第五节

可降阶高阶微分方程

- 一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程
- 二、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程
- 三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

令 $z=y^{(n-1)}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{(n)}=f(x)$, 因此

$$z=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

即 $$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$$

$$=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

例1 求微分方程 $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$ 满足初始条件

$y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$ 的特解 .

解 (方法1) 对方程两端积分，得

$$y'=\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+C_1=\arctan x+C_1,$$

由条件 $y'\big|_{x=0}=2$ 得，$C_1=2.$

所以 $y'=\arctan x+2.$ 两端再积分，得

$$y=\int[\arctan x+2]\,\mathrm{d}x+C_2$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2 = 1.$

故所求特解为

$$y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2x + 1.$$

(方法2) 对方程两端在区间 $[0,\ x]$上取积分，

$$\int_0^x y''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

得 $$y'(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+y'(0)$$

$$=\arctan x+2$$

再取积分，得所求特解

$$y(x)=\int_0^x[\arctan x+2]\mathrm{d}x+y(0)$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x+1.$$

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 (不含有y)

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例2 求解 $(1-x^2)y'' - xy' = 0,$

$$y(0)=0,\ \ y'(0)=1;$$

解 方程中不出现 y， 属于 $y'' = f(x, y')$ 型，

设 $y' = p$, 则 $y'' = p'$,

可分离变量方程

代入方程有 $(1-x^2)p' = xp$

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

两边积分得 $$\ln p = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln C_1$$

即 $$p = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$$

代入初始条件 $y'(0) = 1$, 得 $C_1 = 1.$

所以 $$y' = p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

两边积分得 $y = \arcsin x + C_2$

代入初始条件 $y(0) = 0$, 得 $C_2 = 0.$

故所求特解为 $y = \arcsin x.$

例3 设$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$有连续的二阶偏导数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2,$$试求u.

解 令$r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

由x,y的轮换对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

代入方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$$

得 $$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=r^2$$

令 $p=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$, 则 $p'=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}$,

上方程化为 $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}p=r^2$$

$$p=e^{-\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}[\int r^2 e^{\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}\mathrm{d}r+C_1]=\frac{1}{r}[\frac{1}{4}r^4+C_1]$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=p=\frac{1}{r}[\frac{1}{4}r^4+C_1]=\frac{1}{4}r^3+C_1\frac{1}{r}$$

积分得

$$u=\frac{1}{16}r^4+C_1\ln r+C_2$$

$$=\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+C_1\ln(x^2+y^2)+C_2$$

(C_1,C_2为任意常数)

三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 (不含有x)

令 $y'=p(y)$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$

设其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$, 即得

$$y'=\varphi(y,C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

例4 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

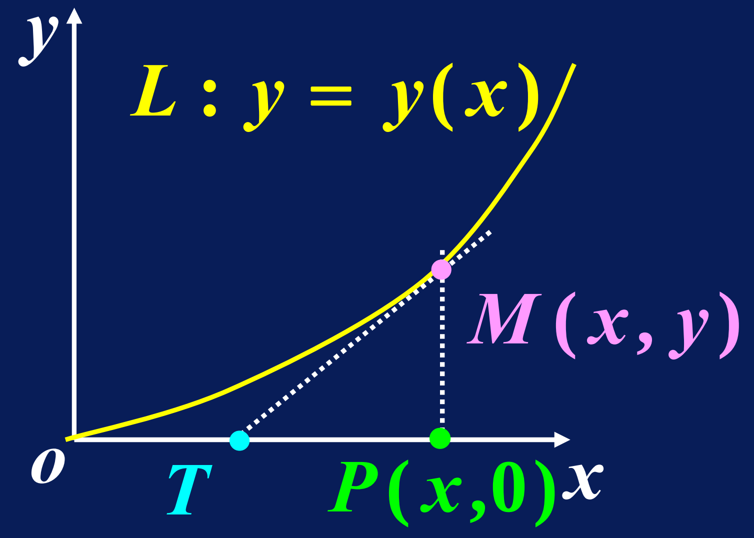
代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ 一阶齐次线性方程

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

例5 一平面曲线经过原点 O，其上任一点 M处的切线与横轴交于 T，由点M向横轴作垂线，垂足为 P,已知三角形 MTP 的面积与曲边三角形 OMP的面积成正比（比例系 数$k > \frac{1}{2}$)，求此曲线的方程.



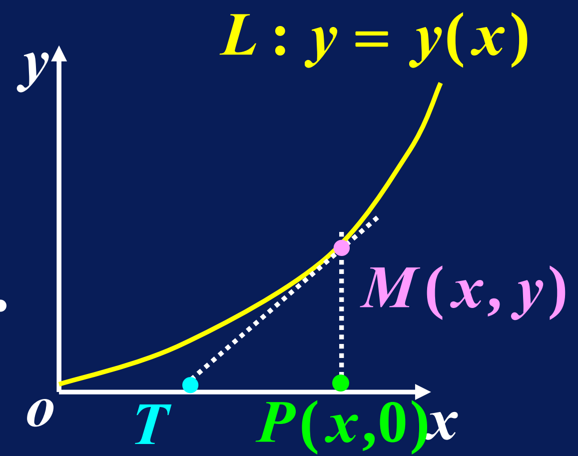
解 设所求曲线 L 的方程为 $y = y(x)$ (如图)

那么，$y(0) = 0$, 且 L 上任意点 $M(x, y)$处的切线 MT 的方程为 $Y - y = y'(x)(X - x)$.

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

令 $Y = 0$，得到切线与 x 轴交点 T的横坐标

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$



因此，点 T的坐标为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$.

依题意，三角形 MTP的面积是曲边三角形 OMP 面积的k倍. 即

$$\frac{1}{2}\left[x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right]y = k\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{y^2}{2y'} = k\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$

方程两端对 x 求导数，得 $\dfrac{2yy'^2 - y^2y''}{2(y')^2} = ky,$

消去 y（$y = 0$ 不合题意）

故所求曲线满足的微分方程

$$(2-2k)y'^2 = yy''$$

这是$y'' = f(y, y')$型的可降阶方程，

$$(2-2k)y'^2 = yy'' \qquad (1)$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入方程(1), 得 $(2-2k)p^2 = yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

消去p（$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$不合题意），分离变量 并积分

$$(2-2k)\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{\mathrm{d}p}{p},$$

得 $(2-2k)\ln|y| = \ln|p| - \ln|C|$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = Cy^{2-2k},$$

于是 $$y^{2k-2}\,\mathrm{d}y = C\,\mathrm{d}x,$$

$$y^{2k-1} = C_1 x + C_2$$

$\left(\text{其中}\, C_1 = (2k-1)C\right).$

由条件 $y(0) = 0$, 得 $C_2 = 0$, 故所求曲线的方程为

$$y^{2k-1} = C_1 x \qquad （k > \frac{1}{2}）.$$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

思考题

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解？

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便 . 例如, $y'' = e^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

答: (1) 一般情况 , 边解边定常数计算简便.

(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

综合题

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=1,$ 且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明：当 $x\geq 0$ 时，不等式： $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立

解 (1) 由题设知

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

上式两边对 x 求导，得

$$(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x)$$

属可降阶的微分方程,

设 $p = f'(x)$, 则 $f''(x) = p'$,

代入上方程得 $(x+1)p' = -(x+2)p$

分离变量有 $$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x$$

两边积分 $\ln p = -x - \ln(1+x) + \ln C$

解之得 $$f'(x) = p = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$$

由$f(0)=1$,代入题设关系式有

$$f'(0)+f(0)=0,$$

知 $f'(0)=-1$. 从而 $C=-1$.

因此 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$

证 (2) (方法1) 当$x\ge 0$, $f'(x)<0$,

即$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，又 $f(0)=1$,

所以$f(x)\le f(0)=1$

欲证 $f(x)\ge e^{-x}$, 即证 $f(x)-e^{-x}\ge 0$.

为此设 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$

则 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = f'(x) + e^{-x} = \dfrac{x}{x+1}e^{-x}$

当$x \geq 0$时， $\varphi'(x) \geq 0$,

即$\varphi(x)$在$[0, +\infty)$上单调增加,

因而 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

即有$f(x) \geq e^{-x}$

综上所述，当 $x \geq 0$,成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$

(方法2) 由于 $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x) - 1$

所以 $$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

注意到当 $x \ge 0$时

$$0 \le \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}$$

因而有

$$1 \ge f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \ge 1 - \left(1 - e^{-x}\right) = e^{-x}$$

即有 $$e^{-x} \le f(x) \le 1.$$

备用题

例1-1 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解 $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx + C_1'$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$）

例2-1 求 $y''\tan x = y' + 5$ 的通解 .

解 方程不是含未知函数 y, 属于$y'' = f(x, y')$型.

令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

代入方程得一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot \tan x = p + 5,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \cot x \cdot p = 5\cot x.$$

那么 $$p = e^{\int \cot x \,\mathrm{d}x}\left[\int 5\cot x e^{-\int \cot x \,\mathrm{d}x} + C_1\right]$$

$$= C_1 \sin x - 5,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 \sin x - 5.$$

故所给方程的通解为

$$y = -C_1 \cos x - 5x + C_2 .$$

例2-2 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$,

即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$,

于是有 $y'=3(1+x^2)$

$$y' = 3(1+x^2)$$

两端再积分得

$$y = x^3 + 3x + C_2$$

利用 $y\Big|_{x=0} = 1$,得 $C_2 = 1$,

因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

例2-3 求微分方程 $y''+2x(y')^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{2}$ 的特解 .

解 方程不显含未知函数 y.

令 $y'=p$, 则 $y''=p'$,

代入方程，得 $p'+2xp^2=0.$

分离变量并积分

$$-\int\frac{\mathrm{d}\,p}{p^2}=2x\,\mathrm{d}\,x\qquad(p\neq 0),$$

得 $$\frac{1}{p}=x^2+C_1.$$

由条件 $y'\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{2}$, 得 $C_1=-2.$

于是 $$y'=\frac{1}{x^2-2},$$

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

再由条件 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1.$

故所求特解为 $$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+1.$$

例4-1 求微分方程 $1+yy''+y'^2=0$的通解 .

解 此方程不显含变量 x. 令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$1+yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,$$

分离变量并积分

$$\int\frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

得 $\frac{1}{2}\ln\left|1+p^2\right| = -\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$, $(1+p^2)y^2 = C_1$,

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \pm\frac{\sqrt{C_1 - y^2}}{y}.$$

分离变量 $$\pm\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $\mp\sqrt{C_1 - y^2} = x + C_2$.

故所给方程的通解为 $(x+C_2)^2 + y^2 = C_1$.

例4-2 求微分方程 $y'' = (y')^3 + y'$ 的通解．

解 方程即不显含 x,也不显含 y

故既属于 $y'' = f(x, y')$ 型方程,

也属于 $y'' = f(y, y')$ 型方程．

若看成 $y'' = f(y, y')$ 型方程,

则 设 $\dfrac{dy}{dx} = p,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx},$

方程化为 $\dfrac{dp}{dx} = p^3 + p.$

方程即不显含 x, 也不显含 y

分离变量，并积分 $\int \frac{\mathrm{d}p}{p(p^2+1)} = \int \mathrm{d}x$得

$$\ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right| = x + \ln|C|, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = Ce^x,$$

即 $\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}} = Ce^x$，解此一阶方程较困难．

若看成$y'' = f(y, y')$型方程,

则设 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

所给方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^3 + p$,

$p=0$时, $y=C$; $p\neq 0$时, $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2+1.$

分离变量并积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p^2+1}=\int \mathrm{d}y$得

$$\arctan p=y+C_1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\tan(y+C_1).$$

并分离变量 $\cot(y+C_1)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$

积分得所给方程的通解

$$\ln\left|\sin(y+C_1)\right|=x+\ln\left|C_2\right|,$$

即 $\sin(y+C_1)=C_2e^x.$

例4-3 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0,\quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解 令 $y' = p(y)$,

则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\dfrac{1}{2}p^2 = \dfrac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$,

$$\therefore \quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y}$$

根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0,$

得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^y$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2,$

再由 $y\big|_{x=0} = 0,$ 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

例4-4 求解：$y'' = \sin y \cos y,\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}, y'(0) = -1.$

解 方程中不出现 x，属于 $y'' = f(y, y')$型,

故令 $y' = p$，则$y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入方程得 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \sin y \cos y$$

分离变量 $$p\,\mathrm{d}p = \sin y \cos y\,\mathrm{d}y$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}P^2 = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{1}{2}C_1$$

即 $p^2 = \sin^2 y + C_1$

代入初始条件 $p(0) = y'(0) = -1,$

得 $C_1 = 0$

所以 $p^2 = \sin^2 y$

即 $p = \pm \sin y$

又由初始条件 $y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = -1$知,

要使上式满足初始条件 ,

上式只能取负号，故 $y' = p = -\sin y$

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\sin\,y} = -\mathrm{d}\,x$$

两边积分得
$$\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -x + C_2$$

代入初始条件 $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$， 得 $C_2 = 0$

故所求特解为
$$x = -\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -\ln\left|\csc x - \cot x\right|$$