欧氏空间 假设V为实数域R上的线性空间 → $\mathbb{R}$

一、欧氏空间的定义及简单性质

从运算 运算 乙映射

定义：内积运算(用运算定义内积) def $(x,y) = xfy = f(x,y)$ $(V\times V \to \mathbb{R})$

满足条件的运算

if f运算满足(以下四条性质) 则称 f运算 为V上一个内积运算 记作 $(\ ,\ )$.

正定性 ① $\forall \alpha\in V$ $(\alpha,\alpha)=\alpha f\alpha \geq 0$ 且 $\alpha=\theta \Longleftrightarrow (\alpha,\alpha)=0$

对称性 ② $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

线性性 ③ $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$ (分配律)

$c(\alpha,\beta)=(c\alpha,\beta)$ $c\in\mathbb{R}$(此时为实数) (结合律)

$(c_i\ d_j \in \mathbb{R}\ \ \alpha_i\beta_j$

$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{t} c_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{s} d_j\beta_j\right)$

$= (c_1\alpha_1, d_1\beta_1) + (c_2\ldots$

$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} c_i d_j (\alpha_i,\beta_j)$

定义 加法 乘法 封闭的向量空间

定义：欧氏空间：定义了内积的线性空间

一二R数域上的内积空间 ⟺ 复空间 希尔伯特空间

例：① 向量：$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$ ：定义了向量空间的内积 ⇒

② 函数：$\int_a^b f(x)g(x)dx$ ：定义了 $C[a,b]$ 空间的内积 ⇒

都是欧氏空间

注：向量 基 $(\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \text{——} \varepsilon_n)$ 有 $\alpha=(\varepsilon_1\text{--}\varepsilon_n)X$ $\beta=(\varepsilon_1\text{--}\varepsilon_n)Y$

定义 $(\alpha,\beta)_1 = X^T Y$ (内积由X^T乘法定义)

定义 $(\alpha,\beta)_2 = 2X^T Y$

二者都是满足内积定义的 但二者定义不同⇒ 同一个V可以定义不同内积 ⇒ 一个V可以成… 空间相…

注：我们称 $\mathbb{R}^n$的欧氏空间：为 $\mathbb{R}^n$ + 常用内积 (我们发现内积可能与基有关)

常用内积：当单位正交向量为基时 坐标的 dot

定义：度量矩阵 $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \text{--} \varepsilon_n$为定义内积 $(\ ,\ )$ 的n维欧氏空间

则 $A=\left((\varepsilon_i,\varepsilon_j)\,i\,j\right)_{n\times n}$ 类似于量子力学的概率密度矩阵.

坐标 (坐标系

$\because (\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j(\varepsilon_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)y_j\right) = X^TAY \Rightarrow$ 而

度量矩阵

而 由于 A随基变化

但 (α,β) 是不随着基变化 $\Big\}\Rightarrow$ 不同基的不同A有关系.

定理① 设 基(I) → 基(II) M过渡阵.

则 基(I)的度量阵 A 基(II) B

则 $B = M^TAM$ ⇒ 证明由定义.

定义: 模长: $|\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$

性质: 为什么 以 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 来定义 $|\alpha|$?

① $|\alpha|\geq 0$ 而 $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且 $|\alpha|=0 \Rightarrow$ 能推出 $\alpha=\vec{0}$ 而 $(\alpha,\alpha)=0$ 当 $\alpha=\vec{0}$ 时)

② 半线性: $|c||\alpha| = |c\alpha| = \sqrt{(c\alpha,c\alpha)}$ 似于绝对

③ 三角不等式: $|\alpha|+|\beta|\geq|\alpha+\beta|$ (可用 Cauchy 不等式证明)

定理1 Cauchy - Schwarz 不等式 设 V是定义了内积 (,) 欧氏空间

则 $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$ $\boxed{\forall\alpha,\beta\in V}$ 当且仅当 α β 线性相关

$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx\right)$ 当 $f(x)=cg(x)$,即 f(x) 与 g(x) 线性相关

证明 $|(t\alpha+s\beta)|^2 = (t\alpha+s\beta, t\alpha+s\beta)$

$= t^2|\alpha|^2+s^2|\beta|^2+2ts(\alpha,\beta)\geq 0.$

$\therefore$

$= |t|\alpha|+s|\beta||^2 + 2ts(\alpha,\beta) - 2st|\alpha||\beta| \geq 0$

小巨式之

$\Rightarrow 4(\alpha,\beta)^2 - 4|\alpha|^2|\beta|^2 \leq 0$

$\therefore |(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|$

定义: 夹角: 设定义了内积的欧氏空间 $((\cdot,\cdot))$ α,β为V中的两向量 (必须非

则定义 $\boxed{\langle\alpha,\beta\rangle = \cos^{-1}\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}}$

定义: 正交 $(\cdot\ ,\ \cdot)$ 是定义的内积, 欧氏空间V , $\alpha,\beta\in V$ (不一定非0)

if $(\alpha,\beta)=0 \Rightarrow \alpha\perp\beta$ 称为正交.

$\boxed{\text{正交的性质}}$

① if $(\alpha,\beta)=0$（正交）且 α,β 非零，则 α,β 线性无关.

若正交：$(\alpha,\beta)=0$　if α,β …

$\because c_1\vec{\alpha}=c_2\vec{\beta}$　$\therefore (c_1\alpha,\beta$ …

$=(c_2\vec{\beta},\vec{\beta})=(\vec{\beta},\vec{\beta})=(\alpha$ …

$\Rightarrow$ if $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 两两正交 且 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 非零 $\Rightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关

② 勾股定理

$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$.　if $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

定义：正交向量组：if 对于一个欧氏空间的一个向量组，组内向量两两正交且非零

正交基：满足基条件的向量组（为一个 V 内的极大线性无关组且正交（含非零））

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{标准正交基}}$.

定义：标准基：满足基条件 且 $\forall\alpha\in$ 基 $|\alpha|=1$

定理2：欧氏空间内正交向量组的部分组 线性无关.

二、标准正交基

定义：正交基 / 标准正交基

$\boxed{\text{定理 3}}$ 对于一个标准正交基 其$\boxed{\text{度量矩阵}}$为单位阵

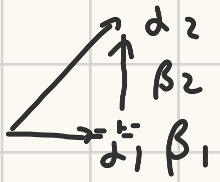
$\boxed{\text{定理 4}}$ schmidt 正交化

设 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 为 $\forall$ 的基 $\in$ 欧氏空间 V

step1　$\beta_1=\alpha_1$　$\therefore L(\beta_1)=L(\alpha_1)$

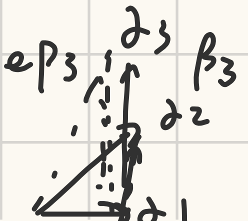
投影长度

step2



$\therefore \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$　（由于 $\alpha_2\alpha_1$ 线性无关

step3



$\because \beta_2$ 与 β_1 正交　$\Rightarrow L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2)$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$ (减去 $\beta_1\beta_2$ 分量)

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 & k=1 \\ \beta_k = \alpha_k - \dfrac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \cdots - \dfrac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1} & 2\le k\le s \end{cases}$$

注: $$\alpha_k = \frac{(\alpha_k,\beta_1)}{|\beta_1|}\frac{\beta_1}{|\beta_1|} + \frac{(\alpha_k,\beta_2)}{|\beta_2|}\cdot\frac{\beta_2}{|\beta_2|} \cdots + \frac{(\alpha_k,\beta_k)}{|\beta_k|}\cdot\frac{\beta_k}{|\beta_k|}$$

$$\int \underset{\text{基}}{|\alpha_k\rangle} \underbrace{\langle \alpha_k|\beta\rangle}_{\text{投影}} \Rightarrow \beta \qquad \int \frac{|\beta\rangle\langle\beta|\alpha_k\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} = \alpha_k$$

三、正交阵

定义: 正交阵: U: $U^TU=E$.

性质: $U^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix}$

∵ $U^T\cdot U = E \Rightarrow \alpha_i\cdot\alpha_j = (\alpha_i,\alpha_j) = \delta_{ij}$ （在常用内积下）

∴ $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 为标准正交基

$\boxed{\text{定理}}$ 设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\in V$ 是 V 的一个标准正交基, $\beta_1\cdots\beta_m$ 为另一个基

$\beta_1\cdots\beta_m$ 也为标准正交基 $\Longleftrightarrow (\beta_1\cdots\beta_m) = (\alpha_1\cdots\alpha_m)U$ U 为正交阵

注: 所以两个标准正交基之间的过渡阵为正交阵