格的定义与性质

格的定义与性质

定义7.1 设L是非空集合, +和∘ 是L上的两个二元运算, 如果它们满足交换律, 结合律和吸收律, 即$\forall a,b,c\in L$有

(1)交换律: $a+b=b+a$, $a\circ b=b\circ a$

(2)结合律: $(a+b)+c= a+(b+c)$, $(a\circ b)\circ c= a\circ (b\circ c)$

(3)吸收律: $a+(a\circ b) = a$, $a\circ (a+b) = a$

则称代数系统$<L,+,\circ>$是格, 也称代数格.

例如,

(1) 非空集合A的幂集$P(A)$构成的代数系统$<P(A),\cap,\cup>$是格.

(2) 正整数集Z^+与其上定义的两个运算:

gcd(a, b) 两个正整数的最大公因数

lcm(a, b) 两个正整数的最小公倍数

构成代数系统$<Z^+, \text{gcd}, \text{lcm}>$是格.

格的性质

格的性质1 格满足幂等律.

定理7.1 设 $<L,+,\circ>$ 是格, 则 $\forall a\in L$ 有 $a+a=a$, $a\circ a=a$.

证 由吸收律易证 $a+a=a+(a\circ(a+a))=a$, $a\circ a=a\circ(a+(a\circ a))=a$.

格的性质2 格的子代数必为格.

定理7.2 设 $<L,+,\circ>$ 是格, $<H,+,\circ>$ 是它的子代数(其中 $\varnothing\subset H\subset L$), 则 $<H,+,\circ>$ 必为格, 称为 $<L,+,\circ>$ 的子格.

证 设 $a,b,c\in H$, 则 $a,b,c\in L$, L 是格, 则 a,b,c 满足交换律, 结合律和吸收律, 所以 H 为格.

格的性质

格的性质3 格满足对偶律.

定义7.2 在格$<L,+,\circ>$的任一公式中, 出现$+,\circ$处分别用$\circ,+$替换后所得到的公式称为该公式的**对偶式**.

定理7.3 格中公式A为定理, 则A的对偶式A'仍为定理.

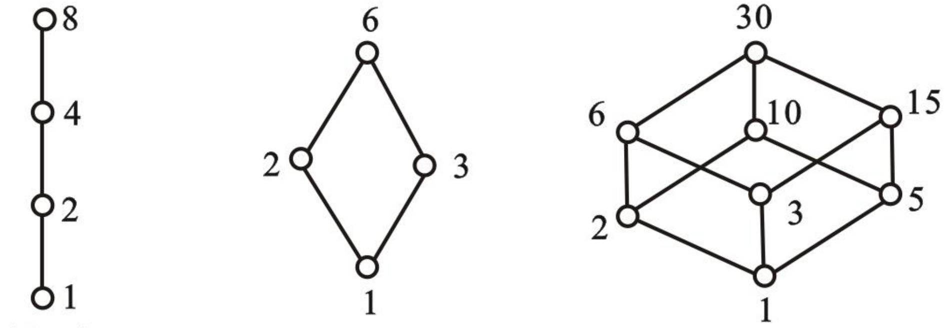
证　由格的对称性易证.

偏序格

定义7.3 设$<S, \leqslant>$是偏序集, 如果S的任意子集均有上确界(最小上界)和下确界(最大下界)，则称S关于偏序$\leqslant$作成一个**偏序格**.

并非每个偏序集都是偏序格.

例1 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格. $\forall x,y\in S_n$, 定义$x\vee y$是lcm(x,y)，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是gcd(x,y)，即x与y的最大公约数.



(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

求上确界和下确界可看成x与y的二元运算$\vee$和$\wedge$

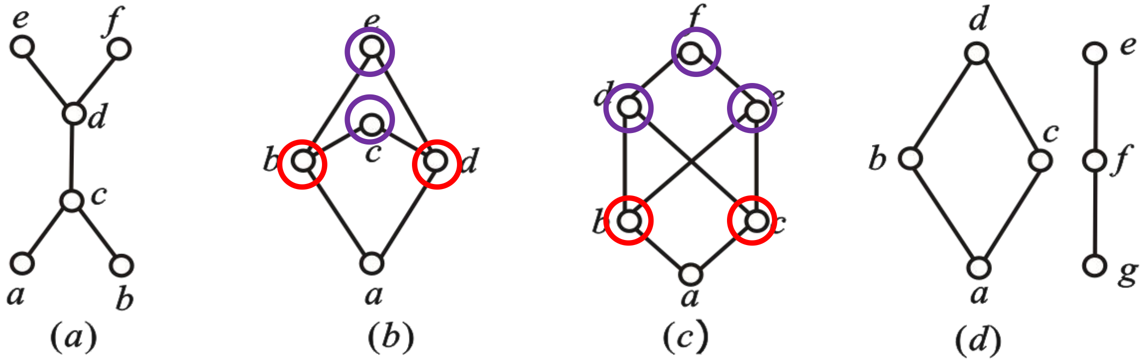
实例

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<Z, \leq>$，其中Z是整数集，$\leq$为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



解：(1) 幂集格. $\forall x,y \in P(B)$，$x \vee y$就是$x \cup y$，$x \wedge y$就是$x \cap y$.

(2) 是格. $\forall x,y \in Z$，$x \vee y = \max(x,y)$，$x \wedge y = \min(x,y)$.

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少下确界或上确界.

偏序格与代数格等价

从代数的观点看:

在偏序集中可以将求上确界和下确界定义为两个二元运算

$x \wedge y = \mathrm{glb}(x, y)$　　　　$\{x, y\}$的下确界运算

$x \vee y = \mathrm{lub}(x, y)$　　　　$\{x, y\}$的上确界运算

构成代数系统$<S, \wedge, \vee>$, 运算均满足交换律, 结合律和吸收律.

从偏序格的观点看:

设有代数格$<L, +, \circ>$, 在其上定义关系$\preccurlyeq$如下:

$$x \preccurlyeq y: x+y=x, x\circ y=y$$

(1) 该关系有$x \preccurlyeq x$, 即$\preccurlyeq$是自反的;

(2) 设$\forall x \forall y$, 若$x \preccurlyeq y$, 且$y \preccurlyeq x$成立, 则有$x=y$. 因此, $\preccurlyeq$是反对称的;

(3) 如果$x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, 则有$x \preccurlyeq z$, 故$\preccurlyeq$是传递的.

因此, $<L, \preccurlyeq>$是偏序集. 且$\forall x, y \in L$, 都存在下确界$x+y$与上确界$x\circ y$, 所以$<L, +, \circ>$是偏序格.

偏序格与代数格等价定理

定理7.4 代数格必是偏序格, 反之亦然.

Note:

(1) 代数格与偏序格等价, 不再区分, 统称为格.

(2) 并非每个偏序集都是格.

子格及其判别法

定义7.4 设$<L,\wedge,\vee>$是格, S是L的非空子集, 若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称S是L的**子格**.

例5 设格L如图所示. 令

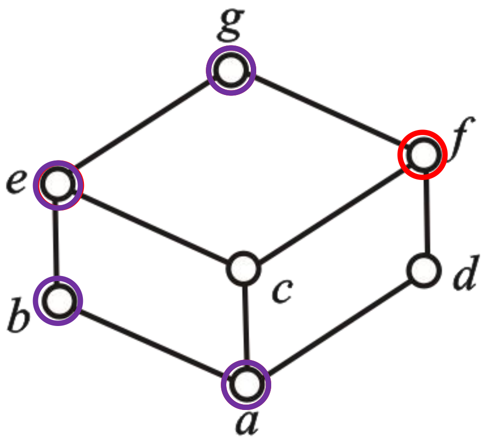
$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$

S_1不是L的子格, 因为$e, f\in S_1$ 但

$$e\wedge f = c\notin S_1.$$

S_2是L的子格.



THE END