线性代数

第 三 章

矩阵的初等变换

矩阵这一数学概念能够与工程技术问题相结合，成为表达手段，主要依赖于它的种种手段和变换。上一章我们介绍了矩阵的基本运算，但用来解决的实际问题很有限。这一章我们来学习矩阵的一种重要的变换——初等变换。利用初等变换可以求矩阵的秩、求解线性方程组、求逆矩阵、化简二次型等。

§ 3.1　矩阵的秩

一、子式

回忆：在行列式中，余子式的概念

定义3.1　在 $m\times n$ 的矩阵A中，任取k行与k列$(k\le\min(m,n))$，位于这些行和列交叉处的 k^2个元素，按原来的次序所组成的k阶行列式，称为A的一个**k阶子式**. 记做 D_k.

对于给定的k，$m\times n$ 阶的矩阵A不同的k阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个.

例如，对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

有二阶子式 $C_4^2C_3^2=18$ 个

有三阶子式 $C_4^3C_3^3=4$ 个

没有四阶子式

二、矩阵的秩

定义3.2 在 $m \times n$ 阶的矩阵A中，若

(1) 有某个r阶子式 $D_r \neq 0$；

(2) 所有的$r+1$阶子式 $D_{r+1} = 0$（如果存在的话）；

则称r为A的秩. 记做 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$， 或者 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$.

规定：零矩阵的秩为0,即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{O} = 0$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

- 矩阵秩的含义

A的所有r＋1阶子式都为0

$\Rightarrow$ $D_{r+2} = ?$ A的所有r＋2阶子式也都为0

$\Rightarrow$ A的所有大于r＋2阶的子式也都为0

$\Rightarrow$ 数r=rank$A$是矩阵A中子式不为0子式的最高阶数

性质

1. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} \le \min(m, n)$;
2. $k \neq 0$时, $\operatorname{rank}(k\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$;
3. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$;
4. $\boldsymbol{A}$中某个$D_r \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \ge r$;
5. $\boldsymbol{A}$中所有$D_{r+1} = 0 \Rightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \le r$;

例1

已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的秩.

解 在这个矩阵中，存在一阶子式

$$|3| = 3 \neq 0$$

存在二阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

下面计算它的三阶子式.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

在矩阵*A*中，所有的三阶子式都为0，存在不为0的二阶子式，所以rank(*A*)=2.

➢ 特殊矩阵

定义3.3 设A是$m\times n$矩阵

(1) 若$\text{rank}A=m$ (A的行数)，则称A为**行满秩矩阵**；

(2) 若$\text{rank}A=n$ (A的列数)，则称A为**列满秩矩阵**；

设A是$n\times n$阶方阵

(1) 若$\text{rank}A=n$，则称A为**满秩矩阵**；

(2) 若$\text{rank}A\neq n$，则称A为降秩矩阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}} & \begin{matrix}0&5\\2&4\\1&3\end{matrix}\end{pmatrix}$$

A有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

所以A是行满秩矩阵

再如

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\ \boxed{\begin{matrix}2&2&0\\0&3&5\\0&0&1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

B中有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}2&2&0\\0&3&5\\0&0&1\end{vmatrix}=6\neq 0$$

所以B是一个列满秩矩阵.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&4&4\end{pmatrix}$$

因为C的行列式

$$\det C=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&4&4\end{vmatrix}=12\neq 0$$

所以C是一个满秩矩阵.

命题：方阵A满秩 $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$\Leftrightarrow$ A可逆

$\Leftrightarrow$ A非奇异