§1.4 行列式性质

- 用行列式的定义计算行列式，所需机时：

  对n阶行列式：乘法运算次数

  $$M = (n-1)\text{次/项} \times n!\ \text{项} = (n-1)n!\ \text{次}$$

- $n = 10$，$M = 32,659,200$

  1百万次/秒的计算机，需机时：32秒

- $n = 15$，$M \approx 1.8 \times 10^{13}$

  1百万次/秒的计算机，需机时：13.0年

  1亿次/秒的计算机，　需机时：50.6天

- $n = 20$，　$M \approx 4.6 \times 10^{19}$

  1亿次/秒的计算机，　需机时：350,828年

需要考虑用别的方法计算行列式。

为此需要研究行列式的性质。

一、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

❖显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 按定义

$$D^T=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

又因为行列式 D 可表示为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

故 $D = D^{\mathrm{T}}$. 证毕

说明 行列式中行与列具有同等的地位, 因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

因此，在后面的性质中，如果对行列都成立的性质，我们只证明对行成立。

性质2 **互换行列式的任意两行（列），行列式变号.**

证明 设行列式 $D = \det(a_{ij})$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\text{第 } i \text{ 行} \\
\\
\text{第 } j \text{ 行} \\
\\
\\
\end{array}
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

交换其第 i 行和第 j行，有

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\text{第 } i \text{ 行} \\
\\
\text{第 } j \text{ 行} \\
\\
\\
\end{array}
D_1 = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

由行列式定义可知, D 中任一项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \qquad (1)$$

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \quad (1)$$

又因为 $a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$ (2)

显然（2）式右端是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，并且它们的行标在 D_1 中是标准排列的，所以

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \quad (3)$$

是 D_1 中的一项。因为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 和排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的奇偶性相反，所以（1）式和（3）式差一个负号，所以 D 中任意一项的相反数是 D_1 中的一项，所以 $D_1=-D$ **证毕**

记法： 为了方便以后的叙述和运算，我们引入下列记号

用 r_i 表示行列式 D 的第 i 行，用 c_j 表示 D 的第 j 列。则 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换 D 的第 i 行和第 j 行，$c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换 D 的第 i 列和第 j 列。

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

推论　**如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.**

证明　互换相同的两行，有 $\boldsymbol{D = -D}$,

$$\therefore \quad \boldsymbol{D = 0.}$$

例如，对任意的a，b，c，都有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都有一个公因子 k，则可以把公因子 k 提到行列式记号之外，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由行列式定义知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n}$$

$$= k\sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

$$= kD$$

证毕

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论1 用数 k 乘以行列式 D 等于 D 中某一行（列）所有元素同乘以数 k。

例如：

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{23} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

推论2： 若行列式中有两行(列)元素成比例，则$D=0$。

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

注意：做题时不容易发现。

推论3： 若行列式 D 某行(列)元素全为零，则$D=0$。

例如
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

性质4　若行列式的第i行（列）各元素都是两数之和：$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots n)$则行列式$D$可分解为两个行列式$\hat{D}$与$\tilde{D}$的和。其中$\hat{D}$的第$i$行是$b_{i1},b_{i2}\cdots b_{in}$，而$\tilde{D}$的第$i$行是$c_{i1},c_{i2}\cdots c_{in}$，其他各行与原行列式相同，即

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\tilde{D}}$$

例如：

(1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \underset{\underset{0}{\|}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad (\times)$$

应有 $2^3=8$ 个

注：不是任意两个行列式可以相加，必须只有除一行（列）不同外，其余元素都相同才可以相加。

性质5 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$k\times$

$$\underline{\underline{c_i + kc_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由性质4

$$
\text{右边} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$=$ 左边

第 i 列和第 j 列对应元素成比例，
由性质3的推论2知＝0

注意：k可以为0。

二、应用举例

计算行列式**常用方法**：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}}{\overset{r_2 + 5r_1}{=\!=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}1 & -5 & 3 & -3\\0 & -24 & 18 & -19\\0 & 10 & -5 & 5\\0 & 16 & -10 & 11\end{vmatrix}$$

$$= -5\begin{vmatrix}1 & -5 & 3 & -3\\0 & -24 & 18 & -19\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & 16 & -10 & 11\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} 5\begin{vmatrix}1 & -5 & 3 & -3\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & -24 & 18 & -19\\0 & 16 & -10 & 11\end{vmatrix}$$

$$5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+12r_2} 5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$-5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4 + 3r_3}} \quad -5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 40$$

例2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j}\begin{vmatrix} x+(a_1+a_2+\cdots a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+(a_1+a_2+\cdots a_n) & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+(a_1+a_2+\cdots a_n) & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(a_1+a_2+\cdots a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$=[x+(a_1+a_2+\cdots a_n)]\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots n)]{r_i-r_1}[x+(a_1+a_2+\cdots a_n)]\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(a_1+a_2+\cdots a_n)x^{n-1}$$

注：行（列）和行列式

例3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

分析 若用行列式性质5，有

$$D\xlongequal[(i=2,\cdots n)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&-1&\cdots&-1\\0&-1&2&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&-1&-1&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$

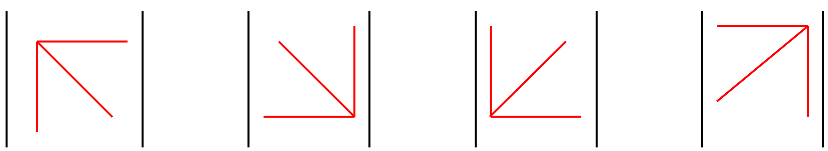
解

$$D \xrightarrow[i=2,\cdots n]{c_1-\frac{1}{j}c_j} \begin{vmatrix} 1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j})$$

注：箭型行列式。一般有以下四种形式：



箭型行列式解题方法：用对角线上的元素消去非零行（列）的元素。

例4 （2000.5）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal[(i=2,\cdots n)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

箭型行列式

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots n]{c_1+\frac{1}{j}c_j} \begin{vmatrix} (x+1)+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{j} & x & x & \cdots & x \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{j})$$

注：可化为箭型行列式的行列式。

解题方法：通过一（两）次行列式性质的应用，化为箭型行列式求解。

例5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

说明:若利用行列式性质4,分解行列式,

则共有 2^n 个行列式相加,

而不是两个行列式之和.

解

$$D_n \xlongequal[(i=2,\cdots n)]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = 0 \, (\times)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

正确的答案

$$n=1 \qquad D_1 = a_1 + b_1$$

$$n=2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(b_2-b_1)$$

$$n\geq 3 \qquad D_n = 0$$

$$D_n = \begin{cases} a_1+b_1 & (n=1) \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1) & (n=2) \\ 0 & (n\geq 3) \end{cases}$$