实变函数

乐绎华

学号：23363017

2025 年 5 月 21 日

Exercice 1

1. (1) 设 f, g 分别在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可积, 且在 E 的任意可测子集 A 上有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$, 证明 $f \leqslant g$ a. e. 于 E.

   (2) 设 f, g 分别在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可积, 且在 E 的任意可测子集 A 上有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$, 证明 $f = g$ a. e. 于 E.

   (3) 教材第四章习题第 17 题.

17. 若 f 在 E 上可积,并且在 E 上任意可测子集 A 上有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,证明:$f(x) = 0$ a. e. 于 E.

(1) If $f > g$ on A, $mA > 0$, then

$$\int_A f\,\mathrm{d}x > \int_A g\,\mathrm{d}x$$

Contradiction!

(2) Apply (1). $f \geq g$ a.e. on E, $f \leq g$ a.e. on E; thus $f = g$ a.e. on E.

(3) Put $g \equiv 0$ in (2), then $f(x) = 0$ a.e. on E.

Exercice 2

5. 设 $f \in L[0,1]$,证明对任意正整数 k 有 $x^k f(x) \in L[0,1]$,并且

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$f \in L[0,1]$ iff $f^+, f^- \in L[0,1]$. As $(x^k f(x))^+ = x^k f^+(x)$, $(x^k f(x))^- = x^k f^-(x)$,

$$\int_{[0,1]} |x^k f^+(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{[0,1]} |f^+(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

$$\int_{[0,1]} |x^k f^-(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{[0,1]} |f^-(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

$x^k f^+, x^k f^- \in L[0,1]$, then $x^k f \in L[0,1]$.

$$\lim_{k\to\infty} x^k f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ f(1) & x = 1 \end{cases}$$

By DCT,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\{1\}} f(1)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 3

3. Fatou 引理的推广.

(1) 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列. 若存在 $g \in L(E)$, 使得对 $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 有 $f_k \geqslant g$ a. e. 于 E, 试证 f_k 和 $\varliminf\limits_{k\to\infty} f_k$ 在 E 上的积分有意义, 且有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列. 若存在 $h \in L(E)$, 使得对 $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 有 $f_k \leqslant h$ a. e. 于 E, 试证 f_k 和 $\varlimsup\limits_{k\to\infty} f_k$ 在 E 上的积分有意义, 且有

$$\int_E \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 教材第四章习题第 27 题.

27. 设 $\{f_k\}$ 是可测集 E 上的可测函数列,并且对所有的 k 有 $|f_k(x)| \leqslant F(x)\,(x \in E)$ 及 $F \in L(E)$,证明:

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) 对任意 E 上可测的 $f \ge g$, $f^- = \min\{0,f\} \ge \min\{0,g\} = g^-$, 由于 $g \in L(E)$,则 $\int_E g^- > -\infty$,故 $\int_E f^- \ge \int_E g^- > -\infty$,故 $\int_E f^+$ 和 $\int_E f^-$ 不同时为 ∞,故 $\int_E f$ 有定义. 由于 $f_k \ge g, \varliminf_{k\to\infty} f_k \ge g$,故 $\int_E f_k$, $\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k$ 有定义. 由于 $\varliminf_{k\to\infty} f_k \le f_k$ 于 E, k 任意,故 $\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k \le \int_E f_k$,对右边关于 k 取下极限,得到 $\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k$.

(2) 考虑 $-f_k$, $-f_k \ge -h$, $h \in L(E) \Rightarrow -h \in L(E)$. 于是 $\int_E (-f_k)$, $\int_E \varliminf_{k\to\infty}(-f_k)$ 有定义,其中 $(-f_k)^- = \min\{0,-f_k\} = -\max\{0,f_k\} = -f_k^+, (-f_k)^+ = -f_k^-$, $\varliminf_{k\to\infty}(-f_k) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n}(-f_k) = \lim_{n\to\infty}(-\sup_{k\ge n} f_k) = -\varlimsup_{k\to\infty} f_k$.

因此 f_k^+, f_k^- 不同时为 ∞, $(\overline{\lim}_{k\to\infty} f_k)^+, (\overline{\lim}_{k\to\infty} f_k)^-$ 不同时为 ∞, 故 $\int_E f_k, \int_E \overline{\lim}_{k\to\infty} f_k$ 有意义. 由 (1) 可知 $\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty}(-f_k) \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E(-f_k)$. 故 $\int_E \overline{\lim}_{k\to\infty} f_k \geq \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k$.

(3) 对于数列 $\{\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\}_{k\geq 1}$ ，显然有 $\underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k$，根据 $-F \leq f_k \leq F$, $F \in L(E), -F \in L(E)$ ，结合 (1)(2) 可知

$$\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E \overline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

4. Levi **定理**的推广.* 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数的递增列, 记

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in E.$$

若存在 $g \in L(E)$, 使得对 $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 有 $f_k \geqslant g$ a. e. 于 E, 试证 f_k 和 f 在 E 上的积分有意义, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*此题为教材第四章习题第 8 题的变形.

类似 Exercice 3 中的讨论，可知 f_k, f 在 E 上积分有意义，对于非负递增可测函数列 $\{f_k - g\}_{k\geq 1}$，我们有 Levi 定理可知 $\lim_{k\to\infty} \int_E (f_k - g) = \int_E (f - g)$. 由积分的线性性可知

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5

5. Lebesgue **控制收敛定理**的推广. 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列, 且在 E 上几乎处处收敛于 f. 若存在 E 上的几乎处处收敛的可积函数列 $\{g_k\}$, 使得 $|f_k| \leqslant g_k$ a. e. 于 E, $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

试证 f_k, $f \in L(E)$, 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若将条件改为 $\{f_k\}$ 或 $\{g_k\}$ 依测度收敛, 结论是否仍成立? 先判断, 再证明或举反例.

由比值判别法，f_k 可积. 记 g_k 几乎处处收敛于 g，则 $\int_E g = \int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} g_k \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E g_k$，故 $g \in L(E)$. 令 $k \to \infty$，则 $|f| \le g$，由比值判别法，$g \in L(E)$. 考虑非负可测函数列 $\{g_k - f_k\}_{k\ge1}$，它几乎处处收敛于 $g - f$. 利用 Fatou 引理，$\int_E (g-f) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E (g_k - f_k)$，于是

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g-f) \le \lim_{k\to\infty} \int_E g_k - \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k = \int_E g - \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k$$

于是 $\overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k \le \int_E f$. 再考虑非负可测函数列 $\{f_k + g_k\}$ 得到 $\int_E f \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k$. 因此 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$.

若 $f_k \overset{m}{\rightrightarrows} f$，对于任意子列 $\{f_{k_n}\}$，存在子列 $\{f_{k_{n_m}}\} \to f$ a.e. 于 E. 从而 $f \in L(E)$, $\lim_{m\to\infty} \int_E f_{k_{n_m}} = \int_E f$. 对于数列 $\{\int_E f_k\}$，它的任意子列 $\{\int_E f_{k_n}\}$ 都含有子列 $\{\int_E f_{k_{n_m}}\} \to \int_E f$，不妨考虑 $\{\int_E f_k\}$ 的上下极限序列，它们都含有子列收敛于 $\int_E f$，故 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$.

若 $g_k \overset{m}{\rightrightarrows} g$, 同样考虑 $\{f_k\}$ 的任意子列，再选取子列 k_n 使得 $g_{k_n} \to g$ a.e. 于 E, 重复上述论述即可得证.

Exercice 6

6. 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数列, 且在 E 上几乎处处或依测度收敛于 f. 又设

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

证明: 对于 E 的任意可测子集 B, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $g_k = f_k\chi_B$，于是 $|g_k| \le f_k$，利用 Exercice 5 立得 $\lim_{k\to\infty} \int_E g_k\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x$, 也就是 $\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7

7. 设 $\{f_k\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可积函数列, 且在 E 上几乎处处或依测度收敛于 f. 试证以下两者等价:

(1) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$;

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

若 $\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k-f|=0$，则 $\int_E||f_k|-|f||\le\int_E|f_k-f|\to 0$. 若 $\int_E|f_k|\to\int_E|f|<\infty$, 注意到 $|f_k-f|\le|f_k|+|f|$，由 DCT

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k-f|=\int_E\lim_{k\to\infty}|f_k-f|=\int_E 0=0$$

Exercice 8

8. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集且 $m(E)<\infty$, f 是 E 上的正值可测函数. 对于任意常数 q 满足 $0<q\leqslant m(E)$, 记 $\mathscr{S}=\{B\subset E: B \text{ 是可测集且 } m(B)\geqslant q\}$. 试证

$$\inf_{B\in\mathscr{S}}\int_B f(x)\,\mathrm{d}x>0.^{\dagger}$$

考虑反证，假设 $\inf_{B\in\mathscr{S}}\int_B f=0$, 则存在 $\{B_k\}\subset\mathscr{S}$ 使得

(1) $B_k\subset E$

(2) $m(B_k)>q$

(3) $\int_{B_k}f\to 0$

记 $F_j=E\left(f\le\frac{1}{j}\right)$. 于是 $\lim_{j\to\infty}m(F_j)=m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}F_j\right)=m(E(f=0))=0$, 从而存在 J 使得 $m(F_J)<\frac{q}{2}$，故

$$\int_{B_k}f=\int_{B_k\cap F_J}f+\int_{B_k\cap F_J^c}f\ge\int_{B_k\cap F_J^c}f\ge\frac{1}{J}m(B_k\cap F_J^c)$$

令 $k\to\infty$，就有 $m(B_k\cap F_J^c)\to 0$, 存在 K 使得 $m(B_K\cap F_J^c)<\frac{q}{2}$，故

$$m(B_K)=m(B_K\cap F_J)+m(B_K\cap F_J^c)\le m(B_K)+m(B_K\cap F_J^c)<\frac{q}{2}+\frac{q}{2}=q$$

矛盾！

Exercice 9

9. 设 f 是可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 E 的可测子集列 $\{E_k\}$ 和常数 M, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E\setminus E_k)=0$, 且 $\displaystyle\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$, $\forall\, k\in\mathbb{N}_+$, 试证 f 在 E 上可积.

$f_k\coloneqq f\cdot\chi_{E_k}$, then

$$E(f_k\not\to f)=E(f(\chi_{E_k}-1)\not\to 0)\subset E(\chi_{E\setminus E_k}\not\to 0)=\bigcap_{k=1}^{\infty}(E\setminus E_k)$$

Then $m(E(f_k \not\to f)) \leq m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(E \setminus E_k)\right) \leq m(E \setminus E_k), \forall k$. Let $k \to \infty$, then

$$m(E(f_k \not\to f)) = 0$$

Thus $f_k \to f$ a.e. on E. As $\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq M$, by BCT,

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \leq M$$

Since f is nonnegative measurable, f is integrable.