0.1 复变函数期末练习题

0.1.1 习题 1

1. 判断 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ 是否正确?
2. 构造一个共形映射将 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ 映射到单位圆的外部.
3. 计算
$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}.$$
4. 设 $f(z)$ 为整函数且 $e^{f(z)}$ 有界. 证明: $f(z)$ 为常数.
5. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 解析且满足 $|f(z)|<\frac{1}{1-|z|}$. 证明:
$$|a_n|\leq(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1).$$
6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为非零复数, 定义
$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-a_kz}.$$
(1) 求 $f(z)$ 在原点处幂级数展开式的收敛半径;
(2) 证明:
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{m}a_k^n\right|^{1/n}=\max_{k=1,\ldots,m}|a_k|.$$
7. 用 Rouché 定理来证明代数基本定理.
8. 求积分
$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z\sin^2(z)}.$$
9. 设 $f(z)$ 在 $\Delta=\{|z|<1\}$ 内解析.
(1) 若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 的零点. 证明:
$$|f(z)|\leq\prod_{k=1}^{n}|z_k|.$$
(2) 证明: 存在 $z_n\in\Delta$, $|z_n|\to1$ 使得 $\{f(z_n)\}$ 是一个有界序列.

(1) 错, $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=-\sqrt{6}$.

(2) $w=\sqrt{z^2-1}+z$，其中 $\left.\sqrt{z^2-1}\right|_{z=i}=\sqrt{2}i$.

(3) $f(z) \coloneqq \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{1}{z} = \cdots + \binom{2n}{n}z^{-1} + \ldots$, $\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{res}_0 f = 2\pi i\binom{2n}{n}$.

(4) $e^{f(z)}$ 也是整函数 (整函数 e^z 复合整函数 f) 于是 $e^{f(z)} = C \Rightarrow f(z) = \log C$.

(5) $|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{r^n(1-r)}$，$r$ 待定，故可以取为 $\frac{n}{n+1}$，则 $|a_n| \le (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)$.

(6) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right)z^n$, 故 $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right|}}$. 同时 $R = \min_k\left\{\left|\frac{1}{|a_k|}\right|\right\}$ [1], 故 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right|^{1/n} = \max_k |a_k|$.

(7) 归纳即可

(8) $f(z) \coloneqq \frac{1}{z\sin^2 z}$ 在 $|z| < \frac{1}{2}$ 内只有三阶极点 0，洛朗展开得到 $f(z) = \frac{1}{z\left(z-\frac{z^3}{3}+o(z^4)\right)^2} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{3}+o(z^3)\right)^2} = z^{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^2+o(z^3)} = z^{-3}+\frac{2}{3}z^{-1}+\ldots$. 于是 $\mathrm{res}_0 f = a_{-1} = \frac{2}{3}$. 故 $\int_{|z|<\frac{1}{2}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{res}_0 f = \frac{4}{3}\pi i$.

(9) 题目有误：应该补充条件 $|f(z)| < 1$，且不等式改为 $|f(0)| \le \prod_{k=1}^{n}|z_k|$.

(I) 构造函数 $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n}\varphi_{z_k}(z)}$，其中 $\varphi_{z_k}(z) \coloneqq \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$. 于是 $|z| \to 1$ 时，$|\varphi_{z_k}(z)| \to 1$，故 $|g(z)| \to \lim_{|z|\to 1}|f(z)| \le 1$. 由最大模定理[2] $|g(z)| \le 1, \forall z \in \Delta$. 注意到 $|\varphi_{z_k}(0)| = |z_k|$，我们就有 $|f(0)| \le \prod_{k=1}^{n}|\varphi_{z_k}(0)| = \prod_{k=1}^{n}|z_k|$.

(II) 反证而设，对于任意 $\{|z_k|\} \to 1$, $|f(z_k)| \to \infty$. 接下来考虑 f 在 Δ 内的零点个数，若为无穷个，这些零点存在聚点，则由非平凡解析函数的零点孤立性可知，聚点都在 $\partial\Delta$ 上，从而存在零点列 $\{|z_k|\} \to 1$，其中 $|f(z_k)| = 0$，故 $|f(z_k)| \not\to \infty$. 故零点个数有限，按 (1) 中定义 g，则 $\frac{1}{g} \to 0$，在 $|z| \to 1$ 时. $g \in H(\Delta)$ 无零点，故 $\frac{1}{g} \in H(\Delta)$ ，故由最大模定理：$\frac{1}{g} \equiv 0$. g 必须是无穷大，但这与 $g \in H(\Delta)$ 矛盾！

[1] 一个函数在某点展开的幂级数，其收敛半径是从该点到离它最近的奇点的距离。

[2] 最大模定理可以推广到趋于边界上，不需要在边界有定义，详见 Rudin p.253

0.1.2 习题 2

1. 证明 $w=-\frac{1}{\bar{z}}$ 是 z 在黎曼球面上的对径点.
2. 构造一个共形映射将区域 $\{z=x+iy:-1<y<1\}\setminus(-\infty,0]$ 映射到上半平面.
3. 设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 解析且 $f(0)=0$. 证明:
$$\iint_{|z|\leq 1} u^2\ dxdy=\iint_{|z|\leq 1} v^2\ dxdy.$$
4. 设 $f(z),g(z)$ 为整函数且当 $|z|\geq 2024^{2025}$ 时 $|f(z)|\leq|g(z)|$. 证明: $\frac{f(z)}{g(z)}$ 是一个有理函数.
5. 设 $f(z)$ 为整函数且当 $z\in\mathbb{R}$ 时, $|f(z)|=1$. 证明: 存在整函数 $g(z)$ 使得
$$f(z)=e^{g(z)}.$$
6. 求积分
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\ dx.$$
7. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 且 $f(z)$ 限制在 $\frac{1}{2}<|z|<1$ 内为单射. 证明 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内为单射.
8. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且 $\operatorname{Re} f(z)>0$. 证明:
$$|f'(0)|\leq 2\operatorname{Re} f(0).$$

(1) 映射 $\mathbb{C}\to S^2, z=x+iy\mapsto\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$. 而 $-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{-x-iy}{x^2+y^2}\mapsto\left(\frac{-2x}{x^2+y^2+1},\frac{-2y}{x^2+y^2+1},\frac{-(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}\right)$, 于是是 z 的对径点.

(2) $w=\sqrt{1-e^{\pi z}}$.

(3) $\operatorname{Re} f^2(z)=u^2-v^2$ 是调和函数，由平均值公式 $\int_{|z|<1} u^2-v^2\,\mathrm{d}z=\pi\cdot 1^2\cdot(u^2(0)-v^2(0))=0$.

(4) 记 $R=2024^{2025}$，在紧集 $|z|\leq R$ 内，由零点孤立性，g 至多有有限个零点，$\frac{f}{g}$ 有有限个极点. 在 $|z|\geq R$ 上，$|f(z)|\leq|g(z)|\Rightarrow g$ 的零点都是 f 的零点，$\left|\frac{f}{g}\right|\leq 1$ 有界，由黎曼可去奇点定理，$\frac{f}{g}$ 在该区域只有可去奇点. 且 $\frac{f}{g}$ 在无穷远点的邻域内有界，则 ∞ 不是本性奇点，只可能是可去奇点或极点. 因为任何在扩充复平面上亚纯的函数必然是有理函数，所以 $\frac{f}{g}$ 是有理函数.

(5) 还不确定，可以取 $g(z)=\int_{\gamma_{0\to z}}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta+i\arg f(0)$，于是 $g'=\frac{f'}{f}$，故验证这是整函数.

(6) $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, 设 $f(z)=\frac{e^{iz}}{1+z^4}$. 考虑在上半平面圆周上的积分，$\left|\int_{\gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\to 0$. 计算留数 $\operatorname{res}_{e^{i\pi/4}} f=\frac{1}{4}e^{-1/\sqrt{2}}e^{i(1/\sqrt{2}-3\pi/4)}$, $\operatorname{res}_{e^{3i\pi/4}} f=\frac{1}{4}e^{-1/\sqrt{2}}e^{i(-1/\sqrt{2}-\pi/4)}$. 于是 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z=\pi i(\operatorname{res}_{e^{i\pi/4}} f+\operatorname{res}_{e^{3i\pi/4}} f)=$

$\frac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$.

(7) 由推广的对称原理，f 可解析开拓为 $\frac{1}{2^2}<|z|\leq\frac{1}{2}$ 上的单叶函数，进而可以开拓到去心单位圆盘.（不会了）

(8) 定义 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}, z\mapsto\frac{f(z)-f(0)}{f(z)+f(0)}$. 于是，$g(0)=0$, 由 Schwarz 引理，$|g'(0)|\leq 1$，即 $|f'(0)|\leq 2|f(0)|$. 但是我不会证明 $|f'(0)|\leq 2\mathrm{Re}\, f(0)$.

0.1.3 习题 3

1. 画出如下集合的图像:
$$\{z:\arg\frac{z+i}{z-i}<\frac{\pi}{4}\}.$$

2. 构造一个共形映射将区域 $\{|z|>1\}\setminus(-\infty,-1)$ 映射成单位圆盘.

3. 设 $|a|<1,|b|<1$.
(1) 说明 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 在 $|z|\geq 1$ 可取到单值解析分支.
(2) 取定 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 在 $|z|\geq 1$ 的一个单值解析分支. 求积分
$$\int_{|z|=1}\frac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\,dz.$$

4. 是否存在定义在 $|z|<1$ 内的非常值解析函数 $f(z)$, 使得当 $|z|\to 1$ 时, $|f(z)|\to\infty$? 判断并给出证明.

5. 求积分
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

6. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, $|f(z)|<1$ 且 $f(0)\neq 0$. 证明: $f(z)$ 在圆盘 $\{|z|<|f(0)|\}$ 内部不存在零点.

7. 令 $\Delta=\{|z|<1\}$. 设 $f(z):\Delta\to\Delta$ 解析, 满足
$$f(0)=f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=0.$$
证明:
$$\left|f(\frac{1}{4})\right|\leq\frac{1}{21}.$$
判断上界 $\frac{1}{21}$ 是否是最佳的.

8. 设 $f(z)$ 为整函数.
(1) 若存在常数 $C,n\in\mathbb{N}$ 使得 $|f(z)|\leq C|z|^n$, 证明: $f(z)$ 是一个多项式.
(2) 若将上述条件改成: 存在常数 $C,n\in\mathbb{N}$ 使得 $|\mathrm{Re}\,f(z)|\leq Cr^n$, 能否证明 $f(z)$ 是一个多项式? 给出证明或反例.

(1) 直接代入 $z=x+iy$ 计算，得到 $\{x>0;(x-1)^2+y^2>2\}\cup\{x<0;(x-1)^2+y^2<2\}$.

(2) $\phi_1:\{|z|>1\}\setminus(-\infty,-1)\to\{\mathrm{Im}\ z>0;|z|>1\}, z\mapsto\sqrt{-z}$. $\phi_2:\{\mathrm{Im}\ z>$

$0; |z| > 1\} \to \{\text{Im } z > 0\}, z \mapsto z + \frac{1}{z}$. $\phi_3 : \{\text{Im } z > 0\} \to \{|z| < 1\}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. 于是 $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 : \{|z| > 1\} \backslash (-\infty, -1) \to \{|z| < 1\}, z \mapsto \frac{z-\sqrt{z}-1}{z+\sqrt{z}-1}$.

(3) (1) f 在 $\{|z| \geq 1\}$ 内没有支点，所以可以取单值分支. (2) 计算在 a, b 处的留数 (a_{-1}) 得到 $I = 2\pi i(a+b)$.

(4) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$.

(5) 记 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$，考虑在上半圆周上积分，在圆弧上积分趋于 0，计算围道内留数：$\text{res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$, $\text{res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$. 于是 $I = 2\pi i(\text{res}_{e^{\pi i/4}} f + \text{res}_{e^{3\pi i/4}} f) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(6) 若存在 $|\alpha| < |f(0)|$ 使得 $f(\alpha) = 0$,利用 Schwarz-pick lemma,$\left|\frac{f(b)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(b)}\right| \leq \left|\frac{b-a}{1-\overline{a}b}\right|, \forall a, b \in \mathbb{D}$, 取 $a = \alpha, b = 0$，就有 $|f(0)| \leq |\alpha|$，矛盾！

- 证明 Schwarz-pick lemma：令 $\varphi_a(z) \coloneqq \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$，对于 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，考虑 $\varphi_{f(a)} \circ f \circ \varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，它将 0 映射到 0，于是由 Schwarz 引理，$|\varphi_{f(a)}(f(\varphi_a(z)))| \leq |z|$，取 $z = \varphi_a(b)$，则 $|\varphi_{f(a)}(f(b))| \leq |\varphi_a(b)|$, 即 $\left|\frac{f(a)-f(b)}{1-\overline{f(a)}f(b)}\right| \leq \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|$.

(7) 记 $\varphi_a(z) \coloneqq \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$，考虑 $g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{\varphi_0(z) \cdot \varphi_{1/2}(z) \cdot \varphi_{-1/2}(z)}$，由于 $f \in H(\Delta)$ 在 $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 有零点，则 $g \in H(\Delta)$. 因为 $|f(z)| < 1$，所以 $|z| \to 1$ 时，$|g(z)| \to \lim_{|z| \to 1} |f(z)| \leq 1$. 于是由最大模原理[3]，$\max_{z \in \Delta} |g(z)| \leq 1$. 令 $z = \frac{1}{4}$，就有 $\left|g\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{\left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right|}{\left|\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right|} = 21 \left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq 1$，即 $\left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{21}$. 这是最佳上界，因为等号成立当且仅当 $g \equiv 1$，也就是 $f(z) = \varphi_0(z)\varphi_{1/2}(z)\varphi_{-1/2}(z)$.

(8) (1) $f \in H(\mathbb{C})$ 可写作 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，由 Cauchy 积分公式，$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z$,于是 $|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}} |\mathrm{d}z| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{C}{|z|^{k+1-n}} |\mathrm{d}z| \leq \frac{C}{R^{k-n}}$. 当 $k > n$ 时，由 R 的任意性，令 $R \to \infty$，则 $a_k = 0$. 于是 f 是一个至多 n 次多项式. (2) 利用 Borel-Carathéodory Theorem，对于 $|z| \leq r$，$|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|\zeta|=R} (\text{Re } f(\zeta)) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$，其中 $0 < r < R$. 取 $R = 2r$. 于是 $|f(z)| \leq C'|z|^n + D$，其中 C', D 是与 z 无关的常数. 类似 (1) 的讨论可知 f 是多项式.

- Borel-Carathéodory Theorem 的证明：

[3] 只需要趋于边界时的最大值即可，见 Rudin p.253

定义$A = \sup\limits_{|z|\le R} \operatorname{Re} f(z)$。

首先设$f(0)=0$。由于$\operatorname{Re} f$是调和的，可以取$A>0$。f映到直线$x=A$左边的半平面P。我们想把这个半平面映到圆盘上，再用施瓦茨引理，得到所要的不等式。

$w \mapsto w/A - 1$把P变成标准左半平面。$w \mapsto R(w+1)/(w-1)$把左半平面变成圆心在原点且半径为R的圆。它们的复合映射把0映成0，就是所需要的映射：

$$w \mapsto \frac{Rw}{w-2A}$$

对上面这个映射与f的复合使用施瓦茨引理，得到

$$\frac{|Rf(z)|}{|f(z)-2A|} \le |z|$$

取$|z|<r$，上式变为

$$R|f(z)| \le r|f(z)-2A| \le r|f(z)| + 2Ar$$

所以

$$|f(z)| \le \frac{2Ar}{R-r}$$

对于一般的情况，考虑$f(z)-f(0)$

$$\begin{aligned}
|f(z)|-|f(0)| &\le |f(z)-f(0)| \\
&\le \frac{2r}{R-r} \sup_{|w|\le R} \operatorname{Re}(f(w)-f(0)) \\
&\le \frac{2r}{R-r}\left(\sup_{|w|\le R} \operatorname{Re} f(w) + |f(0)|\right)
\end{aligned}$$

整理后即得所要证明的不等式。

-