x 的 G-轨道只含有一个元素 (即 x 自身)，则称 x 是 G 的一个不动点.

G 的所有不动点组成的集合称为 G 的不动点集，记作 Ω_0.

定义 28.43 (p-群)

若有限群 $|G| = p^m$，其中 $m \geq 1$，则称 G 是 p-群.

命题 28.24

设 p-群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，则

$$|\Omega_0| \equiv |\Omega| \mod p.$$

推论 28.8

p-群必有非平凡的中心.

定义 28.44 (H 在 G 中的正规化子)

H 的稳定子群

$$G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

称为 H 在 G 中的正规化子，记作 $N_G(H)$.

28.9 Sylow 定理

引理 28.3

设 $n = p^l m$，其中 $(m, p) = 1$，p 是素数，则对于 $1 \le k \le l$，有

$$p^{l-k} || C_n^{p^k}$$

定理 28.31 (Sylow 第一定理)

$|G| = p^l m, (m, p) = 1, l > 0$，则 G 中必有 $p^k (0 \le k \le l)$ 阶子群，其中 p^l 阶子群称为 G 的 Sylow p-子群.

定理 28.32 (Sylow 第二定理)

$|G| = p^l m, (m, p) = 1, l > 0$，则

(i) G 的任意 $p^k (1 \le k \le l)$ 阶子群一定包含于 G 的某个 Sylow p-子群中.

(ii) G 的任意两个 Sylow p-子群在 G 中共轭.

推论 28.9

有限群 G 的 Sylow p-子群是正规子群当且仅当 G 的 Sylow p-子群个数为 1.

定理 28.33 (Sylow 第三定理)

$|G| = p^l m, (m, p) = 1, l > 0$，则 G 的 Sylow p-子群的个数 $r \equiv 1 \mod p$ 且 $r | m$.

第二十九章 点集拓扑

一些基本概念

第三十章 Basic Topology, Armstrong

Let X, Y be topological space.

定义 30.1 (continuous function)
A function $f : X \to Y$ is continuous if each point x of X and each neighbourhood N pf $f(x)$ in Y the set $f^{-1}(N)$ is a neighbourhood of x in X.

定义 30.2 (homeomorphism)
A function $h : X \to Y$ is called a homeomorphism if it is one-one, onto, continuous, and has a continuous inverse.

定理 30.1 (Tietze extension theorem)
Any real-valued continuous function defined on a closed subset of a metric space can be extended over the whole space.

定理 30.2
The continuous image of a compact space is compact.

定理 30.3
A closed subset of a compact space is compact.

命题 30.1 (Bolzano-Weiestrass property)
An infinite subset of a compact space must have a limit point.

定理 30.4
A function $f : Z \to X \times Y$ is continuous if and only if the two composition functions $p_1 f : Z \to X$, $p_2 f : Z \to Y$ are both continuous.

定义 30.3 (connectedness)
A space X is connected if whenever it is decomposed as the union $A \cup B$ of two nonempty subsets then $\bar{A} \cap B \neq \varnothing$ or $A \cap \bar{B} \neq \varnothing$.

定理 30.5 (criteria of connectedness)
The following conditions on a space X are equivalent.

- X is connected.
- The only subsets of X which is both open and closed are X and the empty set.
- X cannot be expressed as the union of two disjoint nonempty open sets.
- There is no onto continuous function from X to a discrete space which contains more than one point.

定义 30.4 (discrete space)
A discrete space is simply a topological space equipped with the discrete topology. A discrete space is always a metric space, namely the metric space with the same underlying set and with the discrete

metric.

定义 30.5 (discrete topology)

A topology is given by a collection of subsets of a topological space X. The smallest topology has two open sets, the empty set $\varnothing$ and X. The largest topology contains all subsets as open sets, and is called the discrete topology. In particular, every point in X is an open set in the discrete topology.

定理 30.6

The continuous image of a connected space is connected.

推论 30.1

If $h : X \to Y$ is a homeomorphism, then X is connected if and only if Y is connected. In brief, connectedness is a topological property of a space.

定理 30.7

If Z is connected subset of a topological space X, and if $Z \subseteq Y \subseteq \bar{Z}$, then Y is connected. In particular, the closure $\bar{Z}$ of Z is connected.

定理 30.8

Let $\mathscr{F}$ be a family of subsets of a space X whose union is all of X. If each member of $\mathscr{F}$ is connected, and if no two members of $\mathscr{F}$ are separated from one another in X, then X is connected.

引理 30.1 (Lebesgue's lemma)

Let X be a compact metric space and let $\mathscr{F}$ be an open cover of X. Then there exists a real number $\delta > 0$(called a Lebesgue number of $\mathscr{F}$) such that any subsets of X of diameter less than δ is contained in some member of $\mathscr{F}$.

定义 30.6 (path)

A path in a topological space X is a continuous function $\gamma : [0,1] \to X$. The points $\gamma(0)$ and $\gamma(1)$ are called the beginning andd end point of the path respectively, and γ is said to join $\gamma(0)$ to $\gamma(1)$. Note that if γ^{-1} is defined by $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), 0 \leq t \leq 1$, then γ^{-1} is a path in X which joins $\gamma(1)$ to $\gamma(0)$.

定义 30.7 (path-connected)

A space is path-connected if any two of its points can be joined by a path.

笔记 A path-connected space is always connected, but the converse is not true.

定义 30.8 (Partition)

Let X be a topological space and let $\mathscr{P}$ be a family of disjoint nonempty subsets of X such that $\cup\mathscr{P} = X$. Such a family is usually called a parition of X.

定义 30.9 (Identification space?)

We form a new space Y called identification space provided that the point of Y are the members of $\mathscr{P}$.

定义 30.10 (Identification map)
Let $f : X \to Y$ be an onto map and suppose that the topology on Y is the largest for which f is continuous.

笔记 Any function $f : X \to Y$ gives rise to a partition of X whose members are the subsets $\{f^{-1}(y)\}$, where $y \in Y$. Let Y_* denote the identification space associated with this partition, and $\pi : X \to Y_*$ the usual map.

定义 30.11 (glueing)
Let X, Y be subsets of a topological space and give each of X, Y and $X \cup Y$ the induced topology. If $f : X \to Z$ and $g : Y \to Z$ are functions which agree on the intersection of X and Y, we can define

$$f \cup g : X \cup Y \to Z$$

by $f \cup g(x) = f(x), \forall x \in X$, and $f \cup g(x) = g(y), \forall y \in Y$. We say that $f \cup g$ is formed by 'glueing together' the function f and g.

引理 30.2 (Glueing lemma)
If X and Y are closed in $X \cup Y$, and if both f and g are continuous, then $f \cup g$ is continuous.

定理 30.9
If $j : X + Y \to X \cup Y$ is an identificationmap, and if both $f : X \to Z$ and $g : Y \to Z$ are continuous, then $f \cup g : X \cup Y \to Z$ is continuous.

Define a funtion $F : \cup X_\alpha \to Z$ by glueing together the $f_\alpha : X_\alpha \to Z$, i.e. $F(x) = f_\alpha(x)$, if $x \in X_\alpha$. Let $\oplus X_\alpha$ denote the disjoint union of the spaces X_α, and let $j : \oplus X_\alpha \to \cup X_\alpha$ be the function which when restricted to each X_α is the inclusion in $\cup X_\alpha$.

定理 30.10
If j is an identification map, and if each f_α is continuous, then F is continuous.

As before, we say that $\cup X_\alpha$ has the identification topology when j is an identification map. If the X_α are finite in numbers, and if X_α is closed in $\cup X_\alpha$, then $\cup X_\alpha$ automatically has the identificaition topology. If the X_α are infinite in number, one must be careful.

定义 30.12 (Attaching map)
let X, Y be spaces, let A be a subspace of Y, and let $f : A \to X$ be a continuous function. Our aim is to attach Y to X using f and to form a new space which we shall denote by $X \cup_f Y$. We begin with the disjoint union $X + Y$ and define a partition so that two points lie in the same subset if and only if they are identified under f. Precisely, the subsets of the partition are:

1. pairs of points $\{a, f(a)\}$ where $a \in A$
2. individual points of $Y - A$
3. individual points of $X - \text{image}(f)$

The identification space associated with this partition is $X \cup_f Y$.The map f is called the attaching map.

笔记 One final comment: if Y is an identification space formed from X, then Y is the image of X under a continuous function and therefore inherits properties such as compactness, connectedness, and path-connectedness from X. However, X may be Hausdorff and yet Y not satisfy the Hausdorff axiom.

定义 30.13 (Topological groups)

A topological group G is both a Hausdorff topological space and a group, the two structure being compatible in the sense that the group multiplication $m : G \to G$, and the function $i : G \to G$ which sends each group element to its inverse, are continuous.

笔记 The function $L_x : G \to G$ defined by $L_x(g) = xg$ is called left translation by the element x. It is clearly one-one and onto, and it is continuous because it is the composition:

$$G \to G \times G \xrightarrow{m} G$$

$$g \mapsto (x, g) \mapsto xg.$$

The inverse of L_x is $L_{x^{-1}}$ and therefore L_x is homeomorphism. Similarly the right translation $R_x : G \to G$ given by $R_x(g) = gx$ is also a homeomorphism.

定理 30.11

Let G be a topological group and let K denote the connected component of G which contains the identity element. Then K is a closed normal subgroup of G.

证明 Components are always closed. For any $x \in K$ the set $Kx^{-1} = R_{x^{-1}}(K)$ is connected(since $R_{x^{-1}}$ is a homeomorphism) and contains $e = xx^{-1}$. Since K is the maximal connected subset of G containing e, we must have $Kx^{-1} \subseteq K$. Therefore $KK^{-1} = K$, and K is a subgroup of G. Normality follows in a similar manner. For any $g \in G$ the set $gKg^{-1} = R_{g^{-1}}L_g(K)$ is connected and contains e. Therefore $gKg^{-1} \subseteq K$.

定理 30.12

In a connected topological group any neighbourhood of the identity element is a set of generators for the whole group.

证明 Let G be a connected topological group and let V be a neighbourhood of e in G. Let $H = \langle V \rangle$ be the subgroup of G generated by the elements of V. If $h \in H$ then the whole neighbourhood $hV = L_h(V)$ of h lies in H, so H is open. We claim that the complement of H is also open. For if $g \in G - H$, consider the set gV. If $gV \cap H$ is nonempty, say $x \in gV \cap H$, then $x = gv$ for some $v \in V$. This gives $g = xv^{-1}$, which implies the contradiction $g \in H$ since both x and v^{-1} lies in H. Therefore the neighbourhood $L_g(V) = gV$ of g lies in $G - H$, and we see that $G - H$ is an open set. Now G is connected and so cannot be partitioned into two disjoint nonempty open sets. Since H is nonempty we must have $G - H = \varnothing$,i.e. $G = H$.

定理 30.13

$O(n)$ and $SO(n)$ are compact.

定义 30.14 (group act)

A topological group G is said to act as a group of homeomorphisms on a space X if each group element induces a homeomorphism of the space in such a way that:

(a) $hg(x) = h(g(x))$[a], $\forall g, h \in G, \forall x \in X$

(b) $e(x) = x, \forall x \in X$, where e is the identity element of G

(c) the function $G \times X \to X$ defined by $(g, x) \mapsto g(x)$ is continuous.

[a] We use the same letter for a group element and the homeomorphism induced by it.

theorem about fundamental group

technique about fundamental group

第三十一章 代数拓扑

拓扑空间分类

拓扑不变量：

- 亏格[1]
- 连通性
- 欧拉示性数[2]
- 可定向性[3]

命题 31.1

每一个闭区间都拓扑等价于一个亏格为 $g \geq 0$ 的标准可定向曲面（记为 gT^2），或者一个亏格为 $k \geq 1$ 的标准不可定向曲面（记为 kP^2）[a].

[a] 亏格为 0 的曲面只有可定向的球面，所以不存在亏格为 0 的不可定向曲面.

定理 31.1 (闭曲面分类定理 (Classification Theorem of Closed Surfaces))

任何闭曲面必同胚于球面，或者球面上添加很多个环柄，或者球面挖掉有限多个圆盘而补上莫比乌斯带. 这些曲面之中任何两个都是不同胚的.

笔记 一个闭曲面 S 的同胚类型由可定向性和欧拉示性数 χ 完全决定. 若 S 可定向，则它是，并且 $\chi = 2 - 2g$；若 S 不可定向，则它是 kP^2，并且 $\chi = 2 - k$.

[1] 即洞的个数

[2] $V - E + F$

[3] 即是否可以区分正反面

第三十二章 不等式

32.1 米尔黑德 (Muirhead) 不等式

米尔赫德不等式浅谈 - 抚摸象头的文章 - 知乎

定义 32.1

称 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，若有

$$\begin{aligned}
&a_1 \geq b_1 \\
&a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\
&\cdots \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n
\end{aligned}$$

定理 32.1 (二元米尔黑德不等式)

设 $x, y > 0$，且 $(a_1, a_2) \succ (b_1, b_2)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} \tag{32.1}$$

等号成立当且仅当 $x = y$ 或 $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

定理 32.2 (三元米尔黑德不等式)

设 $x, y, z > 0$，且 $(a_1, a_2, a_3) \succ (b_1, b_2, b_3)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3} \tag{32.2}$$

等号成立当且仅当 $x = y = z$ 或 $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$.

定理 32.3 (四元米尔黑德不等式)

设 $x, y, z, w > 0$，且 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \succ (b_1, b_2, b_3, b_4)$，则

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} w^{a_4} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3} w^{b_4} \tag{32.3}$$

等号成立当且仅当 $x = y = z = w$ 或 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

32.2 等周不等式

等周不等式

第二部分

精神分析

目前国内对于精神分析众说纷纭，尤其是在某些社交平台上面，以精神分析为题的视频得到更加广泛的传播。但是，绝大部分关于精神分析的内容并没有把握到真正的精神分析，而陷入了庸俗的认识论闭环。与此同时，精神分析的理论也因人而异，许多人对精神分析的理解仅仅停留在弗洛伊德时期，事实上，今天的精神分析早已融入了索绪尔的语言学、黑格尔辩证法、拉康的众多理论、结构主义与后结构主义理论等等，可谓是精神把握现实的尝试。

因此，我希望结合自己多年来对精神分析有关内容的学习，提供我个人所认可的精神分析内容 (部分)。不过，许多不了解现代精神分析的人对精神分析存在着误解，这里需要澄清的是，精神分析并非科学，精神分析并非哲学。可以说，精神分析恰恰是反科学的，反哲学的。它并非严谨纯粹的理论，并非形而上的理论，精神分析是一种实践。在了解到现实的结构之后，要去穿越幻象，在行动中、变化中，把握并改造不断变化的现实，而不是庸俗的认识论，不是觉得自己学了精神分析很高级的样子。我们并不应该又对精神分析的理论产生爱欲，这反倒没有穿越幻象了。

还有一些内容不属于精神分析，但是一些比较新奇的视角.

第三十三章 爱欲经济学

厌蠢症 & 智性恋

- 比如一个美丽的人连基本常识都不懂，没错她是蠢的，无知的，但是那些厌蠢症可能就讨厌不起来了，至少容忍度变高了，这是人类的偏心，**人类的厌恶情感并不遵循他以为的一个固定标准**，当他欲望一个人，对那个人有爱欲，那么他再不懂基本常识也不会被厌恶，欲望一个人后他所有的缺陷都是可爱的，人们总是以为自己的厌恶是理性的，不会偏心的，实则不然。
- 有些所谓厌蠢的人只是在享受说别人笨，以此来体现自己的聪明，这种情况下他是在享受对他人的厌恶带来的对自身的迷恋，致力于厌恶他人，享受高傲与自负，看谁都蠢，看谁都厌恶 (这种情况往往他们对自己的生活和世界充满了不满，厌恶整个世界意味不想要当下的生活)(**还有人享受他所厌恶的东西则是一种倒错的爱欲**，所以当代很多文化内容都是在表达对某个明星或电影的厌恶排斥)
- 他们也会嫉妒无知者，**嫉妒不想知道的快乐**，不想知道是惰性无机的，但这就是一种**无知的享乐，无知的激情，凭什么你可以不想知道然后却还是怡然自得**，所以有些厌蠢症只是在嫉妒蠢人的享乐。
- 智性恋看似有着对知识的欲望，其实大多只是喜欢有知识的人。他们可能一本书也不看，最终是那个人吸引了他，因为**有知识的人就是有权力力量的人**，这依然是阳具欲望的逻辑。他们欲望有力量的人，而他们同时也是厌蠢的，因为**无知即无力，他们厌恶无知就是厌恶一种能力的匮乏**。
- 如果一个人富豪不会用微信支付，这种能力的欠缺不会让厌蠢者厌恶，因为**他有其他象征功能补充**，比如有金钱的能力，所以有些人厌蠢就是厌弱。
- 当然智性恋者也可能是**想要自身被懂得，因为他懂得很多知识，所以他可能也会懂我，能理解我**，虽然他不想知道自己，但想要知道自己被他人知道了，一种想要被看到的欲望。
- 很多人想要智性恋是想要一个纯洁的爱情，所谓喜欢性感的大脑，是精神恋爱，这种哲学观是**对身体的贬低，是神经症对身体享乐的压抑**。
- 还有一部分智性恋者仍然是**对于小他者的欲望**，因为他觉得自己也是智者，然后喜欢和自己一样有智慧的人交往，如果那个智者也可以喜欢自己，那么这也是对我智慧的承认。
- 之所以说**智性恋不是超越性的**，是因为爱情本身就是具有超越性的，爱情可以和智慧无关，认为超越的爱情和智慧有关恰恰一点也不超越。**爱情和智慧金钱美貌都可以无关**，并不是智性恋比金钱恋就更超越，也不是同性恋就比异性恋就更超越，即使一个人对于智者的爱欲就是想从他那里获得知识，而知识的超越性也不能建立于对于享乐的排斥上，从而觉得获得知识是纯粹的，没有享乐的，但**爱知识也是一种爱欲，当然是有享乐的**，而享乐之间的等级划分又是制造压抑的，

"妓女情结"——男性沙文主义者的终极幻想

- 修正主义西部片 (Revisionist Western) 开始出现，虽然影片的核心依然是传统的英雄主义故事，还是枪林弹雨的同态复仇，但其中已经不乏对女性形象的去脸谱化，以及对英雄杀死坏蛋的合法性的考虑，开始就"蛮荒与文明"、"个人正义与公众法律"之间的矛盾展开讨论。牛仔在文明的浪潮冲击中死去，法律终会代替个人复仇。这是对文明的赞歌，也是对英雄迟暮的挽歌。这种变化持续到了新千年，平权主义得到了大范围的普及，甚至出现了"政治正确"等矫枉过正的现象。但其中不乏出现了众多深入人心、单持孑立的女性形象，都在冲击着西部男子汉的传统形象，成为了歌德"永恒之女性，引我等向上"的完美诠释。
- 现代西部片开始热衷于赋予主角们严重的创伤或缺陷，将主角塑造成在文明框架中矛盾密布、更加忤逆的"反英雄"。他们善恶界限分明，并不屑于遵从现有腐朽规则的制约，自诩义警在法律无法触及到的阴暗旮旯里私刑审判。而在暴力的背后往往都是为情或义的矛盾挣扎还有孤独困苦。**他们认为这个畸形的社会需要被改变，有些人需要被他们拯救，甘之如饴地寻觅着传统西部片中那饱受欺凌地未亡人"。**
- 《出租车司机》影片中有一个非常关键的场景：在 Travis 分手之后，刺杀总统之前，他曾以朋友的身份与 Iris 共进早餐。在店中，Travis 嫉恶如仇，直言道："你身边的那些人就是些人渣，是全世界组邪恶的人。" 他劝 Iris 出来生活，自己则愿意承担所有的开销。但 Iris 却不以为意，她觉得这都是自己独立选择的结果，是嬉皮，她并不讨厌。
- 虽然以暴制暴大快人心，但是在某种意义上讲，她并不需要 Travis 的稻草，Travis 强行赋予了她们"待拯救"的标签，认定她们就是泥沼中的娇花，并通过杀死她们所认可的人来证明自己的力量还有正义感依旧是被社会所需要的，渴望毫无保留地拯救一名（自以为）身处险境地弱势个体，**来满足自己渴望被依赖的诉求**。这就是继承自老西部电影的"妓女情结"。
- 《你从未在此》中，Joe 是一名退伍老兵，被参议院雇佣来拯救被州长拐骗为妓女的女儿 Nina。当 Joe 杀到州长大宅时，导演甚至省略了所有的暴力镜头，观众只能够通过尸体叙事来臆想正义的审判。最后镜头跟随 Joe 一步步走向州长的房间，当我们以为能够像 Travis 一样终于大开杀戒时，**却发现州长已经被 Nina 割喉**。一切的努力都是徒劳，观众崩溃了，**对暴力的诉求被杀死**，长久以来的期待全部落空。Joe 崩溃了，**他自己对 Nina 的救赎全部是一厢情愿，她自始自终都不需要你**。而 Nina 似乎也对他的痛苦心照不宣。
- Joe 在服役和工作期间曾因几位女性死亡造成了严重的创伤。在母亲死后，Joe 曾经打算和母亲的实体一起沉塘，但死前却看到了（当时还处在危险之中）Nina 的幻象，这才让他决定继续活下去（真正的"稻草"）。
- 有这么一个镜头：Joe 站在站台旁边注视着铁轨——死亡，有一位鼻青脸肿的妇女躲在一旁，她经历了什么我们不得而知。Joe 退了回来，拯救像这样的群体就是 Joe 继续活下去的根本动力。
- **而在 Nina 手刃州长之后，Joe 的自我价值被完全否定，这最后的活力都已经不复存在。**
- Travis 推心置腹地劝妓从良，Joe 在 Nina 身上寻求救赎，他们私以为孤寡怜弱的雏妓，实际上就是他们身为边缘人寻求认同和活下去的最后稻草。**"救人者恒自救"**说的就是这个道理。

第三十四章 福柯

超时空对话福柯

- 知识就是权力，权力是无处不在的。
- 福柯认为传统西方社会有一种错误的倾向：即把权力视作一种自上而下的、强者对弱者使用的“事物”。虽然福柯并未对权力下过明确的定义，但从他的论述和举例中可以看出，他认为权力不止来自于上位，也来自于下位，类似一种可流动的、存在于社会各处的网状关系。福柯认为问题的关键并不在于“权力是什么”、“权力由谁掌握”，而在于“权力是如何发生、如何运作的”。
- 福柯在《规训与惩罚》开篇对刺客被分尸的酷刑评论道：“这种惩罚方式的野蛮程度不亚于，甚至超过犯罪本身，它使刽子手变得像罪犯，使法官变得像谋杀犯，而受刑者却转变为怜悯甚至赞颂的对象，不仅无法对民众起到警戒的作用，反而让他们看到君主在肆意炫耀暴力，耀武扬威地展示统治者和民众的不对等低维。”在现代，酷刑则可能使司法正义称为输家，因此，福柯指出另一方向：让权力更加精确地作用于灵魂而非肉体，而这就需要规训来帮助实现。
- 全景敞式监狱，甚至一个监视者都不需要，只要囚徒相信了监视者的存在，长此以往，他们的心中就会自己长出一双监视自己的眼睛。**自己同时扮演监视者和被监视者两个身份**，这可远比监视者的凝视更加锐利，**权力通过虚构的关系达到了真正的征服**，使囚徒完成了自我规训。所以此时，**囚徒的灵魂反倒成为了自己肉体的监狱**。
- 福柯认为，规训是权力最终实现操纵人的行为而精心设置的技术，它通过指定规范（诸如层级监视（如公司以职位高低设置工位顺序）、规范化裁决（如公司指定奖惩标准）与检查（如学校考试））来训练出遵循权力意愿去行动的被驯服的肉体。所谓权力，即体现为对人的控制与支配，但这种控制和支配不是借助暴力、酷刑使人服从，而是通过日常规范化的纪律、检查与训练等来达到更深层的精神控制的目的。不只是监狱，它普遍存在于社会各处，且更加高效、更加隐蔽。
- 在《性经验史》第一卷中，福柯便指出反抗对于权力的绝对内在性，即权力无谓于反抗，甚至还需要借由反抗来彰显自身的存在。他认为对权力的常规反抗不仅是徒劳的，甚至可能会反过来使权力重新生产权力，因为权力本身并不是压迫性的，而是生产性的，不过，这个观点也遭到了（被认为是）泛权力论的指责。
- 由于性处于“人口”这一政治、经济问题的中心，因此权力与规训必然会参与其中。“我们必须分析出生率、结婚年龄、合法与非法的出生、性关系的早熟和频率、提高或降低生育率的方式、单身的后果或禁忌的影响等等。”可以说，西方政府将权力之手伸向人们最私密的领域——性，并对它世家各种规定（如什么年龄能结婚、能生几个孩子、提倡单身还是晚婚晚育等等），而这些条款正是无形中形成的性话语机制（**“性的机器”**）的体现。
- 福柯说：“我们到了 18 世纪才有‘性的机器’，到了 19 世纪才有性。在这之前无疑只有肉欲。”意思是说，18 世纪以后，在“性的机器”的运转下，才产生了后来人们普遍接受的性话语体系和性规范体系。因此，现代人的性观念，其实是 19 世纪以后才建构起来的。那么何为“性的机器”呢？在福柯看来，“机器”意味着一套固化的结构和体系，因此“性的机器”则意味着**一套被规范化、结构化的性话语体系**。当然这是一个比喻的说法，福柯意指性话语机制就如同一个大机器一样：人们一旦进入它（性的话语体系），就会**自然地接受着关于性的模式化与标准化的规训**。
- 福柯说：“18 世纪以来，权力机构煽动人们去谈论性，谈得越多越好，权力当局还坚持要听到人们谈论性，并且让性现身说法，发音准确，事无巨细。”**当人们不再遮遮掩掩而是公开地谈论性话题时，权力机构才更容易掌握人们的信息，从而对其更好地加以管制**。（与此同时，性又被视为一种秘密，被公开谈论）而谈论离不开话语，权力就可以通过对话语的规训来完成对性的规训了。（借助这种方式，**权力掩盖了自身的无处不在**）
- 在《知识考古学》中，福柯提出了“知识型”的概念，是指能够在既定的时期把产生认识论形态、产生科学、产生形式化的系统性话语等联系起来的底层架构；是指在每一个话语行程中，向着认识论化、科学化、形式化的过渡所依据的方式；指这些能够相互从属或者在实践中拉开距离的界限的分配；指能够存在于属

于临近的但却不同的话语实践的认识论形态或者科学之间的双边关联。

- 简单地说，知识型就是在某个特征时期内存在于不同学科领域之间的所有关系。它是一个时期内的知识、认识论形态和科学之间彼此连接的方式，是构成各门学科和知识的潜在条件和共同规则，是各种知识形成的可能性条件。它不是知识的形式，也不是某一门具体学科。例如，可以将阴阳五行视作中国古代的知识型。这种话语形式串联了当时的科学（如占星、算数）与哲学。需要注意的是，“知识型”与库恩科学哲学中的“范式”有很大区别，前者包含的概念更广更深，不能混作一物。
- 福柯明确表示过，他的知识考古学并不描述学科。知识型是标志话语实践中陈述形成的一种整体，而这种实践，不只是表现在某一具有科学性地位和科学目的的学科中，我们同样可以在司法文件、文学、哲学、政治性的决策甚至日常话题中，与意见中发现它在起作用。从这一理论出发，福柯认为并非是主体凌驾于话语之上，而是话语操纵着主体，话语才是主体的可能性前提。

第三十五章 拉康

拉康所说的“言说的主体”和“陈述的主体”,“我在我不思之处在，我在我不在之处思”，能够解释罗素悖论，并且瓦解“逻辑学”对现实逻辑的想象性建构。

第三十六章 你想咋滴？

傲娇：既要又不要，教育出来的左右为难

- 请不要尊重我的意愿，请不要听我的话，不要按照我说的行事。还有这样的要求吗？
- 阿姨问小朋友想吃糖吗？小朋友说我不想吃，于是阿姨走开了，但是过了一会发现小朋友在急得抹眼泪，即使如此，阿姨过来再问他，小朋友还是说我不想吃。为什么要这么拧巴呢？
- 有一种家庭教育会造成这种左右为难的困境，就是教小朋友说谎。
- 当小朋友表现出来想要吃糖的时候，不是让他主动表达自己的愿望，说谢谢记住回报阿姨，而是告诉他，你不能这样做，不能这么说，你不能接受阿姨的糖，即使你想要吃糖，只有这样你才能显得谦逊，才是好孩子。父母误以为这样的教育可以使小孩子更加有品质，但是小孩子只学会了撒谎，并陷入了一种左右为难的困境。
- 如果小孩子直接表达自己的需求，就丧失了谦逊；如果要保持谦逊，那就没有糖吃，要吃亏。总是要缺失一块。
- 要是想要不蒙受莫名其妙的损失，就只能祈祷这个阿姨能听懂自己的潜台词：当我说不要的时候，请理解我的意思，立刻把东西给我，而不是直接走掉。
- 这就是那个大名鼎鼎的悖论：我要求你主动满足我的需求。
- 怎么可能又被要求又主动呢？当社会上充斥了接受着这种教育的人，就会充斥着一种虚伪的气氛，指望着靠打暗语来完成交流，谁也不会把话说在明面上，我是来展现我的高风亮节的，你们最好识趣一点，主动给我，主动读懂我的潜台词，否则就是不懂规矩，不会察言观色。这就是我们的特色，人情世故，城府，虚伪，狡诈……
- 说暗语打哑谜的文化充斥着整个东亚文化圈。
- 在恋爱中，女性往往不会把话说在明面上，比如说想要什么礼物了，又不告诉男朋友。但如果他没有读懂潜台词，他没买，就倒大霉了。当男朋友过来跟她说，你到底想要什么的时候，她又说，我你不懂我，我要是直接告诉你我就会显得贪婪了。
- 因为社会的普遍舆论会使直接表达诉求的女性陷入尴尬的、被指责的境地。这导致女性不敢直接地导致自己的诉求。我们在影视作品中看到的更多来说傲娇的是女性。
- 总之傲娇就是这样一种源自于虚伪的教育方式，就是美德不再被看作是自愿，反而被功利地当作是作秀的时候，那么打哑谜说暗语就出现了。
- 它所造成的恶果就是语言彻底失灵，人们无法表达诉求，无论人们说什么，我们都要用某种特定的潜规则来行事。不能做出解释，因为所有解释都失灵了。
- 这确实会出现在现实中，当一个人说请不要怎么怎么样的时候，但对方会微笑着说，我懂规矩，仍然按照自己理解的潜规则行事，而不管对方说了什么，这是何等的恐怖！

第三十七章 青春期

人为制造的青春期

- 青春期是人为制造出来的，不是对生理发展阶段的分类，而是对错位、断裂、反抗等现象的指称。注重社交，局促不安，与家人之间产生矛盾，当无法被统一整合的现象出现的时候，引起了当事人各种各样的反应和表现，根据这些反应和表现，人们会说他进入青春期[1]了。
- 全日制的学校，这种教育制度被发明之前，没有听说过儿童和成人之间有一个明确的过渡时期。而是他们接受一个“成人礼”，之后周围的人把他当作成人而不是儿童来看待，于是这个过渡很快就过去了。
- 但是不断增长的教育时间好像改变了这一切，十八岁以后，大学生已经不是法定意义上的孩子了。但是一些人，比如父母，还是把大学生当作孩子来看待：在大学千万不要早恋啊，孩子什么都不会，我还是租个房子在学校旁边给他洗衣做饭吧。
- 一会被当作大人，一会被当作孩子，我到底是谁？本来已经说好了自己做决定，自己承担责任，但是父母为什么又跟过来了呢？
- 这些过渡期的关键就是没有一条明确的界线，他还没有跨过来，他还没有上过学，他还没有结婚，他还没有这个那个。
- 我们应该按照过渡期之前的孩子形象来生活，还是跨过这个过渡期呢？没有能说得清楚，要靠探索、反抗，实际发生的事情来看，甚至还不够。
- 难道我们应该克己复礼，恢复古代社会运作模式，才能解决这个青春期的问题吗？恢复那种人身依附大家长的制度？这样也就不用纠结什么时候是节点了，要不要反抗，这些令人头疼的问题了。孝顺还是不孝顺？经济独立还是经济不独立呢？只要没有脱离大家庭的控制，不作为拥有选择权的独立个体，不敢称为独立个体的，我们统称为大龄儿童，甚至巨婴。但是，这至少有了个确定的身份，至少名称是确定的了，至少能解决当前的混乱。
- 这就是青春期的思路：虽然他长得比父母还高了，他已经成年了，他已经不再是一个孩子了，但是我们可以说他还在青春期，还是不能自己做决定的，一定要别人帮他做决定[2]，他还没有长大，不能自己做主。他虽然已经成年了，已经三十了，但他在父母眼里还是个小孩，不是说他就是个小孩子，而是说他还在青春期哦，在青春期的延长。
- 这只是青春期，不要疑惑自己到底是个孩子还是成人，这是青春期，这是合理的，这是科学的，大家都是这样的。绝对不能让当事人意识到没有什么青春期，这就人为制造的混乱。千万别让他意识到，千万别露馅了，要是露馅了的话，他就真的要做个明确的决定，要么做大人，要么做孩子，他真的要逃出手掌心，逃出控制了。
- 与其说解决青春期的问题，不如说这个词在社会中的流行传播，本身就是一个问题，相信青春期存在本身就是一个问题。它通过被发明来掩盖这种断裂，好像这种错位已经被解释了，已经是科学的了。
- 家长会沿用孩子并没有脱离青春期，来继续帮他做决定。
- 问题的关键在于否定青春期来结束这种混乱。而不是含糊不清，让他产生模糊的自我定位、自我认知。
- 我们不要从长计议，而是直接先当成年人，在实践和体验中知道怎么当一个成年人[3]。那个准备好了的时间、情况是永远不会到来的，如果你不让他去当一个成年人的话，让他身处一个成年人的情境之中的话。如果不去体验、实践，他就会永远被困在青春期中。

---

[1] 青春期就是一个意义附着点，回溯性地固定了一系列漂浮不定的事件、情绪、行为……

[2] 其实就是，你听从别人教你的方法行事，最终会导向失败，顺从自己的原初想法行事，最终也会导向失败，那为什么不做自己呢？为什么要听从别人告诉你的，满足别人的控制欲吗？哪个人能保证照自己说的去做就一定能做成事呢？

[3] 就是说从来没有什么“水到渠成”，只有在没有准备好的时候去做，去试错，去在实践中感受、体验、成长，才能达到那种所谓的“我准备好了”的状态。

第三十八章 《齐泽克的笑话》

38.1 外界认可的假身份

一则关于耶稣的好段子：在辛苦布道和神迹表演后，为了得到放松，耶稣决定去加利利海边来一个短暂休假。和他门徒比高尔夫时，出现了一个难打的球。耶稣没打好，球落到水面上了，然后他就使出惯用的伎俩：跑到水面上去弯腰捡球。当耶稣再次尝试打这个难球时，那个门徒告诉他——这个球非常难打，只有像老虎伍兹那种人才能做到；耶稣回答说："去他妈的，我是上帝的儿子，老虎伍兹能做到的我也能!"说完，又击一球。球再次落水，耶稣再次表演水上行走捡球。正在这时，一队美国游客经过，其中一个注意到这个情形，转头问门徒："我的天，那家伙谁呀? 以为自己是耶稣咋地?"门徒答道："不是，那混蛋以为自己是老虎伍兹呢!"

多重身份标签就是这么一回事：没有谁，包括上帝，就直接是他本尊；**每个人都得有个外界认可的假身份**。

pp15

38.2 真理在一个更高层面上是辩证统一的

20 世纪 30 年代中期，一场激烈的争论在布尔什维克的政治局里进行着：共产主义社会需不需要钱? 左派托洛茨基分子宣称共产主义将不需要钱，因为只有存在私营业主的社会才需要钱；右派布哈林分子则宣称需要钱，因为任何一个复杂的社会都需要钱来调控产品贸易。最后，斯大林同志出手了，右派和左派都被否定，他宣称，**真理在一个更高层面上是辩证统一的**。其他政治局成员就问他，这种统一什么样? 斯大林答："未来会有钱也会没有钱。**一些人会有钱，其他人会没钱。**"

pp18

38.3 预设信念的自相矛盾

20 世纪 60 年代早期的一个笑话，很好地诠释了预设信念的自相矛盾。尤里・加加林，第一宇航员，在造访太空之后，受到共产党总书记尼基塔・赫鲁晓夫的接见。他坚定地告诉总书记："同志，你知道，我上天的时候，看到有上帝和天使的天堂——基督是对的!"赫鲁晓夫冲他嘀咕："我知道，我知道，但保持沉默，别跟任何人讲!"第二个星期，加加林造访梵蒂冈，受到教皇接见，他郑重地告诉教皇："神父，你知道，我上天的时候，发现那里既没有上帝也没有天使……""我知道，我知道，"教皇打断了他，"但保持沉默，别跟任何人讲!"

pp22

38.4 黑格尔三段论最后出现的真正的否定之否定

有人甚至可以用《圣经・诗篇》234 里的段落来发展成一个黑格尔的三段论："即使我走在死亡之谷的阴影里，我也不会畏惧任何邪灵，因为你和我同在；你的杖，你的竿，都在安慰我。"第一种否定是由于主体视角的激烈翻转，如黑人说唱的版本："即使我走在死亡之谷的阴影里，我也不会畏惧任何邪灵，因为我就是整个谷里最坏的那个混蛋!"接下来的否定之否定是通过"解构"上帝和魔鬼的对立来改变整个场景："即使我走在死亡之谷的阴影里，我也不会畏惧任何邪灵，因为我知道，上帝和魔鬼只是形而上学的对立。"

pp22

38.5 打破鸡蛋也做不成煎蛋饼

上世纪 30 年代中期，土耳其共产主义作家帕内特·伊斯特拉蒂访问苏联，正值苏联大清洗和公审时期，一个苏维埃的卫道者试图说服他针对敌人实行暴力的必要性，引用谚语："打不破鸡蛋就做不成煎蛋饼。"伊斯特拉蒂简洁回应："好吧，碎鸡蛋我看到了，但你的煎蛋饼在哪?"

对于国际货币基金组织强加给希腊的节俭举措，我们也应该这么说：希腊人完全有权利质疑，"好吧，为了整个欧洲，我们正在打碎鸡蛋，但你们一直说好的，我们的煎蛋饼在哪?"

pp28

38.6 心理治疗的 bug

几十年来，一个经典笑话一直在拉康分子间流传，这个笑话例证了他人知识的关键作用：一个男的认为自己是个谷粒，被送到精神病院后：那里的医生都竭尽所能地让他相信，他不是个谷粒，他是个男人；然而，当他被治愈（即被说服不是谷粒而是人）并被准许离开精神病院后，他立马又回来了，他很害怕，浑身颤抖——门外有一只鸡，他害怕鸡会吃掉他。"我亲爱的朋友，他的医生说，"你很清楚你不是个谷粒而是个男人。""我当然知道，"病人答道，"但那只鸡知道吗?"

38.7 没有语言来表达感受

一个老笑话，来自已经消亡的东德，一个德国工人得到一份在西伯利亚的工作，他意识到所有的信件都要被审查，因此告诉他朋友："我们设个暗号，如果你收到的信件是用蓝墨水写的，就是真话；用红墨水写的，就是假话。"一个月后，朋友收到了第一封信，用蓝墨水写的："这里一切都很棒：商品丰富，食品充足，公寓很大，供热也很好，电影院放的都是西方电影，可以搞艳遇的妞多的是——唯一搞不到的就是红墨水。"

这难道不是我们的处境吗，我们"感到自由"是因为我们缺乏"红墨水"来表达我们的不自由。

pp108

笔记 齐泽克在《欢迎来到实在这个大荒漠》中谈到一个红墨水缺货的笑话，然后借着这个笑话得出了一个结论：我们感到自由，是因为我们缺少表达不自由的语言。而在之后的《与齐泽克对话》中，齐泽克修改了这一论点，他把这个论点反转了过来：我们感到不自由，是因为我们缺少表达自由的语言。当然了，大多数人都会觉得自己是第一种，也就是"我很自由"。

38.8 你没得选

在一出好莱坞无厘头喜剧的经典台词中 *，女孩问她的男朋友："你想娶我吗?""不!""别躲躲闪闪了！给我个直截了当的答案!"在某种意义上，这里的潜在逻辑是对的：女孩能接受的直接答案只有"是"，所以所有其它答案，包括直接了当的"不"都算是借口。当然，这个潜在逻辑，也是个强制选择：你有自由选择的权利，但前提是你做了正确选择。

pp109

38.9 哀思还没有真正失去的东西

下雨时，吉普赛人很开心，因为他们知道，雨后总有阳光；出太阳时，他们很难过，因为他们知道，晴天之后，在某个时间，总会下雨。

pp115

38.10 说实话很没劲，一定要夸张地虚构叙事

在一个苏联的老笑话里，有听众问电台的埃里温："拉宾诺维奇买全国彩票中了辆轿车吗？"埃里温回答："原则上，是——他中了。但奖项不是一辆轿车，而是一辆自行车，不是新的而是旧的，而且不是中奖，是从他那里偷来的！"

pp116

38.11 转移话题（癔症式）

生物老师对一个小学生进行测试，考他各种动物，小学生每次回答时，总能把答案转到对马的定义上："什么是大象？""生活在丛林里的一种动物，那儿没有马。马是一种驯化的哺乳动物，有四条腿，被用来骑，在地里干活或者拉车。""什么是鱼？""一种没有腿的动物，不像马。马是一种驯化的哺乳……""什么是狗？""一种不像马的动物，会叫。马是一种驯化的哺乳……"如是反复，直到最后，绝望的老师问小学生："好吧，那什么是马？"小学生傻了，完全找不着北了，开始一边嘟囔一边哭，什么答案也说不出来了。

pp118

38.12 你是怎么受到感召而做决定的

无疑，剧院里最厉害的笑话大王（和马克斯兄弟剧团的笑话相比）就是巨蟒剧团。他们的《人生的意义》剧中一幕发生在一对夫妇的公寓里。来自"活器官移植"商业组织的两个人，敲开这对夫妇家的门，要这个丈夫的肝。可怜的丈夫拒绝：只有他死了，他们才有权利取他的肝；但这两个家伙向他保证，把肝取走，他就无论如何也活不了了。

然后这两人就开始干，冷酷麻木地把血淋淋的器官从受害人的内脏里拉了出来。妻子看不下去，就往厨房跑，其中一个家伙就跟着她，也要取她的肝。妻子不干；然而，一个绅士从冰箱里走了出来，歌颂着宇宙中的亿万星辰和他们的智慧、品格。妻子意识到，她的问题与宇宙相比是如此渺小，就愉快地同意捐肝了。

pp124

38.13 他者的固有参考

对他者的固有参照可以用《没有莱波雷洛就没有唐璜》"来解释（与征服本身带来的欢愉相比，唐璜显然更看重莱波雷洛对他征服事迹的记录）。一个关于社会底层人士的笑话，一个贫农从一次海难中幸存下来，发现自己和辛迪·克劳馥在同一个荒岛上。两人搞过之后，辛迪问农民是不是很满足；农民说是，但仍有一个小要求，能实现才算是百分百满足——她能穿上裤子，在脸上画上胡子，装扮成他最好朋友的样子吗？辛迪很吃惊，怀疑农民实际是个变态，农民安抚她，说根本不是她想的那回事，她很快就会发现这一点。后来，她终于满足了他的要求，这时，农民凑过来，一把楼住她，脸上带着男人那种特有的猥琐笑容："你知道我刚干了什么？我刚睡了辛迪·克劳馥！"

pp126

38.14 那里只有把你带过来的欲望

有个黑格尔式的笑话，完美例证了真理自误认而生的过程——在我们寻找真理的路上，碰巧遇到了真理本尊。世纪之初，一个波兰人和一个犹太人同坐一辆火车，脸对脸。波兰人变得很焦躁，一刻不停地盯着犹太人看；如鲠在喉，终于他忍不住了，冲着犹太人喊："告诉我，你们犹太人是怎么做到的，榨空别人口袋里的最后一分钱，还能靠这种方式赚到你们所有的钱？"犹太人回道："行，可以告诉你，但不能白告诉；你得先给我五个兹

拉第（波兰钱）。”收了钱之后，犹太人开始说：“首先，你拿一条死鱼；把头切下来，把内脏放在一杯水里，然后，半夜十二点左右，月圆之时，你必须把这个杯子埋进墓地里……”“然后呢？”波兰人猴急地打断他，“我要是把这些都做了，是不是也就变有钱了？”“没那么快，”犹太人答道，“你必须要做的，这还不是全部；但如果你想听剩下的部分，你还得再给我五兹拉第!”又收了钱以后，犹太人开始接着讲他的故事；没过一会儿，他又要钱，如是反复，直到最后，波兰人愤怒地爆发了：“你个臭流氓，你真以为我没闹明白你究竟想干什么？根本就没有秘诀，你就是想从我这儿榨空最后一分钱!”犹太人淡定而又无奈地答道：“好吧，现在你明白了，我们犹太人，是怎么……”

pp134

变奏：

另外一个笑话也具有完全一样的结构，但通常这一点被忽视了——我们指的是卡夫卡《审判》的第九章里，关于法律之门的笑话，结尾转折处，从乡下来的濒死男人问门卫：“人人致力于求法；这究竟是怎么一回事，还有，这么多年来，为什么只有我想进到门里去？”门卫估计他快不行了，也快听不见了，就冲着他耳朵喊：“这里再也没有人能够进去了。因为这扇门就是专为你而开的。我现在就去关上它。”

我们甚至可以为卡夫卡的故事发明另一个结尾，让这个故事更接近波兰人和犹太人的笑话：经过漫长的等待后，乡下来的男人在愤怒中爆发了，开始向门卫哭诉：“你个臭流氓，为什么你假装你把守的地方藏着惊天的秘密，实际上你很清楚，门后面根本就没有秘密，这个门是特意为我准备的，来俘获我的欲望!”门卫（如果是个分析家）会淡定地回答：“你看，现在你发现真正的秘密了：那道门后面，只有把你带到这里来的你的欲望。”

pp136

38.15 黑格尔的辩证性转换，论断本身成为了主题

如同一个苏联笑话，拉宾诺维奇，一个想要移民的犹太人。移民处的官僚问他原因；拉宾诺维奇回答：“有两个原因。一是我担心共产党在苏联会垮台，那就会有反革命，然后新政权会把共产党的错误都算给我们，犹太人——反犹大屠杀就会再次发生……”“但是，”官僚打断他，“这完全不靠谱，在苏联一切都不会改变，共产党的政权万古长青！”“好吧，”拉宾诺维奇淡定应道，“这就是我的第二个原因。”

pp140

拉宾诺维奇笑话（变体 1）：

- 你为什么认为你被剥削了？
- 两个原因。第一个是我工作的时候，资本家占有了我的剩余价值。
- 但你现在没工作呀；没人占有你的剩余价值，因为你根本就不创造价值。
- 这就是第二个原因。

拉宾诺维奇笑话（变体 2）：

- 我发现女性气质的本质了!
- 但这是不可能的，女性气质是分散的，无处可寻的。
- 对，这种分散性就是女性气质的本质。

38.16 为什么要说[1]

通过将真相表述成谎言，一种现象因而可以准确地讲述这真相。如经常被拉康引用的那个弗洛伊德的笑话，犹太人责备他的朋友：“为什么你告诉我你要去克拉科夫而不是伦贝格，你就争取了克拉科夫？”（讲真话意味着对主导他们关系的隐含欺骗代码的破坏：当其中一个人之前说去克拉科夫时，另一个人认为他是在说谎，他的实际目的地是伦贝格，反之亦然）。

[1] 这个地方有点难以理解，但是你可以带入现实中思考一下：如果真的像他说的那样，那么他为什么要这么说。这一点主要集中在一些承诺之中……

pp144

变奏：

这种象征秩序的神秘性，可以由一种高深莫测的状况，我们称之为“礼貌行为”的，来例示：当碰到熟人的时候，我会说“很高兴见到你！今天过得怎么样？”我们俩都很清楚，在某种意义上，我“所说的不是认真的”（如果我的朋友怀疑我真的对我的问题感兴趣，他可能会更不高兴，因为就好像我要刺探些太私密但又和我没啥关系的事——或者，用弗洛伊德的老笑话来演绎：**“当你真的见到我很高兴时，为什么还要说见到我很高兴？”**）

pp145

两种表现（事物对我们所呈现出的样子和事物真正的样子）间的差异和弗洛伊德的那个笑话的结构是相通的，即一个犹太人跟他朋友抱怨，“为什么你告诉我你要去克拉科夫而不是伦贝格，你就真的去了克拉科夫？”也就是说，在商品拜物教的情形下，当我迅速意识到金钱只是社会关系的一个纽带，而非什么有魔力的东西时，我把前只当作我个人生活实践里的一个神物，因此，对拜物教进行定位就是我真正的社会生活实践，我可能实际上被指责为：“当金钱真的只是社会关系的一个纽带时，为什么你还说金钱只是社会关系的一个纽带？”

pp146

所以，“为什么你告诉我你要去克拉科夫而不是伦贝格，你就真去了克拉科夫?”顺着这个有着弗洛依德气质的广为人知的犹太笑话的脉络，容易受骗的男伴对美女荡妇的潜在指责可以被表达为：“当你真的就是个爱摆布人的冷血婊子时，为什么你还要表现得像你就是个爱摆布人的婊子?”

pp146

38.17 辩护的结构

我父亲受一盆植物的主人们之托，来照看这盆植物。植物的主人们去休假了，为首的是一个小个子半吊子律师，谨小慎微。我父亲完全忘了给植物浇水，植物枯死了。他为了保护自己，做了如下自我辩护：

1. 这盆植物从来没交给我照管。
2. 实际上，这盆植物以前是他的。
3. 这盆植物是托付给他了，但他没承诺会完好无损地归还。
4. 他更诸神发过誓要回调这盆植物，他只是履行了他的誓言。
5. 这植物之前任何问题都没出过。
6. 他真希望他从来没借过这盆植物，从他看到它的那一刻起，它就枯萎了。
7. 这种类型的植物天生就是枯萎的，甚至，就是个枯萎标本。
8. 尽管他尽了力，植物还是枯萎了，归罪于一场苍蝇瘟疫。
9. 枯萎是坏的只是因为我们习惯于把枯萎想成是坏的。
10. 事实上，健康绿色的萌芽生长是一棵植物最难以忍受的痛苦。
11. 健康绿色的萌芽生长是一件令人憎恶的事。
12. 枯萎——是很受敏感植物欢迎的——是“新的”健康绿色的萌芽生长。
13. 因为健康绿色的萌芽生长是好的，所以枯萎也是好的。
14. 反之，因为健康绿色的萌芽生长是令人憎恶的，所以枯萎也是令人憎恶的。
15. 在我的看护下，不可能会有像植物枯萎这样糟糕的事情发生，所以，它没枯。
16. 在你不在的时候，健康植物已经不流行了。
17. 这不是你留给我的那盆植物。
18. 尽管样子不好看，但无论怎样，这是一颗健康的植物。
19. 看，那儿，你后面！一只小猫！
20. 这盆植物已经自杀了。

我们活在一个大多喜欢压制创造力的社会，过分强调讲真话。

38.18 未婚妻笑话的变体

未婚妻笑话：

我未婚妻约会从不迟到，因为如果她迟到了，她就不再是我的未婚妻了。

在不同的情景下，未婚妻笑话有着不同的暗示：

1. 人民永远支持着政党，因为人民中任何反对政党领导的，都自动将自己排除在人民之外了。
2. 如果你爱上帝，你想做什么就做什么，因为当你做了邪恶的事，这事本身就证明你对上帝不是真爱。
3. 真相永远不能被强调，当真相的真实程度被过分强调时，我们所涉及的就不再是真相，不再是真相的真实性。
4. 在应用一项规则时我从不犯错，因为我所做的就定义了准确的规则。
5. 最具格言色彩的是，“与此同时，未婚妻被简化成未婚妻的符号功能。”一句另一个齐泽克钟爱的笑话，当你真就是个未婚妻的时候，为什么还称自己为未婚妻？

38.19 猴子变人，本来就是个笑话

齐泽克对上帝造人的揶揄：“别从知识之树上吃东西！”面对新的知识、不断进化的文明，我们都是猴子，只有通过好的诠释翻译，理解和分享才可能发生。所以，译者的责任，就在于让书上有更多可以吃的果子。因而，我也不以“错漏难免”之类的防御性套话作结；这个时代，书上的果子不计其数，能摘到就是大机缘，至于食后效果，不必太较真，猴子变人，本来就是个笑话。

译后记 pp170

戏剧是一场和合法化危机
以突如其来的丰饶结束

第三十九章 《意识形态的崇高客体》

39.1 哥白尼与托勒密

- 一个学科身处危机之时，要么致力于洗心革面，要么在其基本框架内补充其论点。在其基本框架内补充其论点，或许我们可以把这个程序称为“托勒密化”。之所以称之为托勒密化，是因为，一旦大量涌入的数据与托勒密的地心说天文学发生抵触，他的党羽就会引人额外的说辞对异常现象作出解释。但是，不引人额外的说辞，不改变微小的前提而是彻底转换基本框架，这时，真正的“哥白尼式”革命就会降临。所以，每当面对自诩的“科学革命”，我们总是提出这样的问题: 这是真正的哥白尼式革命，还是只是陈旧范式的托勒密化?
- 托勒密化有两大例证。我们有很好的理由断定，声称要为统一性理论 (unified theory)——即用来描述亚原子粒子的四种基本互动的单一理论框架，在此之前，亚原子粒子的四种基本互动分别由相对论和量子力学解释——奠定根基的“弦理论”(stringtheory)，依然致力于托勒密化。我们还在等待新起点，新起点要求基本预设 (basic presuppositions) 发生更为彻底的变化，诸如不再把时间和空间视为现实的基本构成元素，等等。同样，在社会理论中，我们有很好的理由断定，有关当代世界的性质——我们正在步人后工业社会、后现代社会、风险社会和信息社会等等——的全部“新范式”提议 (“newparadigm” proposals)，依然是古典社会学模型的“旧范式”的托勒密化。

39.2 欲望图 I 和欲望图 II

- 移情是“相对于能指流 (stream of signifiers) 而言，意涵停留在所指之后”这一现象；它包含着这样一个幻觉：某个因素的意义从一开始就处于该因素之内，是该因素的固有本质 (immanent essence)，其实呢，该因素的意义是因为主人能指的干预，回溯性地固定下来的。
- 意义的产生并不是一个线性的、内在的、必然的过程，意义不是自某个初始内核 (initial kernel) 逐渐展开的；意义是回溯性产生的，其产生的过程具有强烈的偶然性。
- 我们可以说，缝合点代表着历时性能指链 (diachronous signifiers's chain) 中作为共时性代码的大对体，占据着历时性能指链中作为共时性代码的大对体的位置。
- 在拉康欲望图 II 中，想象性认同是由插在能指矢量 ($S' - S$) 与符号性认同之间的新层面所标记的，即连接想象性自我 (imaginary ego)——(e)——与想象性他者 (imaginary other)——i(o)——的横轴。主体想要获得自我同一性 (self-identity)，就必须把自己等同于想象性他者，必须异化自己——把自己的同一性置于自己之外，或者说，把自己的同一性置于他的替身的形象 (image of his double) 之中。
- “后屈效应”是由下列幻觉支撑的：自我是自治的能动者 (autonomous agent)，它作为自己行为起源 (as the origin of its acts) 从一开始就在那里。这种想象性的自我体验 (imaginary self-experience) 是供主体来误认的：他本来完全依赖大对体 (big Other)，依赖符号秩序；但他认为他对大对体、符号秩序的依赖并非他行为的主因。
- 想象性认同 (imaginary identificaition) 与符号性认同 (symbolic identificaition) 之间的关系，就是“被构成的”的认同 ("constituted" identificaition) 与“构成性的”认同 ("constitutive" identificaition) 之间的关系。简单地说，想象性认同是对这样一种形象的认同，我们以这种形象显得可爱，这种形象代表着“我们想成为怎样的人”。符号性认同则是对某个位置的认同，别人从那个位置观察我们；我们从那个位置审视自己，以便显得我们可爱，显得更值得别人爱。
- 我们主要的、自发的认同，是对楷模、理想、形象制造者 (image-makeres) 的认同。青年人如何认同大众英雄、通俗歌星、电影明星、体育明星……这一自发的认同观具有双重的误导性。首先，我们认同某人是以该人的某种特征、品性为根基的，如此特征、品性通常是隐蔽的。
- 第二，更严重的失误是忽略了下列事实：想象性认同总是对大对体中某个凝视的认同。所以，说到仿效楷模形象 (model-image)，说到“演戏”，要问的问题是，主体在为谁演习？主体在强迫自己认同某个形象时，他在乎的是谁的凝视？一者是我看自己，一者是别人从某处看我，这两者之间形成的鸿沟，对于把握癔症来说，对于把握所谓的癔症剧场 (hysterical theatre) 来说，至关重要。
- 设想为拉康的姓名理论的草稿，是完全可以的：名指涉理想自我，是想象性认同点 (point of imaginary identificaition)；姓来自父亲，和父亲之名一样，它指涉符号性认同点 (point of symbolic identificaition)，是我们进行自我观察和自我判断的代理。在作这种区别时，不应忽视的一个事实是，i(o) 总是已经屈从于 I(O) 的：决定和支配形象、想象形式 (imaginary form) 的，正是符号性认同 (从那里观察我们的那个位置)。我们以那种形象、想象形式讨人欢心。在形式机能 (formal functioning) 的层面上，这种屈从已经为下列事实所证实：标记为 i(o) 的昵称，总是发挥刚性指称词的作用，而不再是简单的描述。
- 反描述主义：再举一个来自黑帮领域的例子：如果某人的昵称是“疤面”，这不仅表示一个简单的事实——他满面疤痕；它同时还暗示出，我们在跟某个被称为“疤面”的人打交道，即便他脸上的伤疤已经通过整形手术而消除，他会依然被称为“疤面”。意识形态指称 (ideological designations) 就是这样发挥功能的：“共产主义”意味着 (当然是在共产主义者的视野中) 在民主和自由上的进步，即使——在事实的、描述的层面上——作为“共产主义”被合法化的政体导致了极其压抑和残暴的现象，也是如此。不妨再次使用克里普克的术语：“共产主义”在所有可能的世界里在所有违反事实的情形下，指的都是“民主与自由”这种联系——“共产主义”与“民主与自由”的联系——之所以无法在经验的层面上，无法通过引证事物的实际状态来反驳，原因就在这里。因此，意识形态分析必须将自己的注意力置于这样的位置上，在那里，表面看来表示实证的描述性特征的名称，早已在发挥“刚性指称词”的作用。

39.3 关于《呆头鹅》电影的部分分析 (i(o) 与 I(O))

- 但是，一者是我们看自己，一者是我们透过某个位置被人看，为什么这两者间的差异恰好是想象性认同和符号性认同的差异呢？首先，我们可以说，在想象性认同中，我们在“与人相似”的层面上仿效他人——我们使自己认同他人的形象，尽可能地“像他”；而在符号性认同中，我们在某个点上使自己认同他人。在那个点上，他是不可仿效的他是躲避“与人相似”的。为了解释这一生死攸关的区分，让我们以伍迪·艾伦的电影《呆头鹅》" 为例。这部电影始于电影《北非谍影》最后那个著名的场景，但过后不久，我们就会注意到，这只是“电影中的电影”，真正的故事是以一个歇斯底里的纽约知识分子为主角的：他的性生活一团混乱，他妻子刚刚弃他而去。作为影子人物的汉弗莱·鲍嘉自始至终都在他眼前晃来晃去，为他提供建议，对他的行为作讽刺性的评述等等。
- 电影收尾时解决了他与鲍嘉这个影子人物的关系：在和最好朋友的妻子欢度一夜后，主人公在机场戏剧性地遇到了他这位朋友及其妻子：他与她断绝了关系，让她跟随丈夫远走高飞，因此活生生地重复了《北非谍影》的最后一幕，而开启这部电影的也是《北非谍影》的这一幕，当他的情人说到他的告别语——“它真美”——时，他回答道：“它来自《北非谍影》，我等了整整一生，就是等人来说这句话。”值此落幕之时影子人物鲍嘉最后一次现身，说，主人公为了友谊放弃女人，终于“有了格调”(got some style)，因而再也不需要他了。
- 我们应该如何解读鲍嘉这一影子人物的退隐？最明显的解读可能是由主人公对鲍嘉这个影子人物所说的最后一句话暗示出来的，他说：“我想秘密并不是我成为你，而是我成为我自己。”换言之，只要主人公是一个软弱无力的癔症患者，他就需要有个理想自我去认同，需要影子人物去指导他；但是，他一旦终于成熟和“有了格调”，就不再需要一个外在的认同点了，因为他已经实现了他与自己的同一：他“已经变成了自己”，自主之人。但是，上面引用的那句话的后面，还有一句话。这句话立即颠覆了上面的解读：“说实话，你个子不高，还有点丑，不过去他的吧，我又矮又丑，还是靠自己成功了。”
- 换言之，他还远远没有因为自己已经成为自主之人而不再认同鲍嘉。相反，只是在他变成“自主之人”后，他才千真万确地认同了鲍嘉。更确切些说，通过认同鲍嘉，他变成了“自主之人”。唯一的差异是，此时的认同不再是想象性的 (即把鲍嘉当成可以仿效的楷模)，而是符号性的 (至少就其基本维度而言是符号性的)，即结构性的：通过在现实中扮演《北非谍影》的鲍嘉这个人物，通过接受某种“委任”，通过在主体间符号网络中占据某个位置 (为了友谊牺牲了女人……)，主人公实现了这种认同。正是这种符号性认同，瓦解了想象性认同 (使得鲍嘉这个影子人物销声匿迹)。说得更确切些，这彻底改变了它的内容。在想象的层面上，主人公现在可以通过鲍嘉身上令人讨厌的特征——他的矮小和丑陋——来认同他了。

39.4 欲望图 III

- 出现在“缝合”曲线上方的问号，表明言辞 (utterance) 与其阐明 (its enunciation) 之间持久地存在裂缝：在言辞的层面上，你正说着什么；但你想用你说过的话，通过你说过的话，告诉我些什么？[借用已有的“言语行为理论”(speech act theory)，我们当然可以把这个鸿沟说成是既定言辞的言内行为 (locution) 与言外之力 (illocutionary force) 的差异。] 我们必须在提出问题的地方 (即言辞上方)，在“为什么你告诉我这个”的地方，在欲望 (desire) 与要求 (demand) 的差异中锁定欲望的位置：你要求我给你些什么，但你真正想要什么，你通过要求我给你些什么，要达到什么目的？要求和欲望的分裂，正是用来界定癔症主体的地方：根据经典的拉康公式，癔症要求 (hysterical demand) 遵循的逻辑是：“我要求你给我些什么，但我真正要求你的，是驳回我的要求，因为我的要求正是我不想要的。”[1]

[1] 由是观之，“不等于不”这样一句法律宣言，实际上过于简单化了问题所在。“不等于不”本身就是一种女权 (男权) 主义意识形态，实际上哪有“不等于不”，对于癔症 (傲娇)36来说，“不”后面可能蕴含着加倍的“是”，真正的要求是“请不要听从我的要求”。

39.5 希区柯克《西北偏北》(North by Northwest) 里的“卡普兰”

- “你想咋的?”或许希区柯克的电影《西北偏北》(North by Northwest) 的开场，对此作了最佳例示。为了使苏联特工误入歧途，美国中央情报局虚构了一个并不存在的、名为乔治·卡普兰 (George Kaplan) 的特工。中央情报局在饭店为他预定了房间，还以他的名义打电话，为他订购机票，等等。所有这些都是为了让苏联特工相信，卡普兰真的存在，其实他只是个空白，有其名无其实。电影开始时，主人公 [一个名叫罗杰·桑西尔 (Roger O.Thornhill) 的普通美国人] 在饭店的大堂里发现自己受到苏联人的监视。之所以如此，是因为神秘莫测的卡普兰理应住在这里。一个饭店职员走进大厅说:“有卡普兰先生的电话，卡普兰先生在吗?”恰恰就在这个时候，出于纯粹的巧合，桑西尔向这个职员做了个手势，他是想给他母亲发一封电报。正在监视这一场景的苏联人错把他当成了卡普兰。在他离开饭店时，他们绑架了他，把他带到了一个偏僻的别墅，让他把他的间谍工作和盘托出。当然，桑西尔对此一无所知但他有关自己无辜的表白被看成死不承认。
- 尽管这个情景建立在几乎令人难以置信的巧合之上，它在心理学上令人心服口服的力量来自何处?桑西尔的处境完全符合作为语言之存在 (being-of-language)——或用拉康的缩写法表示，作为 parlêtre(语言之存在)——的人类面临的基本处境。主体总是被捆绑、钉死在能指上。对于他人而言，能指代表着他。因为被钉死在能指上，他背负了沉重的符号性委任 (symbolicmandate)，在主体间的符号性关系网络中获得一席之地。关键在于，这一委任归根结底都是任意性的: 因为这一委任的性质是述行性的 (performative)，它无法通过引证主体的“真实”属性和“真实”能力得到说明。就这样，主体背负着这个沉重的委任，自然而然要面对某个“你想咋的?”，面对来自大对体的问题。大对体向他发话好像他已经掌握了下列问题的答案——为什么他得到了这一委任?但这个问题显然是无法回答的。主体并不知道为什么他在符号网络中获得了这样的一席之地。面对大对体提出的“你想咋的?”这一问题，他只能以如下的癔症问题 (hysterical question) 回应:“为什么我是我想必是的事物?为什么我得到了这一委任?为什么我是老师、主人、国王……或乔治·卡普兰?”一言以蔽之:“为什么我是你 (即大对体) 说我是的事物?”

- 在理论的层面上，必须注意的关键一点是，幻象是建构 (construction)，是想象性场景 (imaginary scenario)，主体以之填平大对体欲望 (desire of the Other) 的空白、缺口。“大对体想要干什么?”对这个问题，幻象为我们提供了明确的答案，因而能使我们躲避不堪忍受的僵局 (unbearable deadlock)。在那不堪不忍受的僵局中，大对体想从我们这里得到些什么，但是我们无法把大对体的这个欲望转化为实证的询唤 (positive interpellation)，转化为可供我们认同的委任。

39.6 视差之见

- 为了搞清想象性认同与符号性认同的差异, 不妨举些非临床性的实例。爱森斯坦（Sergei Eisenstein）曾对卓别林作过极其犀利的分析。在这项分析中, 爱森斯坦把以恶毒、施虐、羞辱的态度对待儿童, 视为卓别林滑稽戏的一个重要特征。在卓别林的电影中, 儿童并不被视为可爱的宝贝：因为失败, 他们被戏弄、嘲弄、讥笑, 食物是撒向他们的, 好像在喂鸡, 等等。不过, 这里要问的问题是, 我们从哪个角度观看这些儿童, 他们才成了被戏弄和被嘲弄的对象, 而不是需要保护的温和的生灵? 答案当然是儿童自己的凝视——只有儿童才会这样对待同伴; 以残暴的态度对待儿童, 暗示出对儿童自身的凝视的符号性认同。
- 在与卓别林相对的另一端, 我们发现了对“普通好人”的狄更斯式羡慕, 这是对“普通好人”生活的世界的想象性认同。他们生活在贫穷但快乐、封闭、清纯、没有残酷的权力斗争和金钱之争的世界里。但是 (狄更斯的虚伪也表现在这里), 狄更斯式的凝视是从哪里注视那些“普通好人”的, 以至于他们显得那么可爱? 如果不是从腐败的权力和金钱世界这个角度注视那些“普通好人”, 又能从哪里注视呢? 我们在布鲁盖尔后期有关农民生活（乡村欢宴、午间休息中的收割者）的田园风景画中, 发现了同样的鸿沟: 阿诺德 豪塞尔指出, 这些画作与真正的平民态度相去甚远, 更谈不上与劳动阶级打成一片。相反, 这些画作的凝视是贵族对农民田园生活的外在凝视，不是农民对自己生活的凝视。
- 当然, 这道理同样适用于斯大林主义对社会主义的“普通劳动人民”的尊严的赞美：被理想化的工人阶级形象是演给处于统治地位的官僚体制看的, 是用来使其统治合法化的。这也是米洛什 • 福尔曼的捷克语电影具有颠覆性的原因: 他的电影嘲弄渺小的普通人, 展示他们卑微的生活方式, 展示他们梦想的了无结果……与嘲笑处于统治地位的官僚体制相比, 这一姿态更加危险。福尔曼不想摧毁官僚的想象性认同, 他揭去专门演给官僚看的景观的面具, 进而机智地推翻了官僚的符号性认同。

39.7 幻象：用以屏蔽大对体欲望的屏幕

- 幻象是对“你想咋的?”这一问题的回答, 是对大对体的欲望这个不堪忍受之谜的应答, 是对大对体中的圆乏的回应; 但与此同时, 幻象为我们的欲望提供了坐标, 即建构了能使我们欲求某物 (desire something) 的框架。因此, 幻象的寻常定义一“代表着欲望实现的假想场景”一一多少有些误导性, 至少含混不清: 在幻象一场景 (fantasyscene) 中, 不是实现欲望、“满足”欲望, 而是建构欲望 (为欲望提供客体等) 一一我们通过幻象学着“如何去欲望”。幻象的悖论 (paradox of fantasy) 就出现在这一中间地带: 它既是协调我们欲望的框架, 同时又是对“你想咋的?”的抵御, 是用来遮蔽大对体欲望的鸿沟、深渊的屏幕。如果把这种悖论推至极限, 推至同义反复的地步, 我们会说, 欲望就是对欲望的抵御：通过幻象建构起来的欲望就是对大对体欲望的抵御, 是对“纯粹”的、超幻影的欲望 (trans-phantasmic desire) 一一即纯粹的“死亡驱力" 一的抵御。

39.8 希区柯克《后窗》

- 且以希区柯克的《后窗》(Rear Window) 为例: 詹姆斯 - 斯图尔特因为腿部受伤而不得不坐上轮椅, 他透过一面窗子频繁地注视着外面; 那面窗子显然是“幻象一窗口”(fantasy-window)。他为透过窗子看到的东西所迷, 欲望因是而生。不幸的格雷斯 • 凯丽面临的问题是, 通过向他求婚, 她成了障碍、斑点, 干扰他向外观望, 而无法以自己的美丽令他心醉神迷。到最后, 她是如何成功地成为他的欲望之物的? 是通过真正进人他幻象的框架, 是通过穿过院子, 出现在“另一面”。在那里, 他透过窗子看到了她。看到她出现在凶手的公寓, 斯图尔特的凝视立即为之吸引, 立即变得贪梦, 立即对她充满了欲望: 她在他的幻象一空间 (fantasy-space) 找到了自己的立足之地。这会是拉康的“男子沙文主义”的一大教益: 只有当女人进人了男人的幻象框架, 他才能够与她联系在一起。

39.9 《哈姆雷特》与欲望图

- 拉康之所以在谈及莎士比亚的《哈姆雷特》时才建立了欲望曲线图, 原因是显而易见的：归根到底，《哈姆雷特》不就是一部有关询唤失败 (failed interpellation) 的戏剧吗？戏剧刚一开幕, 我们就看到了纯粹的询唤: 父王的幽灵把哈姆雷特由个人询唤成了主体。也就是说，哈姆雷特把自己视为那个强制委任 (imposed mandate) 或强制使命——为父报仇——的接受者; 但父亲的幽灵又不可思议地以下列请求补充他的命令: 无论如何, 哈姆雷特都不能伤害他的母亲。阻止哈姆雷特采取行动, 阻止他完成那个强加于他的复仇使命的, 正是他与大对体欲望的"你想咋的?"的对峙: 整部戏剧的关键场景是哈姆雷特与母亲的长时间对话。在那里, 他迷惑不解, 因为他无法得知母亲的欲望——她究竟想咋的? 如果她真的从她和他叔叔的淫荡关系中大获满足呢? 因此, 哈姆雷特行动受阻, 并不因为他不知道自己的欲望, 并为此优柔寡断, 并不因为"他不知道他真的想咋的", 相反, 他对此一清二楚——他要为父报仇。真正妨碍他行动的, 是他无法弄清别人的欲望, 是因为他面对着某种"你想咋的?"。这个问题呈现出某种可怜的、荒淫的快感深渊。如果父亲之名充当了询唤的代理 (agency of interpellation), 充当了符号性认同的代理, 那么母亲的欲望则以其深不可测的"你想咋的?", 成了某种界限的标志。一旦触及这个界限, 任何询唤都必败无疑。

39.10 实在界中的知晓 (knowledge in the Real)

- 因此, 在拉康开办讲座的第三阶段, 至关重要的因素是把重点从符号界转向实在界。为了举例证明这一点, 让我们以“实在界中的知晓”(knowledge in the Real) 这一概念为例。“实在界中的知晓”是这样一种观念: 大自然知道自己的规律, 并据此行事。我们都看过那个经典性原型性的卡通场景: 猫走到了悬崖的边缘, 但它并不止步, 而是镇静地前行, 尽管已经悬挂于空中, 双脚高高离地, 却并不跌落。什么时候跌落? 在它低头一看, 并意识到它悬于空中的那一顷刻。这个异想天开的意外事件的要义在于, 在猫漫步于空中之时, 好像实在界暂时忘记了它的“知晓”: 猫最后向下看时, 才猛然想起, 它必须遵循自然的规律, 跌落下去。基本上, 这里的逻辑与前面提到的那个梦的逻辑如出一辙。那个梦是由弗洛伊德在《释梦》中提出的。在那个梦中, 父亲并不知道他已经死去: 关键还是在于, 因为他并不知道他已经死去, 他才继续活着——他必须由人提醒, 告诉他他已经死去, 或者给这种情形提供一个充满曲折的结局。他之所以还活着, 是因为他忘了他已经死去! 应该这样解读那个短语 memento mori : 别忘了去死!
- 的“知晓”: 猫最后向下看时, 才猛然想起, 它必须遵循自然的规律, 跌落下去。基本上, 这里的逻辑与前面提到的那个梦的逻辑如出一辙。那个梦是由弗洛伊德在《释梦》中提出的。在那个梦中, 父亲并不知道他已经死去: 关键还是在于, 因为他并不知道他已经死去, 他才继续活着——他必须由人提醒, 告诉他他已经死去, 或者给这种情形提供一个充满曲折的结局。他之所以还活着, 是因为他忘了他已经死去! 应该这样解读那个短语 memento mori : 别忘了去死!
- 我们今天可在五花八门的“大众文化”产品 (如动画片) 中发现同样的逻辑。且以《汤姆与杰里》(Tom and Jerry), 又译《猫和老鼠》为例。每一方都遭受过可怕的灾难: 猫被刺伤, 炸药在它口袋里爆炸, 它被压路机碾过, 它的躯体被碾成绉带, 诸如此类, 等等; 但在下一个场景中, 它又以其正常的躯体出现了, 争斗再次开始——仿佛它拥有另一个固若金汤之躯。或以视频游戏为例。在视频游戏中, 我们真的与两种死亡的差异打交道: 这种游戏的通常规则是, 玩家 (或者说得更确切些, 在游戏中代表他的那个形象) 拥有数条生命, 一般是三条; 他受到了某种危险的威胁, 比如遇到了要吃掉他的怪物, 而且如果怪物追上了他, 他就会失去一条命, 如果飞快地达到了目的地, 他就会额外获得一条或几条生命。因此, 这样的游戏的整个逻辑是以两种死亡的差异为根基的: 一般的死亡, 让我丢一条命; 最终的死亡, 让我输掉游戏。
- 拉康把这两种死亡的差异视为下列两者的差异: 一者是真实 (生物) 的死亡; 一者是真实 (生物) 死亡的符号化、“清账”、符号性命运 (symbolic destiny) 的终结 (如天主教的临终自白)。两者间的鸿沟可以以不同方式填充: 或是崇高美 (sublime beauty), 或是可怕的怪物。在安提戈涅那种情形下, 她的符号性死亡, 她的被排除在城邦符号共同体 (symbolic community of the city) 之外, 先于她的实际死亡, 并以崇高美浇铸了她的性格; 哈姆雷特父亲的鬼魂则代表着与此完全相反的情形: 只有实际的死亡, 没有符号性死亡, 没有“清账”。这是他作为可怕的幽灵归来, 直到他的债权得以偿还才肯离去的原因。

第四十章 跌倒

在学习中跌倒是成长和进步的必经之路

- 在学习中跌倒说明了三件事情，你以为你懂的东西后来发现不懂。
- 你那种自以为明白道理的思维方式转得通，错误的方式本来能够运行、循环很久。
- 在本来表现得“没问题”的秩序外有一些例外，会有一些否定性的势力来否定这个秩序，是系统外部的否定性。你会察觉到世界上一切系统的有限性。比如你在你的家庭中，你好我好大家好，你就认识两个人——爸爸妈妈，他们都对你很好，你本来以为人间如此美好。但是有一天你跳出家庭，看到父母在和外人吵架，发现有一些例外，发现什么是人，人之间是有利益纠葛的。系统之外是会有一些现象，会突破系统内在的有限性，我们意识到通过犯错等于探索，走出一个本来运行地通的符号系统，一定会犯错。但是你要意识到不是你走出去的行为错了，而是本来那个符号系统错了，它不可能按照它所说的那样无限循环，不可能放诸四海而皆准，不可能千秋万代的。它只能在特定的环境、结构关系下有用。
- 自以为明白的东西，你后来发现你没弄明白，这时候你会发现你有一种力量——站在边界上，面对未知的力量。也就是说你的实实在在的生命体验比所有的有限的系统都要大，至少在这个方面，你发现原来你没有被束缚死。闻过则喜，发现自己能面对自以为明白的东西发现自己其实不懂，你能站在自己的边界上，发现自己有可能可以再往外走一步。
- 养成这种能力之后你会发现你能面对生活当中的得失。如果一个标准体系是无限的，那就让这个标准体系空转就好了，比如单机的足球游戏啥的。我们恰恰要摆脱这种僵死的体系，在学习中跌倒，就相当于在学习中探索和发现。
- 跌倒是走路的必然阶段，走路就是止跌，走路就是不停跌倒，不停止跌的过程，然后你恢复平衡，但这永远只是一个暂时的平衡。你学到的体系绝对不是绝对正确的，但是在你探索的这个邻域内，它有一定的正确性。
- 现实出现的时候，总会有个最低限度的理论。但是理论没法完全把握现实。

第四十一章 投射认同

投射认同

- 投射：将自己不愿意承认的体验投射到别人的身上，安放到客体，即对他人的想象中。
- 比如说有些人可能会在社交之中坚称对方讨厌自己，但没有证据证明这一点，可能是当事人自己在投射“他们都讨厌我”的体验，可能这个体验的原型就是当事人自己的体验——我讨厌我自己。
- “一定要远离会投射的坏人！”这种发言就是一种投射。你说的坏人到底是谁？将自己不安的感觉投射到他人身上，不能接受自己的感受：不是我觉得不安，而是他们让我不安。这就是一种找理由，给自己增加合法性、合理性。
- 将自己的痛苦不安转化为全世界到处都是坏人，表面上是在帮助弱者，实际上就是在鼓励投射。有一些人会专门会讲，世道有多险恶，人心有多坏，隐藏着多少危险，这个社会真是可怕。往往这些车轱辘话看的人还特别多，他们也觉得自己是在做学问。
- 这其实是在切断人与人之间的联系，将个人的体验投射到他人的身上，以阻止真正的交流发生，无视对方的思想、行动。
- 我觉得不安，就说别人在不安好心；我想要关注，就说别人都是冷漠的；我想要选择权，就说别人都在控制我。
- 难道我们想要这样一种局面吗？处处投射，处处恐惧？这就像套娃一样，我发出了投射，却咬死了别人就是如何如何。将自己的想象投射到别人，要对自己怎样。
- 与其说要远离那些投射的坏人，不如说第一个先远离自己，我们发现第一个会投射的人不就是自己嘛。指责别人如何如何，就能使自己安全一点？停止这个局面的方法，只有一个：自我而始，自我而终，不管其他人怎么样，我不能再这样了，不能再进行这样的“无知之恶”了。
- 这样想：即使这样是有风险的，但是我受够了，不能再进行这样的人人拿枪指着对方，控诉对方的局面了。

第四十二章 Generation Z 文化研究

42.1 压抑、自我贬低、过分谦逊、普通

当“偷感”很重的年轻人在表情包中寻找“电子布洛芬”

- 因此，这里的“偷”不是一个动词，与法律道德伦理无关，而是一个形容词，重点在于“偷偷摸摸”地没有被人看见就达到了目的——习惯性地隐藏自己，在互联网上保持匿名和消失状态，“求求你了，千万别关注我”，在拍照时躲在人群之中希望不被看出来，一个人独自学习、健身、娱乐，不希望被任何人发现行踪，只期待在无人发现、无人注意的角落突然“惊艳”别人——“偷感”一词其实从意图本质上与过往的“悄悄惊艳所有人”“不用太努力就可以成佛”“我的人设是毫不费力”一脉相承，而其在 2024 年独特的时代性在于，年轻人已经不再惧怕、甚至主动地采取相对“糟糕”的词汇来“糟践”“调侃”“反讽”自己：明明是为了展现自己所取得的成就，却一定要用带有犯罪和道德负面色彩的“偷”来去形容，对于“毫不费力”的“丝滑感”，“小偷”取代了其他积极、美好的形容，一种本质上对自我价值的不自信恐怕本身正是一种“偷感很重”：我们所有人其实偷感都很重。
- 然而，这种带有强烈的怜悯心态的悲剧化判断，却又不能完全解释弥漫在互联网上，当代“Z 世代”无时无刻不挥洒出来的强烈的“唯我独尊”的主体性高扬：**电子游戏的升级打怪系统、义务教务的“做题心态”**被广泛运用在对人生的读解之中，能被大众认同的文艺、新闻、话题几乎都带有“爽剧”的成分，无论是谁，都希望找到一些可以攻击、可以发泄情绪，却也不会遭遇到报复和负面影响的“崇高者”去展现明确的反抗与独立姿态，“不学习”“我很懂”成为一种与尊严密切相关的骄傲——社会环境仿佛想制造一些沉默的螺丝钉，但却产生了一些选择不成为螺丝钉，但也不成为任何积极对象的消极反抗者：事实恐怕是，年轻人的主体性也是在“偷感”之中存活的，它们偷偷生长，在安全、低调的伪装状态下肆意绽放，生怕被看到一丝萌芽的进程，在社会集体潜意识心态复杂纠缠的角斗中，“偷感大爆发”已然是一种为了能够肆意妄为而选择明哲保身的异质化生活策略。
- 正因为这种“主体性”不断地在两个极端随机波动，“偷”才是一个前所未有地对这种精神波动的准确记述：一方面，大量的逼迫和压抑，无法得到正向反馈的事实，促使年轻人开始收起对获取正向反馈的积极幻想，收起看似天真的理想化表达，开始对崇高、宏大、建制产生怀疑和解构；然而另一方面，这种解构又并没有、也很难在当今的社会环境下真正进入到一种价值崩塌、回归原始和废墟状态的后现代价值，年轻人的诉求依然是明确而积极的，对于正向反馈的要求和渴望还是根深蒂固的，对世界依旧怀抱着经典的建构主义理想，互联网革命也充分地在对个人权利竭泽而渔的同时，还是赋予了无数个体思考、发现和表达的生存空间，于是为数众多的表达开始以“偷感”的形式出现：**我如果承认我这种诉求和期待其实是“偷来”的，本不属于我的，我将它们幽暗地隐藏在心底，你看看我这么乖，我都这么糟践自己了，不会威胁到任何人，我的这些小期待应该就可以给我了吧？**

42.2 “普通”是一种意识形态

你根本不懂何谓普通!

- 觉得很痛苦，但是痛苦的人多了去了，应该反思这种痛苦的根源。为什么利益分配不均衡？为什么大家都在努力学习，但是名额就那么几个？为什么要认为制造两极分化？为什么要人为地制造冲突和争端、稀缺？是谁在利用这种冲突、争端、稀缺，从中获利呢？
- 学习方面努力改变自己，努力往上爬，那为什么上面的位置那么小呢？向上爬仅仅是获得一个名头、一个称号。但是你去实验室做实验和一个没有名头的学生做实验有什么区别呢？不都是做实验吗？
- 你写代码，跟老师做项目，你有名头你 NB，可以直博。他没有名头，不 NB，他干了这些东西，相当于给这个老师白干活。
- 你成绩好，绩点高，你干了这些活，老师让你做他的关门弟子。那个不 NB 的人，干了一样的活，没有任何好处。为什么要这样？
- 因为这样使得同样两个人干两份活，你只需要给一个人一份回报就好了，另一个人会自居为 Loser，谁叫我不行呢。我没有我那个师兄 NB，我没有报酬就没有，谁叫我输了呢？
- 人为制造稀缺就是不愿意给代价，不愿意给足嘛。我只用给一份就好了。
- 很多那种卷绩点卷出来的能力没用的，应试能力，你参加项目的时候，就应该用项目中真正的贡献来评判。
- 评价体系在失衡，刻意在制造稀缺性。
- 作为一个普通的大学生，你最糟糕的意识形态，就是把普通作为你的意识形态。你只是比较常见，而不是普遍、通用。那什么叫普通呢？“我普普通通——我杀猪的。”操持贱业，人口的绝大部分，整个社会文明建构的砖和瓦，基石，这才叫普通。你一个大学生已经不普通了。
- 普通是一种**用来自我保护的意识形态**：我普普通通，我还赢了，说明我踏实，我 NB，我坚韧不拔；我输了，说明我普普通通，我符合这个规则的基本玩法，我是稳定的大多数，我是把这些胜利者捧上去的无名英雄，沉默不语的、润物细无声的兜底性力量。**怎么都是你赢呢？**
- 这种自居为普通，是被生产出来的。虽然它很常见，但是它也是一种病。这不是真正意义上的普通，你不能把自己看作兜底性力量。
- 由于这种共同体的价值评判体系，它是不停在斗争，在变化的。在这个评价体系中是普通，在那个评价体系中不是普通。
- 说普通，是有优越感的。说明自己是秩序的兜底性力量，是秩序的、驯服的、贴合的兜底性力量。他认为他可以让秩序安稳的，平静的，带有一点点田园诗歌的气息的持续下去。
- 事实上他不是什么中流砥柱。
- 每个人都会按照他病理化的程度幻象他的普通。
- 其实普通的就是：明明已经是 Loser 了，想要做 Winner；或者，明明已经是 Winner 了，想要骗自己是 Loser，他用普通来自我嘲讽，或者自我安慰。
- 普通是一种意识形态，他不是中流砥柱。真正的普通是那些不得不承受很大痛苦的，遭受很大异化的，把财富直接的现实的生产出来的人，他们才是中流砥柱。或者上层建筑中，不得不承受很大的痛苦和误解，冒着很大的风险，这种人才是中流砥柱。
- 那种动不动以普通来自居某种身份的，他不过是，目前看来某种秩序，他还能获得某种好处。赢了，他说自己幸运，善人有善报，证明他是有先见之明你的。输了，正常，我本来就是普普通通的啊，人家赢了好，人家可以做更大的贡献，我可以承受一定限度的小小的苦难，我虽然没有那么成功，我也挺好。
- 这种东西实际上是一种逃避性的，这种东西就是一种结构性的失调，这些结构性的问题，他看不出来的，他默认的。我们说这种人是中右翼偏保守。
- 建议是思考一些不可能性，正是这些不可能性，你不可能去流水线，不可能去发传单，不可能忽然之间养活不了自己，不可能忽然之间前途变得非常暗淡。
- 恰恰是这些不可能性，或是喜剧的不可能性，抑或是悲剧的不可能性，它把很多人变得不得不卑微的、下

贱的[1]承载这些现实。

- 你现在只能幻象现实对你的种种可能性，赢了怎么怎么，输了不过退回来，无非是没有那么成功。你知不知道在你这个年纪，已经有很多人不得不去面对不可能性。

[1]在那些胜利者、自居为普通的人眼中，他们是下贱的，但……

第四十三章 结构主义

二次元，二次元，我要 diss 你

权力斗争的一般形式：

1. 建立一个假想敌
2. 建立共同的叙事
3. 界定身份
4. 通过对外的攻击活动，来维持自身的存在；或者由对外转向对内，抓反贼、组织内的异端[1]

[1]既可以靠这个日常工作来维持自身的工作安排，又可以通过这个来凝聚组织

第四十四章 对象 a

人类所有创伤的来源：凝视与声音 (对象 a)

- 对象 A 不仅只是带来享乐，也会带来创伤，接下来我们就来看看它是如何制造创伤的。先从凝视和声音说起，这是两种对象 A（另外两种是乳房和粪便，但其实都是同一个对象 A，只不过拥有四种表示形式）。我们都知道对象 A 是不可符号化，因为它是缺乏本身，是个空，凝视和声音也是如此，但与另两个不同的是凝视和声音相对更“现实一点”，因为主体会不断尝试符号化那个凝视和声音，不像乳房与粪便那是绝对触碰不到的纬度，是被主体遗忘的角落而主体对凝视和声音符号化的尝试就是创伤本身。
- 在深夜，你不断去回想一个事件，去给它各种解读，这即意味着它是**无法被消化的原质之物**，即占据了对象 A 的位置。通常你所回想的事件会有这么几个特点：偶然，荒诞，残酷，（这也是**实在界降临**的特征）。举个不恰当的例子，一个人小时候遭遇到了暴露狂，这一刻，实在界降临，他瞬间失语，象征界的匮乏由此提现出来，但这样实在的遭遇的并不一定能带来创伤，只有他长大后回想起这个场景，发现原来那个时候遇见的是暴露狂，**当他去尝试赋予这个场景象征意义，于是这个事件就成了创伤事件**。他就会不断回忆那个场景，凝视自己的遭遇，以一个他者的视角。但这个他者通常会有现实中的一个具体的他人，一个和他欲望纠缠的他人，就像小孩子摔倒了，他也许一点也不痛，但他看到妈妈惊慌的样子后却哇哇大哭起来，这是因为孩子通过妈妈的目光才看到了自己的遭遇是具有创伤性的，所以他才后知后觉的大哭起来。和上述例子同理，那个人小时候偶然遇见的暴露狂不具有任何意义，但他长大后再去凝视那个场景，他就具有了意义，**而这个意义他以为是自己的，其实是他者的，是这个象征域系统给爆路狂下的一个定义，他认同了这个观点，所以他以为是他自己在凝视着自己的遭遇，但在其背后确实这个象征系统在凝视，比如象征系统规定了哪个事件是创伤的，哪些不是，这些由不得主体个人的**。也许二十年前这件事还是小事，但现在这件事就是整个创伤遭遇，这话已经说的很直白了，创伤和凝视有关。具体来说，是他者或大他者的凝视有关，那个事件的意义因此就这么被回溯性建构起来，但这个意义也缝合不了主体的创伤，因为那个偶然的实在界已经发生，当你去赋予它意义的时候，它就注定成为了一个无法弥合之物。在这一刻凝视才发生，而不是你当时的目睹，在这一刻你才创伤。
- 说完视觉场景的遭遇，我们再来看声音的遭遇，和凝视一样，声音也是有待成为的存在，你只有去回溯性建构那个声音才能给主体创伤，当然这个声音不是纯粹物理的声音，首先要局限在人的语音，是语言的能指，这个能指有待主体去解读，或者重复，比如一个人脑海里总是重复着固定的某一句话，这种重复即是在缝合符号系统的漏洞，强迫性重复行为都是如此。通过对那句话的不断重复，不断解读产生新的意义，这个行为本身就是创伤，但总有一个原初声音的遭遇，或许是童年期母亲的一句话，由这一句话可以推理出一连串的话语，通常人们就会很排斥这样的声音。
- 总之声音和场景的凝视一样需要**回溯性建构**，这两者总是相互纠缠共同给主体带来创伤，视觉与话语，无法忘记的场景和不断重复或逃避的话语。这即创伤的来源。事件本身不带来创伤，只是占据了那个对象 a 的位置，**只有对事件回忆和解读才带来创伤。是符号系统的不一致，是语言的无力，是主体的分裂，带来的创伤**。由此看来只要是人都会有创伤，因为我们每一个人都生活在这个充满漏洞的符号系统中，总会遭遇实在界，那个对象 a 不止是欲望的原因，还是创伤的原因。

第三部分

人文通识系列

第四十五章 购买美貌：中国女性的整形美容实践

内容提要

- 本文来自歧义 Disagreement 07 课程笔记。