数学物理方程整理

一、行波法

对于偏微分方程$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=0$,存在通解:

$$u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

其中$f_1(x+at)$指代向x负方向运动的行波，则$f_2(x-at)$指代向x正方向运动的行波，其中f_1、f_2为任意函数。对于不存在边界条件的情况，考虑其初始条件为$u|_{t=0}=\phi(x)$和$u_t|_{t=0}=\psi(x)$，则其通解为:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\phi(x+at)+\phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x)dx$$

使用该法得到的无边界条件波动方程的解即为达朗贝尔公式

二、分离变数法

①

全齐次方程

1.波动方程

1.第一类边界条件

泛定方程:

$$u_{tt}\ -\ a^2u_{xx}\ =\ 0$$

边界条件:

$$\begin{cases} u|_{x=0}\ =\ 0\\ u|_{x=l}\ =\ 0\end{cases}$$

初始条件：

$$\begin{cases} u|_{t=0} \ = \ \phi(x) \\ u_t|_{t=0} \ = \ \psi(x) \end{cases}$$

假设方程的解为

$$u(x,t) \ = \ X(x)T(t)$$

代入泛定方程，有

$$\begin{aligned} XT'' \ &= \ a^2TX'' \\ \frac{X''}{X} \ = \ \frac{T''}{a^2T} \ &= \ -\lambda \end{aligned}$$

根据第一类边界条件，并将(1.1.4)变形，有：

$$f(x) = \begin{cases} X'' + \lambda X \ = \ 0 \\ T'' + a^2\lambda T \ = \ 0 \end{cases}$$

$$X(0) \ = \ 0, \ X(l) \ = \ 0$$

当且仅当$\lambda > 0$时X的解有意义，此时X, T解为：

$$X \ = \ C\sin\frac{n\pi x}{l}, \ T \ = \ A\cos\frac{n\pi a}{l}t + B\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

则此时$u(x,t)$的解应表示为：

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \\ &= \ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

根据初始条件，有；

$$
\begin{cases}
\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \ = \ \phi(x) \\
\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \ = \ \psi(x)
\end{cases}
$$

不难观察发现，$A_n \ \& \ B_n \times \frac{n\pi a}{l}$即为$\phi(x) \ \& \ \psi(x)$的傅里叶正弦级数展开的系数，有：

$$
\begin{cases}
A_n \ = \ \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\
B_n \ = \ \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx
\end{cases}
$$

至此解得$u(x,t)$

2.第二类边界条件

第二类边界条件的处理基本同第一类边界条件，本征函数族变为

$$
X(x) \ = \ C\cos\frac{n\pi x}{l}, \ n=0,1,2,\cdots
$$

至于$T(t)$则和第一类边界条件具有相同形式解，同理解得

$$
\begin{cases}
A_n \ = \ \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & A_0 \ = \ \frac{1}{l}\int_0^l \phi(x)dx \\
B_n \ = \ \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & B_0 \ = \ \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)dx
\end{cases}
$$

3.混合边界条件

第三类边界条件的处理基本同第1,2类边界条件，本征函数族变为

$$
X(x) \ = \ C\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \ n=0,1,2,\cdots
$$

至于$T(t)$则和第一类边界条件具有类似形式解，同理可解。

2.输运方程

泛定方程：

$$u_t\ -\ a^2u_{xx}\ =\ 0$$

边界条件：

$$\begin{cases} u|_{x=0}\ =\ 0 \\ u|_{x=l}\ =\ 0 \end{cases}$$

初始条件：

$$u|_{t=0}\ =\ \phi(x)$$

输运方程与波动方程的不同仅在于$u_t\ \&\ u_{tt}$，因此波动方程中有关于边界条件的讨论在此均成立，二者区别仅在于$T(t)$方程的求解，具体对输运方程而言：

$$T' + \lambda a^2 T\ =\ 0$$
$$T(t)\ =\ C_1e^{a\sqrt{\lambda}t} + C_2e^{-a\sqrt{\lambda}t}$$

对于不同的边界存在不同的λ，具体有：

$$\begin{cases} \lambda\ =\ (\frac{n\pi}{l})^2 & Dirichlet/Neumann \\ \lambda\ =\ \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} & Mixed \end{cases}$$

3.稳定场方程

泛定方程：

$$\Delta u\ =\ 0$$

边界条件：

$$\begin{cases} u|_{x=0}\ =\ 0 \\ u|_{x=l}\ =\ 0 \end{cases}$$

稳定场方程和输运、波动方程的不同在于其不含时间项，因此波动方程中有关于边界条件的讨论在此均成

立，具体对稳定场方程而言，仅需要将变量X,T改换为X,Y，其余均可仿波动方程求解。

②

非齐次方程的处理

1.傅里叶级数法

通过一个例题来说明：

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \quad 0<x<l\\
&u_x|_{x=0}=0 \quad u_x|_{x=l}=0\\
&u|_{t=0}=\phi(x) \quad u_t|_{t=0}=\psi(x)
\end{aligned}
$$

解:
设解的形式为$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$，将解代入方程，有:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n^{''}(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}+a^2\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}=A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t(1)\\
\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\dfrac{n\pi x}{l}=\phi(x) & (2)\\
\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n^{'}(0)\cos\dfrac{n\pi x}{l}=\psi(x) & (3)
\end{cases}
$$

通过方程(1)可得:

$$
\begin{cases}
T_1^{''}(t)+\dfrac{\pi^2a^2}{l^2}T_1(t)=A\sin\omega t\\
T_n^{''}(t)+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=0 \;\; n\neq 1
\end{cases}
$$

当$n\neq 1$时很容易可以解得:

$$
T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t
$$

当$n=1$时需要猜一个特解，根据观察$k\sin\omega t$可以消去:

$$
\begin{aligned}
&-k\omega^2\sin\omega t+\frac{\pi^2a^2}{l^2}k\sin\omega t=A\sin\omega t\\
&k=\frac{A}{\frac{\pi^2a^2}{l^2}-\omega^2}=\frac{Al^2}{\pi^2a^2-\omega^2l^2}
\end{aligned}
$$

进而可以获得T_1的一个特解，从而获得T_1的形式：

$$
T_1(t)=\frac{Al^2}{\pi^2a^2-\omega^2l^2}\sin\omega t+A_1\cos\frac{\pi a}{l}t+B_1\sin\frac{\pi a}{l}t
$$

再有傅里叶变换(注意$n=0$的情况)即可解得u

2.冲量定理法

冲量定理法运用的方程应该具有以下形式：

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)\\
&u|_{x=0}=0\quad u|_{x=l}=0\\
&u|_{t=0}=0\quad u_t|_{t=0}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

如果初始条件不为零，可以作变换$u=u^I+u^{II}$，其中令u^I为初始条件不为零的齐次方程的解，u^{II}为初始条件为零的非齐次方程的解，可以通过冲量定理法解得u^{II}。
冲量定理法可以证明，上述方程可以通过以下方式解决：

$$
\begin{aligned}
&u^\tau_{tt}-a^2u^\tau_{xx}=0\\
&u^\tau|_{x=0}=0\quad u^\tau|_{x=l}=0\\
&u|_{t=\tau+d\tau}=0\quad u_t|_{t=\tau+d\tau}=f(x,\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{2}
$$

记$u^\tau(x,t)=v(x,t;\tau)d\tau$，则(2)变为：

$$
\begin{aligned}
&v^\tau_{tt}-v^2u^\tau_{xx}=0\\
&v^\tau|_{x=0}=0\quad v^\tau|_{x=l}=0\\
&v|_{t=\tau+d\tau}=0\quad v_t|_{t=\tau+d\tau}=f(x,\tau)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

方程(3)根据分离变量法容易解得，对每个时刻τ进行积分就从v得到了u：

$$u(x,t)=\sum_{\tau=0}^{t}u^{\tau}(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$$

同样以一道例题展示冲量定理法的用法:

$$\begin{aligned}&u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t\\&u|_{x=0}=0\quad u_x|_{x=l}=0\\&u|_{t=0}=0\end{aligned}$$

原方程可以化为:

$$\begin{aligned}&v_t-a^2v_{xx}=0\\&v|_{x=0}=0\quad v_x|_{x=l}=0\\&v|_{t=\tau}=A\sin\omega\tau\end{aligned}$$

由分离变数法可知，$X_n(x)=\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$，代入方程，可以算得$T_n(t)=C_ne^{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x$，则:

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}C_ne^{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}(t-\tau)}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x$$

代入初始条件，有:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x=A\sin\omega\tau$$

根据傅里叶变换可以求得C_n见下:

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\omega\tau\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x dx\\&=-\frac{4A\sin\omega\tau}{(2n+1)\pi}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x|_0^l\\&=\frac{4A\sin\omega\tau}{(2n+1)\pi}\end{aligned}$$

从而解得v_n，通过进一步对τ积分即可求得u。

$$v_n(x,t;\tau)=\frac{4A\sin\omega\tau}{(2n+1)\pi}e^{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}(t-\tau)}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x$$

③

非齐次边界条件的处理

对于一般的方程：

$$\begin{aligned}&u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)\\&u|_{x=0}=\mu(t)\quad u|_{x=l}=\nu(t)\\&u|_{t=0}=\phi(x)\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{aligned}$$

为了齐次化边界条件，设一个满足非齐次边界条件的函数$v(x,t)=A(t)x+B(t)$，有：

$$\begin{cases}B(t)=\mu(t)\\A(t)l+B(t)=\nu(t)\end{cases}$$

解得$v(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)$，设$u=v+w$，则有：

$$\begin{aligned}&w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t)+a^2v_{xx}-v_{tt}=f(x,t)+\frac{\mu''(t)-\nu''(t)}{l}x-\mu''(t)\\&w|_{x=0}=0\quad w|_{x=l}=0\\&u|_{t=0}=\phi(x)-v(x,0)\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)-v_t(x,0)\end{aligned}$$

对于第二类边界条件的情况则要考虑设$v(x,t)=A(t)x^2+B(t)x$，对应才能凑出来$v(x,t)$，如果是混合边界的话也可以用$v(x,t)=A(t)x+B(t)$。对于特殊的波动方程，可以观察其非齐次部分的特征进而猜出分离变数的形式。
球坐标系下的解形式：

$$u(\rho,\phi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi)+\rho^{-m}(C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi)$$

三、复杂方程的导出和归纳

1.勒让德方程

Laplace Eq: $\Delta u = 0$
球坐标系下Laplace Eq：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial^2\phi} = 0 \tag{4}$$

Let $u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$:

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial^2\phi} = 0 \tag{5}$$

对(2)式两边同乘$\frac{r^2}{RY}$,有:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial^2\phi} = 0 \tag{6}$$

由(3)不难得到：

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) - l(l+1)R = 0 & (7) \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial^2\phi} + l(l+1)Y = 0 & (8) \end{cases}$$

对于方程(4),不难发现他其实就是欧拉型常微分方程：

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0 \tag{9}$$

$$R(r) = Cr^l + D\frac{1}{r^{l+1}} \tag{10}$$

对于方程(5),可以进一步分离变量：

$$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

代入方程(5)：

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) \ + \ \frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\phi} \ + \ l(l+1)\Phi\Theta \ = \ 0 \tag{11}$$

对(8)式两边同乘$\frac{\sin^2\theta}{\Theta\Phi}$,得:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) \ + \ \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\phi} \ + \ l(l+1)\sin^2\theta \ = \ 0 \tag{12}$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) \ + \ l(l+1)\sin^2\theta \ = \ -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\phi} = \lambda \tag{13}$$

这样就可以方便的把Φ扔掉了，有:

$$\Phi(\phi) \ = \ A\cos m\phi \ + \ B\sin m\phi \ , \ where \ \lambda \ = \ m^2$$

最后对付未来的Legendre方程，即:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) \ + \ [l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}] \ = \ 0 \tag{14}$$

做变量代换$x \ = \ \cos\theta, or \ \theta \ = \ \arccos x$:

$$\frac{d\Theta}{d\theta} \ = \ \frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta} \ = \ -\sin\theta\frac{d\Theta}{dx}$$

代入(11):

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dx}\frac{dx}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) \ + \ [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]\Theta \ = \ 0 \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}] \ + \ [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]\Theta \ = \ 0 \tag{16}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} \ - \ 2x\frac{d\Theta}{dx} \ + \ [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]\Theta \ = \ 0 \tag{17}$$

式(14)即连带勒让德方程，取$m = 0$，即得l阶勒让德方程:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} \ - \ 2x\frac{d\Theta}{dx} \ + \ l(l+1)\Theta \ = \ 0 \tag{18}$$

2.贝塞尔方程

Laplace Eq: $\Delta u \ = \ 0$
柱坐标系下Laplace Eq：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) \ + \ \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \ + \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ = \ 0 \tag{19}$$

Let $u(\rho,\phi,z) \ = \ R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$:

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}) + \frac{RZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + R\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{20}$$

对(2)式两边同乘$\frac{\rho^2}{R\Phi Z}$,有:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho}) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \tag{21}$$

由(3)不难得到：

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = \Phi'' + m^2\Phi = 0 \ \ (22) \\ \rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} + \rho^2\frac{Z''}{Z} = m^2 \, (23) \end{cases}$$

对于方程(4)可以直接解出：

$$\Phi(\phi) = A\cos m\phi + B\sin m\phi \tag{24}$$

对于方程(5),两边同除以ρ^2并整理：

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} = -\mu$$

由此得到：

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0 \qquad\qquad\quad (25) \\ \frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} + (\mu - \frac{m^2}{\rho^2}) = 0 \, (26) \end{cases}$$

下面进行分类讨论： $1.\mu=0\ \ 2.\mu>0\ \ 3.\mu<0$

1.

(8)方程显然是欧拉方程，$(7)(8)$有解如下：

$$Z(z)=Cz+d$$
$$R(\rho)=\begin{cases}E+F\ln\rho & m=0\\ E\rho^m+F\rho^{-m} & m\neq 0\end{cases}$$

2.

首先方程(7)的解为$Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}$，为解方程$(8)$，常作变量代换$x=\sqrt{\mu}\rho$，代入方程$(8)$：

$$\frac{dR}{d\rho}=\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho}=\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}$$
$$\frac{d^2R}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}=\mu\frac{d^2R}{dx^2}$$
$$\mu\frac{d^2R}{dx^2}+\mu\frac{dR}{dx}+(\mu-\mu\frac{m^2}{x^2})R=0$$
$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0$$

最后一步得到的即为m阶贝塞尔方程，即：

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0$$

3.

对应得到虚宗量贝塞尔方程：

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0$$

此时$Z(z)=C\cos hz+D\sin hz$

3.S-L本征值问题

1.S-L本征值问题的定义

S-L方程问题表达形式：

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x) + \lambda\rho(x)y = 0 \ (a \le x \le b) \tag{27}$$

S-L本征值问题：S-L方程 + 边界条件，常见的S-L本征值问题见下：

$(1)\ \ a=0,\ b=l;\ k(x)=Const,\ q(x)=0,\ \rho(x)=Const$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

即为分离变数法里最常见的本征值问题，解为：

$$\begin{cases} \lambda = n^2\pi^2/l^2 \\ y_n = C_n \sin\dfrac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

$(2)\ \ a=-1,\ b=+1;\ k(x) = 1-x^2,\ q(x)=\frac{m^2}{1-x^2},\ \rho(x)=1$，对应连带勒让德方程本征值问题，取自然边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] - \dfrac{m^2}{1-x^2} + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(+1) = Const \end{cases}$$

特别的，如果$m=0$，退化为勒让德方程本征值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(+1) = Const \end{cases}$$

$(3)\ \ a=0,\ b=\xi_0;\ k(\xi) = \xi,\ q(\xi)=\frac{m^2}{\xi},\ \rho(\xi)=\xi$，对应贝塞尔方程本征值问题，取自然边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\xi\dfrac{dy}{d\xi}\right) - \dfrac{m^2}{\xi}y + \lambda\xi y = 0 \\ y(0) = Const\ ,\ y(\xi_0) = 0 \end{cases}$$

$(4)\ \ a=-\infty,\ b=+\infty;\ k(x) = e^{-x^2},\ q(x)=0,\ \rho(x)=e^{-x^2}$，对应埃尔米特方程本征值问题

(量子力学谐振子问题)，取自然边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{dy}{dx}\right) \ + \ \lambda e^{-x^2} y \ = \ 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{e^{\frac{1}{2}x^2}} \ = \ Const \end{cases}$$

埃尔米特方程：$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
(5) $a = 0, \ b = +\infty; \ k(x) \ = \ xe^{-x^2}, \ q(x) = 0, \ \rho(x) = e^{-x^2}$，对应拉盖尔方程本征值问题(量子力学)，取自然边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(xe^{-x^2}\dfrac{dy}{dx}\right) \ + \ \lambda e^{-x^2} y \ = \ 0 \\ y(0) \ = \ Const, \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{e^{\frac{1}{2}x}} \ = \ Const \end{cases}$$

拉盖尔方程：$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$
自然边界条件的存在性：端点处为$k(x)$的一级零点

S-L本征问题的补充

高斯方程：$x(x-1)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta\gamma = 0$

化为标准形式：

$$y'' + \frac{(1+\alpha+\beta)x-\gamma}{x(x-1)}y' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y = 0$$

存在

$$\frac{k'(x)}{k(x)} = \frac{(1+\alpha+\beta)x-\gamma}{x(x-1)}$$

解得

$$k(x) = e^{\int \frac{(1+\alpha+\beta)x-\gamma}{x(x-1)}dx} = x^{\gamma}(x-1)^{1+\alpha+\beta-\gamma}$$

则原方程变换为S-L问题：

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma}(x-1)^{1+\alpha+\beta-\gamma}\right]\frac{dy}{dx}+\left[\alpha\beta x^{\gamma-1}x^{\alpha+\beta-\gamma}\right]y=0$$

汇合超几何级数微分方程：$xy+(\gamma-x)y'-\alpha y=0$

化为标准形式：

$$y+(\frac{\gamma}{x}-1)y'-\frac{\alpha}{x}y=0$$

快速解得$k(x)$：

$$\begin{aligned} k(x) &= e^{\gamma\int\frac{1}{x}dx-\int dx} \\ &= x^{\gamma}e^{-x} \end{aligned}$$

进而原方程变换为S-L问题：

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma}e^{-x}\right]\frac{dy}{dx}-\left[\alpha x^{\gamma-1}e^{-x}\right]y=0$$

2.S-L本征值问题的性质

S-L本征值问题：

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \quad a\leq x\leq b$$

性质1：$k(x),k'(x),q(x)$**连续或最多以端点为一阶极点，则存在无限多个本征值**

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3\leq\lambda_4\leq\ldots$$

对应存在无限多个本征函数

$$y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x),\ldots$$

本征函数的排列正好使得节点个数依次增多

性质2：$\lambda_n\geq0,\quad k(x),k'(x),q(x)>0$

性质3：相应于不同本征值λ_n**和**λ_m**的本征态**y_n**和**y_m**带权重正交：**

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx=N_m^2\delta_{mn}$$

更普适的写法：

$$\int_a^b y_m(x)y_n^*(x)\rho(x)dx = N_m^2\delta_{mn}$$

定义第m个本征函数的模N_m：

$$N_m^2 = \int_a^b y_m(x)y_m^*(x)\rho(x)dx$$

性质4：本征函数族完备，对具有连续一阶导数和分段连续二阶导数且满足边界条件的$f(x)$，可以展开为绝对收敛且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

等式右边称为广义傅里叶级数，系数f_n叫做广义傅里叶展开系数，函数族$y_n(x)$称为广义傅里叶级数展开的基。系数可以通过下式计算：

$$f_n = \frac{1}{N_n^2}\int_a^b f(x)y_n^*(x)\rho(x)dx$$

广义傅里叶级数例题：

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} + bu_x = 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \tag{1}$$

使用分离变数法，设$u = X(x)T(t)$，则:

$$\begin{aligned} &XT' - a^2X''T + bX'T = 0 \\ &\frac{T'}{T} = \frac{a^2X'' - bX'}{X} = -\lambda \end{aligned}$$

获得以下两个常微分方程：

$$\begin{cases} T' + \lambda T = 0 \\ a^2X'' - bX' + \lambda X = 0 \end{cases} \tag{2}$$