- 第十二

第一节

微分方程的基本概念

- 一、问题的提出
- 二、基本概念

一、问题的提出

$$s'' + s' + s = e^x$$

$$s(0) = 1,\ s'(0) = 0.$$

$$s = ?$$

例1 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 .

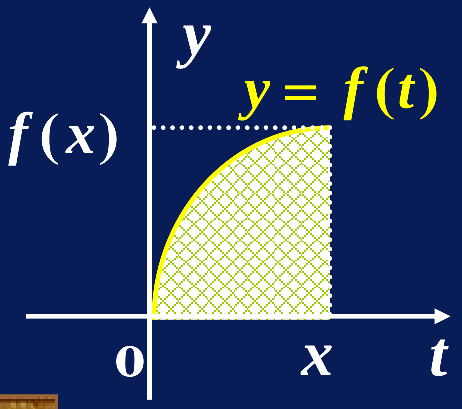
解 $s = s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$$= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$$

$$s' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots$$

$$s'' = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots$$

例2 若以连续曲线 $y = f(t)(f(t) \geq 0)$ 为曲边，以 $[0, x]$ 为底的曲边梯形的面积 与纵坐标 y 的 $n+1$ 次幂成正比，且已知 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 求此曲线方程.



解 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = k[f(x)]^{n+1}$

$f(x) = k(n+1)[f(x)]^n f'(x)$

$$k(n+1)[f(x)]^{n-1} f'(x) = 1,$$

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1. \quad f(x) = ?$$

例3 设 $f(t)$连续，且

$$f(t)=3\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V+t^3,$$

$t\ge 0$， 求 $f(t)$.

解 $f(t)=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t} f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+t^3$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

$$=12\pi\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

一阶线性方程

$$f'(t)=12\pi t^2 f(t)+3t^2,\quad f(0)=0.\qquad f(t)=?$$

二、基本概念

1.微分方程: 凡含有一个或几个自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程叫微分方程. 若自变量只有一个，则称为常微分方程；若自变量的个数不止一个，则称为偏微分方程.

常微分方程的一般形式:

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d} x^n}) = 0 \qquad (12.5)$$

如： $y' = xy,$

$y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$

常微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

偏微分方程

实质： 联系自变量,未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

2. 微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之.

一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$, 隐式方程

$y' = f(x, y)$ 显式方程

高阶($n \geqslant 2$)微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

3. 线性与非线性微分方程:

若(12.5)式的左端 F 为y及其各阶导数的一次有理整式，则称 (12.5)为线性方程；否则，称它为非线性方程 .

如：$y' + P(x)y = Q(x)$; (关于 y 线性)

$x(y')^2 - 2yy' + x = 0$; (非线性)

$2y\,\mathrm{d}x - (4x + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$, (关于 y 非线性)

变形 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2y}{4x + y^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{4x + y^2}{2y}$ (关于x 线性)

4. 微分方程的解

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n阶导数， 若

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,\quad (\forall x\in I)$$

则称 $y=\varphi(x)$ $(x\in I)$为方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n\,y}{\mathrm{d}\,x^n})=0 \qquad (12.5)$$

的解; 若方程(12.5)的解 $y=\varphi(x)$由方程:

$$\Phi(x,y)=0$$

所确定，则称 $\Phi(x,y)=0$为(12.5)式的隐式解 .

5. 微分方程的解的分类

(1) 通解: 若 n 阶微分方程 (12.5)的解

$y=\varphi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中含

n 个相互独立的任意常数 c_1, $c_2,\cdots,c_n$, 即

$$J=\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

则称此解为 (1.1)的通解 .

通俗地说, 微分方程的**通解**中含有任意常数,
且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这些常数之间没有任何关系.

如： $y' = y$, 通解 $y = ce^x$;

$y'' + y = 0$, 通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

(2) 特解: 不含有任意常数的解.

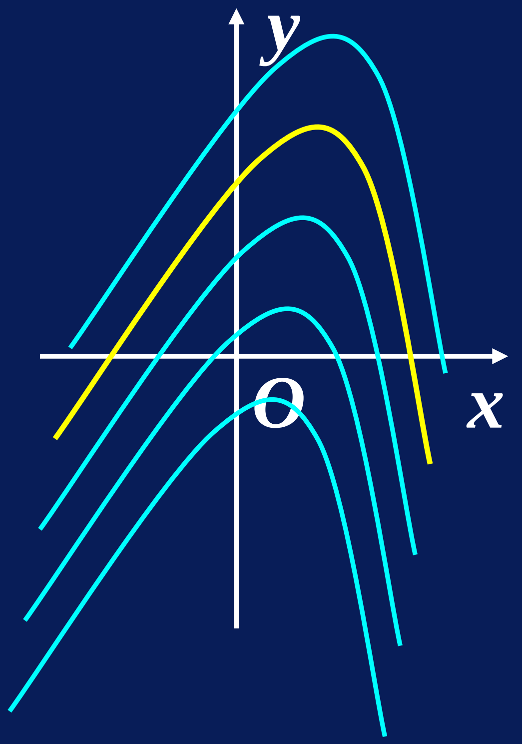
思考 通解是否一定包含了此方程的所有解?

不一定.

如：对于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$，

可以验证：$y=-\dfrac{1}{x+c}$ 是其通解，

但不包含特解：$y\equiv 0$.



解的图象： 微分方程的积分曲线.

通解的图象： 积分曲线族.

初始条件： 用来确定n阶微分方程

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0 \qquad (12.5)$$

特解的条件：

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

6. 初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ 过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

$$n\text{阶}: \begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (12.6)$$

例4 验证：函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的解．并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A,\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$ 的特解.

解 $\because$ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt,$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2C_1\cos kt - k^2C_2\sin kt,$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 和 x 的表达式代入原方程，

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

故 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$$\because\quad x\big|_{t=0}=A,\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,$$

$$\therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为 $x=A\cos kt.$

在 § 2 — § 4中, 将讨论对方程

$$y' = f(x, y)$$

的初等解法: 初等积分法.

求解微分方程 → 求积分

(通解可用初等函数或积分表示出来)

内容小结

微分方程；微分方程的阶； 微分方程的解；

通解； 初始条件； 特解；初值问题；积分曲线.

思考题

函数$y=3e^{2x}$是微分方程$y''-4y=0$的什么解?

思考题解答

$\because\ y' = 6e^{2x}, \qquad y'' = 12e^{2x},$

$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4\cdot 3e^{2x} = 0,$

$\because\ y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.