

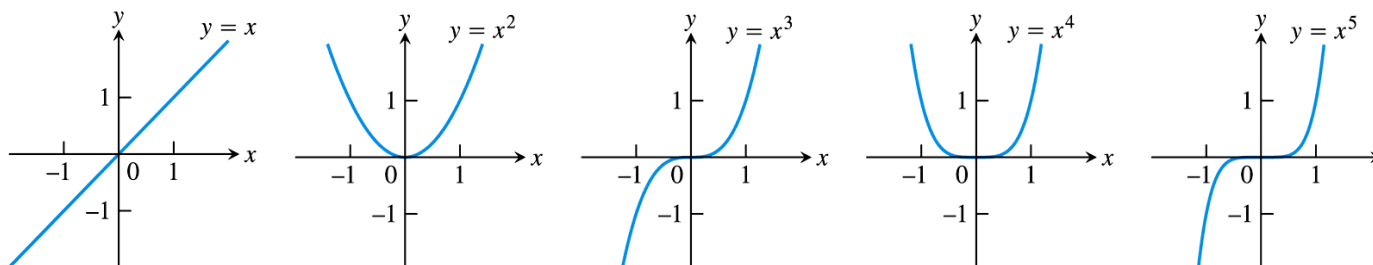
1. Należy zawsze uzasadniać rozwiązanie, to znaczy napisać w jaki sposób zostało otrzymane.

2. Zadania z * są dla ambitnego studenta, pozostałe dla leniwego.

Zadania do Wykładu 0, powtórzenie, funkcje rzeczywiste

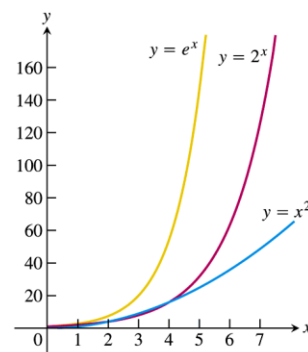
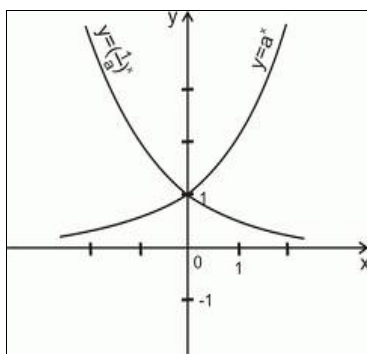
FUNKCJE ELEMENTARNE

1. **Funkcje wielomianowe** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$



2. **Funkcja wykładnicza** $f(x) = a^x$, $a^x: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ 3. $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$
4. $(a^p)^q = a^{pq}$
5. $(ab)^p = a^p b^p$
6. $a^p a^q = a^{p+q}$

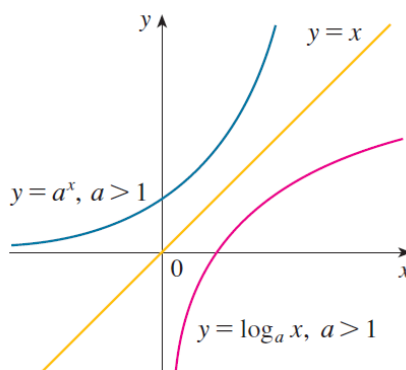


3. **Funkcja logarytmiczna** $f(x) = \log_a(x)$, $\log_a x: (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$a^{\log_a x} = x$$

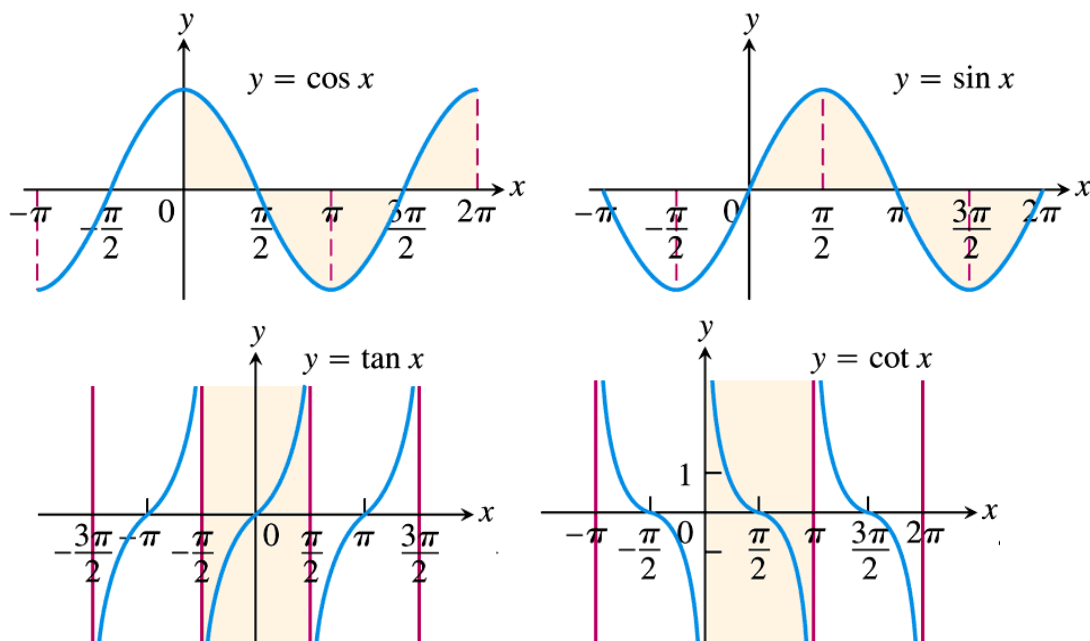
$$\log_a(a^x) = x$$

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$
4. $\log_a(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a}$



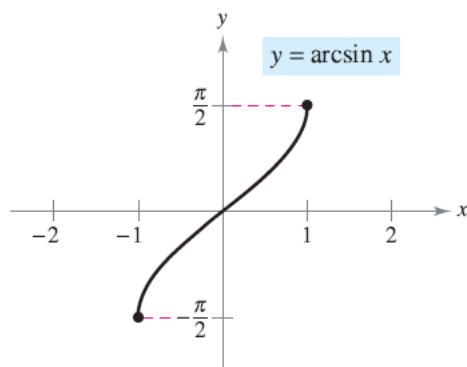
$$\log_a x < x < a^x, \quad a > 1 \quad !!!$$

4. Funkcje trygonometryczne $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$

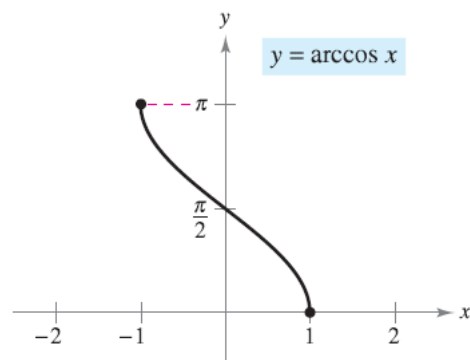


5. Funkcje cyklometryczne – odwrotne do trygonometrycznych $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arccot}(x)$.

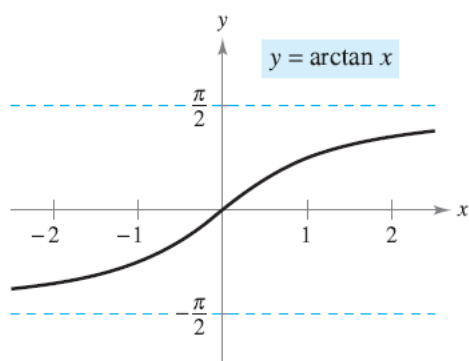
$$\arcsin x: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



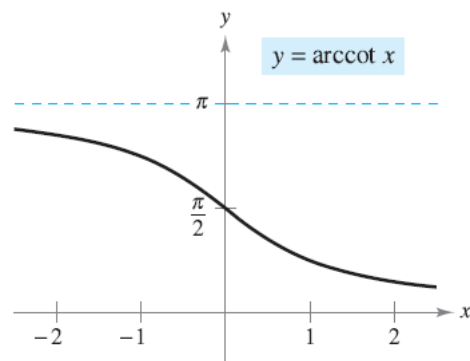
$$\arccos x: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\operatorname{arctg} x: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\operatorname{arccot} x: \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$$



PRZYPOMNIENIE

1. Oblicz następujące wartości

a) $\log_4 16$, b) $\log_4 \frac{1}{4}$; c) $\log_4 2$; d) $\log_4 (4)^{\sin x}$;

e) $5^{\log_5 77}$; f) $3^{\log_3 (x^4+6)}$; g) $2^{3 \log_2 7} = 2^{\log_2 7^3}$

h) $5^{x+\log_5 2}$ i) $7^{-\log_7 x}$ j) $\frac{3^{2x}}{3}$ k) $(9^7)^x$

l) która liczba jest większa: $\log_4 5$ or $\log_5 4$?

2. Rozwiąż następujące równania

a) $2^x(x^2 + 6x + 8) = 0$, b) $\sqrt[8]{t} = 1$ c) $\frac{z^2-16}{z^4} = 0$ d) $\frac{4x-6}{2x^2-x+4} = 0$.

3. Rozwiąż następujące nierówności

a) $(x-2)(3x+2)(x^2+10) > 0$ b) $y^3 + 4y^2 + 4y \leq 0$ c) $2^x(x^2 - 6x + 8) \geq 0$

d) $(x+1)(x^2-4) \leq 0$ e) $(a+2)^2(1-3a)^2 \leq 0$ f) $x^9 - 1 < 0$ g) $\frac{x-3}{x+5} < 0$

h) $\log_5(5-3x) > 1$

FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE

$$\begin{array}{ll} \text{arc sin: } [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \text{arc cos: } [-1,1] \rightarrow [0, \pi], \\ \text{arc tg: } (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), & \text{arc ctg: } (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \pi) \end{array}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

4. Oblicz wartości

a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\arctan 1$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$,

b) $\arccos(1.4)$

c) $\arcsin(\sin \pi)$, d) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ e) $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right)$ f) $\sin(\arcsin(-1))$

5. Wyznacz x :

a) $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$, b) $\sin(\arcsin(x)) = -1$, c) $\sin(2x) = 0.56$.

6*. Wyznacz x

a) $\arcsin(x) > \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{arctg}(2x) < \frac{\pi}{4}$ c) $\arccos(x) > 4$

7. Wyznacz dziedzinę naturalną następujących funkcji, dodatkowo określ zbiór wartości funkcji z przykładów a), c), e);

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(t) = \frac{1}{2t^2 + 4t + 5}$ c) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 1)$

d) $f(x) = \log_2(\log_3 x)$ e) $f(y) = 3^{y^2+y+1}$

8. Naszkicuj wykresy następujących funkcji (pamiętaj o oznaczeniach osi)

a) $f(x) = y = x^2 + 1$, b) $f(z) = y = z^2 - 1$ c) $g(s) = t = \sqrt{s}$ d) $h(l) = m = 2l + 3$

e) $f(y) = z = \log_2 y$ f) $g(z) = x = e^z$ g) $p(x) = z = \arcsin x$

9. Określ funkcje, z których są złożone podane poniżej funkcje, tj. wskaż wewnętrzne i zewnętrzną funkcję (funkcji może być więcej niż dwie)

a) $(\sin x + 1)^5$ b) $\sin(x^5 + 1)$ c) $3^{\sin x}$ d) $\log_2(\operatorname{tg}(x^2 - 5))$

e) $\sqrt[3]{(\log_{10}(3x^5 + 3))}$ f) $\sin^4(\log_2(x + 2))$ g) $\left(\frac{1}{4x^4 + x}\right)^{88}$

10. Wyznacz złożenie wskazanych funkcji oraz ich dziedziny

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$ $f(g(x))$, $g(f(x))$

b) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$, $g(x) = 3^x$ $f(g(x))$, $g(f(x))$

c) $f(x) = \log_5(x+1)$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sin(x-1)$ $f(g(h(x)))$, $h(g(f(x)))$

11*. Sprawdź czy podane funkcje są do siebie odwrotne i.e. $f(f^{-1}(x)) = x$ i $f^{-1}(f(x)) = x$.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ $f^{-1}(x) = 2x-1$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $f^{-1}(x) = x^3+1$

c) $f(x) = 3^x + 2$, $f^{-1}(x) = \log_3(x-2)$

12*. Naszkicuj wykres pewnej funkcji f takiej, że

a) $f: [2, 3] \rightarrow [1, 2]$ nie jest „na” $[1, 2]$ i nie jest różnowartościowa

b) $f: [2, 3] \rightarrow [0, 2]$ nie jest „na” $[0, 2]$ i nie jest różnowartościowa

c) $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ jest „na” $[1, 2]$ i nie jest różnowartościowa

d) $f: [2, 3] \rightarrow [2, 3]$ nie jest „na” $[2, 3]$ i jest różnowartościowa

e) $f: [1, 2] \rightarrow [2, 3]$ posiada funkcję odwrotną.

13*. Niech $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = \cos x$ Podaj przykłady takich zbiorów X, Y , że

a) funkcja f jest różnowartościowa i jest typu „na” ;

- b) funkcja f nie jest różnowartościowa i jest typu „na” ;
c) funkcja f jest różnowartościowa i nie jest typu „na” ;
d) funkcja f nie jest różnowartościowa i nie jest typu „na” ;

14*. Wyznacz funkcje odwrotne do danych oraz podaj ich dziedzinę

a) $f(x) = 5x + 4$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ c) $f(x) = 2 - 4x^2$ d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
e) $f(x) = \log_2(\log_3 x)$ f) $f(x) = \frac{1}{2x + 4} - 3$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$