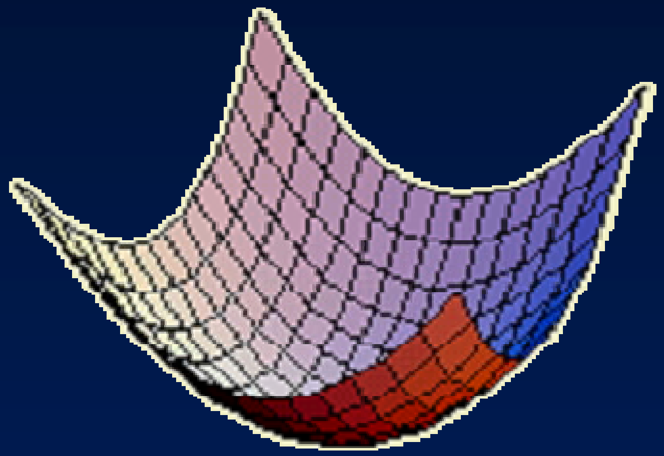
第五节

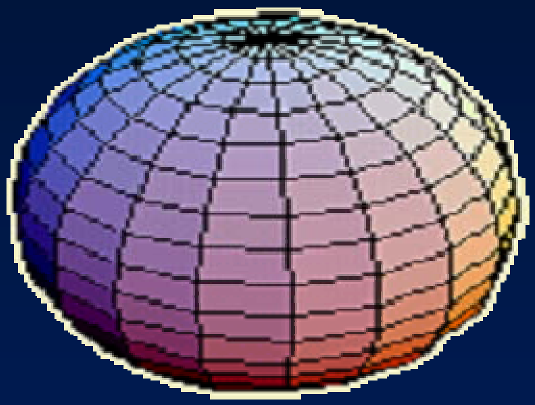
第二类曲面积分

- 一、第二类曲面积分的概念及性质
- 二、两类曲面积分的联系
- 三、第二类曲面积分的计算法

一、第二类曲面积分的概念及性质

观察以下曲面的侧（假设曲面是光滑的）

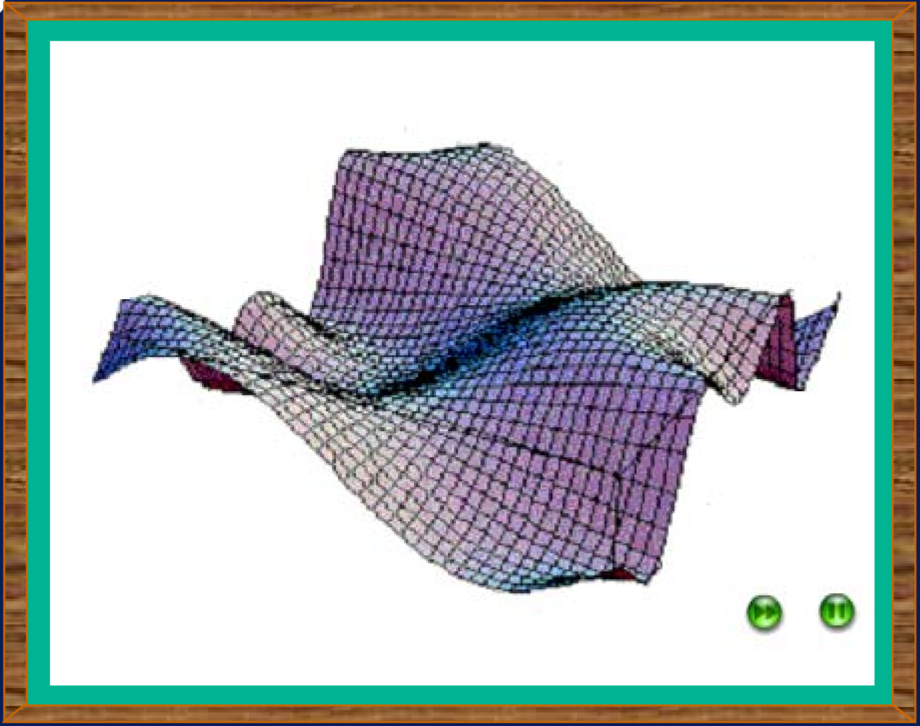




曲面分上侧和下侧　　　　曲面分内侧和外侧

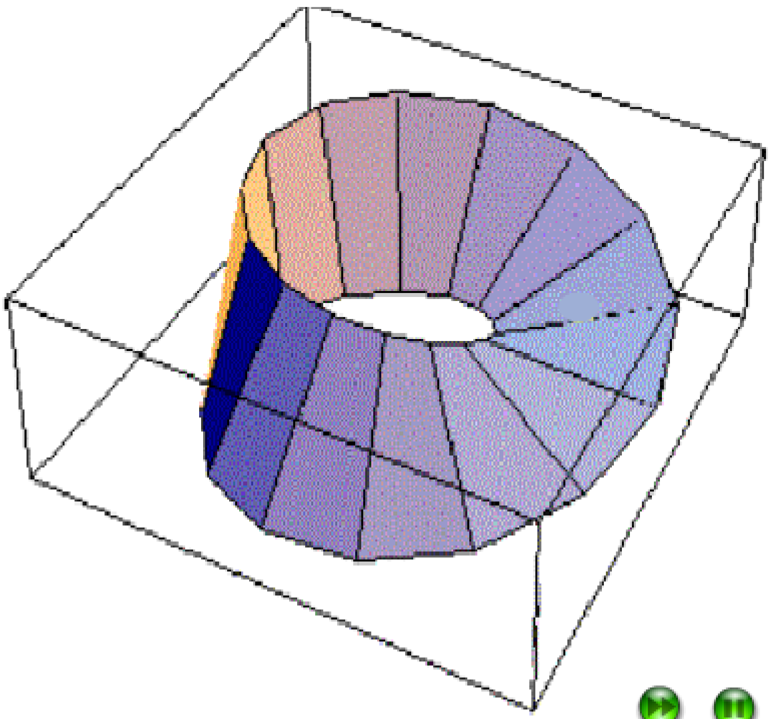
1. 曲面的分类

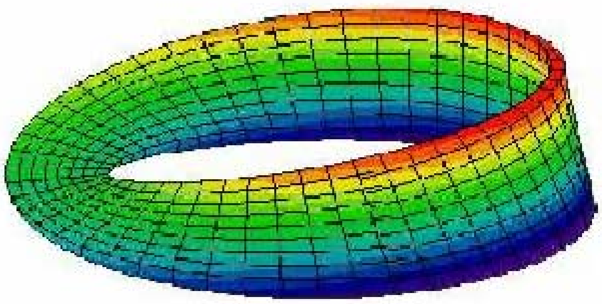
双侧曲面： $\forall$点$P\in\Sigma$，取定 P处的法向量的一个指向 $\vec{n}^{\circ}$,则当点P在Σ上连续移动时， $\vec{n}^{\circ}$也随之连续改变方向. 若当点P不越过 Σ的边界回到出发的位置时，$\vec{n}^{\circ}$的指向不变，则称Σ是双侧曲面. 否则，称Σ为单侧曲面.



典型双侧曲面

典型单侧曲面：莫比乌斯带





2. 曲面的侧与有向曲面

对于双侧曲面，其侧可用曲面法向量的指向来确定.

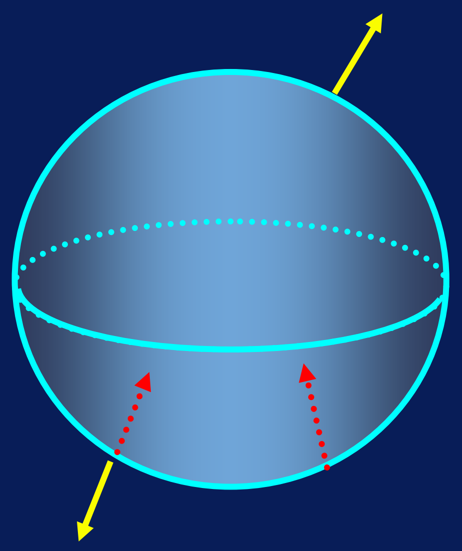
决定了侧的曲面称为有向曲面.

(1) 闭曲面的侧

设 Σ 为闭曲面

内侧: 法向量 $\vec{n}$ 指向 Σ 的里面;

外侧: 法向量 $\vec{n}$ 指向 Σ 的外面.



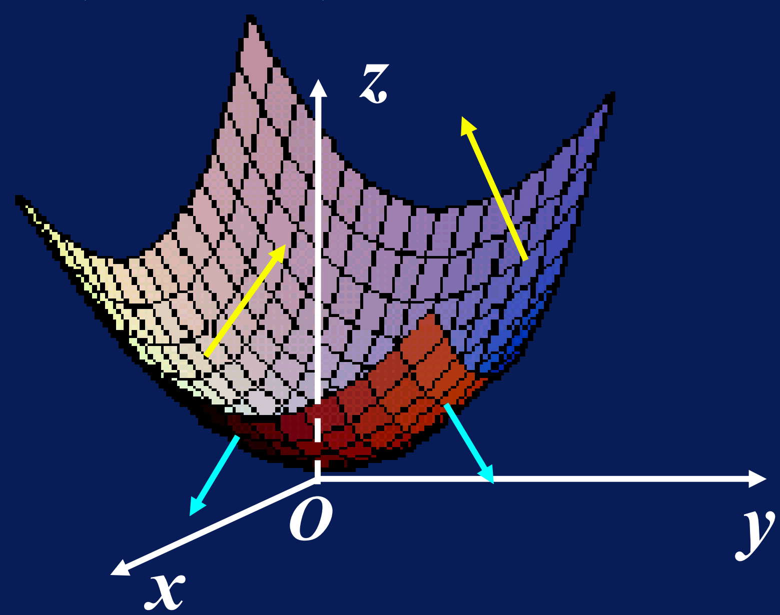
(2) 非闭曲面的侧

1) 上、下侧

若Σ： $z = z(x, y)$

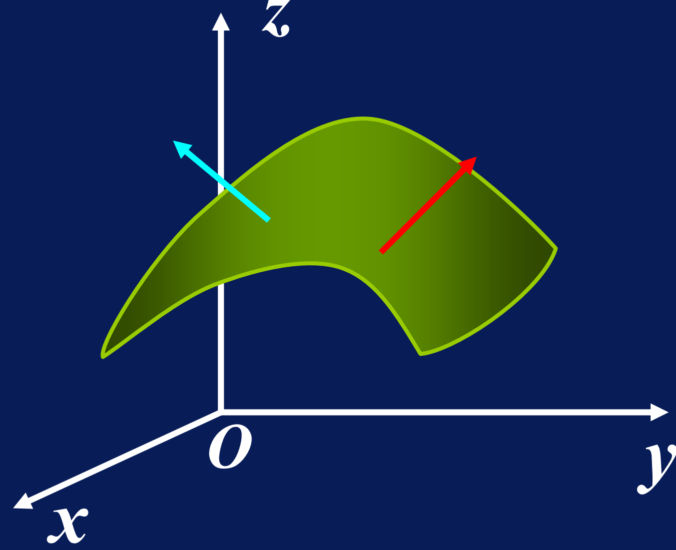
上侧 $:\gamma = (\widehat{\vec{n}, \text{轴 } z})$ 为锐角, $\cos\gamma > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

下侧 $:\gamma = (\widehat{\vec{n}, \text{轴 } z})$ 为钝角, $\cos\gamma < 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$.



2) 左、右侧

若Σ: $y = y(x, z)$



右侧 : $\beta = (\widehat{\vec{n}, \text{轴 } y})$

为锐角, $\cos\beta > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

左侧 : $\beta = (\widehat{\vec{n}, \text{轴 } y})$

为钝角 , $\cos\beta < 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$.

3) 前、后侧 若Σ: $x = x(y, z)$

前侧 : $\alpha = (\widehat{\vec{n}, \text{轴 } x})$ 为锐角, $\cos\alpha > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

(后) (钝) (<)

3. 有向曲面的投影

在有向曲面 Σ 上取一小块曲面 ΔS, ΔS在 xOy 面上的的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma > 0\text{时} \\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma < 0\text{时} \\ 0 & \text{当}\cos\gamma = 0\text{时} \end{cases}$$

其中$(\Delta\sigma)_{xy}$表示投影区域的面积，γ为法向量与 z轴正向的夹角. 注意: 投影有正负之分.

类似可以给出有向曲面在其它坐标面上的投影.

4. 引例　流向曲面一侧的流量

设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量Φ.

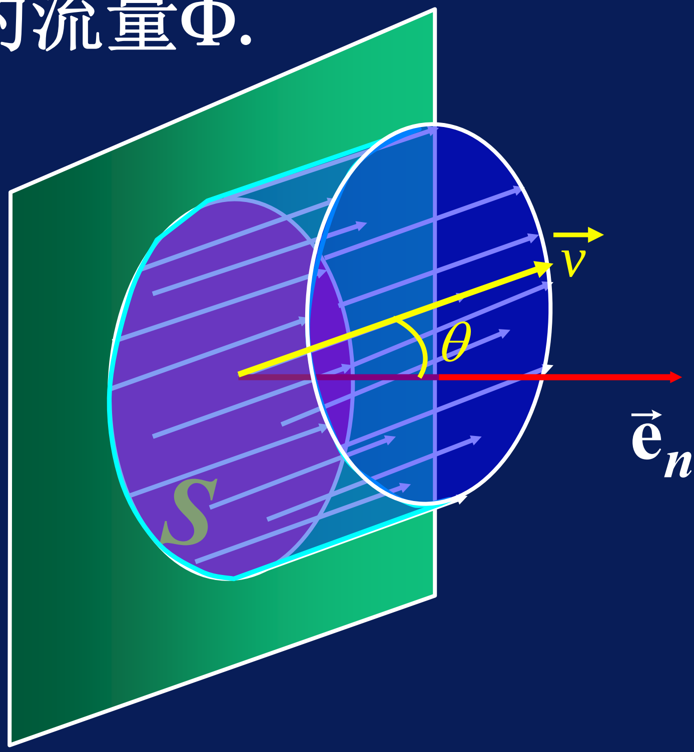
(假定密度为1)

(1) 若 Σ 是面积为S 的平面域,

单位法向量：$\vec{e}_n$

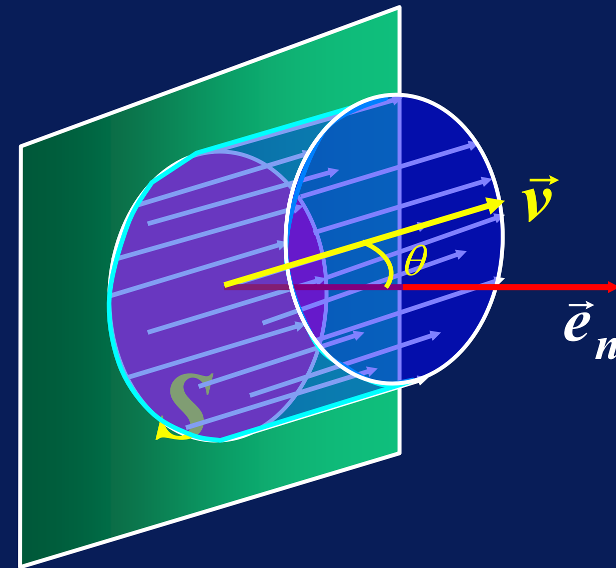
流速为常向量 $\vec{v}$

则单位时间内流量为



斜柱体的体积:

$$\Phi = S\cdot|\vec{v}|\cos\theta = S\,\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n$$



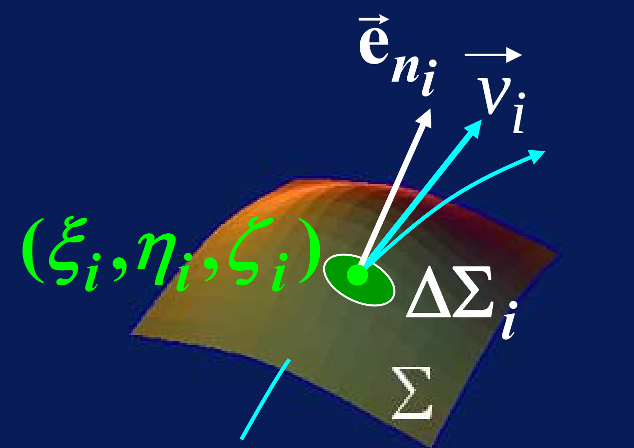
(2) 若Σ为有向曲面Σ,

流速: $\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

"分割, 近似, 求和, 取极限"

$$\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{\mathrm{e}}_{n_i}\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$



5. 定义 10.5

设 Σ 是分片光滑的有向曲面，向量值函数

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

在 Σ 上有界，$\vec{e}_n(x,y,z)$是有向曲面Σ上点(x,y,z)处的单位法向量，如果积分

$$\iint_{\Sigma}[\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

存在，则称此积分为向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)$在有向曲面上沿指定侧的第二类曲面积分，记为

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

注　1° 第二类曲面积分的其他表达形式

(1) 若记 $\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$，则

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S$$

$$+\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

通常把上式三项分别记作

$R(x,y,z)$在Σ上对坐标 x, y 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

因此第二类曲面积分又记为

$$(2)\quad \iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2° 投影转换关系

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \underline{\mathrm{d}\vec{S}} = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \underline{\vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S}$$

与$\vec{\mathrm{e}}_n$同方向

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{S} = \vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$$ —— 有向曲面元

$$= (\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\ \cos\beta\,\mathrm{d}S,\ \cos\gamma\,\mathrm{d}S\ )$$

于是 $$\begin{cases} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\alpha \\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\beta \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\gamma \end{cases}$$

有向曲面元$\mathrm{d}\vec{S}$分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影

3° 第二类曲面积分中dxdy, dydz, dzdx 的意义

在二重积分应用，求曲 面面积时曾证明：

$$\mathrm{d}S\cdot\cos\gamma=\mathrm{d}\sigma\quad(\cos\gamma>0)$$

去掉限制：$\cos\gamma>0$

可得到：$\mathrm{d}S\cdot\cos\gamma=(\mathrm{d}S)_{xy}$

$$\therefore\quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S=(\mathrm{d}S)_{xy}$$

同理可得

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S=(\mathrm{d}S)_{yz}$$

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S=(\mathrm{d}S)_{zx}$$

4° 若 Σ 为母线平行于 z 轴的柱面时， 则

$\cos\gamma \equiv 0$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}S\cos\gamma = 0$, 从而必有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

如： $\Sigma: x^2+y^2=a^2 \quad (h \le z \le a)$

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

但注意： $\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S \ne 0$

5^{o} 存在性:若 $\vec{F}(x,y,z)$在分片光滑的有向曲面 Σ上

连续，则 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 存在.

6^{o} 记号$\oiint\limits_{\Sigma}$ 表示封闭曲面上的积分；

$7°$ 以流速 $\vec{v}=(P,Q,R)$， 通过Σ流向 $\vec{n}$ 指定侧

流体的流量为:

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. 性质

(1) 线性性质： $\forall \alpha, \beta \in R^1$

$$\iint_\Sigma [\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2] \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \alpha \iint_\Sigma \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \beta \iint_\Sigma \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 可加性： Σ由Σ_1和Σ_2拼接而成，并且 Σ, Σ_1和Σ_2的侧一致, 则

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(3) 有向性： 用 Σ^- 表示 与 Σ 取相反侧的 有向曲面,

则
$$\iint_{\Sigma^-} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

研究第二类曲面积分, 必须注意曲面所取的侧.

二、两类曲面积分之间的联系

由第二类曲面积分的定义可知，

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

即 $$\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma}[\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

其中 $\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量 .

例1 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$
$$+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 f为连续函数， Σ是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧 .

解 Σ的法向量： $\vec{n}=(1,-1,1)$ $+$ 上侧

单位法向量： $\vec{e}_n=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore\ \cos\alpha=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

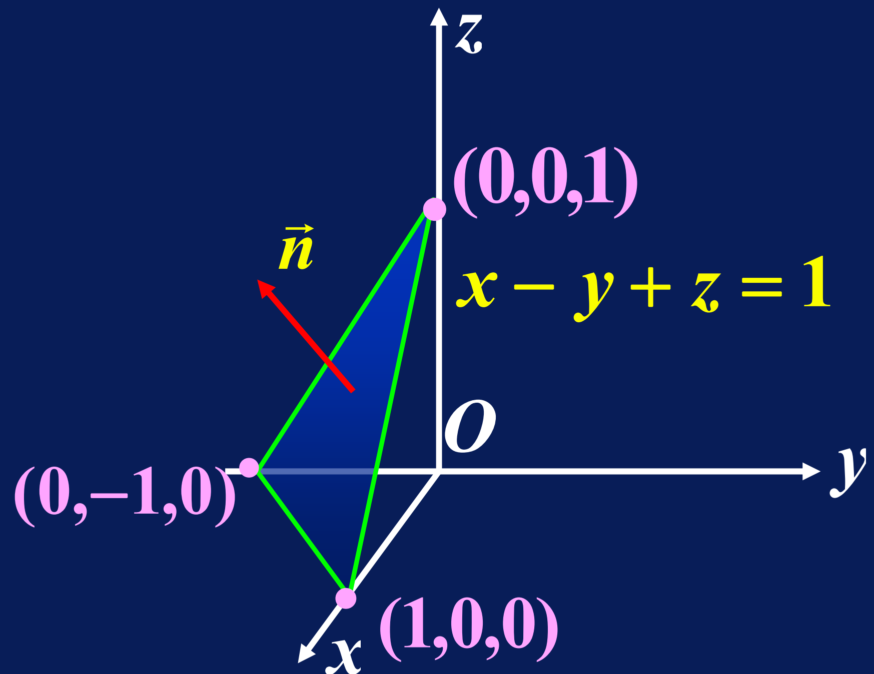
$$I=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})+(f+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}]\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}1\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{2}$$



三、第二类曲面积分的计算法

基本思路: 求曲面积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算二重积分

情形1 需求: $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$

若 Σ: $z = z(x,y)$, 上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, $z = z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续.

曲面 $z = z(x,y)$ 的单位法向量为

$$\vec{\mathrm{e}}_n = \pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$$

$$\vec{e}_n = \pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$$

$\cos\gamma = 1\Big/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ 取曲面的上侧

根据第一类曲面积分的计算方法，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}}\cdot \cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

目录 上页 下页 返回 结束

若有向曲面 Σ 取下侧时，类似可得

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

上侧为正，下侧为负.

情形2 $\Sigma: \quad x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$, 前侧 (后)

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \underline{\pm} \iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

情形3 $\Sigma: \quad y = y(z,x),\ (z,x) \in D_{zx}$, 右侧 (左)

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \underline{\pm} \iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

注 1° 对坐标的曲面积分, 必须注意曲面所取的侧.

2° 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 与对坐标的曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的区别及联系 .

区别：$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$：与方向无关， D是xoy面上的有界闭区域，面积元素：$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\sigma > 0$

$\iint_{\Sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$：与Σ的方向有关，Σ是空间有向曲面，投影：

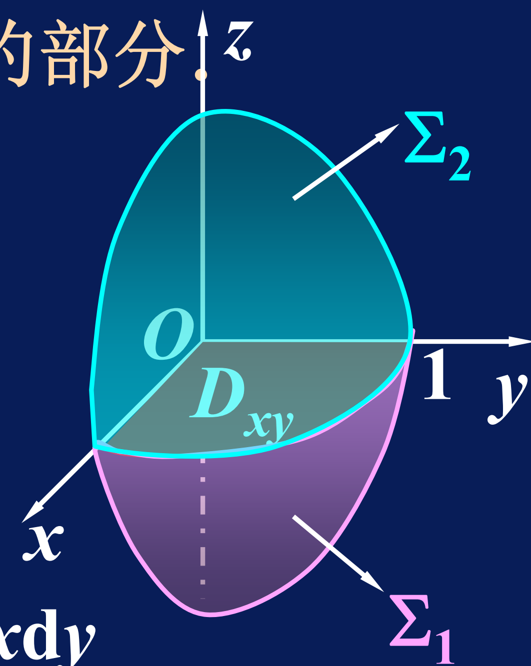
$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\mathrm{d}\sigma, & 当\cos\gamma>0时\\ -\mathrm{d}\sigma, & 当\cos\gamma<0时.\\ 0 & 当\cos\gamma=0时\end{cases}$$

联系： 当Σ为上侧时，由计算法知
（下）

$$\iint_{\Sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\pm}\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D：Σ在xoy面上的投影区域.

例2 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.



解 把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两部分

$$\Sigma_1: \quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2};$$

$$\Sigma_2: \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{2}{15}.$$

思考: 下述解法是否正确:

根据对称性 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0$

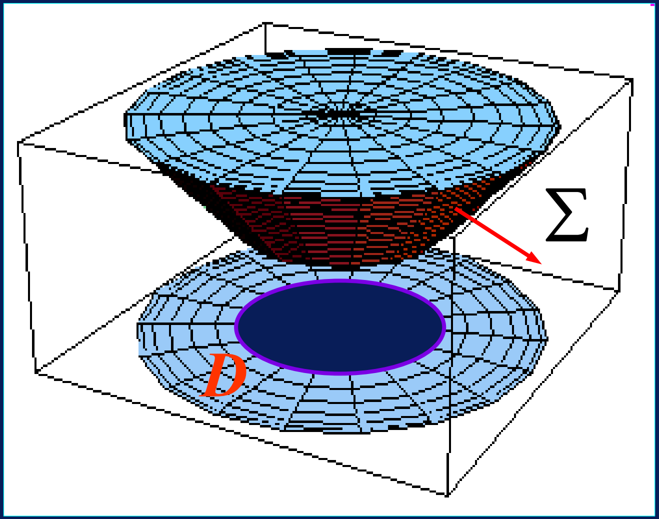
对第二类曲面积分如何利用积分区域及被积函数的对称性?

注 设Σ是光滑的有向曲面， $R(x,y,z)$ 在Σ上连续. 若Σ及其侧关于 xOy 面对称，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & R(x,y,-z)=R(x,y,z) \\ 2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & R(x,y,-z)=-R(x,y,z) \end{cases}$$

Σ_1 : Σ在 $z \geq 0$ 部分 .

例3 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.



解(方法1) Σ分为前后两片曲面, 在yOz 坐标面上的投影均为

$$D_{yz}: |z| \geq y, 1 \leq z \leq 2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

被积函数对变量x是偶函数

同理 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$

$$I = 0 - 0 + \iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (D_{xy}:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4)$$

$$= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{15}{2}\pi.$$

(方法2) 投影转换法

$$\begin{cases} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -f_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S \end{cases}$$

Σ 的法向量：$\vec{n} = \pm(f_x, f_y, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{\pm f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},\quad \cos\beta = \frac{\pm f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mp 1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

$$\Sigma:\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$$

$$I=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma} P\cdot(-f_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\cdot(-f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[P\cdot(-f_x)+Q\cdot(-f_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(-f_x,-f_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 向量点积法

$$=\iint_{\Sigma}(y,-x,z^2)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint_{\Sigma}(y,-x,z^2)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$,下侧

$$=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$D_{xy}:\quad 1\le x^2+y^2\le 4$

$$=-\frac{15}{2}\pi.$$

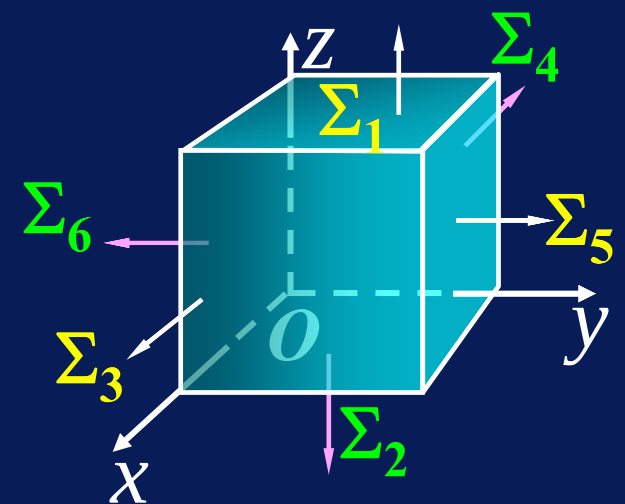
例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中Σ是正方体

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\}$$

的表面外侧.

解 (方法1) Σ的六个面为:



$\Sigma_1: z=a$, 上侧; $\Sigma_2: z=0$, 下侧;

$\Sigma_3: x=a$, 前侧; $\Sigma_4: x=0$, 后侧;

$\Sigma_5: y=a$, 右侧; $\Sigma_6: y=0$, 左侧.

$$I=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\cdots+\iint_{\Sigma_6}\right)[(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma_1: z=a$，上侧

$$=\iint_{D_{xy}}(a+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$D_{xy}:\ 0\le x\le a, 0\le y\le a$

$$=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (a+x)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

同理可得，

$$\iint_{\Sigma_3}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

$$\iint_{\Sigma_5}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\Sigma_2: z=0$，下侧

$$=-\iint_{D_{xy}}(0+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(0+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$D_{xy}:\ 0\le x\le a,\, 0\le y\le a$

同理可得,

$$\iint_{\Sigma_4}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$$\iint_{\Sigma_6}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$$\therefore\quad I=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\cdots+\iint_{\Sigma_6}=3\times\frac{3}{2}a^3-3\times\frac{1}{2}a^3=3a^3.$$

例5 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\quad \left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

求 $\vec{E}$ 通过球面 $\Sigma: r=R$ 外侧的电通量 Φ.

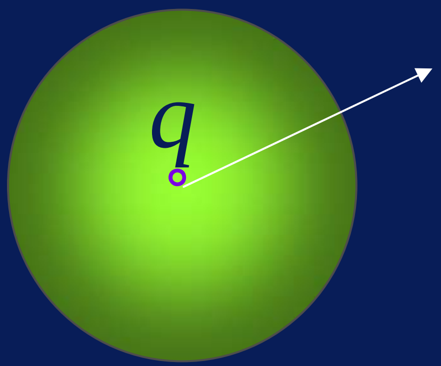
解

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}S=\frac{q}{R^2}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\pi q$$



内容小结

1. 有向曲面

2. 第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

3. 两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

4. 第二类曲面积分的计算方法

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

研究第二类曲面积分，必须注意曲面所取的侧.

思考题

向量点积法

设Σ：$z=f(x,y)$，法向量为 $\left\{-f'_x,-f'_y,1\right\}$，

$$I=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}^0\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{-f'_x,-f'_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[xOy\text{面上投影}]{\text{将}\Sigma\text{在}}\iint_{D_{xy}}\{P,Q,R\}\cdot\{-f'_x,-f'_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

备用题

例3-1 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$是球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$的下半部分的下侧。

解 Σ: $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$D_{xy}:=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le R^2\right\}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} [-x^2 y^2 \sqrt{R^2-x^2-y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

可用极坐标计算

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

令 $\rho=$ Rsint

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^4\sin^4 tR\cos tR\sin tR\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^7\sin^5 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7$$

例3-2 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$, Σ是椭球面：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧.

解 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$$

Σ_1和Σ_2在yOz的投影均为$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$，而方向相反

而两个椭球面的方程为 $x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$ 异号

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$$

$$\boxed{x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{2}{a}\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}},$$

$$=4\cdot\frac{2}{a}\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{8}{a}\int_0^b \left(c\cdot \arcsin \frac{z}{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \Bigg|_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \right) \mathrm{d}y = \frac{4\pi bc}{a}.$$

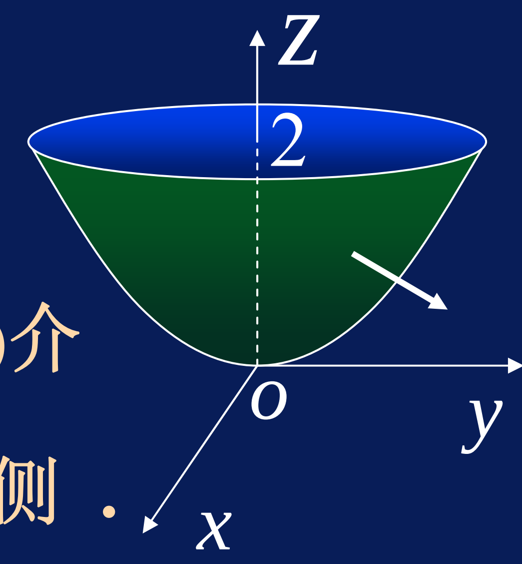
故 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} = \frac{4\pi abc}{a^2}.$

同理 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} = \frac{4\pi abc}{b^2}, \quad \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{4\pi abc}{c^2}.$

于是 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$

例3-3 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



其中Σ是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面 $z=0$及$z=2$之间的部分的下侧 .

解 将原式分为二式 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

讨论第一式 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\mathrm{d}S$

将 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代入上式

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将yz型积分转化为xy型积分

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-x$$

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知 $\displaystyle\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + x \right] \cdot (-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知 $$\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} x (x^2+y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

原式 $$= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (\rho^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\rho^2)\rho \,\mathrm{d}\rho = 8\pi$$

例3-4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是抛物面

$z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧 .

解(方法1)

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

法线向量 $\vec{n}=(2x,2y,1)$, 所以

$$\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

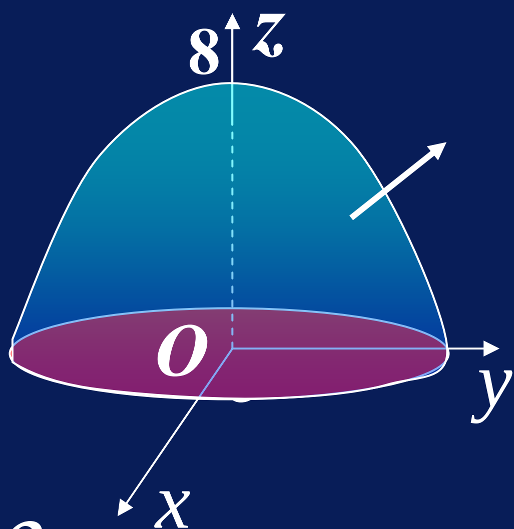
$$\cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$dzdx = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy = 2ydxdy$$

$$\therefore\quad I = \iint_{\Sigma} ydzdx + 2dxdy = 2\iint_{\Sigma}\left(y^2+1\right)dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}}\left(y^2+1\right)dxdy$$

$$D_{xy}: \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 8\},$$



$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\rho^2\sin^2\theta + 1\right)\rho d\rho$$

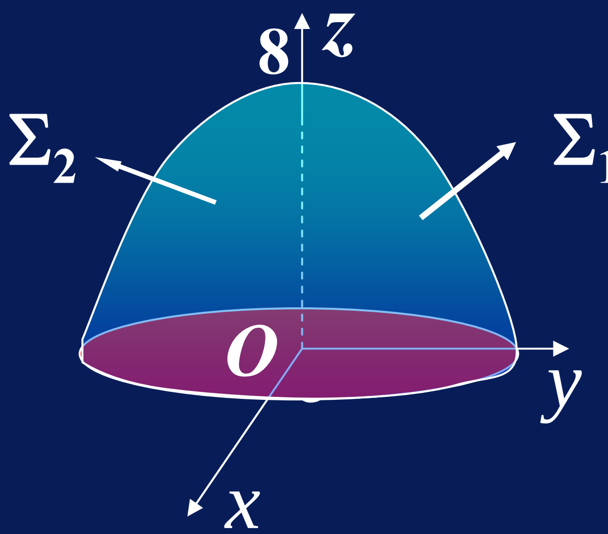
$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\rho^2 \sin^2\theta + 1\right) \rho d\rho$$

$$= 2 \times \frac{64}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \mathrm{d}\theta + 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \times 8 \mathrm{d}\theta$$

$$= 32\pi + 16\pi$$

$$= 48\pi$$

(方法2) 令 $I_1=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,



Σ_1: $y=\sqrt{8-x^2-z}$ (右侧),

Σ_2: $y=-\sqrt{8-x^2-z}$, (左侧),

$D_{zx}=\{(x,z)\,|\,0\le z\le 8-x^2, -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}\}$,

$$\therefore\quad I_1=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{8-x^2-z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{8-x^2-z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{8-x^2-z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= 2\iint_{D_{zx}} \sqrt{8 - x^2 - z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{8-x^2} \sqrt{8 - x^2 - z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{8 - x^2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_0^{2\sqrt{2}} \left(8 - x^2\right)^3 \mathrm{d}x$$

令$x = 2\sqrt{2}\sin t, \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sqrt{2}\right)^3 \cos^3 t \times 2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{8}{3} \times 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{8}{3} \times 64 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

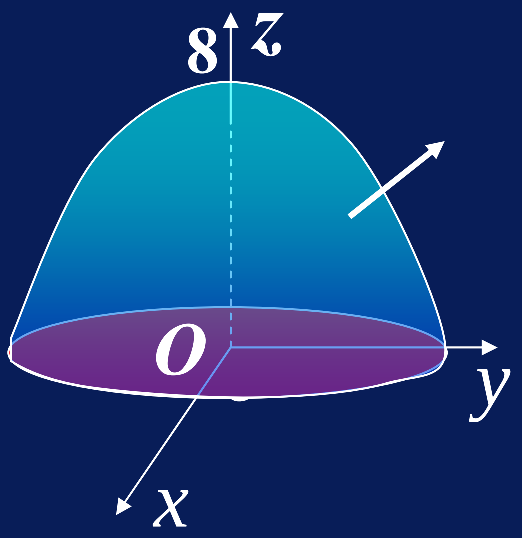
$$= 32\pi$$

$$I_2 = 2\iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 8\},$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 16\pi$$



$$\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

$$= 32\pi + 16\pi = 48\pi$$