图的矩阵表示法

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

图的矩阵表示

图的图形表示法简单明了, 但不易于表达复杂图, 不易于计算

有向图的邻接矩阵

定义8.15 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为$D$的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为$A$.

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---- D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---- D中长度为1的回路数

(5) 若A的元素全为0, 则是零图

(6) 若A的元素除对角线元素全为0外, 其他全为1, 则是完全图

(7) 对角线不为0的元素, 代表此处的顶点有环

邻接矩阵的应用

定理8.12 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq 1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数.

B_n中的元素表示v_i到v_j长度为1至n的通路数目之和, 由于n个顶点的有向图中, 基本通路和基本回路长度不超过n, 故若B_n的元素为0, 表示v_i到v_j不可达, 否则, 是可达的.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq 1$），则B_l中元素$b_{ij}^{(l)}$表示v_i到v_j长度为1至l的通路数目之和, 且有:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数目之和.

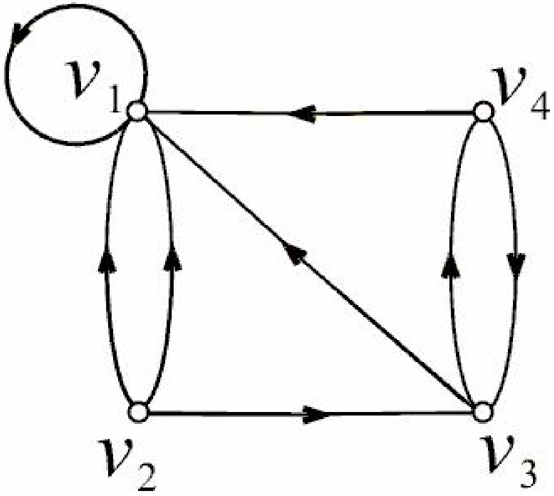
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数目之和.

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) *D*中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

***D*中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.**

***D*中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.**

(2) *D*中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵

定义8.16 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & b_{ij}^{(n)}\neq 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

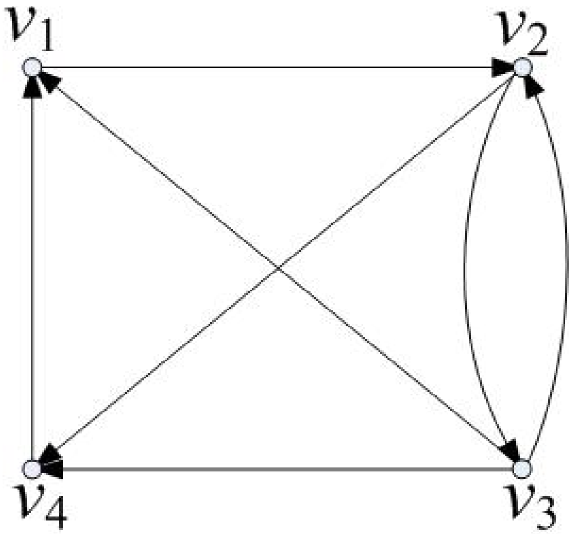
称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$除对角线外，为全1矩阵.

Note： 将无向图中的边用两条方向相反的有向边替代, 转换成有向图, 这样有向图的邻接矩阵、可达矩阵等均可适用于无向图。

实例

例6 有向图D如图所示，求其可达矩阵.



解 图D的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix}3&4&2&3\\5&5&4&6\\7&7&4&7\\3&2&1&2\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

所以:任意两个顶点间均可达;

每个顶点均有回路通过.

矩阵与图的连通性

(1) 一无向图为连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;

(2) 一有向图为强连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;

(3) 一有向图为单向连通图的充要条件是矩阵$P'=P$ (+) P^T除对角线元素外所有元素均为1;

(4) 一有向图为弱连通图的充要条件是矩阵$A'=A$ (+) A^T的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1, 其中A为邻接矩阵.

THE END