《线性代数》总复习

矩阵

矩阵 ⇒

- 矩阵概念
- 矩阵运算
- 伴随矩阵
- 逆矩阵
- 特殊矩阵
- 初等变换
- 矩阵的秩

矩阵概念：$m\times n$个数构成的m行n列的数表

矩阵运算：

加法：$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, A、B是同型矩阵

$A + B = B + A$,

$(A + B) + C = A + (B + C)$,

$A + O = A$, $A + (-A) = O$,

数乘：$kA=k(a_{ij})$

$k(lA) = (kl)A$,

$(k + l)A = kA + lA$,

$k(A + B) = kA + kB$

矩阵乘法：$AB=C$，其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$.

C是$m\times n$矩阵.

$(AB)C = A(BC)$,

$A(B+C) = AB + AC$,

$(A+B)C = AC+BC$,

$(kA)B = k(AB)$.

矩阵

- 矩阵概念
- 矩阵运算
- 伴随矩阵
- 逆矩阵
- 特殊矩阵
- 初等变换
- 矩阵的秩

转置： $A=(a_{ij}), A^T=(a_{ji})$

性质： $(A^T)^T = A,$

$(kA)^T = kA^T,$

$(A+B)^T = A^T + B^T,$

$(AB)^T = B^TA^T.$

设$A = [a_{ij}]_{n\times n}$为方阵, 元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij}, 则称如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为方阵A的伴随矩阵.

矩阵

- 矩阵概念
- 矩阵运算
- 伴随矩阵
- 逆矩阵
- 特殊矩阵
- 初等变换
- 矩阵的秩

定义: 设A为方阵, 若存在方阵B, 使得

$$AB = BA = E.$$

则称A可逆, 并称B为A的逆矩阵.

注意：A可逆⇔detA≠0

运算性质

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}.$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

逆阵的求法:

定义法

用伴随矩阵 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

用初等行变换$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}^{-1})$

逆阵的证法:

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$, 反证法

矩阵

- 矩阵概念
- 矩阵运算
- 伴随矩阵
- 逆矩阵
- 特殊矩阵
  - 单位矩阵
  - 对角矩阵
  - 初等矩阵
  - 对称矩阵
- 初等变换
  - 几种常用的初等变换及对应的初等矩阵
  - 行阶梯矩阵、行最简型、标准型
- 矩阵的秩
  - 定义：非0子式的最高阶数
  - 求法：初等变换或定义法
  - 性质：经初等变换矩阵的秩不变

其它几个重要定理及结论：

定理. 对$m\times n$矩阵A进行一次初等行变换相当于在A的左边乘以相应的初等矩阵;

对A施行一次初等列变换相当于在A的右边乘以相应的初等矩阵.

矩阵等价： 若矩阵A经过有限次初等变换化为B, 则称A与B等价.记为$A \sim B$. （注意与相似、 合同的区别）

与等价有关的重要定理

A与B等价$\Rightarrow \mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$

定理. 方阵A可逆的充要条件是A可写成有限个初等矩阵的乘积.

推论1. 方阵A可逆的充要条件是A与单位矩阵行等价。

推论2. $m\times n$阶矩阵A与B等价的充要条件是存在m阶 可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得 $PAQ=B$。

行列式

- 概念
- 性质
- 展开式
- 计算
- 应用

应用数学归纳法
按第一行展开方式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

行列式

概念

性质

展开式

计算

应用

性质1 行列式与它的转置行列式相等。

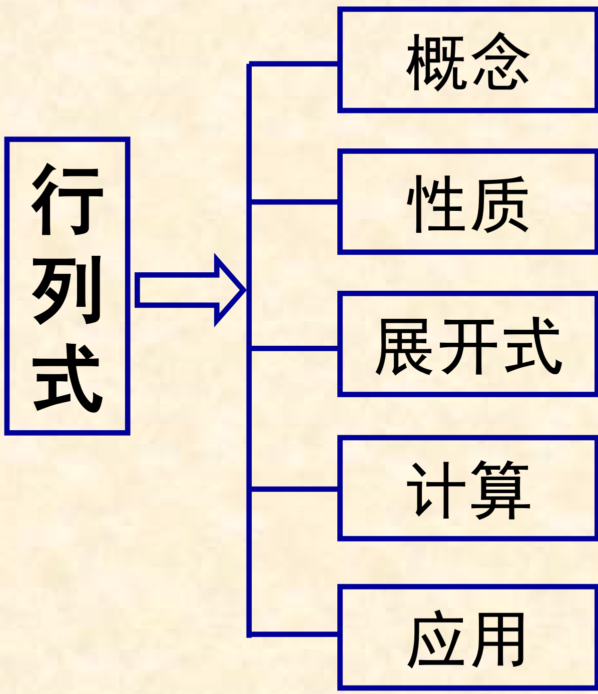
性质2 行列式互换两行(列)，行列式变号。

推论：行列式有两行(列)相同，则此行列式为零。

性质3 行列式的某一行(列)的所有元素乘以数k，等于用数k乘以该行列式。

推论：行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号外。

性质4 行列式中有两行(列)的元素对应成比例，则此行列式为零。



性质5 若行列式中某一行(列)的元素都是两数之和，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

则此行列式等于两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 行列式某一行(列)的k倍加到另一行(列)上，行列式值不变。

行列式

概念

性质

展开式

计算

应用

代数余子式

可按任意一行(列)展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} == \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

一般地, 在n阶行列式中, 把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去, 留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式, 记作M_{ij}, 令$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 并称之为a_{ij}的代数余子式.

行列式

- 概念
- 性质
- 展开式
- 计算
  - **化三角行列式法**
  - 递推法
  - 数学归纳法
  - **降阶展开法**
  - 拆项法
  - …
- 应用
  - 克拉默法则(求解线性方程组有唯一解的一种方法)
  - 齐次线性方程组有非零解的充分条件

其它几个重要定理及结论:

定理 n阶行列式的某一行(列)元素与另一行(列)的对应的代数余子式乘积之和为零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\dots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

例1 求矩阵 X，使 $AX=B+2X$，其中

$$A=\begin{pmatrix}3&2&3\\2&4&1\\3&4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 $(A-2E)X=B$，则 $X=(A-2E)^{-1}B$.

$$\because A-2E=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \left((A-2E)\ \ B\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\div(-1)}{\overset{r_2\div(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$$\therefore \qquad X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

例2： 求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\-1\\4\\2\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\-4\\-6\\2\end{matrix} & \begin{matrix}2\\1\\1\\2\end{matrix} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}-10 & -3\\ -5 & 3\end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 45$$

例3 **设A是3阶方阵，且**$|A| = \dfrac{1}{2}$ **求** $\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right|$.

解:

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$A^* = |A| A^{-1}$$

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right| = \left|3^{-1} A^{-1} - 2|A| A^{-1}\right|$$

$$= \left|-\frac{2}{3} A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \left|A^{-1}\right| = -\frac{16}{27}$$

n维向量

n维向量

运算

线性表示

线性相关性

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=0$

- k_i均为0，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关
- 只要有一个k_i不为0，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关

极大无关组

极大线性无关组：向量组A中，能找到r个向量线性无关，任意r+1个线性相关，则这r个向量构成的向量组是A的一个极大线性无关组。

求法：非零子式法、初等变换法

向量组的秩

极大无关组包含的向量的个数

•向量组与矩阵的关系

矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ ⟷ 列向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

矩阵A的秩$r(A)$ ⟷ 向量组的秩r

最高阶非零子式 ⟷ 极大线性无关组

注：行向量的问题与列向量相同

•向量内积

定义： $[\alpha, \beta] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \alpha^{\mathrm{T}}\beta.$

性质： (1) **对称性**: $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$;

(2) **线性性**: $[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta]= k_1[\alpha_1, \beta]+k_2[\alpha_2,\beta]$;

(3) $[\alpha, \alpha] \geq 0$; 且$[\alpha, \alpha] = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

(4) $|[\alpha, \beta]| \leq \sqrt{[\alpha, \alpha]}\sqrt{[\beta, \beta]}.$

正交： 若$[\alpha, \beta] = 0$, 则称α与β**正交**.

施密特(Schmidt)正交化方法

•正交矩阵 A为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A^{\mathrm{T}}A=E$

例4 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

求矩阵A的秩和列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用最大无关组线性表示。

解 对A施行初等行变换变为行阶梯形矩阵

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知$R(A)=3$,

故列向量组的极大无关组含3个向量.

而三个非零行的非零首元在1、2、4三列,

故a_1, a_2, a_4为列向量组的一个最大无关组。

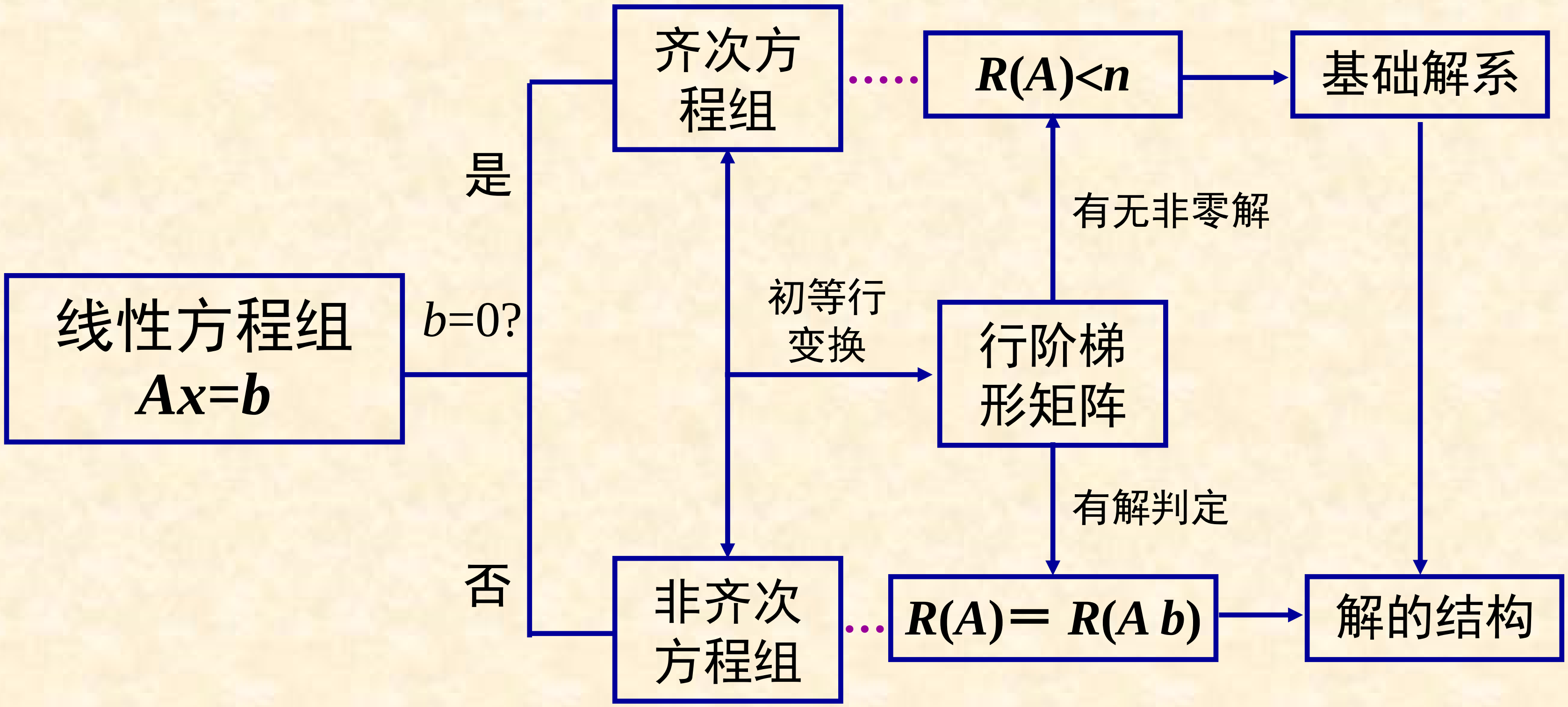
要把a_3,a_5用a_1,a_2,a_4线性表示，必须将A再变成行最简形矩阵

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} a_3 = -a_1 - a_2, \\ a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4 \end{cases}$$

线性方程组


线性方程组
$Ax=b$
$b=0$?
是
否
齐次方程组
非齐次方程组
初等行变换
行阶梯形矩阵
有无非零解
有解判定
$R(A)<n$
$R(A)=R(A\ b)$
基础解系
解的结构

•向量组的线性相关性与非齐次方程组解的关系

向量b能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性表示？

是 $\Leftrightarrow$ 有解

否 $\Leftrightarrow$ 无解

$Ax=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x=b$

$Ax=b$有矛盾方程?

无 $\Leftrightarrow$ 方程组有解 $\Leftrightarrow$ 是

有 $\Leftrightarrow$ 方程组无解 $\Leftrightarrow$ 否

$R(A)=R(A\ b)$?

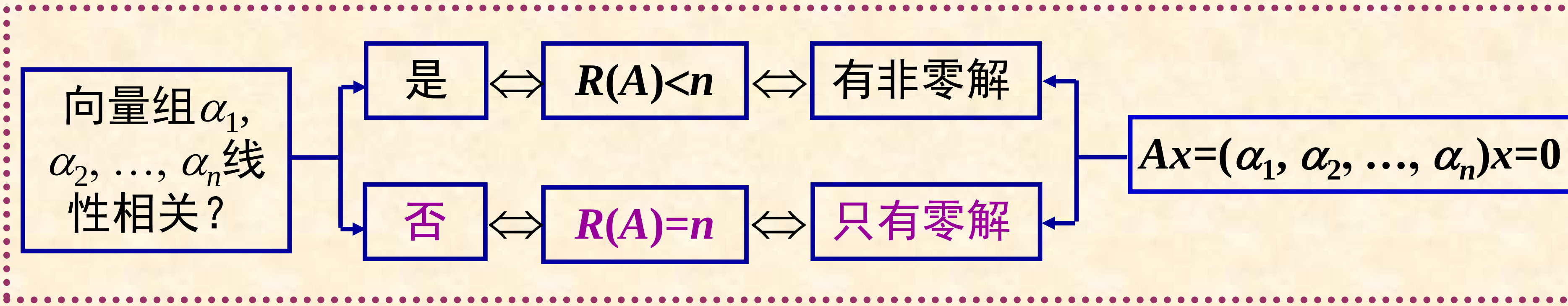
$R(A)=R(A\ b)<n$?

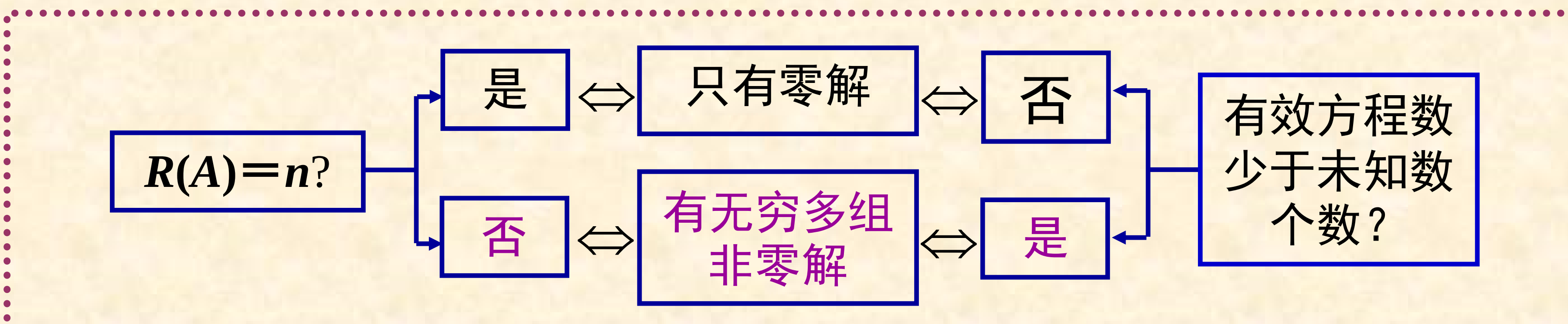
是 $\Leftrightarrow$ 有无穷多组解 $\Leftrightarrow$ 是

否 $\Leftrightarrow$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 否

有效方程数少于未知数个数？

•向量组的线性相关性与齐次方程组解的关系





注意： 齐次线性方程组不会出现矛盾方程。

例5. 求 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

解: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该方程组的基础解系可取为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(c_1, c_1 \in R)$.

例6. 求方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$ 的通解.

解: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见原方程组有解, 且 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

可见原方程组有解, 且 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \quad 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = \quad x_4 \end{cases}$

由此可得原方程组的通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

方阵的特征值和特征向量

特征值与特征向量 ⇒

- 定义：$A\xi=\lambda\xi$，$\lambda\neq 0$
- 求法
  - 特征值
    - 定义法
    - 特征方程 $|\lambda E-A| = 0$
  - 特征向量
    - 定义法
    - $(\lambda E-A)\xi = 0$基础解系法
- 性质
  - $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A)$.
  - $\lambda_1\times\ldots\times\lambda_n = |A|$.
  - A 可逆$\Leftrightarrow\lambda_1, \ldots, \lambda_n$全不为零.
  - $|\lambda E-A| = |\lambda E-A^{\mathrm{T}}|$.
- 相似矩阵
- 实对称阵

特征值与特征向量

- 概念
- 求法
- 性质
  - •矩阵相似，则其特征值相同。
  - •不同特征值的特征向量线性无关。
  - •k重特征值至多有k个线性无关的特征向量。
- 相似矩阵
  - 定义　$P^{-1}AP=B$
  - 矩阵可对角化的条件
    - $\Leftrightarrow$
      - A有n个线性无关的特征向量
      - $R(\lambda_i E-A)=n-r$，λ_i是r重特征值
    - $\Leftarrow$
      - A有n个不同的特征值
      - A是实对称阵
  - 应用　$A^n=P^{-1}\Lambda^n P$
- 实对称阵

特征值与特征向量

- 概念
- 求法
- 性质
- 相似矩阵
- 实对称阵的特性
  - 必可相似对角化
  - 不同特征值的特征向量互相正交
  - k重特征值必有k个线性无关的特征向量
  - 特征值全是实数
  - 与对角阵合同

•矩阵等价、相似、合同、正交相似的联系与区别

$\forall A,B\in M_n$,

A与B相似 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$

A与B合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C，使$C^{T}AC=B$

A与B正交相似 $\Leftrightarrow$ 存在正交阵Q，使$Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=B$

$\forall A,B\in M_{m\times n}$,

A与B等价 $\Leftrightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q，使$PAQ=B$

共同的性质：自反性、对称性、传递性

•等价、相似、合同、正交相似的关系

$$\begin{tikzcd}
& A\text{与}B\text{正交相似} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
A\text{与}B\text{合同} \arrow[dr] & & A\text{与}B\text{相似} \arrow[dl] \\
& \text{方阵}A\text{与}B\text{等价} &
\end{tikzcd}$$

•等价、相似、合同、正交相似的不变量

等价: 秩，即$R(A)=R(B)$

相似: 秩，即$R(A)=R(B)$
特征多项式，特征值 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

合同: 秩，即$R(A)=R(B)$
对称性，即若A对称，则B也对称
对称阵A、B对应的二次型的正(负)惯性指数
对称阵A、B对应的二次型的规范型

正交相似: 相似+合同

•求方阵特征值和特征向量的步骤

计算$|\lambda E-A|$ → 求$|\lambda E-A|=0$的根 → 求$(\lambda E-A)x=0$的基础解系

•实对称阵对角化的步骤

- 求A全部特征值（所有特征值的重根次数之和等于n）
- 对每个k_i重特征值λ_i求方程$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系
- 得出对应于特征值λ_i的k_i个线性无关的特征向量
- 将对应于特征值λ_i的k_i个线性无关的特征向量正交、单位化（总共可以得到n个两两正交的单位特征向量）
- 将n个两两正交的单位特征向量构成正交阵P，即可满足$P^{-1}AP=\Lambda$(注意顺序)。

例7 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(A-2E)x=0.$由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以$kp_1\,(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(A-E)x=0$.由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

所以$kp_2\,(k\neq 0)$是对于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量.

例8 设$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ A能否对角化？

若能对角化，求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵。

解

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

所以A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

将$\lambda_1=\lambda_2=1$代入$(A-\lambda E)x=0$得方程组

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2=0 \\ -3x_1-6x_2=0 \\ -3x_1-6x_2=0 \end{cases}$$

解之得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_3=-2$代入$(A-\lambda E)x=0$,得方程组的基础解系

$$\xi_3=(-1,1,1)^T.$$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关. 所以A可对角化.

令 $$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

则有 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

二次型

二次型

- 基本概念
- 标准型化
- 正定二次型

定义： 含有n个变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的二次齐次函数

矩阵表示： $f = x^{\mathrm{T}}Ax$——A对称，称A为f的矩阵，称f为A的二次型，且f与A一一对应。

标准形： 只含平方项

规范型： k_i在-1,0,1,中取值

二次型的秩： $R(f) = R(A)$

惯性定理

二次型

- 基本概念
- 标准型化
  - 配方法
  - 正交变化法
    - 写出二次型矩阵A
    - 将A相似对角化，同时得正交变换矩阵Q
    - 令$x=Qy$，即得标准型
- 正定二次型
  - 定义 $\forall x \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0$
  - 充要条件 $\Leftrightarrow$
    - 特征值全大于0
    - 正惯性指数等于n
    - 顺序主子式全大于0
    - A与E合同
    - 有可逆阵Q，使$A = Q^{T}Q$

例9 将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

通过正交变换 $x=Py$,化成标准形.

解 1) 写出对应的二次型矩阵，并求其特征值

$$A=\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

2) 求特征向量

将$\lambda_1 = 9$代入$(A - \lambda E)x = 0$,得基础解系

$$\xi_1 = (1/2,1,1)^T.$$

将$\lambda_2 = \lambda_3 = 18$代入$(A - \lambda E)x = 0$,得基础解系

$$\xi_2 = (-2,1,0)^T, \xi_3 = (-2,0,1)^T.$$

3) 将特征向量正交化

取 $\alpha_1 = \xi_1, \quad \alpha_2 = \xi_2, \quad \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{[\alpha_2, \xi_3]}{[\alpha_2, \alpha_2]}\alpha_2,$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2,1,1)^T, \quad \alpha_2 = (-2,1,0)^T,$$

$$\alpha_3 = (-2/5,-4/5,1)^T.$$

4) 将正交向量组单位化，得正交矩阵P

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以 $$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$