我们知道

12. 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $A\leqslant f(x)\leqslant B$. 证明函数 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证 任给 $\varepsilon>0$, 据函数 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上的一致连续性, 存在 $\eta>0$, 使得在 $[A,B]$ 中长度小于 η 的任一闭区间上, 函数 $\varphi(x)$ 的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 用 Ω 表 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上的振幅. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积性, 知必有 $\delta>0$ 存在, 使对 $[a,b]$ 的任一分划, 只要 $\max\Delta x_i<\delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i<\eta\frac{\varepsilon}{2\Omega},$$

其中 $\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅.

下证对 $[a,b]$ 的任一分划, 只要 $\max\Delta x_i<\delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i<\varepsilon.$$

事实上, 将诸区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 分成两组, 第一组是满足 $\omega_i(f)<\eta$ 的 (其下标以 "i'" 记之), 第二组是满足 $\omega_i(f)\geqslant\eta$ 的 (下标以 "i''" 记之). 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i&=\sum_{i'}\omega_{i'}[\varphi(f)]\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}[\varphi(f)]\Delta x_{i''}\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}&>\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i\\&=\sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\\&\geqslant\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}>\eta\sum_{i''}\Delta x_{i''},\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\Omega\frac{\varepsilon}{2\Omega}=\varepsilon.$$

由此可知, $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

但是将可积函数和连续函数反过来并不成立，存在如下反例:

10. 存在可积函数 f 和连续函数 g, 构成不可积的复合函数 $f\circ g$.

设 A 为区间 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, $(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots)$ 为 A 的邻接区间. 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A.\\ 1-\dfrac{1}{2}(b_i-a_i)+\left|x-\dfrac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i), i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 上可积, 而 g 在 $[0,1]$ 上连续, 这是因为对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$, 都有

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|.$$

然而, 由于复合函数

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\backslash A\end{cases}$$

在 A 上无处连续, 而 $mA>0$, 因此, $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上并不可积.

注 这个例子中函数复合的顺序不能倒置. 换句话说, 如果 f 在有界闭区间 I 上连续, g 在 I 上可积, 那么 $f\circ g$ 在 I 上必定可积 (参看第四章问题 12).

那我们就来探讨一下补上什么条件可以使目标复合函数也可积，这里习题 7.4.3（1）补上了“φ严格单调”，这就可以了吗？下面我们构造一个反例，并补充一个可以成立的条件：

$$\text{习题7.4.3反例：}\varphi\in C[a,b],\varphi\text{在}[a,b]\text{严格递增},\mathrm{Im}\,\varphi=[\alpha,\beta],f\in\mathscr{R}[\alpha,\beta],\text{但}f\circ\varphi\notin\mathscr{R}[a,b]$$

$$Lebesgue\text{定理}:f\text{在}I\text{上有界,那么}f\in\mathscr{R}(I)\ iff\ m(E)=0,\text{其中}E=\{x\in I:f\text{在}x\text{处不连续}\}$$
$$Vitali\text{定理：}\forall\text{集合}E:m^*(E)>0,\exists E'\subset E,s.t.E'\text{不可测}.$$
$$\text{引理}1:Cantor-Lebesgue\text{函数}\varphi:[0,1]\to[0,1],\text{连续递增}.$$
$$\text{引理}2:\text{函数}\psi(x):[0,1]\to[0,2]\text{严格递增(其中}\psi(x):=\varphi(x)+x)$$
$$\text{引理}3:\text{存在}[0,1]\text{上连续,严格递增的函数将一个正测集映到零测集,这个函数可以是}\psi^{-1}(2x)$$
$$\text{引理}4:\text{如果函数}f\text{在定义域}I\text{上}Lipschitz\text{连续,那么它一定把零测集映到零测集}$$
$$Lipschitz\text{连续},i.e.\ \exists c\geq0,s.t.|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|,\forall x,y\in I$$

$$\text{反例说明:我们不妨设}a=0,b=1,\text{由引理}3,\text{我们记这个正测集为}E_1,\text{零测集为}E_2,\text{这个函数记为}\varphi$$
$$\text{考虑}f\in\mathscr{R}[\alpha,\beta],\text{取}f\text{使得它的不连续点集合恰为}E_2,\text{那么}f\circ\varphi\text{的不连续点集合为}E_1,m(E_1)>0$$
$$\text{由}Lesbesgue\text{定理的逆否命题},f\circ\varphi\notin\mathscr{R}[a,b],\text{这就是一个反例}.$$

$$\text{如果我们加强条件}:\varphi^{-1}\text{在}[\alpha,\beta]\text{上}Lipschitz\text{连续,那就有}\varphi^{-1}\text{一定把零测集映到零测集},$$
$$\text{于是}\{x\in[a,b]:\varphi(x)\in E\}\text{为零测集,其中}E=\{x\in[\alpha,\beta]:f\text{在}x\text{处不连续}\}$$
$$\text{那么}f\circ\varphi\text{的不连续点集合为零测集,由}Lebesgue\text{定理},f\circ\varphi\in\mathscr{R}[a,b].$$

引理证明略~