定义 0.0.1. 广义函数（分布）开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的**广义函数（分布）**是拓扑线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 上所有连续线性泛函的集合。

对 Ω 上的任意局部可积函数 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，用同一记号 u 表示由它所定义的 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的下述泛函：

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数. 如果存在非负整数 m 和正数 C, M 使成立

$$|u(x)| \leqslant C(1+|x|)^m, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad |x| \geqslant M$$

就称 u 为**缓增函数**；如果存在正数 M 使对任意正整数 m 存在相应的常数 $C_m > 0$ 使成立

$$|u(x)| \leqslant C_m(1+|x|)^{-m}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad |x| \geqslant M$$

就称 u 为**急降函数**.

定义 0.0.2. 缓增分布 对 $\mathbf{R}^n$ 上的分布 u，如果存在一组缓增的局部可积函数 $\{f_\alpha : \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, |\alpha| \leqslant m\}$ 使成立

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha \quad (\text{在}\mathbf{R}^n \text{ 上}),$$

就称 u 为缓增广义函数，简称缓增广函. $\mathbf{R}^n$ 上的全体缓增广函组成的集合记作 $\mathcal{S}'\left(\mathbf{R}^\backslash\right)$.

定义 0.0.3. *Schwartz* 空间 对 $\varphi \in C^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$，如果它本身以及它的各阶偏导数都是急降函数，就称 φ 为急降 C^∞ 函数或 *Schwartz* 函数，其全体组成的集合记作 $\mathcal{S}\left(\mathbf{R}^\backslash\right)$.

引理 0.0.4. $C_0^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$ 在 $\mathcal{S}\left(\mathbf{R}^\backslash\right)$ 中稠密.

命题 0.0.5. 假设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是调和的**缓增分布**,那么,u 必然是 $(x_1, \cdots, x_n$ 的）多项式函数。

证明. 由于 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ，所以我们可以对它做 Fourier 变换。从而，

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad -|\xi|^2 \widehat{u} = 0$$

这表明 (why?) $\operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \{0\}$ ，从而，

$$\widehat{u} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0(\xi)$$

对上式作 Fourier 逆变换：

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \left(\frac{\xi}{i}\right)^\alpha$$

这就得到了要证明的结论。 □

注记 0.0.6. 我们通常把 $\operatorname{supp}(\widehat{u})$ 称为 u 的**谱**并记作 $\operatorname{spec}(u)$.