实变函数

乐绎华

学号：23363017

2025 年 3 月 24 日

习题 1. *1.* 判断下列集合的基数是 $\aleph_0, \aleph$ ，还是 $2^{\aleph}$ ，并说明理由：（*1*）所有 n 维开矩体*构成的集合 $\mathscr{R}$ ；[†] （*2*）所有以有理点（即坐标皆为有理数的点）为顶点的 n 维开矩体构成的集合 $\mathscr{Q}$ ；

(1)

$$\#\mathscr{R} = (\#\mathbb{R})^n = \aleph$$

(2)

$$\#\mathscr{Q} \leq \underbrace{\mathbb{Q}^n \times \cdots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ times}} = \mathbb{Q}^{n^2} = \aleph_0$$

习题 2. *2.* 是否存在集合族 Γ ，使得对任意集合 B ，都存在 $A \in \Gamma$ ，使得 $A \sim B$ ？

I don't understand.

习题 3. *3.* 设 $a, b \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ 且 $a \neq b$ 。证明：$\mathbb{R}^2$ 中存在经过 a 和 b 两点且不含有理点的圆周.

证明. 假设任意经过 a, b 两点的圆周都包含有理点，考虑 a, b 的中垂线 l，这是一条直线，上面全部点的势为 $\aleph$. 取任意 $c \in l$ 为圆心，作过 a, b 的圆，可以找到一个不同于 a, b 的点 $p_c \in \mathbb{Q}^2$，我们有如下自然映射

$$\varphi : l \to \mathbb{Q}^2 \qquad c \mapsto p_c$$

这显然是个单射，因为任意两个不完全重合的圆至多有两个交点，而刚才取的圆都交于 a, b，故 $c_1 \neq c_2 \Rightarrow p_{c_1} \neq p_{c_2}$. 因此

$$\#l = \#\varphi(l) \leq \#\mathbb{Q}^2 = \aleph_0$$

矛盾！ □

习题 4. *4.* 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可数集. 证明：存在 $x \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $A \cap (A + x) = \varnothing$.

证明. Assume, for contradiction, that for any $x \in \mathbb{R}^n$, there exists $y_x \in \mathbb{R}^n$ such that

$$y_x \in A \cap (A + x)$$

That is

$$y_x \in A \text{ and } y_x - x \in A$$

Construct the following map

$$\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow A \times A \qquad x \longmapsto (y_x, y_x - x)$$

which is 1-1, sisnce $(y_{x_1}, y_{x_1} - x_1) = (y_{x_2}, y_{x_2} - x_2) \Rightarrow y_{x_1} = y_{x_2}, x_1 = x_2$. Thus

$$\#\mathbb{R}^n = \#\varphi(\mathbb{R}^n) \le \#(A \times A) = (\#A)^2 = \aleph_0$$

which is a contradiction. □

习题 5. *5. 教材第一章习题第 42 题（1）（2）.*

42. 对于点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 及点集 $E \subset \mathbf{R}^n$，定义 x_0 到 E 的距离为

$$d(x_0, E) = \inf\{\, |x - x_0| \,|\, x \in E \},$$

证明：

（1）闭包 $\overline{E} = \{x \mid d(x,E) = 0\}$，边界 $\partial E = \{x \mid d(x,E) = d(x,E^0) = 0\}$；

（2）$x \notin E$，则 $d(x,E) = d(x,\partial E)$；

证明. (1) If $d(x, E) = 0$ then $\inf\{|x - x'| : x' \in E\} = 0$ which means that x is a limit point of E. By definition,

$$\overline{E} = \{x : d(x, E) = 0\}$$

Errata: $\partial E \ne \{x : d(x, E) = d(x, \mathring{E}) = 0\}$.

$$\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$$

(2) For any $x \notin E$, check that

$$\inf\{|x - y| : y \in E\} = \inf\{|x - z| : z \in \partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}\}$$

Denote that

$$r = \inf\{|x - y| : y \in E\}, \quad s = \inf\{|x - z| : z \in \partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}\}$$

Then $\forall\epsilon>0, \exists z\in\partial E$ s.t.

$$|x-z|\leq s+\epsilon$$

Pick $\widehat{z}\in B_z(\epsilon)\cap E$, then

$$|x-\widehat{z}|\leq|x-z|+|z-\widehat{z}|\leq s+2\epsilon$$

Thus

$$\inf_{y\in E}|x-y|\leq s+2\epsilon$$

Since ϵ is arbitrary, we have

$$r\leq s$$

WLOG, assume that E is bounded (otherwise we replace E by $E\cap\{y:|y-x|\leq r+1\}$)

Pick x_n in each $\left\{y:|y-x|\leq r+\frac{1}{n}\right\}$ for $n\in\mathbb{N}$. Since $\overline{E}$ is closed and bounded, thus compact, thus sequentially compact. Then $\{x_n\}\to\widehat{x}$ for some $\widehat{x}\in\overline{E}$. Obviously, $\widehat{x}\in\partial E$. We have

$$\inf_{y\in E}|x-y|=|x-\widehat{x}|\geq\inf_{z\in\partial E}|x-z|$$

That is

$$r\geq s$$

Hence

$$r=s$$

$\square$

习题 6. *6. 教材第一章习题第 43 题.*

43. 若 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是开集,试问所有以 $x\in A$ 为心的开球 $B(x,\varepsilon)$ 或闭球 $\overline{B}(x,\varepsilon)$($\varepsilon$ 为任意给定正数)的并集是开集还是闭集?若 A 为闭集或任意集,结果又如何?

Since open set remains open under any intersection. That is, for any set A, $\bigcup_{x\in A}B(x,\epsilon)$ is open.

Now we consider $\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,\epsilon)$.

If A is open, pick any $y\in\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,\epsilon)$, then $y\in\overline{B}(x,\epsilon)$ for some $x\in A$. There exists $z=\theta x+(1-\theta)y\in A$ for some $\theta\in(0,1)$, then $y\in\overline{B}(z,\epsilon)\subset\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,\epsilon)$. Thus y is an interior point of $\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,\epsilon)$. Hence $\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,\epsilon)$ is open.

If A is closed. Check that $E=\bigcap_{x\in A}\{y:|y-x|>\epsilon\}$ is open.

Pick $z \in E$, then $|z-x| > \epsilon, \forall x \in A$. Pick x_n in each $\left\{x : |x - d(x,A)| < \frac{1}{n}\right\}$, then $\{x_n\} \to \widehat{x}$ for some $\widehat{x} \in A$, thus $|z-\widehat{x}| = \inf_{x\in A}|z-x|$. Let $\delta = \frac{1}{2}(|x-\widehat{x}|-\epsilon)$, then $B_\delta(z) \subset E$. z is an interior point of E. Hence E is open.

If $A = [0,1)^n$ then $\bigcup_{x\in A} \overline{B}(x,\epsilon)$ is neither open nor closed.

习题 7. *7.* 若 A, B 都是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集，是否一定存在 $x_0 \in A, y_0 \in B$ ，使得 $d(x_0, y_0) = d(A, B)$ ？予以证明或举出反例.

不妨设 A, B 为有界闭集，则 A, B 为紧集，故列紧. 由 $d(A,B)$ 的定义可知，存在 $\{(x_n, y_n)\} \in A \times B$ 使得 $d(A,B) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$，其中 $(x_0, y_0) \in A \times B$.

习题 8. *8.* 试构造下列各函数（列）.（*1*）设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的非空闭集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f ，使得（*i*）$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ；（*ii*）$f(x) = 0, \forall x \in A$ ；（*iii*）$f(x) = 1, \forall x \in B$.（*2*）设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ，且满足 $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \varnothing$. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f ，使得（*i*）$f(x) < 0, \forall x \in A$ ；（*ii*）$f(x) > 0, \forall x \in B$.（*3*）设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数序列 $\{f_k\}$ ，使得 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_F(x)$ ，$\forall x \in \mathbb{R}^n$.（*4*）设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 试作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数序列 $\{f_k\}$ ，使得 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_G(x)$ ，$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(1)

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

(2)

$$f(x) = d(x,A) - d(x,B)$$

(3)

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + kd(x,F)}$$

(4)

$$f_k(x) = \frac{kd(x,G^c)}{1 + kd(x,G^c)}$$

习题 9. *9.* 教材第一章习题第 *44* 题.

44. 若 A, B 是任意两个不相交的闭集，证明必有开集 G_1, G_2 使 $G_1 \supset A_2, G_2 \supset B$，且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

Note that all the sets must lies in a metric space. And the property A, B satisfy is called Normal separation property.

Let

$$F_1 \subseteq \mathcal{O}_1 := \{x : d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$$

$$F_2 \subseteq \mathcal{O}_2 := \{x : d(x, F_1) > d(x, F_2)\}$$

Then $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$.

习题 10. *10. 教材第一章习题第 45 题.*

45. 若 $A, B \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{A} \cap B = \varnothing$, $\overline{B} \cap A = \varnothing$, 试证明存在开集 G_1, G_2 使得 $G_1 \supset A$, $G_2 \supset B$, 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

证不出来

习题 11. *11. 教材第一章习题第 46 题.*

46. 证明: $\mathbf{R}^n$ 的子集 E 为闭集的充分必要条件是, 对于任意的 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 存在 $y_0 \in E$ 使得

$$|x_0 - y_0| = d(x_0, E).$$

必要性显然，考虑充分性，假设 E 不是闭集，则存在一个包含在 E 中的极限点 x_0，于是存在 $y_0 \in E$ 使得

$$|x_0 - y_0| = d(x_0, E) = 0$$

于是 $x_0 = y_0 \in E$，矛盾！

习题 12. *12. 教材第一章习题第 48 题.*

48. 对于 $\mathbf{R}$ 上的函数 f, 定义它的振幅函数为

$$\omega(x; f) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x') - f(x'')|.$$

证明对任意 $\varepsilon > 0$, $\{x \mid \omega(x; f) \geqslant \varepsilon\}$ 是闭集. 又证 f 的连续点集为 $\{x \mid \omega(x; f) = 0\}$.

下面证明 $\{x : \omega(x; f) < \epsilon\}$ 是开集. 任意给定 $x \in \{x : \omega(x; f) < \epsilon\}$，记

$$r = \inf_{\delta > 0} \underbrace{\sup_{x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x') - f(x'')|}_{=: A(x, \delta)} < \epsilon$$

对于任意给定的 $\epsilon' \in \left(0, \frac{\epsilon-r}{2}\right)$，存在 $\widehat{\delta} > 0$，使得

$$A(x, \widehat{\delta}) \geq r + \epsilon' < \epsilon$$

那么对于任意的 $y \in B_{\widehat{\delta}/2}(x)$，有

$$A\left(y, \widehat{\delta}/2\right) \leq A(x, \widehat{\delta}) < \frac{\epsilon + r}{2} < \epsilon$$

因此

$$\inf_{\delta>0} \sup_{x', x'' \in (y-\delta, y+\delta)} |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

故 $B_{\widehat{\delta}/2}(x) \subset \{x : \omega(x; f) < \epsilon\}$. 得证！

再用 C 表示 f 的连续点集，显然 $C \subseteq \{x : \omega(x; f) = 0\}$. 另一方面，对于任意 $x \in \{x : \omega(x; f) = 0\}$，

$$\inf_{\delta>0} \sup_{x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x') - f(x'')| = 0$$

也就是说，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\sup_{x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

这就是 f 在 x 处连续的定义.