实变函数

乐绎华

学号：23363017

2025 年 3 月 14 日

第 2 次作业 (截止时间: 3月19日23:59)

1. 证明教材 p. 16 的**推论**: 若 A 是无穷集, B 是可数集, 则 $A \cup B \sim A$.
2. 证明: 可列集 A 的所有有限子集构成的集合 $\mathscr{A}$ 是可列集.
3. 所谓代数数, 是指满足某个整系数多项式方程的复数. 显然所有的有理数都是代数数, 但代数数也可能是无理数, 甚至虚数, 例如 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{-1}$ 都是代数数. 证明: 全体代数数构成的集合是可列集.
4. 设 $E \subset (0, +\infty)$. 证明:
   (1) 若存在常数 M, 使得 E 中任意有限个不同的数之和都不超过 M, 则 E 是可数集;
   (2) 若 E 是无穷集, 且 E 中任意选取可列个不同的数所组成的正项级数都收敛, 则 E 是可列集.
5. 证明: (a, b) 上的凸函数 f 的不可导的点只有可数个.
6. 证明: (a, b) 上的函数 f 的局部极小值只有可数个.
   y 称为函数 f 的局部极小值, 若存在 f 的局部极小值点 x 使得 $y = f(x)$.
7. 是否存在集合 E, 使得 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集?

给爱思考的同学的问题

1. 证明: (a, b) 上的函数 f 的第一类间断点只有可数个.
2. 证明: (a, b) 上的函数 f 的不可导但单侧可导的点只有可数个.
3. 教材第一章习题第 19 题.

习题 1. *若 A 是无穷集，B 是可数集，则 $A \cup B \sim A$.*

只需要建立一个一一映射，用来说明 $A \cup B$ 和 A 的元素个数一样多。

定理 1.6 A 为无穷集的充分必要条件是 A 与自己的某个真子集对等.

证明 必要性. 设 A 为无穷集，则存在 $a_0 \in A$，而 $A_0 = A \setminus \{a_0\}$ 仍为无穷集，故由前一定理，存在可列子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\} \subset A_0$. 作映射 $f: A_0 \to A$ 如下，对于任意 $x \in A_0$，令

$$f(x) = \begin{cases} a_{j-1}, & x = a_j (j = 1, 2, \cdots), \\ x, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然是 A_0 到 A 的一一映射，故 $A \sim A_0$，而 A_0 是 A 的真子集.

充分性显然，因为有限集不可能与它的任何真子集对等. □

定理 1.

不妨设 $A \cap B = \varnothing$. 由于 B 可数，不妨设为 $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$，由于 A 是无穷集，根据 theorem 1 我们知道 $A \sim A_0$，其中 $A_0 = A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$，$\{a_1, a_2, \ldots\} \subset A$ 是一个可数集。那么我们构造映射如下

$$f: A \cup B \to A_0 \qquad x \mapsto \begin{cases} a_{2j-1} & \text{if } x = b_j \\ a_{2j} & \text{if } x = a_j \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然 $f(A \cup B) = A_0$，$x, y \in A \cup B, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. 因此 f 是一一映射，故 $A \cup B \sim A_0 \sim A$.

习题 2. 证明：可列集 A 的所有有限子集构成的集合 $\mathscr{A}$ 是可列集.

不妨设 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$，构造一个嵌入映射

$$f: \mathscr{A} \to \mathbb{Q} \qquad \{a_i\}_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} 2^{-i}$$

其中 $I \subset \mathbb{N}$ 有限，显然 f 是一个单射，因此 $f: \mathscr{A} \to f(\mathscr{A})$ 是一个一一映射，由于 $f(\mathscr{A}) \subset \mathbb{Q}$，所以 $f(\mathscr{A})$ 至多可数，故 $\mathscr{A}$ 至多可数。由于 $\{a_i\} \in \mathscr{A}, \forall i$，所以 $\mathscr{A}$ 不可能有限，因此 $\mathscr{A}$ 可数。

习题 3. 所谓代数数，是指满足某个整系数多项式方程的复数. 显然所有的有理数都是代数数，但代数数也可能是无理数，甚至虚数，例如 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{-1}$ 都是代数数。证明：全体代数数构成的集合是可列集.

设全体代数数构成的集合为 $\mathscr{A}$，全体 n 次整系数多项式构成的集合为 P_n，全体满足 n 次整系数多项式方程的代数数构成的集合为 $\mathscr{A}_n$，我们构造如下的

映射

$$f_n : P_n \to \mathscr{A}_n \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

显然 $\mathscr{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(P_n)$，由于可数集的可数并也是可数集，故只需要证明 $f_n(P_n)$ 都是至多可数集即可。由代数数的定义可知，f_n 是一个满射，由于 $P_n \sim \mathbb{Z}^{n+1}$ 可数，所以 $\mathscr{A}_n = f_n(P_n)$ 至多可数。得证！

习题 4. *设 $E \subset (0, +\infty)$. 证明：（1）若存在常数 M ，使得 E 中任意有限个不同的数之和都不超过 M ，则 E 是可数集；（2）若 E 是无穷集，且 E 中任意选取可列个不同的数所组成的正项级数都收敛，则 E 是可列集.*

(1) 显然 $\sup E \le M < \infty$，不妨设 $M = 1$，否则用 $\left\{\frac{x}{M} : x \in E\right\}$ 代替 E。由于 E 中任意有限个不同的数之和不超过 $M = 1$，那么 $\#(E \cap (1/n, 1]) \le n$，又因为

$$E = E \cap (0,1] = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(1/n, 1]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap (1/n, 1])$$

是一列至多可数集的可数并，故 E 至多可数。(2) 考虑

$$E = \left\{\{a_1, a_2, \ldots\} \subset E : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\{a_1, a_2, \ldots\} \subset E : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < m\right\} =: \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

由 (1) 可知：存在常数 m 使得 A_m 中任意有限个不同的数之和都不超过 m，于是 A_m 是至多可数集。由于至多可数集的可数并可数。所以 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 可数。

习题 5. *证明：(a, b) 上的凸函数 f 的不可导的点只有可数个.*

根据凸函数的定义，对于任意 $(x, y) \subset (a, b)$，对于任意 $\lambda \in (0, 1)$，我们有

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \le f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$$

任意给定 $x \in (a, b)$，考虑函数

$$g(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad y \in (a, b) \setminus \{x\}$$

显然 $g(y)$ 在 (a, x) 和 (x, b) 上分别单调递减，显然 $g(y)$ 在 (a, x) 上单调递减且有下界 $\frac{f\left(\frac{x+b}{2}\right) - f(x)}{\frac{x+b}{2} - x}$，于是 $\lim_{y \to x^-} g(y) = f'(x-)$ 存在，由于 $g(y)$ 在 (x, b) 上单调递减且有上界 $\frac{f\left(\frac{a+x}{2}\right) - f(x)}{\frac{a+x}{2} - x}$，于是 $\lim_{y \to x^+} f(y) = f'(x+)$ 存在。定义集合

$$C = \{x \in (a, b) : f'(x-) \ne f'(x+)\}$$

由于 f 的凸性，我们知道 $f'(x-) \le f'(x+)$。因此，对于 $x \in C$，考虑区间 $(f'(x-), f'(x+))$，由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，$\mathbb{Q} \cap (f'(x-), f'(x+)) \neq \varnothing$，任取 $\mathbb{Q} \cap (f'(x-), f'(x+))$ 的一个代表元 r_x，我们得到如下的嵌入映射

$$F : C \to \mathbb{Q} \qquad x \mapsto r_x$$

显然这是一个单射，那么 $C \sim F(C) \subset \mathbb{Q}$，于是 C 至多可数。

习题 6. 证明：(a,b) 上的函数 f 的局部极小值只有可数个.

考虑集合

$$C = \{x \in (a,b) : x\text{是}f\text{的局部极小值点}\} \quad D = \{y = f(x) : x \in C\}$$

由局部极小值的定义可知，D 是 f 的全部局部极小值构成的集合，显然 $\#D \le \#C$. 只需证明集合 C 至多可数即可。对于任意的 $x \in C$，将 (a,x) 中离 x 最近的极小值点记作 x'，将 (x,b) 中离 x 最近的极小值点记作 x''. 由于 x 是一个局部极小值点，所以存在 x 的一个充分小的邻域 $U_x \subset (x', x'')$，使得 $f(y) \ge f(x), \forall y \in U_x$。让 x 取遍 C 中的所有元素，这样得到的所有 U_x 两两无交。对于任意给定的 $x \in C$，由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，可以任取一个 $r_x \in \mathbb{Q} \cap U_x$ 作为代表元，构造如下嵌入映射

$$F : C \to \mathbb{Q} \qquad x \mapsto r_x$$

这显然是一个单射，于是 $C \sim F(C) \subset \mathbb{Q}$，于是 C 至多可数。

习题 7. 是否存在集合 E ，使得 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集？

$\mathscr{P}(E)$ 表示 E 的幂集,这是一个 σ 代数,若 E 有限,那么显然 $\#\mathscr{P}(E) = 2^{|E|}$ 有限。若 E 无限，假设 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ 是 E 的一个可数子集，不是一般性，我们不妨假设 $\mathcal{A}$ 中集合两两无交，否则令

$$\overline{A}_1 = A_1, \quad \overline{A}_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, \overline{A}_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right), \dots$$

由于 $\mathscr{P}(E)$ 表示 E 的幂集，必然有 $\mathscr{P}(\mathcal{A}) \subset \mathscr{P}(E)$。断言 $\mathscr{P}(A)$ 不可数，我们现在考虑 $\mathscr{P}(A)$ 的任意一列子集 $S_1, S_2, \dots$，构造一个新的子集 S：若 $A_n \in S_n$，则 $A_n \notin S_n$，否则 $A_n \in S_n$。于是 $S \notin \{S_1, S_2, \dots.\}$，但 $S \in \mathscr{P}(A)$. 这意味着 $\mathscr{P}(A)$ 的任意一个可数子集都是真子集，若 $\mathscr{P}(A)$ 可数，那么 $\mathscr{P}(A)$ 便是它自身的真子集，这与真子集的定义矛盾！故 $\mathscr{P}(A)$ 不可数，因此 $\mathscr{P}(E)$ 包含一个不可数集，故也不可数。综上，不存在集合 E 使得 $\mathscr{P}(E)$ 可列。

习题 8. 证明：(a,b) 上的函数 f 的第一类间断点只有可数个.

记

$$C=\{x\in(a,b):x\text{是}f\text{的第一类间断点}\}$$

固定 $x\in C$，记 x' 是 x 左侧最近的第一类间断点，x'' 是 x 右侧最近的第一类间断点。$x'<x<x''$，根据有理数的稠密性，任取 $r_x\in\left(\frac{x'+x}{2},\frac{x+x''}{2}\right)$，构造如下映射

$$F:C\to\mathbb{Q}\qquad x\mapsto r_x$$

这显然是一个单射，于是 $C\sim F(C)\subset\mathbb{Q}$ 至多可数。

习题 9. 证明：(a,b) 上的函数 f 的不可导但单侧可导的点只有可数个.

记

$$C=\{x\in(a,b):f\text{在}x\text{处不可导但单侧可导}\}=\{x\in(a,b):f'(x-)\neq f'(x+)\}$$

固定 $x\in C$，记 x' 是 x 左侧最近的不可导但单侧可导的点，x'' 是 x 右侧最近的不可导但单侧可导的点。$x'<x<x''$，根据有理数的稠密性，任取 $r_x\in\left(\frac{x'+x}{2},\frac{x+x''}{2}\right)$，构造如下映射

$$F:C\to\mathbb{Q}\qquad x\mapsto r_x$$

这显然是一个单射，于是 $C\sim F(C)\subset\mathbb{Q}$ 至多可数。

习题 10. 教材第一章习题第 *19* 题. *19.* 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 且为可数集，试构造 E 的一个分解 $E=A\cup B$ ，使得平行于 x 轴的直线与 A 的交点为可数个，平行于 y 轴的直线与 B 的交点为可数个.

这是显然的！