§ 4.2　向量组的线性相关性

一、线性相关与线性无关

1. 线性组合、线性表示

定义4.6　设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 均为 n 维向量，若有一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的**线性组合**. 称 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 为组合系数. 又称 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性表示**.

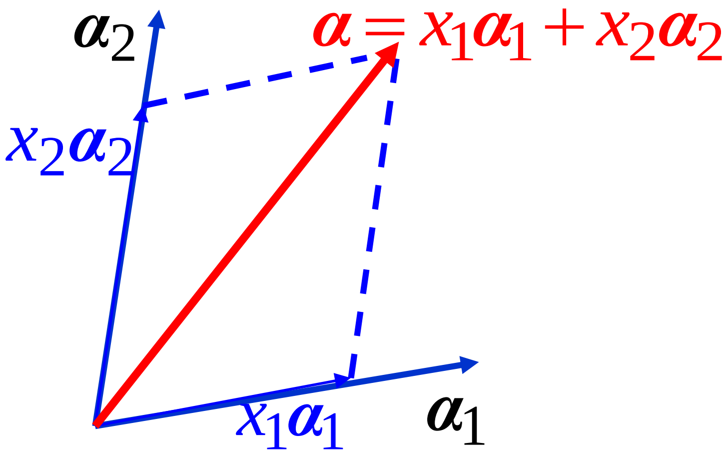
例如

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (2,-3,1), \boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 线性表示为　$\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

(2) 向量组 $\alpha_1=(1,2,-1), \alpha_2=(2,-3,1), \alpha_3=(4,1,-1)$，则有

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$$

因此，α_3是α_1和 α_2 的线性组合.



2. 线性表示的矩阵形式，与线性方程组的关系

例1 设向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \beta_4=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

试判断 β_4 是否可由 β_1,β_2,β_3 线性表示？如果可以的话，求出一个线性表示式.

解 β_4 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在一组数 k_1,k_2,k_3 使得

$$\beta_4 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 + k_2 + 3k_3 = 5 \\ \qquad k_2 + \ \ k_3 = 3 \\ -k_1 + k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

有解

而

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&3&5\\0&1&-1&3\\-1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&2\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

取特解 $k_1=2,k_2=3,k_3=0$

所以，β_4可由β_1,β_2,β_3线性表示为

$$\beta_4=2\beta_1+3\beta_2+0\beta_3$$

➢ 判断数字向量是否可由另一组向量线性表示——转化为非齐次线性方程组是否有解

3. 线性相关、无关概念

➢ 向量的线性相关性是向量在线性运算下的一种性质，是线性代数中很重要的一个概念。

以三维向量的几何背景为例。

若两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线， 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1$

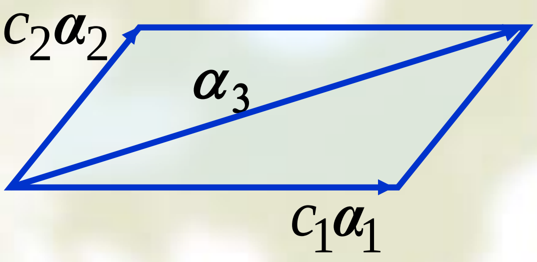
$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$

若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线， 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq l\boldsymbol{\alpha}_1 \quad (\forall l \in \boldsymbol{R})$

$\Leftrightarrow$ 只有当 k_1, k_2 全为0时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$

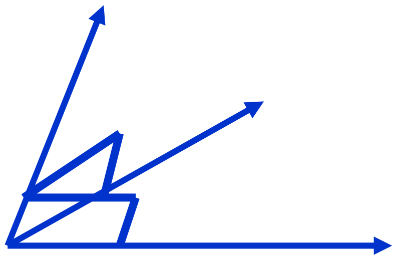
若三个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面，则其中至少有一个向量可由另外两个向量线性表示

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$



$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面， 则任一个向量都不能由另外两个向量线性表示



$\Leftrightarrow$ 只有当 k_1,k_2,k_3 全为0时，才有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

定义4.7 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，

(1) 若有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性相关**;

(2) 否则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性无关**;

“否则” $\Leftrightarrow$ 没有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\Leftrightarrow$ 对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

$\Leftrightarrow$ 只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 的时候，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\Leftrightarrow$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，只有

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

特别地：(1) 对单个向量 α 组成的向量组，

$$\begin{cases}\alpha=0 & \text{线性相关}\\ \alpha\neq 0 & \text{线性无关}\end{cases}$$

(2) 一组同维向量，若包含零向量，则必定线性相关.

注意：对任意一组向量，不是线性相关就是线性无关

例2 判断例1中向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性相关性.

解法一 由例1知

$$\beta_4 = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 0\beta_3$$

即有

$$2\beta_1 + 3\beta_2 + 0\beta_3 - 1\cdot\beta_4 = 0$$

而 $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 0, k_4 = -1$ 不全为零，所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

解法二 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_4$，使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 0$$

即 $$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=0$$

比较上式两端向量的对应分量，得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+3k_3+5k_4=0\\ \quad\quad k_2+\ \ k_3+3k_4=0\\ -k_1+k_2-k_3+k_4=0\end{cases}$$

可得一组非零解 $k_1=2,k_2=3,k_3=0,k_4=-1$，所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

- 判断数字向量组线性相关或无关的方法——齐次线性方程组是否有非零解

例3 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，判断向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$的线性相关性.

解 设有一组数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+(k_3+k_1)\alpha_3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 \qquad +k_3=0 \\ k_1+k_2 \qquad =0 \\ \qquad k_2+k_3=0 \end{cases} \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性无关}$$

又因为其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

所以此方程组只有零解，即

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例4 判断n维向量组

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的线性相关性.

解 设有一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0$$

即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0$$

所以只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$时上式才成立，所以此向量组线性无关.

一般地，称向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为单位坐标向量组.

例5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是两两正交的非零向量组，证明该向量组线性无关.

证 设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

把上式两端同时与 α_i 作内积，有

$$k_1[\alpha_1,\alpha_i]+k_2[\alpha_2,\alpha_i]+\cdots+k_i[\alpha_i,\alpha_i]+\cdots+k_m[\alpha_m,\alpha_i]=0$$

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交,所以

$$[\alpha_i,\alpha_j]=0 \quad (i\neq j)$$

所以 $k_i[\alpha_i,\alpha_i]=0$

又因为 $[\alpha_i,\alpha_i]>0$

所以一定有 $k_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

二. 线性相关性判定定理

1. 线性相关性与线性表示的关系

定理4.1：设$m\geq 2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$其中至少有一个可由其余的$m-1$个线性表示

证：必要性.设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关. 由定义,$\exists$不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$

若$k_l\neq 0\ \ (1\leq l\leq m)$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}_l=\left(-\frac{k_1}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\left(-\frac{k_{l-1}}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_{l-1}+\left(-\frac{k_{l+1}}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_{l+1}+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_l}\right)\boldsymbol{\alpha}_m$$

充分性. 设$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leq i\leq m)$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,

则有一组数$k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$,使

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

即有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$

其中$k_i=-1$,可见$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为零,$\therefore\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关. **证毕**

推论：两个向量α_1,α_2线性相关

$\Leftrightarrow \exists k$，使$\alpha_2 = k\alpha_1$ 或$\alpha_1 = k\alpha_2$ $\Leftrightarrow$ α_1与α_2对应分量成比例

注：

(1) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，
则 α_1 可用 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. ……………………………(×)

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，
则其中任一个可用其余m-1个线性表示. …………………(×)

(3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，
则其中有一个可用其余m-1个线性表示. …………………(√)

(4) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中,有一个不能用其余m-1个线性表示，
则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. …………(×)

例: $\alpha_1=(1,0,0),\ \ \alpha_2=(1,1,0),\ \ \alpha_3=(-1,-1,0),$

α_1 不能用 α_2,α_3 线性表示，

但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关：

$$\mathbf{0}\alpha_1+\mathbf{1}\alpha_2+1\alpha_3=\boldsymbol{0}.$$

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中,任一个都不能用其余 m-1个线性表示,
则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. ……………….(√)

说明: 此命题为定理4.1的逆否命题.

(6) 若0可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,
则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. ………………………………(×)

(7) 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是A的列向量组,
齐次线性方程组 $Ax=0$, 则

- $Ax=0$ 有非零解 ⇔ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关. ……………….(√)
- $Ax=0$ 只有零解 ⇔ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关. ……………….(√)

说明: $Ax=0 \Leftrightarrow x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$

2. 向量组的线性相关性与其部分组的关系

定理4.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且表示形式唯一(系数唯一).

证明 $\because$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, $\therefore\exists$一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 不全为零, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$$

可设 $k\neq 0$. 若不然, 假设 $k=0$, 则由上式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 得$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,

与 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 不全为零矛盾.

$\therefore k\neq 0$. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 表示为

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m$$

(唯一性) 设 $\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的两种线性表示:

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\qquad \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

$$\Rightarrow (k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_m=l_m$

证毕

定理4.3： 向量组的部分向量线性相关

$\Rightarrow$ 此向量组线性相关。

证：不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中，部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ $(r\le m)$ 线性相关，

$\therefore \exists$不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\boldsymbol{0}$$

$\therefore$可令$k_{r+1}=\cdots=k_m=0$，使下式成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_m\alpha_m=\boldsymbol{0}$$

推论1： 含零向量的向量组一定线性相关.

推论2：（定理4.3的逆否命题）

向量组线性无关 $\Rightarrow$ 任一部分向量组线性无关.

注：

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，

则其中至少有m-1个向量线性相关. ………………….. (×)

例: $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(1,1,0)$,

线性相关: $\alpha_1+\alpha_2+(-1)\alpha_3=\boldsymbol{0}$

但 α_1与α_2,

α_2与α_3,

α_3与α_1,

每二个都线性无关.

(9) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意m-1个向量都线性无关，

则此组向量线性无关. ………………….. (×)

见(8)之例.此命题为命题(8)的逆否命题，故也错.

(10) 若向量组线性相关，

则它必有一部分向量线性相关. ………………….. (×)

定理4.3的逆命题, 不成立.

例6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}\ (m\geq 3)$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，试讨论：

(1) α_1 能否由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示？

(2) α_m 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示？

解 (1) 因为 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以其部分组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 也线性无关。

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性相关，则由定理4.2知，α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示。

(2) （反证）假设 α_m 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示

即存在数 $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_{m-1}$，使得

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} \qquad (1)$$

由第一问结论可知 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示

即存在数 $l_2,l_3,\cdots,l_{m-1}$，使得

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + \cdots + l_{m-1}\alpha_{m-1}$$

代入(1)式得：

$$\alpha_m = (k_1 l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1 l_3 + k_3)\alpha_3 + \ldots + (k_1 l_{m-1} + k_{m-1})\alpha_{m-1}$$

即 α_m 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，

这与已知 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾。

所以假设不成立。即 α_m 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

3.用向量组的矩阵秩判定线性相关性

定义4.8 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 A 的行向量组，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量组.

说明： 给定矩阵A，

把A按行分块，每一行看作一个向量；

把A按列分块，每一列看作一个向量；

反之,给定一组同维行向量，以它们为行可排成一个矩阵；

给定一组同维列向量，以它们为列可排成一个矩阵.

定理4.4

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}<m$ (向量个数, $\boldsymbol{A}$ 的行数)

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}<n$ (向量个数, $\boldsymbol{A}$ 的列数)

定理4.4'

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}=m$ (向量个数, $\boldsymbol{A}$ 的行数)

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}=n$ (向量个数, $\boldsymbol{A}$ 的列数)

证明 (只证定理4.4的结论1)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\exists$一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

即 $$k_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$
$$+k_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+k_m(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})=(0,0,\cdots,0)$$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{m1}k_m=0 \\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{m2}k_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{mn}k_m=0 \end{cases}$$

即（矩阵形式） $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0}$ $\vec{\boldsymbol{k}}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)^{\mathrm{T}}$

有非零解

$\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=rank\boldsymbol{A}<m$（未知数个数）

例7 判断如下向量组的线性相关性

$$\alpha_1=(2,2,-1,1,4),\alpha_2=(2,,-1,2,0,3),\alpha_3=(-1,2,2,-4,2)$$

解　以每个向量为行，构造矩阵，作初等行变换化为行阶梯形，求秩

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-1&1&4\\ 2&-1&2&0&3\\ -1&2&2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&2&-4&2\\ 0&3&6&-8&7\\ 0&0&-9&9&-6\end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} A=3$, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

说明

(1) 只需判断向量组的线性相关性时，可用定理**4.4;**

(2) 还需要求向量组的极大无关组时，要用定理**4.7.**

推论1：在 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中，若 $m = n$，

即向量个数＝向量维数（此向量组可构成方阵A），则

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

推论2：在 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中，若 $m > n$，

即向量个数 > 向量维数，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关.

即: 含有 n+1 个或更多个向量的 n 维向量组，必定线性相关.

证: $\mathrm{rank}A < \min\{m,n\} = n < m$.

推论2′：在 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中，若 $m < n$，

即向量个数<向量维数，则

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $rankA < m$

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $rankA = m$

推论3：设两个向量组

$$T_1:\ \boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir}),\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$T_2:\ \boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1},\cdots,a_{in})\qquad i=1,2,\cdots,m$$

则：(1) T_1 线性无关 $\Rightarrow$ T_2 线性无关；

(2) T_2 线性相关 $\Rightarrow$ T_1 线性相关.

证：(1) 构造二个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times r}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}_2)_{m\times n}$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的子块，$\therefore rank\boldsymbol{A}\le rank\boldsymbol{B}\le m$ ($\boldsymbol{B}$ 的行数)

于是 T_1 线性无关 $\Leftrightarrow$ $rank\boldsymbol{A}=m$ $\Rightarrow$ $rank\boldsymbol{B}=m$

故 T_2 线性无关.

(2) 是 (1) 的逆否命题.

注(11) 设T_1线性相关，则T_2也线性相关. (×)

例： T_1： $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0)$， 线性相关

T_2： $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)$， $\boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,0)$， 线性无关

推论3的进一步推广：

(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关. 若对每个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$，在若干个相同的位置处，任意地添加或插入分量，则所得的新向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$仍然线性无关.

(2) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关. 若对每个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$，把序号相同的若干分量都按同一顺序进行调换，则所得的新向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$仍然线性无关.

(3) 按上面(1)与(2)的方法联合操作，仍然有相同结论.

定理 4.5 对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，设正整数 $r\le\min(m,n)$

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 中某个 r 阶子式 $D_r\ne 0$,

则 $\boldsymbol{A}$ 的含 D_r 的 r 个行向量线性无关；

且 $\boldsymbol{A}$ 的含 D_r 的 r 个列向量线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 中所有 r 阶子式等于零，

则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 r 个行向量线性相关.

且 $\boldsymbol{A}$ 的任意 r 个列向量线性相关.

证明 只证列向量情形，行向量证法相同。

(1) 记A 的列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$.

设子式 $D_r(\ne 0)$ 位于A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 列，令矩阵

$$\boldsymbol{B}=(\underbrace{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}}_{r\text{列}})\ \Rightarrow\ rank\boldsymbol{B}=r\ (\boldsymbol{B}\text{的列数})$$

$\therefore$由定理4.4, 含D_r的r个列向量$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$线性无关

（2）

任取$\boldsymbol{A}$ 的 r 个列向量$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$，构成矩阵$\boldsymbol{B}$ 同上.

$\therefore \boldsymbol{B}$ 的任一个 r 阶子式(也是$\boldsymbol{A}$ 的r阶子式)等于零,

$\therefore rank\boldsymbol{B} < r \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性相关.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\right)$$

(1) 左上角子式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关;

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(2) 右下角子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

$\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

(3) 所有三阶子式$=0$ $(\because rank\boldsymbol{A}=2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \text{线性相关;}\\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\ \text{中任意三个线性相关;}\end{cases}$$

(4) 记$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $rank\boldsymbol{A}_1=1$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}_1$ 的所有二阶子式$=0$ $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;

(5) $\boldsymbol{\beta}_1$ 与$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_2$ 与$\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.