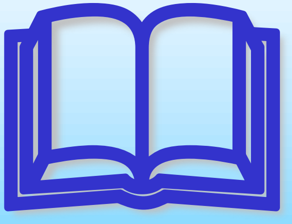
第一部分：

函数的极限与连续



第一部分　函数的极限与连续

一 基本要求

1. 正确理解极限的概念, 会叙述各种极限的ε—N,ε—δ式定义.(对简单的函数, 要求在给定ε后能找出 N 或δ).

2. 熟练掌握极限的性质和四则运算法则.

3. 掌握极限的各种求法。（对复杂的未定式暂不作要求）。

4. 了解无穷小、无穷大概念；掌握无穷小的比较；熟悉常见的等价无穷小。

5. 正确理解连续的概念.

6. 掌握间断点的分类.

7. 掌握闭区间上连续函数的三个性质（有界性、可以取到最值、介值定理）.

二 基本题型例题（8题）

三 课堂练习

1. 判断是非（18题）.
2. （基本极限）口答30题.
3. 多项选择（10题）.
4. 求极限（6题）.

一 基本要求 1. 函数极限定义一览

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$,恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$ …… $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0$ …… $f(x)>M$	$\forall M>0$ …… $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	…… $0<x-x_0<\delta$ ……	$f(x_0+0)=\infty$?		
$x\to x_0^-$	$0<x_0-x<\delta$		?	
$x\to\infty$	…… $\exists N>0$ … $\lvert x\rvert>N$ ……		$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$?	
$x\to+\infty$ (含 $x=n$)	… $x>N$	?		$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=-\infty$?
$x\to-\infty$	… $x<-N$		$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$?	

2. 极限的性质

（1） 极限的唯一性.

（2） 极限的局部保号性.

$\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有 $f(x) > 0$

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\begin{cases} \text{当 } A > 0，\text{则 } f(x) \text{局部保号.} \\ \text{当 } f(x) > 0\ (\text{或} \geq 0),\ \text{则 } A \geq 0. \end{cases}$

（3） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x) = A + \alpha$.

其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$

3. 极限求法小结

（1） 利用函数连续性求极限——代入法.

（2） 用恒等变形消去零因子法求极限.

（3） 用同除一个函数的方法求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限.

（4） 利用两个重要极限求极限.

（5） 利用无穷小性质求极限.

（6） 利用等价无穷小代换求极限.

（7） 利用极限存在的两个准则求极限.

（8） 从左、右极限求分段函数在分界点处的极限.

*（9） 用洛必达法则求未定式的极限.

4. 常见的等价无穷小

当 $x\to0$ 时

(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

(2) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

(3) $a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$

(4) $\sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{2}$

$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{n}$ 一般：$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

(5) $x^2 + x \sim x$ $x - \sin x = o(x)$

5. 函数连续的定义

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = f(a)$， 则称 $y=f(x)$在点 a 连续。

$f(x)$在点a 处：(1) 连续　　(2) 有极限　　(3) 有定义

三者关系是：

(1) $\Rightarrow$ (2)

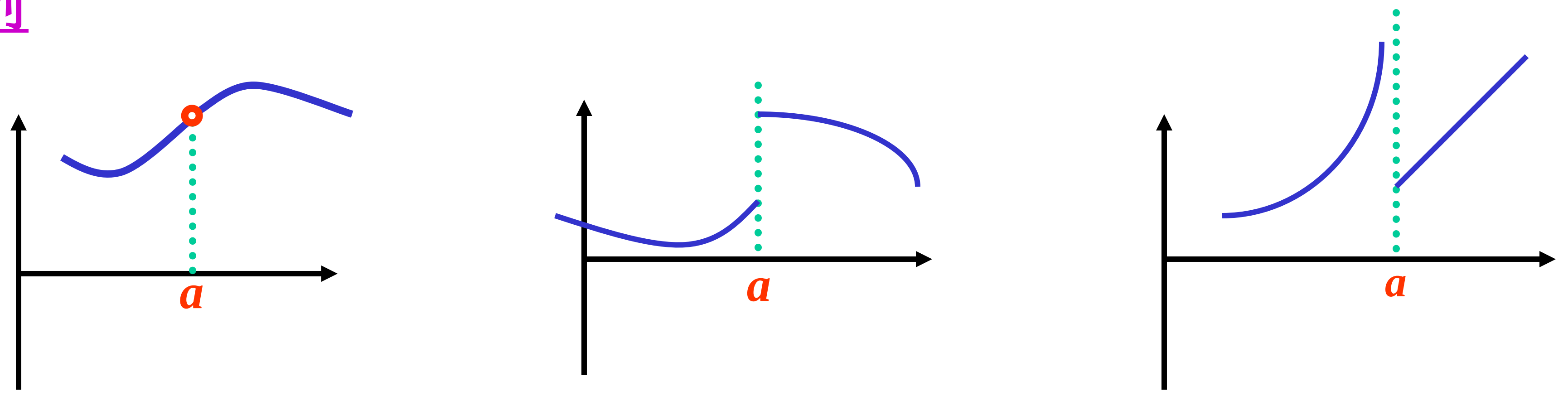
(1) $\Rightarrow$ (3)

箭头不可逆，请举例。

6. 间断点的分类

- 间断点
  - 第一类
    - 可去型： 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在.
    - 不可去型: $f(a-0), f(a+0)$ 都存在但不等.
  - 第二类：非第一类（含无穷型、振荡型）

例



二　基本题型例题

1. 用ε—N定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$

分析：$\left|\dfrac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\dfrac{2}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$，只需要 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，

即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$

证明：$\forall\varepsilon>0$，总$\exists N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，

当 $n>N$时，就有$\left|\dfrac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$

问题：上述证明关键在那里？

2. 用$\varepsilon-\delta$定义证明 $\lim\limits_{x\to1}2(x+1)=4$

分析：$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|2(x+1)-4|=2|x-1|<\varepsilon$，

只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当

$0<|x-1|<\delta(=\dfrac{\varepsilon}{2})$时，恒有 $|2(x+1)-4|<\varepsilon$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}2(x+1)=4.$

注:此类极限证明的关键是

$\forall\varepsilon>0$，从解$|f(x)-A|<\varepsilon$着手找δ . 不是以x为未知数，而是以$|x-x_0|$为未知数， 解得$0<|x-x_0|<\delta$ 的式子, 以求出δ .

3. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(3\sin 2x)$

由连续性　原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(3\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})=\ln 3$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan 2x}$

当 $x\to 0$ 时　$\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x$

$\tan 2x\sim 2x$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$

解： $\sin 2x \sim 2x$ $\quad \sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}(x+x^2) \sim \dfrac{x}{2}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{2x}=\dfrac{1}{4}$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} a+x, & x\geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$, 当$a$为何值时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在?

解： $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$

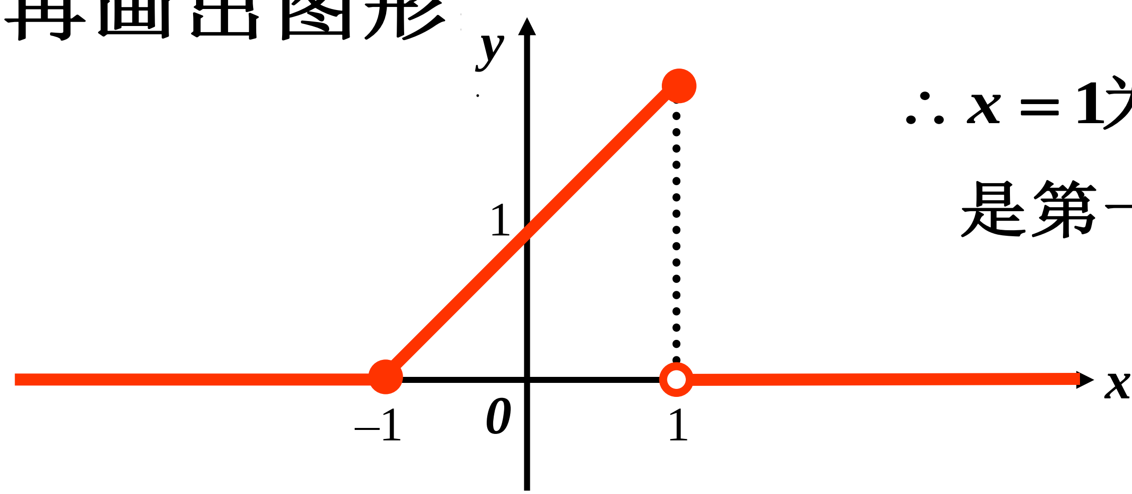
$\therefore$ 仅当 $a=1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在, 等于1.

8. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点，并判断间断点类型.

解： 先求出极限

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x & |x|<1\\ 0 & |x|>1\\ 1 & x=1\\ 0 & x=-1\end{cases}$$

再画出图形



$\therefore x=1$ 为间断点，

是第一类间断点

三 课堂练习

1. 判断是非：(是：√；非：×，后者请举反例)

(1) 收敛数列必有界。 (√)

(2) 有界数列必收敛。 (×)

(3) 无穷小乘有界量还是无穷小。 (√)

(4) 无穷大乘有界量还是无穷大 (×)

(5) 无穷小是绝对值越来越小的量。 (×)

(6) 两个函数积的极限等于极限之积。 (×)

(7) 数列 1，0，2，0，3，0，4，0，5，0,……

是无穷大 (×), 是无穷小 (×),

是有界量 (×), 是无界量 (√).

(8) 无穷个无穷小之积还是无穷小. (×) 反例?

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ (×)

(10) 有限区间上的连续函数必有界。 (×)

(11) 若 $f(x)$ 在点 a 连续,则 $f(x)$ 在点 a 有极限. (√)

(12) 若 $f(x)$在点 a有极限,则 $f(x)$ 在点 a 连续. (×)

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (√)

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ (×)

(15) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$ (×)

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0$ (×)

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (√)

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (×)

2.基本极限. 口答 30题

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\underline{\ 0\ }$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\underline{\ 1\ }$,

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\underline{\ 0\ }$,

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=\underline{\sin 1}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\ 0\ }$,

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\ 1\ }$,

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x=$ 不存在

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\underline{\ 0\ }$,

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\ 0\ }$,

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\ 0\ }$.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = \underline{\ 0\ }$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x}{x} = \underline{\ 1\ }$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{100} = \underline{\ 1\ }$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x} = \underline{\ e\ }$

(15) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x} = \underline{\ 2\ }$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x} = \underline{\ \dfrac{1}{e}\ }$

(17) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x} = \underline{\ \dfrac{1}{e^2}\ }$

$$(18)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\underline{\ 1\ }$$

$$(19)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\underline{\ -1\ }$$

$$(20)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}=\underline{\text{不存在}}$$

$$(21)\ \lim_{x\to 1^+}2^{\frac{1}{1-x}}=\underline{\ 0\ }$$

$$(22)\ \lim_{x\to 1^-}2^{\frac{1}{1-x}}=\underline{\ \infty\ }$$

$$(23)\ \lim_{x\to 1}2^{\frac{1}{1-x}}=\underline{\text{不存在}}$$

$$(24)\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\underline{\ \frac{\pi}{2}\ }$$

$$(25)\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=\underline{\ -\frac{\pi}{2}\ }$$

$$(26)\ \lim_{x\to\infty}\arctan x=\underline{\text{不存在}}$$

$$(27)\ \lim_{x\to\infty}|\arctan x|=\underline{\ \frac{\pi}{2}\ }$$

$$(28)\ \lim_{x\to\infty}(\arctan x)^2=\underline{\ \frac{\pi^2}{4}\ }$$

(29) $f(x)=\begin{cases} 5x, & x\le 0 \\ 2x, & 0<x\le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & x>1 \end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

解: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

(30) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ k, & x=0 \\ \dfrac{x}{\tan x}, & x<0 \end{cases}$,

问当 $k=?$ 时在 $x=0$点左连续?

解: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\tan x}=1$

$$f(0)=k$$

故当k=1时 $f(x)$在点 $x=0$左连续

3. 多项选择

(1) 若 $f(x-1)=x(x-1)$，则 $f(x)=$ ___A___ .

(A) $x(x+1)$　　(B) $(x-1)(x-2)$

(C) $x(x-1)$　　(D) 不存在

(2) 下列函数中奇函数有 __A B C D__ .

(A) $x^2\sin x$　　(B) $\dfrac{|x|}{x}$

(C) $\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　　(D) $\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

(3) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，下列函数中偶函数有 __BCD__ .

(A) $y=|f(x)|$　　(B) $y=f(x^2)$

(C) $y=f(x)+f(-x)$　　(D) $y=C$

(4) 下列函数中单调函数有 $\underline{\text{A B C D}\qquad}$.

(A) $y = 10^x$ (B) $y = \text{sh}x$

(C) $y = \arcsin x,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, (D) $y = 2 - \lg(x+1)$

(5) 函数 $y = |\sin x|$ 的周期是 $\underline{\quad\text{C}\qquad}$.

(A) 4π (B) 2π (C) π (D) $\dfrac{\pi}{2}$

(6) 数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限分别是 a 与 b，且 $a \neq b$，则数列 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_n, y_n, \cdots$ 的极限是 D ________.

(A) a　　(B) b　　(C) $a+b$　　(D) 不存在.

(7) 下列变量在给定变化过程中是无穷小量的有 A D ______.

(A) $2^{-x}-1\ (x \to 0)$　　(B) $\dfrac{\sin x}{x}\ (x \to 0)$

(C) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3-2x+1}}\ (x \to +\infty)$　　(D) $\dfrac{x^2}{x+1}\left(3-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

$(x \to 0)$

(8) 函数 $y=\dfrac{x(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}$ 在过程 <u>A C D</u> 中是无穷小量.

(A) $x \to 0$　(B) $x \to 1$　(C) $x \to (-1)^+$　(D) $x \to +\infty$

(9) $f(x)$在点 x 处有定义，是 $f(x)$在 x 处连续的 <u>A</u>.

(A) 必要条件　(B) 充分条件

(C) 充要条件　(D) 无关条件

(10) 当 $x \to \infty$ 时，若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} \sim \dfrac{1}{x+1}$,则a,b,c之值为 <u>AB</u>.

(A) $a=0,b=1,c=1$　(B) $a=0,b=1,c$为任意常数.

(C) $a=0,b,c$为任意常数.　(D) a,b,c均为任意常数.

4.求极限

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2003}}{n^{x}-(n-1)^{x}}=\dfrac{1}{2004}$,求满足此式的正整数$x$的值.
(其中x是正整数).

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n}-x^{-n}}{x^{n}+x^{-n}}$.

(4) $f(x)=\begin{cases} e^{x-2}, & x<2 \\ k, & x=2, \\ ax+4, & x>2 \end{cases}$ 当 a 为何值时,$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$存在?
k为何值时,$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$?

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m、n为整数)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}$, $a_1,a_2,\cdots,a_k$为k个正数.

谢谢使用

返回首页

习题课

附 (1)

叙述 $f(x_0+0)=\infty$ 的定义:

$\forall M>0,$ $\exists \delta>0.$

当 $0<x-x_0<\delta,$

恒有 $|f(x)|>M.$

附 (2)

叙述 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ 的定义:

$\forall\ M>0,\qquad \exists\ N>0.$

当 $|x|>N$,

恒有 $f(x)>M.$

附 (3)

叙述 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = -\infty$ 的定义:

$\forall\ M > 0,\qquad \exists\ N > 0.$

当 $n > N$,

恒有 $f(x) < -M.$

附 (4)

叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ 的定义:

$\forall M > 0$, $\exists N > 0$.

当 $x < -N$,

恒有 $f(x) > M$.

附 (5)

叙述 $f(x_0-0)=+\infty$ 的定义:

$\forall\ M>0,\qquad \exists\ \delta>0.$

当 $0<x_0-x<\delta,$

恒有 $f(x)>M.$

附 (6)

叙述 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ 的定义:

$\forall\ M > 0,$ $\exists\ N > 0.$

当 $x > N,$

恒有 $|f(x)| > M.$

三1. 无穷个无穷小之积不一定是无穷小的例子:

$x_n^{(1)}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(1)} \to 0 (n \to \infty)$

$x_n^{(2)}: \quad 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(2)} \to 0 (n \to \infty)$

$x_n^{(3)}: \quad 1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(3)} \to 0 (n \to \infty)$

$x_n^{(4)}: \quad 1, 1, 1, 4^3, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(4)} \to 0 (n \to \infty)$

$x_n^{(5)}: \quad 1, 1, 1, 1, 5^4, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(5)} \to 0 (n \to \infty)$

$x_n^{(6)}: \quad 1, 1, 1, 1, 1, 6^5, \frac{1}{7}, \cdots\cdots \qquad x_n^{(6)} \to 0 (n \to \infty)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$

一般的，第 m 个数列 $x_n^{(m)}$ （$m=1, 2, \cdots\cdots$）

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & 1 \le n \le m-1 \\ m^{m-1} & n = m \\ \frac{1}{n} & n > m \end{cases}$$

每一个数列 $x_n^{(m)}$ 都是无穷小，但它们的乘积

$$y_n = x_n^{(1)} \cdot x_n^{(2)} \cdot x_n^{(3)} \cdot x_n^{(4)} \cdots\cdots \equiv 1$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$

在这个例子中，无穷个无穷小之积不是无穷小.

三$_4$ 求极限：（1）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2003}}{n^x-(n-1)^x}=\dfrac{1}{2004}$，求满足此式的正整数$x$ 的值.

(其中x是正整数).

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2003}}{n^x-(n-1)^x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2003}}{xn^{x-1}-\frac{1}{2}x(x-1)n^{x-2}+\cdots+(-1)^x}$$

已知 $\dfrac{1}{2004}$

故有　$x-1=2003$　$\therefore\ x=2004.$

求极限：（2）

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x+\tan x-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{\sin x-\tan x}\cdot\frac{\sin x-\tan x}{(1+\tan x)\sin x}}$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(1+\tan x)\sin x}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{\cos x})=0$$

$$\therefore \text{原式}=e^{0}=1$$

求极限：（3） $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$

解: $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

$$=\begin{cases} -1, & |x|<1 \quad (x\neq 0) \\ 0, & |x|=1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$$

求极限：（4）

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-2}, & x<2 \\ k, & x=2, \\ ax+4, & x>2 \end{cases}$$ 当 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$存在？

k为何值时，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$？

解：

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2^-} e^{x-2}=1$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2^+}(ax+4)=2a+4$$

要 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$存在，当且仅当$2a+4=1$， $a=-\dfrac{3}{2}$.

又 $f(2)=k$， 要 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$

只有 $k=1$.

求极限：（5） $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m、n为整数)

解 令$x=\pi+t$，则 $t\to 0$

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)}$$

诱导公式

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}$$

$$=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

求极限：（6）

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}}, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_k \text{为k个正数}$$

解　用夹挤原则　不妨设 $0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$.

$$a_k = (a_k^n)^{\frac{1}{n}} < (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}} < (ka_k^n)^{\frac{1}{n}} \to a_k \ (n \to \infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}} = a_k .$$

例 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$, 试确定常数 a 及 b .

解: $\because\ x=0$ 为无穷间断点, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

$$\Longrightarrow a=0\,,\,b\neq1$$

$\because\ x=1$ 为可去间断点 $,\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Longrightarrow \lim_{x\to1}(e^x-b)=0 \Longrightarrow b=\lim_{x\to1}e^x=e$$

例 求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点, 并判别其类型.

解: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(1+x)}\sin x}{|x|\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$

$x=-1$ 为第一类可去间断点

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$x=1$ 为第二类无穷间断点

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1,\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=1,$$

$x=0$ 为第一类跳跃间断点

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right).$

解:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

0

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

2

$\Longrightarrow$ **原式 = 1**

例 设 $a>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right),\ n=1,2\cdots$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

证明 $\because \quad x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)\geq\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^2}}=\sqrt[3]{a},n=1,2\cdots$

$\therefore \quad \{x_n\}$ 有下界又

$$\because \quad x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_n^2}-x_n\right)$$

$$=\frac{a-x_n^3}{3x_n^{\ 2}}\leq 0 \qquad (\because x_n^3\geq a)$$

$\therefore \quad \{x_n\}$ 单调下降有下界，从而存在极限

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 对 $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n{}^2}\right)$

两边取极限 $\Rightarrow A = \frac{1}{3}\left(2A + \frac{a}{A^2}\right)$

$\therefore A = \sqrt[3]{a}.$