Zadania do Wykładu 1, *ciągi*

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0 & p>0 \\ 1 & p=0 \\ \infty & p<0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & \lvert q\rvert<1 \end{cases}$
$a>0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = e^A$	
Tw. ***o trzech ciągach*** Niech dla $n>n_0$ będzie: $a_n \le b_n \le c_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$ To: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q$	
Ciąg zbieżny a_n ma tylko **jedną granicę.** Ciąg jest zbieżny *wtedy i tylko wtedy* gdy wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej **samej granicy**.	

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty,\ 1^\infty, 0^0, \infty^0$ nieoznaczone

$$\frac{1}{\pm\infty}=0,\quad \frac{1}{0^+}=\infty,\quad \frac{1}{0^-}=-\infty,\ (0^+)^\infty=0,\quad \frac{\infty}{0^+}=\infty,\quad \frac{0}{\infty}=0, \infty^{-\infty}=0$$

$$\log_a n \prec n \prec n^2 \prec n^k \prec 2^n \prec a^n \prec n! \prec n^n \prec n^{n^n}$$

Tego typu granice powinniście liczyć "w głowie":

$$i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5}{2n^2+7n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{2}, \text{ ponieważ } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+4}{n^4+5n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^4}\right)}{n^4\left(1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^4}\right)} = 0$$

$$iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2-n-2}{5n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2n+1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \infty$$

$$iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+2)(2n+3)(4n-5)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)n\left(2+\frac{3}{n}\right)n\left(4-\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{5}{n}\right)} = 0$$

ZADANIA

0. Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy

$a)\ a_n = \frac{n}{2n+3}$ wypisac wyrazy a_2 i a_{2n+1} , $b)\ a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n}$ wypisac wyrazy a_2 i $a_{2n.}$

$c)\ a_m = (m+10)!$ wypisac wyrazy a_3 i a_{m+3}, $d)\ a_k = (k+1)^k$ wypisac wyrazy a_4 i a_{1+n}.

$e)\ a_k = \frac{2^k}{k}$ wypisac wyraz a_{25}, $f)\ a_n = (-1)^{2n-1}\, n(n-1)$ wypisac wyrazy a_{17}, a_{18}.

Zapisz *n-ty* wyraz następujących ciągów:

$g)\ 1, 4, 7, 10, 13, \dots.$ $h)\ 3, 7, 11, 15, 19, \dots$ $i)\ 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{25}, \dots$

$j)\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ $k)\ 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{3}{4}, 1+\frac{7}{8}, 1+\frac{15}{16}, 1+\frac{31}{32}, \dots$

1. Oblicz granice

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k^{1000}+4k^{97}+97k^4}{4k^{9997}+97k^4}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n+1}+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin(\ln e^{\frac{n-1}{n+1}})$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan(n!)}{n+1}$ e) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n}}$

g) $\lim\limits_{l\to\infty} \sqrt{l}(\sqrt{l+1}-\sqrt{l})$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+4n^2}-\sqrt{1+9n^2}}{2n}$ i) $\lim\limits_{k\to\infty} (7^k-6^k-5^k)$

$j)\ \lim\limits_{n\to\infty} \ln(2n^4-2n+1) - \ln(n^5-2n+1)$ $k)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3\,n^{\frac{3}{2}}}{\left(n+2\sqrt{n}\right)^2}$

2. Wyznacz granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

a) $a_n = \frac{3\cdot 2^{3n-2}-8}{8^{n+1}+16}$ **b)** $a_n = \frac{5\cdot 3^{2n}-1}{9^n+1}$ **c)** $a_n = \frac{(n^4+4)n! + (n-1)!}{n\cdot(n+1)!}$

3. Skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach aby wyliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4^n+5^n}}{\sqrt[n]{6^n+7^n}}$ $b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n+2}+2^{3n-1}+3^{n+2}}$ $c)\ \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2+k}$

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+5\cdot 3^{2n}+2^{n+1}}$ $e)\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k\cdot\sin(k!)}{k^2+1}$ $f)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+(-1)^n\,2^n}{3\cdot 4^n+1}$

$g)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+\sin(n!)}{3n^2-4\cos(n!)}$ $h)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{3^n+4}$ $i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin(n^2)-n^3}{n+1}$

$j)\ \lim\limits_{n\to\infty} (n^2+2n\cos n)$ $k^*)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{3^n+4^{n+1}}$ $l^*)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{2n+3}$

$m)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n-1}+n^2}$ $n)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^{n+1}+\cos(n^4+3n!)}$ $o) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\cdot\left(2^{5n}+5^{2n}\right)}$

4. Wyznacz **(wsk.:** granica typu '*e*')

$a)\quad a_n = \left(\frac{2n-5}{2n+7}\right)^{5n}$ $\qquad b)\ a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-3}\right)^{3n+1}$ $\qquad c)\quad a_n = \left(\frac{3n^2+2}{3n^2-3}\right)^{3n^2+2n-3}$

$d)\quad a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{-3n^2+1}$ $\qquad e)^*\ a_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$ $\qquad f)^*\quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{3n}$

$g)^*\quad \lim_{n\to\infty}\left(0{,}99 + \frac{1}{n}\right)^{n}$