第六节　高斯(Gauss)公式 通量与散度

- 一、高斯公式
- ★ 二、哈米尔顿算符与拉普拉斯算符
- 三、通量与散度

一、高斯公式

平面闭曲线 Green 公式	$\xrightarrow{\text{推广}}$	空间闭曲面 Gauss 公式

定理10.7 设 Ω 是一空间闭区域, 其边界曲面 $\partial\Omega$ 由分片光滑的曲面组成, 如果函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$在 Ω 上具有一阶连续的偏导数, 那么

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint\limits_{\partial\Omega^{+}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\oiint\limits_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

或

$$=\oiint\limits_{\partial\Omega^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 $\partial\Omega^+$ 表示 Ω 的边界曲面的外侧.

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\partial\Omega^+$ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

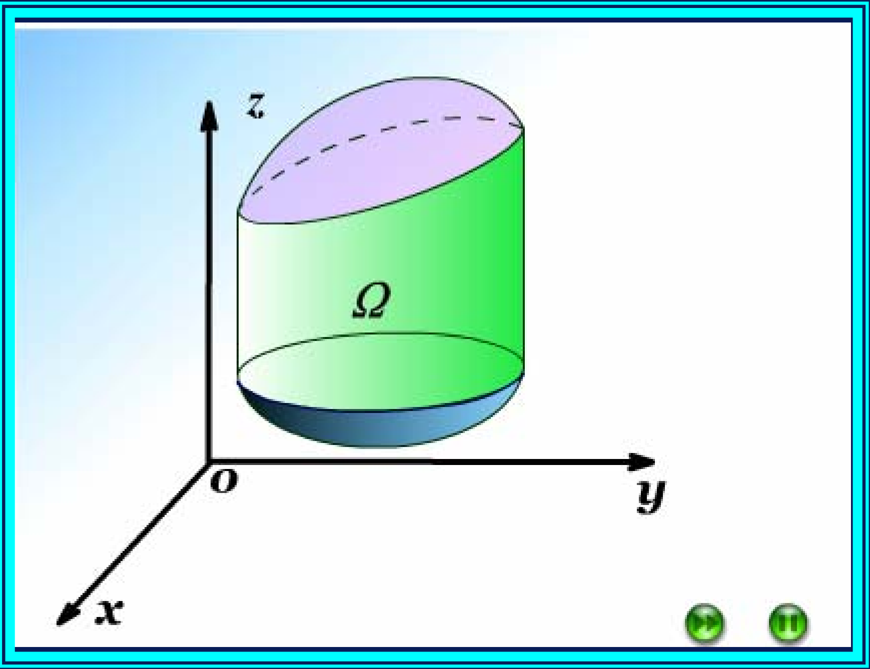
证 先证明第三项

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

假设：

(1) 闭区域Ω在xOy面上的投影区域为D_{xy};

(2) 设穿过Ω内部且平行于z轴的直线与Ω的边界曲面Σ的交点恰好是两个，即Ω是$XY-$型区域;

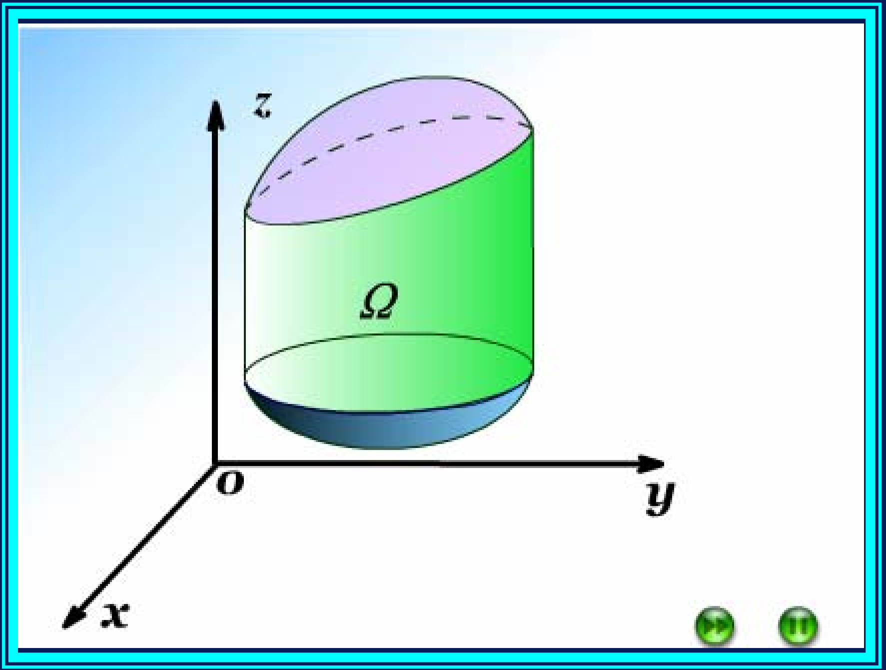


(3) $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$,

$\Sigma_1: z=z_1(x,y)$，下侧

$\Sigma_2: z=z_2(x,y)$，上侧

Σ_3：以D_{xy}的边界曲线为准线，母线平行于z轴的柱面上的一部分，取外侧.



$\therefore\ \Omega: z_1(x,y)\le z(x,y)\le z_2(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

一方面，$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \{R(x, y, z_2(x, y)] - R(x, y, z_1(x, y)]\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

另一方面，

$$\oiint\limits_{\partial\Omega^+} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$\therefore$ $$\oiint\limits_{\partial\Omega^+} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0$$

即 $$\oiint_{\partial\Omega^+} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y)]-R(x,y,z_1(x,y)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}v=\oiint_{\partial\Omega^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y)]-R(x,y,z_1(x,y)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理，若Ω同时为YZ－型区域和XZ－型区域，

下两式也成立

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z; \quad \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} \mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

三式相加可得

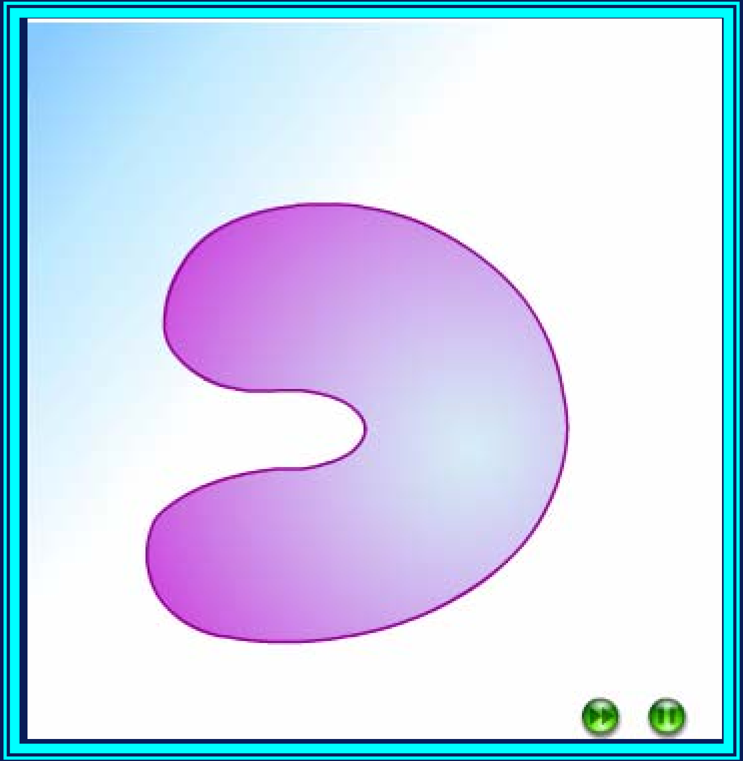
高斯公式

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若Ω同时为$XY-$型、$YZ-$型和$XZ-$型区域,

称为简单区域.

若Ω不是简单区域,



则可引进辅助面将其分割

成若干个简单区域, 在辅助

面正反两侧面积分正负抵消,

故高斯公式仍成立.

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint\limits_{\partial\Omega^{+}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注 1° 高斯公式表达了空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

2° 高斯公式使用的条件:

① Σ封闭，外侧(内)

② P, Q, R 在Σ所围闭区域Ω上有一阶连续偏导数.

奇点: Σ所围闭区域Ω上，使P, Q, R 没有一阶连续偏导数的点.

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

3° 令 $P = x, Q = y, R = z$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$$

由高斯公式可得空间立体的体积:

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ是正方体

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\}$$

的表面外侧. (§5，例4)

解 (方法2) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$

$$=3a^3.$$

例 2 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧.

注意积分曲面的方向

解 $I=-\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

球面坐标

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=-3\times\frac{a^5}{5}\times 2\times 2\pi=-\frac{12}{5}\pi a^5$$

例3 利用高斯公式计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) \mathrm{d}S$$

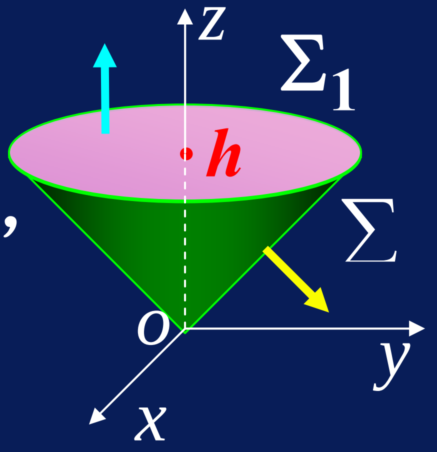
其中Σ为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$介于平面 $z = 0$ 及 $z = h (h > 0)$之间的部分的下侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ在点(x, y, z)处的法向量的方向余弦.

解(方法1) 补 $\Sigma_1 : z = h$，上侧

$(x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le h^2\}$,

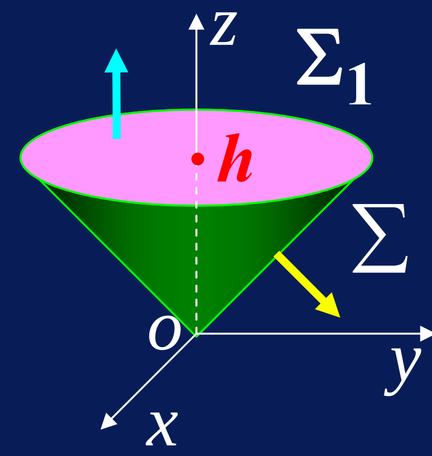
则$\Sigma + \Sigma_1$封闭，外侧

Ω：$\Sigma + \Sigma_1$围成的空间闭区域.



$$P = x^2, \qquad Q = y^2, \qquad R = z^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$



$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

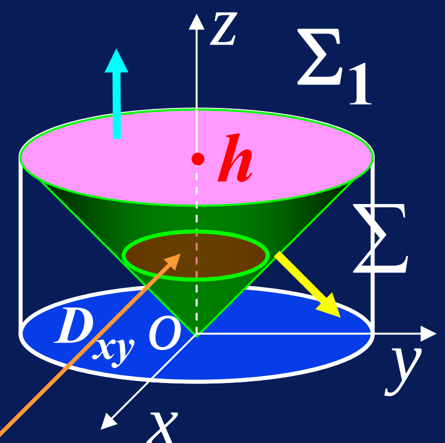
$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega}(x + y + z)\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

关于y奇函数

$$= 2\left[\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v\right]$$

关于zOx面对称



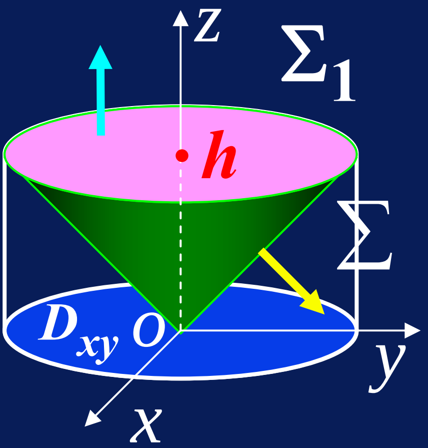
D_z: $\sqrt{x^2+y^2} \le z$

$$= 2\left[0 + 0 + \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v\right]$$

方法2 $$=\!=\!= 2\int_0^h z\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4$$

Σ_1 : $z = h$, $(x, y) \in D_{xy}$, 上侧



$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le h^2\}$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_1} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 + 0 + \iint_{\Sigma_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ_1在 yOz 面及 zOx 面的投影为 0

$$= \iint_{D_{xy}} h^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^4$$

$\because \quad \displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\pi h^4$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\pi h^4$$

$\therefore \quad \displaystyle I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

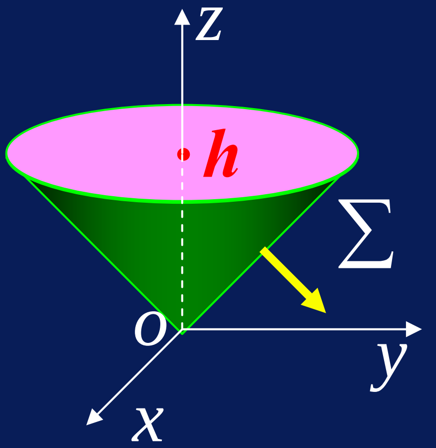
(方法2)

由对称性知 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \rho^3 \mathrm{d}\rho = -\frac{\pi}{2}h^4.$$



目录 上页 下页 返回 结束

例4 求以速度 $\vec{v}=(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 穿过球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$流向其外侧的流量 .

分析 流量:

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

虽然Σ封闭，但 P，Q，R在Σ内有奇点(0, 0, 0),

所以不能直接用高斯公式.

解(方法1) 变形后，用高斯公式.

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$= \oiint_{\Sigma} \frac{x}{a^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{a^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{a^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=} \frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v = \frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi.$$

(方法2)利用两类曲面积分的关系.

$$\because \quad \vec{e}_n = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\therefore \quad \Phi = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oiint_{\Sigma} \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi.$$

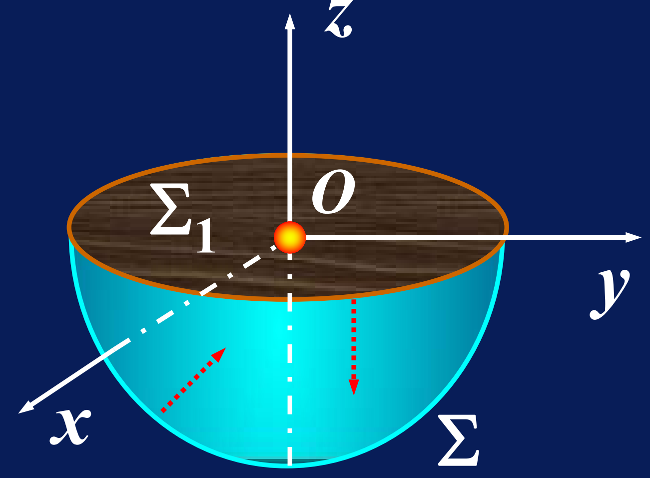
例 5 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

其中Σ为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，a为大于零的常数.

解 Σ不封闭， 补

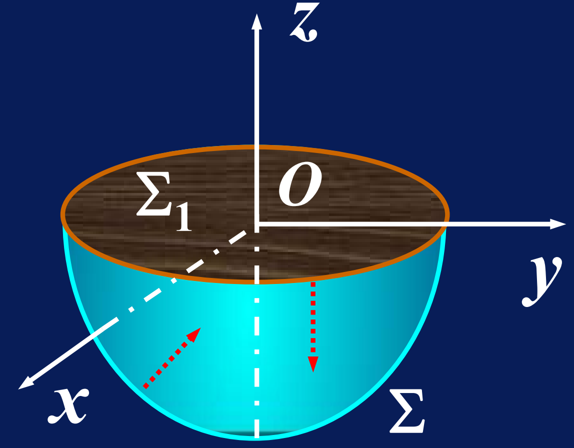
Σ_1： $z=0\,(x^2+y^2\le a^2)$， 下侧

$\Sigma+\Sigma_1$ 封闭，内侧.



能否直接用高斯公式？ 否！

变形:



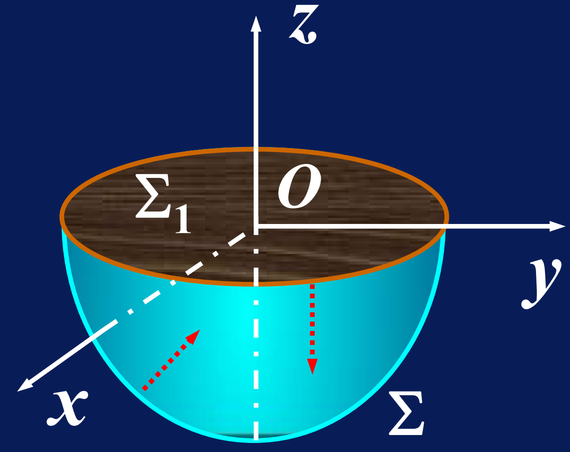
$$I = \frac{1}{a}\iint_{\Sigma} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a}\Big(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\Big)[ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint_{\Omega}[a + 2(z+a)]\,\mathrm{d}v = -\iiint_{\Omega}[3a + 2z]\,\mathrm{d}v$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= -\iiint_{\Omega} [3a + 2z]\,\mathrm{d}v$$

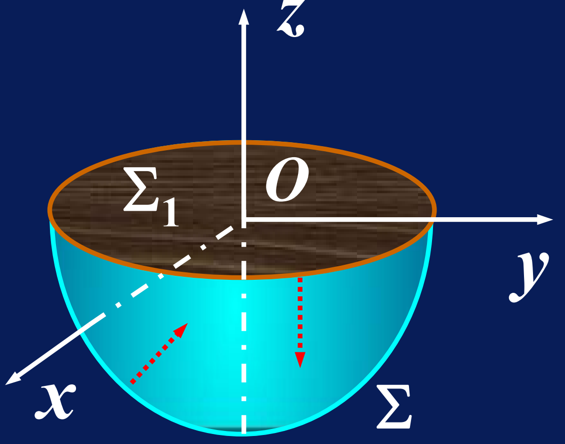
$$= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a} (3a + 2r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= -\left[\, 3a \cdot \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi + \frac{2}{4} a^4 \left(-\frac{2\pi}{2}\right) \right] = -\frac{3}{2}\pi a^4$$

$$\iint_{\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + \iint_{\Sigma_1} (z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}a^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=-\pi a^4$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{a}\Big[\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\Big]=\frac{1}{a}\Big[-\frac{3}{2}\pi a^4+\pi a^4\Big]$$

$$=-\frac{\pi}{2}a^3$$

目录 上页 下页 返回 结束

★ 二、哈密尔顿算符与拉普拉斯算符

哈密尔顿算符 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

向量微分算子

算符既可作用到数量值函数上，也可以象通常的向量一样进行运算.

读作“纳普拉”(*Nabla*)或“台尔”(*del*)

1. 设 $u = u(x, y, z)$, 则

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\therefore \quad \nabla u = \mathbf{grad}\, u$$

2. 设$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$,则

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

目录 上页 下页 返回 结束

3. 三维拉普拉斯算符

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

它作用于数量值 u 可得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \mathit{grad}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \Delta u$$

三、通量与散度

1. 通量

(1)定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$P,\ Q,\ R$具有连续一阶偏导数，Σ是有向曲面片，其单位法向量为$\vec{n}$，称

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

为向量场$\vec{A}$通过有向曲面 Σ 的通量.

(2) 背景

1° 流量

流速：$\vec{A}=\vec{v}=(P,Q,R)$

2° 电通量

电位移：$\vec{A}=\vec{D}=(P,Q,R)$

3° 磁通量

磁场强度：$\vec{A}=\vec{B}=(P,Q,R)$

(3) 通量$\Phi > 0$ (<0, $=0$)的物理意义

以流速场为例.

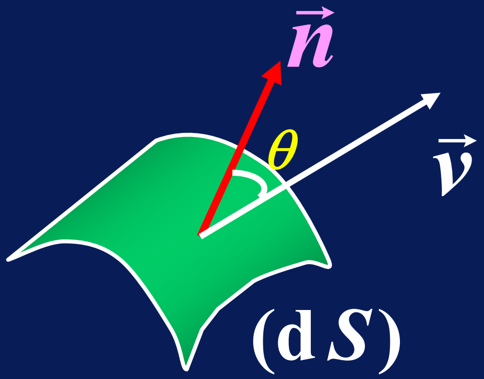
穿过曲面$(\mathrm{d}\,S)$流向$\vec{n}$指定侧的流量元素:

$$\mathrm{d}\,\Phi = \vec{v}\cdot\vec{n}^{\circ}\,\mathrm{d}\,S = |\vec{v}|\cos\theta\,\mathrm{d}\,S$$

$\because\ \mathrm{d}\,\Phi > 0\,(0 \le \theta < \frac{\pi}{2})$:

$(<)$

$(\theta > \frac{\pi}{2})$:



流体的实际流动方向是 $\vec{n}$ 指定的一侧

$(-\vec{n})$

$\therefore\quad \Phi=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}^{\circ}\,\mathrm{d}S$: 流体穿过 Σ，流向 $\vec{n}$ 指定侧的流体质量的代数和 (简称流量).

$\therefore\quad \Phi>0$: 流体从 Σ的负侧 ($-\vec{n}$ 指定侧)流

(<)

(=)

向正侧 ($\vec{n}$ 指定侧)的流体质量

多于从正侧流向负侧的流体 质量。

(少) (等)

若Σ为闭曲面外侧，则 $\Phi>0$: 流出 > 流入，

(<) (<)

Σ内有正源 .

(负)

即对于稳定的不可压缩的流体，单位时间通过

Σ（Σ为取外侧的闭曲面）的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1. $\Phi > 0$ 时，流入Σ的流体质量少于流出的，Σ内有泉；以产生同样多的流体进行补充.

2. $\Phi < 0$ 时，流入Σ的流体质量多于流出的，Σ内有洞；以吸收同样多的流体进行抵消.

3. $\Phi = 0$ 时，流入与流出Σ的流体质量相等，Σ内无源.

2. 散度

(1) 定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

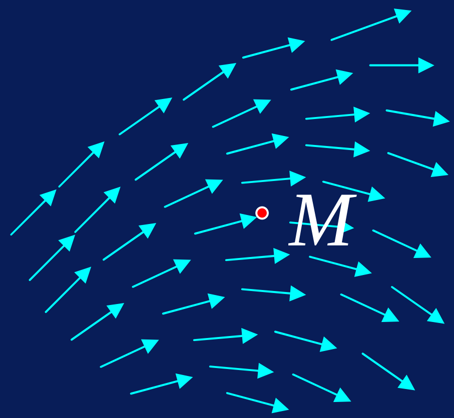
在点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \underline{\underline{\text{记作}}}\ \operatorname{div}\vec{A}$$

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

根据高斯公式，流量也可表为

$$\Phi=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



设Σ是包含点M且方向向外的任一闭曲面，所围区域Ω的体积为V，

令Ω以任意方式缩小至点M，

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

积分中值定理

$$=\lim_{\Omega\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}>0$$ 表明该点处有正源,

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}<0$$ 表明该点处有负源,

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}=0$$ 表明该点处无源,

上述极限绝对值的大小反映了源的强度.

可以将通量对体积的变化率定义为散度.

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}S=\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}$$

(2) $\operatorname{div}\vec{A}$的意义：通量密度，即在单位时间内，单位体积所产生或吸收的通量. 可用于检验“源”的分布，度量“源”的强度.

$\operatorname{div}\vec{A}>0$： 该点有产生通量的正源.

$(<)$ (吸收) (负)

$\operatorname{div}\vec{A}\equiv 0\ (\forall M\in\Omega)$： $\vec{A}$是无源场.

$|\operatorname{div}\vec{A}|$： 源的强度.

(3) 高斯公式得的另一种形式:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}\, dV = \oiint_{\Sigma} A_n \, \mathrm{d} S$$

或分布在Ω内的源头所吸收的流体总质量等于进入Ω的流体总质量.

其中Σ是空间闭区域Ω的边界曲面,

A_n是向量$\vec{A}$在曲面Σ的外侧法向量上的投影.

$$(A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}^{\circ} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)$$

内容小结

1. 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

2. 向量场通过有向曲面Σ的通量为 $\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

3. G 内任意点处的散度为 $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

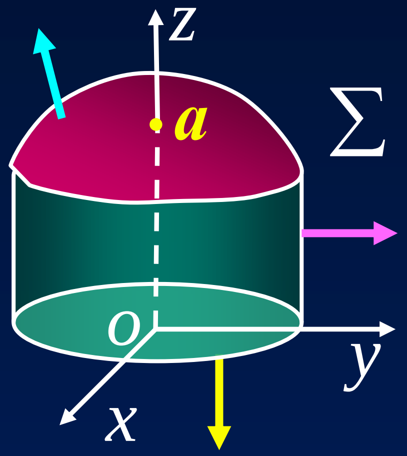
4. 哈密尔顿算符和拉普拉斯算符

备用题

例 1-1 计算积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

Σ是立体 $0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; x^2 + y^2 \le b^2$

$(a > b > 0)$表面的外侧.



解(方法1) 由高斯公式

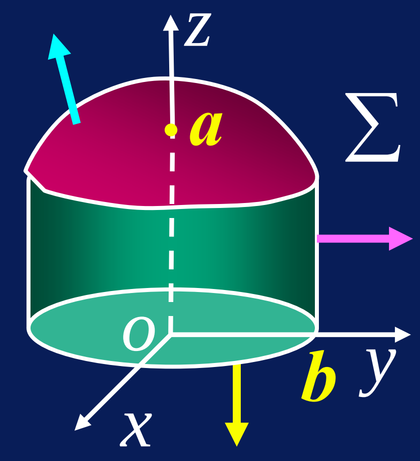
$$I = 2\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



$$= 2\iint_{x^2+y^2\le b^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z$$

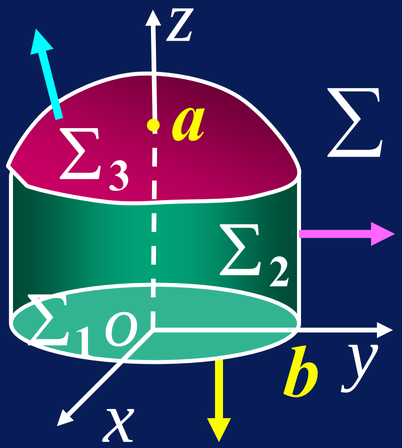
$$= \iint_{x^2+y^2\le b^2} (a^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b (a^2-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi a^2 b^2 - \frac{\pi}{2}b^4$$

$$= \frac{\pi}{2}b^2(2a^2-b^2)$$

(方法2) 直接计算

由对称性知：$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$



$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

$\Sigma_1: z = 0,\ x^2 + y^2 \le b^2$, 下侧;

$\Sigma_2:\ x^2 + y^2 = b^2,\ 0 \le z \le \sqrt{a^2 - b^2}$, 外侧;

$\Sigma_3:\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ \sqrt{a^2 - b^2} \le z \le a$, 上侧;

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

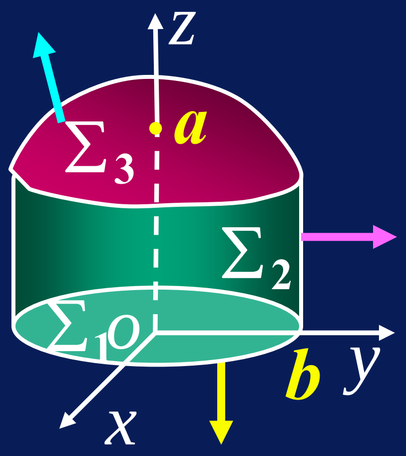
$$I = \iint_{\Sigma_3} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le b^2} (a^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^b (a^2 - \rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi a^2 b^2 - \frac{\pi}{2} b^4$$

$$= \frac{\pi}{2} b^2 (2a^2 - b^2)$$



例 3-1 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

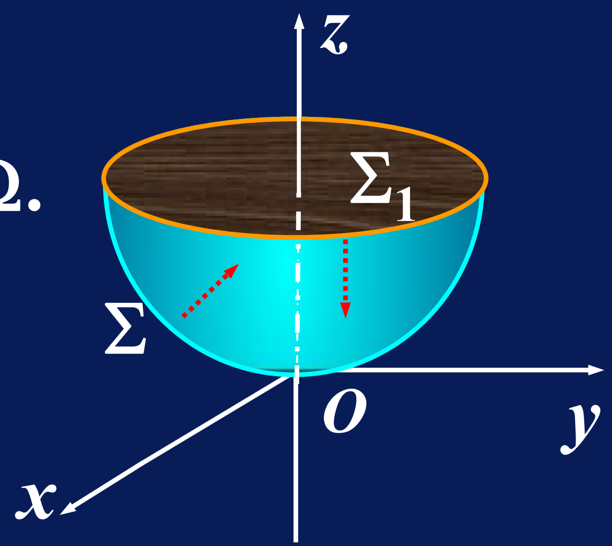
其中Σ为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$法向量指向与z轴正向夹角为锐角的一 侧.

解 作辅助曲面 Σ_1: $z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，下侧

$\Sigma+\Sigma_1$封闭，内侧.

$\Sigma+\Sigma_1$围成的空间闭区域为Ω.

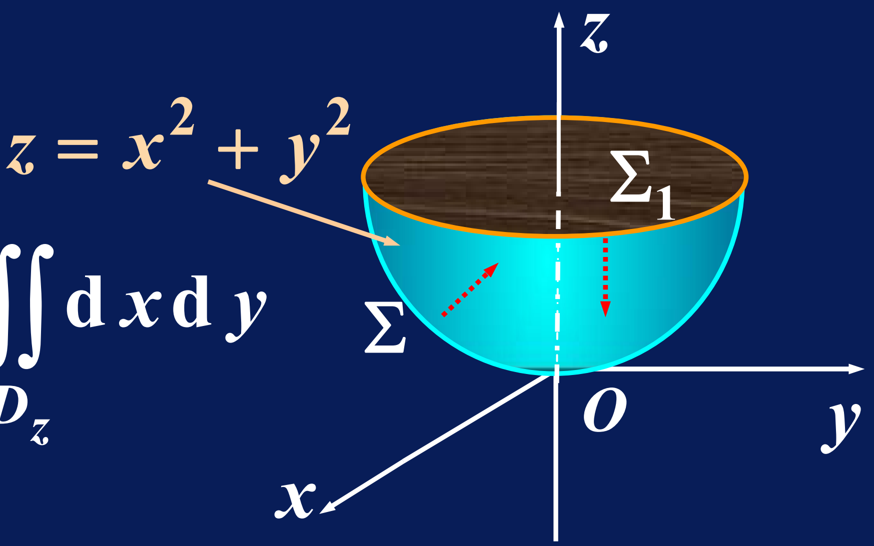
$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$



$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_\Omega(2+1)\mathrm{d}v=-3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^1\pi(\sqrt{z})^2\mathrm{d}z=-\frac{3\pi}{2}$$



$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-1\times\pi=-\pi$$

$$\therefore\quad I=\iint_\Sigma(2x+z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi+\pi=-\frac{\pi}{2}$$

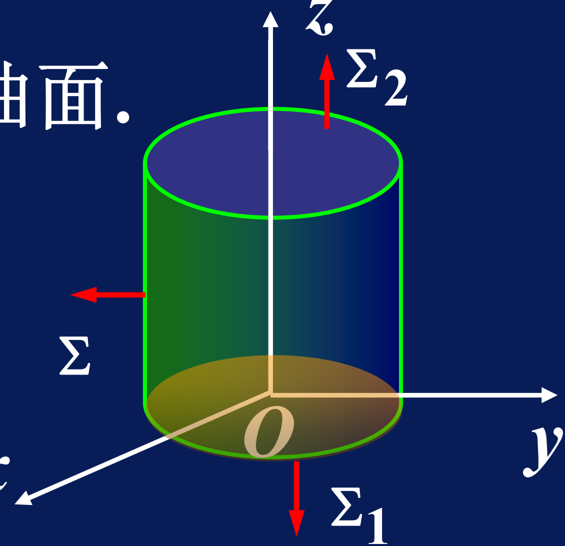
例3-2 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^2\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$,

Σ是柱面$x^2+y^2=a^2$在$0\le z\le h$部分，$\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ 是Σ的外法线的方向余弦.

解 补曲面Σ_1与Σ_2，使其为封闭曲面.

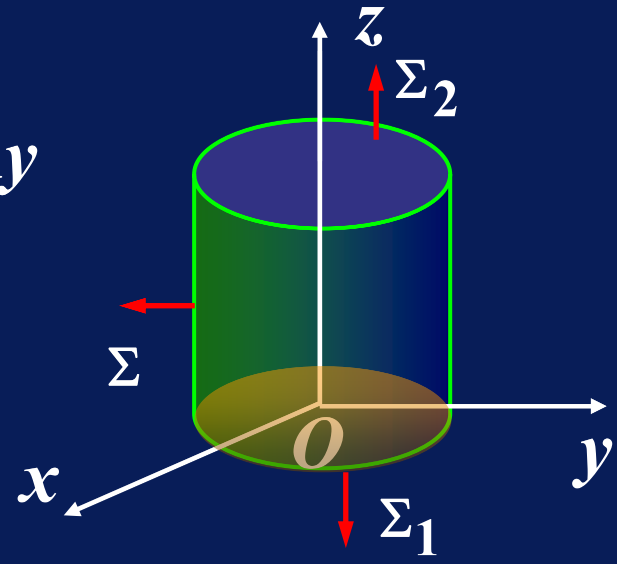
Σ_1： $z=0, x^2+y^2\le a^2$,方向向下，

Σ_2： $z=h, x^2+y^2\le a^2$,方向向上.



$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

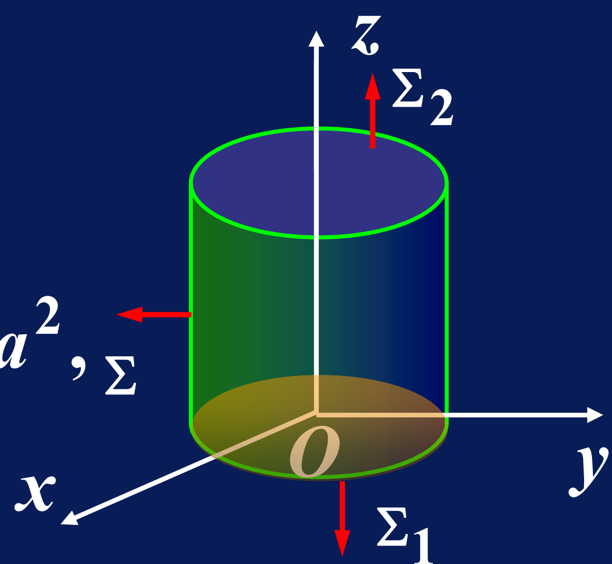
$$=3\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2\,\mathrm{d}\,x\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z+\pi a^2h$$

$$=3h\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho+\pi a^2h=\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2h.$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2 h.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\pi h a^2,$$



则 $$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$$

$$=\left(\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2 h\right)-\pi a^2 h=\frac{3h}{4}\pi a^4.$$

例 4-1 设 Σ 是光滑的闭曲面，V是 Σ 所围的立体 Ω 的体积. r 是点 (x, y, z) 的矢径，$r=|\vec{r}|$.

θ是Σ的外法向与$\vec{r}$的夹角. 试证明：

$$V=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}|\vec{r}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

证 设 $\vec{n}^{\,0}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为$\Sigma$的单位外法向量，

$\vec{r}=(x, y, z)$.

$$\cos\theta=\vec{r}\cdot\vec{n}^{\,0}/|\vec{r}|=(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)/|\vec{r}|$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\cos\theta = \vec{r}\cdot\vec{n}^{0}/|\vec{r}| = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)/|\vec{r}|$$

$$\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}|\vec{r}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

$$= \iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = V.$$