目录

第一章　偏微分方程

1.1　记号说明

对于 $u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们定义：

梯度：

$$Du=\nabla u=(\partial_1 u,\partial_2 u,\cdots,\partial_n u)$$

Hessian 矩阵：

$$D^2u=\begin{pmatrix}\partial_{11}u & \partial_{12}u & \cdots & \partial_{1n}u\\ \partial_{21}u & \partial_{22}u & \cdots & \partial_{2n}u\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{n1}u & \partial_{n2}u & \cdots & \partial_{nn}u\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{F}$ 的**散度**为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\partial_i F_i$$

于是

$$\Delta u=\operatorname{div}Du=\operatorname{tr}(D^2u)$$

1.2　基础公式

定理 1.2.1. *Gauss-Green* 公式 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界开集,且 $\partial\Omega\in C^1$

. 如果 $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n):\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 属于 $C^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ ，则

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S(x), \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

推论 1.2.2. *1.* 如果 $u,v\in C^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ ，则

$$\int_\Omega \partial_i u\cdot v\ \mathrm{d}x=-\int_\Omega u\cdot\partial_i v\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}uvn_i\ \mathrm{d}S(x), \tag{1.2}$$

其中 n_i 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的第 i 个分量;

2. 如果 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ ，则

$$\int_\Omega \Delta u\ \mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\ \mathrm{d}S(x); \tag{1.3}$$

3. 如果 $u\in C^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}),v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ ，则

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\ \mathrm{d}x=-\int_\Omega u\Delta v\ \mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\ \mathrm{d}S(x) \tag{1.4}$$

4. 如果 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ ，则如果 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ ，则

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(x) \tag{1.5}$$

证明. 1. 取 $\boldsymbol{F}=(0,\cdots,0,uv,0,\cdots,0)$，代入公式1.1即可

2. 取 $\boldsymbol{F}=Du$，代入公式1.1即可

3. 取 $\boldsymbol{F}=u\cdot Dv$，注意到

   $$\operatorname{div}(u\cdot Dv)=\operatorname{div}(\cdots,u\cdot\partial_i v,\cdots)=\sum_{i=1}^n\partial_i(u\cdot\partial_i v)=\sum_{i=1}^n(\partial_i u\partial_i v+u\cdot\partial_i^2 v)=Du\cdot Dv+u\Delta v$$

   代入公式1.1即可。

4. 取 $\boldsymbol{F}=(\cdots,u\cdot\partial_i v-v\cdot\partial_i u,\cdots)$，代入公式1.1即可。

□

利用分部积分的思想：

$$\int_\Omega u\Delta u\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_\Omega u\cdot\partial_i^2 u\mathrm{d}x=-\sum_{i=1}^n\int_\Omega(\partial_i u)^2\mathrm{d}x=-\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

1.3 调和函数

定理 1.3.1. 平均值公式 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，则对于任意的球 $B(x,r) \subset \Omega$ ，有

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y) = ⨍_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y,$$

其中积分符号 $⨍$ 表示求平均值，即

$$⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y),$$
$$⨍_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y,$$

这里 $\alpha(n) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ 是 n 维球的体积。

证明. 注意到

$$u(x) = \lim_{r\to 0} ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y) \overset{\text{why?}}{=} ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)$$

以及

$$\int_{B(x,r)} u(y)dy = \int_0^r \int_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y)dt$$

□

上述证明中的一个核心技巧就是，记

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\mathrm{d}S(z)$$

其中任意给定 $x\in\Omega, B(x,r)\subset\Omega$，于是

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \partial_r \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\mathrm{d}S(z)\\
&= \fint_{\partial B(0,1)} \partial_r u(x+rz)\mathrm{d}S(z) \qquad r\text{存在于每个分量上}\\
&= \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot z\mathrm{d}S(z)\\
&= \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot \frac{y-x}{r}\mathrm{d}S(y)\\
&= \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot \vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S(y)\\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S(y)\\
&= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

由 $u(x)$ 的连续性，$\phi(r)$ 在 $r=0$ 处连续，因此 $\phi(r)=\lim_{t\to 0}\phi(t)=u(x)$.

定理 1.3.2. 假设 $u\in C^2(\Omega)$ 满足，对于任意 $B(x,r)\subset\Omega$，

$$u(x)=\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)$$

则 u 是调和函数.

定理 1.3.3. *Harnack* 不等式 假设 u 是半径为 R 的球 B_R 上的任意非负调和函数，则对任意 $r\in(0,R)$，成立不等式

$$\sup_{B_r} u \le \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n \inf_{B_r} u,$$

其中 B_r 是以 r 为半径，与 B_R 同心的球.

定理 1.3.4. 弱极值原理 若调和函数 u 在 $\bar\Omega$ 上连续，则 $\max_{\bar\Omega} u=\max_{\partial\Omega} u$。

证明. 令 $w=u+\varepsilon e^{x_1}$，易见

1. $w > u$ ，因而有 $\max_{\bar{\Omega}} u \le \max_{\bar{\Omega}} w$ 。

2. $\Delta w = \varepsilon e^{x_1} > 0,\ w$ 的最大值只可能在边界上达到，因而有 $\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w$ 。

3. $\max_{\partial\Omega} w \le \max_{\partial\Omega} u + \max_{\partial\Omega} \varepsilon e^{x_1} = \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{x_1}$

综合上面三点观察，就得到不等式 $\max_{\bar{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{x_1}$ 。

令 $\varepsilon \to 0$ 就有 $\max_{\bar{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u$，但是 $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$，又应该有 $\max_{\partial\Omega} u \le \max_{\bar{\Omega}} u$ ，所以必须有 $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ ，这就证明了结论。 □

定理 1.3.5. *强极值原理 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开集，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数，则*

1. $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

2. 如果 Ω 是连通的，且存在 $x_0 \in \Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值，则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数.

强极值原理1.3.5的一个应用是:

对于 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，$g \in C(\partial\Omega), f \in C(\Omega)$，则问题1.7的解是唯一的。

这是因为如果存在两个解 u_1, u_2，则 $w = u_1 - u_2$ 是调和函数，满足

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

根据强极值原理，对于 $x \in \Omega$，$w(x) \le 0$. 注意到 $-w$ 满足同样的初值问题，于是对于 $x \in \Omega$，$w(x) \ge 0$. 因此 $w \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$.

定理 1.3.6. 假设 u 是 Ω 上的调和函数，则对于任意球 $B(x,r) \subset \Omega$ ，任意阶数为 k 的多重指标 α ，估计[1]

$$|D^\alpha u(x)| \le \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u(y)| \mathrm{d}y$$

成立，其中

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(n+k)^{n+k}(n+1)^k}{\alpha(n)(n+1)^{n+1}} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

作为推论，我们有 (这跟复变函数中定理发展络如出一辙)

定理 1.3.7. *Liouville* 定理 假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，则 u 必为常数函数。

证明. 设 $|u| \le M$. 固定 $x \in \mathbf{R}^n$. 对任意 $r > 0$ ，在球 $B(x,r)$ 上利用定理1.3.6当 $k = 1$ 时的结论，则

$$|Du(x)| \le \frac{nC_1}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} |u(y)| \mathrm{d}y \le \frac{nC_1\alpha(n)}{r} M.$$

令 $r \to +\infty$ ，我们有

$$Du(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

因此 u 是常数. □

更强的，使用 Harnack 不等式，定理1.3.6只需要函数 u 有上界或下界即可.

定理 1.3.8. 假设 u 是 Ω 上的调和函数，则 u 是 Ω 上的解析函数.

[1]类似复变函数中的 Cauchy 估计

定理 1.3.9. 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球 B_1 上的调和函数，则

$$H(r)=\int_{\partial B_r} u^2\ \mathrm{d}S,\quad D(r)=r^2\int_{Br}|\nabla u|^2\ \mathrm{d}y$$

是 r 的单调递增函数，其中 B_r 是与 B_1 同心，以 r 为半径的球.

证明. 直接暴力求导!(过于暴力) □

1.4 基本解与 Green 函数

命题 1.4.1. 如果一个在 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数是径向对称的，则它必为常数函数。

假设 $u(x)=v(r)$，其中 $r=|x|$，则

$$0=\Delta u=v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)$$

求解这个微分方程得到

$$v(r)=\begin{cases} b\ln r+c, & n=2\\ \frac{b}{r^{n-2}}+c, & n\geq 3\end{cases}$$

但当 $b\neq 0, r=0$ 时，$v(r)$ 在原点无定义。也就是 Laplace 方程在**全空间**没有径向对称的解。

尽管如此，由于 $v(r)$ 仅仅在 $r=0$ 时不满足调和性，我们称 $v(r)$ 为**基本解**。

定义 1.4.2. 对于 $x\in\mathbb{R}^n$，如果 $u(x)$ 满足

$$\Gamma(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2,\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases}$$

则称 $\Gamma(x)$ 为**基本解**。

关于 $\Gamma(x)$ 的系数选取，我们注意到：对于 $x \neq 0$

$$|D\Gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad \left|D^2\Gamma(x)\right| \leq \frac{C}{|x|^n}$$

其中 $C = C(n)$ 是仅依赖于 n 的常数。

定理 1.4.3. 假设 $f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$，则

$$u(x) = (\Gamma * f)(x) + C = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\mathrm{d}y + C$$

是位势方程 $-\Delta u = f$ 在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上所有的有界解.

我还是没有理解 Green 函数的定义...

1.5　极值原理和最大模估计

我们讨论更一般的方程：

$$\mathcal{L}\sqcap = -\cdot\sqcap + \rfloor(\S)\sqcap = \{(\S), \quad \S \in \otimes \tag{1.8}$$

Ω 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集. 假定 $c(x) \geq 0$ 且 $f(x) < 0$.

方程1.8的极值原理只需要把 Laplace 方程的极值原理中的最大值换成非负最大值即可.

关于最大模估计，我们考虑位势方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

若 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C \cdot \sup_{\Omega} |f|$$

其中 $C = C(n, \sup_{x,u\in\Omega} |x-y|)$.

1.6 能量模估计

考虑 n 维位势方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

利用 Gauss-Green 公式1.1，我们有

定理 1.6.1. *假设 $c(x) \geq c_0 > 0, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题1.10的解，则*

$$\int_\Omega |Du(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq M \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

其中 M 是仅依赖于 c_0 的常数.

证明. 这是显然的，因为

$$\underbrace{\int_\Omega |Du(x)|^2 \mathrm{d}x}_{=\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x} + \underbrace{\int_\Omega c(x)u^2 \mathrm{d}x}_{\geq c_0 \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x} = \int_\Omega fu \mathrm{d}x \overset{Cauchy\ \text{不等式}}{\leq} \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2 \, \mathrm{d}x.$$

□

引理 1.6.2. *Friedrichs 不等式 假设 $u \in C_0^1(\Omega)$，则*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq 4d^2 \int_\Omega |Du(x)|^2 \mathrm{d}x$$

其中 d 是 Ω 的直径。

该证明也利用了经典的思想.

证明. 做一个边长为 $2d$ 且平行于坐标轴的 n 维正方体含住 Ω，不妨设为

$$Q = \{x(x_1, \cdots, _n)|0 \leq x_i \leq 2d, i = 1, \cdots, n\}$$

令 $\tilde{u} = u\nVdash_Q \in C_0^1(Q)$，且

$$\tilde{u}(x_1, ..., x_n) = \int_0^{x_1} \partial_1 \tilde{u}(\xi, x_2, ..., x_n) \mathrm{d}\xi$$

利用 Schwarz 不等式，我们有

$$\tilde{u}^2(x) \leq x_1 \int_0^{x_1} \left|\partial_\xi \tilde{u}\left(\xi, x_2, \cdots, x_n\right)\right|^2 \mathrm{~d}\xi \leq 2d \int_0^{2d} \left|\partial_1 \tilde{u}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right|^2 \mathrm{~d}\xi.$$

两端在 Q 上积分，得到

$$\int_Q \tilde{u}^2(x) \mathrm{d}x \leq 4d^2 \int_Q \left|\tilde{u}_{x_1}\right|^2 \mathrm{~d}x \leq 4d^2 \int_Q \underbrace{\sum_{i=1}^n \left|\partial_i \tilde{u}\right|^2}_{=|D\tilde{u}|^2} \mathrm{~d}x$$

□

利用上述不等式，我们可以证明下面结论.

定理 1.6.3. 假设 $c(x) \geq 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是问题*1.10*的解，则

$$\int_\Omega |Du(x)|^2 \mathrm{~d}x + \int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{~d}x \leq M \int_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{~d}x$$

其中 M 是仅依赖于 Ω 的直径的常数.

1.7　练习

习题 1.7.1. 利用推导 *Laplace* 方程的思想推导极小曲面方程.

极小曲面方程为

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\left(1+|Du|^2\right)^{1/2}}\right) = 0$$

给定 $M_g = \{v \in C(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = g\}$，求 $u \in M_g$，使得 $J(u) = \min_{v \in M_g} J(v)$，其中

$$J(v) = \iint_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2} \mathrm{d}x$$

对于任意的 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$，设 $f(\varepsilon) = J(v+\varepsilon\varphi)$，我们想要 $f(\varepsilon) \geq f(0)$，这意味着 $f'(0) = 0$.

直接展开：

$$f'(\varepsilon) = \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+|D(v+\varepsilon\varphi)|^2}}(Dv\cdot D\varphi + 2\varepsilon|D\varphi|^2)\mathrm{d}x$$

于是

$$f'(0) = \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+|Dv|^2}}(Dv\cdot D\varphi)\mathrm{d}x = 0$$

由于 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$，所以 $D\varphi|_{\partial\Omega} = 0$，于是分部积分得到

$$\iint_\Omega \left(-\operatorname{div}\frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}}\right)\varphi\mathrm{d}x = 0$$

由 φ 的任意性，我们得到

$$\operatorname{div}\frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}} = 0$$

即 v 是极小曲面. 得到极小曲面方程.

习题 1.7.2. 构造 $\mathbb{R}^n$ 上所有二次调和多项式组成的线性空间.

对于一个 n 维二次多项式

$$P(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$$

我们要求 P 是调和的，即 $\Delta P = 0$，这意味着

$$\mathrm{tr}(A) = 0$$

于是该线性空间为 n 维二次多项式空间：

$$\{P(x) = x^\top Ax + b^\top x + c|\mathrm{tr}(A) = 0\}$$

习题 1.7.3. 证明定理 *2.1*

显然。

习题 1.7.4. 仿照平均值公式的的推导证明：当 $n\geq 3$ 时，对于第一边值问题

$$\begin{cases}-\triangle u=f, & x\in B(0,r),\\ u=g, & x\in\partial B(0,r)\end{cases}$$

在 $C^2(B(0,r))\cap C^1(\bar{B}(0,r))$ 上的解 $u(x)$ ，成立

$$\begin{aligned}u(0)=&\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}g(x)\mathrm{d}S(x)\\ &+\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

记 $\phi(x)=\fint_{\partial B(0,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$，则

$$\phi'(r)=\frac{r}{n}\fint_{B(0,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(0,r)}f(y)\mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}\phi(0)=u(0)=\phi(r)-\int_0^r\phi'(t)\mathrm{d}t\\ &=\fint_{\partial B(0,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)+\int_0^r\frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}}\int_{B(0,t)}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\ &=\fint_{\partial B(0,r)}g(y)\mathrm{d}S(y)+\frac{1}{\alpha(n)}\int_0^r\frac{1}{t^{n-1}}\int_{B(0,t)}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\ &=\fint_{\partial B(0,r)}g(y)\mathrm{d}S(y)+\frac{1}{n\alpha(n)}\int_0^r\frac{1}{t^{n-1}}\int_0^t\int_{\partial B(0,\rho)}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{Fubini}}{=}\fint_{\partial B(0,r)}g(y)\mathrm{d}S(y)+\frac{1}{n\alpha(n)}\int_0^r\int_\rho^r\frac{1}{t^{n-1}}\int_{\partial B(0,\rho)}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}\rho\\ &=\fint_{\partial B(0,r)}g(y)\mathrm{d}S(y)+\frac{1}{n\alpha(n)}\int_0^r\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)\int_{\partial B(0,\rho)}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\rho\\ &=\fint_{\partial B(0,r)}g(y)\mathrm{d}S(y)+\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

习题 1.7.5. 仿照平均值公式的的推导证明：当 $n=2$ 时，对于第一边值问

题

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & x \in B(0,r), \\ u = g, & x \in \partial B(0,r) = C(0,r) \end{cases}$$

在 $C^2(B(0,r)) \cap C^1(\bar{B}(0,r))$ 的解 $u(x)$ ，成立

$$\begin{aligned} u(0) =& \frac{1}{2\pi r} \int_{C(0,r)} g(x) \mathrm{d}l \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,r)} (\ln r - \ln |x|) f(x) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}l$ 为弧长微分. 此时 $C(0,r)$ 是环绕圆盘 $B(0,r)$ 的圆周.

证明与习题1.7.4如出一辙，这里略去。

习题 1.7.6. 若 $v \in C^2(\Omega)$ 满足

$$-\Delta v \leq 0, \quad x \in \Omega$$

则称 v 在 Ω 上是下调和的.

1. 证明：对于任意球 $B(x,r) \subset \Omega$ ，成立

$$v(x) \leq \int_{B(x,r)} v(y) \mathrm{d}y$$

2. 证明：$\max_{\bar{\Omega}} v(x) = \max_{\partial\Omega} v(x)$.

3. 设 $\phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是光滑凸函数, 且 u 是 Ω 上的调和函数. 证明: $v = \phi(u)$ 是 Ω 上的下调和函数.

4. 设 u 是 Ω 上的调和函数. 证明：$v = |Du|^2$ 是 Ω 上的下调和函数.

1. 参考定理1.3.1的证明，记

$$\phi(r) = \fint_{B(x,r)} v(y) \mathrm{d}y, \quad \phi'(r) = \fint_{B(x,r)} \Delta v(y) \mathrm{d}y \geq 0$$

则

$$v(x) = \phi(0) \leq \phi(r) = \fint_{B(x,r)} v(y) \mathrm{d}y$$

2. 仿照定理1.3.4的证明，令 $w = v + \varepsilon e^{x_1}$，其中 $\varepsilon > 0$，则

$$\Delta w = \Delta v + \varepsilon e^{x_1} \geq 0$$

于是 w 的最大值只可能在边界上达到，即 $\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w$，再由于 $u \in C^2(\Omega)$，令 $\varepsilon \to 0$，则有 $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$。

3. 直接计算

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 v(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \phi(u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \phi''(u(x))(\partial_i u(x))^2 + \phi'(u(x)) \underbrace{\Delta u(x)}_{=0} \geq 0$$

4. 直接计算

$$v(x) = |Du|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u(x))^2$$

于是

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 v(x) = 2\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij} u)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \partial_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u}_{=\mathrm{div}(\Delta u)=0} = 2\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij} u)^2 \geq 0$$

习题 1.7.7. *Harnack* 定理 假设 $\{u_n\} \subset C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数列. 如果 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛，且收敛于一个调和函数.（提示：利用极值原理和平均值公式）

已知 $\forall n, \Delta u_n = 0, \lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in\partial\Omega} |u_n(x) - u_m(x)| = 0$，由于 $u_n - u_m$ 也是调和函数，所以

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u_n(x) - u_m(x)| \leq \lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in\partial\Omega} |u_n(x) - u_m(x)| = 0$$

即 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛.

由平均值公式1.3.1，对于任意 $B(x, r) \subset \Omega$，我们有

$$u_n(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u_n(y) \mathrm{d}S(y)$$

由一致收敛性，两边令 $n\to\infty$，得到

$$u(x)=\fint_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

根据定理1.3.2可知，u 是调和函数.

习题 1.7.8. *Schwarz* 反射定理 记上半球

$$B^{+}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B(0,1)\mid x_n>0\},$$

假设 u 是上半球 B^{+} 上的调和函数且在边界 $\{x\in\partial B^{+}\mid x_n=0\}$ 上满足 $u=0$. 令

$$v(x)=\begin{cases}u\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right), & x_n\geq 0,\\ -u\left(x_1,x_2,\cdots,-x_n\right), & x_n<0.\end{cases}$$

证明：v 是球 $B(0,1)$ 上的调和函数.（提示：利用平均值公式的推导）

显然.

习题 1.7.9. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集. 如果原点 $0\notin\Omega$ ，我们记 $x^{*}=\frac{x}{|x|^2}$ ，$\Omega^{*}=\{x^{*}\mid x\in\Omega\}$. 假设 u 是在 Ω 上的一个函数，并定义 Ω^{*} 上的函数 $K[u](x)=|x|^{2-n}u\left(x^{*}\right),x\in\Omega^{*}$ 为函数 u 的 *Kelvin* 变换. 证明：$u(x)$ 是 Ω 上的调和函数当且仅当 $K[u]$ 是 Ω^{*} 上的调和函数.

爆算 $\Delta K[u]$.

习题 1.7.10. 设 $u(x)$ 是球 $B(0,R)$ 上的调和函数，且在 $\bar{B}(0,R)$ 上连续. 又设

$$M=\int_{B(0,R)}u^2(x)\mathrm{d}x$$

试证：

1. $|u(0)|\leq\left[\frac{M}{\alpha(n)R^n}\right]^{\frac{1}{2}}$ ；
2. $|u(x)|\leq\left[\frac{M}{\alpha(n)(R-|x|)^n}\right]^{\frac{1}{2}}$.

1. 由平均值公式1.3.1，我们有

$$u(0)=\fint_{B(0,R)}u(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha(n)R^n}\int_{\partial B(0,R)}u(x)\mathrm{d}S(x) \tag{1.11}$$

再利用 Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\int_{B(0,R)}u(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_{B(0,R)}1\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{B(0,R)}u^2(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\alpha(n)R^n}\left(\int_{B(0,R)}u^2(x)\mathrm{d}x\right) \tag{1.12}$$

结合1.11和1.12，即可得证.

2. 类似的，平移再多一步放缩即可.

习题 1.7.11. 设 $u(x)$ 是单位球 $B=B(0,1)$ 上的有界调和函数. 证明：

$$\sup_{x\in B}(1-|x|)|Du(x)|<+\infty.$$

（提示：利用周蜀林书上定理 *2.7* 的第一步证明）

已知

$$|\partial_i u(x)|\leq\frac{n+1}{\alpha(n)r^{n+1}}\int_{B(x,r)}|u(y)|\mathrm{d}y\leq\frac{n+1}{\alpha(n)r^{n+1}}\sup_{y\in B(x,r)}|u(y)|\cdot\alpha(n)r^n=\frac{n+1}{r}\sup_{y\in B(x,r)}|u(y)|$$

对于任意给定的 $x\in\mathring{B}$，令 $r=1-|x|>0$，则

$$(1-|x|)|Du(x)|\leq\sqrt{n}\cdot(n+1)\sup_{y\in B(x,r)}|u(y)|\leq\sqrt{n}\cdot(n+1)\sup_{y\in B}|u(y)|$$

由于 u 在 $\bar{B}$ 上有界，所以

$$\sup_{x\in B}(1-|x|)|Du(x)|<+\infty$$

习题 1.7.12. 设 $u(x)$ 是球 $B\left(0,R_0\right)$ 上的调和函数，对于 $R\in(0,R_0]$ 记

$$\omega(R)=\sup_{B(0,R)}u-\inf_{B(0,R)}u.$$

1. 利用 *Harnack* 不等式证明：存在 $\eta \in (0,1)$ ，使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leq \eta\omega(R)$$

（提示：对调和函数 $w(x) = u(x) - \inf_{B(0,R)} u$ 在球 $B\left(0, \frac{R}{2}\right)$ 上利用 *Harnack* 不等式）

2. 如果 $\sup_{B(0,R_0)} |u(x)| \leq M_0$ ，则存在常数 $\alpha \in (0,1), C > 0$ ，使得

$$\omega(R) \leq C\left(M_0 + 1\right)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}, \quad R \in (0, R_0]$$

（提示：对任意 $R \in (0, R_0)$ ，一定存在一个正整数 $i \geq 1$ ，使得 $\frac{R_0}{2^i} \leq R < \frac{R_0}{2^{i-1}}$）

习题 1.7.13. 推广的 *Liouville* 定理 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数，且

$$|u(x)| \leq C_1|x|^m + C_2, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

其中 m 是非负整数，C_1, C_2 是非负常数，则 u 必为一个次数至多为 m 的调和多项式.（提示：只要证明 $D^{m+1}u(x) \equiv 0$ ）

习题 1.7.14. 假设 $u \in C^2\left(\mathbf{R}^n\right)$. 对于 $r > 0$ ，定义

$$u_r(x) = \frac{1}{N\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{r(x)}} u(y) \mathrm{d}S(y)$$

证明：

$$\Delta u_r = (\Delta u)_r$$

习题 1.7.15. 假设 u 是 $B(0,R)$ 上的非负调和函数.

1. 利用 *Poisson* 公式（*2. 37*）证明：

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

2. 证明定理 $2.4'$.

习题 1.7.16. 利用上述不等式证明定理 $2.8'$.

习题 1.7.17. 证明：对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n_+$ ，*Poisson* 核满足

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x,y)\mathrm{d}y=1,$$

其中

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},0)\in\partial\mathbf{R}^n_+=\mathbf{R}^{n-1}$$

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}y_1\ \mathrm{d}y_2\cdots\ \mathrm{d}y_{n-1},\quad K(x,y)=\frac{2x_n}{n\alpha(n)|y-x|^n}$$

习题 1.7.18. 求边值问题

$$\begin{cases}-\triangle u=f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=g(x,y)\end{cases}$$

的 *Green* 函数，其中

1. Ω 是上半平面；

2. Ω 是第一象限；

3. Ω 是带形区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\in\mathbf{R},0<y<l\}$ ，其中 l 为正常数.

习题 1.7.19. 记 $B^+(R)=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,|x_n>0,|x|<R\}$ $(n\geq 2)$. 求边值问题

$$\begin{cases}-\triangle u=f(x),x\in B^+(R),\\ u|_{\partial B^+(R)}=g(x)\end{cases}$$

的 *Green* 函数.（提示：分别考虑 $n=2$ 和 $n\geq 3$ 两种情形）

习题 1.7.20. 证明：第二边值问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in B(0,R),\\ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R}=g(\theta), & \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

的解在边值 $g(\theta)$ 满足条件 $\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{d}\theta=0$ 时可以表示成

$$u(r,\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)\ln\left[R^2+r^2-2Rr\cos(\tau-\theta)\right]\mathrm{d}\tau+C,$$

其中 C 为任意常数．这里 (r,θ) 是点 (x,y) 的极坐标．

习题 1.7.21. 假设 $u(x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u+c(x)u=f(x), x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

的一个解．

1. 如果 $c(x)\geq c_0>0$ ，则

$$\max_{\bar{\Omega}}|u(x)|\leq\frac{1}{c_0}\sup_{\Omega}|f(x)|;$$

2. 如果 $c(x)\geq 0$ ，则

$$\max_{\bar{\Omega}}|u(x)|\leq M\sup_{\Omega}|f(x)|,$$

其中 M 依赖于 Ω 的直径 d ；(提示：不妨设原点 $0\in\Omega$ ，并令 $u(x)=w(x)v(x)=(d^2-x|^2+1)\,v(x)$ ，然后考虑 $v(x)$ 满足的方程，利用（*1*）的证明方法可得 $v(x)$ 的最大模估计，从而得到 $u(x)$ 的最大模估计)

3. 如果 $c(x)<0$ ，试举反例说明上述最大模估计一般不成立．

习题 1.7.22. 假设 $u(x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u=1, x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

的一个解．试证明：对于任意 $x_0\in\Omega$ ，估计

$$\frac{1}{2n}\min_{x\in\partial\Omega}|x-x_0|^2\leq u(x_0)\leq\frac{1}{2n}\max_{x\in\partial\Omega}|x-x_0|^2$$

成立，这里 n 是空间的维数．

习题 1.7.23. 假设 $u(x)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u+c(x)u=f(x), & x\in\Omega\\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u\right]\Big|_{\Gamma_1}=g_1, & u|_{\Gamma_2}=g_2\end{cases}$$

的一个解，其中 $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\partial\Omega,\Gamma_1\cap\Gamma_2=\phi,\Gamma_2\neq\phi$.

1. 如果 $c(x)\geq c_0>0,\alpha(x)\geq\alpha_0>0$ ，则有估计

$$\max_{\bar{\Omega}}|u(x)|\leq\max\left\{\frac{1}{c_0}\sup_{\Omega}|f(x)|,\frac{1}{\alpha_0}\max_{\Gamma_1}|g_1|,\max_{\Gamma_2}|g_2|\right\}.$$

2. 如果 $c(x)\geq 0,\alpha(x)\geq 0$ ，且 Γ_1 满足内球条件，则上述问题的解是惟一的．这里 Γ_1 满足内球条件是指对于任意 $x_0\in\Gamma_1$ ，存在一个球 B 使得 $B\subset\Omega,\Gamma_1\cap\partial B=\{x_0\}$ ．（提示：令 $u(x)=w(x)v(x)$ ，其中 $w(x)$ 是待定的辅助函数．在球 B 上我们考虑 $v(x)$ 满足的问题）

习题 1.7.24. 试用辅助函数

$$w(x)=\mathrm{e}^{-a|x|^2}-\mathrm{e}^{-aR^2}$$

证明 *Hopf* 引理，这里 $a>0,R$ 是球 B_R 的半径.

习题 1.7.25. 假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个有界开集，$u_i(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ $(i=1,2)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}-\triangle u_i+c_i(x)u=0, & x\in\Omega,\\ u=g_i, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

如果 $c_2(x)\geq c_1(x)\geq 0,g_1(x)\geq g_2(x)\geq 0$ ，则

$$u_1(x)\geq u_2(x)$$

（提示：先证明 $u_i(x)\geq 0$ ，然后考虑 $w(x)=u_1(x)-u_2(x)$ 满足的定解问题）

习题 1.7.26. 假设 $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界区域，$\Omega = \mathbf{R}^n \backslash \bar{\Omega}_0$. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是外部问题

$$\begin{cases} -\triangle u + c(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega = g(x),} & x \in \partial\Omega, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = l \end{cases}$$

的一个解，其中 $c(x) \geq 0$ 且在 $\bar{\Omega}$ 上局部有界，则

$$\sup_{\Omega} |u(x)| \leq \max\left\{|l|, \max_{\partial\Omega} |g(x)|\right\}.$$

（提示：先在区域 $B(0,R)\backslash\Omega_0$ 上证明关于 $u(x)$ 的估计，然后令 $R \to +\infty$）