§1 线性方程组的求解

1. 线性方程组的形式及相关概念

定义：设数域 P，$m,n\in N^*$，在数域 P 上由 m 个方程 n 个未知量构成的 n 元线性

方程

$$(1.1.1)\quad \underbrace{\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\ \ a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}}_{n元} \quad m个方程$$

满足 $a_{ij},\ x_j,\ b_i\in P$（数域）

定义：未知量：称 $x_1\ x_2\cdots x_n$

项：$\boxed{a_{ij}x_j}$ 为第 i 个方程第 j 项　$1\le i\le m$　$1\le j\le n$

系数：$\boxed{a_{ij}}$ 为第 i 个方程第 j 项的系数/未知量 x_j 在第 i 个方程的系数

常数项：b_i 为第 i 个方程の常数项

定义：齐次线性方程组：

$b_1=b_2=b_3\cdots b_m=0$ $\overset{否则}{\Longrightarrow}$ 非齐次线性方程组

定义：有解　解　解集

$\exists\ c_1\ c_2\cdots c_n\in P$（数域）使得 $x_1=c_1$　$x_2=c_2\cdots x_n=c_n$ 代入

n 元线性方程组成立，则称在数域 P 上此 n 元线性方程组 $\boxed{有解}$

称 $x_1=c_1$　$x_2=c_2\cdots x_n=c_n$ 为此 n 元线性方程组の一个解，

称此 n 元线性方程组の所有解为解集

定义：相容/不相容：一个线性方程组有解 ⟹ 相容

定义：同解：两个线性方程组有相同解

定义：欠定/超定　$m<n$ 欠定　$m>n$ 超定.

2. 同解变形与阶梯形线性方程组

定义：三类线性方程组的初等变换：←同解变换.

① 互换：$\xrightarrow{R_{ij}}$ R_i R_j 交换位置得到新线性方程

② 倍乘：$\xrightarrow{cR_i}$ R_i 乘以常数 c 得到新线性方程 $c\neq0$

③ 倍加：$\xrightarrow{R_i+cR_j}$ R_i 加上 cR_j · — — - - $c\neq0$

P.S. ④ 互换列（不常用）：$\xrightarrow{c_{ij}}$ column i ⇒ column j 交换

引理1. 初等变换后的两个线性方程组同解

定义：阶梯形线性方程组 ⇐ 高斯消元法

将原来方程的未知数通过三大初等变换依次消去得到的形似梯形的方程

定义：阶梯头：称阶梯转变处的项为阶梯头. $b_{ij_i}x_{j_i}$

定理1. ：对于任意一个四方线性方程组，若 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\neq0$，则 $\exists\, r\in\mathbb{N}^*$，使得线性方程只需经过有限次三大初等变换就可以转化为如下形状的阶梯形线性方程组.（不唯一）

$$\begin{cases}
b_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+b_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{1n}x_n=c_1\\
\qquad b_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{2n}x_n=c_2\\
\qquad\qquad\ddots\\
\qquad\qquad\qquad b_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+b_{rn}x_n=c_r\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0=c_{r+1}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{“}0=0\text{”}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{cases}$$

式(1.2.1)

阶梯头

c_{r+1} 以下留空表示下面还有 $m-(r+1)$ 个 “$0=0$”

当 $r=m$ 时 不存在 c_{r+1} 项.

0为常数

满足：① $1\overset{=}{\le} j_1<j_2<j_3<\cdots<j_n\overset{<}{\le}n$ ② b_{ij} $j_i\le j\le n$（b_{ij_i}为阶梯头）$\because j_i\le j$

③ $b_{ij_i}\neq0$ $i=1,2,\cdots,r$ ④ $c_i\in P$

⇒ 标准的定义 $\because b_{ij}$ $j_i<j\le n$ 不一定不为0

3. Gauss 消元的一般结论

定义：我们把，通过研究如上述的用有限次初等变换得到的同解的满足上述定理的阶梯形线性方程组是否有解来判断原线性方程组是否有解的方法叫做Gauss消元法 ⇒ 同九章算术

① 当 $c_{r+1}=0$ 时 / $r=m$ 时.

引理2：对于任何一个形如(1.2.1)的阶梯线性方程组，记 $N=\{1,2,\dots,n\}$
若 $c_{r+1}=0$ 或 $r=m$ 则原阶梯方程为

$$\begin{cases} b_{1j_1}x_{j_1}+\dots+b_{1j_2}x_{j_2}+\dots+b_{1j_r}x_{j_r}+\dots+b_{1n}x_n=c_1 \\ \quad b_{2j_2}x_{j_2}+\dots+b_{2j_r}x_{j_r}+\dots+b_{2n}x_n=c_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad b_{rj_r}x_{j_r}+\dots+b_{rn}x_n=c_r \end{cases}$$

阶梯头

经过有限次倍乘倍加，以及移项可以得到形如下的方程组（途中要在行中仅保留原那行的阶梯头 (1,3,1) 而消去其他阶梯头变量）

$$\begin{cases} x_{j_1}=d_1-c_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\dots-c_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2}=d_2-c_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\dots-c_{2j_n}x_{j_n} \\ x_{j_3}=d_3-\dots \\ \vdots \\ x_{j_r}=d_r-c_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\dots-c_{rj_n}x_{j_n} \end{cases}$$

满足 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 为原方程の阶梯头未知数的下角标，而 $j_{r+1}, j_{r+2}, \dots$ j_n 为除了 $j_1,\dots,j_r$ 之外的所有变量的下角标、且满足数值递增

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} N&=\{j_1, j_2,\dots,j_n\}\cup\{j_{r+1},\dots,j_n\} \\ \varnothing&=\{\qquad\}\cap\{\qquad\} \end{aligned}}$$

阶梯头　　其他变量

且 $d_i\in P$，$c_{ij}\in P$，$j=j_{r+1},j_{r+2},\dots,j_n$（其中 $j_{r+1}<j_{r+2}<\dots<j_n$）

证明：易证

$\sum\sum|a_{ij}|\neq0$

定理2：对于任意一个(1.1.1)的线性方程组，满足（变到(1.2.1)条件），则利用三大变换变到(1.2.1)的阶梯形，那么

① 如果 $r=m$ 或者 $c_{r+1}=0$ 则方程组有解，若"$c_{r+1}\neq0$"则无解。
阶梯行=原行数。

② 当方程有解时（⇐ $c_{r+1}=0$ $r=m$ 满足变到(1.3.1)条件）则 (1.2.1)

可变为(13')，从而确定了方程の所有解.

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1j_{r+1}} t_1 - \cdots - c_{1j_n} t_{n-r} \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = \cdots \\ x_{j_{r+1}} = t_1 \\ \quad\vdots \\ x_{j_n} = t_{n-r} \end{cases}$$

(母式)

如果所有未知包括所有变量 ⇒ 则 $x_{j_{r+1}} \cdots x_{j_n}$ 可以在P内任意取值

③ 当方程组有解 ($d_{r+1}=0$ / $r=m$) 当 $r=n$ 时 有唯一解 当 $r<n$ 无数解.

行数 变量数

可以发现的是 将母式变换(R=行) 可以得到 (从 x_i 开始增量式)

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1j_{r+1}} t_1 - c_{1j_{r+2}} t_2 - \cdots \\ x_2 = t_1 \\ \quad \cdots \\ x_{j_2-1} = t_{j_2-2} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2j_{r+1}} t_1 - \cdots \\ \quad\vdots \end{cases}$$

定义 通解/自由未知量：上式刻画了线性方程的所有解 ⇒ 通解

其中 $x_{j_{r+1}}$ $x_{j_{r+2}}$ ... x_{j_n} 等称为自由未知量

4 矩阵及其初等变换

⇐ 运用矩阵简化上述过程

定义 $m\times n$ 矩阵：设 $m,n\in N^*$ 我们称由P中的 mn 个数 a_{ij} ($1\le i\le m$ $1\le j\le n$)

所组成的如下形式的数阵

$$(a_{ij})_{m\times n} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m\times n}$$

为P上的一个 $m\times n$ 矩阵 用大写A表示 $A_{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 矩阵.

称 a_{ij} 为第i row 第j column 的元素.

称 =行同列 或 =列同行 的元素为对应元素

[illegible]

定义：分块矩阵/子块：为计算简便 常对矩阵作分块：……

我们把 $A_{(m\times n)}$ 行分成s块 列分成t块，我们称 行第k块与列第l块 所对应元素组成的矩阵称为 $A_{m\times n}$ 的子块（A_{kl}），将A用所有st块子块表示称为分块矩阵

定义：矩阵的两种表示形式

① $(a_{ij})_{m\times n}$：表示由 a_{ij} 组成的 $m\times n$ 矩阵.

② $(A_{kl})_{s\times t}$：表示由子块 A_{kl} 组成的 $s\times t$ 分块矩阵.

注：无论 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ / $A=(A_{kl})_{s\times t}$ 都表示矩阵A

例：
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A_{4\times 5} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$= (a_{ij})_{4\times 5})$ $\qquad = (A_{kl})_{2\times 2}$.

定义：实矩阵/复矩阵

零矩阵 $O_{m\times n}$

n阶方阵

但矩阵一定存在

↓ C变换

定义：矩阵的初等行列变换 ⟷ 等价于线性方程组的行变换

而方程组的列变换……

① 互换 $\xrightarrow{R_{ij}}$ / $\xrightarrow{C_{ij}}$

② 倍乘 $\xrightarrow{cR_i}$ / $\xrightarrow{cC_i}$ $\boxed{c\text{也且为}P\text{中元素}}$

③ 倍加 $\xrightarrow{R_i+cR_j}$ / $\xrightarrow{C_i+cC_j}$

5. Gauss消元过程的矩阵形式

定义：线性方程组(1.1.1)的系数矩阵 A

$$A=(a_{ij})_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义：线性方程组（系数矩阵）的增广矩阵 $\bar{A}$

回顾 "增广" 意为扩大 即扩大行(列)

对于线性方程组 将常数项加入系数矩阵得到 $\bar{A}$

$$\bar{A} \triangleq \left[A \;\vdots\; b \right] = \left[A \;\vdots\; \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right] = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

- 我们可以发现对方程组变换

与对方程组增广矩阵 $\bar{A}$ 变换过程相似

于是将 (1.1.1) 变为 (1.2.1)(条件：$\sum\sum |a_{ij}| \neq 0$) 可以写出 (1.2.1) 的

增广矩阵 (上三角阵).

定义：行阶梯形矩阵/阶梯头

形如 (1.2.1) 式的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc:c} \boxed{b_{1j_1}} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_3} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots\; b_{1n} & c_1 \\ & \boxed{b_{2j_2}} & \cdots & b_{2j_3} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots\; b_{2n} & c_2 \\ & & & \boxed{b_{3j_3}} & \cdots & b_{3j_r} & \cdots\; b_{3n} & c_3 \\ & \text{"}O\text{"} & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \boxed{b_{rj_r}} & \cdots\; b_{rn} & c_r \\ & & & & & & & \boxed{c_{r+1}} \end{array} \right)$$

称阶梯转变处的非零元素为阶梯头(主元)

例 已知为方程组的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 求解方程组

$$\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有二个阶梯头 ⇒ 对应的有 4-2=2 个自由未知量

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - 2t_1 - \frac{3}{7}t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

通解