第 4 次作业 (截止时间：4月2日23:59)

1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 称 E 为孤立集, 若 E 的每一个点都是它的孤立点; 称 E 为离散集, 若 E 没有聚点.

   (1) 离散集是否必为孤立集? 孤立集是否必为离散集? [*]

   (2) 证明无论孤立集还是离散集都是可数集.

2. 教材第一章习题第 31 题.

3. 教材第一章习题第 32 题.

4. 设 C 是 Cantor 集. 证明: $C + C = [0,\ 2]$. [†]

5. 教材第一章习题第 55 题.

6. 教材第二章习题第 1 题.

7. 教材第二章习题第 12 题.

8. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*A = 0$. 证明对任意 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有 $m^*(A \cup B) = m^*B = m^*(B \setminus A)$. [‡]

9. 若 $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*A,\, m^*B$ 都有限, 证明 $\big|m^*A - m^*B\big| \leqslant m^*(A \triangle B)$. [§]

10. 教材第二章习题第 14 题.

给爱思考的同学的问题

1. 第 3 次作业的第 1 题再续:

   (9) $\mathbb{R}^n$ 的所有开集构成的集合 $\mathscr{T}$;

   (10) $\mathbb{R}^n$ 的所有闭集构成的集合 $\mathscr{C}$;

[*]此题即为教材第一章习题第 28 题.

[†]对于 $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$, 定义 $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

[‡]此题的一部分即为教材第二章习题第 4 题.

[§]$A \triangle B$ 表示集合 A 与 B 的对称差, 其定义为 $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 此题是教材第二章习题第 8 题的加强.

(11) $\mathbb{R}^n$ 的所有孤立集构成的集合 $\mathscr{I}$;

(12) $\mathbb{R}^n$ 的所有完全集构成的集合 $\mathscr{D}$.

2. 证明: $\mathbb{R}^n$ 的任意非空完全集是不可数集. ¶

¶可以证明, $\mathbb{R}^n$ 的任意非空完全集的基数为连续统基数 $\aleph$.

提示

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

一定要先动脑思考并动手尝试后才能看提示!!!

重要的事情说三遍!!!

提示

1. (2) 利用第 3 次作业的第 1 题 (2) 的结果.

4. $\forall\, z \in [0,\ 2]$, 可将 $\frac{z}{2} \in [0,\ 1]$ 可按三进制小数展开.

6. 取 E 的 L 覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum\limits_k \big|I_k\big| < \varepsilon$. 由于 $\big\{x^2 : x \in E\big\} \subset \bigcup\limits_k \big\{x^2 : x \in I_k\big\}$, 故只需估计 $\big\{x^2 : x \in I_k\big\}$ 的外测度, 其中 I_k 是开区间.

7. 由于 $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in \mathbb{R}\big\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [-k,\ k]\big\}$, 故只需证明每个 $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [-k,\ k]\big\}$ 都是零测集.

10. 参考概率论中的 Borel-Cantelli 引理的证明.

如果你看了上面的提示之后又经过一段时间的艰苦尝试还是找不到思路, 可继续往下看.

进一步的提示

6. E 可分解为可列个有界集 E_k 的并, 而 $\left\{x^2 : x \in E\right\} = \bigcup\limits_k \left\{x^2 : x \in E_k\right\}$, 故可假定 E 是有界集, 从而可使 E 的 L 覆盖 $\{I_k\}$ 也都包含在一个有界区间内.

7. 利用连续函数在闭区间上的一致连续性.