正规子群与同态

正规子群与同态

Q: (1) 陪集是由群上的等价关系建立的，那么这种等价关系满足什么条件时成为同余关系?

(2) 根据这种同余关系, 建立群与它的商群, 它们具有什么关系? 同态?

定义6.19 设G是群, N是G的子群, 如果对G的每个元素a均有:

$$aN=Na$$

则称N是G的正规子群, 此时N的左/右陪集叫做N的陪集.

Note: Abel群的每个子群都是正规子群.

例8中<Z, +>是整数加法群, $<H, +>$是正整数m的所有倍数作成的子群, 它是Z的正规子群.

正规子群

定理6.25 群G的子群N是正规子群的充要条件是:

$$a \circ n \circ a^{-1} \in N \quad (a \in G, n \in N).$$

证明 必要性: 由正规子群的定义可知, $\forall n \in N$, $\exists n_1 \in N$, 使得

$$a \circ n = n_1 \circ a$$

故有 $$a \circ n \circ a^{-1} = n_1 \circ a \circ a^{-1} = n_1 \circ e = n_1 \in N$$

充分性: 由于$a \circ n \circ a^{-1} \in N$ 故$\exists n_1 \in N$, 使得

$$a \circ n \circ a^{-1} = n_1$$

可推得 $$n \circ a^{-1} = a^{-1} \circ n_1$$

由a的任意性, 用a替代a^{-1} 得到: $n \circ a = a \circ n_1$, 可知对任一 $n \circ a \in Na$必有$n \circ a \in aN$, 故有: $Na \subseteq aN$, 同理可证$aN \subseteq Na$, 因此可得: $aN = Na$. 得证.

正规子群的同余关系

定理6.26 群G的正规子群N所确定的陪集关系是一个同余关系.

证明 略.

Note: 同余关系建立后, 也可以研究商代数与原群G的同态映射关系(自然同态).

存在一个满同态映射$g:G\to G/N$, 使得$\langle G,\circ\rangle$与$\langle G/N, *\rangle$同态, 其中G/N是G关于N的陪集关系的商集, 而运算$*$可以定义为:

$$\forall aN, bN\in G/N, \text{有} aN * bN = (a\circ b)N$$

由于$\langle G,\circ\rangle$与$\langle G/N, *\rangle$同态, 所以$\langle G/N, *\rangle$也是一个群, 称为G关于正规子群N的商群.

THE END