中值定理

微分中值定理及其应用

一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理 $\xleftarrow{f(a)=f(b)}$ 拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=0$$

$$F(x)=x$$

$$f(a)=f(b)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F(x)=x$$

$$n=0$$

柯西中值定理 泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用逆向思维，设辅助函数． 一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用罗尔定理，可用原函数法找辅助函数．

(2) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理．

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理．

(4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导数用中值定理．

(5) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

例1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 **[1, 2]** 上满足拉格朗日定理条件, 则中值 $\xi = \underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\boxed{\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3}$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x)=0$ 有 $\underline{\ 3\ }$ 个根, 它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 内.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\ \frac{3}{2}\ }$

$$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$$

分析: 原式 $\displaystyle=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}(3+0)$

例2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$在 (a,b) 内有界.

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 界于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad |f(x)| = |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)|$$

$$\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0|$$

$$\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \qquad \text{(定数)}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证.

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证: 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$, 即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件,故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad \xi,\eta\in(a,b)$

例4. 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下述等式

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 **(0 , 1)** 内至少有一个实根 .

证: 令 $F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 则可设

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

显然, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理知存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 ξ.

例5. 设函数 $f(x)$ 在$[0, 3]$ 上连续, 在$(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$ 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$. **(03考研)**

证: 因 $f(x)$ 在$[0, 3]$上连续, 所以在$[0, 2]$上连续, 且在$[0, 2]$上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \Longrightarrow m\le \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because f(c)=f(3)=1,$ 且 $f(x)$ 在$[c,3]$ 上连续, 在$(c,3)$ 内可导, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$. ■

例6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，在 $(0,1)$ 内二阶可微，且 $f(0)=f(1)=0$, 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0.$$

分析： $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2 f'(x))'\Big|_{x=\xi}=0$$

作辅助函数 $F(x)=x^2 f'(x)$. 但 $F(1)\neq 0$,

可考虑，在 $(0,1)$ 内某点 η 处，$F(\xi)=\eta^2 f'(\eta)=0$.

由罗尔定理，可得 $\eta\in(0,1)$, 使 $f'(\eta)=0$, 即

$$F(\xi)=0.$$

证： 对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理，可得 $\eta\in(0,1),$

使 $f'(\eta)=0,$

令 $F(x)=x^2 f'(x),$ 则

$$F(0)=0, F(\eta)=\eta^2 f(\eta)=0,$$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1),$ 使得 $F'(\xi)=0,$

即 $$2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0,$$

因 $\xi\neq 0,$ 故 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0.$

例7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$, 且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1.$

证: $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\frac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $\quad 0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore\quad |f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1,\quad x\in[0,1]$$

例8. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$,但 $f(x)\neq x$.

证明:在$(0,1)$内必有x_1, x_2存在,使$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

证明: 因为$f(x)$在$[0,1]$上可导, $\therefore f(x)$在$[0,1]$上连续.

又 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 由介值定理,存在$\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}$.

在$[0,\xi]$及$[\xi,1]$上分别对$f(x)$用拉格朗日中值定理

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(x_1),\qquad \text{即}\ \frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{1}{2\xi}=f'(x_1).$$

$$\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(x_2),\qquad \text{即}\ \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\xi}=\frac{1}{2(1-\xi)}=f'(x_2).$$

$$\therefore \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2\xi+2(1-\xi)=2.\qquad (0<x_1<x_2<1)$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}) \quad (a\neq 0)$

解法1 利用拉格朗日中值定理求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}) \qquad (\xi\text{在}\ \frac{a}{x}\ \text{与}\ \frac{a}{x+1}\text{之间})$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\frac{a}{1+\xi^2}=a \qquad x\to+\infty,\quad \xi\to 0^+$$

原式$=a$

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$\because \lim_{x\to+\infty}x^2\left\{\left[\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{x+1}+o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ax^2}{x(x+1)}+\frac{+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=a$$

原式$=a$

解法3 利用洛必达法则

$$原式 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

令 $t = \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$

例10 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$　　(令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\frac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}$ **(用洛必达法则)**

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$ **(继续用洛必达法则)**

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$

例11 已知$f(x)$在$x=a$处可导,且$f(a)>0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)}{f(a-x)}\right]^{\frac{1}{x}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right]}$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\left[\frac{[f(a+x)-f(a-x)]}{x\,f(a-x)}\right]$$

$$\boxed{\exp x=e^{x}}$$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(a-x)}\}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(a)}\left[\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right]$$

$$=\exp\frac{2f'(a)}{f(a)}$$

$$\because \ln\left[1+\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right]\sim\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1=\frac{f(a+x)-f(a-x)}{f(a-x)}$$