第五节

隐函数的微分法

- 一、由一个方程确定的隐函数的微分法
- 二、由方程组确定的隐函数的微分法

一、由一个方程确定的隐函数的微分法

1. $F(x, y) = 0$

问题的提出：

$$F(x, y) = 0 \xrightarrow{?} y = f(x)$$

例如, 方程 $x^2 + \sqrt{y} + C = 0$

当 $C < 0$ 时, 能确定隐函数;

当 $C > 0$ 时, 不能确定隐函数;

问题1 在何种条件下，能确定一个隐函数？

在方程（或方程组）能确定隐函数时, 即

$$F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$$

$$F(x,f(x))\equiv 0,\quad x\in I$$

问题2　在何种条件下，$f'(x)$ 存在？

求导方法？ 求导公式？

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=?$$

定理8.7 设函数 $F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内满足

① 具有连续偏导数;

② $F(x_0,y_0)=0$;

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

注意公式
里的负号

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某邻域内能唯一确定一个函数$y=f(x)$，满足条件 $y_0=f(x_0)$,并有连续导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

—— 隐函数求导公式

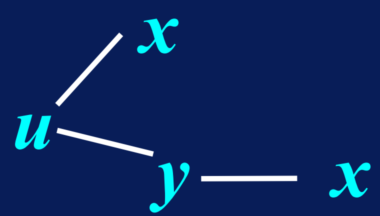
目录 上页 下页 返回 结束

求导公式推导如下：

设 $y = f(x)$ 为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数，

则 $u = F(x, f(x)) \equiv 0$

两边对 x 求导



$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv 0$$

由 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 及 F_y 连续知

在 (x_0, y_0) 的某邻域内 $F_y \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

目录 上页 下页 返回 结束

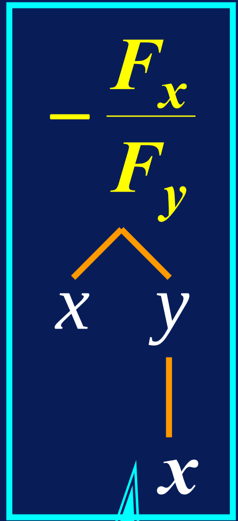
若$F(x,y)$的二阶偏导数也都连续，则还有

二阶导数：
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_xF_{yx}}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_xF_{yy}}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^{\;2}-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^{\;2}}{F_y^3}$$



求二阶导数时，要注意y是x的函数！

此公式不实用.

例1 已知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解(方法1) 公式法

令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x},$$

则

$$F_x(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_x(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2},\quad F_y(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{y-x}.$$

x

y — x

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+y}{y-x}\right)$$

$$=-\frac{\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)(y-x)-(x+y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)}{(y-x)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

求二阶导数时，要注意y是x的函数！

(方法2) 复合函数求导法

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}$$

两端同时对 x求导， 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}$$

用此法求导数时，要注意y是x的函数！

$$x+yy'=xy'-y,\qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}.$$

(方法3) 全微分法

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}$$

一阶全微分形式不变性，

两端同时取全微分，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}(x^2+y^2)=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\mathrm{d}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. $F(x,y,z)=0$

定理8.8 若 $F(x,y,z)$ 满足:

① 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内具有连续偏导数,

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内可唯一确定一个函数 $z=f(x,y)$ 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$,

并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

注意公式里的负号

求导公式推导如下：

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，

则 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$

$\downarrow$ 两边对 x 求偏导数

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$$

$\downarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

由 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

及 F_z 连续知：

在 (x_0,y_0,z_0) 的

某邻域内 $F_z\neq 0$

同样可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

注 在公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ 中，

F_x：将 $F(x,y,z)$ 中的 y,z 暂视为常数，

对 x 求偏导数；

F_z：将 $F(x,y,z)$ 中的 x,y 暂视为常数，

对 z 求偏导数；

例2 设$z^3-3xyz=a^3$,求z_x及z_{xy}.

解 求一阶偏导数 z_x有三种方法.

用此法求导时，要注意z是x,y的函数!

(方法1) 复合函数求导法

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

(方法2) 公式法

令 $$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3,$$

则 $F_x = -3yz$, $F_z = 3z^2 - 3xy$

求F_z时，要视 x, y为常数！

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$.

(方法3) 全微分法

$$\mathrm{d}(z^3 - 3xyz) = \mathrm{d}a^3, \ \mathrm{d}z^3 - 3\,\mathrm{d}(xyz) = 0$$

$$3z^2\,\mathrm{d}z - 3(yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z) = 0,$$

解得 $\mathrm{d}z = \dfrac{yz}{z^2 - xy}\mathrm{d}x + \dfrac{xz}{z^2 - xy}\mathrm{d}y,$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$

求二阶导数时，要视z是x, y的函数!

再求 z_{xy}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{yz}{z^2-xy}\right)$

$$=\frac{\left(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(z^2-xy\right)-yz\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{\left(z^2-xy\right)^2}$$

把 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 代入得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{z}{z^2-xy}$.

例3 设 $z = z(x, y)$ 由方程：

$$F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}) = 0 \qquad (1)$$

所确定，证明： $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$

证 方程（1）两边同时取全微分得

$$\mathrm{d}\,F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})$$

$$= F_1' \cdot \mathrm{d}(\,x + \frac{z}{y}) + F_2' \cdot \mathrm{d}(\,y + \frac{z}{x})$$

$$= F_1' \cdot [\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}(\frac{z}{y})] + F_2' \cdot [\mathrm{d}\,y + \mathrm{d}(\frac{z}{x})]$$

$$= F_1' \cdot [\mathrm{d}x + \mathrm{d}(\frac{z}{y})] + F_2' \cdot [\mathrm{d}y + \mathrm{d}(\frac{z}{x})]$$

$$= F_1' \cdot (\mathrm{d}x + \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{y^2}) + F_2' \cdot (\mathrm{d}y + \frac{x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x}{x^2})$$

$$= (\frac{F_1'}{y} + \frac{F_2'}{x})\,\mathrm{d}z + (F_1' - \frac{z}{x^2}F_2')\,\mathrm{d}x + (F_2' - \frac{z}{y^2}F_1')\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}z = \underbrace{\boxed{\frac{(\frac{z}{x^2}F_2' - F_1')}{\frac{F_1'}{y} + \frac{F_2'}{x}}}}_{\frac{\partial z}{\partial x}}\mathrm{d}x + \underbrace{\boxed{\frac{(\frac{z}{y^2}F_1' - F_2')}{\frac{F_1'}{y} + \frac{F_2'}{x}}}}_{\frac{\partial z}{\partial y}}\mathrm{d}y$$

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\dfrac{\dfrac{z}{x^2}F_2'-F_1'}{\dfrac{F_1'}{y}+\dfrac{F_2'}{x}}+y\cdot\dfrac{\dfrac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\dfrac{F_1'}{y}+\dfrac{F_2'}{x}}$

$$=\frac{z\cancel{\left(\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}\right)}-xy\cancel{\left(\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}\right)}}{\cancel{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}}$$

$=z-xy.$

二、由方程组确定的隐函数微分法

以两个方程确定两个隐函数的情况为例， 即

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

由 函数F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

称为函数F，G 的雅可比(Jacobi)行列式.

定理8.9 设函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 满足：

① 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数；

② $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$， $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

③ $J\Big|_P = \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P \neq 0$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$， $G(x,y,u,v)=0$

在点(x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内能唯一确定

一对满足条件 $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$,

目录 上页 下页 返回 结束

具有连续偏导数的函数

$$u = u(x, y), v = v(x, y),$$

且有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{x}, v)} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{y}, v)} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{x})}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{y})}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

公式推导如下：

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases},$$

则
$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \end{cases}$$

恒等式两边对x 求偏导数得

$$\begin{cases} F_x + F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = -F_x \\ G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = -G_x \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = -F_x \\ G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = -G_x \end{cases}$$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，链接

由定理条件知，在点 P 的某邻域内系数行列式

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

故得 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}.$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

注 情形二的特例：

若方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 满足定理8.9的条件,则

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

函数个数=方程个数;
自变量个数=方程组所含变量个数–方程个数.

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \\ G(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ G_x + G_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -F_x \\ G_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -G_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y \cdot \boxed{\dfrac{dy}{dx}} + F_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = -F_x \\ G_y \cdot \boxed{\dfrac{dy}{dx}} + G_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = -G_x \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}.$$

例4 设 $xu - yv = 0$， $yu + xv = 1$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解（方法1）直接套公式

（方法2）复合函数求导法

将所给方程的两边对 x 求偏导数，并移项

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}, \quad J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

在$J \neq 0$的条件下，解此方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2},$$

将所给方程的两边对 y 求偏导数，并解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

例5 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$.

分析

函数个数=方程个数;

自变量个数=方程组所含变量个数–方程个数

本题目方程组中包含两个方程， 故有两个函数.

由题目知 y、z 是函数, x是自变量, 故 y, z 均是由方程组确定的自变量x的一元函数.

解 对方程组中每一个方程 的两端同时关于 x求导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\[2ex] 2x + 4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x(1+6z)}{y(1+3z)}, \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{1+3z}.$

求二阶导数时，要注意y是x的函数！

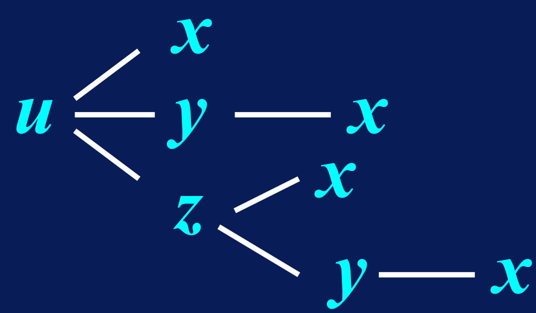
$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1+3z}\right) = \frac{(1+3z) - x\cdot 3\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{(1+3z)^2} = \frac{(1+3z)^2 - 3x^2}{(1+3z^2)^3}.$$

例6 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x,$

$(f, \varphi$具有一阶连续偏导数 $)$, 且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z} \boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}$$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x,$$

由 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$，两边对 x 求导数，得

$$\varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varphi_3' \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0$$

目录 上页 下页 返回 结束

于是可得,

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\varphi_2')$$

故 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+(\cos x)\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\varphi_2')\frac{\partial f}{\partial z}.$$

例7 设 $y = f(x,t)$, 其中 $t = t(x,y)$ 由 $F(x,y,t) = 0$ 所确定，f, F 有一阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解（方法1）由方程组确定的隐函数求导法

$$\begin{cases} y = f(x,t) \\ F(x,y,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ t = t(x) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(x) \equiv f[x, t(x)] \\ F[x, y(x), t(x)] \equiv 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x + f_t \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ F_x + F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_t \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

y, t 都是 x 的函数

即 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - f_t \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f_x \\ F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_t \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -F_x \end{cases}$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f_t \\ -F_x & F_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -f_t \\ F_y & F_t \end{vmatrix}} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}.$$

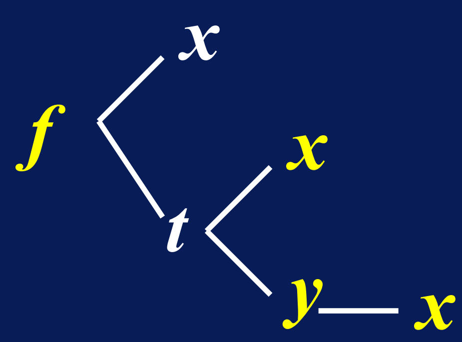
（方法2）全微分法

由 $\begin{cases} y = f(x,t) \\ F(x,y,t) = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} \mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,f(x,t) \\ \mathrm{d}[F(x,y,t)] = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,y = f_x\,\mathrm{d}\,x + f_t\,\mathrm{d}\,t \\ F_x\,\mathrm{d}\,x + F_y\,\mathrm{d}\,y + F_t\,\mathrm{d}\,t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,y - f_t\,\mathrm{d}\,t = f_x\,\mathrm{d}\,x \\ F_y\,\mathrm{d}\,y + F_t\,\mathrm{d}\,t = -F_x\,\mathrm{d}\,x \end{cases} \quad \therefore\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}.$$

（方法3）复合函数求导法



$$y = f(x,t),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x + f_t \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$\because t = t(x,y)$由 $F(x,y,t) = 0$所确定

$$\therefore \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_t}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_t}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x + f_t \cdot \left(-\frac{F_x}{F_t} - \frac{F_y}{F_t} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x+f_t\cdot\left(-\frac{F_x}{F_t}-\frac{F_y}{F_t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\left(1+\frac{f_tF_y}{F_t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x-\frac{f_tF_x}{F_t}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

内容小结

1. 隐函数存在定理

2. 隐函数 求导（偏导数）的方法

方法1　复合函数求导法;

方法2　公式法;

方法3　全微分法

思考题

1.设 $z=f(x+y+z,xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial x}{\partial z},\ \dfrac{\partial x}{\partial y}$.

解（方法1）

- $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'+yzf_2'}{1-f_1'-xyf_2'}$$

- $$1=f_1'\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial z}+1\right)+f_2'\cdot\left(yz\frac{\partial x}{\partial z}+xy\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1-f_1'-xyf_2'}{f_1'+yzf_2'}$$

- $0 = f_1' \cdot \left(\dfrac{\partial x}{\partial y} + 1 \right) + f_2' \cdot \left(yz \dfrac{\partial x}{\partial y} + xz \right)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_1' + xz f_2'}{f_1' + yz f_2'}$$

（方法2）全微分法

$$z = f(x + y + z, xyz)$$

$$\mathrm{d}z = f_1' \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + f_2' \cdot (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

解出 $\mathrm{d}x$：

$$\mathrm{d}x = \frac{-(f_1' + xz f_2')\mathrm{d}y + (1 - f_1' - xy f_2')\mathrm{d}z}{f_1' + yz f_2'}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{-\left(f_1'+xzf_2'\right)\mathrm{d}y+\left(1-f_1'-xyf_2'\right)\mathrm{d}z}{f_1'+yzf_2'}$$

$\mathrm{d}\,y$, $\mathrm{d}\,z$ 的系数分别是 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

问题　如何用全微分法求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$?

将$\mathrm{d}\,z$进行整理，其中 $\mathrm{d}\,x$的系数就是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

2. 设函数$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

1) 证明函数组$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$在与点 (u, v) 对应的点 (x, y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x, y)$.

2) 求 $u=u(x,y)$, $v=v(x, y)$对 x, y 的偏导数.

解 1) 令 $F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0$

$$G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0$$

则有 $$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

由定理 8.9 可知结论 1) 成立.

2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases} \quad ①$$

①式两边对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad ②$$

注意$J \neq 0$，从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理, ①式两边对 y 求偏导数, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

本题的应用：计算极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

的逆变换的导数.

由于 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r}$$

所以 $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{r} r\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{r}\sin\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

同样有 $$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

备用题

例1-1 验证 Kepler 方程 $y-x-\varepsilon\sin y=0(0<\varepsilon<1)$ 在点(0,0)的某邻域内能唯一确定 一个有连续导数，当 $x=0$ 时 $y=0$ 的隐函数 $y=f(x)$，并求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值 .

解 设 $F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y$, 则

$$F_x=-1,\ F_y=1-\varepsilon\cos y,\ F(0,0)=0,$$

$$F_y(0,0)=1-\varepsilon\neq 0.$$

由定理 8.7 可知，方程 $y-x-\varepsilon\sin y=0$ 在 $U(O,\delta)$ 能唯一确定一个有连续 导数，满足 $f(0)=0$ 的函数 $y=f(x)$.

下面求这函数的一阶及二阶导数.

（方法1）公式法　　$F_x = -1,\ F_y = 1 - \varepsilon\cos y,$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}\right) = \frac{-\varepsilon\sin y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(1-\varepsilon\cos y)^2}$$

$$= \frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3},$$

求二阶导数时，要注意y是x的函数！

由原方程可得　$y(0)=0$, 所以

$$y'(0) = \frac{1}{1-\varepsilon},\quad y''(0) = 0.$$

（方法2）复合函数求导法

注意本方法中，始终将y看作x的函数

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0$$

两端同时对 x求导

$$y' - 1 - \varepsilon \cos y \cdot y' = 0, \qquad (1)$$

(1)式两端再对 x求导

$$y'' + \varepsilon \sin y \cdot (y')^2 - \varepsilon \cos y \cdot y'' = 0, \qquad (2)$$

令$x = 0$，此时$y = 0$,由（1）式得

$$y'(0) = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

当$x = 0$时，$y = 0$,由（2）式得 $y''(0) = 0.$

（方法3） 全微分法

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0$$

两端同时取全微分

$$\mathrm{d}y - \mathrm{d}x - \varepsilon \cos y \mathrm{d}y = 0$$

根据全微分形式不变性，

暂时不将y看作x的函数

解得

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y} \mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

……

例1-2 验证方程 $\sin y + e^x - xy - 1 = 0$

在 (0,0)点某邻域可确定一个单值可导隐函数

$y = f(x)$, 并求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

解 令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy - 1$, 则

① $F_x = e^x - y$, $F_y = \cos y - x$ 连续 ,

② $F(0,0) = 0$,

③ $F_y(0,0) = 1 \neq 0$

由 定理1 可知, 在 $x = 0$ 的某邻域内方程存在单值可导的隐函数 $y = f(x)$, 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{x=0,\,y=0} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right)\Bigg|_{x=0,\; y=0,\; y'=-1}$$

$$= -\frac{(e^x - y')(\cos y - x) - (e^x - y)(-\sin y \cdot y' - 1)}{(\cos y - x)^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$= -3$$

目录 上页 下页 返回 结束

导数的另一求法 — 复合函数求导法

$$\sin y + e^x - xy - 1 = 0,$$

两边对 x 求导

$$\cos y \cdot y' + e^x - y - xy' = 0$$

$$y'\Big|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{(0,0)} = -1$$

两边再对 x 求导

$$-\sin y \cdot (y')^2 + \cos y \cdot y'' + e^x - y' - y' - xy'' = 0$$

令 $x = 0$, 注意此时 $y = 0$, $y' = -1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -3$$

例2-1 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 （方法1） 复合函数求导法

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

再对 x 求导

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

注意本方法中，始终将 z 看作 x与y的函数

（方法2）公式法

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $F_x=2x,\ F_z=2z-4$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}$$

对 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$ 两端关于 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)-x\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

求二阶导数时，要视z是x, y的函数！

目录 上页 下页 返回 结束

例2-2 设 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 方程两端取全微分：$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}=0,$

解得 $\mathrm{d}z=\frac{y^2z\mathrm{d}x+yz^2\mathrm{d}y}{y^2(x+z)}$，$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x+z}\right)=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(x+z)-z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(x+z)^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{x}{(x+z)^2}$$

$$=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

例3-1 设$F(u,v)$具有连续偏导数,已知方程$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$,求 $\mathrm{d}z$.

解（方法1） 先求偏导数 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 确定的隐函数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$

（方法2） 全微分法 对方程两边求全微分:

$$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot \mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot \mathrm{d}(\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot(\frac{z\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}z}{z^2})+F_2'\cdot(\frac{z\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}z}{z^2})=0$$

$$-\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z+\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}=0$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

例4-1 设 $\begin{cases} x^2+y^2-uv=0, \\ xy-u^2+v^2=0, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}.$

解（方法1）公式法　　略.

（方法2）复合函数求导法

对每一个方程两边关于x求偏导数,得.

$$\begin{cases} 2x-\dfrac{\partial u}{\partial x}v-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ y-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$$

当$u^2+v^2\neq 0$时，解此方程组可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}.$$

类似地对每个方程的两边关于y求偏导数, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4yv+xu}{2(u^2+v^2)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}.$$

（方法3） 全微分法

对每一个方程的两端同 时取全微分，得

$$\begin{cases} 2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=0, \\ y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v=0. \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

解得 $$\mathrm{d}u=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)}\mathrm{d}x+\frac{4yv+xu}{2(u^2+v^2)}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}\mathrm{d}x+\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}\mathrm{d}y.$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4yv+xu}{2(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}.$$

例4-2 设$\begin{cases} u = f(ux, v+y), \\ v = g(u-x, v^2 y), \end{cases}$ 其中f, g具有一阶连续偏导数,求u_y.

解（方法1）复合函数求导法

对每一个方程关于 y求偏导数,

得 $\begin{cases} u_y = f_1' \cdot x\, u_y + f_2' \cdot (v_y + 1), \\ v_y = g_1' \cdot u_y + g_2' (2yv\, v_y + v^2). \end{cases}$

解此关于u_y, v_y的二元一次方程组

得 $$u_y=\frac{v^2 f_2' g_2' + f_2'(1-2yvg_2')}{f_2' g_1' - (1-xf_1')(1-2yvg_2')},$$

$$v_y=\frac{f_2' g_1' + v^2 g_2'(1-xf_1')}{(1-xf_1')(1-2yvg_2') - f_2' g_1'}.$$

（方法2） 全微分法

对每一个方程两端同时 取全微分

得 $$\begin{cases} \mathrm{d}u = f_1'(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) + f_2'(\mathrm{d}v + \mathrm{d}y), \\ \mathrm{d}v = g_1'(\mathrm{d}u - \mathrm{d}x) + g_2'(v^2\,\mathrm{d}y + 2vy\,\mathrm{d}v). \end{cases}$$

解此关于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$的二元一次方程组，得

$$\mathrm{d}u=\frac{[uf_1'(1-2yvg_2')-f_2'g_1]\mathrm{d}x+[v^2f_2'g_2'+f_2'(1-2yvg_2')]\mathrm{d}y}{f_2'g_1'-(1-xf_1')(1-2yvg_2')}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{[g_1'(1-xf_1')-uf_1'g_1']\mathrm{d}x+[v^2g_2'(xf_1'-1)-f_2'g_1']\mathrm{d}y}{(1-xf_1')(1-2yvg_2')-f_2'g_1'}$$

由此可得 u_y，v_y，同时可得 u_x，v_x.

例5-1 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. (99考研)

解 （方法1）分别在各方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} z'=f+x\cdot f'\cdot(1+y') \\ F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -xf'\cdot y'+z'=f+xf' \\ F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y & -F_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y & F_z \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$$

$$(F_y+xf'\cdot F_z\neq 0)$$

（方法2）全微分法

$$z = x f(x+y),\ \ F(x,y,z)=0$$

对各方程两边分别求全微分:

$$\begin{cases} \mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}x + x f' \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \\ F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} (f + x f')\,\mathrm{d}x + x f'\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0 \\ F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

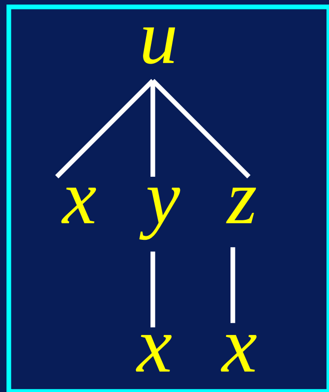
消去$\mathrm{d}y$可得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

例7-1 设 $u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$，$e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. (2001考研)

解 每个方程两边都对 x 求导, 得

$$\begin{cases} e^{xy}(y+xy')-(y+xy')=0 \\ e^{x}=\dfrac{\sin(x-z)}{x-z}(1-z') \end{cases}$$



解得 $y'=-\frac{y}{x}$， $z'=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$

因此 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot y'+f_3'\cdot z'=f_1'-\frac{y}{x}f_2'+[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}]f_3'$

二元线性代数方程组解的公式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

解

$$x=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$