Rozwiązania wybranych przykładów z Z00

1. Oblicz następujące wartości

a) $\log_4 16 = 2$, $\quad b)\ \log_4 \frac{1}{4} = -1$; $\quad$ c) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$; $\quad d)\ \log_4 (4)^{\sin x} = \sin x$;

$e)\ 5^{\log_5 77} = 77$; $\quad f)\ 3^{\log_3 (x^4+6)} = x^4 + 6$;

$g)\ 2^{3\log_2 7} = 2^{\log_2 7^3} = 7^3$ $\quad$ lub $\quad$ $2^{3\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^3 = (7)^3 = 7^3$

$h)\ 5^{\,x+\log_5 2} = 5^x \cdot 5^{\log_5 2} = 2 \cdot 5^x$; $\quad i)\ 7^{-\log_7 x} = \frac{1}{7^{\log_7 x}} = \frac{1}{x}$

$j)\ \frac{3^{2x}}{3} = 3^{2x-1}$; $\quad k)\ (9^7)^x = 9^{7x} = (9^x)^7$.

$l)$ która liczba jest większa: $\log_4 5$ or $\log_5 4$?

$\log_4 5 > 1$ oraz $\log_5 4 = \frac{1}{\log_4 5}$, czyli $\log_5 4 < 1$, zatem $\log_5 4 < \log_4 5$.

2. Rozwiąż następujące równania

$a)\ 2^x(x^2 + 6x + 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 0 \ \vee \ x^2 + 6x + 8 = 0$

2^x jest zawsze różne od zera, nigdy zero, zatem rozwiązujemy tylko $x^2 + 6x + 8 = 0$.

$c)\ \frac{z^2 - 16}{z^4} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow z = -4 \ \vee \ z = 4$.

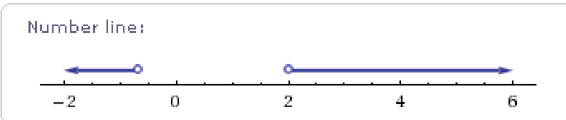
3. Rozwiąż nierówności:

$a)\ (x-2)(3x+2)(x^2+10) > 0$ odp.: $x < -2/3$ lub $x > 2$

Results:

$x < -\frac{2}{3}$

$x > 2$



$c)\ 2^x(x^2 - 6x + 8) \geq 0$

2^x jest zawsze większe od zera, nigdy zero, zatem sprawdzamy tylko $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

$h)\ \log_5(5 - 3x) > 1$

Funkcja $\log_5$, jest funkcja rosnącą, zatem

$\log_5(5-3x) > 1 = \log_5 5$

$5 - 3x > 5^1$ odp.: $x < 0$.

4. Oblicz wartości

$\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \arccos: [-1,1] \to [0, \pi]$,

$\mathrm{arctg}: (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad \mathrm{arcctg}: (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ ;\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

$a)$ $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

$b)$ $\arccos(1.4)$ *nie istnieje*

$c)$ $\arcsin(\sin\pi))=0$ **uwaga**: $\arcsin(\sin\pi)\neq\pi$, $d)$ $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$

$e)$ $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, **uwaga**: $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)\neq\frac{3\pi}{2}$,

$f)$ $\sin(\arcsin(-1))=-1$

5. Wyznacz x:

$a)$ $\arcsin(\sin x)=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

$b)$ $\sin(\arcsin(x))=-1$, $x=-1$

$c)$ $\sin(2x)=0.56$, $x=\frac{1}{2}\arcsin(0.56)+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(0.56)-k\pi$

6*. Wyznacz x

$a)$ $\arcsin(x)>\frac{1}{2}$, *arc sin* jest funkcją rosnącą, zatem $x>\sin\frac{1}{2}$, x musi należeć do dziedziny $-1\le x\le 1$. Zatem $\sin\frac{1}{2}<x\le 1$. Wartość $\sin 0.5\approx 0.4794$.

$c)$ $\arccos(x)>4$, *arc cos* nigdy nie jest większy niż 4. Nie istnieją rozwiązania.

7. Znajdź dziedziny naturalne następujących funkcji, dodatkowo określ zbiór wartości funkcji z przykładów *a*) ,*c*), *e*);

$a)$ $f(x)=\sqrt{x}$

$x\ge 0$; $D_f=\{x\in R: x\ge 0\}$. Zbiór wartości $f(x)=y\ge 0$, $W_f=\{y\in R: y\ge 0\}$.

$b)$ $f(t)=\dfrac{1}{2t^2+4t+5}$ $\quad 2t^2+4t+5\neq 0$

$\Delta=16-40=-24$ zatem $D_f=R$.

$c)$ $f(x)=\log_{10}(x^2-1)$, $x^2-1>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0$
Dziedzina $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, $D_f=\{x\in R: x<-1 \vee x>1\}$
zbiór wartości $y=f(x)\in R$, $W_f=R$.

$e)$ $f(x)=3^{x^2+x+1}$
$D_f=R$
Aby wyznaczyć zbiór wartości: $y^2+y+1=0$, $\Delta=1-4<0$ najmniejsza wartość jest w punkcie $y_0=-\frac{1}{2}$

$$3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=3^{\frac{3}{4}}\approx 2.27\ldots$$

Zbiór wartości $f(y)\ge 3^{\frac{3}{4}}\approx 2.27\ldots$. $W_f=\left\{z=f(y)\in R: z\ge 3^{\frac{3}{4}}\right\}$.

9. Wskaż funkcje zewnętrzne i wewnętrzne (uwaga: funkcje mogą być wielokrotnie złożone):

$a)\ (\sin x + 1)^5$
Kolejność od zewnątrz: t^5 , $t = \sin x + 1$.

$b)\ \ \sin(x^5 + 1)$
Kolejność od zewnątrz: $\sin t,\ x^5 + 1$
$c)\ \ 3^{\sin x}$
Kolejność od zewnątrz: wykładnicza 3^t, $t = \sin x$

$d)\ \ \log_2(tg(x^2 - 5))$
Kolejność od zewnątrz: $\log_2(t),\ t = \tan s$, $s = x^2 - 5$

$e)\ \ \sqrt[3]{(\log_{10}(3x^5 + 3)}$
Kolejność od zewnątrz: $\sqrt[3]{t},\ t = \log_{10}(s),\ s = 3x^5 + 3$

$f)\ \ \sin^4(\log_2(x + 2))$
Kolejność od zewnątrz: $t^4,\ \ t = \sin(s),\ \ \mathrm{s} = \log_2(p),\ \ p = x + 2.$

10. Wyznacz złożenie wskazanych funkcji oraz ich dziedziny

$b)\ f(x) = \dfrac{x}{2x + 1},\qquad g(x) = 3^x \qquad f(g(x)),\ g(f(x))$
$D_f = R \setminus \{-1/2\};\ \ D_g = R$
$f(g(x)) = \frac{3^x}{2\cdot 3^x + 1} \quad D = R \qquad g(f(x)) = 3^{\frac{x}{2x+1}} \quad D = R\setminus\{-0{,}5\}$

11*. Sprawdź czy podane funkcje są do siebie odwrotne $i.e.\ f(f^{-1}(x)) = x$ i $f^{-1}(f(x)) = x.$

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{2}(x + 1)\ \ f^{-1}(x) = 2x - 1, \qquad x \in R.$

$$f(f^{-1}(x)) = f(2x - 1) = \frac{1}{2}((2x - 1) + 1) = x$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) = 2\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) - 1 = x$$

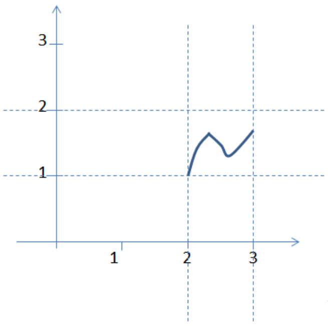
$c)\ f(x) = 3^x + 2,\quad f^{-1}(x) = \log_3(x - 2)$ the inverse exists for $x > 2$

$$f(\ f^{-1}(x)) = f(\log_3(x - 2)) = 3^{(\log_3(x-2))} + 2 = (x - 2) + 2 = x,$$

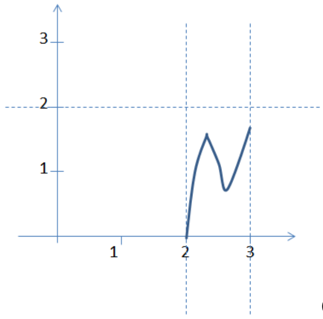
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3^x + 2) = \log_3(3^x + 2 - 2) = \log_3(3^x) = x,$$

12*. Naszkicuj wykres pewnej funkcji f takiej, że

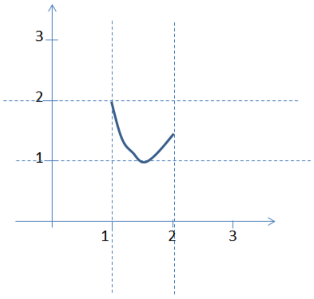
$a)\ \ f: [2, 3] \to [1,2]$ nie jest "na" $[1,2]$ i nie jest różnowartościowa
$b)\ f: [2, 3] \to [0,2]$ nie jest "na" $[0,2]$ i nie jest różnowartościowa
$c)\ f: [1, 2] \to [1,2]$ jest "na" $[1,2]$ i nie jest różnowartościowa
$d)\ f: [2, 3] \to [2,3]$ nie jest "na" $[2,3]$ i jest różnowartościowa
$e)\ f: [1, 2] \to [2,3]$ posiada funkcję odwrotną.



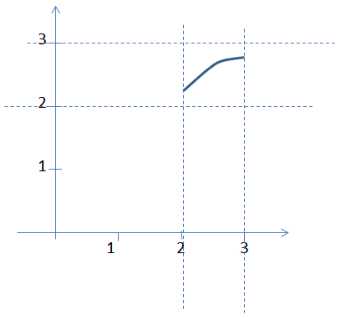
a)



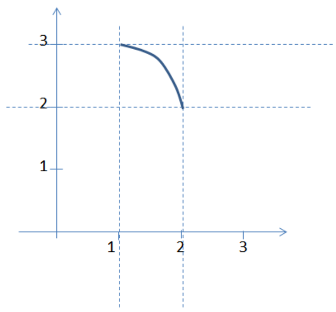
b)



c)



d)



e)

13*. Niech $f{:}\,X \to Y$, $f(x) = \cos x$ Podać przykłady takich zbiorów X,Y, że

a) funkcja f jest różnowartościowa i jest typu „na” ;

$$X = [0,\pi], Y = [-1,1]$$

b) funkcja f nie jest różnowartościowa i jest typu „na” ;

$$X = [0,2\pi], Y = [-1,1]$$

c) funkcja f jest różnowartościowa i nie jest typu „na” ;

$$X = [0,\pi], Y = [-2,1]$$

d) funkcja f nie jest różnowartościowa i nie jest typu „na” ;

$$X = [=\pi,\pi], Y = [-2,4]$$

14*. Wyznacz funkcje odwrotne do danych oraz podaj ich dziedzinę

$a)\ f(x) = 5x + 4$

Do wyznaczenia dziedziny funkcji odwrotnej, szukamy zbioru wartości funkcji:

$W_f = R.$

Szukamy funkcji odwrotnej:

$$y = 5x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 4 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-4}{5}$$

Funkcją odwrotną jest $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$. Dziedziną funkcji odwrotnej jest $D_f = R.$

$$b)\ f(x) = \frac{1}{x^2-2} \qquad x^2 - 2 \neq 0\ ; \qquad x \neq \sqrt{2}\ \wedge\ x \neq -\sqrt{2} \qquad D_f = R\backslash\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$$

Aby wyznaczyć dziedzinę funkcji odwrotnej, możemy ***i*).** wyznaczyć zbiór wartości funkcji:

$$x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2}{-2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

1. $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2-2}$ i $x^2 - 2 > 0$ 2. $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x^2-2}$ i $x^2 - 2 < 0$

1. $0 \leq \frac{1}{x^2-2}$ 2. $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x^2-2}$ i $x^2 - 2 < 0$

$$W_f = \left\{y \in R{:}\ y > 0 \quad \text{lub} \quad y < -\frac{1}{2}\right\}.$$

Szukamy funkcji odwrotnej:

$$y = \frac{1}{x^2-2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = \frac{1}{y}, \qquad y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y} + 2, \qquad y \neq 0, \qquad \frac{1}{y} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y} + 2} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{y} + 2}.$$

***ii*). Możemy w trakcie obliczania y wyznaczyć dziedzinę funkcji odwrotnej (nie jako zbiór wartości *f*)

$$\frac{1}{y} + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+2y}{y} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(1+2y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Funkcją odwrotną może być $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 2}$ lub $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x} + 2}$. Dziedziną jest zbiór wartości W_f, lub są to ograniczenia na y,

$$D_{f^{-1}} \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad D_{f^{-1}} = \{x \in R: x > 0 \quad \text{lub} \quad x < -\frac{1}{2}\}.$$