微分几何

乐绎华

学号：23363017

2025 年 4 月 4 日

0.1 空间曲线

0.1.1 正则曲线，弧长参数，单位切向量，曲率，主法向量，次法向量，挠率，Frenet 公式

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲线 $(\boldsymbol{r}'(t) \neq 0)$ $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$，引进参数 s 使得

$$s = s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)| \, dt$$

s 被称为曲线 C 的 (弧长参数. 一个显然的事实是，正则曲线 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 的参数 t 为正则参数的特征是 $|\boldsymbol{r}'(t)| \equiv 1$. 一般的计算中，$t$ 未必是弧长参数.

关于空间曲线的理论，最重要的是沿曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 定义的 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ 和 Frenet 公式.

假定空间曲线 C 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，其中 s 是弧长参数，那么它的

单位切向量：

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$$

曲率：

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{\alpha}'(s)| = |\boldsymbol{r}''(s)|$$

曲率非零时，主法向量：

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(s)}{|\boldsymbol{\alpha}'(s)|} = \frac{\boldsymbol{r}''(r)}{|\boldsymbol{r}''(r)|}$$

次法向量：

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$$

挠率：

$$\tau(s) = -\boldsymbol{\gamma}'(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s)$$

曲线的 Frenet 公式是

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}'(s) &= \boldsymbol{\alpha}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s), \\ \boldsymbol{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \\ \boldsymbol{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s), \end{cases}$$

上式都是关于弧长参数 $s = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$ 的导数.

0.1.2 转化为关于 t 的方程

要转化为关于 t 的方程，可以使用复合函数求导公式自行爆算，下面给出结果

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)s'(t)$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = \kappa(t)\boldsymbol{\beta}(t)(s'(t))^2 + \boldsymbol{\alpha}(t)s''(t)$$

$$\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) = \kappa(t)(s'(t))^3\boldsymbol{\gamma}(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\alpha}(t)$$

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2}$$

Théorème 1 (空间曲线基本定理)**.** *给定两个连续可微函数 $\kappa(s), \tau(s)$ 其中 $\kappa(s) > 0$，则在三维欧式空间中存在一条空间曲线，以 s 为弧长参数，以 $\kappa(s)$ 为曲率，以 $\tau(s)$ 为挠率，并且这样的曲线的形状是完全确定的.*

Remarque 1. *在给定 $\kappa(s), \tau(s)$ 的情况下，Frenet 公式构成了向量 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的微分方程组，可以求解.*

0.1.3 切触阶

两条相交曲线在交点附近的接近程度是用所谓的**切触阶**来刻画的.

0.1.4 平面曲线

平面曲线可以看作空间曲线的特例，即 $\tau(s) \equiv 0$ 的空间曲线. 空间曲线求曲率 $\kappa(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|$ 的公式照用. 特别的是，平面本身**有定向**，将其单位切向量正向 (逆时针) 旋转 90° 便得到法向量 (唯一确定). 于是

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = (x'(s), y'(s))$$

正向旋转 90° 得到[1]

$$\boldsymbol{\beta}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

相对曲率

$$\kappa_r(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)$$

相对曲率 κ_r 与曲率 κ 的关系是 $\kappa_r = \pm\kappa$. 正号表示曲线朝着 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 的方向弯曲，负号表示曲线的主法向量为 $-\boldsymbol{\beta}(s)$.

0.1.5 例题

已知参数方程求曲线方程

已知一般方程求参数方程

已知曲线方程求曲线曲率、挠率、Frenet 标架

已知参数方程，直接套公式爆算：

例题 2.4 求圆螺旋线 $\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 的曲率、挠率和它的 Frenet 标架，其中 a, b 是常数，且 $a > 0$.

已知一般方程：

例题 2.5 求曲线 C

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$$

在 $(0,0,1)$ 处的曲率 κ, 挠率 τ 和 Frenet 标架.

[1]不一定是主法向量

直接通过对方程求导，求解出 $\boldsymbol{r}'(0), \boldsymbol{r}''(0), \boldsymbol{r}'''(0)$.

解 这是例题 2.2 考虑过的曲线. 解此题的方法有两种. 一种方法是把该曲线在点 $(0,0,1)$ 的邻域内的部分用参数方程表示出来，然后按照例题 2.4 的办法进行计算. 但是，有时候用参数方程表示两个曲面的交线比较复杂，涉及解函数方程. 因此，我们在此介绍第二种方法.

求解新曲线的曲率、挠率、Frenet 标架

例题 2.6 已知 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是一条正则参数曲线， s 是它的弧长参数，其曲率 $\kappa(s) > 0$ 和挠率 $\tau(s) > 0$, $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 是沿曲线 C 的 Frenet 标架场. 作一条新的曲线 $\tilde{C}$:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{\beta}(s)\mathrm{d}s.$$

求曲线 $\tilde{C}$ 的曲率 $\tilde{\kappa}$ 、挠率 $\tilde{\tau}$ 和 Frenet 标架场 $\{\tilde{\boldsymbol{r}}(s); \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s), \tilde{\boldsymbol{\beta}}(s), \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$.

例题 2.7 在上面例题关于曲线 C 的假设下，求它的切线的球面标线 $\tilde{C}$:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s)$$

的曲率 $\tilde{\kappa}$ 、挠率 $\tilde{\tau}$ 和 Frenet 标架场.

特定曲线满足曲率挠率关系式

例题 2.9 设曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 都不为零，s 是弧长参数. 如果该曲线落在一个球面上，则它的曲率和挠率必满足关系式

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2 = \text{常数}.$$

例题 2.10 假定 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是以 s 为弧长参数的正则参数曲线，它的挠率不为零，曲率不是常数，并且下面的关系式成立：

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2 = R_0^2 = \text{常数},$$

证明该曲线落在一个球面上.

已知曲率挠率，求解曲线参数方程

例题 2.11 求曲率和挠率分别是常数 $\kappa_0 > 0, \tau_0$ 的曲线的参数方程.

根据曲线论基本定理具有这样常数曲率 $\kappa_0 > 0$ 和挠率 τ_0 的曲线必定是圆螺旋线

$$\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad a > 0, b \text{ 是常数}$$

Remarque 2. 本题也可以根据 *Frenet* 标架直接求解微分方程组.

求密切圆

例题 2.12 假定 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是以 s 为弧长参数的正则参数曲线，它的曲率处处不为零．求与它在 $s=s_0$ 处有最高切触阶的圆周．

解 此题的关键在于如何表示三维欧氏空间中的圆周．假定圆心的位置向量是 $\boldsymbol{c}$, 半径是 R, 要写出它的参数方程需要在它所在的平面上取两个彼此正交的单位向量，设为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 此时该圆周的参数方程是

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{c}+R\left(\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{a}+\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{b}\right),$$

显然 s 是该圆周的弧长参数.

为简单起见，设 $s_0=0$, 并且记曲线 C 在该点的 Frenet 标架是 $\{\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0\}$, 曲率是 κ_0, 挠率是 τ_0. 对于与已知曲线在 $s=0$ 处相交的圆周, 设圆心的位置向量是 $\boldsymbol{c}$, 取 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{c})/R$, 其中 $R=|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{c}|$, $\boldsymbol{b}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 正交的单位向量．因此该圆周 $\tilde{C}$ 的参数方程是

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{c}+R\left(\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{a}+\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{b}\right),$$

其中 s 是该圆周的弧长参数．两条相交的曲线在交点处有 n 阶切触的条件是它们的参数方程在该点有相同的直到 n 阶的关于弧长参数的各阶导数．已知

$$\boldsymbol{r}'(0)=\boldsymbol{\alpha}_0,\quad \boldsymbol{r}''(0)=\kappa(0)\boldsymbol{\beta}_0,$$

以下记 $\kappa_0=\kappa(0)$. 然而关于圆周 $\tilde{C}$ 有

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}(0)=&\boldsymbol{r}_0,\qquad \tilde{\boldsymbol{r}}'(0)=\boldsymbol{b},\\ \tilde{\boldsymbol{r}}''(0)=&-\frac{1}{R}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{r}_0|^2},\end{aligned}$$

于是由条件

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'(0) = \boldsymbol{r}'(0), \quad \tilde{\boldsymbol{r}}''(0) = \boldsymbol{r}''(0)$$

得到

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\alpha}_0, \quad R = \frac{1}{\kappa_0}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\beta}_0.$$

所以它是落在曲线 C 在点 $s=0$ 的密切平面上、半径为 $1/\kappa_0$ 、与曲线 C 在点 $s=0$ 处相切的圆周，它与曲线 C 在 $s=0$ 处至少有二阶切触，称为原曲线在该点的曲率圆，或密切圆.

求密切球

例题 2.13 设 C： $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是曲率和挠率都不为零的正则参数曲线， s 是弧长参数，求与曲线 C 在点 $s = s_0$ 处有最高阶切触的球面.

求渐伸线和渐缩线参数方程

例题 2.15 如果在曲线 C_1 和 C_2 之间存在一个对应，使得曲线 C_1 在任意一点的切线恰好是曲线 C_2 在对应点的法线，则称曲线 C_2 是 C_1 的渐伸线，同时称曲线 C_1 是 C_2 的渐缩线. 设正则参数曲线 C 的参数方程是 $\boldsymbol{r}(s)$, s 是弧长参数，求曲线 C 的渐伸线的参数方程.

解 设

$$\boldsymbol{r}_1(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s)$$

是曲线 C 的渐伸线，因此曲线 C 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 应该是曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 的法向量. 对上式求导得到

$$\boldsymbol{r}_1'(s) = (1+\lambda'(s))\boldsymbol{\alpha}(s) + \lambda(s)\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s),$$

将上式两边与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 作点乘得到

$$1+\lambda'(s) = \boldsymbol{r}_1'(s)\cdot\boldsymbol{\alpha}(s) = 0,$$

因此

$$\lambda(s) = c - s,$$

故所求的曲线 C 的渐伸线是

$$\boldsymbol{r}_1(s) = \boldsymbol{r}(s) + (c-s)\boldsymbol{\alpha}(s),$$

其中 c 是任意常数.

如果曲线 C 的参数是一般参数 t, 则曲线 C 的渐伸线是

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}(t) + (c-s(t))\boldsymbol{\alpha}(t).$$

曲线的渐伸线可以看作该曲线的切线族的正交轨线，而渐伸线的表达式可以解释为：将一条软线沿曲线放置，把一端固定，另一端慢慢离开原曲线，并且把软线抻直，使软线抻直的部分始终保持为原曲线的切线，则这另一端描出的曲线就是原曲线的渐伸线.

例题 2.16 设正则参数曲线 C 的参数方程是 $\boldsymbol{r}(s)$, s 是弧长参数，则 C 的渐缩线的参数方程是

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\beta}(s)-\frac{1}{\kappa(s)}\left(\tan\int\tau(s)\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{\gamma}(s).$$

注记 如果 C 是平面曲线，则 C 的渐缩线是

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\beta}(s).$$

所以 C 的渐缩线是 C 的曲率中心的轨迹. 此时，曲率 κ 可以换成相对曲率 κ_r, 而主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 应该相应地换成单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 绕正向旋转 90° 得到的法向量.

0.2 曲面第一基本形式

参考微分几何例题详解和习题汇编 • 陈维恒.

正则参数曲面[2] S 是满足 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$ 的连续可微映射

$$\boldsymbol{r}:D\subset E^2\to E^3\qquad (u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

S 在每一点处有确定的标架 $\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v),\boldsymbol{n}(u,v)\}$，其中

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)}{|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|}$$

称一个变换 $(\widetilde{u},\widetilde{v})\to(u,v)$ 为正则参数变换，若

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}\neq 0$$

而且有足够的可微性.

$$\mathrm{I}=d\boldsymbol{r}(u,v)\cdot d\boldsymbol{r}(u,v)=E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2$$

[2] 正则曲面是二维流形的例子，曲面的每一个正则参数表示给出了一个局部坐标系

其中 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u, G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v, F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v$.

0.2.1 直纹面

直纹面可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$$

其中 $\boldsymbol{a}(u)$ 是直纹面的准现，$\boldsymbol{l}(u)$ 是直母线的方向向量.

可展曲面

可展曲面是一种特殊的直纹面. 它的切平面沿每一条直母线是不变的. 曲面 S 是可展曲面的充要条件是

$$(\boldsymbol{a}'(u),\boldsymbol{l}(u),\boldsymbol{l}'(u))=0$$

0.2.2 例题

参数化曲面

直纹面的参数方程

Exercice 1. *例题 3.2 写出单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 作为直纹面的参数方程.*

直接强行因式分解即可.

验证曲面的正则性

例题 3.3 在球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 上，命 $N=(0,0,1)$，$S=(0,0,-1)$. 对于赤道平面上的任意一点 $p=(u,v,0)$, 可以作唯一的一条直线经过 N, p 两点，它与球面有唯一的交点，记为 p'.

(1) 证明：点 p' 的坐标是

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\quad z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

并且它给出了球面上去掉北极 N 的剩余部分的正则参数表示;

验证曲面的可定向性

(2) 求球面上去掉南极 S 的剩余部分的类似的正则参数表示;

(3) 求上面两种正则参数表示在公共部分的参数变换;

(4) 证明球面是可定向曲面.

判断正则参数曲面是球面的一部分

Exercice 2. *例题 3.5 证明：一个正则参数曲面是球面的一部分的充分必要条件是，它的所有法线都经过一个固定点.*

必要性显然，下面考虑充分性：假定曲面 S 的所有法线都经过一个固定点 $\boldsymbol{c}_0$, 即存在函数 $\lambda(u,v)$ 使得

$$\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda(u,v)\boldsymbol{n}(u,v)=\boldsymbol{c}_0 \tag{1}$$

下面证明 $\lambda(u,v)$ 是常值函数. 将 **??** 分别对 u,v 求导数得到

$$\boldsymbol{r}_u+\lambda\boldsymbol{n}_u+\lambda_u\boldsymbol{n}=0 \qquad \boldsymbol{r}_v+\lambda\boldsymbol{n}_v+\lambda_v\boldsymbol{n}=0 \tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 是切向量，又因为单位向量函数 $\boldsymbol{n}$ 的偏导数必定与其它自身正交，因此用 $\boldsymbol{r}$ 与 **??** 做内积得到 $\lambda_u=\lambda_v=0$. 这说明 $\lambda(u,v)=\lambda_0$，于是

$$\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{c}_0=\lambda_0\boldsymbol{n}(u,v)$$

因此 $|\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{c}_0|^2=\lambda_0^2$.

旋转面的充要条件

Exercice 3. *例题 3.6 证明：旋转面的法线必定与旋转轴平行或相交；反过来，如果一个正则参数曲面的所有法线都与一条固定的直线相交，则它必定是旋转面.*

必要性显然. 因为旋转面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$$

其中 $f(u)>0,f'^2(u)+g'(u)>0$.

充分性的证明需要发挥一点几何想象力．不妨假定曲面 S 的所有法线都经过 z 一轴，用一个通过 z 一轴，并且与 Oxz 平面的夹角为 v 的平面截曲面 S，其截线的参数方程可以假设为 $(u\cos v, u\sin v, g(u,v))$，这就是说该截线上的点到 z 一轴的距离是 u，到 Oxy 平面的距离是 $g(u,v)$，这里 u 是该截线上的参数，v 是任意的固定值．现在要证明：函数 $g(u,v)$ 与 v 无关，因而该曲面 S 就是一个旋转面.[3]

已知参数方程求第一基本形式

Exercice 4. *例题 3.10 设球面的参数方程是（参看例题 3. 3（1））*

$$r=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right),$$

求它的第一基本形式.

直接计算 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u, F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v, G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$.

在球面上求与经线成固定角的轨线方程

例题 3.12 在球面上求与经线相交成固定角的轨线的方程.

解 由于现在要求的是与经线相交成固定角的轨线，因此将球面看作旋转面写出它的参数方程比较方便．设球面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u),$$

对它求偏导数得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u &=(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u),\\ \boldsymbol{r}_v &=(-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0),\end{aligned}$$

因此

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=a^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=a^2\cos^2 u.$$

[3] 很明显，当 v 变化时，上面的截线就扫出曲面 S.

根据球面的参数方程, 其经线是 u-曲线, 它的切方向是 $(\delta u, \delta v) = (1, 0)$. 假定球面上的曲线 C 的切方向是 $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$, 它与经线的夹角余弦是

$$\begin{aligned}\cos\theta =& \frac{E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v}{\sqrt{E}\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2}} \\ =& \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(\mathrm{d}u)^2 + \cos^2 u(\mathrm{d}v)^2}},\end{aligned}$$

所以曲线 C 所满足的微分方程是

$$c^2(\mathrm{d}u)^2 = (\mathrm{d}u)^2 + \cos^2 u(\mathrm{d}v)^2, \quad \text{常数 } c^2 \geq 1,$$

解方程得到

$$\begin{aligned}v &= \pm\sqrt{c^2-1}\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \pm\sqrt{c^2-1}\ln\left(\frac{1+\sin u}{\cos u}\right) + c_1 \\ &= \pm\sqrt{c^2-1}\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + c_1.\end{aligned}$$

正交化参数曲面网

例题 3.13 改写曲面

$$\boldsymbol{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$$

的参数方程，使得它的参数曲线网是正交曲线网.

先写成第一基本形式，然后再配方换元.

求单参数平面族的包络

Exercice 5. 求单参数平面族的包络:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1$$

命

$$F(x, y, z, \alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1$$

则

$$F_\alpha(x, y, z, \alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha$$

将方程组 $F=0, F_\alpha=0$ 中的参数 α 消去得到

$$x^2+(y-z)^2=1$$

这是一张柱面，属于可展曲面的一种．写成参数方程的形式是

$$r=(\cos u, \sin u+v, v)=(\cos u, \sin u, 0)+v(0,1,1)$$

0.3 曲面第二基本形式

曲面第一基本形式描写曲面上与度量有关的性质，曲面第二基本形式描写曲面的形状.

设曲面 S 的参数方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$，其单位法向量为 $\boldsymbol{n}(u, v)$，则曲面的第二基本形式为

$$\mathrm{II}=L(du)^2+2Mdudv+N(dv)^2$$

其中

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u, \quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u$$

在计算系数 L, M, N 时，必须用**单位法向量** $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$. 初学者容易犯用 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 代替 $\boldsymbol{n}$ 的错误.

法曲率：

$$\kappa_n=\frac{L(\mathrm{~d}u)^2+2M\mathrm{~d}u\mathrm{~d}v+N(\mathrm{~d}v)^2}{E(\mathrm{~d}u)^2+2F\mathrm{~d}u\mathrm{~d}v+G(\mathrm{~d}v)^2}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$$

正则参数曲面在任意一个固定点，其法曲率必定在两个彼此正交的切方向上分别取最大值和最小值.曲面在一个固定点处沿各个切方向的法曲率的最大值和最小值称为曲面在该点的**主曲率**，记为 κ_1, κ_2 ，达到这最大值和最小值的切方向称为曲面在该点的主方向．这个事实可以通过直接计算来证实（参看例题 4．5）．若曲面在 p 点的两个彼此正交的主方向单位向量是 e_1, e_2 ，对应的**主曲率**是 κ_1, κ_2 ，则曲面在点 p 沿着与主方向 e_1 的夹角为 θ 的切方向的法曲率是

$$\kappa_n(\theta)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta,$$

这就是著名的 **Euler 公式.**

Gauss 曲率为 $\kappa_1\cdot\kappa_2$.

0.3.1 求解主曲率和主方向

7. 求主曲率和主方向的具体做法如下：设有实数 λ 和非零切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 使得

$$W(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = -\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \lambda \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

即

$$-(\boldsymbol{n}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{n}_v \mathrm{d}v) = \lambda(\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v),$$

用 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 分别去点乘上面的式子，则得

$$(\lambda E - L)\mathrm{d}u + (\lambda F - M)\mathrm{d}v = 0, \quad (\lambda F - M)\mathrm{d}u + (\lambda G - N)\mathrm{d}v = 0.$$

因为 $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ 是上面的线性方程组的非零解，故特征值 (也就是主曲率) κ_1, κ_2 满足二次方程 (特征方程)

$$\begin{vmatrix} \lambda E - L & \lambda F - M \\ \lambda F - M & \lambda G - N \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即} \quad \lambda^2 - 2\lambda H + K = 0,$$

其中

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

根据二次方程的根与系数的关系，得知 $2H = \kappa_1 + \kappa_2$, $K = \kappa_1 \kappa_2$, 所以称 H 为平均曲率，称 K 为 Gauss 曲率.

将 κ_1 和 κ_2 逐次代替前面的线性方程组中的 λ, 解出的 $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ 就是相应的主方向.

0.3.2 直接求主方向

8. 直接求主方向的方法：将前面的线性方程组改写为

$$\lambda(E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v) - (L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v) = 0, \quad \lambda(F\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v) - (M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v) = 0,$$

由于 $(\lambda,-1)\neq 0$ 满足上面的线性方程，所以必须有

$$\begin{vmatrix} E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v & L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v \\ F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v \end{vmatrix}=0,$$

展开后重新整理得到便于记忆的形式：

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{d}v)^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & (\mathrm{d}u)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

这个二次方程的解 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 就是主方向.

0.3.3 渐进曲线

法曲率为零的切方向称为渐近方向．曲面只在双曲点和抛物点有渐近方向．曲面上其切方向处处是曲面的渐近方向的曲线称为曲面上的渐近曲线．渐近曲线的微分方程是

$$L(\mathrm{~d}u)^2+2M\mathrm{~d}u\mathrm{~d}v+N(\mathrm{~d}v)^2=0$$

0.3.4 椭圆点、抛物点、双曲点

12. 曲面上的点按照 Gauss 曲率的符号不同分为椭圆点、抛物点和双曲点三类. 曲面在这些点附近的形状如同近似曲面. 具体情形如下列表格所示:

点型、 Dupin 标形和近似曲面

点型	Gauss 曲率	Dupin 标形	近似曲面	渐近方向
椭圆点	$K>0$	椭圆	椭圆抛物面	无
双曲点	$K<0$	两对共轭双曲线	双曲抛物面	两个
抛物点 (非平点)	$K=0$	一对平行直线	抛物柱面	一个
抛物点 (平点)	$K=0$	无	无	任意的切方向

0.3.5 例题

计算法曲率，主曲率，Gauss 曲率，平均曲率，主方向

例题 4.15 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=(a(u+v),b(u-v),2uv)$ 的 Gauss 曲率 K, 平均曲率 H, 主曲率 κ_1, κ_2 和它们所对应的主方向.

解 对双曲抛物面的参数方程求偏导数得到

$$\boldsymbol{r}_u=(a,b,2v),\quad \boldsymbol{r}_v=(a,-b,2u),$$
$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(2b(u+v),-2a(u-v),-2ab),$$
$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{A}\left(b(u+v),-a(u-v),-ab\right),$$

其中 $A=\sqrt{b^2(u+v)^2+a^2(u-v)^2+a^2b^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{EG-F^2}$,

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0,0,2),\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0,0,0).$$

直接计算得到

$$E=a^2+b^2+4v^2,\quad F=a^2-b^2+4uv,\quad G=a^2+b^2+4u^2,$$
$$L=0,\quad M=\frac{-2ab}{A},\quad N=0.$$

因此,

$$\begin{aligned}
H&=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=-\frac{FM}{EG-F^2}=\frac{ab(a^2-b^2+4uv)}{2A^3},\\
K&=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{M^2}{EG-F^2}=-\frac{a^2b^2}{A^4}.
\end{aligned}$$

解方程

$$\begin{aligned}
&\lambda^2-2H\lambda+K=\lambda^2+\frac{2FM}{EG-F^2}\lambda-\frac{M^2}{EG-F^2}=0,\\
&\left(\lambda+\frac{FM}{EG-F^2}\right)^2=\frac{M^2}{EG-F^2}+\frac{F^2M^2}{(EG-F^2)^2}=\frac{M^2EG}{(EG-F^2)^2},
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
\kappa_1=&-\frac{M(F+\sqrt{EG})}{EG-F^2}=\frac{M}{F-\sqrt{EG}}\\
=&\frac{ab}{2A^3}\left(a^2-b^2+4uv+\sqrt{(a^2+b^2+4u^2)(a^2+b^2+4v^2)}\right),\\
\kappa_2=&-\frac{M(F-\sqrt{EG})}{EG-F^2}=\frac{M}{F+\sqrt{EG}}\\
=&\frac{ab}{2A^3}\left(a^2-b^2+4uv-\sqrt{(a^2+b^2+4u^2)(a^2+b^2+4v^2)}\right).
\end{aligned}$$

将 $\lambda=\kappa_1$ 和 $\lambda=\kappa_2$ 分别代入

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{\lambda F-M}{\lambda E-L}=-\frac{F}{E}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{M}{E},$$

便得到对应的主方向. 直接计算得到, 对应于 κ_1 的主方向是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{F}{E}+\frac{F-\sqrt{EG}}{M}\cdot\frac{M}{E}=-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}=-\sqrt{\frac{a^2+b^2+4u^2}{a^2+b^2+4v^2}},$$

对应于 κ_2 的主方向是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{F}{E}+\frac{F+\sqrt{EG}}{M}\cdot\frac{M}{E}=\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+4u^2}{a^2+b^2+4v^2}}.$$

注记 尽管计算比较繁琐，但是本题属于常规的计算，没有特别的困难．需要指出的是，在求第二基本形式的系数时，$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 的单位化．在做题时这个地方容易出错，需要特别小心．另外，在计算时充分利用 $L=N=0$ 的特殊性，采用符号计算，直到化简以后才用相应的表达式代入，这就排除了繁杂的计算过程．这是值得注意的技巧． $L=N\equiv 0$ 正好是在曲面上取渐近曲线网为参数曲线网的充分必要条件，本题的一般公式适用于这种情形．

求脐点

脐点（Umbilic Point）是微分几何中的一个重要概念，主要用于研究曲面的**二阶几何性质**（如曲率）。它是指**曲面的主曲率在该点处相等**的点。

例题 4.18 求曲面 $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$ 的脐点，其中 $\alpha>\beta>\gamma>0$.

0.4 曲面论基本定理

为了说明 I, II 构成曲面的完全的不变量系统，需要曲面论的基本公式，也就是曲面的自然标架场的求导公式．它们在曲面的理论中扮演基本的角色，相当于曲线论中的 Frenet 公式．

Einstein 和式约定：

3. 曲面论的基本公式和基本方程涉及二元函数的两次以上偏导数,不可避免的要用求和表达式. 关于曲面的各种量的原有记号 (Gauss 记号) 显得不适用了，必须引进带指标的记号，并且采用 Einstein 和式约定使繁复的表达式得以简化.

原有记号和带指标记号的对应如表所示：

Gauss 记号	u	v	$\boldsymbol{r}_u$	$\boldsymbol{r}_v$	E	F	G	L	M	N
张量记号	u^1	u^2	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$	g_{11}	g_{12}	g_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{22}

规定希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ 作为指标的取值范围为 $\{1,2\}$. 规定拉丁字母 $i,j,k,l,a,b,c,\ldots$ 作为指标的取值范围为 $\{1,2,3\}$.

这样， $\boldsymbol{r}(u,v)$ 记成 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$, 并且

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^1}=\boldsymbol{r}_1,\quad \boldsymbol{r}_v=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^2}=\boldsymbol{r}_2.$$

相应地,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum_{\alpha=1}^{2}\boldsymbol{r}_\alpha\mathrm{d}u^\alpha=\boldsymbol{r}_\alpha\mathrm{d}u^\alpha,$$

$$\mathrm{I}=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\beta)\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,$$

其中 $\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\beta=g_{\alpha\beta}$. 第二基本形式是

$$\mathrm{II}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,$$

其中 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{n}=b_{\alpha\beta}$.

0.4.1 Gauss 绝妙定理

Théorème 2 (Gauss 绝妙定理)**.** *曲面的 Gauss 曲率是曲面在保长变换下的不变量.*

事实上，由 Gauss 方程可知

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-(b_{12})^2}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}$$

因此曲面的 Gauss 曲率是由它的第一基本形式完全确定的. 在 $g_{12}=F=0$ 的情形，Gauss 曲率用曲面的第一基本形式的表达式是

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G}_u)}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$$

在曲面的等温参数系下，$E=G=\lambda^2,F=0$，则 Gauss 曲率的表达式是

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda$$

Remarque 3. *Gauss 绝妙定理是微分几何学发展过程中的里程碑，开创了内蕴几何学的新时代，进而引发了 Riemann 几何学.*

0.5 测地曲率和测地线

通常我们把欧式平面看作是二维平直空间 (Gauss 曲率为零)，而把给定第一基本形式的抽象曲面称为二维弯曲空间. 本章的目标就是研究二维弯曲空间中的几何学.

0.5.1 Motivation

对于正则参数曲面 S 满足方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$. C 是曲面 S 上的一条曲线，它的方程是 $u^\alpha=u^\alpha(s),\alpha=1,2$，其中 s 是曲线 C 的弧长参数. 那么 C 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u^1(s),u^2(s))$$

我们的目的是沿着曲线 C 建立一个新的正交标架场 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，兼顾 C 和 S ，定义如下

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha}(s)\qquad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}(s)\qquad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s)$$

直观上，$\boldsymbol{e}_2$ 是将曲线 C 的切向量 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha}$ 绕着 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 正向旋转 $90°$ 得到的. 改标架场沿着曲线 C 的运动公式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}= & & \boldsymbol{e}_1, & \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}= & & \kappa_g\boldsymbol{e}_2 & +\kappa_n\boldsymbol{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}s}= & -\kappa_g\boldsymbol{e}_1 & & +\tau_g\boldsymbol{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}s}= & -\kappa_n\boldsymbol{e}_1 & -\tau_g\boldsymbol{e}_2, & \end{cases}$$

其中 $\kappa_n e_3$ 是曲线 C 的曲率向量在曲面 S 的法向量上的正交投影，故 κ_n 恰好是曲面 S 上的曲线 C 的法曲率；$\kappa_g e_2$ 是曲线 C 的曲率向量在曲面 S 的切平面上的正交投影。这里的 κ_g 的计算公式是

$$\begin{aligned}\kappa_g&=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{r}''(s)\cdot(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{r}'(s))\\&=(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s)),\end{aligned}$$

把最后的式子展开得到

$$\kappa_g=\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}\begin{vmatrix}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\\ \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\end{vmatrix}.$$