微积分（上）期中试题解答

（2022-11-5）

一、填空题(每小题 4 分，共 40 分)

1. $\dfrac{\ln a}{2}$；　2. e^{-2}；　3. 0，二；　4. -2；　5. $\dfrac{3}{4}$；

6. $6,0$；　7. $-\pi,-\pi\,dx$；　8. $y=x$；　9. $-\dfrac{1}{6}$；　10. 1.

二、单项选择题(每小题 4 分，共 40 分)

1. D；2. C；3．C；4. D；5. A；6. B；7. B；8. B；　9. C；10. A.

三、解　令 $y=(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$，则 $\ln y=(\dfrac{\pi}{2}-x)\ln\cos x$，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2\cdot\dfrac{2}{(\pi-2x)^2}}\qquad(3\text{ 分})$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\pi-2x)^2}{\cos x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\pi-2x)^2}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\pi-2x}{-\sin x}=0\qquad(6\text{ 分})$$

原极限 $I=e^0=1$.　（7 分）

四、解　设 $u=e^{-x},v=x^2+2x+2$，

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''\qquad(3\text{ 分})$$

$$=(-1)^n e^{-x}(x^2+2x+2)+n(-1)^{n-1}e^{-x}\cdot2(x+1)+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x}\cdot2$$

$$=(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)].\qquad(7\text{ 分})$$

五、解　函数 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，所以，$x=0$ 是第二类无穷型间断点.　（3 分）

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$，

所以，$x=1$ 是第一类跳跃型间断点.　（6 分）

六、证　（1）已知 $f(0)=0$，要证 $f(a)=1$，先寻找 $x_0:f(x_0)>1$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)>1$.

可导函数 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，$f(0)=0$，$f(x_0)>1$，根据连续函数的介值定理，存在 $a\in(0,x_0)$，使得 $f(a)=1$.　（6 分）

(2) $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可导，根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$$f(a)-f(0)=af'(\xi).$$

又 $f(0)=0$，$f(a)=1$，故 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.　（10 分）