第 3 次作业 (截止时间：3月26日23:59)

1. 判断下列集合的基数是 $\aleph_0$, $\aleph$, 还是 $2^{\aleph}$, 并说明理由:

    (1) 所有 n 维开矩体*构成的集合 $\mathscr{R}$; †

    (2) 所有以有理点(即坐标皆为有理数的点)为顶点的 n 维开矩体构成的集合 $\mathscr{Q}$;

2. 是否存在集合族 Γ, 使得对任意集合 B, 都存在 $A \in \Gamma$, 使得 $A \sim B$?

3. 设 $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ 且 $a \neq b$. 证明: $\mathbb{R}^2$ 中存在经过 a 和 b 两点且不含有理点的圆周.

4. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可数集. 证明: 存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A \cap (A + x) = \varnothing$. ‡

5. 教材第一章习题第 42 题 (1)(2).

6. 教材第一章习题第 43 题.

7. 若 A, B 都是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集, 是否一定存在 $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, 使得 $d(x_0, y_0) = d(A, B)$? 予以证明或举出反例.

8. 试构造下列各函数(列).

    (1) 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的非空闭集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f, 使得

    - (i) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;
    - (ii) $f(x) = 0$, $\forall\, x \in A$;
    - (iii) $f(x) = 1$, $\forall\, x \in B$.

    (2) 设 A, $B \subset \mathbb{R}^n$, 且满足 $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f, 使得

    - (i) $f(x) < 0$, $\forall\, x \in A$;
    - (ii) $f(x) > 0$, $\forall\, x \in B$.

    (3) 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数序列 $\{f_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

    (4) 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数序列 $\{f_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_G(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

---

*开矩体是矩形在高维的推广, 其定义可参见教材 § **2.1** 的开头.

†此题即为教材第一章习题第 23 题的推广.

‡$A + x := \{a + x : a \in A\}$.

9. 教材第一章习题第 44 题.
10. 教材第一章习题第 45 题.
11. 教材第一章习题第 46 题.
12. 教材第一章习题第 48 题.

给爱思考的同学的问题

1. 第 1 题续:
    (3) 所有实数序列构成的集合 $\mathbb{R}^\infty$;
    (4) 所有有理数序列构成的集合 $\mathbb{Q}^\infty$;[§]
    (5) 具有连续统基数 $\aleph$ 的集合 E 的所有可数子集构成的集合 $\mathscr{E}$;
    (6) $[a,\ b]$ 上的所有连续函数构成的集合 $C[a,\ b]$;
    (7) $[a,\ b]$ 上的所有单调函数构成的集合 $M[a,\ b]$;
    (8) $[a,\ b]$ 上的所有实函数构成的集合 $F[a,\ b]$;
2. 教材第一章习题第 42 题 (3).

[§]此题即为教材第一章习题第 25 题.

提示

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

重要的事情说三遍!!!

提示

1. 利用 Bernstein **定理**.

2. 注意幂集的思想.

3. 考察基数.

6. 考察点集 $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in A} \overline{B}(x,\varepsilon)$ 与距离函数 $d(x,A)$ 的关系.

8. (1) 利用距离函数 $d(x,A)$ 和 $d(x,B)$.

   (3) 利用距离函数 $d(x,F)$.

   (4) 基于开集与闭集的互补性, 可利用 (3) 的结果.

9. 利用第 8 题的结果.

如果你看了上面的提示之后又经过一段时间的艰苦尝试还是找不到思路, 可继续往下看.

进一步的提示

2. 用反证法. 假设存在这样的集合族 Γ, 设法构造集合 B, 使得 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}, \forall\, A \in \Gamma$.

3. 用 $\mathscr{A}$ 表示所有经过 a 和 b 两点的圆周构成的集合, 用 $\mathscr{B}$ 表示所有经过 a 和 b 两点且包含有理点的圆周构成的集合. 证明 $\mathscr{B}$ 可数, 而 $\mathscr{A}$ 不可数.

6. 若 A 是闭集, 则 $A_\varepsilon = \big\{x : d(x, A) \leqslant \varepsilon\big\}$; 若 A 是开集, 则 $A_\varepsilon = \big\{x : d(x, A) < \varepsilon\big\}$.