学习笔记

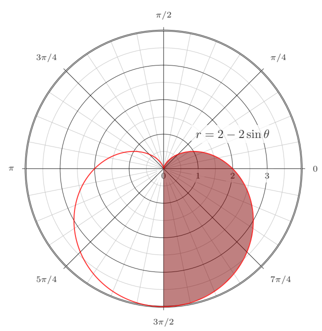
GorgeousLaTeX 经典之作

作者：乐绎华

组织：SYSU

时间：October 12, 2024

版本：5.0 β 自制魔改版本



过去从未消失，未来已经存在。——史铁生《务虚笔记》

目录

第一部分

真正的数学笔记

前面那些太乱，充其量也就是抄书，根本不能算笔记！

第一章 数学分析

1.1 利用 $\delta\epsilon$

定理 1.1

若 f 在 $[1,+\infty)$ 一致连续且广义可积，则 $\lim_{n\to\infty} f(x)=0$.

笔记 f 的一致连续性是必要的，反例见汪林数分反例第 4 章最后一个.

证明 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x,y\in[1,+\infty),|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$. $\exists M>0,s.t.\forall x>M,\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dx\right|<\delta\epsilon$.Then

$$\delta\,|f(x)|\le\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt\right|\le\left|\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|+\delta\epsilon\le2\delta\epsilon\Rightarrow|f(x)|\le2\epsilon\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

□

笔记 相同的证明思想，利用 $\delta\epsilon$，同样出现在 $f\in\mathscr{R}[a,b],g\in C[\inf f,\sup f]\Rightarrow g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$ 中.

定理 1.2

$f\in\mathscr{R}[a,b],g\in C[\inf f,\sup f]\Rightarrow g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$

证明 $g\in C[a,b]\Rightarrow\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

$\exists P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ on $[a,b],\sum_{i=0}^{n}(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f)(x_i-x_{i-1})<\delta\epsilon$. Then

$$\delta\epsilon\ge\sum_{|f(x_{i-1})-f(x_i)|\ge\delta}\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\right)(x_i-x_{i-1})\ge\delta\sum_{|f(x_{i-1})-f(x_i)|\ge\delta}(x_i-x_{i-1})\Rightarrow\sum_{|f(x_{i-1})-f(x_i)|\ge\delta}(x_i-x_{i-1})\le\epsilon$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}g\circ f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}g\circ f\right)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{|f(x_{i-1})-f(x_i)|<\delta}+\sum_{|f(x_{i-1})-f(x_i)|\ge\delta}\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}g\circ f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}g\circ f\right)(x_i-x_{i-1})$$
$$\le(b-a)\epsilon+2\sup_{[x_{i-1},x_i]}|g|\,\epsilon$$

Hence, $g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$. □

笔记 $f\in\mathscr{R}[a,b],g\in C[\inf f,\sup f]\not\Rightarrow f\circ g\in\mathscr{R}[a,b]$. 反例考虑 g 将正测集映到 f 的间断点集合 (一个零测集)，使得 $g\circ f$ 的间断点集合是正测集，故 $f\circ g\notin\mathscr{R}[a,b]$. 只需加强 g 的连续性使得零测集的原像都是零测集.

1.2 利用单调性两边夹住

问题 1.1 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上递增, 对于任何 $T>0$, f 在 $[0,T]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=C.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=C.$$

证明

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\le f(x)\le\frac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x}=\frac{\int_0^{2x}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt}{x}$$

两边取 $x\to\infty$ 得

$$C\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le2C-C=C\Rightarrow f(x)=C$$

□

问题 1.2 f 在 $[0,a)$ 单调，瑕积分 $\int_0^a x^p f(x)dx$ 收敛，则 $\lim_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0$.

证明 若 $p=-1$，则显然 $\lim_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0$，否则 $\int_0^a x^p f(x)dx$ 不收敛. 若 $p>-1$，不妨设 f 递减，则 $\lim_{x\to 0^+} x^p f(x)=+\infty$.

$$\int_0^x t^p f(t)dt \ge \int_0^x t^p f(x)dt = \frac{1}{p+1}x^{p+1}f(x) \ge \int_x^{2x} t^p f(t)dt$$

由柯西收敛，令 $x\to 0^+$ 得

$$0 \ge \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{p+1}x^{p+1}f(x) \ge 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{p+1}x^{p+1}f(x)=0.$$

□

问题 1.3 若 a_n 递减，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n=0$

证明

$$0 \le na_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \to 0(\ as\ n\to\infty) \implies \lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

□

笔记 注意这里还要补充 a_{2n+1} 这种奇数项的细节. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 说明这是显然的.

1.3 先后取极限

问题 1.4 类似大 O Tauber 定理 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上恒正，在任意有限区间 $[a,b]$ 可积，且存在常数 $M>0$，使得 $\int_a^{+\infty} f(x)e^{-tx}dx \le M$. 则有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证明 $\forall A>a$,

$$M \ge \int_a^A f(x)e^{-tx}dx \ge \int_a^A f(x)(1-tx)dx = \int_a^A f(x)dx - t\int_a^A xf(x)dx \to \int_a^A f(x)dx\ (as\ t\to 0^+) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \le M.$$

由单调有界可知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. □

笔记 下面几个定理见《阶的估计基础》chap6

定理 1.3 (大 O Tauber 定理)

[a] 设

$$f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt \to s,\quad x\to 0+.$$

则必有

$$\int_0^\infty f(t)dt = s$$

[a] 这是定理1.5的推论

定理 1.4

设 $f(x)$ 为 $(0,\infty)$ 内的非负函数,

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt,\quad x>0.$$

若

$$F(x)\sim\frac{s}{x^\alpha},\quad \alpha>0, x\to 0+$$

则必有

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{sx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x\to\infty.$$

推论 1.1

设

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{s}{1-x}, \quad x \to 1-.$$

则

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim sn, \quad n\to\infty.$$

定理 1.5

设

$$f(x) > -\frac{B}{x}, \quad 0<x<\infty,$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)dt \to s, \quad x \to 0+.$$

则

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = s.$$

1.4 利用额外的参量

问题 1.5 设 $0 \leqslant a < b$, 是否存在 $f \in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x > 0, \int_a^b f(x)x^{2n+1}\,\mathrm{d}x < 0, n = 0,1,2,\cdots.(*)$$

如果存在, 请给出存在, 如果不存在, 请给出理由.

证明 我们考虑 $F(t) = \int_a^b f(x)e^{-xt}dx, t \geqslant 0$, 则容易得到

$$|F(t)| \leqslant \max_{[a,b]}|f| \cdot \int_0^{\infty} e^{-xt}dx = \frac{\max_{[a,b]}|f|}{t},$$

即 $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

但是对任何 $t>0$, 我们都有

$$F(t) = \int_a^b f(x)e^{-xt}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f(x)\frac{(-xt)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}\int_a^b f(x)x^n dx \overset{(*)}{\geqslant} \int_a^b f(x)dx > 0.$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了满足题目条件的 f 不存在. □

问题 1.6 反向洛必达 设 $f \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$ 且 $f''(x) > -\frac{C}{x^2}$, 则有

$$\lim_{x\to0^+} xf'(x) = 0.$$

证明 不妨设 $C>0$, 对 $h>0$, 由 Taylor 中值定理我们知道存在 $\theta \in (x, x+h)$, 使得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\theta)}{2}h^2.$$

于是

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f''(\theta)}{2}h.$$

于是运用条件就有

$$f'(x) \leqslant \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} + \frac{C}{2\theta^2}h \leqslant \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} + \frac{C}{2x^2}h.$$

我们取 $h = \eta x, \eta \in (0,1)$, 就有

$$xf'(x) \leqslant x\frac{|f(x+\eta x)-f(x)|}{\eta x} + x\frac{C}{2x^2}\eta x = \frac{|f(x+\eta x)-f(x)|}{\eta} + \frac{C\eta}{2},$$

因此就有

$$\varlimsup_{x\to 0^+}[xf'(x)] \leqslant \frac{C\eta}{2}$$

由 η 任意性可得

$$\varlimsup_{x\to 0^+}[xf'(x)] \leqslant 0.$$

类似的由 Taylor 中值定理我们知道存在 $\vartheta \in (x-h, x)$, 使得

$$f(x-\eta x) = f(x) - f'(x)\eta x + \frac{f''(\vartheta)}{2}\eta^2 x^2.$$

于是

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \frac{f(x)-f(x-\eta x)}{\eta} + \frac{f''(\vartheta)}{2}\eta x^2 \geqslant -\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta} - \frac{C}{2\vartheta^2}\eta x^2 \\ &\geqslant -\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta} - \frac{C}{2(x-\eta x)^2}\eta x^2 = -\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta} - \frac{C\eta}{2(1-\eta)^2}, \end{aligned}$$

于是

$$\varliminf_{x\to 0^+}[xf'(x)] \geqslant -\frac{C\eta}{2(1-\eta)^2}.$$

由 η 任意性可得

$$\varliminf_{x\to 0^+}[xf'(x)] \geqslant 0.$$

因此我们证明了

$$\lim_{x\to 0^+}[xf'(x)] = 0.$$

□

1.5 先后两次判断收敛

定理 1.6

数列 u_n, v_n 单调有界，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n v_n$ 收敛.

证明 由狄利克雷判别法：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，再由阿贝尔判别法：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n v_n$ 收敛. □

1.6 不同意义下的收敛

1.6.1 级数收敛

定义 1.1

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$，记 $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n$.

- 普通收敛：

$$\lim_{k\to\infty} s_k \ exists$$

- Cesàro 收敛：

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_N}{N}\ exists$$

- Abel 收敛：

$$\lim_{r\to1^-}A(r)=\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}c_kr^k\ exists$$

三者的蕴含关系以及反例：

$$\begin{tikzcd}
\text{普通收敛} \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & \{(-1)^n\}_{n\geq1} & \text{Cesàro 收敛} \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "/" marking] \arrow[rr, Rightarrow, bend left] & \{(-1)^n n\}_{n\geq1} & \text{Abel 收敛} \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "/" marking] \\
D_N(x)=\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)} \arrow[u, "D_N*f=S_N"] & & F_N(x)=\frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \arrow[u, "F_N*f=\sigma_N"] & & P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \arrow[u, "P_r*f=\lim_{r\to1^-}A_f(r)"]
\end{tikzcd}$$

笔记 下面的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 有时代指 f 的傅里叶级数.

推论 1.2

设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}=0.$$

笔记 这题不能直接使用 Stolz 公式.

证明

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{\sum_{k=1}^{n}(n-k)a_k}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{\sum_{k=1}^{n}s_k}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-\text{Cesaro mean of }\sum a_k\\
&=0
\end{aligned}$$

□

定理 1.7

f 可积，若 f 在 x_0 处连续，则 $\lim_{r\to1^-}A_f(r)(x_0)=f(x_0)$. 若 f 在 x_0 处跳跃间断，则 $\lim_{r\to1^-}A_f(r)(x_0)=\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

定理 1.8 (Tauber's lemma)

若 $\sum c_n$ 有 Abel 收敛到 s，且 $c_n = o(1/n)$[a]，则 $\sum c_n$ 收敛到 s. 即 $\lim_{r\to 1^-}\sum c_n r^n = \sum c_n$.

[a] 在 Littlewood 的版本中，$c_n = O(1/n)$ 也对，见 Stein 傅里叶分析 p63 problem 3

笔记 这可以用来考察收敛半径为 1 的幂级数在收敛域边界上是否收敛. 若有 $c_n = o(1/n)$，则收敛.

定理 1.9

f 可积，且 $\hat{f}(\nu) = O(1/|\nu|)$，则若 f 在 θ 连续，则 $S_N(f)(\theta) \to f(\theta)$ $(as\ N \to \infty)$，若跳跃间断，则 $S_N(f)(\theta) \to \frac{f(\theta-)+f(\theta+)}{2}$. 若 $f \in C[-\pi,\pi]$，则 $S_N(f) \to f$ uniformly.

1.7 傅里叶变换的对称性

f 的光滑性与 $\hat{f}$ 的阶：

$f \in C^k \rightsquigarrow \hat{f} = o(1/|n|^k)$ integrate by parts and use Riemann-Lebesgue lemma

f is Lipschitz $\rightsquigarrow \hat{f} = o(1/|n|^k)$ 使用事实1.7并分段估计

f is monotonic $\rightsquigarrow \hat{f} = O(1/|n|)$ 使用简单函数逼近，或者在实数情况下使用第二积分中值定理

$f \in BV \rightsquigarrow \hat{f} = O(1/|n|)$ 强行构造分段使用积分第二积分中值定理

f $\alpha-$Holder 连续 $\rightsquigarrow \hat{f} = O(1/|n|^\alpha)$ 使用事实1.7并分段估计

f merely Riemann integrable $\rightsquigarrow \hat{f} = o(1)$ 由 Parseval 恒等式：$\sum \left|\hat{f}\right|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty$

性质 1. factos

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/n)e^{-inx}dx$$

hence

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/n)]e^{-inx}dx.$$

1.8 两种方式估阶，阶不同故矛盾

笔记 见 stein 傅里叶分析 p117 关于 Weierstrss 函数处处连续但不可导的性质的讨论.

1.9 反例

对于 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数 f，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 的敛散性互不蕴含.

笔记 但是对于非负不增函数上面的敛散性是等价的. 这说明非负不增性不能被正值连续性替代. 反例见《实分析中的反例》p113.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛蕴含 $\sum_{n=1}^{N} a_n$ $(\forall N \in \mathbb{N})$ 有界且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 但是反过来不对，有反例，见《实分析中的反例》p103.

级数收敛充要条件 (柯西收敛准则) 是 $\lim_{m,n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_m) = 0$，这里 m,n 是无关的. 若 m,n 相关，即 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_{m(n)}) = 0$，则推不出来级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，反例考虑调和级数 $\sum 1/n$，具体见《实分析中的反例》p106.

1.10 隔开边界

定理 1.10 (解析函数序列收敛性) 一列调和函数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 内的紧集上一致收敛到 f, 那么 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 内的紧集上一致收敛到 f'.

证明 不妨设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 上一致收敛到 f. 记 $\Omega_\delta = \{z \in \Omega : \overline{D_\delta}(z) \in \Omega\}$. 断言对于 Ω 内的解析函数 F，有 $\sup\limits_{z\in\Omega_\delta} |F'(z)| \le \frac{1}{\delta} \sup\limits_{\zeta\in\Omega} |F(\zeta)|$. 于是

$$\sup_{x\in\Omega_\delta} \left|f'(z) - f_n'(z)\right| \le \frac{1}{\delta} \sup_{\zeta\in\Omega} |f(z) - f_n(z)| \to 0(\text{ as } n \to \infty) \quad \forall \delta > 0$$

下面证明断言：

$$\begin{aligned}
|F'(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta(z)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta(z)} \frac{|F(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \\
&\le \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta\in\Omega} |F(\zeta)| \frac{1}{\delta^2} 2\pi\delta \\
&= \frac{1}{\delta} \sup_{\zeta\in\Omega} |F(\zeta)|
\end{aligned}$$

□

1.11 广义黎曼引理

笔记 注意到黎曼引理的证明并不依赖于 g 的周期性，只需要 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ 存在即可.

定理 1.11 (广义黎曼引理)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 有界函数 $g(x)$ 在任意区间上可积且 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ 存在，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\infty} f(x)g(\lambda x)dx = A\int_0^{\infty} f(x)dx$$

利用广义黎曼引理1.11，我们可以解决下面问题：

问题 1.7 设 $f(x)\in C^1[0,+\infty)$, 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 f(0)=1$, 且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 已知部分和有界的序列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ 的 Cesaro 和为 A, 且满足对任意 $t>0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(tn)$ 都收敛. 证明: $\lim\limits_{t\to0^+}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(tn)=A$.

1.12 Wiener-Tauberian 定理

定理 1.12 (Wiener-Tauberian 定理)

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的绝对可积函数, 且 $f(x)$ 的 Fourier 变换没有零点，即

$$\widehat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\neq 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

若对于在任意区间上可积，且在 $\mathbb{R}$ 上有界的函数 $h(x)$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)f(t)\mathrm{d}t = A\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

那么对任意在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积函数 $g(x)$, 会有以下等式

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)g(t)\mathrm{d}t = A\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

笔记 这个定理可以用来证明 Riemann-Lebesgue 引理.

注 提示: 建议考虑先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 \sin(xt)\mathrm{d}t=0$, 然后你会发现上述积分都形如 $F(x)=\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\mathrm{d}t$, 我们可以通过令 $x=\mathrm{e}^u, t=\mathrm{e}^{-s}$, 就可以得到卷积的形式.

1.13 求导证明是常数

例如平均值公式的证明??, 例如《微分几何例题详解和习题汇编 by 陈维桓》p30.

1.14 多项式插值

定理 1.13

若 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是不同的实数, 则对任意数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 存在唯一的次数至多是 n 次的多项式 p_n, 使得

$$p_n(x_i)=y_i, 0\le i\le n.$$

证明 唯一性：若 p_n,q_n 都是使得插值成立的至多是 n 次的多项式，则

$$(p_n-q_n)(x_i)=0,\ \ 0\le i\le n.$$

多项式 p_n-q_n 有 $n+1$ 个零点，根据代数基本定理，p_n-q_n 平凡，即 $p_n=q_n$.

存在性：考虑拉格朗日插值法，直接构造出来插值多项式. □

定理 1.14 (插值多项式误差定理)

若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 在点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 处的插值多项式，则

$$p(x) - f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), 其中 \xi_x \in [x_0, x_n]$$

证明 证明考虑 K 值法，直接令 $\phi(x) = p(x) - f(x) - K\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$，两边使用 $n+1$ 次罗尔中值定理即可. □

1.15 证明无穷可微

例题 1.1.

引理 4. 1 设 ζ 是这样定义的实函数：

$$\zeta(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, & 对于 t > 0, \\ 0, & 对于 t \leqslant 0, \end{cases}$$

则 $\zeta \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$.

证明 运用 L' Hospital 法则很容易证明对任何多项式 $P(x)$ 都有

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} P(x) = 0$$

因而

$$\lim_{t \to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} P\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

为了证明 $\zeta \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$，须验证：对任何非负整数 n，函数 $\zeta(t)$ 在 $t > 0$ 范围和 $t \leqslant 0$ 范围分别求出的 n 阶导数都能在 $t = 0$ 处连续地衔接起来。通过归纳，很容易证明 ζ 的 n 阶导数 $\zeta^{(n)}$ 可以表示为

$$\zeta^{(n)}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} P_n\left(\frac{1}{t}\right), & 对于 t > 0, \\ 0, & 对于 t \leqslant 0. \end{cases}$$

这里

$$P_0\left(\frac{1}{t}\right) = 1,$$
$$P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) = \left(P_n\left(\frac{1}{t}\right) - P_n'\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{1}{t^2}.$$

因而 P_n 是一个 $2n$ 次的多项式. 据此可知

$$\lim_{t \to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} P_n\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

综上所述, 我们证明了 $\zeta \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. □

1.16 抽象二阶微分方程求解

定理 1.15

考虑如下微分方程：

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad 其中 a, b 是常数. \tag{1.1}$$

它的解为 $y(x) = 齐通 + \int_0^x g(x-t)f(t)dt$，其中 $g(x)$ 为 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的齐次解.

笔记 这个性质可以解决一类微分方程构造问题. 比如证明:

问题 1.8 设 $f(x) \in D^2[0,1]$ 满足 $f(0) = 2, f'(0) = 0, f'(1) = e - e^{-1}$. 证明存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $f''(\theta) = f(\theta)$.

证明

- 若 f'' 具有可积性：考虑微分方程 $f''(x) - f(x) =: h(x)$，其特解为 $c_1e^x + c_2e^{-x}$，带入定理1.15，可知 $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-}x}{2}$. 于是上述微分方程的解为

$$f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{-x+t}}{2} h(t)dt$$

$$f'(x) = c_1e^x - c_2e^{-x} + \int_0^x \frac{e^{x-t} + e^{-x+t}}{2} h(t)dt$$

带入初值条件 $f(0) = 2, f'(0) = 0$，就有

$$f(x) = e^x + e^{-x} + \int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{-x+t}}{2} h(t)dt \tag{1.2}$$

再带入 $f'(1) = e - e^{-1}$，得到

$$\int_0^1 \frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2} h(t)dt = 0, \quad 其中 \frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2} > 0, \forall t \in [0,1].$$

由积分中值定理：存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$h(\theta) \int_0^1 \frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2} dt = 0 \Rightarrow g(\theta) = 0, \quad 即 f''(\theta) = f(\theta).$$

- 若 f'' 不具有可积性：???

□

定理 1.16 (含参积分求导公式)

对于有定义的积分 $f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt$，其导数为

$$f'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g_x(x,t)dt + g(x,b(x))b'(x) - g(x,a(x))a'(x) \tag{1.3}$$

1.17 等分布

定理 1.17 (Weyl 等分布定理)

用 $\#\{\}$ 表示集合元素个数.

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in [0,1]$, 如下结果等价:

(1) 对任何整数 $k \in \mathbb{N}$ ，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n e^{2\pi i k x_j}}{n} = 0.$$

(2) 对任何 $f \in C[0,1], f(0)=f(1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n} f\left(x_j\right)}{n}=\int_0^1 f(x)dx.$$

(3) 对任何 $(a,b) \subset [0,1]$ ，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\left\{1\leqslant j\leqslant n: x_j\in(a,b)\right\}}{n}=b-a.$$

(4) 对任何 $I \subset [0,1], I$ 是一个区间, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\left\{1\leqslant j\leqslant n: x_j\in I\right\}}{n}=|I|.$$

(5) 对任何 $f \in R[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n} f\left(x_j\right)}{n}=\int_0^1 f(x)dx.$$

笔记 证明见exercises.pdf 第 24 页

定理 1.18 (Fejer 等分布定理)

(i) 设 $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实序列, 若存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得:

(1) 当 n 充分大时, $\Delta^k f(n)$ [a]严格单调趋近于 0.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left|\Delta^k f(n)\right|=+\infty$.

则 $\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ [b]在 $[0,1)$ 上等分布.

(ii) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是足够光滑的函数, 若存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得

(1) 当 x 充分大时, $f^{(k)}(x)$ 严格单调趋近于 0.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left|f^{(k)}(x)\right|=+\infty$

则 $\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

[a] Δ^k 表示 k 阶差分,$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$.

[b] $\{-\}$ 表示取小数部分.

定理 1.19 (Van Der Corput 差分定理)

设 $\{\xi_n\}_{n\in N}$ 是 $[0,1)$ 上的实序列, 若对 $\forall h\in\mathbb{N}$ 都有 $\{\xi_{n+h}-\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布, 则 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1)$ 上的等分布序列.

笔记 这个定理就是模 1 等分布，见exercises.pdf

推论 1.3

$\left\{\left\{\dfrac{n^\alpha}{2}\pi\right\}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布，其中 $\alpha>0$.

笔记 用一般的 Weyl 等分布定理1.17只能证明 $0<\alpha<1$ 的情况. 见 Stein 傅里叶分析 Chapter4 Ex 8.

证明 Van Der Corput 差分定理1.19

由 Weyl 准则可知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ik(\xi_{n+h}-\xi_n)}=0,\quad \forall h\in\mathbb{N},\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

设 $u_n=e^{2\pi ik\xi_n}$, 则可表示为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_{n+d}\overline{u_n}=0, \text{对于任意} d\in\mathbb{Z}.$$

我们的目标是要证

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n=0$$

对于任意给定的 $D\in\mathbb{N}$，由三角不等式：

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n\right|\le\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}u_{n+d}\right|+\left|\frac{1}{ND}\sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D}u_{n+d}\right| \tag{1.4}$$

对于第一部分：[a]

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}u_{n+d}\right|\overset{\text{裂项相消}}{=}\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{D}\frac{D+1-k}{D}u_k-\sum_{k=1}^{D}\frac{D+1-k}{D}u_{N+k}\right|\overset{D\text{是固定的}}{=}O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{1.5}$$

对于第二部分：

$$\left|\frac{1}{ND}\sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D}u_{n+d}\right|\le\frac{1}{ND}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}1^2\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{d=1}^{D}u_{n+d}\right|^2}=\sqrt{\frac{1}{D^2}\sum_{d_1,d_2=1}^{D}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{u_{n+d_1}\overline{u_{n+d_2}}}{N}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{D^2}\left[\sum_{\substack{d_1,d_2=1\\ d_1\neq d_2}}^{D}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{u_{n+d_1}\overline{u_{n+d_2}}}{N}\right)+\sum_{d=1}^{D}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{u_{n+d}\overline{u_{n+d}}}{N}\right)\right]}$$

$$\overset{u_{n+d}\overline{u_{n+d}}=|u_{n+d}|=1}{=}\sqrt{\frac{1}{D^2}\left[\sum_{\substack{d_1,d_2=1\\ d_1\neq d_2}}^{D}\left(\sum_{n=1}^{N}o(1)\right)+\sum_{d=1}^{D}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\right)\right]}=o(1)+\frac{1}{D}$$

于是

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n\right|\le O\left(\frac{1}{N}\right)+o(1)+\frac{1}{D}\longrightarrow\frac{1}{D}(\text{当}N\to\infty) \tag{1.6}$$

由 D 的任意性可知：

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n\right|=0\implies\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n=0 \tag{1.7}$$

由 Weyl 等分布定理1.17可知 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1)$ 上的等分布序列.

[a] 这里用到了重要分析思想，先给定 D，类似于1.1.

证明 Fejer 等分布定理1.18

(i) 考虑数学归纳法, 当 $k=1$ 时, 考虑对 $\forall u,v\in\mathbb{R}$, 此时有

$$\left|e^{2\pi iu}-e^{2\pi iv}-2\pi i(u-v)e^{2\pi iv}\right|=4\pi^2\left|\int_0^{u-v}(u-v-\omega)e^{2\pi i\omega}d\omega\right|$$
$$\leq 4\pi^2\left|\int_0^{u-v}(u-v-\omega)d\omega\right|=2\pi^2(u-v)^2$$

我们代入 $u=hf(n+1),v=hf(n)$, 其中 $h\in\mathbb{N}$, 由上式可得

$$\left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)}-\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}-2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right|\leq 2\pi^2h^2|\Delta f(n)|,n\in\mathbb{N}$$

由绝对值的三角不等式进一步可得

$$\left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)}-\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}-2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right|$$
$$=\left|\left(\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)}-\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)}\right)+\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)}-\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}-2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right|$$
$$\leq\left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)}-\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)}\right|+2\pi^2h^2|\Delta f(n)|$$

于是有

$$\left|2\pi ih\sum_{n=1}^{N-1}e^{2\pi ihf(n)}\right|=\left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}-\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)}+\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}\right)+\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}-\frac{e^{2\pi ihf(1)}}{\Delta f(1)}\right|$$
$$\leq\sum_{n=1}^{N-1}\left|2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}-\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)}+\frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}\right|+\frac{1}{|\Delta f(N)|}+\frac{1}{|\Delta f(1)|}$$
$$\leq\sum_{n=1}^{N-1}\left|\frac{1}{\Delta f(n)}-\frac{1}{\Delta f(n+1)}\right|+2\pi^2h^2\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)|+\frac{1}{|\Delta f(N)|}+\frac{1}{|\Delta f(1)|}$$

注意到 $\Delta f(n)$ 是单调的, 利用交错相消性可知

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}e^{2\pi ihf(n)}\right|\leq\frac{1}{\pi|h|}\left(\frac{1}{N|\Delta f(1)|}+\frac{1}{N|\Delta f(N)|}\right)+\frac{\pi|h|}{N}\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)|\xrightarrow{N\to\infty}0$$

由 Weyl 准则命题得证。其它情形下，不妨设 $k\in\mathbb{N}$，当 $k+1$ 情形时满足条件，我们有

$$f(n+h)-f(n)=\sum_{j=0}^{h-1}\Delta f(n+j)$$

于是有

$$\Delta^k(f(n+h)-f(n))=\sum_{j=0}^{h-1}\Delta^{k+1}f(n+j)$$

由 $\Delta^{k+1}f(n)$ 的单调趋近 0 性质可知, 当 n 充分大时, 于是得 $\Delta^k(f(n+h)-f(n))$ 单调趋近于 0 , 且 $n\left|\Delta^k(f(n+h)-f(n))\right|\to+\infty$ 重复以上步骤, 得 $\Delta\left(\Delta^{k-1}(f(n+h)-f(n))\right)$ 单调趋近于 0 , 且

$$n\left|\Delta\left(\Delta^{k-1}(f(n+h)-f(n))\right)\right|\to+\infty$$

反复重复差分运算, 将差分次数由 $k+1$ 降低至 1 , 运用 Van Der Corput 差分定理1.19最终得 $\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布。

(ii) 注意到

$$\Delta f(n)=\int_0^1 f'(n+t)dt\quad\Delta^k f(n)=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f^{(k+1)}(n+t_1+t_2+\cdots+t_k)\,dt_1dt_2\cdots dt_k$$

当 $k=1$ 时, 由 $f'(x)$ 单调趋近 0 易知 $\Delta f(n)$ 也单调趋近 0 , 同理易知 $n|\Delta f(n)|\to+\infty$, 利用 (i) 可知此时命题得证，当 $k+1$ 情形时，有 $\Delta^k f(n)$ 单调趋近于零，且 $n\left|\Delta^k f(n)\right|\to+\infty$，于是利用 (i) 的结论可知 $\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

笔记 断言命题对于 $k=1$ 成立. 即若 $\Delta f(n)$ 严格递减趋于 0 (当 n 充分大), 且 $\lim_{n\to\infty} n|\Delta f(n)|=+\infty$, 就有 $\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

现在我们有: 若 $\Delta^{k+1} f(n)$ 严格递减趋于 0 (当 n 充分大), 且 $\lim_{n\to\infty} n\left|\Delta^{k+1} f(n)\right|=+\infty$, 则 $\forall h_1\in\mathbb{N}$, 有 $\Delta^k\left[f\left(n+h_1\right)-f(n)\right]=\Delta^k f\left(n+h_1\right)-\Delta^k f(n)$ 严格递减趋于 0 (当 n 充分大), 且 $\left\{\Delta^k f\left(n+h_1\right)\right\}-\left\{\Delta^k f(n)\right\}=\left\{\Delta^k f\left(n+h_1\right)-\Delta^k f(n)\right\}$, 且 $\lim_{n\to\infty} n\left|\Delta^k f\left(n+h_1\right)-\Delta^k f(n)\right|=+\infty$. 记 $f_{h_1}(x)=f\left(x+h_1\right)-f(x)$, 于是 $\Delta^k f_{h_1}(n)$ 严格递减趋于 0 (当 n 充分大), 且 $\left\{\Delta^k f\left(n+h_1\right)\right\}-\left\{\Delta^k f(n)\right\}=\left\{\Delta^k f_{h_1}(n)\right\}$, 且 $\lim_{n\to\infty} n\left|\Delta^k f_{h_1}(n)\right|=+\infty$. 重复这个过程, 最后 $\Delta f_{h_1,h_2,\cdots,h_k}(n)$ 严格递减趋于 0 (当 n 充分大), 且 $\left\{\Delta^k f\left(n+h_j\right)\right\}-\left\{\Delta^k f(n)\right\}=\left\{\Delta^k f_{h_j}(n)\right\}\forall 1\le j\le k$, 且 $\lim_{n\to\infty} n\left|\Delta f_{h_1,h_2,\cdots,h_k}(n)\right|=+\infty$. 于是 $\left\{\left\{f_{h_1,h_2,\cdots,h_k}(n)\right\}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布。应用 k 次 Van Der Corput 差分定理1.19: $\left\{\left\{f_{h_1,h_2,\cdots,h_{k-1}}(n)\right\}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布 $\dots\dots\{\{f(n)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

1.18 利用任意性

在解析数论中，定义 $\psi(x)=\sum\limits_{p^m\le x}\log p=\sum\limits_{p\le x}\left[\dfrac{\log x}{\log p}\right]\log p$, $\pi(x)=\sum\limits_{p\le x}1$.

定理 1.20

若 $\psi(x)\sim x(x\to\infty)$, 则 $\pi(x)\sim x/\log x(x\to\infty)$.

证明 一方面,

$$\psi(x)=\sum_{p\le x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p\le\sum_{p\le x}\log x=\pi(x)\log x\Longrightarrow\frac{\psi(x)}{x}\le\frac{\pi(x)\log x}{x},\forall x\in\mathbb{R}\tag{1.8}$$

另一方面，对于任意给定的 $0<\alpha<1$

$$\psi(x)\ge\sum_{p\le x}\log p\ge\sum_{x^\alpha<p\le x}\log p\ge\left(\pi(x)-\pi\left(x^\alpha\right)\right)\log x^\alpha\Longrightarrow\psi(x)+\alpha\pi\left(x^\alpha\right)\log x\ge\alpha\pi(x)\log x$$

于是

$$\frac{\psi(x)}{x}+\alpha\frac{\log x}{x^{1-\alpha}}\ge\frac{\psi(x)}{x}+\alpha\frac{\pi\left(x^\alpha\right)\log x}{x}\ge\alpha\frac{\pi(x)\log x}{x}\Longrightarrow\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\ge\alpha\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}$$

由 α 任意性

$$1=\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\ge\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}\ge\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}\overset{6.1}{\ge}\liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$$

□

1.19 求和下的大 O 小 o 估阶

命题 1.1

设 $b_n>0$, 且 $a_n=O\left(b_n\right), n\to\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^N a_n=O\left(\sum_{n=1}^N b_n\right),\quad N\to\infty$$

笔记 此证明相当显然.

证明 存在常数 $C>0, N>0$，使得 $\left|a_n\right|<C\cdot b_n,\forall n\ge N$.

只需要验证存在常数 $C'>0$，使得 $\left|\sum\limits_{k=1}^n a_k\right|\le C'\sum\limits_{k=1}^n b_k,\forall n>N$. 这只需要如下的简单放缩:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}a_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b_k}b_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_k\right|\leq\sup_{1\leq k\leq N}\frac{|a_k|}{b_k}\sum_{k=1}^{N}b_k+C\sum_{k=N+1}^{n}b_k\leq\left(C+\sup_{1\leq k\leq N}\frac{|a_k|}{b_k}\right)\sum_{k=1}^{n}b_k$$

□

命题 1.2

设 $b_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$，且 $a_n=o(b_n),n\to\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=o\left(\sum_{n=1}^{N}b_n\right),\quad N\to\infty$$

笔记 这里的证明要在 N 上做手脚.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得 $a_n\leq\frac{\varepsilon}{2}\cdot b_n,\forall n\geq N$，还存在 $N'>0$，使得 $\sum_{k=1}^{N}b_k\leq\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{1\leq k\leq N}\frac{|a_k|}{b_k}}\sum_{k=1}^{n}b_k,\forall n>N'$.

只需要验证 $\forall\varepsilon>0$，使得 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq\varepsilon\sum_{k=1}^{n}b_k,\forall n>N'$. 这只需要如下的简单放缩：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}a_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b_k}b_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_k\right|\leq\sup_{1\leq k\leq N}\frac{|a_k|}{b_k}\sum_{k=1}^{N}b_k+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n}b_k\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}b_k+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n}b_k\leq\varepsilon\sum_{k=1}^{n}b_k$$

□

注 此证明还可见于《阶的估计基础》p18 定理 2，其中采用了大 O 小 o 的语言来书写证明，比较抽象.

1.20 利用一致收敛性

定理1.2就是一个例子，下面还有另一个例子：

定理 1.21 (Bernstein 多项式逼近)

f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则其 Bernstein 多项式 $B_n(f)$ 在 $C[0,1]$ 上一致收敛于 f. 其中

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f)(x)-f(x)|=0$$

笔记 从概率论的角度给出证明，这样更好地给出了 Bernstein 多项式的构造思路. 来源于Durrett.

证明 考虑 n 个独立随机变量 X_i，且 $P(X_i=1)=p,P(X_i=0)=1-p$，有 $EX_i=p,Var(X_i)=p(1-p)$，令 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，就有

$$P(S_n=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

于是 $Ef(S_n/n)=B_n(f)(p)$. 由 Durrett Theorem 2.2.3，S_n/n 依概率收敛于 p. 结合 Theorem 2.2.3 的证明和 $p(1-p)\leq\frac{1}{4},\forall p\in[0,1]$，有

$$P(|S_n/n-p|\geq\delta)\leq\frac{var(S_n/n)}{\delta^2}=\frac{p(1-p)}{n\delta^2}\leq\frac{1}{4n\delta^2}$$

为了证明 $Ef(S_n/n)\to f(p)$，由于 f 在 $[0,1]$ 上一致连续，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，

$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。使用 Jensen 不等式 1.22就有

$$
\begin{aligned}
|Ef(S_n/n)-f(p)| &\overset{1.22}{\leq} E|f(S_n/n)-f(p)| = \int |f(S_n/n)-f(p)|dP \\
&= \int_{\{|S_n/n-p|\leq\delta\}} |f(S_n/n)-f(p)|dP + \int_{\{|S_n/n-p|>\delta\}} |f(S_n/n)-f(p)|dP \\
&\leq \varepsilon P(|S_n/n-p|\leq\delta) + \sup_{[0,1]}|f(x)-f(p)|P(|S_n/n-p|>\delta) \\
&\leq \varepsilon + 2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$，就有 $\limsup_{n\to\infty}|Ef(S_n/n)-f(p)|\leq\varepsilon$. 由 ε 的任意性，即有 $\limsup_{n\to\infty}|Ef(S_n/n)-f(p)|=0$，即 $Ef(S_n/n)\to f(p)$. □

定理 1.22 (Jensen 不等式)

若 φ 是凸函数[a]，则 $E\varphi(X)\geq\varphi(EX)$.

[a]即 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有 $\theta\varphi(x)+(1-\theta)\varphi(y)\leq\varphi(\theta x+(1-\theta)y)$，其中 $0\leq\theta\leq 1$.

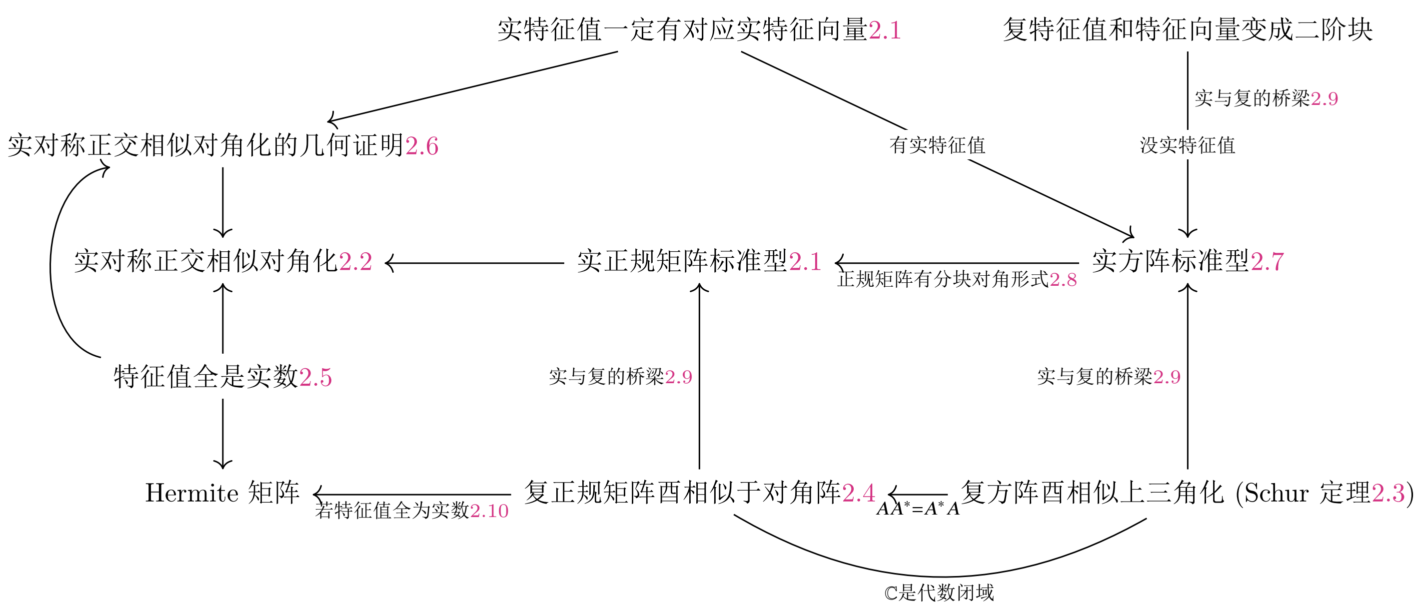
定理 1.23 (Markov 不等式)

设 X 是随机变量，则对任意 $a>0$，有 $P(|X|\geq a)\leq\frac{E|X|}{a}$.

证明 由 X 的非负性，有 $E|X|=\int_0^\infty P(|X|\geq t)dt\geq\int_0^a P(|X|\geq t)dt\geq aP(|X|\geq a)$，即 $P(|X|\geq a)\leq\frac{E|X|}{a}$. □

第二章 高等代数

2.1 实矩阵、正规、对称



定理 2.1

实正规矩阵可以正交相似为标准型.

定理 2.2

实对称矩阵可正交相似对角化.

定理 2.3 (Schur 定理)

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

证明 选取 φ 的一个单位特征向量，再扩充成 V 的一组标准正交基，归纳得证. □

定理 2.4

复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为复正规矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.

笔记 实对称矩阵一定是实正规矩阵，于是考虑正交相似标准型，这个正交相似标准型还要是对称的，故斜对角线上的 $b_i = 0, \forall i$，于是是对角阵.

性质 1. factos

在内积空间中平行四边形两对角线平方和等于四边平方和, 即

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

定义 2.1 (伴随 $(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^*(\beta))$)

设 V 是 n 维内积空间, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 V 上的线性算子 φ 在这组基下的表示矩阵为 A, 则当 V 是酉空间时, φ^*[a]在同一组基下的表示矩阵为 $\bar{A}'$, 即 A 的共轭转置; 当 V 是欧氏空间时, φ^* 的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}'$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

[a] $\forall\alpha,\beta\in V,(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^*(\beta))$.

定义 2.2 (保持内积的线性变换 $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta)$)

设 φ 是内积空间 V 上保持内积的线性变换[a], 若 V 是欧氏空间，则称 φ 为正交变换或正交算子[b]; 若 V 是酉空间，则称 φ 为酉变换或酉算子[c].

[a] $\forall\alpha,\beta\in V,(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta)$.

[b] 在欧式空间任意一组标准正交基下表示矩阵为正交矩阵 $A,AA^T=I$.

[c] 在酉空间任意一组标准正交基下表示矩阵为酉矩阵 $U,UU^*=I$.

定义 2.3 (自伴随算子 $\varphi^*=\varphi$)

设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是 φ 的伴随, 若 $\varphi^*=\varphi$, 则称 φ 是自伴随算子. 当 V 是欧氏空间时, φ 也称为对称算子或对称变换[a]; 当 V 是酉空间时, φ 也称为 Hermite 算子或 Hermite 变换[b].

[a] 在欧式空间任意一组标准正交基下表示矩阵为对称矩阵 $A,A=A^T$.

[b] 在酉空间任意一组标准正交基下表示矩阵为 Hermite 矩阵 $A,A=A^*$.

定义 2.4 (正规算子)

设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是其伴随, 若 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$, 则称 φ 是 V 上的正规算子. 为了不引起混淆, 我们也称酉空间 (欧氏空间) V 上的正规算子 φ 为复正规算子 (实正规算子). 复矩阵 A 若适合 $\bar{A}'A=A\bar{A}'$, 则称其为复正规矩阵. 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$, 则称其为实正规矩阵.

定理 2.5

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则 φ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交.

证明 证明设 λ 是 φ 的特征值, x 是属于 λ 的特征向量, 则

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})&=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\varphi^*(\boldsymbol{x}))\\&=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x})=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

因为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\neq 0$, 故 $\bar{\lambda}=\lambda$, 即 λ 是实数. 又若设 μ 是 φ 的另一个特征值, $\boldsymbol{y}$ 是属于 μ 的特征向量, 注意到 λ,μ 都是实数, 故有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\varphi^*(\boldsymbol{y}))\\&=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y})=\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

由于 $\lambda\neq\mu$, 故 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$, 即 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$. □

笔记 推论是实（复）对称矩阵的特征值全为实数，不同特征值的特征向量两两正交.

定理 2.6 (实对称正交相似对角化的几何证明)

设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

证明 证明首先需要说明的是, 若 V 是欧氏空间, 则由于自伴随算子 φ 的特征值都是实数, 故有实的特征向量. 不妨设 u 是 φ 的特征向量, 令 $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$, 则 v_1 是 φ 的长度等于 1 的特征向量. 我们对维数 n 用归纳法.

若 $\dim V = 1$, 结论已成立. 设对小于 n 维的内积空间结论成立. 令 W 为由 v_1 张成的子空间, $W^{\perp}$ 为 W 的正交补空间, 则 W 是 φ 的不变子空间且

$$V = W \oplus W^{\perp}, \quad \dim W^{\perp} = n-1.$$

由命题 9.3.1 可知 $W^{\perp}$ 是 $\varphi^* = \varphi$ 的不变子空间. 将 φ 限制在 $W^{\perp}$ 上仍是自伴随算子. 由归纳假设, 存在 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\{v_2, \cdots, v_n\}$, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且 $\{\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是其特征向量. 因此, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 构成了 V 的一组标准正交基, $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 为 φ 的 n 个线性无关的特征向量. □

定理 2.7 (一般实方阵的正交相似上三角化)

例 9.87 证明: n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 必正交相似于下列分块上三角矩阵:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \boldsymbol{A}_r & & & \\ & & & c_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_k \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i (1 \le i \le r)$ 是二阶实矩阵且 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征值具有 $a_i \pm b_i \mathrm{i}\,(b_i \neq 0)$ 的形状, $c_j (1 \le j \le k)$ 是实数. ♡

证明 先证明引理:

引理 2.1 (实特征值一定有实特征向量)

A 是实方阵, 那么 A 的实特征值一定有实特征向量. ♡

证明 若 A 有实特征值 λ, 则考虑 λ 对应的特征向量 $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 于是 $A\boldsymbol{u} + iA\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u} + i\lambda \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 都是 A 的实特征值 λ 对应的实特征向量. □

若 A 有实特征值 λ, 由引理2.1可知, 存在 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$. 考虑 u 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则 A 有表示 $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha^T \\ O & A_{n-1} \end{pmatrix}$. 于是对 A_{n-1} 进行归纳即可得证.

若 A 没有实特征值, 考虑 A 的复特征值 $\lambda = a + ib$, $A(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = (a + ib)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})$. 由定理2.9可知, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 线性无关. 由于 A 仅仅是实方阵, 没有实正规, 所以 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 不一定正交. 取 $L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 的标准正交基 e_1, e_2, 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则 A 有表示 $\begin{pmatrix} A_{12} & B \\ O & A_{n-2} \end{pmatrix}$. 其中 A_{12} 相似于 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. 于是对 A_{n-2} 进行归纳即可得证. □

定理 2.8 (正规矩阵有分块对角形式)

例 9.89 设 A, B 是实方阵且分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 是实正规矩阵, 求证: $C = O$ 且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 也是正规矩阵. ♡

证明 证明由已知

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$. 由于 $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}') = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')$, 故可得 $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}') = 0$, 结合引理2.3再由 $\boldsymbol{C}$ 是实矩阵可推出 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$. □

推论 2.1

由定理2.7和定理2.8可知实正规矩阵相似于标准型.2.1

定理 2.9 (实与复的桥梁)

例 9.86 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 虚数 $a+bi$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i}$ 是对应的特征向量, 其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是实列向量. 求证: $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 必线性无关. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵, 则 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 相互正交且长度相同 (取实列向量空间的标准内积).

证明 由假设

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\boldsymbol{i})=(a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v})+(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u})\mathrm{i}. \tag{2.1}$$

假设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{u}\neq 0,\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u}$, 则 $(1+k\mathrm{i})\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=(1+k\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{u}$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{u}$, 由此可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u},b\boldsymbol{u}=0$, 这与 $b\neq 0$ 且 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 相矛盾. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵, 在2.1式中比较实部和虚部得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u}.$$

引理 2.2

$AA^*=A^*A$, 则 $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ 当且仅当 $A^*\boldsymbol{u}=\overline{\lambda}\boldsymbol{u}$.

证明

引理 2.3

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$[a], 则 $tr(AA^*)\geq 0$ 取等当且仅当 $A=O$.

[a]这意味着对向量也成立

证明 设 $A=(a_{ij})$, 则 $tr(AA^*)=\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{1\leq i,j\leq n}\left|a_{ij}\right|^2\geq 0$. 取等当且仅当 $\left|a_{ij}\right|=0,\forall,i,j$, 即 $A=O$.
□

由引理2.3, $(A-\lambda I)\boldsymbol{u}=0\Leftrightarrow((A-\lambda I)\boldsymbol{u})^*(A-\lambda I)\boldsymbol{u}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{u}^*(A-\lambda I)^*(A-\lambda I)\boldsymbol{u}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{u}^*(A-\lambda I)(A-\lambda I)^*\boldsymbol{u}=0\Leftrightarrow(A^*-\overline{\lambda}I)\boldsymbol{u}=(A-\lambda I)^*\boldsymbol{u}=0$. □

因为 $\boldsymbol{A}$ 正规, 故由引理2.2可知, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i}$ 也是 $\boldsymbol{A}'$ 的属于特征值 $a-b\mathrm{i}$ 的特征向量, 即

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a-b\mathrm{i})(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})+(a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u})\mathrm{i}.$$

比较实部和虚部得到

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{A}'\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u}. \tag{2.2}$$

又 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}'\boldsymbol{v})$, 将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{v}$ 代入得到

$$(a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}),\quad (a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u}).$$

由此可得 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$.

□

定理 2.10 (特征值全为实数的正规算子是自伴随算子)

定理 9.8.2 设 φ 是酉空间 V 上的正规算子. 若 φ 的特征值全是实数, 则 φ 是自伴随算子; 若 φ 的特征值全是非负实数, 则 φ 是半正定自伴随算子; 若 φ 的特征值全是正实数, 则 φ 是正定自伴随算子; 若 φ 的特征值的模长等于 1 , 则 φ 是酉算子.

证明 设 φ 的谱分解为

$$\varphi=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k,$$

则
$$\varphi^* = \bar{\lambda}_1 E_1 + \bar{\lambda}_2 E_2 + \cdots + \bar{\lambda}_k E_k.$$

若 φ 的特征值全是实数, 则 $\varphi^* = \varphi$, 即 φ 是自伴随算子. 若 λ_i 全是非负实数, 则对任意的非零向量 $\alpha \in V$, 有
$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha}) + \cdots + \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})$$
$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1 \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2 \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha}) + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})$$

从而
$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1 \|\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{\alpha})\|^2 + \lambda_2 \|\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{\alpha})\|^2 + \cdots + \lambda_k \|\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{\alpha})\|^2 \geq 0.$$

同理, 若特征值全是正实数, 则 φ 是正定自伴随算子. 最后, 若 $|\lambda_i| = 1$, 则
$$\begin{aligned}
\varphi\varphi^* &= \lambda_1\bar{\lambda}_1 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_k\bar{\lambda}_k \boldsymbol{E}_k \\
&= |\lambda_1|^2 \boldsymbol{E}_1 + |\lambda_2|^2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + |\lambda_k|^2 \boldsymbol{E}_k \\
&= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{I},
\end{aligned}$$

即 φ 是酉算子. □

2.2 Jordan 标准型

定理 2.11

例 7.52 设 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明: 对任意的正整数 k, 特征值为 λ_0 的 k 阶 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_k(\lambda_0)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 中出现的个数为
$$\mathrm{r}\left((\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}_n)^{k-1}\right) + \mathrm{r}\left((\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}_n)^{k+1}\right) - 2\mathrm{r}\left((\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}_n)^{k}\right),$$
其中约定 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}_n)^{0}\right) = n$.

证明 相似化成 Jordan 标准型, 这是显然的. □

问题 2.1 例 7.55 设 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n(0)$ 是特征值为零的 n 阶 Jordan 块, 求 $\boldsymbol{J}^m (m \geq 1)$ 的 Jordan 标准型.

笔记 考虑几何观点, 即循环不变子空间.

问题 2.2 例 7.62 设 9 阶幂零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{0, \boldsymbol{J}_2(0), \boldsymbol{J}_3(0), \boldsymbol{J}_3(0)\}$, 求非异阵 P, 使 $P^{-1}AP = J$.

笔记 考虑 $\boldsymbol{A}$ 在哪组基下表示矩阵为 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{0, \boldsymbol{J}_2(0), \boldsymbol{J}_3(0), \boldsymbol{J}_3(0)\}$.

$$\begin{tikzcd}
0 & \boldsymbol{J}_2(0) & \boldsymbol{J}_3(0) & \boldsymbol{J}_3(0) & \\
\text{轨道 1} & \text{轨道 2} & \text{轨道 3} & \text{轨道 4} & \\
 & & e_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & e_2 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & \text{2 级广义特征向量} \\
 & \eta_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & Ae_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & Ae_2 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & \text{1 级广义特征向量} \\
\xi_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & A\eta_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & A^2e_1 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & A^2e_2 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d] & \text{0 级广义特征向量} \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

于是这组基为 $\{\xi_1,\eta_1,A\eta_1,e_1,Ae_1,A^2e_1,e_2,Ae_2,A^2e_2\}$

2.3 可交换

问题 2.3 令 $G=GL(n,\mathbb{C})$, P 是主对角线上的元均为 1 的 $n\times n$ 上三角方阵全体形成的 G 的子群。确定 $N_G(P),C_G(P)$ 和 P 的中心 $Z(P)$ 。

解 由矩阵的乘法直接计算可知与任一 n 阶主对角线为 1 的上三角矩阵可换的矩阵必为上三角矩阵, 且形如

$$J_n(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & \mu\\ & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & \lambda & 0\\ & & & & \lambda\end{pmatrix},$$

其中 $\mu\in\mathbb{C}$. 要看出这一点, 只要取主对角线为 1 且 $(i,i+1)$ 处为 1 , 其余全为 0 的上三角矩阵即可, $i=1,\cdots,n-1$. 因此

$$C_G(P)=\{J_n(\lambda,\mu)\mid\lambda,\mu\in\mathbb{C},\lambda\neq 0\}.$$

由此即知 $Z(P)=\{J_n(1,\mu)\mid\mu\in\mathbb{C}\}$ 。下面求

$$\begin{aligned}N_G(P)&:=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid AP=PA\}\\&=\left\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid AJA^{-1}\subseteq P,A^{-1}JA\subseteq P,\forall J\in P\right\}.\end{aligned}$$

首先, 所有 n 阶上三角可逆矩阵均在 $N_G(P)$ 中. 我们断言: $N_G(P)$ 恰是所有 n 阶上三角可逆矩阵作成的群。设 A 是 n 阶可逆矩阵且 A 不是上三角的. 设 a_{ij} 是 A 中主对角线以下的非零元且 i 最大, 即

$$a_{ij}\neq 0,i>j;\ \text{且若}a_{st}\neq 0,s>t,\ \text{则}i\geqslant s.$$

令 J 是主对角线全为 1 且 $(j,j+1)$ 处为 1 , 其余全为 0 的矩阵. 则 AJ 是将 A 的第 j 列加到第 $j+1$ 列后得到的矩阵, 从而 AJ 不是上三角的.

下证 $A\notin N_G(P)$. 否则存在 $B\in P$ 使得 $AJ=BA$, 注意到 AJ 的第 $(i,j+1)$ 处元是

$$a_{i,j}+a_{i,j+1}.$$

但 BA 是对 A 施行一系列初等行变换得到的, 这些行变换是将大数行的若干倍加到小数行. 由 A 的选取知 BA 的 $(i,j+1)$ 处元与 A 的 $(i,j+1)$ 处元相同, 均为 $a_{i,j+1}$, 从而 $AJ\neq BA$, 矛盾. 所以 $A\notin N_G(P)$. 即 $N_G(P)$ 恰是所有 n 阶上三角可逆矩阵作成的群.

笔记 $N_G(P)=$ 所有上三角可逆矩阵是一个重要结论.

2.4 有限覆盖的思想

问题 2.4 G 有有限个子群，证明：G 是有限群.

证明 首先 G 的子群阶数都是有限的，否则 G 存在同构于 $\mathbb{Z}$ 的子群，而 $\mathbb{Z}$ 有无穷多个子群 $n\mathbb{Z}$. 其次，G 的循环子群的个数也是有限的，考虑

$$G=\bigcup_{a\in G}\langle a\rangle \tag{2.3}$$

右侧的循环子群个数是有限的，于是存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in G$，使得

$$G=\bigcup_{i=1}^{m}\langle a_i\rangle \tag{2.4}$$

循环子群 $\langle a_i\rangle$ 是有限群，有限群的有限并也是有限的. 于是 G 是有限的. □

第三章 微积分

3.1 第 6 届八一赛的变态积分

练习 1 设 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, 对 $0 < \alpha < \beta < 1$, 若

$$I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \frac{x+1}{x^2(x-1)^2}\left[(2n-3)x^{n+1} - (2n-1)x^n + 3x - 1\right] \mathrm{d}x.$$

求极限 $\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{\alpha} + \lim_{\beta\to 1^-} I(\alpha,\beta)\right)$.

解 注意到

$$(2n-3)x^{n+1} - (2n-1)x^n + 3x - 1 = (x-1)^2\left[(2n-3)x^{n-1} + \cdots + 3x^2 + x - 1\right],$$

而

$$(x+1)\left[(2n-3)x^{n-1} + \cdots + 3x^2 + x - 1\right] = (2n-3)x^n + 4(n-2)x^{n-1} + \cdots + 4x^2 - 1.$$

因此

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}\left[(2n-3)x^{n+1} - (2n-1)x^n + 3x - 1\right] = (2n-3)x^{n-2} + 4\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)x^{k-2} - \frac{1}{x^2}.$$

则不定积分为

$$F(x) \equiv \left(\frac{2n-3}{n-1}\right)x^{n-1} + 4\sum_{k=2}^{n-1}x^{k-1} + \frac{1}{x}$$

故

$$I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

由于

$$\lim_{\beta\to 1^-} F(\beta) = \frac{2n-3}{n-1} + 4(n-2) + 1 = \frac{4n^2-9n+4}{n-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \lim_{\beta\to 1^-} I(\alpha,\beta) &= \frac{1}{\alpha} + \lim_{\beta\to 1^-} F(\beta) - F(\alpha)\\ &= \left[\frac{4n^2-9n+4}{n-1}\right] - \left[\left(\frac{2n-3}{n-1}\right)\alpha^{n-1} + 4\sum_{k=2}^{n-1}\alpha^{n-1}\right].\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{\alpha} + \lim_{\beta\to 1^-} I(\alpha,\beta)\right) = \frac{4n^2-9n+4}{n-1}$$

练习 2 (i) 求二重积分 $\int_0^1\int_0^1 x\left\{\frac{1}{1-xy}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ＿＿＿，其中 $\{x\}$ 为 x 的小数部分.

(ii) 求定积分 $\int_0^{+\infty}\cos(2\pi x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\pi\coth(\pi x)}{x}\right)\mathrm{d}x=$ ＿＿＿

1. 考虑

$$(u,v)=\left(\frac{1}{1-xy},\frac{y}{x}\right).$$

对于 $0<x,y<1$, 则有 $u>1$ 和 $v>0$, 其逆变换可由

$$(x,y)=\left(\sqrt{\frac{u-1}{uv}}\cdot\sqrt{\frac{(u-1)v}{u}}\right).$$

其雅可比矩阵为

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2u^2v}\sqrt{\frac{uv}{u-1}} & -\frac{u-1}{2uv^2}\sqrt{\frac{uv}{u-1}}\\ \frac{v}{2u^2}\sqrt{\frac{u}{(u-1)v}} & \frac{u-1}{2u}\sqrt{\frac{u}{(u-1)v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2u^2v}.$$

而区域 $S=\{(x,y):0<x,y<1\}$ 被方程 $xy=\alpha\in(0,1)$ 所覆盖, 即 $u(1-\alpha)=1$. 故矩阵区域 S 映射为如下区域

$$\Sigma=\left\{(u,v):\frac{u-1}{u}<v<\frac{u}{u-1},1<u<\infty\right\}.$$

然后有

$$\begin{aligned}I=\int_0^1\int_0^1 x\left\{\frac{1}{1-xy}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_1^\infty\int_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{u}{u-1}}\sqrt{\frac{u-1}{uv}}\{u\}\frac{1}{2u^2v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\int_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{u}{u-1}}\sqrt{\frac{u-1}{u}}\{u\}\frac{1}{2u^2}v^{-3/2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

对 $n\le u<n+1$, 则有 $\{u\}=u-n$. 先对 v 积分, 可得到

$$\begin{aligned}I&=-\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\sqrt{\frac{u-1}{u}}(u-n)\frac{1}{u^2}\left[v^{-1/2}\right]_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{u}{u-1}}\,\mathrm{d}u\\&=-\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\sqrt{\frac{u-1}{u}}(u-n)\frac{1}{u^2}\left(\sqrt{\frac{u-1}{u}}-\sqrt{\frac{u}{u-1}}\right)\mathrm{d}u\\&=-\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}(u-n)\frac{1}{u^2}\left(\frac{u-1}{u}-1\right)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\left(u^{-2}-nu^{-3}\right)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n(n+1)^2}\\&=\frac12\sum_{n=1}^\infty\left[\frac1n-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac12\left[\sum_{n=1}^\infty\left(\frac1n-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}-1\right)\right]\\&=\frac12\left[1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\right]=1-\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

2. 首先

$$\sum_{n-1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to0}\frac{\pi a\coth(\pi a)-1}{2a^2}$$

当 $a=0$ 时恒等式成立, 假设 $a\neq0$, 若 $a>0$, 由于 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2+a^2}$ 是关于 a 的偶函数. 考虑

$$\int_0^{+\infty}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}$$

练习 3 对任意实数 $a>0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\sin(nx)\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-a(2k\pi+x)}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2k\pi a}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in(0,2\pi)$$

故

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a\coth(\pi a)-1}{2a^2}$$

因此可得

$$\frac{1}{a^2}-\frac{\pi\coth(\pi a)}{a}=-2\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

令 $f(t)=\int_0^{+\infty}\cos(\pi tx)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\pi\coth(\pi x)}{x}\right)\mathrm{d}x$, 即

$$f(t)=-2\int_0^{+\infty}\cos(\pi tx)\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x=-2\sum_{n-1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi tx)}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

考虑 $g(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, t>0$, 则 $g'(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 根据

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\sin(y)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y,\ \int_0^{+\infty}\cos(tx)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x=\frac{y}{y^2+t^2}$$

可得到

$$\begin{aligned}g(t)&=\int_0^{+\infty}\cos(tx)\int_0^{+\infty}\sin(y)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\sin(y)\int_0^{+\infty}\cos(tx)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(y)}{y^2+t^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(ty)}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=-g'(t).\end{aligned}$$

因此 $g'(t)=-g(t), t>0$, 即 $g(t)=C\mathrm{e}^{-t}$. 由于 $0\le 1-\cos(x)\le 2\sqrt{x}, \forall x\ge 0$, 即

$$0\le\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\le 2\sqrt{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 即 $\lim_{t\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=0$. 故可得

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{t\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

即 $C=\frac{\pi}{2}$, 则 $g(t)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t}$. 因此

$$f(t)=-2\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(n\pi ty)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=-2\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}\mathrm{e}^{-nt\pi}=-\pi\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nt\pi}}{n}=\pi\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t\pi}\right).$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\cos(2\pi x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\pi\coth(\pi x)}{x}\right)\mathrm{d}x=f(2)=\pi\ln\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi}\right)$$

练习 4 设 x 为实数, 且 $|x|<1$, 求下列无穷级数:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x-\cdots-nx^{n-1}\right]=?$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x-\cdots-nx^{n-1}\right]^2=?$.

解 利用

$$\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{r}x^k \quad (|x|<1)$$

对 $r=0,1,2$ 和

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)x^k&=x^n\sum_{k=0}^{\infty}(n+k+1)x^k=x^n\left(n\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)\\&=x^n\left(\frac{n}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)=\frac{x^n(1+(1-x)n)}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x-\cdots-nx^{n-1}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)x^k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1+(1-x)n)}{(1-x)^2}\\&=\frac{x}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{x}{(1-x)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\&=\frac{x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^3}=\frac{2x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

同时可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x-\cdots-nx^{n-1}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)x^k\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}(1+(1-x)n)^2}{(1-x)^4}\\&=\frac{x^2}{(1-x)^4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}+2(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}+(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\binom{n+2}{2}-(n+1)\right)x^{2n}\right]\\&=\frac{x^2}{(1-x)^4}\left[\frac{1}{(1-x^2)}+\frac{2(1-x)}{(1-x^2)^2}+(1-x)^2\left(\frac{2}{(1-x^2)^3}-\frac{1}{(1-x^2)^2}\right)\right]\\&=\frac{x^2}{(1-x)^4}\left[\frac{1}{(1-x)(1+x)}+\frac{2}{(1-x)(1+x)^2}+\frac{1+y^2)}{(1-x)(1+x)^3}=\frac{x^2\left(2x^2+4x+4\right)}{(1-x)^5(1+x)^3}\right.\end{aligned}$$

练习 5 求微分方程 $y''-y=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$ 的通解

解 本题是一个常系数二阶线性非齐次微分方程, 首先求出齐次方程的通解. 由于特征方程为 $\lambda^2-1=0$, 即 $\lambda=\pm1$, 所以齐次方程的通解是

$$y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}.$$

再求非齐次方程的一个特解. 这里采用常数变易法, 设特解为如下的形式

$$y_*(x)=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)\mathrm{e}^{-x},$$

其中 $C_1(x),C_2(x)$ 是两个待定的 $\mathbb{C}^2$ 函数, 对 $y_*(x)$ 求导可得

$$y_*'(x)=C_1(x)\mathrm{e}^x-C_2(x)\mathrm{e}^{-x}+C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

令

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0. \tag{3.1}$$

于是

$$y_*''(x)=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)\mathrm{e}^{-x}+C_1'(x)\mathrm{e}^x-C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}. \tag{3.2}$$

代人方程可得

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x-C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}.$$

然后联立 3.1 和 3.2 得到如下方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x-C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right), \\ C_2'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} C_1(x)=c_1+\int_{+\infty}^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^3}\right)\mathrm{d}t=c_1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right), \\ C_2(x)=c_2+\int_{+\infty}^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\left(\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=c_2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right). \end{cases}$$

综上, 原方程的解为

$$y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{x}$$

练习 6 设 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的区域 $D(\alpha)$ 如下:

$$D(\alpha) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1, x+y \leqslant 2(1-\alpha)\right\}.$$

令 $I(\alpha) = \iint_{D(\alpha)} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 计算 $I(\alpha)$ 并求 $\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

解

(5) 首先由 $0 \leqslant x+y = 2u \leqslant 2(1-\alpha)$ 知, $0 \leqslant u \leqslant 1-\alpha$, 利用变量代换 $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+y) \\ v = \frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$,

可得 $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$, 且 $|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \frac{1}{2}$, 故 $\varphi(\alpha) : \begin{cases} 0 \le u+v \le 1 \\ 0 \le u+v \le 1 \\ 0 \le u \le 1-\alpha \end{cases}$, 所以

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \iint_{D(\alpha)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy} = \iint_{\varphi(\alpha)} \frac{2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1-u^2+v^2} \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2+v^2} + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \mathrm{d}u \int_{u-1}^{1-u} \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2+v^2} \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \int_0^{u} \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2+v^2} + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \mathrm{d}u \int_0^{1-u} \frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2+v^2} \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= I_1(\alpha) + I_2(\alpha).
\end{aligned}$$

利用分部积分得到

$$I_1(\alpha) = 4\arcsin\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - 2(\arcsin u)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$I_2(\alpha) = 4\arcsin(1-\alpha)\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}} - 4\arcsin\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + (\arcsin u)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}$ 因此

$$I(\alpha) = 4\arcsin(1-\alpha)\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}} + (\arcsin(1-\alpha))^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

令 $u = 1-\alpha$ 得 $4\arcsin(1-\alpha)\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}} = 4\arcsin u \arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$ $u = \sin\theta$ 得 $\sqrt{1-u^2} = \cos\theta$, 所以

$$\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u\right).$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u$$

因此 $4\arcsin u \arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = 4\arcsin u\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u\right) = \pi\arcsin u - 2(\arcsin u)^2$. 故

$$I(\alpha) = \pi\arcsin(1-\alpha) - (\arcsin(1-\alpha))^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

所以有

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = \pi\lim_{\alpha\to 0^+}\arcsin(1-\alpha) - \lim_{\alpha\to 0}(\arcsin(1-\alpha))^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

3.2 Trigamma 函数

第四章 解析几何

4.1 平面与二次曲面截面为抛物线

引理 4.1

平面 $\Pi: ax+by+cz+d$ 与双叶双曲面 $\Sigma: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ 的截口曲线为抛物线当且仅当

$$a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2=0 \text{ 且} d\neq 0$$

♡

笔记 原题与证明见此

笔记 证明似乎写错了符号，但是无伤大雅。

4.2 二次曲线类型判定

解析几何（第三版）(丘维声) (z-lib.org).pdf#page=177&rect=23,97,375,180| 解析几何（第三版）(丘维声) (z-lib.org), p.154

笔记 可以通过旋转和平移将二次曲线方程化简为标准形式，由此确定曲线的类型。但是，在不少问题中，常常希望直接从原二次方程的系数来判别它代表的曲线的类型和形状。

平面上二次曲线的一般方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

用矩阵表示为

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_1\\a_{12}&a_{22}&a_2\\a_1&a_2&a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

也可以写为

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+a_0=0$$

其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$. 记 $A_0=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_1\\a_{12}&a_{22}&a_2\\a_1&a_2&a_0\end{pmatrix}$.

通过坐标变换，我们可以把二次曲线方程化简为

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\frac{\det A_0}{\det A}=0$$

其中 λ_1,λ_2 是 A 的特征值。

可以做出如下判断：

- 二次曲线是椭圆当且仅当 $\det A>0$ 且 $\det A_0$ 与 $\mathrm{Tr}(A)$ 异号。
- 二次曲线是双曲线当且仅当 $\det A<0$ 且 $\det A_0\neq 0$。
- 二次曲线是抛物线当且仅当 $\det A=0$ 且 $\det A_0\neq 0$。

第五章 点集拓扑

5.1 几种连通

- Path connected spaces are always connected, but not all connected spaces are path connected.
- Locally path connected spaces are always path connected, and therefore also connected.
- However, a space can be connected but not path connected, and a space can be path connected but not locally path connected.

笔记 A simply connected space is a space without "holes".

5.2 几种拓扑下的收敛

$\mathbb{R}^\omega$ 上 box top, product top, uniform top 下的序列收敛差异

第六章 范畴论

6.1 sup inf 与 inf sup

命题 6.1

对于任意集合 X,Y 和任意函数 $f:X\times Y\to\mathbb{R}$，下面的 sup 和 inf 存在时，有

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

笔记 并且 $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \ge \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$ 是证不出来的。

证明

$$f(x,y)\le \sup_{x\in X} f(x,y), \forall x\in X, \forall y\in Y \implies \inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y), \forall x\in X \implies \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y)\le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

□

给出一个 $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) < \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$ 的例子：

取 $f(x,y)=\begin{cases}0 & x<y\\ 1 & x\ge y\end{cases}$，于是

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) = \sup_{x\in X} 0 = 0 < 1 = \inf_{y\in Y} 1 = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

引理 6.1

对任意有极限和余极限存在的双函子 $F:\mathsf{I}\times\mathsf{J}\to\mathsf{C}$，存在典范映射

$$\kappa : \operatorname*{colim}_{i\in\mathsf{I}}\lim_{j\in\mathsf{J}} F(i,j) \to \lim_{j\in\mathsf{J}}\operatorname*{colim}_{i\in\mathsf{I}} F(i,j)$$

命题6.1是引理6.1的显然结果，考虑偏序集范畴，其中极限为 inf，余极限为 sup，显然命题6.1得证。

A functor $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ defines a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of real numbers.

The lim sup and lim inf is defined by regarding the sequences as a bifunctor $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\xrightarrow{+}\mathbb{N}\xrightarrow{x}\mathbb{R}$ indexed by the discrete category $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\ge 0}\inf_{m\ge n} x_m = \sup_{n\ge 0}\inf_{m\ge 0} x_{n+m} = \operatorname*{colim}_{n}\lim_{m} x_{n+m}$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\ge 0}\sup_{m\ge n} x_m = \inf_{m\ge 0}\sup_{n\ge 0} x_{n+m} = \lim_{n}\operatorname*{colim}_{m} x_{n+m}$$

Having translated these analytic notions into categorical ones, Lemma 6.1 applies in the form of an inequality:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

The limit of this sequence exists if and only if this inequality is an equality.

6.2 f,f^{-1} 下的 $\cap,\cup$

命题 6.2

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_a\right)=\bigcup_{o\in I} f\left(A_a\right)$$

$$f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_a\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I} f\left(A_a\right)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_a\right)=\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}\left(B_\alpha\right)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_a\right)=\bigcap_{a\in I} f^{-1}\left(B_a\right)$$

笔记 因为 f 只有右伴随，而 f^{-1} 有左伴随和右伴随，因为左伴随保持余极限，右伴随保持极限，所以 f 保持任意并，不保持任意交，f^{-1} 保持任意交和任意并。

下面给出 $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_a\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I} f\left(A_a\right)$ 真包含的例子：

取 $f(x)=\chi_{\{0\}}(x), A_n=[0,\frac{1}{n}]$，于是

$$f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)=f(0)=1,\qquad \bigcap_{n\geq 1} f\left(A_a\right)=\bigcap_{n\geq 1}\{0,1\}=\{0,1\}$$