

# 离散数学



西北工业大学

2022年4月13日 星期三

---

# Lecture7    Function

## 7.0 内容提要

---



## 7.1 本章学习要求



## 7.2 Function

---

函数也叫**映射、变换或对应**。

函数是数学的一个基本概念。这里将高等数学中连续函数的概念推广到对离散量的讨论，即将**函数看作是一种特殊的二元关系**。

**函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要**。如各种高级程序语言中使用了大量的函数。实际上，**计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数**。

## 7.2.1 Definition

**定义7.2.1** 设 $f$ 是集合 $A$ 到 $B$ 的关系，如果对每个 $x \in A$ ，都存在惟一的 $y \in B$ ，使得 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则称关系 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的**函数 (Function)** (或映射 (Mapping)、变换 (Transform))，**记为 $f: A \rightarrow B$** 。

$A$ 为函数 $f$ 的**定义域**，记为 $\text{dom}f = A$ ；

$f(A)$ 为函数 $f$ 的**值域**，记为 $\text{ran}f$ 。

函数定义的示意图见图7.2.1。

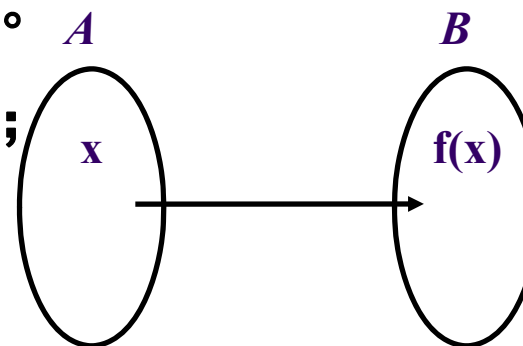


图7.2.1

## 结论

---

- (1)  $\langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow y = f(x)$ ;
- (2)  $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$ ;
- (3)  $|f| = |A|$ ;
- (4)  $f(x)$  表示一个变值,  $f$  代表一个集合, 因此  $f \neq f(x)$ 。

如果关系  $f$  具备下列两种情况之一, 那么  $f$  就不是函数:

- (1) 存在元素  $a \in A$ , 在  $B$  中没有象;
- (2) 存在元素  $a \in A$ , 有两个及两个以上的象。

## 例7.2.1

---

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , 试判断下列关系哪些是函数。如果是函数, 请写出它的值域。

(1)  $f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$  ;

(2)  $f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$  ;

(3)  $f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$  ;

(4)  $f_4 = \{\langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$  。



## 例7.2.2

---

设 $P$ 是接受一个整数作为输入并产生一个整数作为输出的计算机程序。令 $A=B=\mathbb{Z}$ ，则由 $P$ 确定的关系 $f_p$ 定义如下：

如果 $\langle m, n \rangle \in f_p$ 当且仅当输入 $m$ 时，由程序 $P$ 所产生的输出是 $n$ 。

请判断 $f_p$ 是否为一函数。

## 例7.2.2 解

---

显然， $f_p$ 是一个函数。因为，任意一个特殊的输入对应唯一的输出。

可用任意一个可能的输入集合A对应输出集合B而推广到一般情形的程序。所以，通常把函数看做输入一输出的关系。

## 例7.2.3

---

设 $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 请分别写出A到B的**不同关系**和**不同函数**。

**解** 因为 $|A|=2$ ,  $|B|=2$ , 所以 $|A \times B| = |A| \times |B| = 4$ ,  
即 $A \times B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$ , **此时从A到B的不同的关系有 $2^4=16$ 个。**

## 例7.2.3 解（续）

分别如下：

$$R_0 = \Phi; R_1 = \{\langle a, 1 \rangle\}, R_2 = \{\langle a, 2 \rangle\}, R_3 = \{\langle b, 1 \rangle\},$$

$$R_4 = \{\langle b, 2 \rangle\}, R_5 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, R_6 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$R_7 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, R_8 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$R_9 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}, R_{10} = \{\langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$R_{11} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, R_{12} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$$

从A到B的不同的函数仅有 $2^2=4$ 个。分别如下：

$$f_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, f_2 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$f_3 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, f_4 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}。$$

## 函数与关系的差别

函数是一种**特殊的关系**，它与一般关系比较具备如下**差别**：

- 1) 从A到B的不同的关系有 $2^{|A| \times |B|}$ 个；但从A到B的不同的函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个。（个数差别）
- 2) 关系的第一个元素可以相同；函数的第一元素一定是互不相同的。  
(集合元素的第一个元素存在差别)
- 3) 每一个函数的基数都为 $|A|$ 个( $|f|=|A|$ )，但关系的基数却为从零一直到 $|A| \times |B|$ 。  
(集合基数的差别)

## 7.2.2 函数的类型

**定义7.2.2** 设 $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的函数，  
对任意 $x_1, x_2 \in A$ ，如果 $x_1 \neq x_2$ ，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，  
则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的**单射**injection, (不同的 $x$ 对应不同的 $y$ )；  
如果 $\text{ran} f = B$ ，则称 $f$ 为**从 $A$ 到 $B$ 的满射**onto, surjection；  
若 $f$ 是**满射**且是**单射**，则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的**双射**bijection。  
若 $A = B$ ，则称 $f$ 为 $A$ 上的函数；当 $A$ 上的函数 $f$ 是双射  
时，称 $f$ 为一个**变换**。

## 将定义7.2.2的描述数学化为

- (1)  $f: A \rightarrow B$  是单射当且仅当对  $x_1, x_2 \in A$ , 若  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (2)  $f: A \rightarrow B$  是满射当且仅当对  $y \in B$ , 一定存在  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ ;
- (3)  $f: A \rightarrow B$  是双射当且仅当  $f$  既是单射, 又是满射;
- (4)  $f: A \rightarrow B$  是变换当且仅当  $f$  是双射且  $A = B$ 。

## 例7. 2. 4

---

确定下列函数的类型。

(1) 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B=\{a, b, c, d\}$ 。  $f:A\rightarrow B$ 定义为:  
 $\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, d\rangle\}$ ;

(2) 设 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{a, b, c, d\}$ 。  $f:A\rightarrow B$ 定义为:  
 $f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle\}$ ;

(3) 设 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{1, 2, 3\}$ 。  $f:A\rightarrow B$ 定义为  
 $f=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$ ;



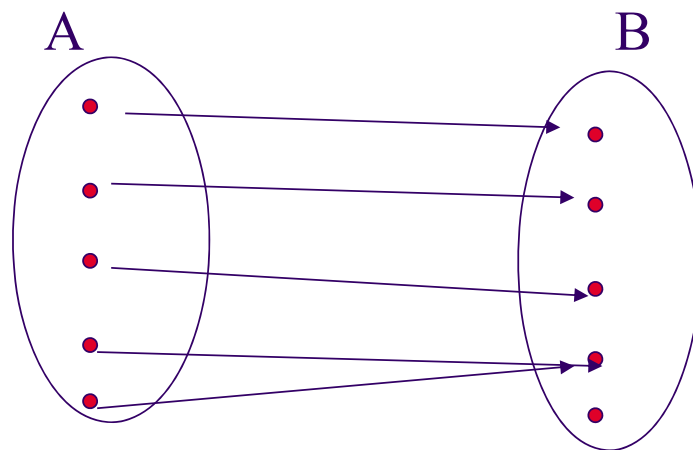
## 结 论

设 $A, B$ 为有限集合,  $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的函数, 则:

$f$ 是单射的必要条件为  $|A| \leq |B|$ ;

$f$ 是满射的必要条件为  $|B| \leq |A|$ ;

$f$ 是双射的必要条件为  $|A| = |B|$ 。



## 定理7.2.1

---

设 $A, B$ 是有限集合, 且 $|A|=|B|$ ,  $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, 则 $f$ 是单射当且仅当 $f$ 是满射。

证明必要性( $\Rightarrow$ ):

设 $f$ 是单射。因为,  $f$ 是单射, 故 $|A|=|f(A)|$ 。又因为 $|f(A)|=|B|$ , 且 $f(A)\subseteq B$ , 得 $f(A)=B$ , 故 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的满射。

## 定理7.2.1 (续)

---

充分性( $\Leftarrow$ ):

设 $f$ 是满射。任取 $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 \neq x_2$ , 假设 $f(x_1) = f(x_2)$ , 由于 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的满射, 所以 $f$ 也是 $A - \{x_1\}$ 到 $B$ 的满射, 故 $|A - \{x_1\}| \geq |B|$ , 即 $|A| - 1 \geq |B|$ , 这与 $|A| = |B|$ 矛盾。因此 $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 故 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的单射。

## 例7.2.5

---

设 $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $Y = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ ,

$f: X \rightarrow Y$ 的定义如下:

$$(1) f_1 = \{ \langle 0, 1/2 \rangle, \langle 1, 1/3 \rangle, \dots, \langle n, 1/(n+2) \rangle, \dots \}$$

$$(2) f_2 = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1/2 \rangle, \dots, \langle n, 1/n \rangle, \dots \}$$

$$(3) f_3 = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1/2 \rangle, \dots, \langle n, 1/(n+1) \rangle, \dots \}.$$

试判断它们的类型。

## 例7. 2. 6

---

设 $A=B=\mathbb{R}$  (实数集)。试判断下列函数的类型。

(1)  $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  ;

(2)  $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  ;

(3)  $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  ;

解 (1)  $f_1$  仅是一般函数；

(2)  $f_2$  是双射函数；

(3)  $f_3$  是单射函数。

## 小结

---

### 1、函数 $(f:A \rightarrow B)$ 的定义

- (1)  $f$  是集合  $A$  到  $B$  的关系,
- (2) 对每个  $x \in A$ , 都存在惟一的  $y \in B$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in f$ 。

### 2、函数与关系的区别与联系

### 3、函数 $(f:A \rightarrow B)$ 的类型

- (1)  $f$  是单射  $\Leftrightarrow$  对  $x_1, x_2 \in A$ , 若  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- (2)  $f$  是满射  $\Leftrightarrow$  对  $y \in B$ , 一定存在  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ ;
- (3)  $f$  是双射  $\Leftrightarrow f$  既是单射, 又是满射;
- (4)  $f$  是变换  $\Leftrightarrow f$  是双射且  $A=B$ 。

## 例7.2.7

**典型(自然)映射。** 设 $R$ 是集合 $A$ 上的一个等价关系,  
 $g: A \rightarrow A/R$ 称为 $A$ 对商集 $A/R$ 的**典型(自然)映射**,  
其定义为 $g(a) = [a]_R, a \in A$ .

**证明：典型映射是一个满射。**

分析：由等价类的定义，对任意  
 $[a]_R \in A/R, a \in [a]_R$ ，即**任意 $A/R$ 中的元素都有原象**，  
所以典型映射是满射。

## 7.2.3 常用函数

### 定义7.2.3

(1) 如果 $A=B$ ，且对 $\forall x \in A$ ，都有 $f(x)=x$ ，则称 $f$ 为 $A$ 上的**恒等函数**，记为 $I_A$ 。

(2) 如果 $\exists b \in B$ ，且对 $\forall x \in A$ ，都有 $f(x)=b$ ，则称 $f$ 为**常值函数**。

(3) 设 $A$ 是全集 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 的一个子集，则子集 $A$ 的**特征函数**定义为从 $U$ 到 $\{0, 1\}$ 的一个函数，且

$$f_A(u_i) = \begin{cases} 1 & u_i \in A \\ 0 & u_i \notin A \end{cases}$$



## 定义7.2.3 (续)

(4) 对有理数 $x$ ,  $f(x)$ 为大于等于 $x$ 的最小的整数, 则称 $f(x)$ 为**上取整函数**(强取整函数), 记为  $f(x) = \lceil x \rceil$  ;

(5) 对有理数 $x$ ,  $f(x)$ 为小于等于 $x$ 的最大的整数, 则称 $f(x)$ 为**下取整函数**(弱取整函数), 记为  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  ;

(6) 如果 $f(x)$ 是集合 $A$ 到集合 $B = \{0, 1\}$ 上的函数, 则称 $f(x)$ 为**布尔函数**。

## 例7. 2. 10

设 $A=B=\mathbb{R}$  (实数集)。试指出下列函数的类型。

- (1)  $f_1 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  ;
- (2)  $f_2 = \{ \langle x, a \rangle \mid x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \}$  ;
- (3)  $f_3 = \{ \langle x, \lceil x \rceil \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  ;
- (4)  $f_4 = \{ \langle x, \lfloor x \rfloor \rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$  。

解 (1)  $f_1$  是恒等函数, (2)  $f_2$  是常值函数,  
(3)  $f_3$  是上取整函数, (4)  $f_4$  是下取整函数。

## 7.2.5 函数的应用

**例7.2.11** 设 $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 是 $n$ 个元素的有限集,  
 $B_n = \{b_1 b_2 b_3 \dots b_n \mid b_i \in \{0, 1\}\}$ , **试建立 $P(A_n)$ 到 $B_n$ 的一个双射。**

**解**  $P(A_n)$ 到 $B_n$ 可以按照如下的方式建立关系:

对任意 $S \in P(A_n)$ , 令

$$f(S) = b_1 b_2 b_3 \dots b_n,$$

其中:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } a_i \in S, \\ 0, & \text{当 } a_i \notin S, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## 例7.2.11 (续)

2(2) **证明**  $f$  是双射。取  $S_1, S_2 \in P(A_n)$ ,  $S_1 \neq S_2$ ,  
 则存在元素  $a_j$  (显然  $a_j \in S_1$  或  $a_j \in S_2$ ) 使得  $f(a_j)$  到  $B_n$  的映射。  
 $a_j \in S_1, a_j \notin S_2$  或  $a_j \in S_2, a_j \notin S_1$ 。  
 从而  $f(S_1) = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$  中必有  $b_j = 1$ ,  
 $f(S_2) = c_1 c_2 c_3 \cdots c_n$  必有  $c_j = 0$   
 或  $f(S_1) = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$  中必有  $b_j = 0$ ,  
 $f(S_2) = c_1 c_2 c_3 \cdots c_n$  必有  $c_j = 1$ 。所以  
 $f(S_1) \neq f(S_2)$ , 即  $f$  是单射。

## 例7.2.11 (续)

3) 证 $f$ 是满射。

任取二进制数 $b_1b_2\dots b_n \in B_n$ ,

建立对应的集合

$$S \subseteq A_n, S = \{a_i \mid \text{若 } b_i = 1\}$$

(即若 $b_i = 1$ , 令 $a_i \in S$ , 否则 $a_i \notin S$ ),

例如 $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ , 则有:

$$\begin{aligned} \Phi &\mapsto 000, \{a_1\} \mapsto 100, \{a_2\} \mapsto 010, \\ \{a_3\} &\mapsto 001, \{a_1, a_2\} \mapsto 110, \{a_1, a_3\} \mapsto 101, \\ \{a_2, a_3\} &\mapsto 011, \{a_1, a_2, a_3\} \mapsto 111. \end{aligned}$$

## 例7. 2. 12

在异步传输模式(ATM)下, 数据按53字节分组, 每组称为一个信元。以速率每秒500千bit传输数据的连接上一分钟能传输多少个ATM信元。

**解** 因为一分钟能够传输的字节数为

$$\frac{500000 \times 60}{8} = 3750000,$$

所以一分钟能传输的信元数为

$$\left\lfloor \frac{3750000}{53} \right\rfloor = 70754$$

## 7.3 函数的运算

### 7.3.1 函数的复合运算

**定义7.3.1** 考虑 $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ 是两个函数,  
则 $f$ 与 $g$ 的复合运算

$$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \text{ 且 } z \in C \text{ 且 } \\ (\exists y) (y \in B \text{ 且 } x f y \text{ 且 } y g z) \}$$

是从 $A$ 到 $C$ 的函数, 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$ , 称为函数 $f$ 与 $g$ 的复合函数。

## 例7.3.1

---

设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B=\{a, b, c, d\}$ ,  $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 函数 $f:A\rightarrow B$ ,  
 $g:B\rightarrow C$ 定义如下:

$f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle, \langle 5, b\rangle\}$ ;

$g=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 5\rangle, \langle d, 2\rangle\}$ 。

求 $f\circ g$ 。

解  $f\circ g=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$



## 例7.3.2

设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = (x+1)^2$ ,  $h(x) = x/2$ 。计算:

- (1)  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ;
- (2)  $f \circ g \circ h$ ,  $f \circ (g \circ h)$ ;
- (3)  $f \circ h$ ,  $h \circ f$ 。

**解** (1)  $f \circ g(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x+1)^2$ ;  
 $g \circ f(x) = f(g(x)) = f((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ ;

## 例7.3.2 (续)

$$\begin{aligned}(2) \quad (f \circ g \circ h)(x) &= h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = (2x+1)^2/2;\end{aligned}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x))$$

$$(g \circ h)(x) = (x+1)^2/2, \quad f(x) = 2x,$$

$$(g \circ h)(f(x)) = (2x+1)^2/2;$$

$$(3) \quad f \circ h(x) = h(f(x)) = h(2x) = x;$$

$$h \circ f(x) = f(h(x)) = f(x/2) = x;$$

函数的复合不满足交换律，但满足结合律。

## 定理7.3.1

---

设 $f$ 和 $g$ 分别是 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 到 $C$ 的函数，则：

如 $f, g$ 是满射，则 $f \circ g$ 也是从 $A$ 到 $C$ 满射；

如 $f, g$ 是单射，则 $f \circ g$ 也是从 $A$ 到 $C$ 单射；

如 $f, g$ 是双射，则 $f \circ g$ 也是从 $A$ 到 $C$ 双射。

## 定理7.3.1

---

证明：如 $f, g$ 是满射，则 $f \circ g$ 也是从 $A$ 到 $C$ 满射；

证明：1) 对 $\forall c \in C$ ,

由于 $g$ 是满射，所以存在 $b \in B$ ，使得 $g(b) = c$ 。

对于 $b \in B$ ,

又因 $f$ 是满射，所以存在 $a \in A$ ，使得 $f(a) = b$ 。

从而有 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ 。

即存在 $a \in A$ ，使得： $f \circ g(a) = c$ ，

所以 $f \circ g$ 是满射。

## 定理7.3.1 (续)

证明：如 $f, g$ 是单射，则 $f \circ g$ 也是从 $A$ 到 $C$ 单射；

2) 对任意 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ ,

由于 $f$ 是单射，所以

$f(a_1) \neq f(a_2)$ 。令 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ ,

由于 $g$ 是单射，所以

$g(b_1) \neq g(b_2)$ ，即 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ 。

从而有 $f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$ ,

所以 $f \circ g$ 是单射。

3) 是1)、2)的直接结果。■

## 定理7.3.2

---

设 $f$ 和 $g$ 分别是从 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 到 $C$ 的函数，则

- (1) 如 $f \circ g$ 是从 $A$ 到 $C$ 的**满射**，则 $g$ 是从 $B$ 到 $C$ 的**满射**；
- (2) 如 $f \circ g$ 是从 $A$ 到 $C$ 的**单射**，则 $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的**单射**；
- (3) 如 $f \circ g$ 是从 $A$ 到 $C$ 的**双射**，则 $g$ 是从 $B$ 到 $C$ 的**满射**， $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的**单射**。

## 7.3.2 函数的逆运算

定义7.3.2 设  $f: A \rightarrow B$  的函数。如果

$$f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in f \}$$

是从  $B$  到  $A$  的函数，则称  $f^{-1}: B \rightarrow A$  的反函数（或逆函数）。

由定义7.3.2可以看出，一个函数的逆运算也是函数。

即反函数  $f^{-1}$  存在当且仅当  $f$  是双射。

## 例7.3.3

---

试求出下列函数的逆函数。

(1) 设 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{1, 2, 3\}$ 。  $f_1:A\rightarrow B$  定义为  $f_1=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$ ;

(2)  $f_2=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1/2\rangle, \dots, \langle n, 1/(n+1)\rangle, \dots\}$

(3)  $f_3=\{\langle x, x+1\rangle \mid x\in R\}$ 。



## 定理7.3.3

---

设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数，则：

$$f \circ f^{-1} = I_A = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \} ;$$

$$f^{-1} \circ f = I_B = \{ \langle b, b \rangle \mid b \in B \} ;$$

$$I_A \circ f = f \circ I_B = f .$$

## 定理7.3.4

---

若 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射，则 $f$ 的逆函数 $f^{-1}$ 也是 $B$ 到 $A$ 的双射。

证明 (1) 证明 $f^{-1}$ 是满射。

因为 $\text{ran} f^{-1} = \text{dom} f = A$ ，所以 $f^{-1}$ 是 $B$ 到 $A$ 的满射。

## 定理7.3.4 证明（续）

(2)  $f^{-1}$  是单射。

对任意  $b_1, b_2 \in B$ ,  $b_1 \neq b_2$ ,

假设  $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$ , 即存在  $a \in A$ , 使得

$\langle b_1, a \rangle \in f^{-1}, \langle b_2, a \rangle \in f^{-1}$ , 即

$\langle a, b_1 \rangle \in f, \langle a, b_2 \rangle \in f$ ,

这与  $f$  是函数矛盾,

因此  $f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$ ,

故  $f^{-1}$  是  $B$  到  $A$  的单射。

综上,  $f^{-1}$  是  $B$  到  $A$  的双射。

## 7.3.4 函数运算的应用

**例7.3.4** 假设 $f$ 是的定义如下表。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	S	T	I	N	Y	A	B	C	F	G	H
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	M	O	P	Q	R	U	V	W	X	Z

即 $f(A)=D$ ,  $f(B)=E$ ,  $f(C)=S$ , ...等等。

试找出给定密文“QA IQORSFD00BU IPQKJBYAQ”对应的明文。

# 7. 3. 4函数运算的应用

解由表7. 3. 1知， $f^{-1}$ 如如下表所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
H	I	J	A	B	K	L	M	E	N	O	P	Q
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	R	S	T	U	C	D	V	W	X	Y	G	Z

将密文 “QA I QORSFD00BU I PQKJBYAQ” 中的每一个字母在 $f^{-1}$ 中找出其对应的象就可得出对应的明文：  
“THETRUCKARRIVESTONIGHT”。

## 例7.3.5

---

设按顺序排列的13张红心纸牌，

A2345678910JQK

经过1次洗牌后牌的顺序变为

38KA410QJ57629

再经两次同样方式的洗牌后牌的顺序是怎样的？

# 例7. 3. 5 解

对应结果见下表。

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
f	3	8	K	A	4	10	Q	J	5	7	6	2	9
fof	K	J	9	3	A	7	2	6	4	Q	10	8	5
fofo f	9	6	5	K	3	Q	8	10	A	2	7	J	4

## 7.4 置换函数

当A是有限集合时，这种情况具有特殊重要性。有限集合上的双射函数在数学、计算机科学和物理学中有着非常广泛的应用。

### 7.4.1 基本概念

**定义7.4.1** 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是有限集合。从A到A的双射函数称为**A上的置换或排列** (Permutation)，记为 $P: A \rightarrow A$ ，**n称为置换的阶** (Order)。



$n$ 阶置换 $P:A \rightarrow A$ 常表示为：

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ P(a_1) & P(a_2) & P(a_3) & \cdots & P(a_n) \end{pmatrix}$$

第一行是集合 $A$ 的元素按顺序列出，

第二行是 $A$ 中元素对应的函数值。

显然序列 $P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_n)$ 恰好是 $A$ 中元素的重排，恰好对应 $N$ 的一个排列。

## 7. 4. 3 置换函数的应用

例7. 4. 3 等边三角形如图7. 4. 1所示。求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数。

**解** 能使三角形重合的置换有6个：

(1) 三角形绕中心A反时针旋转 $120^\circ$ 、 $240^\circ$  和  $360^\circ$  对应的置换分别为：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 绕中线1A, 2A, 3A翻转对应的置换分别为：

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

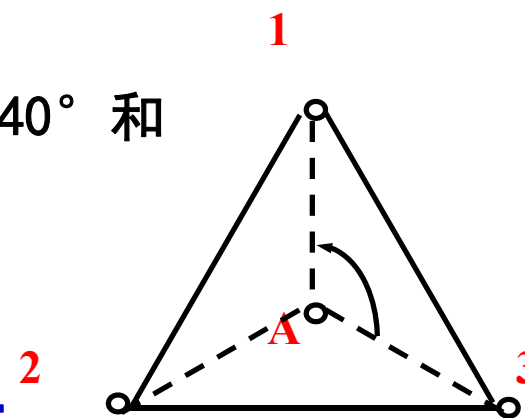


图7.4.1

## 7.5 本章总结

---

- (1) **函数的概念**。注意函数与关系的区别和联系；
- (2) **单射、满射和双射函数的概念**，数学描述形式；
- (3) **特殊函数的基本概念**；
- (4) **函数的复合运算，逆运算及运算性质**。

# Thank You !

