线性代数

第二章

矩阵及其运算

矩阵是线性代数一个最基本的概念，其内容贯穿于线性代数始终。矩阵把一组数用一张表的形式联系到一起，视为一个整体，当作一个“量”来进行运算。它可以使大量的相似的运算得到简化，使问题的叙述更加简捷，更容易把握问题的整体和实质，而且适合用计算机来处理。在数学、工程技术及生产实践中，有很多问题都可以归结为矩阵的运算，可以用矩阵的理论来解决。

本章共有四节内容：

§1　矩阵的概念

§2　矩阵的基本运算

§3　逆矩阵

§4　分块矩阵

§ 2.1 矩阵概念

一、矩阵概念的引入

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

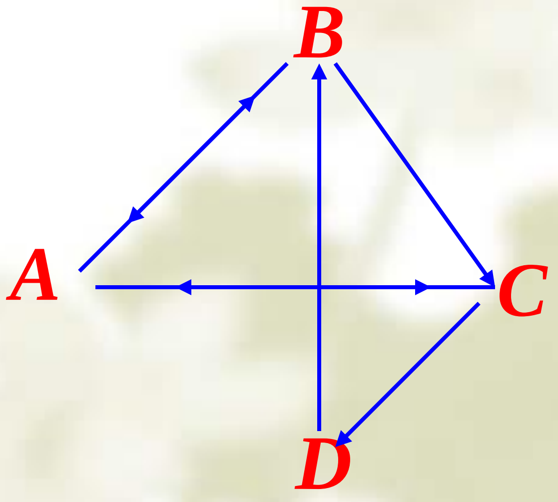
我们知道它的解取决于它的系数$a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots,n)$以及它的常数项 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$。

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组可由这张表唯一确定，则对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四城市间的航班图,如果从A到B有航班,则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

发站 \ 到站	*A*	*B*	*C*	*D*
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中√表示有航班.

为了便于计算,把表中的√改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵.

a_{ij} 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列的元素；

通常用大写字母 A,B 等表示矩阵。上面的矩阵可简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$，无需指明元素时，也可以记做 $A_{m\times n}$ 。

➢ 有关矩阵的几个概念及特殊矩阵

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$

1. a_{ij} 称为矩阵A的第i行第j列的**元素**；

2. 若$a_{ij}\in R$，则称A为**实矩阵**；
   若$a_{ij}\in C$，则称A为**复矩阵**；

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

实矩阵

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ -i & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

复矩阵

3. 若$m=n$，则称A为**方阵**；

4. $m=1, n>1$ 称 A 为**行矩阵**；$m>1, n=1$ 称 A 为**列矩阵**

一般用小写字母或希腊字母表示；

例如 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 9\end{pmatrix}$ 是一个 $\mathbf{1\times4}$ 行矩阵，

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$ 是一个 $\mathbf{3\times1}$ 列矩阵，

$\mathbf{(4)}$ 是一个 $\mathbf{1\times1}$ 矩阵.

5. 若 $a_{ij}=0$，则称 A 为**零矩阵**，记做 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$ 。

6. 对角矩阵：主对角线元素不全为0，其余元素都为0；记做

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

7. 单位矩阵：主对角元素都为1，其余元素都为0。

记做

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

8. 1阶方阵和1阶行列式与一个数等同。

三、矩阵和行列式的区别和联系

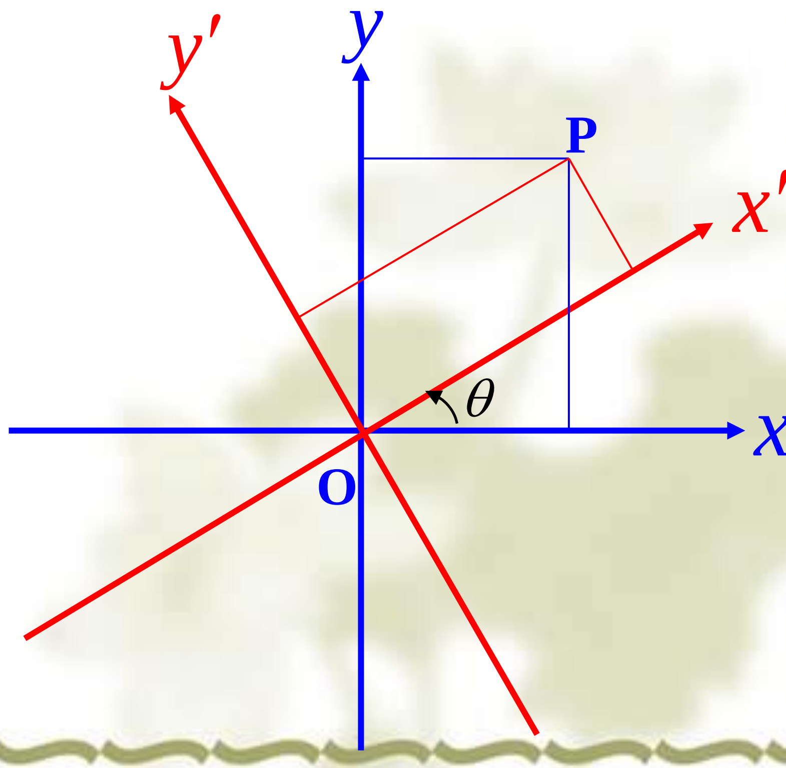
矩阵	数表	行数未必等于列数	无行列式性质
行列式	数值	行数等于列数	5个性质

联系：对于n阶矩阵，可以求它的行列式。

四、线性变换

1. 平面旋转变换

坐标系 xoy，绕原点O逆时针旋转，得$x'oy'$坐标系



设点P在xoy中坐标为(x, y)，在$x'oy'$中坐标为(x', y')，设旋转角为θ，逆时针方向为正，则坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

旋转矩阵为 $$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. 线性变换

定义2.2 已知$m \times n$个数$a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$若变量$x_1, x_2, \cdots, x_m$能用变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$线性的表示，即

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \qquad \vdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n. \end{cases}$$

称之为从变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$到变量$x_1, x_2, \cdots, x_m$的线性变换，其中$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$称为系数矩阵。

注意：线性变换由系数矩阵唯一确定，即

$$\boldsymbol{T} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

因此，可以利用矩阵来研究线性变换。如

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{对应}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵}$$

我们把这样的线性变换称之为**恒等变换**。