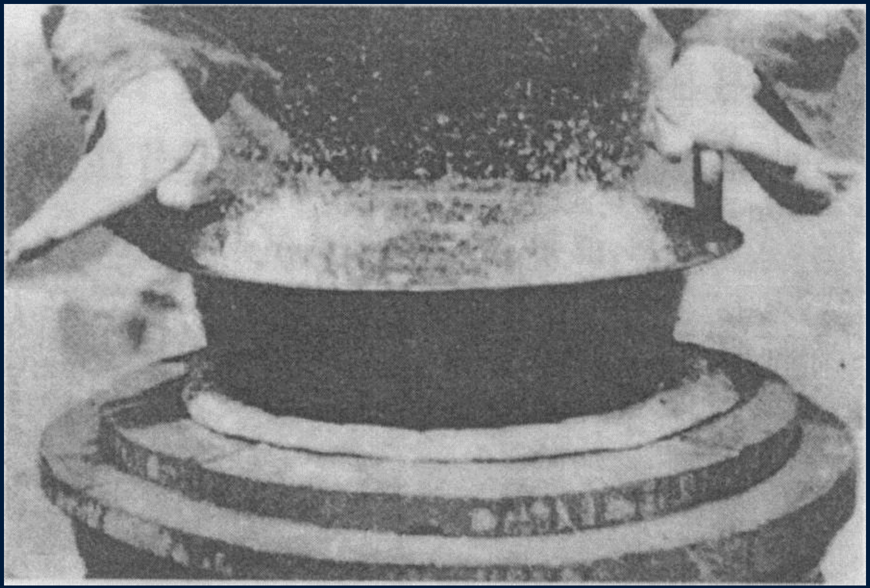
第12章 机械振动



"喷水鱼洗"实质上是一个盆边带有双耳的铜盆．当用手摩擦盆边的双耳时，盆内的水会浪花飞溅.

振动

机械振动：物体在一特定的位置（平衡位置）附近做周期性运动。

广义振动：任一物理量在某固定值附近作周期性的变化。

位置矢量 $\xrightarrow{\text{振动}}$ 机械振动

电场强度磁感应强度 $\xrightarrow{\text{振动}}$ 电磁振荡

电流强度 $\xrightarrow{\text{振动}}$ 交流电

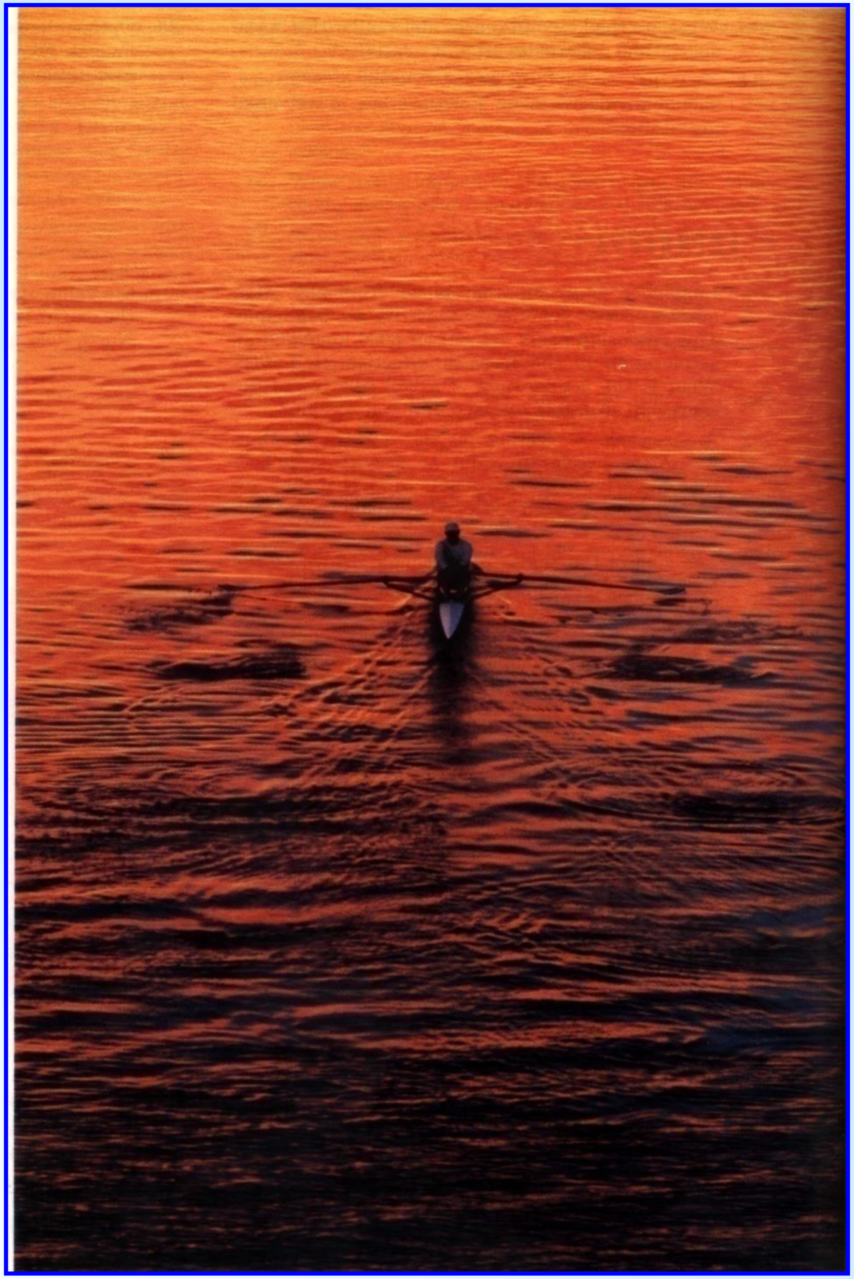
波动　振动在空间的传播。

- 振动是产生波动的根源
- 波动是振动这种运动形式和能量在空间的传播
- 波动相互联系着的一系列振动。

机械振动 $\xrightarrow{\text{在空间激发}}$ 声波、超声波、次声波

电磁振荡 $\xrightarrow{\text{在空间激发}}$ 电磁波、光

各种振动和波动运动有着很多共同的特征。



§ 12.1　简谐振动

主要内容：

1. 什么是简谐振动？

2. 简谐振动振动的特点？

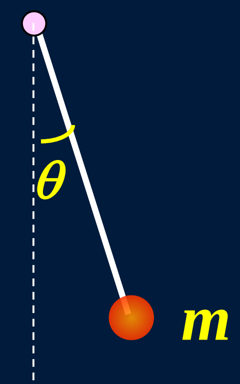
3. 用牛顿运动定理分析谐振子的运动规律。

4. 简谐振动振动的旋转矢量表述

5. 谐振动振动的能量

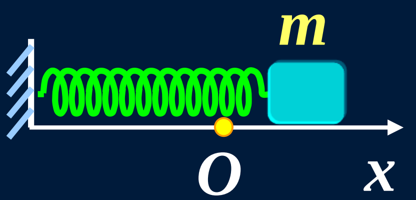
12.1.1 简谐振动

定义: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



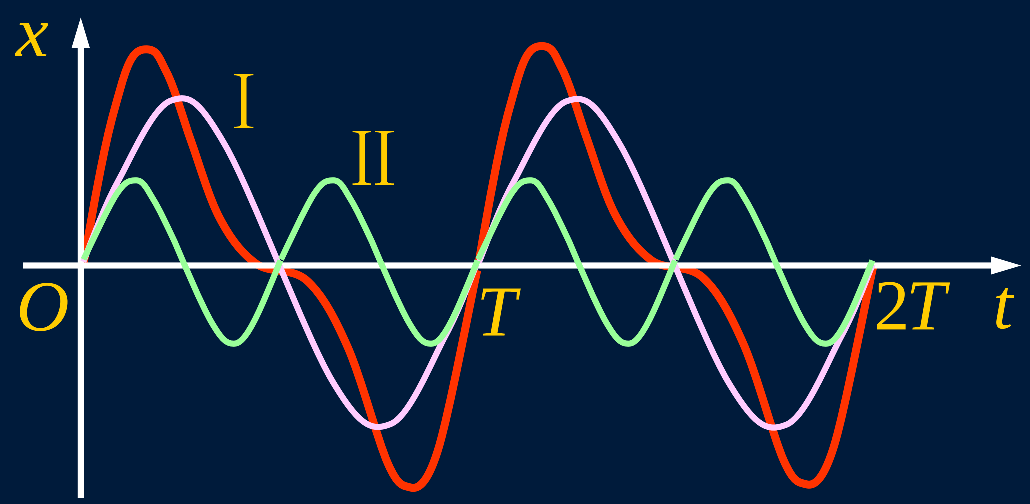
x 是描述位置的物理量,如 y , z 或 θ等.

特点: (1)等幅振动



(2)周期振动 $x(t) = x(t+T)$

研究简谐振动的意义:

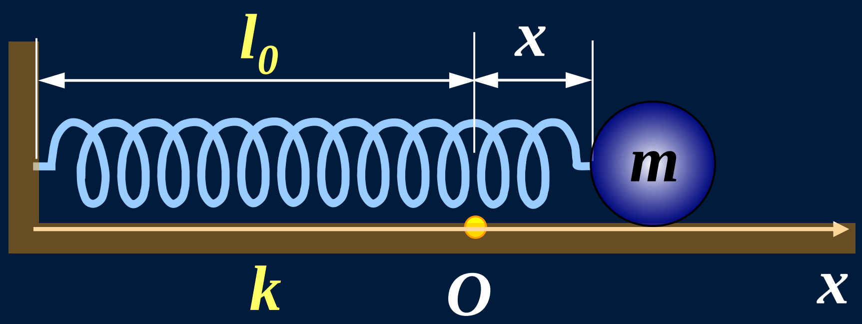


◆ 谐振子

1. 受力特点

机械振动的力学特点

线性恢复力 $F=-kx$



2. 动力学方程

$$F=-kx=ma$$

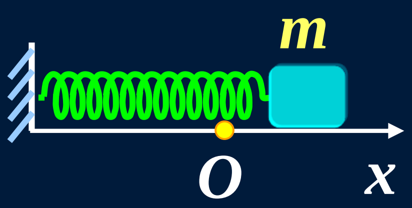
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

运动微分方程

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中 ω 为 固有角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

12.1.2 描述谐振动的特征量



1. 振幅 A

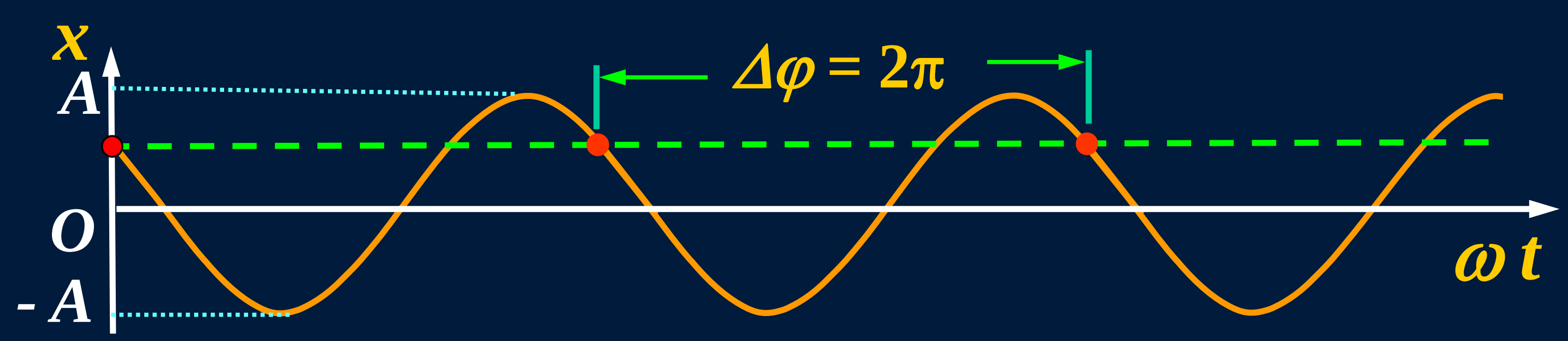
2. 周期T 和频率 ν　　$\nu = 1/T$ (Hz)

3. 相位　(1) $(\omega t + \varphi)$ 是 t 时刻的相位

(2) φ 是 $t=0$ 时刻的相位 —— 初相

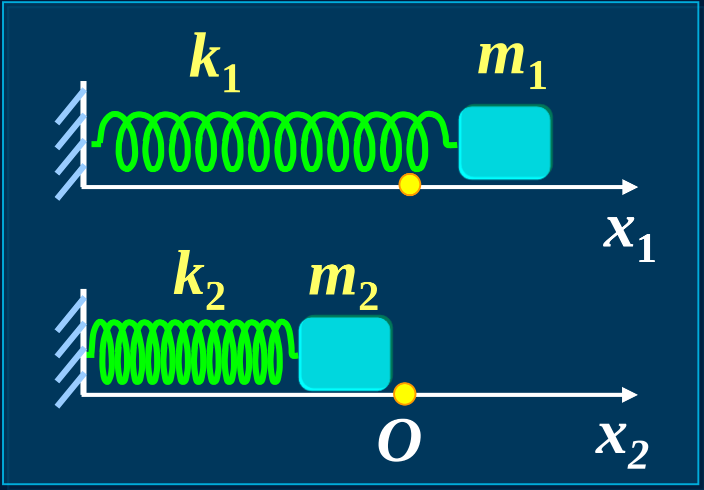
相位的意义：$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\begin{cases} \upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \\ a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

- 相位确定了振动的状态.
- 相位每改变 2π 振动重复一次, 相位 2π 范围内变化, 状态不重复.



相位差

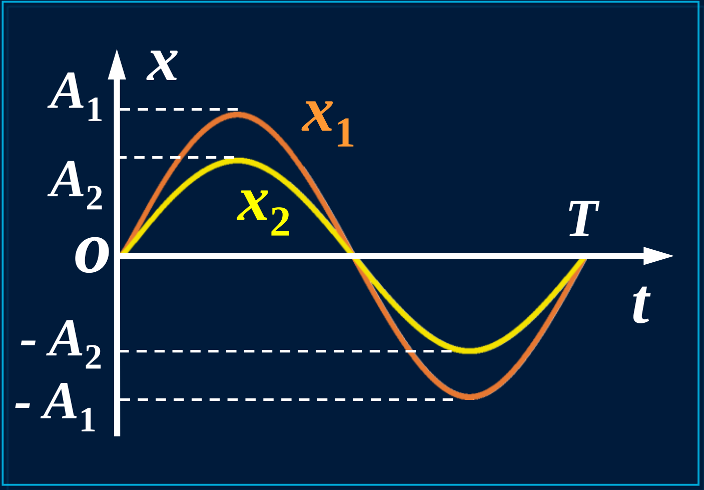
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$



$$\Delta\varphi = (\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)$$

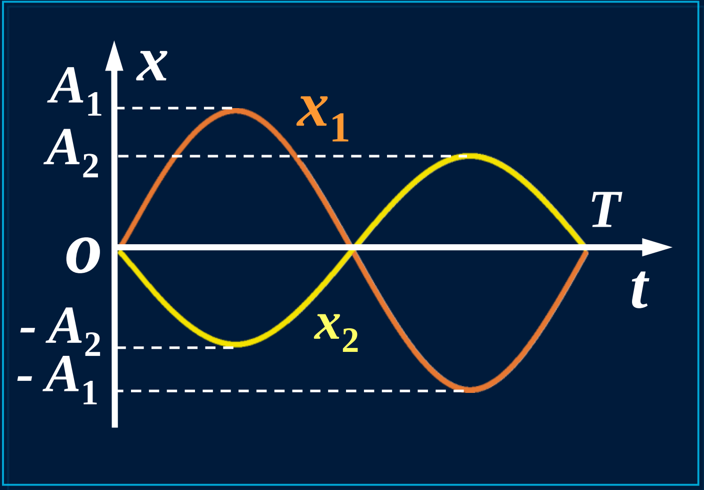
$$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 \quad （当\omega_2=\omega_1时）$$

若 $\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 = \pm 2k\pi$



两振动步调相同, 称同相。

若 $\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$



两振动步调相反 ， 称反相。

相位（$\omega t+\varphi$）的性质：

①当特征参量给定后，振子的运动状态由相位唯一决定。

②相位是时间的函数，规定了振子运动状态的变化趋势。

③相位也反映了简谐振子振动的周期性。

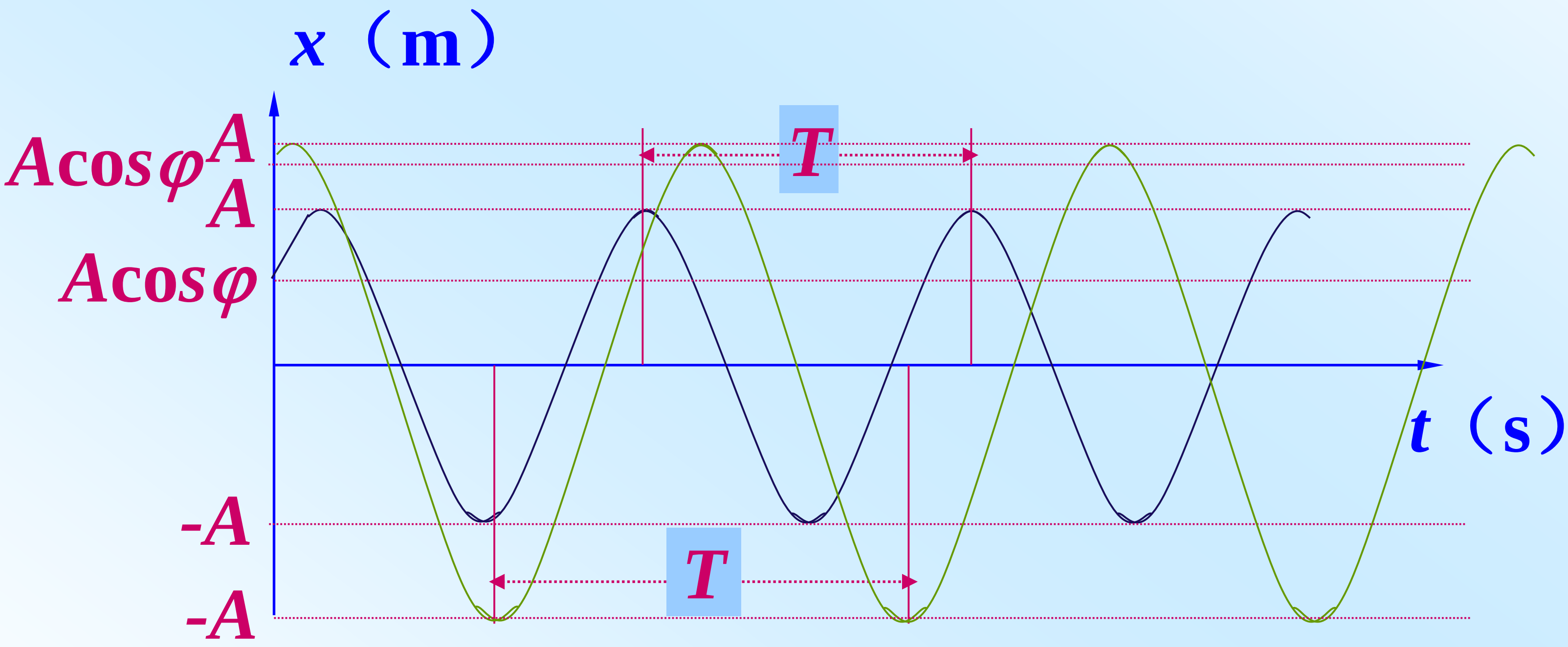
由三角函数的性质有：

$$\cos(\omega t+\varphi+2n\pi)=\cos(\omega t+\varphi)$$

④相位具有角度的性质也称相角，其单位为**rad**（弧度）

简谐振动的图形表达——振动曲线

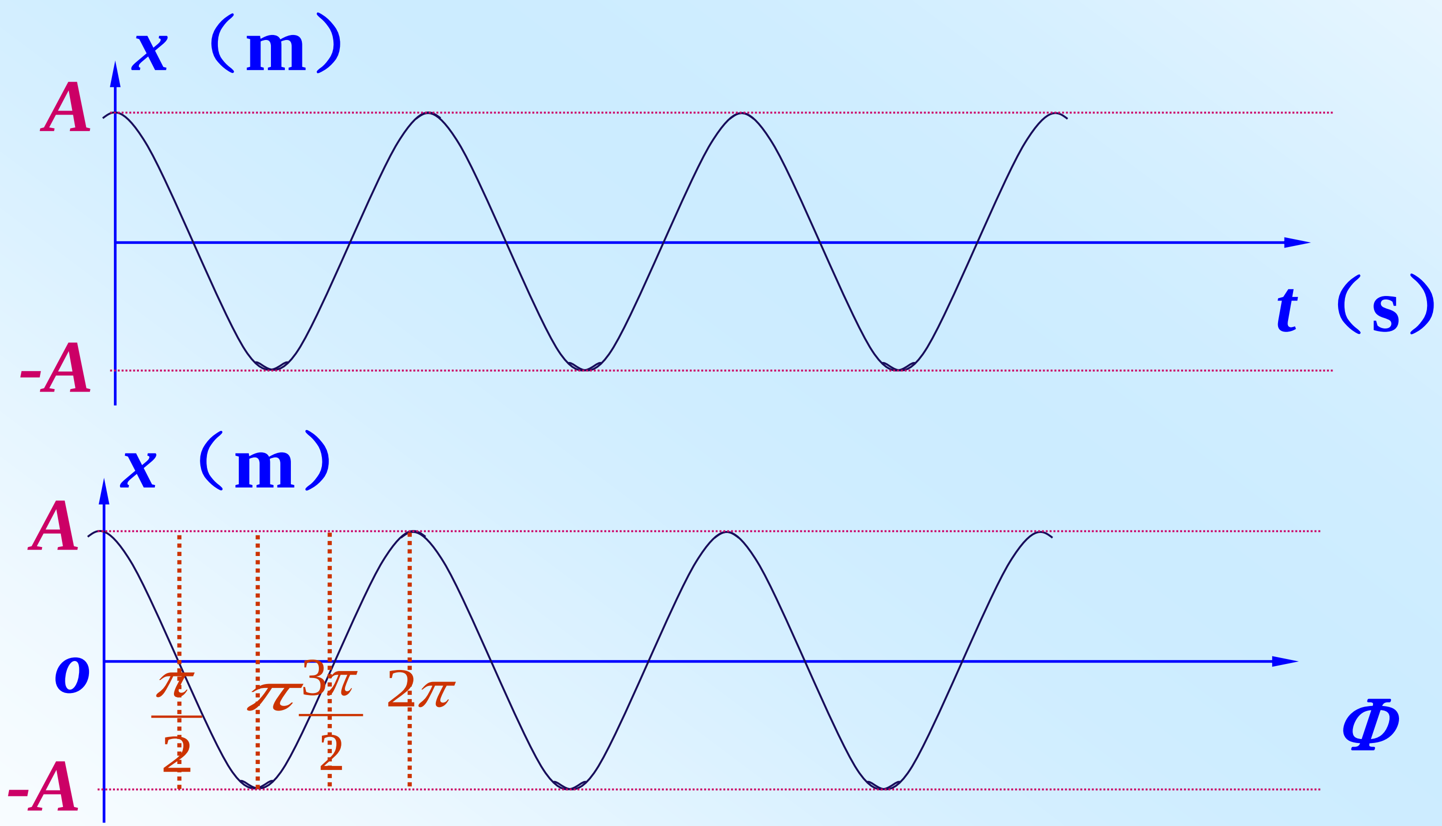
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



振动曲线

振动曲线的特征：

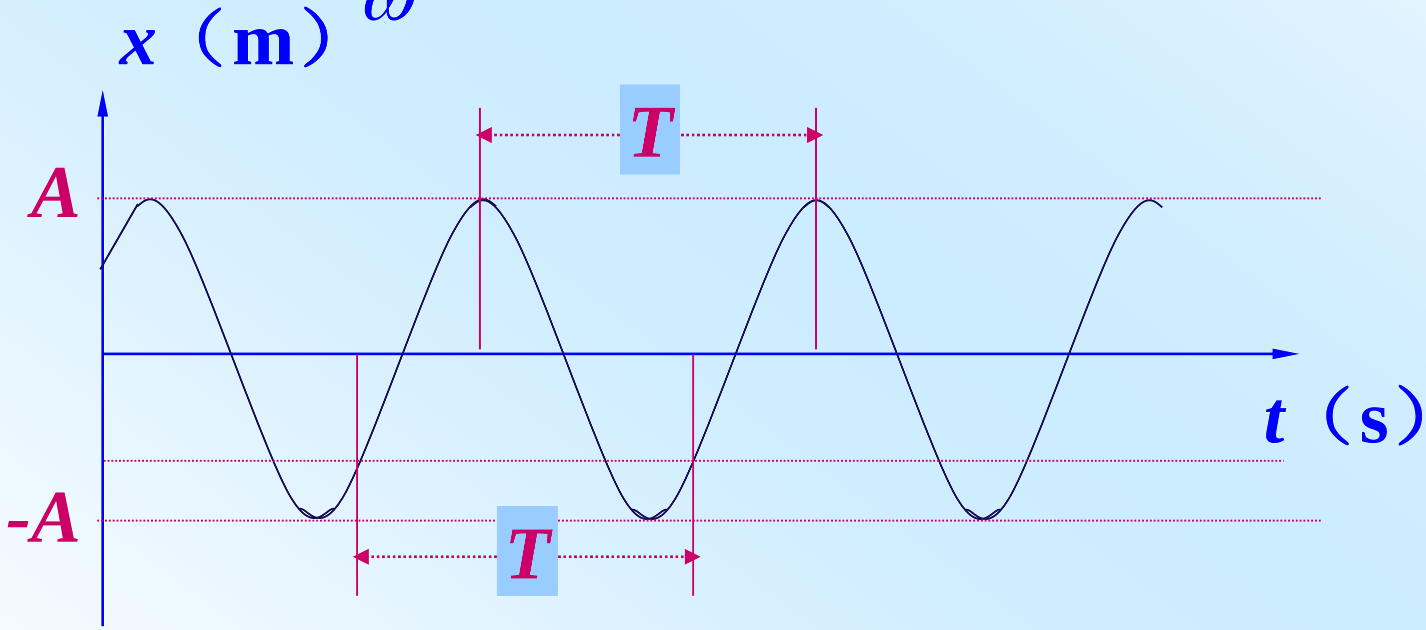
①谐振动的运动规律为一正弦或余弦曲线。



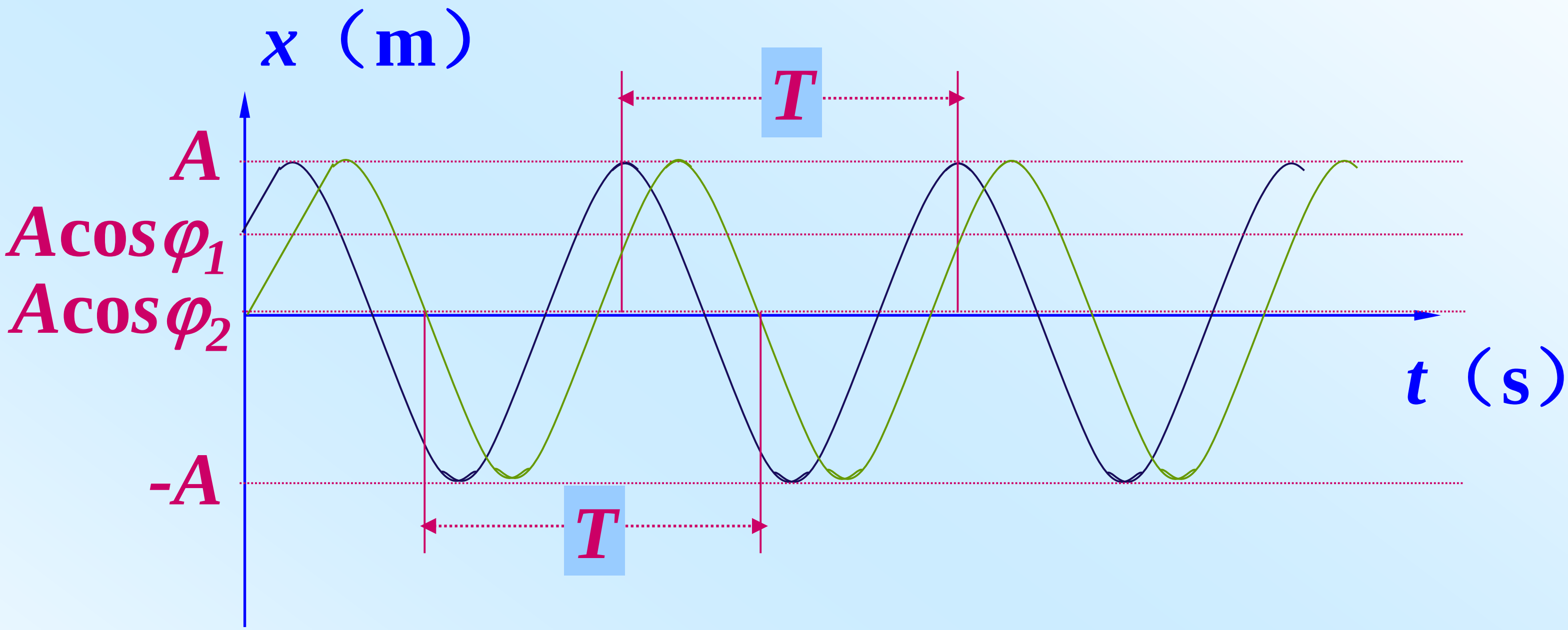
②振幅*A*是最大位移的绝对值。最大值出现的时刻为：

$$\omega t+\varphi=n\pi,\quad (n=0,1,2,3\cdots)$$

$$t=\frac{n\pi-\varphi}{\omega},\quad (n=0,1,2,3\cdots)$$



③周期*T*是任意两个相邻的同状态的时间间隔。



④周期T和振幅A决定了曲线的形状。曲线在坐标中的位置初相位φ决定。

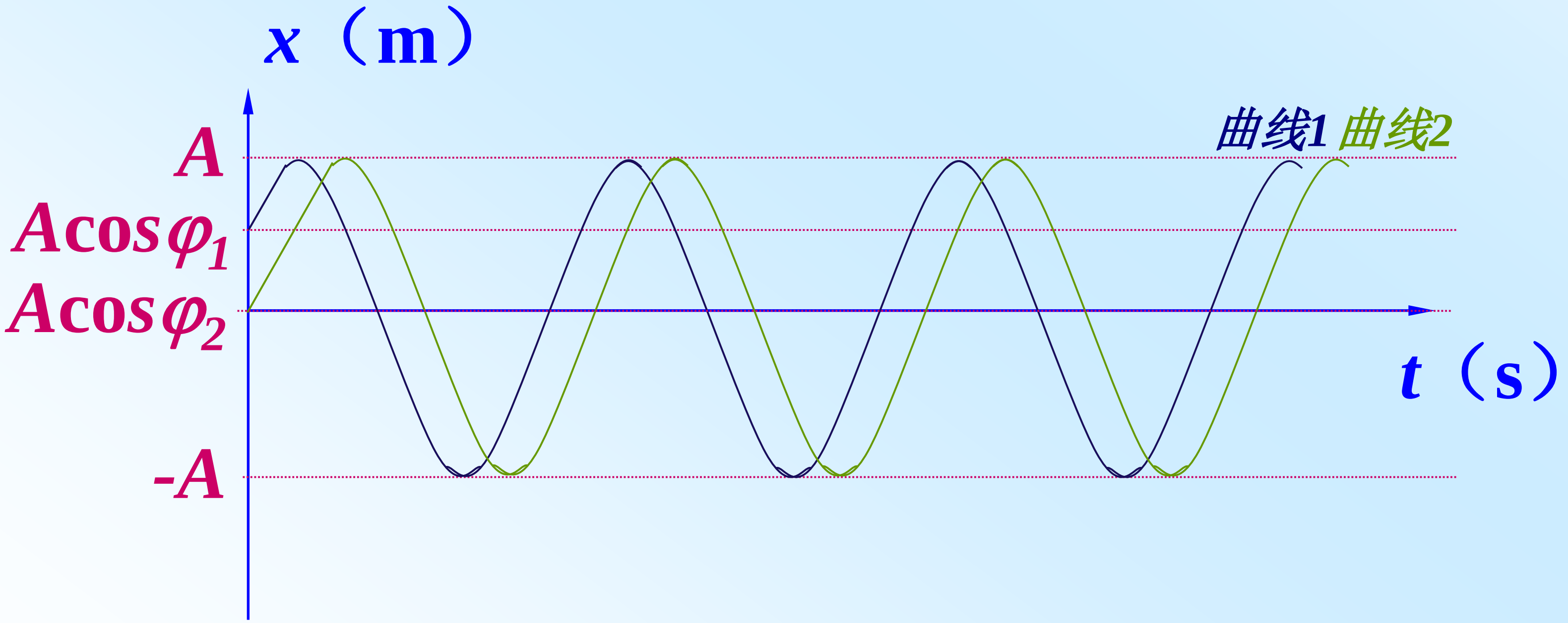
$$t=0,\quad x_0=A\cos\varphi$$

在曲线上初相位可以由振幅A和0时刻的位移x_0求出。

⑤在曲线上可以求出其特征参量（A，ω，φ）和相位

⑥特征参量（A，ω，φ）相同，则振动曲线完全重合

（A，ω）相同，曲线形状相同，但不重合相互错开



4. 振幅和初相位的确定

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x_0 = A\cos\varphi$$

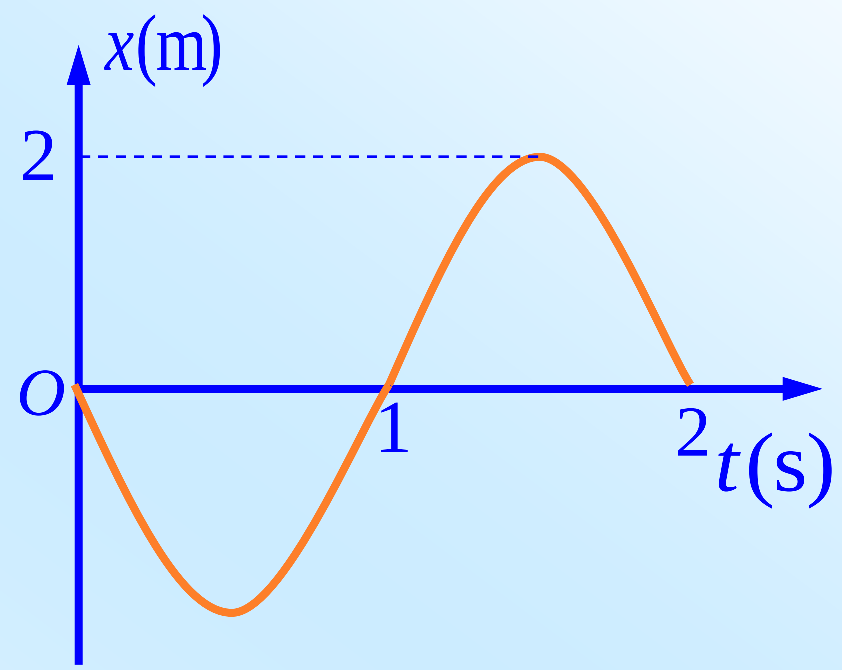
$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}} \qquad \boxed{\varphi = \arctan(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0})}$$

注意: 如何确定最后的 φ.

例1.如图的谐振动*x-t* 曲线，试求其谐振方程

解： 由图知



$$A = 2\,\mathrm{m} \qquad T = 2\,\mathrm{s}$$

可得：$\omega = 2\pi / T = \pi$

振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由t=0时： $x = 0$ $\qquad 0 = A\cos\varphi$

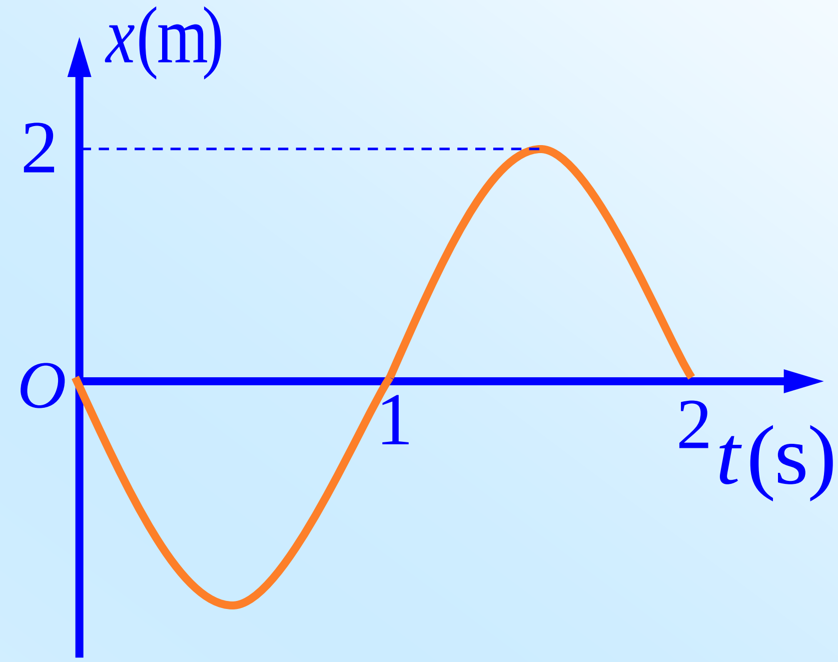
得：$\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Physics

又由：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0 < 0$$



即：

$$-\omega A\sin\varphi < 0$$

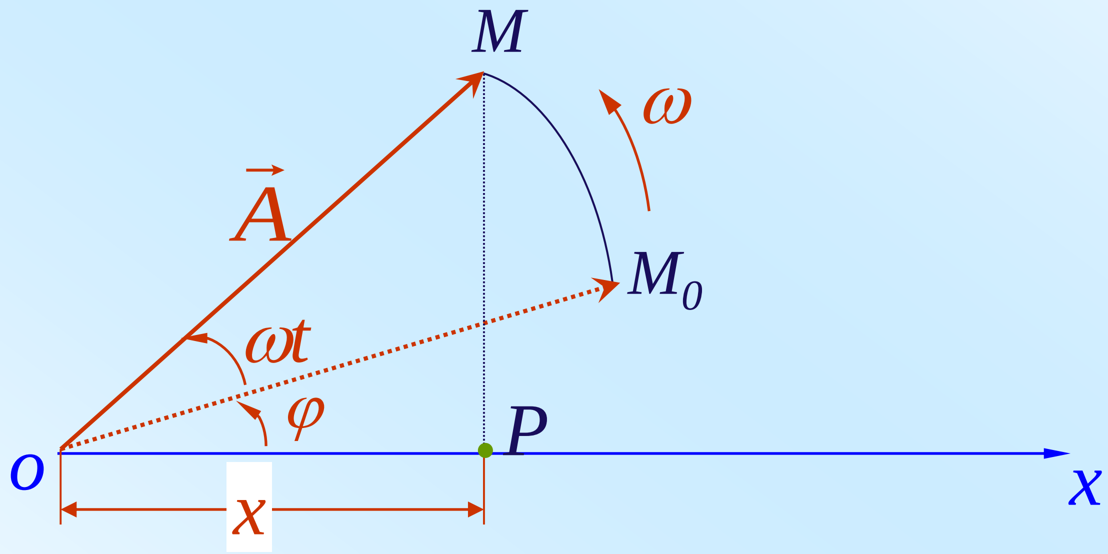
$$\sin\varphi > 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

（4）简谐振动的几何表达——旋转矢量

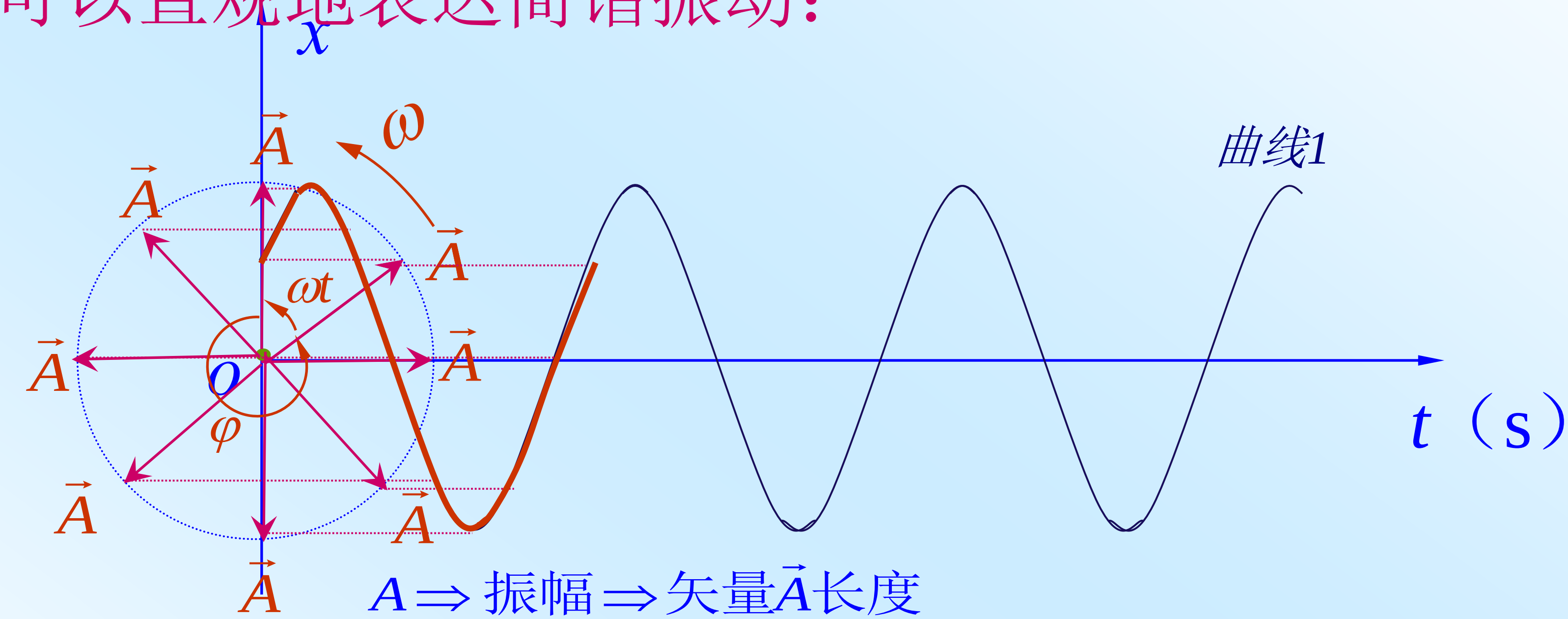
简谐振动的矢量表示法：



矢量$\vec{A}$末端M在x轴上的投影点P的位移为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

相矢量$\vec{A}$绕o点做匀速的圆周运动在x轴上的投影，可以直观地表达简谐振动：



$A \Rightarrow$ 振幅 $\Rightarrow$ 矢量$\vec{A}$长度

$\omega \Rightarrow$ 角频率 $\Rightarrow$ 矢量$\vec{A}$旋转的角速度

$\varphi \Rightarrow$ 初相位 $\Rightarrow t = 0$时矢量$\vec{A}$与x轴的夹角

（$\omega t + \varphi$）$\Rightarrow$ 相位 $\Rightarrow t$时刻矢量$\vec{A}$与x轴的夹角

$T \Rightarrow$ 周期 $\Rightarrow$ 矢量$\vec{A}$旋转一周的时间 $\omega T = 2\pi$， $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\nu \Rightarrow$ 频率 $\Rightarrow$ 矢量$\vec{A}$每秒时间旋转的周数， $\nu = \dfrac{1}{T}$

矢量$\vec{A}$端点旋转轨迹 $\Rightarrow$ 以A为半径o为圆心的圆 $\Rightarrow$ 参考圆

2. 简谐振动的速度和加速度

另外两个运动学量速度和加速度如何？

（1）简谐振动的速度

由：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

可得：$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

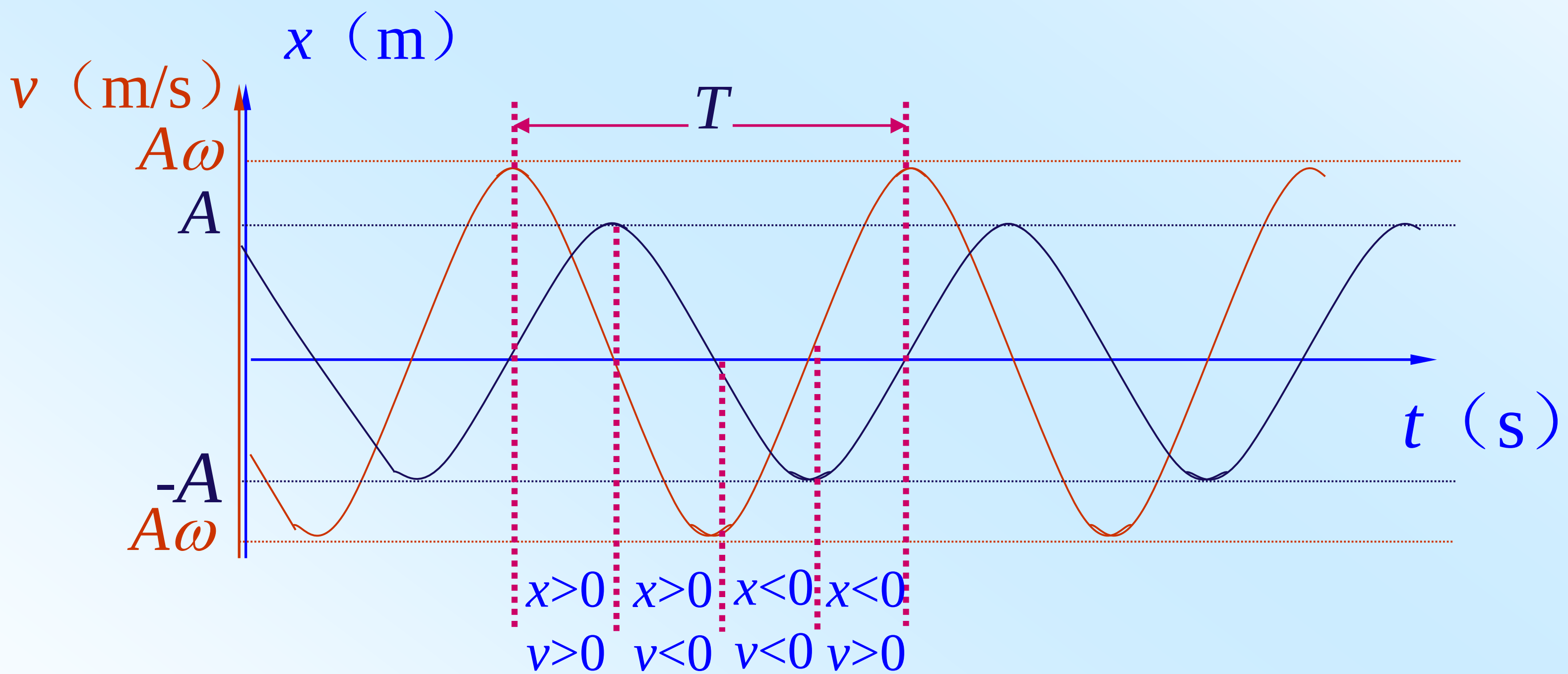
$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

令：$v_m = \omega A$，称为速度振幅，单位为$\mathrm{m/s}$

$$\boxed{v = v_m\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

简谐振动速度的特征：

$$v = v_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$



①简谐振动的速度变化规律仍为一正弦或余弦曲线。其周期与振动周期相同，速度振幅$v_m=\omega A$，它是振动速度的最大值。

②速度的相位（$\omega t+\varphi+\pi/2$）比振动相位（$\omega t+\varphi$）超前了$\pi/2$，即其极大值的时间比位移提前了T/4。

（2）简谐振动的加速度

由：$v=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\dfrac{\pi}{2})$

可得：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$

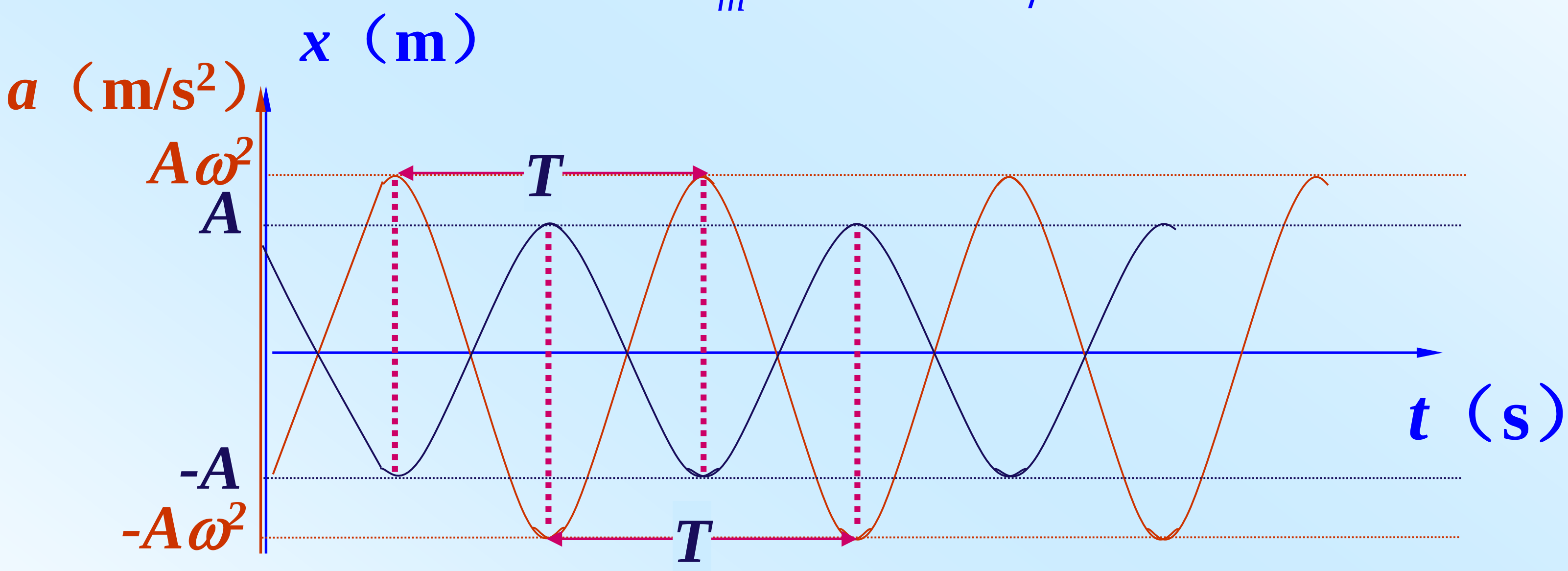
$$a=\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)$$

令：$a_m=\omega^2 A$，称为加速度振幅，单位为$\mathrm{m/s^2}$

$$\boxed{a=a_m\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)}$$

简谐振动加速度的特征：

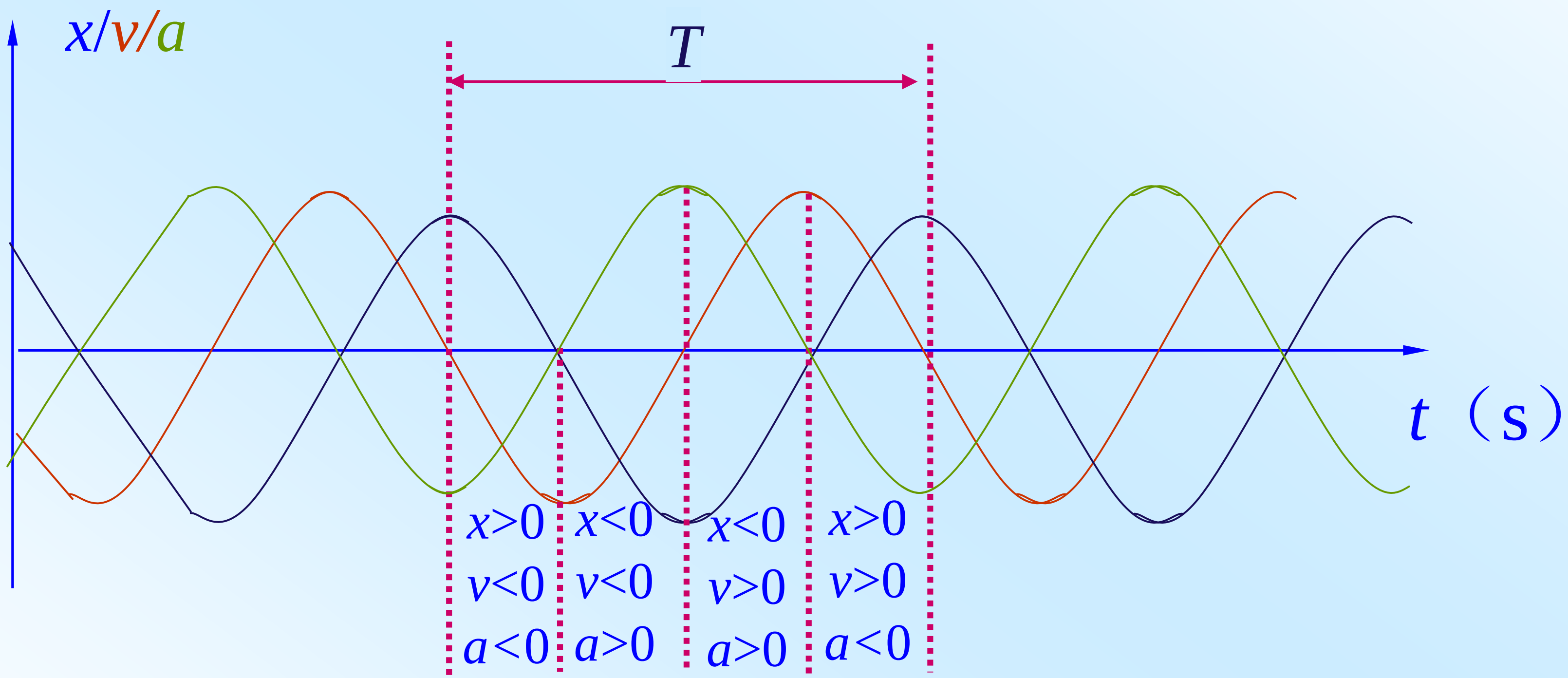
$$a = a_m \cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$$



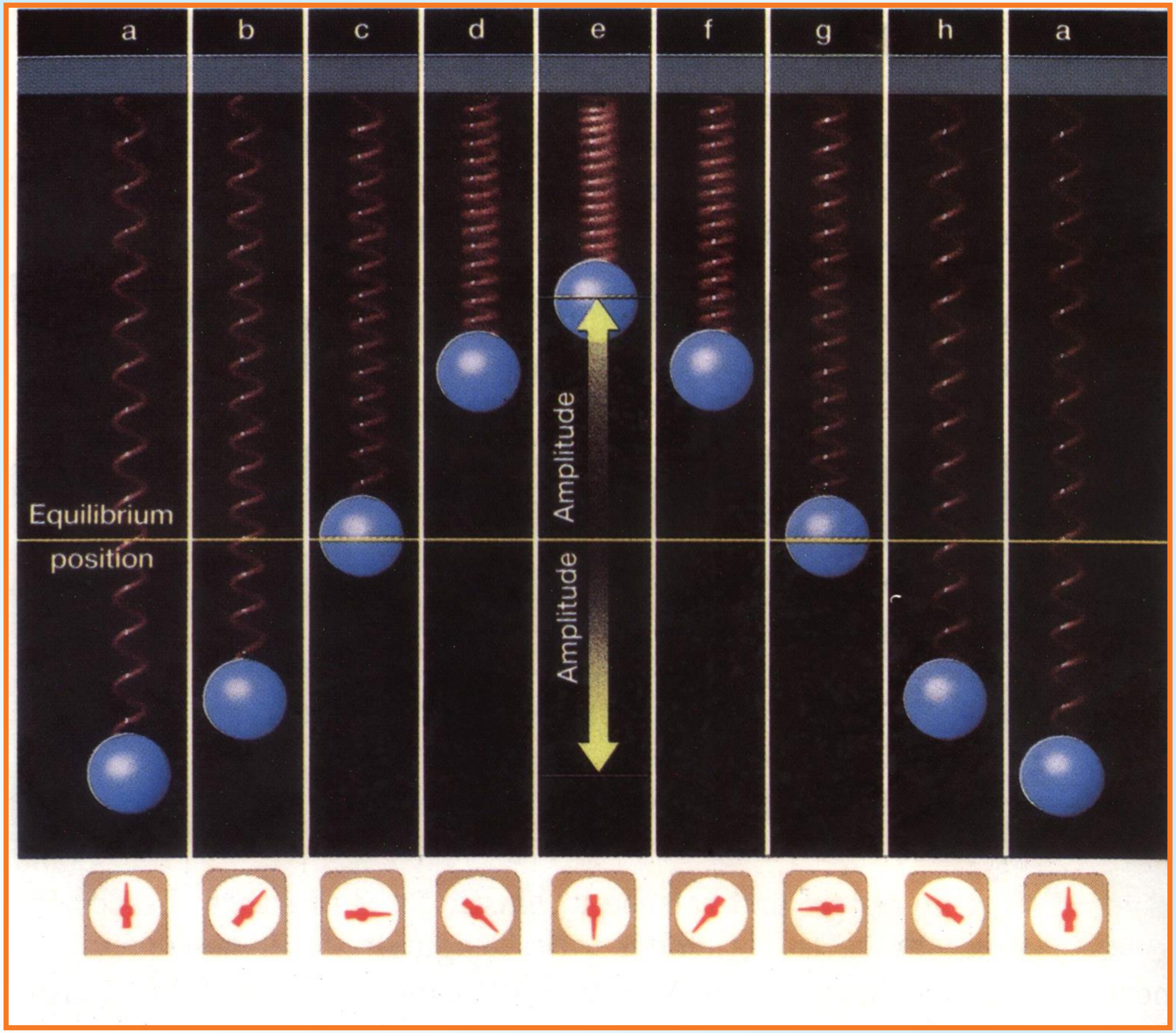
①简谐振动的加速度变化规律仍为一正弦或余弦曲线。其周期与振动周期相同，加速度振幅$a_m=\omega^2 A$，它是振动加速度的最大值。

②加速度的相位（$\omega t+\varphi\pm\pi$）比振动相位（$\omega t+\varphi$）超期或滞后π（反相），即一个正极大值和另一个负极大值同时。

简谐振动位移/速度/加速度相位关系:



§ 6.1 简谐振动的运动学描述



3. 简谐振动的运动学特征

前面分别讨论了简谐振动的三个运动学量的变化规律，并给出了简谐振动的运动方程：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{v = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi \pm \pi)}$$

以上运动方程，与坐标原点的选取有关（坐标原点必须取在平衡位置）。
它并不能反映简谐振动的普遍特征。

由：$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\boxed{a=-\omega^2 x}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0}$$

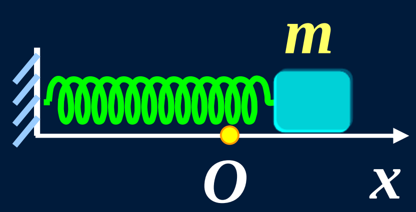
简谐振动的运动学特征：<u>谐振子的加速度与位移恒成正比且方向相反。这是任何简谐振动都遵守的运动学的普遍规律。</u>

12.1.4 谐振动的能量(以水平弹簧振子为例)

1. 动能

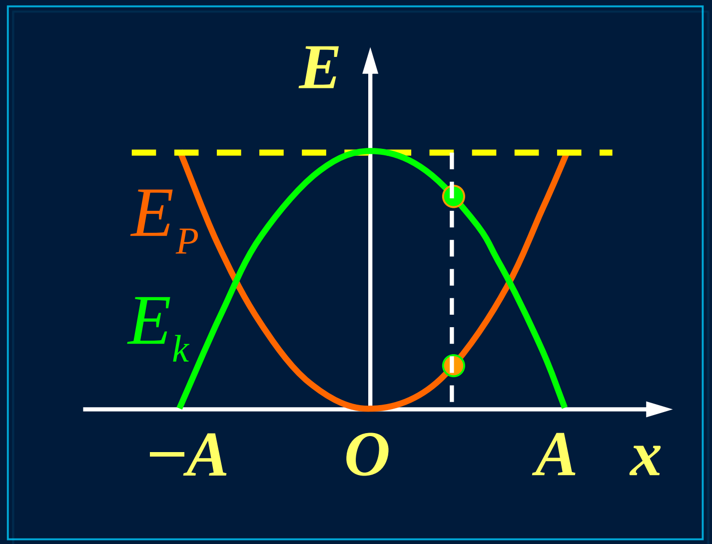
$$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\overline{E}_k = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_k \mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$



2. 势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$



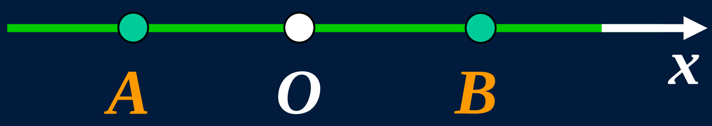
3. 机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

(简谐振动系统机械能守恒)

例 如图所示，一质点作简谐振动，在一个周期内相继通过距离为12cm的两点*A*和*B*，历时2s，并且在*A*，*B*两点处具有相同的速率；再经过2s后，质点又从另一方向通过*B*点。

求 质点运动的周期和振幅。



解 由题意可知，*AB*的中点为平衡位置，周期为

$$T = 4\times 2 = 8\ (\mathrm{s})$$

设平衡位置为坐标原点，则 $x_A = -6\mathrm{cm}$ $\quad x_B = 6\mathrm{cm}$

设 $t = 0$ 时，质点位于平衡位置，则振动方程可写为

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A\cos(\frac{2\pi}{8}t - \frac{\pi}{2})$$

$t = 1$ 时, 质点位于B点, 所以 $6 = A\cos(\frac{2\pi}{8} - \frac{\pi}{2})$ ⇨ $A = 6\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

§ 12.2　简谐振动的实例分析

主要内容：

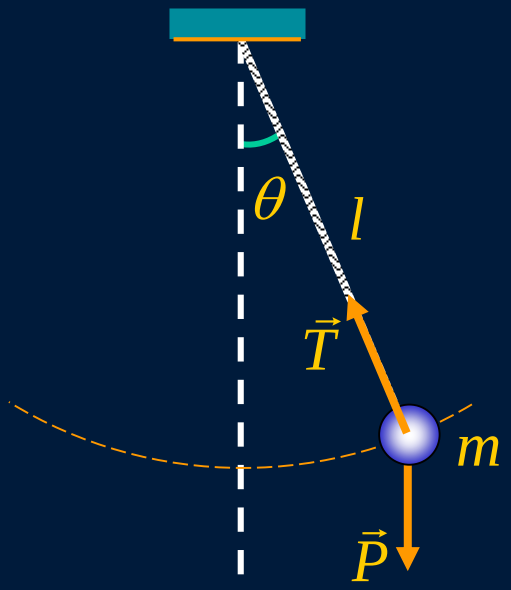
1. 单摆

2. 复摆

3. 扭摆

4. 双原子分子内原子的振动

12.2.1 单摆



以小球为研究对象，作受力分析.

P 重力， T 绳的拉力.

设 θ 角沿逆时针方向为正.

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$ （牛顿第二定律）

沿切向方向的分量方程为

$$-P\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \begin{cases} v = l\dot{\theta} \\ \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots \approx \theta \end{cases}$$ （小角度时）

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta = 0$$ 令 $\omega^2 = \frac{g}{l}$ $$\ddot{\theta}+\omega^2\theta = 0$$

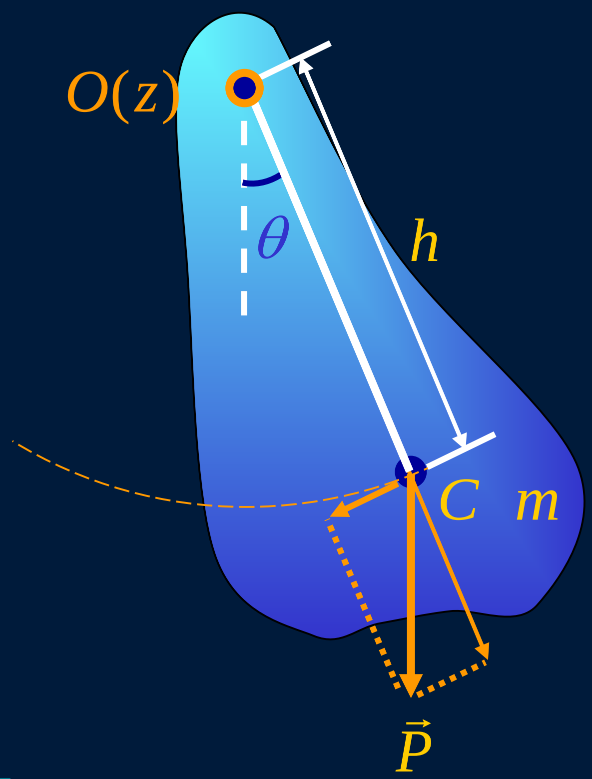
➢ **结论:** 小角度摆动时，单摆的运动是谐振动.

周期和角频率为: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

12.2.2 复摆（物理摆）

以物体为研究对象

设 θ 角沿逆时针方向为正



$$-mgh\sin\theta = J_z\ddot{\theta}$$

（刚体绕定轴转动定律）

小角度时

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J_z}\theta = 0$$

令 $\omega^2 = \dfrac{mgh}{J_z}$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

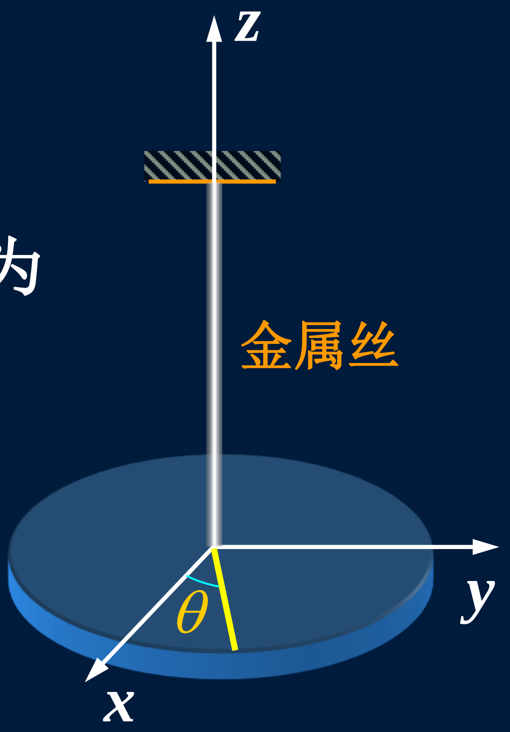
➢ **结论:** 小角度摆动时，复摆的运动是谐振动.

周期和角频率为：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_z}{mgh}}$ $\quad\omega = \sqrt{\dfrac{mgh}{J_z}}$

12.2.3 扭摆

以圆盘为研究对象

在 θ（扭转角）不太大时，圆盘受到的力矩为



$$M_z = -D\theta$$ （D为金属丝的扭转系数）

$$J_z\ddot{\theta} = -D\theta$$ （刚体绕定轴转动定律）

$$\ddot{\theta} + \frac{D}{J_z}\theta = 0$$ 令 $\omega^2 = \frac{D}{J_z}$ $$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

➢ 结论：在扭转角不太大时，扭摆的运动是谐振动.

周期和角频率为：$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{D}}$ $\omega = \sqrt{\frac{D}{J_z}}$

◆ 双原子分子

某些双原子分子中，原子间的相互作用力可以用为

$$F=-\frac{a}{r^2}+\frac{b}{r^3}$$ （其中，**r** 为原子间的距离，**a** 和 **b** 均为正的常数）

证明原子在平衡位置附近的微振动是谐振动,并确定其周期.

证明:

平衡位置 $F=-\frac{a}{r_0^2}+\frac{b}{r_0^3}=0$ $\qquad r_0=\frac{b}{a}$

设原子偏离平衡位置的位移为 $x=r-r_0$

$$F=(F)_{r=r_0}+(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r})_{r=r_0}x+\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2})_{r=r_0}x^2+\cdots$$

（在平衡位处置幂级数展开）

$$F\approx(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r})_{r=r_0}x$$ （对于微小振动，高阶小量可略去）

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = -\left(\frac{2a}{r^3} - \frac{3b}{r^4}\right)_{r=\frac{b}{a}} = -\frac{a^4}{b^3}$$

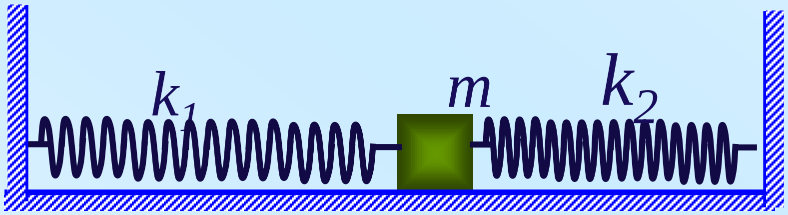
$$F \approx \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} x = -\frac{a^4}{b^3} x = -kx$$

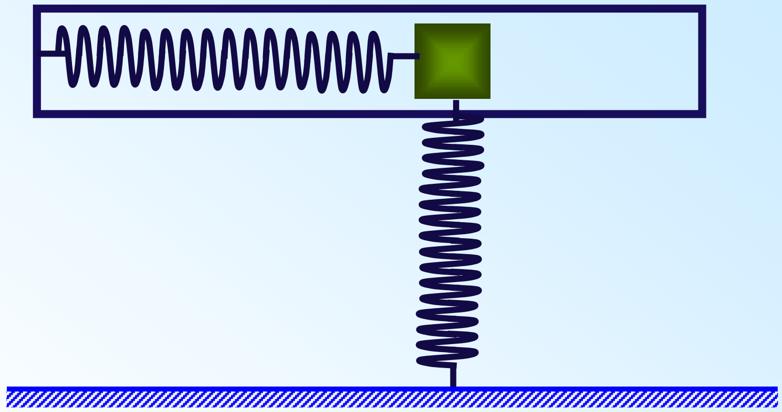
其中 $k = \dfrac{a^4}{b^3}$ ，为等效劲度系数.

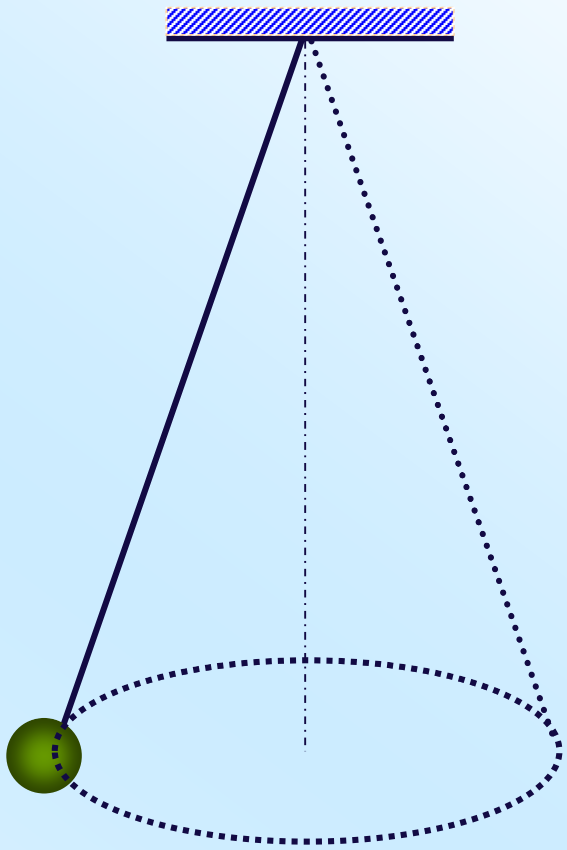
➢ **结论:** 原子在平衡位置附近的微振动是谐振动.

周期为: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{b^3}{a^4}m}$

角频率为: $\omega = \sqrt{\dfrac{a^4}{b^3 m}}$


k_1
m
k_2





任何复杂的振动→多个简谐振动的叠加

Main Goals

- Primary:两个同方向简谐振动的叠加
- Secondary:两个相互垂直的简谐振动的叠加

1. 两个同方向简谐振动的叠加

（1） 频率相同的振动

时刻 t:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

合成后:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

展开:

$$x = A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$+ A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

整理： $x = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$

令： $\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \end{cases}$

引进A和φ为新的待定常数。

解方程：

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \varphi &= \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{aligned}}$$

由式

$$x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$$

合成后的振动方程：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

合成后振动的特征：

①振动依然是以ω为角频率的简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

②初相位由两个振动的振幅和初相位共同确定。

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

③振幅由两个振动的振幅和相位差共同确定，大小随相位差（φ_2-φ_1）周期性变化。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

两个振动同相时：

$$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

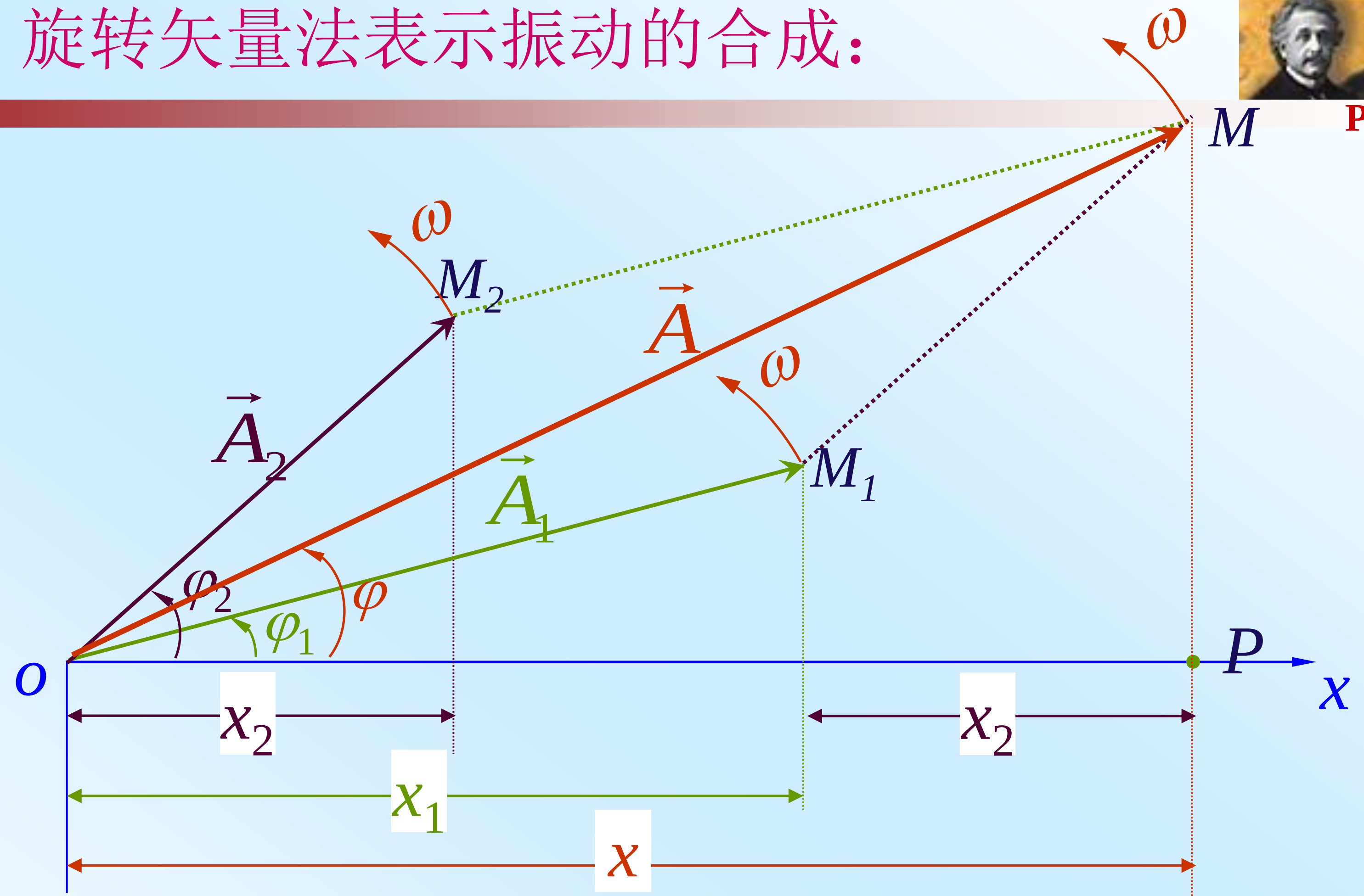
$$A_{max}=A_1+A_2$$

两个振动反相时：

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$A_{max}=\left|A_1-A_2\right|$$

旋转矢量法表示振动的合成：

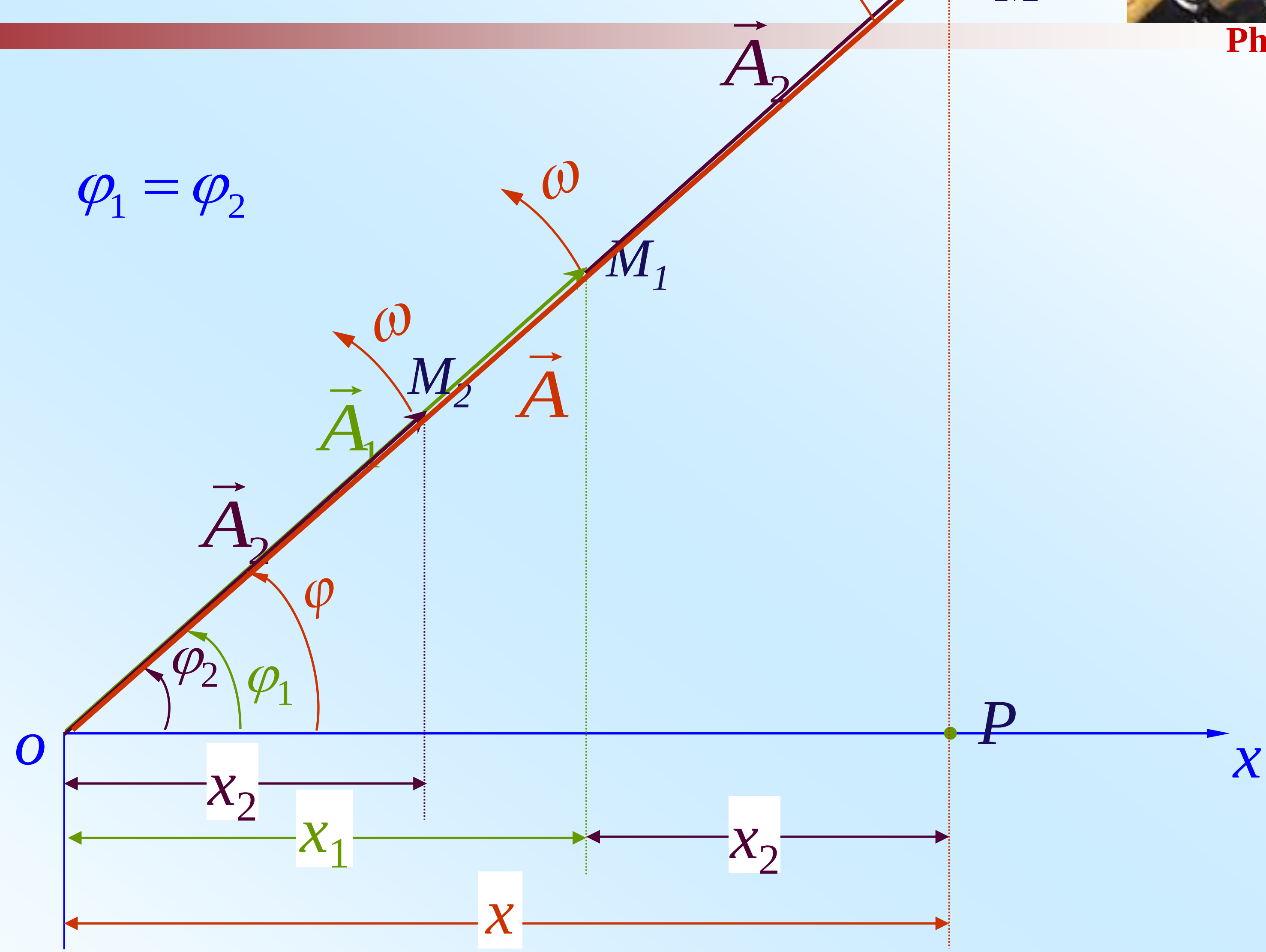


$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2 \xrightarrow{\text{合成矢量投影}} x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\text{在}\Delta OM_1M\text{中} \xrightarrow{\text{用余弦定理}} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\text{在}\Delta OMP\text{中} \xrightarrow{\tan\varphi=MP/OP} \tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

同相振动的合成：

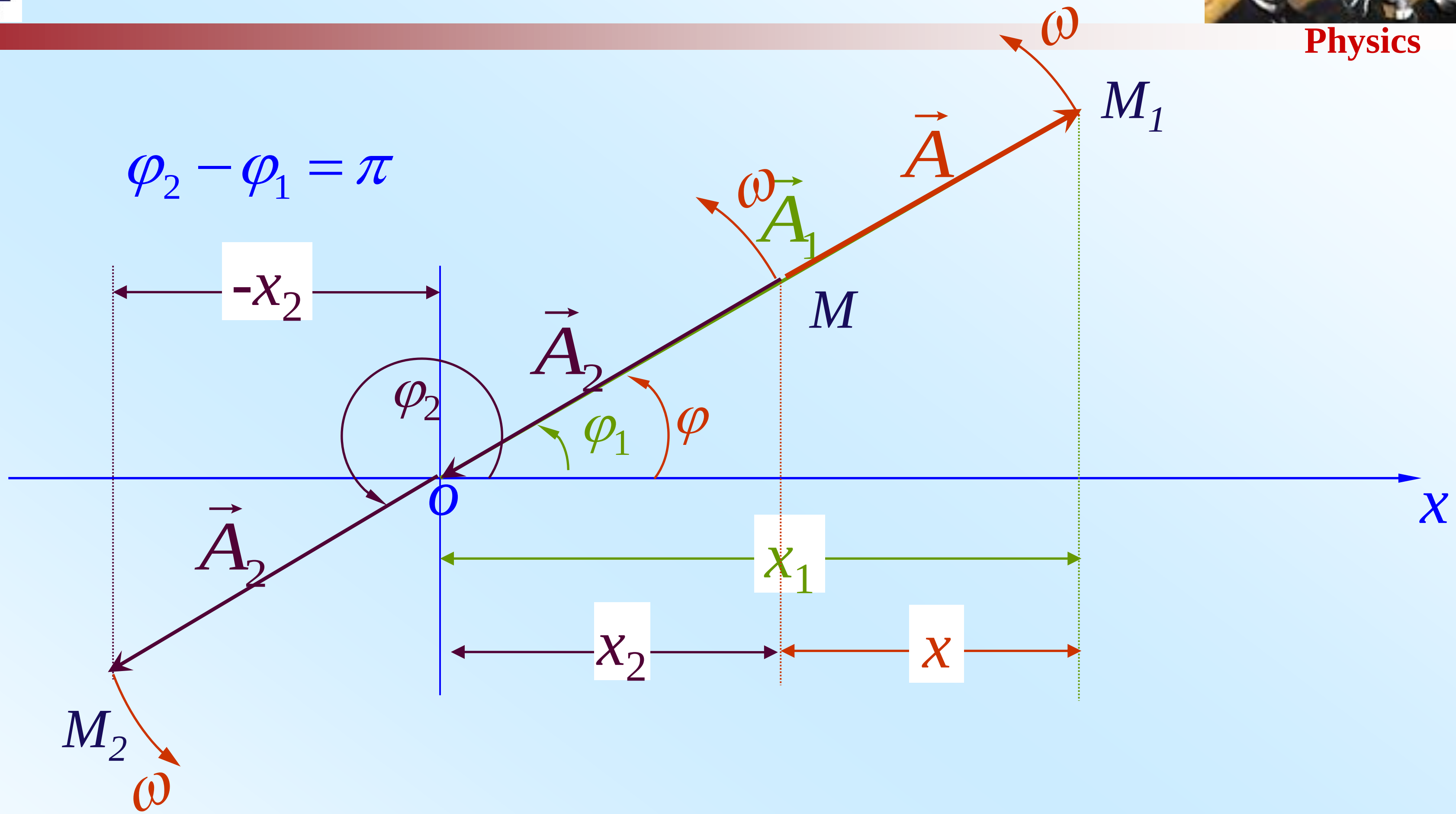


$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \xrightarrow{\text{合成矢量投影}} x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

反相振动的合成：

$$\varphi_2-\varphi_1=\pi$$



$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2\xrightarrow{\text{合成矢量投影}}x=x_1-x_2=(A_1-A_2)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\varphi=\varphi_1=\varphi_2-\pi$$

3. *n* 个同方向同频率谐振动的合成

例 设有 *n* 个同方向、同频率、振幅 *a* 相同、初相差依次为一常量ε的谐振动，它们的振动分别为

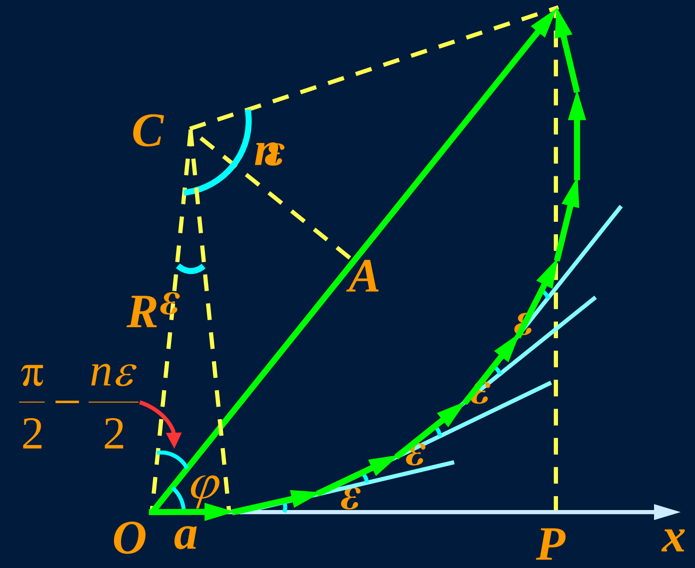
$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\varepsilon)$$

$$\cdots\ \cdots \quad \cdots\ \cdots$$

$$x_n = a\cos[(\omega t + (n-1)\varepsilon]$$



求 合振动的振动方程。

解 $$x = \sum x_n = A\cos(\omega t + \varphi)$$

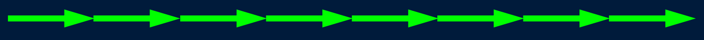
$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

$$A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2} \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\pi-\varepsilon) - \frac{1}{2}(\pi - n\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t+\frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

➢ **讨论:**

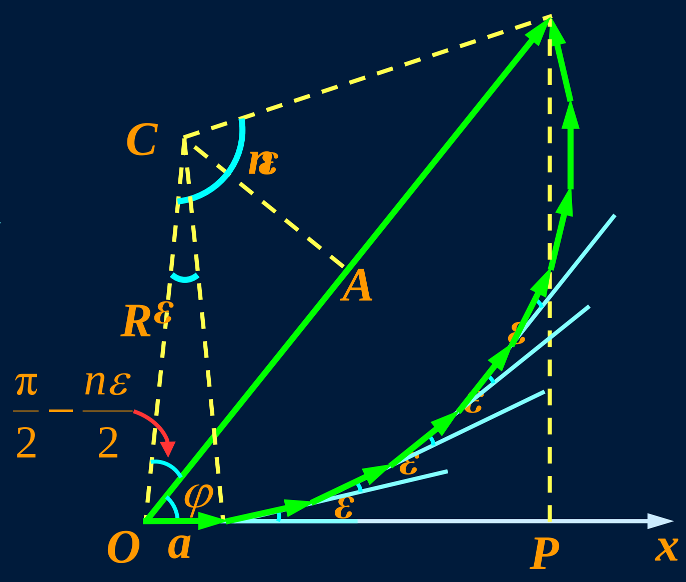
极大值: $\varepsilon = 2k\pi$



$A = na$

极小值: $\varepsilon = \dfrac{2k'\pi}{n}, \quad k' \neq nk$

$A = 0$



次极大: … …

（2） 频率不同的振动

两个振动为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

且设：

$$\omega_2 > \omega_1$$

合成后：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

展开：

$$x = A_1 \cos \omega_1 t \cos \varphi - A_1 \sin \omega_1 t \sin \varphi$$

$$+ A_2 \cos \omega_2 t \cos \varphi - A_2 \sin \omega_2 t \sin \varphi$$

若设：

$$A_1 = A_2 = a$$

可得：

$$x = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

令：

$$\boxed{A = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t)}$$

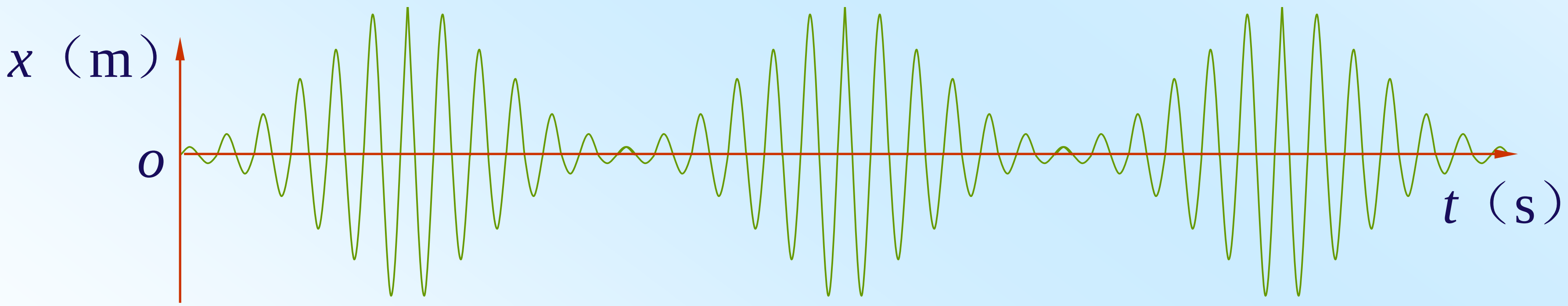
合成后振动的特征：

①变振幅A 和角频率ω的振动。

$$x = 2a\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right)$$

②振幅A是以角频率（ω2-ω1）/2随时间做周期性变化。

（ω_2-ω_1）/2 < （ω_2+ω_1）/2，振动时强时弱—拍现象。



（ω_2-ω_1）/2:调制频率　　（ω_2+ω_1）/2:载波频率

③振幅A总是正值，振幅变化的周期为下列函数周期：

$$\left|2a\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$$

振幅的周期为τ

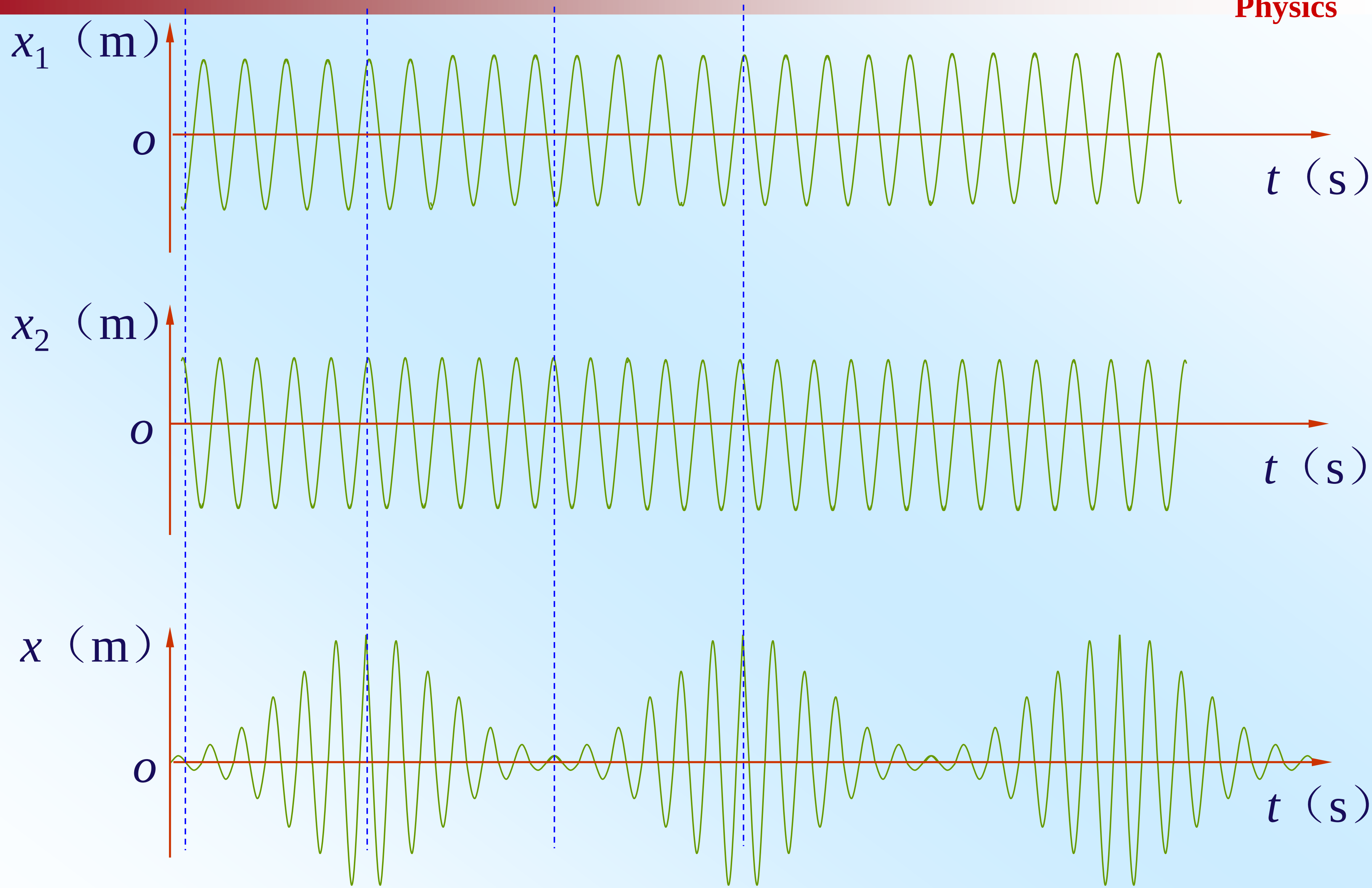
$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau=\pi$$

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

振幅的频率为$\nu_{拍}$称为拍频

$$\nu_{拍}=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$$

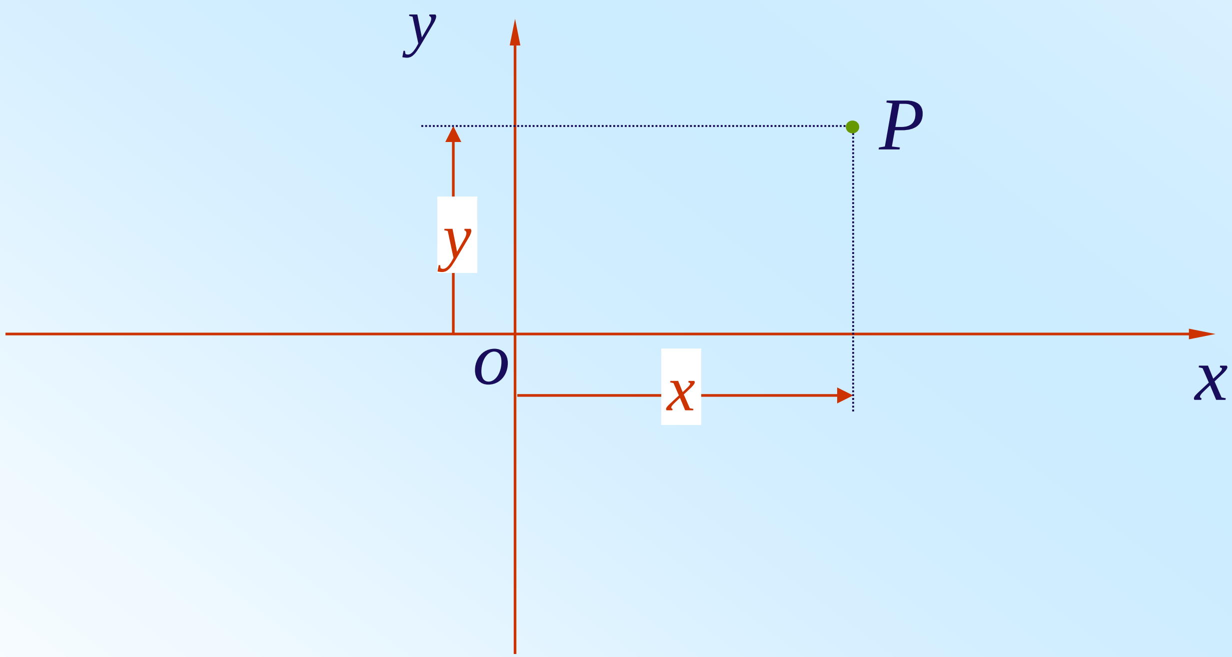
合成后振动的拍频等于两振动的频率差。



x_1（m）
o
t（s）
x_2（m）
o
t（s）
x（m）
o
t（s）

2. 两个相互垂直方向简谐振动的叠加

质点将在平面上做曲线运动，
轨道的形状和两振动特性有关。



（1） 频率相同的振动

时刻 t 两个垂直的振动：

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

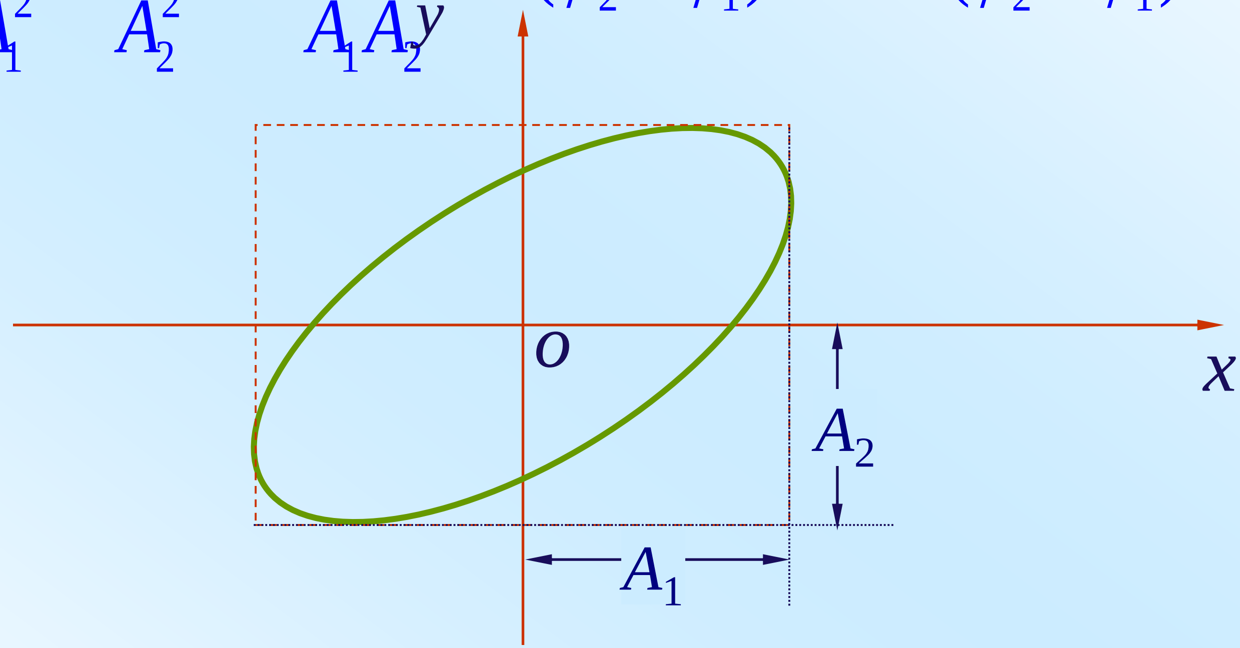
消去参量 t 后可得质点的轨道方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

合成后振动的轨道方程为 xy 平面上一椭圆

合成后振动的特征：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

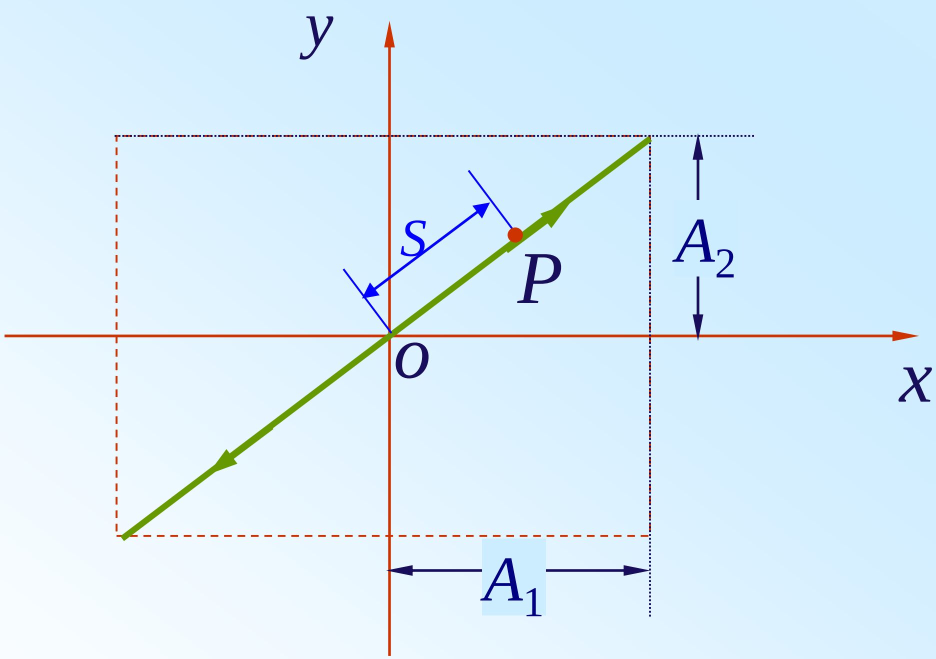


轨道椭圆被限制在以$2A_1$和$2A_2$为边长的矩形内，具体形状取决于两振动的相位差（φ_2-φ_1）。

①两振动同相时： $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

轨道方程 $\left(\dfrac{x}{A_1} - \dfrac{y}{A_2}\right)^2 = 0$ $\qquad \dfrac{x}{A_1} = \dfrac{y}{A_2}$

振动的轨道是斜率为A_2/A_1的一条直线。



任意时刻质点离开平衡位置的位移：

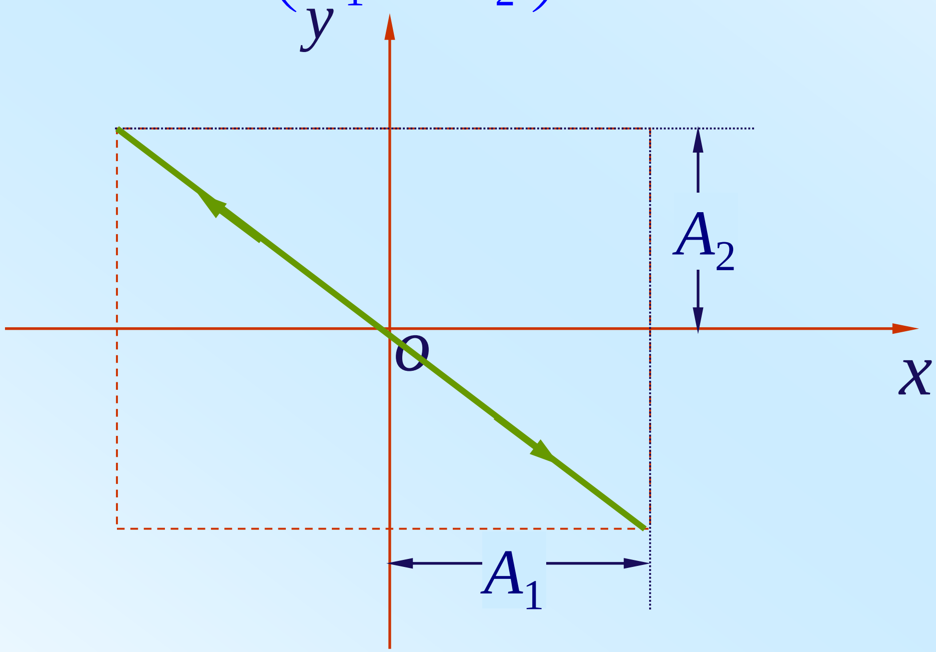
$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega t + \varphi)$$

振子以原周期2π/ω做简谐振动，振幅为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

②两振动反相时： $\varphi_2-\varphi_1=\pi$

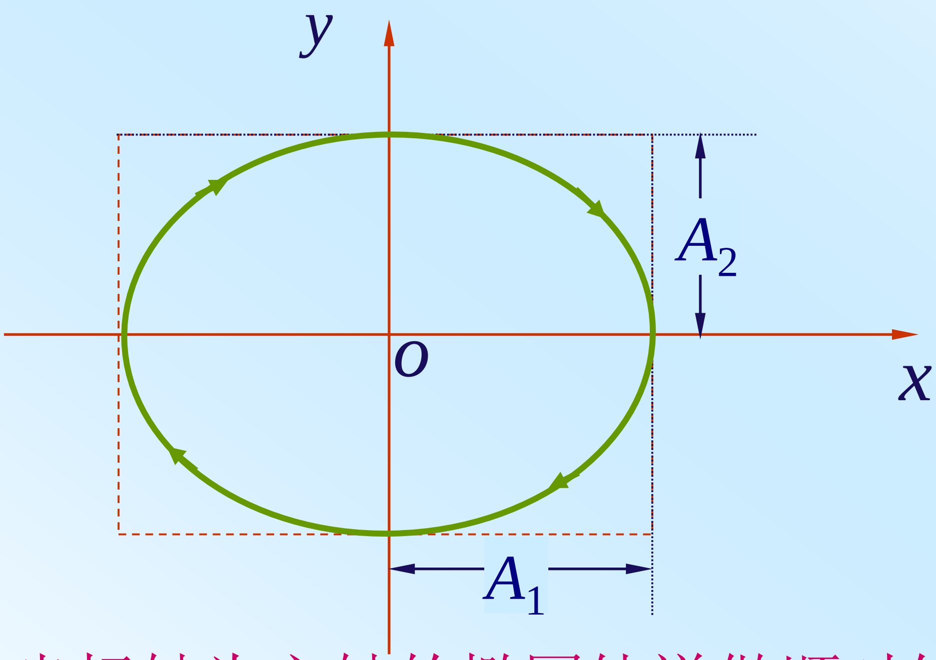
轨道方程 $\left(\dfrac{x}{A_1}+\dfrac{y}{A_2}\right)^2=0$ $\dfrac{x}{A_1}=-\dfrac{y}{A_2}$



振子在斜率为-A_2/A_1的一条直线上。以原周期$2\pi/\omega$做简谐振动，振幅为 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$

③两振动相位差为： $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

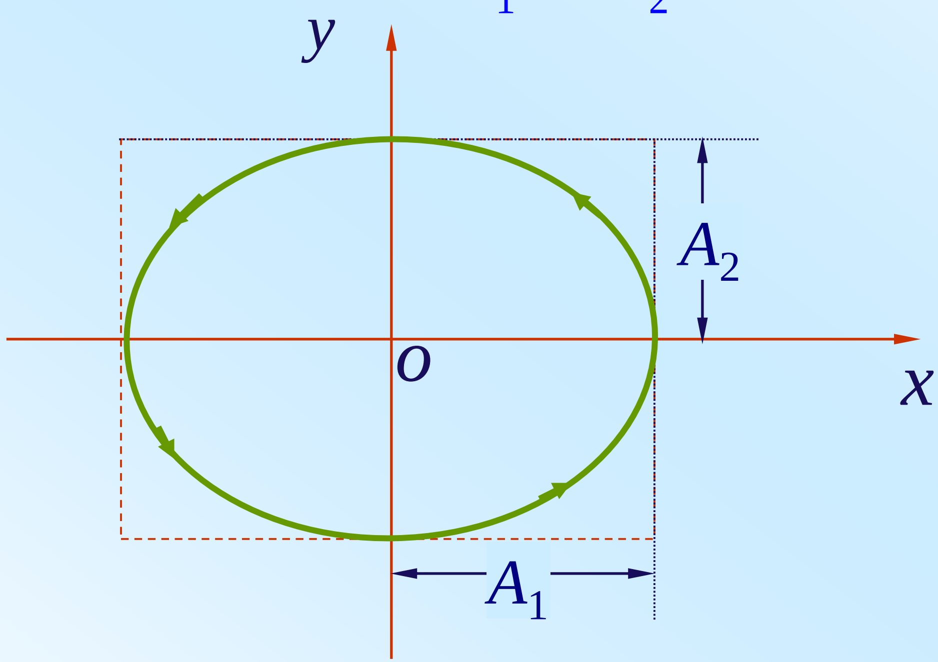
轨道方程 $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



质点沿以坐标轴为主轴的椭圆轨道做顺时针运动。

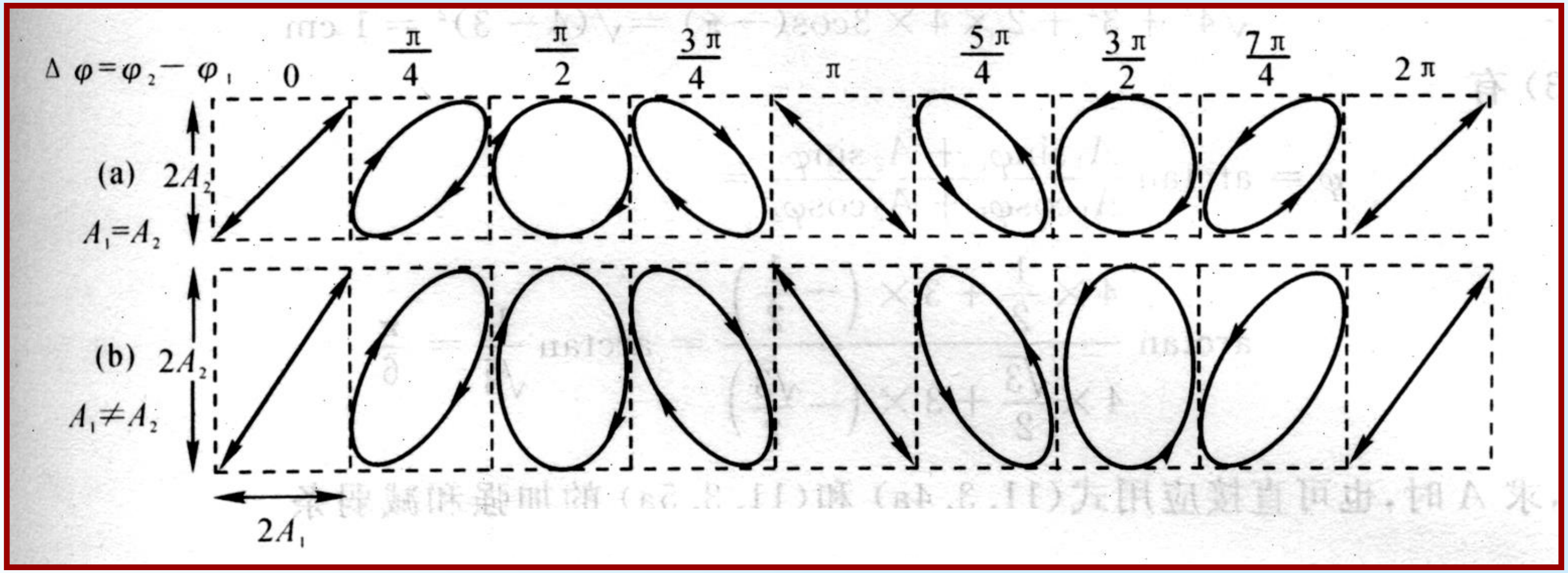
④两振动相位差为： $\varphi_2-\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$

轨道方程 $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



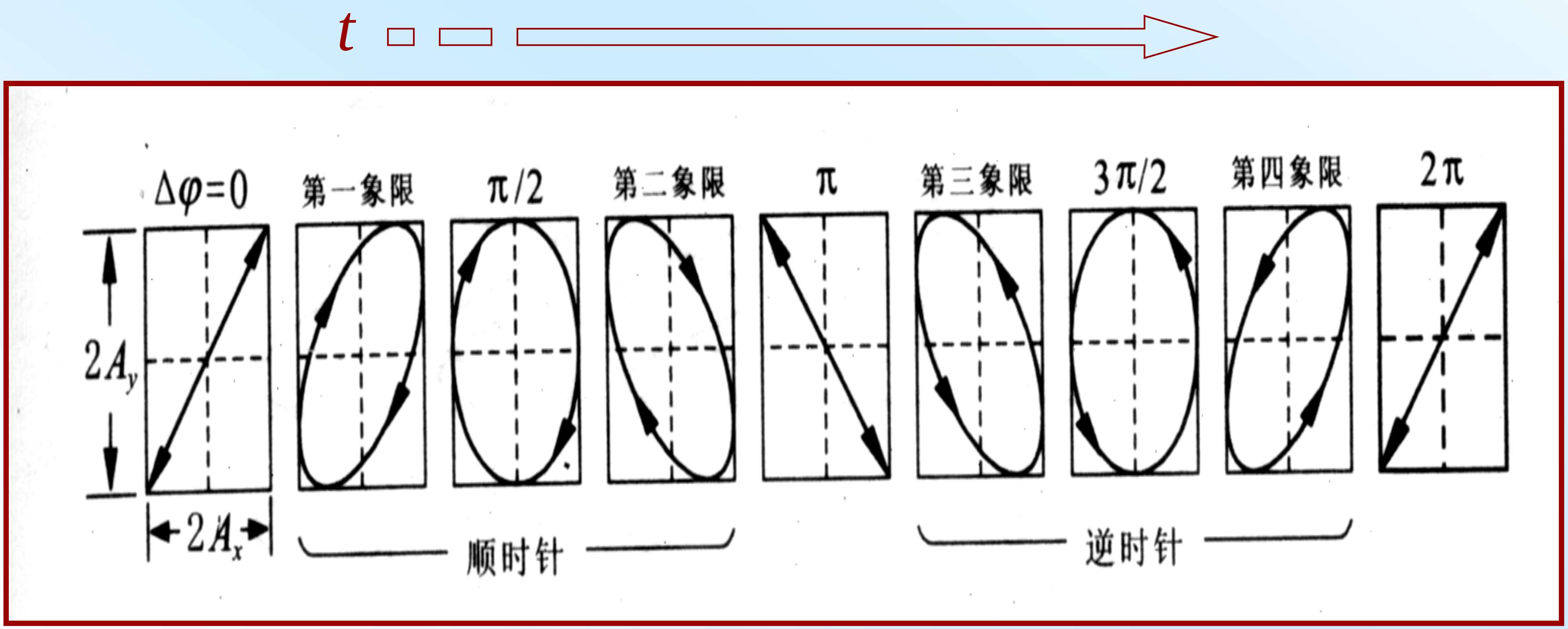
质点沿以坐标轴为主轴的椭圆轨道做逆时针运动。

结论：同频率相互垂直的简谐振动合成后振动的轨道为椭圆，椭圆的性质由相位差决定。反之直线运动、椭圆运动和圆周运动可以分解为两个相互垂直的同频率的简谐振动的合成。

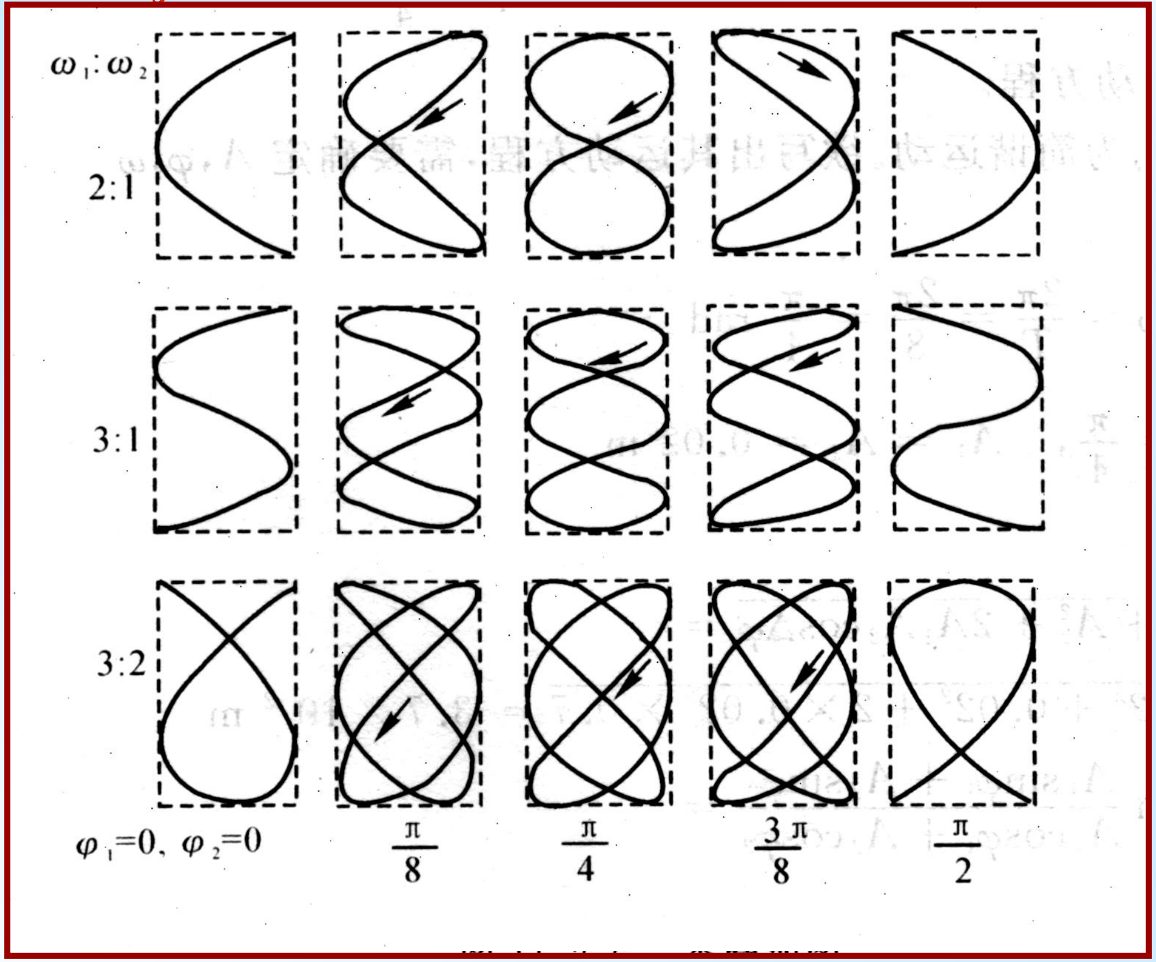


（2） 频率不相同的振动

①两振动频率相差很小时，相位差值随时间变化，运动轨道随相位差变化而变化：



②两振动频率相差较大时，只有在频率有简单的数值比关系时，质点才有稳定的闭合轨道——李萨如（J.A.Lissajous）图形。



§12.4 阻尼振动和受迫振动简介

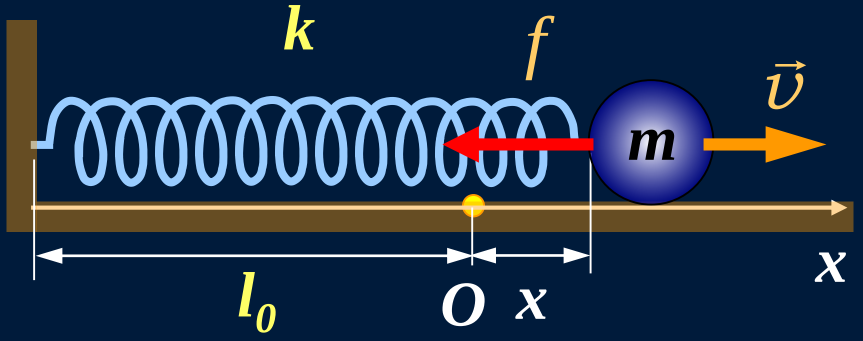
主要内容：

1. 阻尼振动

2. 受迫振动

12.4.1 阻尼振动

阻尼力　　$f = -\mu \dot{x}$



振动的微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - \mu \dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

式中，$\omega^2 = k/m$, $n = \mu/(2m)$　(阻尼系数)

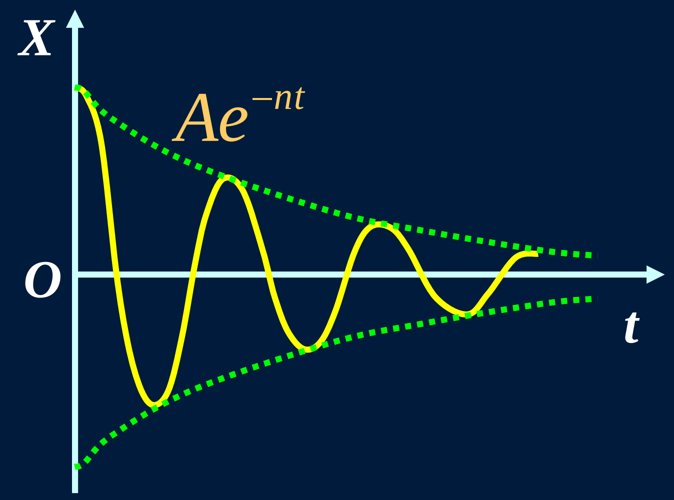
几种阻尼振动模式

❖小阻尼　❖临界阻尼　❖大阻尼

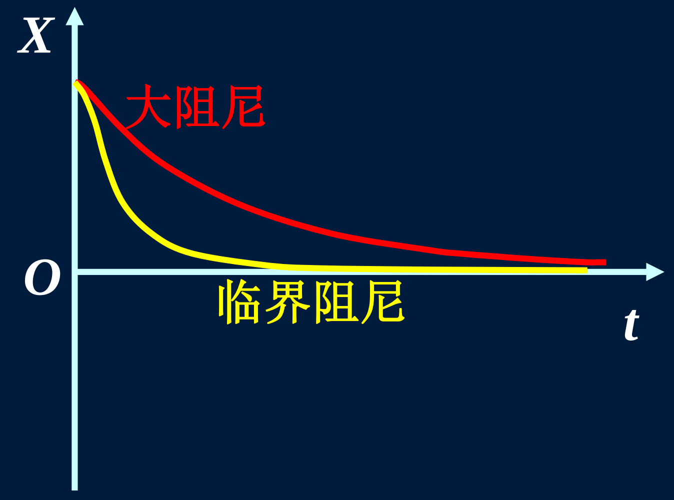
1. 小阻尼 ($n^2 < \omega^2$)

$$x = Ae^{-nt}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}\,t + \varphi)$$

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} > T$$



2. 临界阻尼($n^2 = \omega^2$)

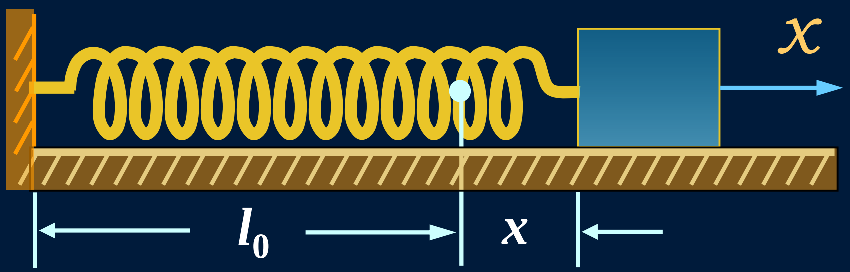


3. 大阻尼($n^2 > \omega^2$)

在过阻尼和临界阻尼时无振动.

阻尼的应用

12.4.2 受迫振动



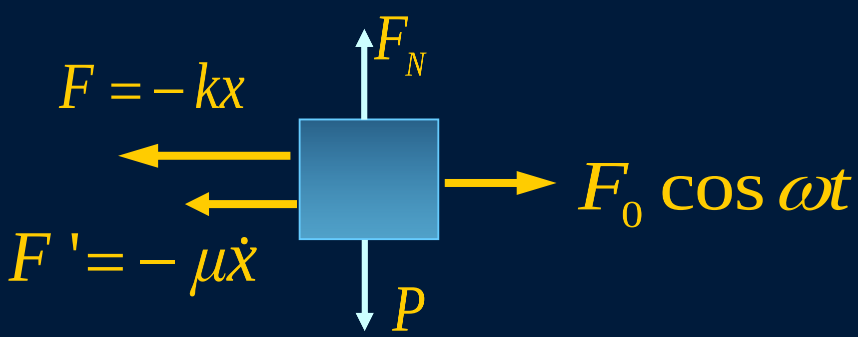
受力分析

弹性力 $\quad -kx$

阻尼力 $\quad -\mu\dot{x}$

周期性驱动力

$$F = F_0 \cos \omega t$$



受迫振动的微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad \left(\text{令：} \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ; \ n = \frac{\mu}{2m} \ ; \quad f = \frac{F_0}{m}\right)$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

其解为 $\quad x = x_1(\text{通解}) + x_2(\text{特解})$

受迫振动微分方程的稳态解为:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

其中，振幅 **A** 及受迫振动与干扰力之间的相位差φ分别为:

$$A = \frac{f}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- **结论:**

振幅 ***A*** 及受迫振动与干扰力之间的相位差 φ 都与起始条件无关。

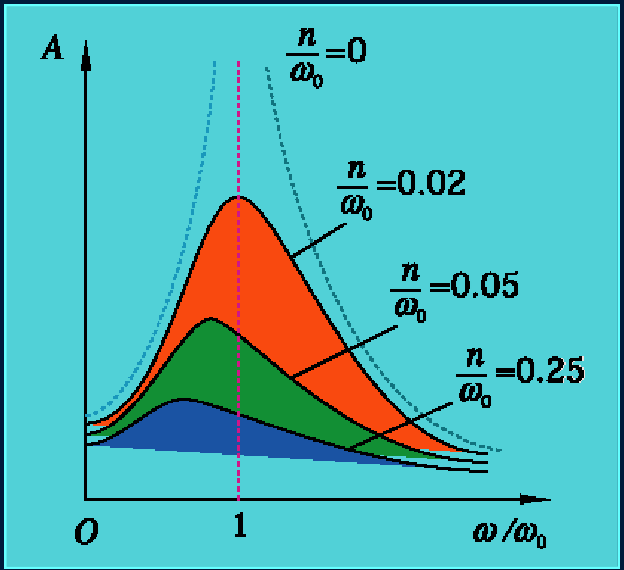
讨论:

- 位移共振(振幅取极值)
- 速度共振(速度振幅取极值)

1. 位移共振(振幅取极值)

共振频率 ： $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}$

共振振幅 ： $A_r = \dfrac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$



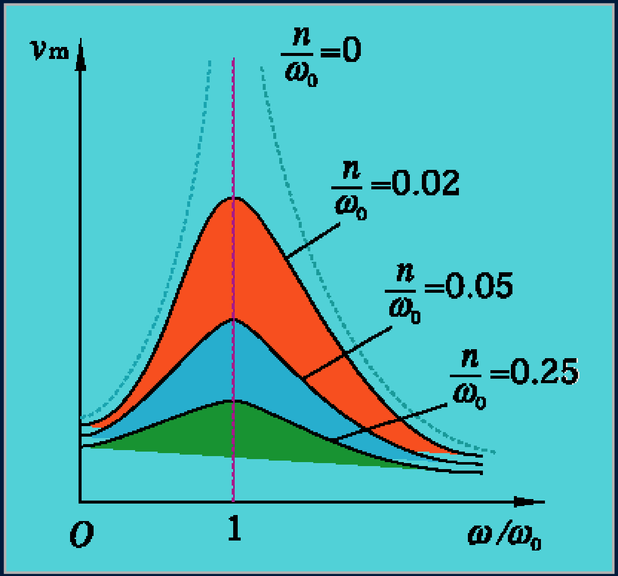
（振幅共振曲线）

2. 速度共振(速度振幅取极值)

$$\upsilon_m = \omega B = \frac{f\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

共振频率 ： $\omega = \omega_0$

共振速度振幅 ： $\upsilon_m = \dfrac{f}{2n}$



（速度共振曲线）

◆ 共振的应用和危害

如何减小共振的影响 … 示教演示

塔科马海峡桥的倒塌

本章小结

1. 简谐振动方程

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. 简谐振动的相位

$(\omega t + \varphi)$ 是 相位，决定 t 时刻简谐振动的运动状态.

3. 简谐振动的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

4. 由初始条件振幅和初相位

$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

5. 弹簧振子的能量

动能： $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$

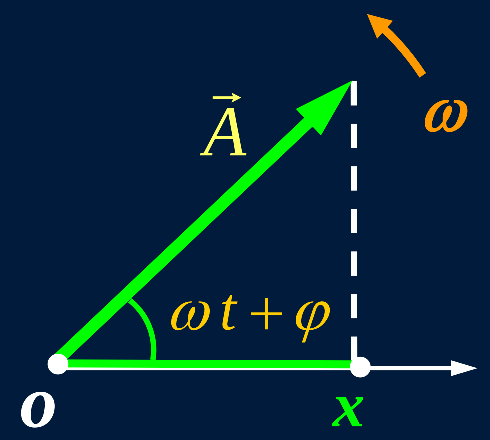
势能： $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t+\varphi)$

总机械能： $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

平均能量： $\overline{E}_{\mathrm{k}} = \overline{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2$

6. 谐振动的旋转矢量表示

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$



7. 简谐谐振动的合成

(1) 同方向同频率谐振动的合成

合振动仍为简谐振动，和振动的振幅取决于两个分振动的振幅及相差，即

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(2) 同方向不同频率谐振动的合成

当两个分振动的频率相差较小时，产生拍的现象，拍频为

$$\nu=\left|(\omega_2-\omega_1)/(2\pi)\right|=\left|\nu_2-\nu_1\right|$$

(3) 相互垂直的两个谐振动的合成

若两个分振动的频率相同，则合振动的轨迹一般为椭圆；若两个分振动的频率为简单整数比，则合振动的轨迹为李萨如图形。

8. 阻尼振动和受迫振动

(1) 阻尼振动

小阻尼 ($n^2 < \omega^2$)情况下，弹簧振子作衰减振动，衰减振动周期比自由振动周期长;

大阻尼($n^2 > \omega^2$)和临界阻尼($n^2 = \omega^2$)情况下，弹簧振子的运动是非周期性的，振子随着时间逐渐返回平衡位置。临界阻尼与大阻尼情况相比，振子能能更快地返回到平衡位置。

(2) 受迫振动

在周期性驱动力作用下的振动。稳态时振动的角频率与驱动力的角频率相同;

当驱动力角频率 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}$ 时，振子振幅具有最大值，发生位移共振;

当驱动力角频率$\omega_r = \omega_0$时，振子速度振幅具有最大值，系统发生速度共振。

水　　波

（本章由张孝林编写制作）

塔科马海峡吊桥（英语：**Tacoma Narrows Bridge**）是位于美国华盛顿州塔科马的两条悬索桥。第一座塔科马海峡大桥，绰号舞动的格蒂，于**1940**年**7**月**1**日通车，四个月后戏剧性地被微风摧毁，这一幕正好被一支摄影队拍摄了下来，该桥因此声名大噪。重建的大桥于**1950**年通车，被称为：强壮的格蒂；**2007**年，新的平行桥通车。

大桥被风吹垮发生于美国太平洋时间**1940**年**11**月**7**日上午**11**时，原因是气弹颤振。