第七节

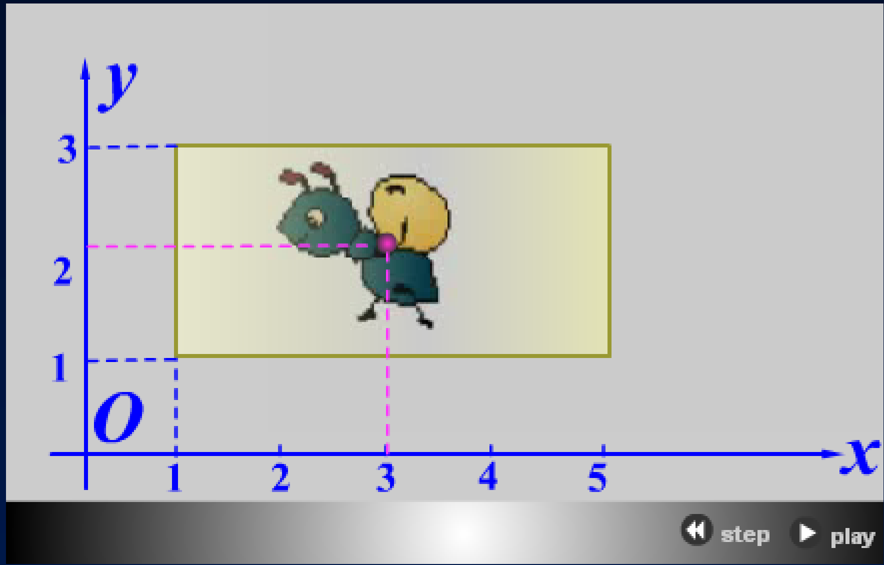
方向导数与梯度

- 一、方向导数
- 二、梯度

一、方向导数

1.问题的提出

问题1　一块长方形的金属板，四个顶点的坐标是(1,1)，(5,1)，(1,3)，(5,3)．在坐标原点处有一个火焰，它使金属受热．假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比．在(3,2)处有一个蚂蚁，问：



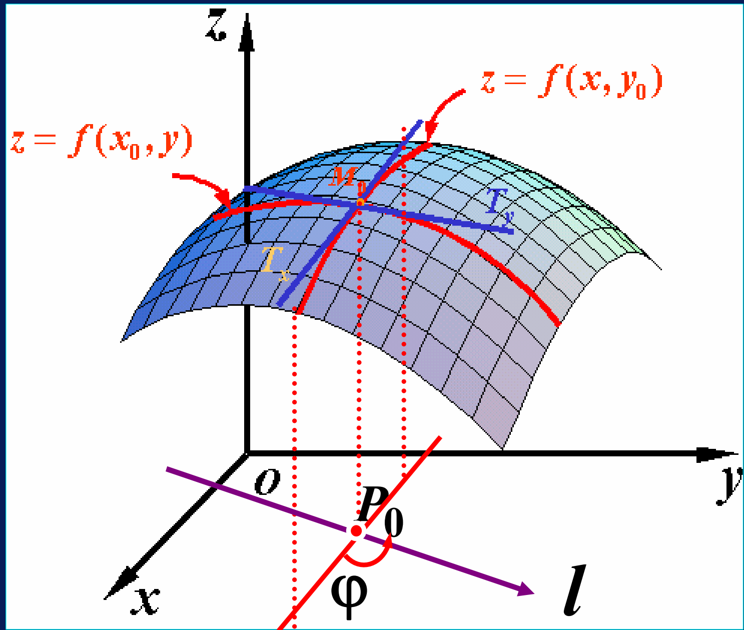
这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点？

目录　上页　下页　返回　结束

问题的实质：应沿由热变冷变化最骤烈的方向爬行.

问题2　$f_x(x_0,y_0)$是 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$沿平行于x轴的直线上的变化率

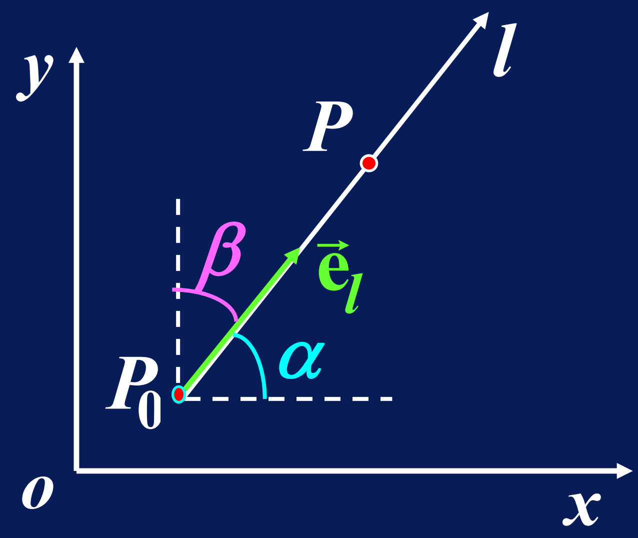
问：$f(x,y)$在点 P_0沿与x轴成定角的任一直线上变 化时的变化率如何确定？又 如何计算？



目录　上页　下页　返回　结束

2.方向导数的定义

定义8.8 设l是xOy平面上以$P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线， $\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与l同方向的**单位向量**. 射线l的参数方程为



$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha, \\ y = y_0 + \rho\cos\beta. \end{cases} \quad (\rho \geq 0)$$

函数 $z=f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域 $U(P_0)$内有定义,$P(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta)$为$l$上另一点，且 $P\in U(P_0)$

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

则 $|PP_0| = \rho$,

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0, y_0),$$

若 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ (P \in l)}} \dfrac{\Delta z}{|PP_0|} = \lim\limits_{\rho \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$

存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在点P_0沿方向 l 的

方向导数，记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

注 1° 方向导数的其他形式：

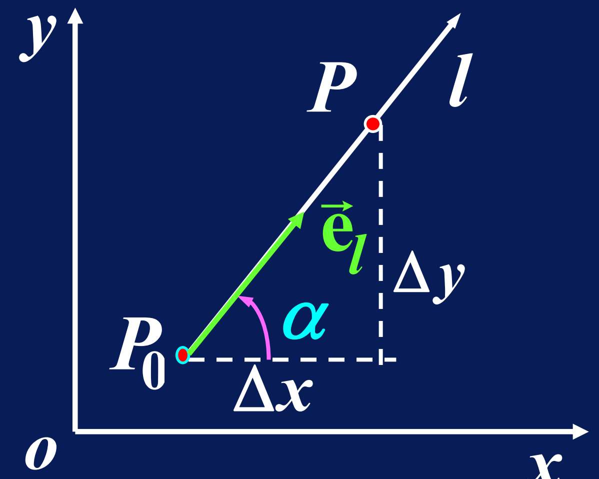
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

其中$\Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta$

$$\rho = |PP_0|$$

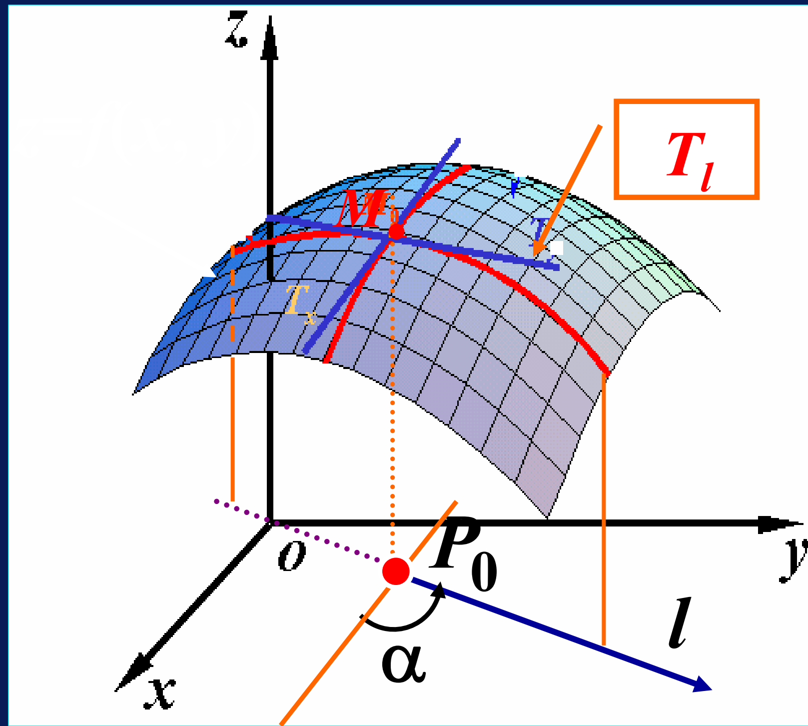
$$= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$



2° 方向导数的几何意义

过点P_0沿l作垂直于xOy面的平面，该平面与曲面$z=f(x,y)$的交线在曲面上相应点M处的切线MT_l(若存在)关于l方向的斜率：

$$\tan\varphi=\frac{\partial f}{\partial l}$$



3. 方向导数的计算

(1) 用定义

令$\varphi(\rho)=f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta)$, 则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\varphi(\rho)-\varphi(0)}{\rho}$$

$$=\varphi'_+(0).$$

本质上，方向导数计算可归结为一元函数导数计算

目录 上页 下页 返回 结束

例1 求 $f(x,y)=xy$ 在点 (1, 2) 处沿方向 $\vec{e}_l=(\cos m,\cos n)$ 的方向导数.

解 $(x_0,y_0)=(1,2)$, $\cos\alpha=\cos m$, $\cos\beta=\cos n$,

$$\varphi(\rho)=(1+\rho\cos m)(2+\rho\cos n),$$

$$=2+\rho(2\cos m+\cos n)+\rho^2\cos m\cos n,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\varphi'_+(0)=2\cos m+\cos n.$$

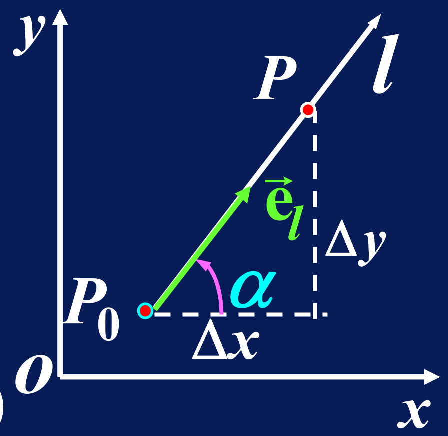
当函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微时, 又有如下的计算方向导数的办法.

(2) 用公式

定理8.9 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$处可微，则函数在该点沿任一方向$\vec{e_l}$的方向导数存在，

且有 $$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$ 为$\vec{e_l}$的方向余弦.



证 由函数 $f(x,y)$ 在点P_0可微，得

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$$

$$= \rho\cdot[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta] + o(\rho)$$

$$\Delta f = \rho \cdot [f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta] + o(\rho)$$

故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

例2 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解 $\vec{l} = \overrightarrow{PQ} = (1,-1)$,

$$\vec{e}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2$$

所求方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = \left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right)\right|_{(1,0)}$$

$$= 1\times\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

方向导数概念可推广到三元函数:

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，它在空间一点

$P(x,y,z)$沿着方向 l 的方向导数，可定义为:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\substack{P'\to P\\(P'\in l)}}\frac{f(P')-f(P)}{|P'P|}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\cos\beta,z+\rho\cos\gamma)-f(x,y,z)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$$

目录 上页 下页 返回 结束

其中 $P' = P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$,

α, β, γ 为方向 l 的方向角

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \quad \begin{cases} \Delta x = \rho\cos\alpha, \\ \Delta y = \rho\cos\beta, \\ \Delta z = \rho\cos\gamma, \end{cases}$$

同样有，当函数在一点可微时，则函数在该点沿任意方向的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例3 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处沿从点 M_0 到点 $M(2,1,-1)$ 方向的方向导数 .

解 因函数可微，所以用公 式计算．先求方向:

$$\overrightarrow{M_0M} = (1,2,-3),\quad \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{14},$$

故 $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}},\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2,$$

在点 M_0 处, $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{5}{\sqrt{14}}.$$

4. 概念之间的关系

(1) 方向导数与偏导数的关系

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 存在 $\Longrightarrow$

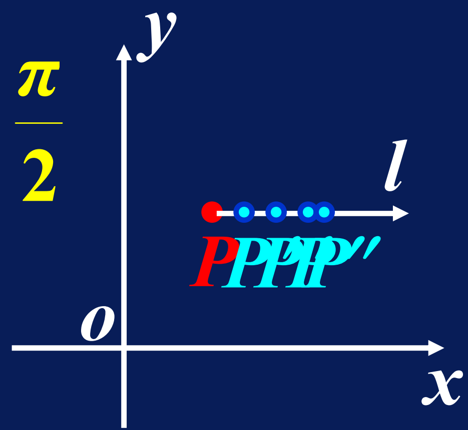
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(\vec{e}_l=\vec{i})\\&\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}(\vec{e}_l=-\vec{i})\end{aligned}\right\}\text{存在，且}$$

当 $\vec{e}_l=\vec{i}$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$；

当 $\vec{e}_l=-\vec{i}$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

证　若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 存在，则 当$\vec{e}_l = \vec{i} = \{1, 0\}$时，

即射线$l \,//\, x$轴且与x轴同向，$\alpha = 0, \beta = \dfrac{\pi}{2}$



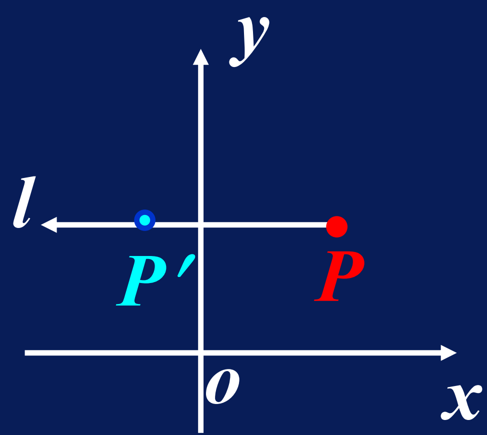
$$\therefore \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}} = \lim_{\substack{P' \to P \\ (P' \in l)}} \frac{f(P') - f(P)}{|P'P|}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x + \rho\cos 0, y + \rho\cos\frac{\pi}{2}) - f(x, y)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x + \rho, y) - f(x, y)}{\rho} \boxed{= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_+} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

当$\vec{e}_l = -\vec{i} = (-1, 0)$时，即射线 $l \parallel x$轴，且与x轴反向，

$\alpha = \pi,\quad \beta = \dfrac{\pi}{2}$



$$\therefore\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i}\,)}} = \lim_{\substack{P'\to P\\(P'\in l)}} \frac{f(P') - f(P)}{|P'P|}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(x+\rho\cos\pi,\, y+\rho\cos\frac{\pi}{2}) - f(x,y)}{\rho}$$

$$= -\lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(x-\rho, y) - f(x,y)}{-\rho} \boxed{= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

但 $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}\text{存在}} \not\Longleftarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(\overrightarrow{\mathbf{e}_l}=\vec{i}\,) \\ \dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{i}\,)}(\overrightarrow{\mathbf{e}_l}=-\vec{i}\,)\end{array}\right\}\text{存在}}$

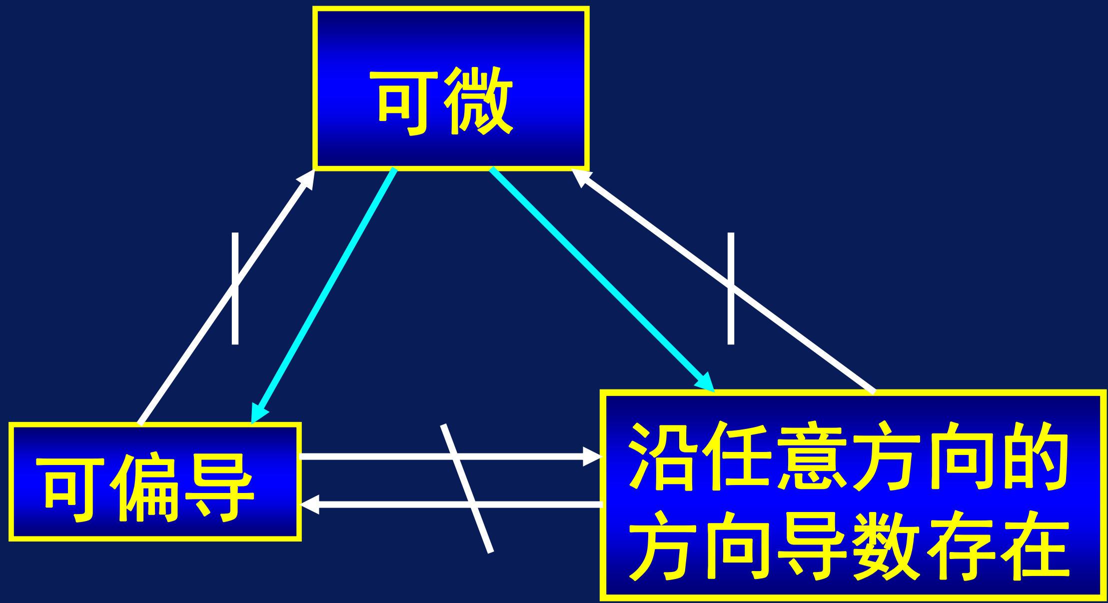
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}} = (\dfrac{\partial f}{\partial x})_+ \qquad -(\dfrac{\partial f}{\partial x})_- = \dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}$

即 $(\dfrac{\partial f}{\partial x})_+ = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}} \overset{?}{=} (\dfrac{\partial f}{\partial x})_- = -\dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}$

反例: $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $P(0,0)$.（自己证）

目录 上页 下页 返回 结束

(2)



反例1

$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$在(0,0)处沿任意方向的方向导数都存在，且 都为1，但$f_x(0,0)$及$f_y(0,0)$均不存在，从而$f(x, y)$在(0,0)处不可微 .

反例2 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f(x,y)$可偏导，但

$f(x,y)$在点$(0,0)$处沿$\vec{l} = (1,1)$的方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ (y=x)}} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\rho} \quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2})$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x,x) - f(0,0)}{\sqrt{2}x} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{2} - 0}{\sqrt{2}x} = +\infty$$

不存在.

例4 设从x轴正方向到射线l的转角为α，求函数 $z = 2-(x^2+y^2)$在点$P(1,1)$沿射线l方向的方向导数. 并问：l是怎样的方向时，此方向导数

(1) 取得最大值；(2) 取得最小值；(3) 等于零？

解 由方向导数的计算公式知

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = z_x(1,1)\cos\alpha + z_y(1,1)\cos\beta$$

$$= (-2x)\big|_{(1,1)}\cos\alpha + (-2y)\big|_{(1,1)}\sin\alpha$$

$$= -2(\cos\alpha + \sin\alpha) = -2\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = -2\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}),$$

故 (1) 当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，方向导数达到最小值 $-2\sqrt{2}$;

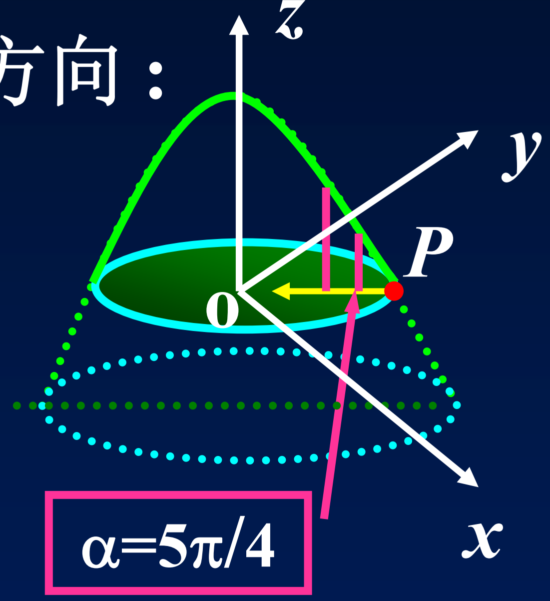
(2) 当$\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$时，方向导数达到最大值 $2\sqrt{2}$;

(3) 当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$和$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$时，方向导数等于 0.

二、梯度

问题： 函数在点P沿哪一个方向增加的速度最快？

从例4看到，当$\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$时，即沿着方向：



$$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\sin\alpha)\Big|_{\alpha=\frac{5\pi}{4}}$$

$$=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

函数 $z=2-(x^2+y^2)$在点 $P(1,1)$的方向导数达到最大值$2\sqrt{2}$，z增加得最快．

观察向量：$\vec{g}=(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\Big|_{P(1,1)}=(-2x,-2y)\big|_{P(1,1)}$

$$=(-2,-2)$$

恰好与 $\vec{e}_l=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 同方向，

且 $|\vec{g}|=2\sqrt{2}=\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{P(1,1)}$ 最大.

这是巧合吗？ 不是！

目录 上页 下页 返回 结束

1.定义8.9 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点$P(x_0,y_0)$具有偏导数，称向量

$$(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P 处的梯度(gradient),

记作

$$\mathbf{grad}\, f=(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j})\Big|_P$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})\Big|_P=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}\Big|_P$$

2. 梯度与方向导数的关系

可微函数 $z=f(x,y)$ 的梯度有下列性质：

(1) 设 $\vec{\mathrm{e}}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$是与射线 l同方向的单位向量，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{\mathrm{e}}_l=\mathrm{Prj}_l[\mathbf{grad}\,f(x,y)]$$

(2) 对于任一给定的点 $P(x,y)$, $\mathbf{grad}f(x,y)$ 的方向是使得 $f(x,y)$取得最大方向导数的方向，且 $|\mathbf{grad}f(x,y)|$为方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$的最大值.

证 (1) $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$=\mathbf{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{\mathrm{e}}_l$　记 $\theta=(\mathbf{grad}\ f(x,y)\,\hat{,}\,l)$

$$=|\mathbf{grad}\,f(x,y)|\cos\theta$$

$$=\mathrm{Prj}_l[\mathbf{grad}\ f(x,y)]$$

(2) $\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| = |\operatorname{grad} f(x,y)|\cos\theta \le |\operatorname{grad} f(x,y)|$

当$\cos\theta = 1$时，即 $\theta = 0$，$\vec{l}$ 的方向与梯度 $\operatorname{grad} f(x,y)$的方向一致时，$\frac{\partial f}{\partial l}$ 取得最大值：

$$\max_{l}\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right) = \left|\operatorname{grad} f(x,y)\right|.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (P'\in l)}} \frac{f(P') - f(P)}{\rho} \qquad (\rho = |P'P|)}$$

注 1° 沿梯度方向，

$\frac{\partial f}{\partial l}$取得最大值：$\frac{\partial f}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} f(x,y)\right| \ge 0$

$f(x,y)$增加最快．

目录 上页 下页 返回 结束

沿梯度相反方向，

$\frac{\partial f}{\partial l}$取得最小值： $\min_{l}(\frac{\partial f}{\partial l}) = -|\mathbf{grad}\ f(x,y)| \leq 0$

$f(x,y)$减小最快 .

$$\mathbf{grad}\, f : \begin{cases} \text{方向：是函数值增加最快的方向} \\ \text{模： 等于函数的方向导数最大值} \end{cases}$$

2° 梯度的概念可以推广到三元函数 $u = f(x,y,z)$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

类似于二元函数，三元函数的梯度也有上述性质.

例5 求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度.

解 $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,2,-2)}$

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{r^2} \cdot 2x$

注意 x , y , z 具有轮换对称性

$$= \left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2}\right)\bigg|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1, 2, -2)$$

3. 梯度的几何意义

(1) 等高线

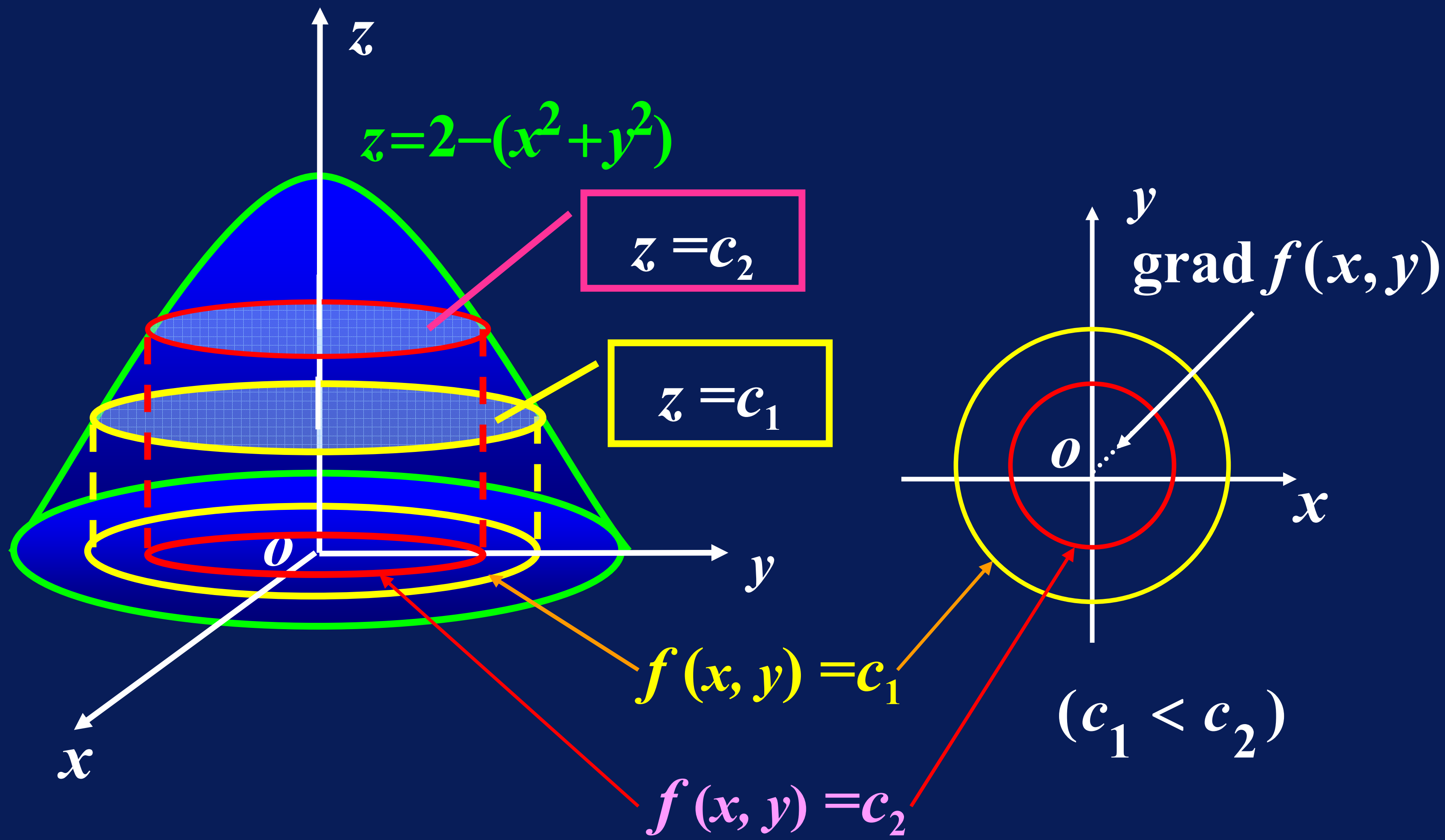
对函数 $z = f(x, y)$,

曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$

在xOy面上的投影 L^* :

$$f(x, y) = c$$

称为函数 $z = f(x, y)$的等高(值)线 .



z
z=2−(x²+y²)
z =c₂
z =c₁
o
y
x
f (x, y) =c₁
f (x, y) =c₂
y
grad f (x, y)
o
x
(c₁ < c₂)

(2) 等高线 $f(x, y) = c$ 的法向量

等高线 L^*: $f(x, y) = c \longrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$

L^*在点 $P(x, y)$处的切向量:

$$\vec{T} = (1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = (1, -\frac{f_x}{f_y}) \quad (f_y \neq 0)$$

$$= \frac{1}{f_y}(f_y, -f_x)$$

L^*在点 $P(x, y)$处的法向量:

$$\vec{n} = \pm(f_x, f_y) \qquad (\vec{n} \cdot \vec{T} = 0)$$

(3) 等高线上的法向量与梯度的关系

L^*在点 $P(x,y)$处的法向量为 $\vec{n}$, 则

① $\vec{n} \,/\!/\, \mathbf{grad}\, f(x,y)$

② $$\frac{\partial f}{\partial n} = \left|\mathbf{grad}\, f(x,y)\right| \cos(\underbrace{\mathbf{grad}\, f(x,y) \,\hat{,}\, \vec{n}}_{=0\text{或}\pi})$$

$$= \pm\left|\mathbf{grad}\, f(x,y)\right|$$

当 $\vec{n}$ 与 $\mathbf{grad}\, f(x,y)$同方向时,

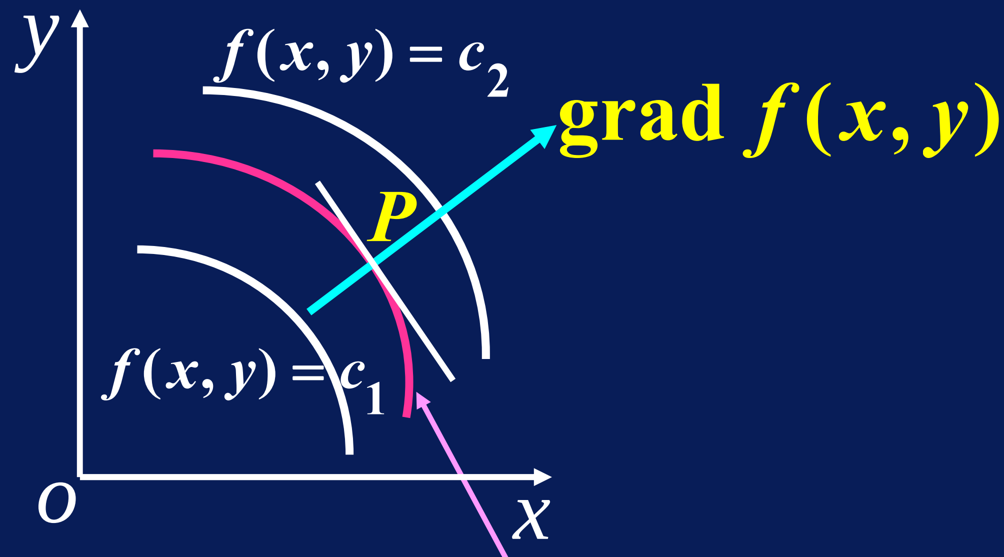
$$\frac{\partial f}{\partial n} = \left|\mathbf{grad}\, f(x,y)\right| = \max_{l} \frac{\partial f}{\partial l}$$

当 $\vec{n}$ 与 $\mathbf{grad}\ f(x,y)$同方向时，

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\left|\mathbf{grad}\ f(x,y)\right|=\max_{l}\frac{\partial f}{\partial l}\geqslant 0$$

沿梯度方向，$f(x,y)$的值增加最快.

故 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$的梯度恰为等高线 $f(x,y)=c$ 在这点的一个法向量，其指向为：从数值较低的等高线到数值较高的等高线，而梯度的模等于函数沿这个法线方向的方向导数.



$(c_1 < c_2)$

$f(x,y)=c$

等高线

梯度为等高线上的一个法向量，其指向为：从数值较低的等高线到数值较高的等高线.

同样, 对应三元函数 $u = f(x, y, z)$,

有等值面(等量面)

$$f(x, y, z) = c,$$

当各偏导数不同时为零时，等值面上

点P处的法向量为 $\operatorname{grad} f\big|_P$.

函数在一点的梯度垂直于该点等值面,指向函数

增大的方向.

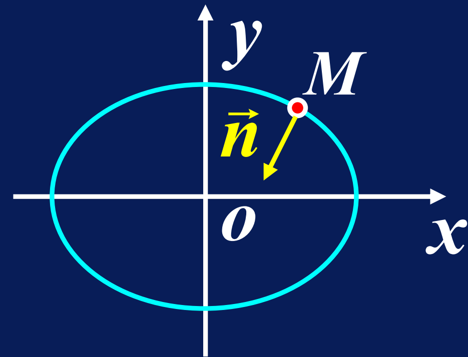
类似地,

设曲面$f(x,y,z)=c$为函数$u=f(x,y,z)$的等量面，此函数在点$P(x,y,z)$的梯度的方向与过点P的等量面$f(x,y,z)=c$在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面，而梯度的模等于函数沿这个法线方向的方向导数.

例6 求 $u = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处

沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在此点的内法线方向

上的方向导数 .



解(方法1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

恰为等高线 ($u = 0$)

内法向量：$\vec{n} = (\text{grad}\, u)_M = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})_M$

$$= (-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2})_M = (-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b})$$

$$\vec{n} = (\mathbf{grad}\, u)_M = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

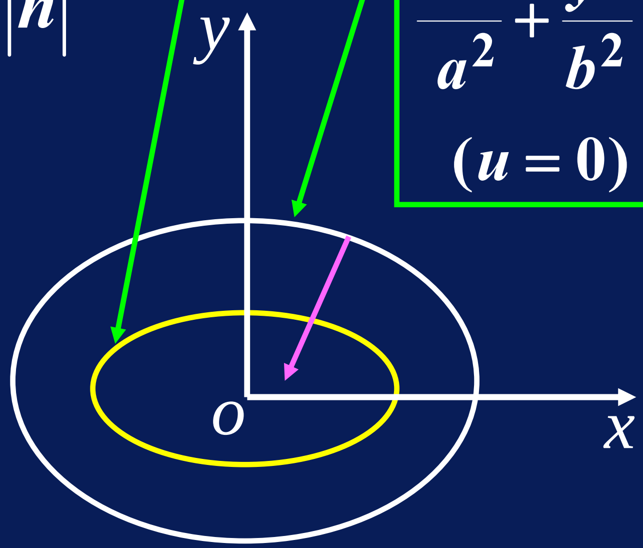
$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M = \left|[\mathbf{grad}\, u(x,y)]_M\right| = |\vec{n}|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}.$$

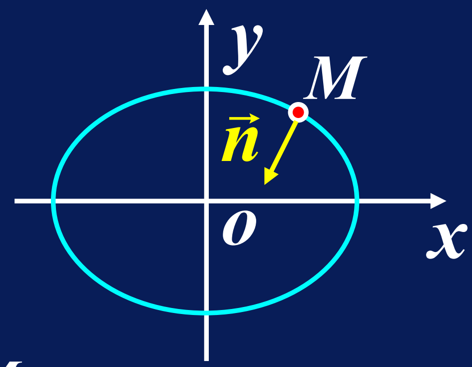
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \quad \left(u = \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (u = 0)$$



$$(\mathbf{grad}\, u)_M = \vec{n}$$

(方法2) 令 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$



则曲线 $f(x,y)=0$的内法向量:

$$\vec{n}=-(f_x,f_y)_M=-\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2}\right)_M$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=[\operatorname{grad}u(x,y)]_M\cdot\vec{n}^{\circ}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

4. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C\,u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u\,v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

5. 梯度的应用

梯度的应用非常广泛，如：

(1) 计算方法中求解非线性方程组的最速下降法；

(2) 在热力学中，引出热流向量：

$$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,U \quad (\text{其中}U(P)\text{为温度函数})$$

表示物体中各点处热流动的方向和强度；

(3) 在电磁场学中的电位 u 与电场强度 $\vec{E}$ 有关系：

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,u$$

例7 设 $f(r)$ 可导, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{\mathbf{e}}_r$.

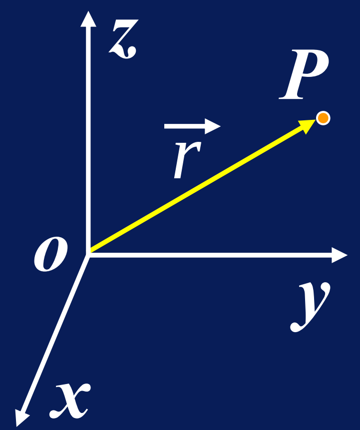
证 $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r},\quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{\mathbf{e}}_r$$



例8 已知位于坐标原点的点电荷 q 在任意点 $P(x,y,z)$ 处所产生的电位为 $u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}\ (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$,

试证明：$\operatorname{grad} u=-\vec{E}$ （场强 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$）

证 利用例7的结果 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{e}_r$

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)'\vec{e}_r=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r=-\vec{E}$$

这说明：场强垂直于等位面,

且指向电位减少的方向.

内容小结

可微时
方可用

1. 方向导数计算公式

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)\Bigg|_P$$

- 二元函数 $f(x,y)$在点 $P(x,y)$处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = (f_x(x,y),\ f_y(x,y))$$

3. 关系

- 可微 $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 方向导数存在 $\begin{array}{c}\not\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_l$ 梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.

思考题

设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求函数在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数;

(2) 求函数在 $M(1,1,1)$ 处的梯度与(1)中切线方向的夹角 θ.

解 (1) 曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 - 1 \\ z = t^3 \end{cases}$ 在点 $M\,(1,1,1)$ 处切向量为

$$\vec{l} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)\bigg|_{t=1} = (1, 4t, 3t^2)\big|_{t=1} = (1, 4, 3).$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = zy^{z-1}, \quad f_z = y^z \ln y,$$

函数沿 $\vec{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M = \left[f_x \cdot \cos\alpha + f_y \cdot \cos\beta + f_z \cdot \cos\gamma \right]\Big|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{26}}$$

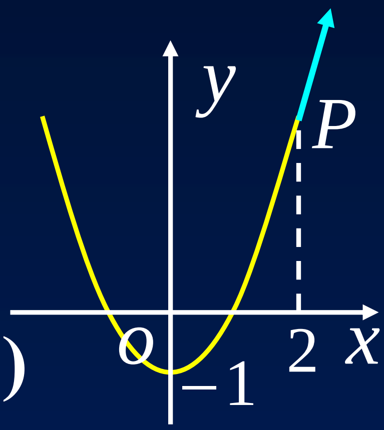
$$(2)\ \ \operatorname{grad} f\big|_M = (2x, zy^{z-1}, y^z \ln y)\big|_M = (2, 1, 0)$$

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{grad} f\big|_M \cdot \vec{l}}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right| \left|\vec{l}\right|} = \frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_M}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right|} = \frac{6}{\sqrt{130}}$$

$$\therefore\ \ \theta = \arccos\frac{6}{\sqrt{130}}$$

备用题

例2-1 求函数 $z = 3x^2y - y^2$ 在点$P(2, 3)$沿曲线 $y = x^2 - 1$在该点的切线，朝 x 增大方向的方向导数.



解 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

它在点 P 的切向量为 $(1, 2x)\big|_{x=2} = (1, 4)$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P = \left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + (3x^2 - 2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\Bigg|_{(2,3)} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

例3-1 求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点$A(1,0,1)$ 处沿点A指向 点$B(3,-2,2)$ 方向的方向导数

解 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

例3-2 设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，求函数

$$u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$$

在此处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

解 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6,$

$$F_x\big|_P=4x\big|_P=4,\quad F_y\big|_P=6y\big|_P=6,\quad F_z\big|_P=2z\big|_P=2,$$

故 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(4,6,2),$ + 外侧

$$|\vec{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14},$$ 方向余弦为

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P(1,1,1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$$

例3-3 求函数 $u = x^2yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

解 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

目录 上页 下页 返回 结束

例5-1 问函数 $u = xyz$ 在点 P（1, – 1,2）处的方向导数沿什么方向最大？并求出此方向导数的最大值．

解 沿梯度方向的方向导数最大.

$$\operatorname{grad} u\big|_P = (yz, xz, xy)_P = (-2,2,-1)$$

$$\cos\alpha = \frac{-2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

所以沿方向 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 方向导数最大，其值为

$$\max \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_P = \left|\operatorname{grad} u\right|_P$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$