中山大学
SUN YAT-SEN UNIVERSITY
中国·广州市新港西路135号
Http://www.sysu.edu.cn
邮编：510275

~~余泽华 23363017~~

阿贝尔第二定理：

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$，则有下列结论：

(1). 对任意 $0<s<r$，幂级数在区间 $[-s,s]$ 上一致收敛.

(2) 如果幂级数 $x=r$ 处收敛，则它在 $[0,r]$ 上一致收敛；如果在 $x=-r$ 处收敛，则它在 $[-r,0]$ 上一致收敛.

习题 12.2.

Ex 1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$. 证明阿贝尔第二定理的下述逆命题：

(1) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-r,r)$ 一致收敛，则它的收敛域为 $[r,r]$.

(2). 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(0,r)$ 一致收敛，而在 $(-r,0)$ 上不一致收敛，则它的收敛域为 $(-r,r]$. 反之亦然

Proof: (1). $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in[-r,r]} \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n\right| = \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in(-r,r)} \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n\right| < \infty$

故收敛域为 $[-r,r]$

(2). 类似 (1) 可知：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,r]$ 一致收敛，收敛域包含 r.
若收敛域包含 $-r$，即收~~敛~~敛域为 $[-r,r]$，则由阿贝尔第二定理 (2) 知：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,0]$ 一致收敛，矛盾！
故收~~敛~~敛域为 $(-r,r]$

□

Thm 12.2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$. 收敛域为 I，和函数：$S(x)$. 逐项求导得 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

其收敛半径为 r_1. 收敛域 I_1. 和函数 $S_1(x)$. 则有：

(1). $r_1 = r$.

(2). $I_1 \subseteq I$

(3) $S'(x) = S_1(x)$. $\forall x \in I_1$

Ex 5. 设级数 $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛. 证明：

(i) 幂级数 ~~收敛半~~ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $r \geq 1$

(ii) 在 $x=1$ 处收敛

(iii) 和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左可导

(iv). $S'_-(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$

Proof: (i). 对于 $S_1(x)$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = S_1(1)$ 收敛. 故 $r_1 \geq 1$. 于是 $r = r_1 \geq 1$.

(ii). $\{1\} \subseteq I_1 \subseteq I$. 故 $S(x)$ 在 $x=1$ 处收敛.

(iii). $S'_-(1) = S_1(1)$. (since. $1 \in I_1$). 故. $S(x)$ 在 $x=1$ 左可导

(iv). ~~由于~~ $S'_-(1) = S_1(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$

□

Ex 6. 利用逐项微（积）分求下列幂级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} =: f(x)$ $\qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$，若 $|x|<1$.

$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$.

$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛域为 $[-1,1)$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \begin{cases}\frac{1}{1-x}, & |x|<1\\ -\ln 2, & x=-1\end{cases}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)x^n$. $\cancel{= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n}$.

$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x^n =: 2f(x) + g(x)$

$f(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n+1} = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{1+x} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ 若 $|x|<1$.

于是 $f(x)$ 收敛域为 $(-1,1)$

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n = \frac{-x}{1+x}$ 收敛域为 $(-1,1)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)x^n = 2f(x)+g(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ 收敛域为 $(-1,1)$

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty}x^n =: f(x) - 3g(x) + h(x)$

$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2} = \frac{d^2}{dx^2}\frac{x^3}{1-x} = -\frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$ 若 $|x|<1$

$g(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{1-x} = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ 若 $|x|<1$

$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$. 若 $|x|<1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 收敛域为 $(-1,1)$. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$. $|x|<1$.

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY
中国·广州市新港西路135号
Http://www.sysu.edu.cn
邮编：510275

(5). $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n-1)} =: f(x^2)$. $\quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \quad f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x).$$ ~~收敛域为~~

$$f(x) = \int -\ln(1-x)dx = -x\ln(1-x) + \int x \, d\ln(1-x)$$

$$= -x\ln(1-x) + \int \frac{-x}{1-x} dx$$

$$= -x\ln(1-x) + \int \frac{1-x}{1-x} - \frac{1}{1-x} dx$$

$$= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)$$

$$= (1-x)\ln(1-x) + x.$$ ~~收敛~~ 收敛半径为 1

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n-1)} = f(x^2) = (1-x^2)\ln(1-x^2) + x^2. \quad |x|<1.$$

$x=1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1)^{2n}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$

$x=-1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n-1)}$ 收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n-1)} = \begin{cases} (1-x^2)\ln(1-x^2) + x^2, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1. \end{cases}$$

8.(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ ，考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}$. $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n=\frac{1}{1-x^3}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-2}}{3n-2}=-f(-1)=-\frac{1}{2}$.

8.(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}$. 考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3-x}$

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{3^n}$. 同时 $f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{3-x}=\frac{1}{(3-x)^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}=f'(1)=\frac{1}{4}$

8.(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ ~~考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$~~

~~考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(x)=-\ln(1-x)$~~

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\infty}e^{-(2n-1)t}dt \xlongequal{控制收敛定理} \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-2tn+t}dt$$

$$=-\int_0^{\infty}e^{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-2t})^n dt=-\int_0^{\infty}e^{t}\cdot\frac{(-e^{-2t})}{1+e^{-2t}}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}dt=-\int_0^{\infty}\frac{1}{1+e^{-2t}}de^{-t}=-\int_0^{\infty}d\arctan e^{-t}$$

$$=-\arctan e^{-t}\Big|_0^{\infty}=\arctan 1-\arctan 0=\pi/4.$$

8.(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ 考虑 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$, $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t\,d\cos t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,d\sin^{n-1}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}t\cos^2 t\,dt=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\,dt-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$\Rightarrow I_n/I_{n-2}=\frac{n-1}{n}$ $\Rightarrow$ $I_{2n}=I_0\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt \xlongequal{控制收敛定理} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin^{2n}t}{2n+1}dt$$

考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n+1}$. $\frac{d}{dx}[xf(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=-\frac{-x^2}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$

$xf(x)=0\cdot f(0)+\int_0^x\frac{d(xf(x))}{dx}dx=\int_0^x 1-\frac{1}{1+x^2}dx=x-\arctan x\Rightarrow f(x)=1-\frac{\arctan x}{x}$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}dt=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}dt.$$

求积分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}dt$. 设 $g(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\sin t)}{\sin t}dt$. 控制收敛定理

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}g(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(a\sin t)}{\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\sin^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{(a^2+1)\sin^2 t+\cos^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\tan^2 t}{1+(a^2+1)\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(a^2+1)\tan^2 t}d\tan t=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow g(a)=g(0)+\int_0^1}\Rightarrow J=g(1)=g(0)+\int_0^1\frac{\partial g(a)}{\partial a}da=g(0)+\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}da=\frac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}=1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})=1-\ln(1+\sqrt{2})$$