第二章 关系

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

主要内容

- 有序偶与笛卡儿乘积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包运算
- 等价关系与划分
- 偏序关系

2.1 有序偶与笛卡儿乘积

定义2.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的有序序列称为**有序偶**，记作$<x,y>$. 其中x 和 y分别称为$<x,y>$的第一分量和第二分量，简称**分量**.

允许$x=y$

有序偶性质:

(1) 有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当$x\neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u\wedge y=v.$$

有序偶可以扩展至n元有序组

定义 2.3 $n(n>1)$个按一定次序排列的分量$a_1,a_2,\cdots,a_n$组成一个有序序列，称之为n元有序组，并记以$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

定义 2.4 对于n元有序组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，如果

$$a_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则称$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$相等.

笛卡儿乘积

定义2.2 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿乘积**记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 （1）$A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

笛卡儿乘积

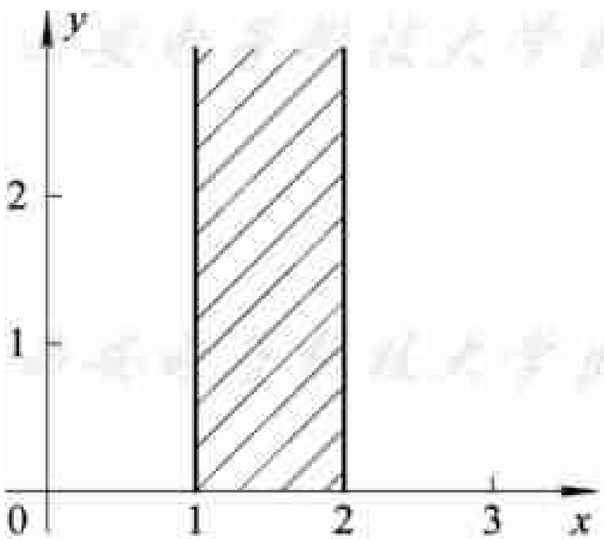
例1 （2） 平面直角坐标系中的所有点可以用一笛卡儿乘积表示

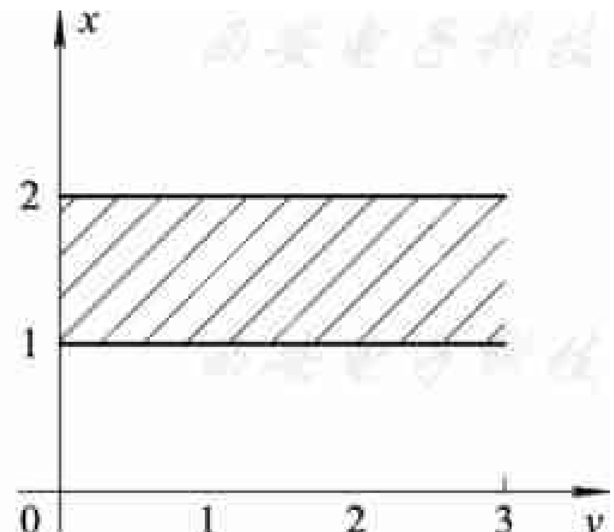
$\mathrm{R}\times\mathrm{R} = \{<x,y>|\ x\in\mathrm{R}\wedge y\in\mathrm{R}\}$. 其中，R为实数集

（3）设$A=\{x|1\le x\le 2\}$和$B=\{y|0\le y\}$

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle\ |1\le x\le 2\wedge 0\le y\}$$

$$B\times A=\{\langle y,x\rangle\ |1\le x\le 2\wedge 0\le y\}$$





笛卡儿乘积的性质

(1) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(2) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(3) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

笛卡儿乘积的性质

(4) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

证 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

笛卡儿乘积的性质

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

实例

例2 (1) 证明$A=B,C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定.反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

n个集合的笛卡儿乘积

定义 2.6 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿乘积 C 可表为一个 n 元有序组的集合，即

$$C = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$$

例. 设$A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{p,q\}$.

$A \times B \times C$

$=\{\langle a,1,p\rangle, \langle a,1,q\rangle, \langle a,2,p\rangle, \langle a,2,q\rangle, \langle a,3,p\rangle, \langle a,3,q\rangle, \langle b,1,p\rangle, \langle b,1,q\rangle, \langle b,2,p\rangle, \langle b,2,q\rangle, \langle b,3,p\rangle, \langle b,3,q\rangle\}$

注意：$|A \times B \times C|=|A| \times |B| \times |C|$

2.2 二元关系

引入： 设$A=\{a,b,c,d\}$是某乒乓球队的男队员集合,

$B=\{e,f,g\}$是女队员集合.

如果A和B元素之间有混双配对关系的是a和g, d和e.

我们可表达为

$$R=\{<a, g>, <d, e>\}$$

二元关系

定义2.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序偶

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如果$<x,y>\in R$, 可记作xRy;

如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x\cancel{R}y$

实例：$R=\{<1, 2>, <a, b>\}$, $S=\{<1,2>, a, b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序偶时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a\cancel{R}c$等.

n元关系

定义 如果一个集合非空, 且它的元素都是n元有序组,

则称该集合为一个n元关系。

例. 表 4.1 是关系数据库中的一个实体模型，是有关员工的一张简表.

表 4.1

员工号	姓名	年龄	性别	工资
301	张林	50	男	1600
302	王晓云	43	女	1250
303	李鹏宇	47	男	1500
304	赵辉	21	男	900
…	…	…	…	…

A到B的关系与A上的关系

定义2.4 设A, B为集合,

$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系,

$A\times A$ 的任何子集所定义的二元关系叫做A上的二元关系.

例3 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数: $|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2} 个.

所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A| = 3$, 则 A上有= 512 个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义2.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全(域)关系 $E_A = \{<x,y>| x\in A \land y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>| x\in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>| x,y\in A \land x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{<x,y>| x,y\in B \land x$整除$y\}$, B为非0整数子集

包含关系 $R_\subseteq = \{<x,y>| x,y\in A \land x\subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, A={1, 2}, 则

$$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$$

例如 A = {1, 2, 3}, 则

$$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

实例

例如 $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>,\ <\varnothing,\{a\}>,\ <\varnothing,\{b\}>,\ <\varnothing,\{a,b\}>, <\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>,\ <\{b\},\{b\}>,\ <\{b\},\{a,b\}>,\ <\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

请同学们定义A上的真包含关系。

类似的还可以定义： 大于等于关系, 小于关系, 大于关系等.

关系的表示

1. 集合表示
2. 关系矩阵
3. 关系图

关系的表示

2. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，

R是从A到B的关系，

R的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$，其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < x_i, y_j > \in R.$$

例. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{e,f,g\}$,

求$R=\{<a, g>, <d, e>\}$的关系矩阵.

思考：若R是A上的关系，则其关系矩阵是什么？

实例

例 $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

R的关系矩阵M_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系的表示

3. 关系图

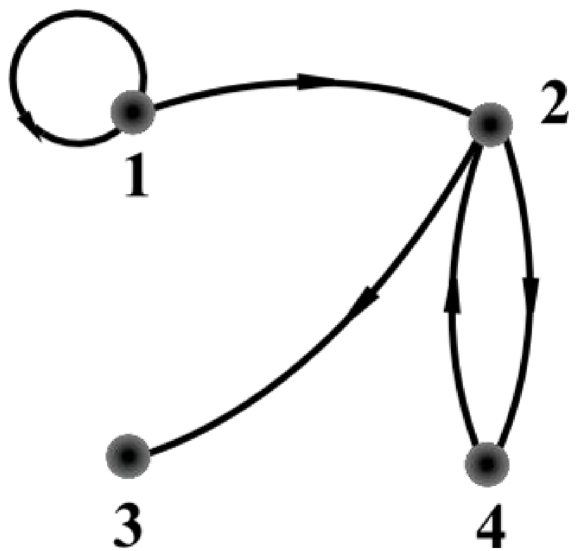
若$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，

R的关系图是$G_R = (A, R)$, 其中A为结点集，R为边集.

如果$<x_i, x_j>$属于关系R，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

实例

例 $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
R的关系图G_R如下：



实例

思考：若R是从A到B上的关系，则其关系图是怎样的？

例. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{e,f,g\}$,

求$R=\{\langle a, g\rangle, \langle d, e\rangle\}$的关系图.

不难看出：**R**的关系图G_R是唯一的。

如果将集合**A**与**B**的全体元素按照一个固定顺序列出，

那么从**A**到**B**的关系或者**A**上的关系**R**的矩阵表示也是唯一的。

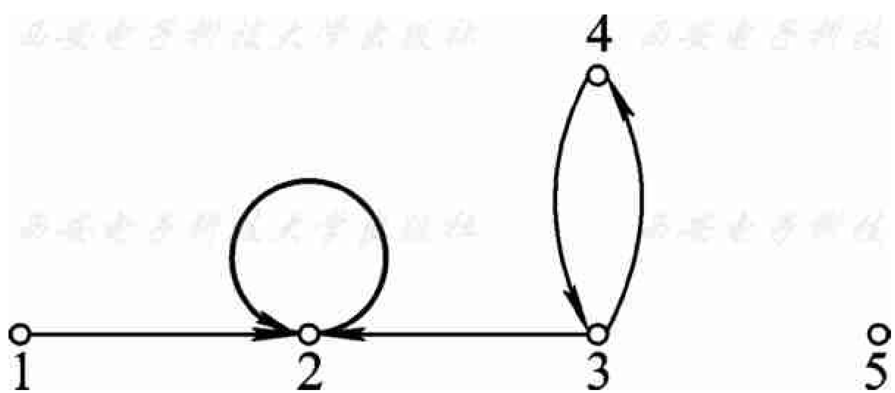
练习

4.1 设 $A=\{1,2\}$，计算 $P(A)\times A$.

4.2 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，确定 $A\times\{1\}\times B$.

3. 设$A=\{1,2,3,4\}$, A上的二元关系$R=\{<x,y> \mid x>y\}$,试求出关系矩阵.

4. 关系R的关系图如下,写出关系R及集合**A.**



作业

4.4 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6,8\}$，列出关系 $R\subseteq A\times B$ 中的有序对.

(1) xRy 当且仅当 x 整除 y.

(2) xRy 当且仅当 $\gcd(x,y)=1$，即 x 与 y 的最大公约数等于 1.

(3) xRy 当且仅当 x 或 y 为素数.

(4) xRy 当且仅当 $x\geqslant y$.

(5) xRy 当且仅当 $x+y<8$.

4.5 设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y+1 \text{ 或 } x=y-1\}$，$R$ 的补关系 $\bar{R}$ 也是 A 上的关系，其中 $\bar{R}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\notin R\}$. 求 $\bar{R}$.

4.14 设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，已知 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 写出 R 的集合表达式.

(2) 画出 R 的关系图.

(3) 说明 R 具有哪些性质.

THE END