

离散数学



西北工业大学

2022年1月12日 星期三

第一篇 数理逻辑

先看著名物理学家爱因斯坦出过的一道题：

一个土耳其商人想找一个十分聪明的助手协助他经商，有两人前来应聘，这个商人为了试试哪个更聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开灯后说：“这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的，现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在自己头上，在我开灯后，请你们尽快说出自己头上戴帽子是什么颜色的。”说完后，商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把灯打开。这时，那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，其中一个人便喊道：“我戴的是黑帽子。”

请问这个人说得对吗？他是怎么推导出来的呢？

第一篇 数理逻辑

要回答这样的问题，实际上就是看由一些诸如“商人戴的是红帽子”这样的前提能否推出“猜出答案的应试者戴的是黑帽子”这样的结论来。这又需要经历如下过程：

- (1) 什么是前提？有哪些前提？
- (2) 结论是什么？
- (3) 根据什么进行推理？
- (4) 怎么进行推理？

第一篇 数理逻辑

➤ 数理逻辑 (Mathematical Logic)

——是研究演绎推理的一门学科，用**数学的方法**来研究**推理的规律**统称为数理逻辑。

第一篇 数理逻辑

➤ 主要研究内容：推理

——着重于推理过程是否正确

——着重于语句之间的关系

➤ 主要研究方法：数学的方法

——就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

总结

什么是数理逻辑？

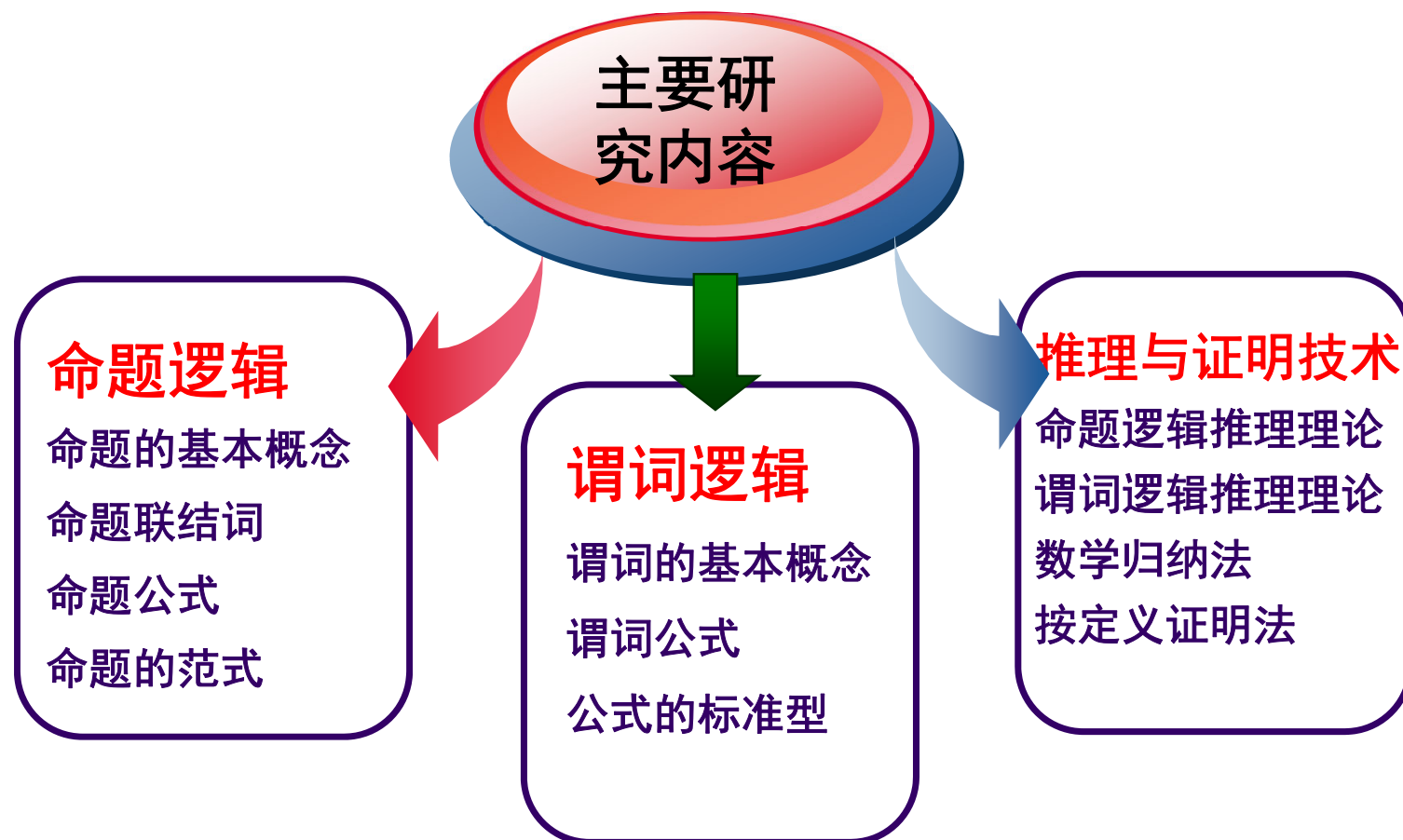
用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑？

程序 = 算法 + 数据

算法 = 逻辑 + 控制

第一篇 数理逻辑



第一章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。

研究内容：

- (1) 研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系
- (2) 研究什么是命题？
- (3) 研究如何表示命题？
- (4) 研究如何由一组前提推导一些结论？

第一章 命题逻辑

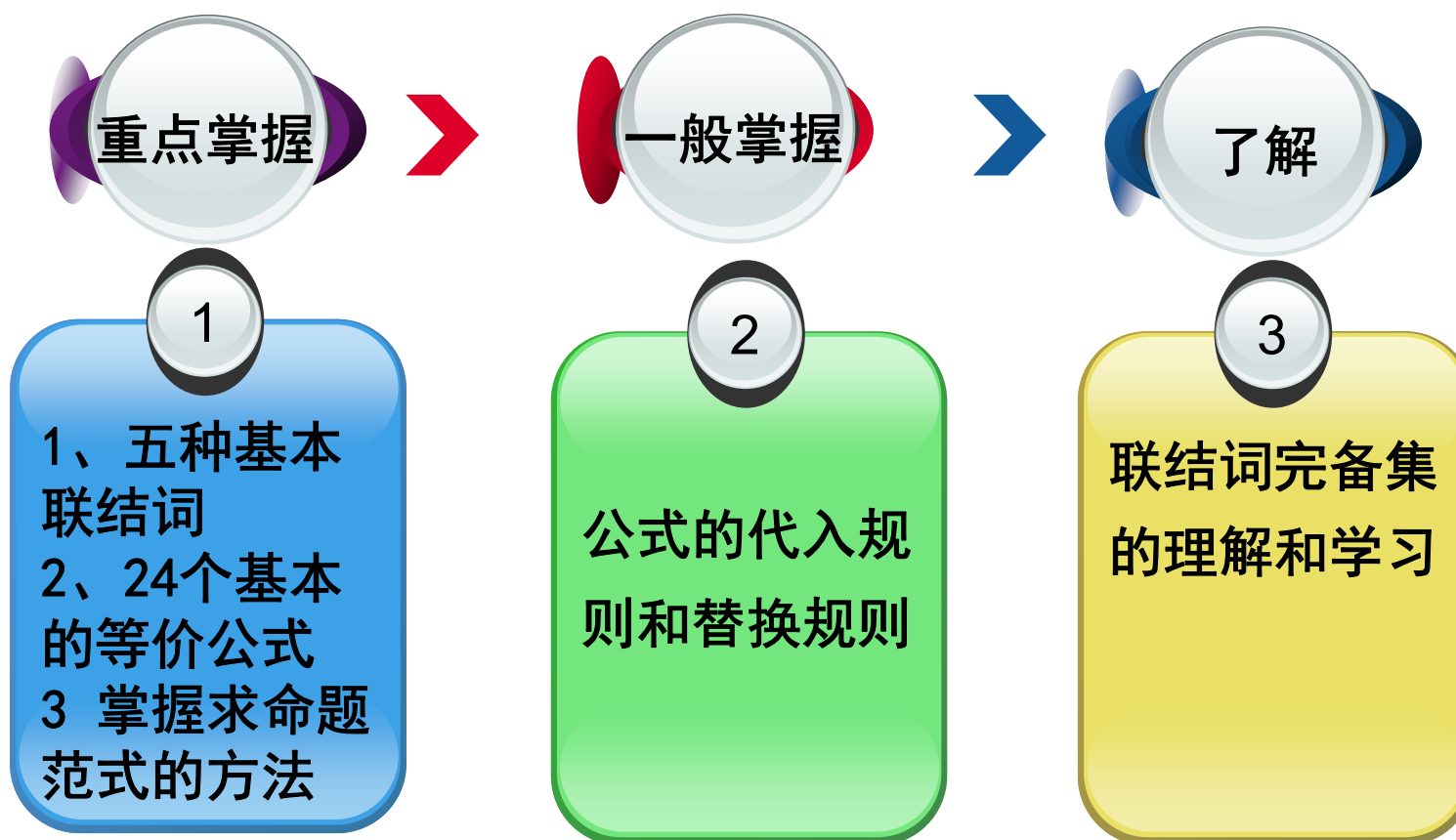
命题逻辑的特征：

在研究逻辑的形式时，我们**把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去**。不把一个简单命题再分析为非命题的集合，不把**谓词**和**量词**等非命题成份分析出来。

第一章 命题逻辑



1.1 本章学习要求



1.2 命题与命题联结词

1.2.1 命题

定义1.2.1 具有确切真值的陈述句称为**命题**,
该命题可以取一个“值”, 称为**真值**。

真值只有“**真**”和“**假**”两种,
分别用“**T**”(或“**1**”)和“**F**”(或“**0**”)
表示。

难点1：判定是不是命题

灵魂拷问

- 1、是不是陈述句
- 2、能不能判断真假
(真假不能同时存在，要么真要么假)



例1.2.1

- | | |
|---------------------|-----|
| (1) 太阳是圆的; | T |
| (2) 西安是一个旅游城市; | T |
| (3) 北京是中国的首都; | T |
| (4) 我正在说谎; | 非命题 |
| (5) $1+1=10$; | T/F |
| (6) $x+y>0$; | 非命题 |
| (7) 我喜欢踢足球; | T/F |
| (8) 3能被2整除; | F |
| (9) 地球外的星球上也有人; | T/F |
| (10) 中国是世界上人口最多的国家; | T/F |
| (11) 今天是晴天; | T/F |

例1.2.1 (续)

(12) 把门关上;	非命题
(13) 滚出去!	非命题
(14) 你要出去吗?	非命题
(15) 今天天气真好啊!	非命题

注意:

一切没有判断内容的句子都不能作为命题，如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等。

Tips:

在数理逻辑中像小写字母“x”、“y”、“z”等字母一般表示变量，大写的字母通常表示命题。

结论:

- 命题一定是陈述句，但并非一切陈述句都是命题。
- 命题的真值有时可明确给出，有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。

例1.2.2

下列语句是否是命题？并判断其真值结果？

- (1) 陕西不是一个国家；
- (2) 3既是素数又是奇数；
- (3) 瑶是辅助或是正宗射手；
- (4) 如果周末天气晴朗，则我们去郊外旅游；
- (5) $2+2=4$ 当且仅当雪是白的。

命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

- 1) **原子命题 (简单命题)**：不能再分解为更为简单命题的命题。
- 2) **复合命题**：可以分解为更为简单命题的命题。
而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果...则...”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

1.2.2 命题联结词

设命题P, Q表示任意两个命题, 则最常见的命题联结词有:

联接词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
1. 否定	\neg	非P	P的否定	$\neg P$	$\neg P=1 \Leftrightarrow P=0$
2. 合取	\wedge	P并且Q	P与Q的合取	$P \wedge Q$	$P \wedge Q=1 \Leftrightarrow P=1 \text{ 且 } Q=1$
3. 析取	\vee	P或者Q	P与Q的析取	$P \vee Q$	$P \vee Q=1 \Leftrightarrow P=1 \text{ 或 } Q=1$
4. 蕴涵	\rightarrow	若P, 则Q	P蕴涵Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q=0 \Leftrightarrow P=1, Q=0$
5. 等价	\leftrightarrow	P当且仅当Q	P等价于Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q=1 \Leftrightarrow P=1, Q=1$ 或 $P=0, Q=0$

总结

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

难点2: “ $P \rightarrow Q$ ” 真值的理解

“男朋友行为合理性之分析”

某个周五, 吕布对貂蝉说: “蝉啊, 如果这周六上午你来找我, 那我就陪你打游戏。”

周六可能发生的情况:

- 1、貂蝉没来, 吕布没打游戏
- 2、貂蝉没来, 吕布打游戏了
- 3、貂蝉来了, 吕布没打游戏
- 4、貂蝉来了, 吕布打游戏了

P	Q	$(P \rightarrow Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



说明

- 1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等地联结；
- 2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何地内在联系；

说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

联结词	自然语言
\wedge	既…又…、不仅…而且…、虽然…但是…、并且、和、与，等等；
\rightarrow	如P则Q、只要P就Q、P仅当Q、只有Q才P、除非Q否则 $\neg P$ ，等等
\leftrightarrow	等价、当且仅当、充分必要、等等；
\vee	相容（可兼）的或
$\bar{\vee}$	不可兼容的或

在使用联结词 \rightarrow 时,要特别注意以下几点:

(1) 在自然语言里,特别是在数学中, q 是 p 的必要条件(p 是 q 的充分条件)有许多不同的叙述方式,例如,“只要 p ,就 q ”,“因为 p ,所以 q ”,“ p 仅当 q ”,“只有 q 才 p ”,“除非 q 才 p ”,“除非 q ,否则非 p ”,等等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同,但都表达的是 q 是 p 的必要条件,因而所用联结词均应符号化为 \rightarrow ,各种叙述方式都应符号化为 $p \rightarrow q$.

(2) 在自然语言中,“如果 p ,则 q ”中的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系,而在数理逻辑中, p 与 q 可以无任何内在联系.

(3) 在数学或其他自然科学中,“如果 p ,则 q ”往往表达的是前件 p 为真,后件 q 也为真的推理关系. 但在数理逻辑中,作为一种规定,当 p 为假时,无论 q 是真是假, $p \rightarrow q$ 均为真,也就是说,只有 p 为真 q 为假这一种情况,使得复合命题 $p \rightarrow q$ 为假.

引自屈婉玲 离散数学第3版26页

例1.2.4

符号化下列命题

(1) 陕西不是人口最多的省份；

设 P ：陕西是人口最多的省份。

则命题 (1) 可表示为 $\neg P$ 。

例1.2.4

符号化下列命题

(2) 瑶是一个德智体全面发展的好辅助；

设 P ：瑶是一个思想品德好的辅助；

Q ：瑶是一个学习成绩好的辅助；

R ：瑶是一个体育成绩好的辅助。

则命题 (2) 可表示为 $P \wedge Q \wedge R$ 。

例1.2.4

符号化下列命题

(3) 教室的灯不亮可能是灯管坏了或者是停电了；

设 P ：教室的灯不亮可能是灯管坏了

Q ：教室的灯不亮可能是停电了

则命题 (3) 可表示为 $P \vee Q$ 。

例1.2.4

符号化下列命题

(4) 如果疫情得到有效控制，那么我们可以放假了；

设 P ：疫情得到有效控制；

Q ：我们可以放假了。

则命题 (4) 可表示为 $P \rightarrow Q$ 。

例1.2.4

符号化下列命题

(5) 两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

设 P ：两个三角形全等；

Q ：三角形的三条边全部相等。

则命题 (5) 可表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。

难点3：命题符号化中联结词选择

真值表法

逻辑联结词本质上是命题逻辑中的运算符号，其运算规则是由真值表唯一确定的。

这就意味着，如果一个命题的真值表与某个逻辑联结词的真值表完全相同，则命题符号化时选用该逻辑联结词。



1) 虽然天正在下雨，但是老王仍然上街了。

令P：天正在下雨 Q：老王上街

符号化为如下表达，哪个合理了？

(A) $P \rightarrow Q$ (B) $P \wedge Q$ (C) $P \vee Q$

P	Q	命题
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2) 孙策上午十点考科目一或者是考科目二。

令P: 孙策上午十点考科目一

Q: 孙策上午十点考科目二

符号化如下: (A) $P \vee Q$ (B) $P \bar{\vee} Q$

P	Q	命题
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

难点4：蕴涵式的翻译

终极奥义

汉译英

$$p \rightarrow q$$

if p then q

p only if q



难点4：蕴涵式的翻译

[zhǐ yǒu]

只有

编辑

讨论

只有，拼音zhǐ yǒu，连词，表示必需的条件，下文常用“才”、“方”呼应；唯有，仅有。 [1]

[zhǐ yào]

只要

(汉语词汇)

编辑

讨论

只要，读音zhǐ yào，汉语词语，意思是表示具有充分的条件。

联结词	自然语言
$P \rightarrow Q$	如P则Q、只要P就Q （充分条件） P仅当Q、只有Q才P、除非Q才P、除非Q否则¬P等等 （必要条件）

令P：天下雨 Q：我在家

(1) 如果天下雨，我就在家

(2) 只有天下雨，我才在家

(3) 除非天下雨，否则我不在家

(4) 只要天下雨，我就在家

符号化： (A) $P \rightarrow Q$ (B) $Q \rightarrow P$

(1) **If P then Q**

(2) **Only if P, Q**

(3) **Only if P, $\neg(\neg Q)$**

(4) **If P then Q**

约 定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，命题联结词之优先级如下：

1. 否定→合取→析取→蕴涵→等价
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最优先级。

例1.2.5

设命题 P: 明天上午七点下雨;
 Q: 明天上午七点下雪;
 R: 我将去学校。

符号化下述语句:

1) 如果明天上午七点不是雨夹雪, 则我将去学校

可符号化为: $\neg (P \wedge Q) \rightarrow R$ 。

3) 如果明天上午七点下雨或下雪, 则我将不去学校

4) 明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.5

设命题 P: 明天上午七点下雨;
 Q: 明天上午七点下雪;
 R: 我将去学校。

符号化下述语句:

- 1) 如果明天上午七点不是雨夹雪, 则我将去学校
- 2) 如果明天上午七点不下雨并且不下雪, 则我将去学校

可符号化为: $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$ 。

例1.2.5

设命题 P: 明天上午七点下雨;
 Q: 明天上午七点下雪;
 R: 我将去学校。

符号化下述语句:

1) 如果明天上午七点不是雨夹雪, 则我将去学校

可符号化为: $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$ 。

3) 如果明天上午七点下雨或下雪, 则我将不去学校

4) 明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.5

设命题 P : 明天上午七点下雨;
 Q : 明天上午七点下雪;

可符号化为:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)。$$

或 $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge R。$

4) 明天上午我将雨雪无阻一定去学校

例

试用符号形式写出下列命题：

除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去；

令P：你陪伴我； Q：你代我叫车子； R：我出去。

则有： $R \rightarrow P \vee Q$ 或

$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R$;

1.2.4 命题联结词的应用

例 1.2.7 用复合命题表示如下图所示的开关电路：

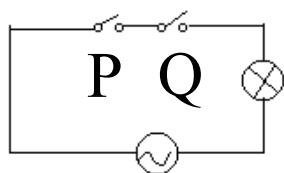


图1.2.1

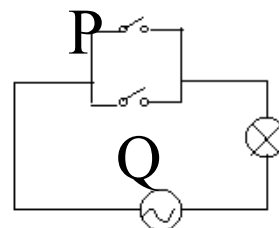


图1.2.2

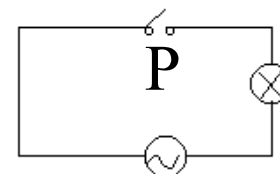


图1.2.3

设：A：开关P闭合；B：开关Q闭合。

$$A \wedge B$$

$$A \vee B$$

$$A$$

1.3 命题公式、解释与真值表

定义1.3.1 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**（或**命题变元**），该命题变量无具体的真值，它取值为{F}（或{0, 1}）

真值函数

注意

(1) 复合命题为命题变元的“**函数**”，其函数值仍为“真”或“假”值。

(2) 真值函数或命题公式，没有确切真值。

1.3.1 命题公式

定义1.3.2 (命题公式)

1. 命题变元本身是一个公式；
2. 如G是公式，则 $(\neg G)$ 也是公式；
3. 如G, H是公式，则 $(G \wedge H)$ 、 $(G \vee H)$ 、 $(G \rightarrow H)$ 、 $(G \leftrightarrow H)$ 也是公式；
4. 仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。该公式常用符号G、H、...等表示。

Well-formed formula

例1.3.1

符号串： $((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge (\neg S \vee R)))$;
 $(\neg P \wedge Q)$; $(P \rightarrow (\neg (P \wedge Q)))$;
 $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)) \leftrightarrow (P \rightarrow R)$ 。

等都是命题公式。

例1.3.2符号串：

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$; $(P \rightarrow Q$;
 $(\neg P \vee Q \vee (R$; $P \vee Q \vee$ 。

都不是合法的命题公式。

1.3.2 公式的解释与真值表

定义1.3.3 设 P_1 、 P_2 、 \dots 、 P_n 是出现在公式 G 中的所有命题变元，指定 P_1 、 P_2 、 \dots 、 P_n 一组真值，则这组真值称为 G 的一个**解释**，记为 **I** 。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。

如果公式 G 在解释 I 下是真的，则称 I **满足** G ；如果 G 在解释 I 下是假的，则称 I **弄假** G 。

定义1.3.4 将公式 G 在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为 G 的**真值表**。

例1.3.6

求下面这组公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P;$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P;$$

$$G_3 = \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)。$$

P Q	$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$\neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
0 0			
0 1			
1 0			
1 1			

定义1.3.5

1. 公式 G 称为**永真公式** (**重言式**), 如果在它的所有解释之下都为“真”。
2. 公式 G 称为**永假公式** (**矛盾式**), 如果在它的所有解释之下都为“假”。
3. 公式 G 称为**可满足的**, 如果它不是永假的。

结论

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

- 1) 永真式 G 的否定 $\neg G$ 是矛盾式；矛盾式 G 的否定 $\neg G$ 是永真式。
- 2) 永真式一定是可满足式, 可满足式不一定是永真式
- 3) 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)

例1.3.7

写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

$$(1) G_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q);$$

$$(2) G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P));$$

$$(3) G_3 = (P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q.$$

例1.3.7 解

三个公式的真值表如下：

P Q	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)$	$(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0



永真公式



永假公式



可满足公式

分析永真公式 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

若将其看成两个公式，分别令：

$$G = P \rightarrow Q, \quad H = \neg P \vee Q。$$

则 $G \leftrightarrow H$ 是一个永真公式，即这两个公式对任何解释都必同为真假，此时，说 G 和 H 相等，记为 $G = H$ 。为此可定义：

定义1.3.6 设 G 、 H 是公式，如果在任意解释 I 下， G 与 H 的真值相同，则称公式 G 、 H 是**等价的**，记作 $G = H$ 。

定理：公式 G 、 H 等价的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式

“=” 与 “ \leftrightarrow ” 的区别

双条件词 “ \leftrightarrow ” 是一种逻辑联结词，公式 $G \leftrightarrow H$ 是命题公式，其中 “ \leftrightarrow ” 是一种逻辑运算， $G \leftrightarrow H$ 的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价 “=” 则是描述了两个公式 G 与 H 之间的一种逻辑等价关系， $G = H$ 表示 “命题公式 G 等价于命题公式 H ”， $G = H$ 的结果不是命题公式。

“=” 的性质

由于“=”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

- (1) 自反性 $G=G$;
- (2) 对称性 若 $G=H$ ，则 $H=G$;
- (3) 传递性 若 $G=H$ ， $H=S$ ，则 $G=S$ 。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

1.3.4 命题公式的基本等价关系

例1.3.8 证明公式 $G_1 = (P \leftrightarrow Q)$ 与公式 $G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 之间是逻辑等价的。

解：根据等价判定定理，只需判定公式 $G_3 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$ 为永真公式。

P	Q	$G_3 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$				
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

基本等价公式

设 G, H, S 是任何的公式，则：

1) $E_1: G \vee G = G$ (幂等律)

$E_2: G \wedge G = G$

2) $E_3: G \vee H = H \vee G$ (交换律)

$E_4: G \wedge H = H \wedge G$

3) $E_5: G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$ (结合律)

$E_6: G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$

4) $E_7: G \vee (G \wedge H) = G$ (吸收律)

$E_8: G \wedge (G \vee H) = G$

基本等价公式（续）

$$5) E_9: G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S) \quad (\text{分配律})$$

$$E_{10}: G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$$

$$6) E_{11}: G \vee 0 = G \quad (\text{同一律})$$

$$E_{12}: G \wedge 1 = G$$

$$7) E_{13}: G \vee 1 = 1 \quad (\text{零律})$$

$$E_{14}: G \wedge 0 = 0$$

$$8) E_{15}: G \vee \neg G = 1 \quad (\text{排中律})$$

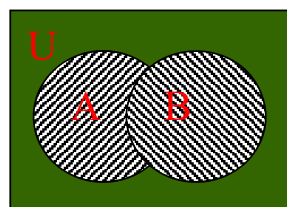
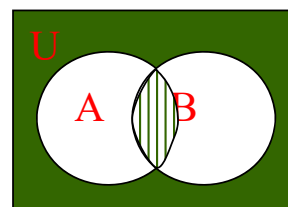
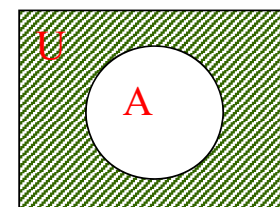
$$9) E_{16}: G \wedge \neg G = 0 \quad (\text{矛盾律})$$

基本等价公式（续）

- | | |
|--|---------------|
| 10) $E_{17}: \neg(\neg G) = G$ | (双重否定律) |
| 11) $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$ | (De Morgan定律) |
| $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$ | |
| 12) $E_{20}: (G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ | (等价) |
| 13) $E_{21}: (G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$ | (蕴涵) |
| 14) $E_{22}: G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G。$ | (假言易位) |
| 15) $E_{23}: G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H。$ | (等价否定等式) |
| 16) $E_{24}: (G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$ | (归谬论) |

命题与集合之间的关系

这种图是将 G , H 理解为某总体论域上的子集合, 而规定 $G \wedge H$ 为两集合的公共部分 (交集), $G \vee H$ 为两集合的全部 (并集), $\neg G$ 为总体论域 (如矩形域) 中 G 的补集, 将命题中的真值“1”理解为集合中的总体论域 (全集), 将命题中的真值“0”理解为集合中的空集, 则有:

 $G \vee H$  $G \wedge H$  $\neg G$

“ \cup ” 对 “ \vee ” 与 “ \cap ” 对 “ \wedge ” 的对比

等幂律	$A \cup A = A; A \cap A = A$	$G \vee G = G \quad G \wedge G = G$
交换律	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$G \vee H = H \vee G$ $G \wedge H = H \wedge G$
结合律	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$ $G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$
恒等律	$A \cup \Phi = A; A \cap U = A;$	$G \vee 0 = G \quad G \wedge 1 = G$
零律	$A \cup U = U; A \cap \Phi = \Phi$	$G \vee 1 = 1 \quad G \wedge 0 = 0$
吸收律	$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$	$G \vee (G \wedge H) = G \quad G \wedge (G \vee H) = G$
否定律	$\overline{\overline{A}} = A$	$\neg (\neg G) = G$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ $G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$

定理1.3.2(代入规则)

对一永真式中某个命题变元出现的每一处均用相同的公式代入后，新的公式仍然是永真式。

$$P \vee \neg P = 1$$

P 用 $(M \rightarrow N)$ 代入

$$(M \rightarrow N) \vee \neg(M \rightarrow N) = 1$$

定理1.3.3(替换规则)

若公式A和B有恒等关系 $A=B$ ，公式C中出现A的地方可以用B进行替换，替换后的新公式D，满足 $C=D$ 。

$$A: P \rightarrow Q \quad B: \neg P \vee Q$$

$$C: (P \rightarrow Q) \wedge R$$

$$D: (\neg P \vee Q) \wedge R$$

$$\text{则 } C = D$$

利用24个基本等价公式及代入定理和替换定理，可完成公式的转化和等价判定。

举例

证明 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \vee R) = P \vee Q \vee R$

$$\begin{aligned}\text{左式} &= \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee R \\ &= (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q \vee R) \\ &= P \vee Q \vee R\end{aligned}$$

从而得证

对偶定理

定义： 设有公式 A ，其中仅有联结词 \wedge 、 \vee 、 \neg 。
在 A 中将 \wedge 、 \vee 、 1 、 0 分别换以 \vee 、 \wedge 、 0 、 1 得公式 A^* ，
则 A^* 称为 A 的对偶公式。

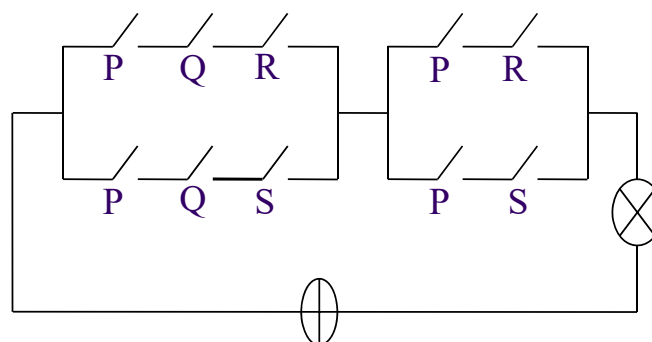
性质1： 设 A 和 A^* 是对偶式。 P_1, P_2, \dots, P_n
是出现于 A 和 A^* 中的所有命题变元，于是

$$\neg(P_1, P_2, \dots, P_n) = A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

性质2： 若 $A = B$ ，且 A 、 B 为由命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 及联结词 \wedge 、 \vee 、 \neg 构成的公式，则 $A^* = B^*$ 。

1.3.6 命题公式的应用

例1.3.11 利用基本的等价关系，化简下列电路图



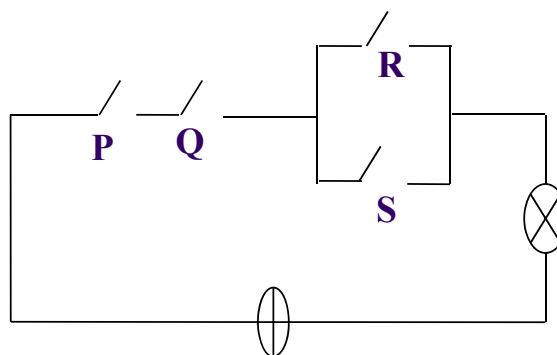
解：上述电路图可描述为：

$$((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge S)) \wedge ((P \wedge R) \vee (P \wedge S))$$

例1.3.11 (续)

利用24个基本等价关系，化简公式可得：

$$\begin{aligned} & ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge S)) \wedge ((P \wedge R) \vee (P \wedge S)) \\ &= ((P \wedge Q \wedge (R \vee S)) \wedge (P \wedge (R \vee S))) \\ &= P \wedge Q \wedge (R \vee S); \end{aligned}$$



例1.3.13

有一逻辑学家误入某部落，被拘于牢狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

“今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。现有两名战士负责解答你所提的问题（仅能选择一人问一个问题）。这俩战士一个天性诚实，一个说谎成性，今后生死由你自己选择。”

逻辑学家该如何脱困？



- 1、哪个门是自由门
- 2、谈话对象是老实人还是骗子
- 3、谈话回答是“是”还是“不是”

构造命题：

P: 左边门是自由门

Q: 交谈对象是老实人

R: 另一人对命题P的回答是“是”

S: 交谈对象对学者的回复是“对”



Bob



Eve

P: 左边门是自由门
Q: 交谈对象是老实人
R: 另一人对命题P的回答是“是”
S: 交谈对象对学者的回复是“对”

P	Q	R	S
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0



Bob



Eve

例1.3.13 解

逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说：“这扇门是自由之门，他(指另一名战士)将回答‘是’，对吗？”

当被问战士回答“对”，则逻辑学家开启另一扇门

当被问的战士回答“否”，则逻辑学家开启所指之门。

1.5 公式的标准型——范式

1.5.1 析取范式和合取范式

定义1.5.1

- (1) 命题变元或命题变元的否定称为**文字**
- (2) 有限个文字的析取称为**析取式**(也称为**子句**)
- (3) 有限个文字的合取称为**合取式**(也称为**短语**)
- (4) P 与 $\neg P$ 称为**互补对**。

例子

- (1) P 、 $\neg P$ 是文字；
- (2) $P \vee Q \vee R$ 是子句；
- (3) $P \wedge Q \wedge R$ 是短语。



$\neg P$ 是一个子句，这种说法正确么？



一个命题变元或者其否定既可以是简单的子句，也可以是简单的短语。

因此， P ， $\neg P$ 不但是文字，也是子句、短语

定义1.5.2

- (1) 有限个短语的析取式称为析取范式
- (2) 有限个子句的合取式称为合取范式



一个不含最外层括号的短语（子句）也可以是合取范式（析取范式）。

例子

- (1) P 、 $\neg P$ 是析取范式、合取范式；
- (2) $P \vee Q \vee \neg R$ 是子句、析取范式、合取范式，
 $(P \vee Q \vee \neg R)$ 仅是子句、合取范式；
- (3) $\neg P \wedge Q \wedge R$ 是短语、析取范式、合取范式，
 $(\neg P \wedge Q \wedge R)$ 仅是短语、析取范式；
- (4) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 是析取范式；
- (5) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 是合取范式；
- (6) 句子 $P \vee (Q \vee \neg R)$ 、 $\neg(Q \vee R)$ 既不是析取范式也不是合取范式

总结

- (1) 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式
- (2) 单个的子句是析取范式；
- (3) 单个的短语是合取范式；
- (4) 若单个的子句（短语）无最外层括号，则是合取范式（析取范式）；
- (5) 析取范式、合取范式仅含联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- (6) “ \neg ” 联结词仅出现在命题变元前。

范式的求解方法

定理1.5.1 对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

转换方法：

(1) 利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的 \rightarrow 、 \leftrightarrow 用联结词 \neg 、 \wedge 、 \vee 来取代，这可利用如下等价关系：

$$(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H);$$

$$\begin{aligned}(G \leftrightarrow H) &= (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) \\ &= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G).\end{aligned}$$

范式的求解方法(续)

(2) 重复使用德·摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号，这可利用如下等价关系： $\neg(\neg G) = G$ ；

$$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$$

$$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$$

(3) 重复利用分配律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取，这可利用如下等价关系： $G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ ；

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

例1.5.1

求公式： $(P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\ &= (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\ &= (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R) \\ &\quad \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\ &= (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\ &= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \text{——合取范式} \\ &= \neg P \vee \neg Q \vee R \text{——析取范式} \end{aligned}$$

范式的不惟一性

考虑公式：

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$

其与之等价的析取范式：

$$P \vee (Q \wedge R);$$

$$(P \wedge P) \vee (Q \wedge R);$$

$$P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R);$$

$$P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)。$$

这种不惟一的表达形式给研究问题带来了不便。

1.5.2 主析取范式 and 主合取范式

1 极小项和极大项

定义 1.5.3 在含有 n 个命题变元 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称此短语或子句为关于 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的一个极小项或极大项。

对于 n 个命题变元，可构成 2^n 个极小项和 2^n 个极大项

例子

(1) 一个命题变元P,

对应的极小项有两项: P 、 $\neg P$;

对应的极大项有两项: P 、 $\neg P$ 。

(2) 两个命题变元P、Q,

对应的极小项有四项:

$P \wedge Q$ 、 $\neg P \wedge Q$ 、 $P \wedge \neg Q$ 、 $\neg P \wedge \neg Q$;

对应的极大项有四项:

$P \vee Q$ 、 $\neg P \vee Q$ 、 $P \vee \neg Q$ 、 $\neg P \vee \neg Q$ 。

例子（续）

(3) 三个命题变元P、Q、R,
对应的极小项有八项:

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R, \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$\neg P \wedge Q \wedge \neg R, \neg P \wedge Q \wedge R, P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

$$P \wedge \neg Q \wedge R, P \wedge Q \wedge \neg R, P \wedge Q \wedge R;$$

对应的极大项有八项:

$$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R, \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$\neg P \vee Q \vee \neg R, \neg P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q \vee \neg R$$

$$P \vee \neg Q \vee R, P \vee Q \vee \neg R, P \vee Q \vee R.$$

两个命题变元的所对应极小项真值表

P Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \{0, 0\}$ 为真 $\rightarrow \{0\ 0\} \rightarrow m_{00}(m_0)$

$\neg P \wedge Q \rightarrow \{0\ 1\}$ 为真 $\rightarrow \{0\ 1\} \rightarrow m_{01}(m_1)$

$P \wedge \neg Q \rightarrow \{1\ 0\}$ 为真 $\rightarrow \{1\ 0\} \rightarrow m_{10}(m_2)$

$P \wedge Q \rightarrow \{1\ 1\}$ 为真 $\rightarrow \{1\ 1\} \rightarrow m_{11}(m_3)$

两个命题变元的所对应极大项真值表

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

$P \vee Q \rightarrow \{0, 0\}$ 为假 $\rightarrow \{0 \ 0\} \rightarrow M_{00} (M_0)$

$P \vee \neg Q \rightarrow \{0 \ 1\}$ 为假 $\rightarrow \{0 \ 1\} \rightarrow M_{01} (M_1)$

$\neg P \vee Q \rightarrow \{1 \ 0\}$ 为假 $\rightarrow \{1 \ 0\} \rightarrow M_{10} (M_2)$

$\neg P \vee \neg Q \rightarrow \{1 \ 1\}$ 为假 $\rightarrow \{1 \ 1\} \rightarrow M_{11} (M_3)$

三个命题变元的极小项和极大项

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

极小项和极大项的性质

任意两个极小项的合取必为假；

$$m_i \wedge m_j = F$$

任意两个极大项的析取必为真；

$$M_i \vee M_j = T$$

极大项的否定是极小项；

$$\neg M_i = m_i$$

极小项的否定是极大项；

$$M_i = \neg m_i$$

所有极小项的析取为永真公式；

所有极大项的合取是永假公式。

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1;$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0。$$

2 主析取范式 and 主合取范式

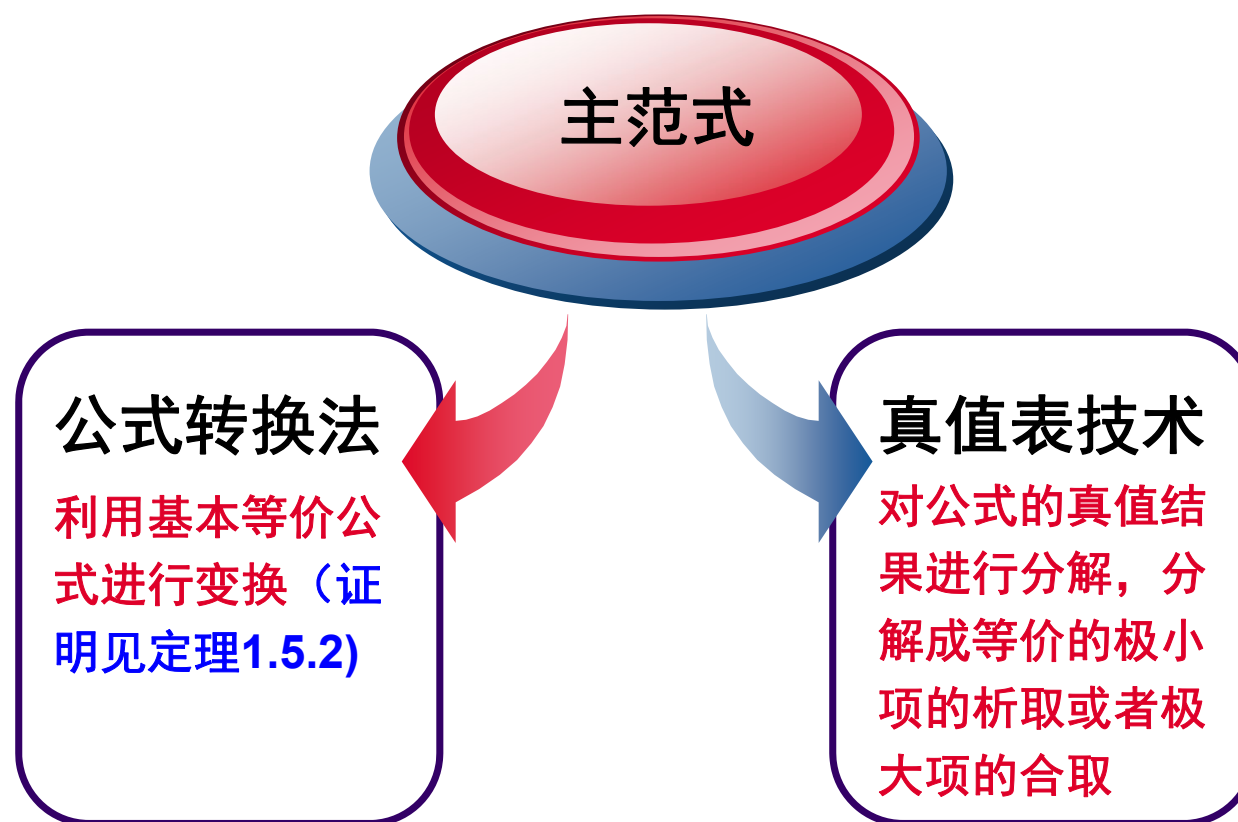
定义1.5.4

(1) 在给定的析取范式中，每一个短语都是极小项，则称该范式为主析取范式

(2) 在给定的合取范式中，每一个子句都是极大项，则称该范式为主合取范式

(3) 如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

3 求主析取范式 and 主合取范式的方法



例1.5.2

利用等价公式转换法求公式 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式。

解 (1) 求主析取范式

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R) = \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \quad \text{——析取范式}$$

$$= (P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\ \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \quad \text{——主析取范式}$$

例1.5.2 (续)

(2) 求主合取范式

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R) &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \\ &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \\ &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \text{ ——合取范式}\end{aligned}$$

例1.5.2 (续)

$$\begin{aligned} &= (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge \\ &\quad ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R) \\ &= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \\ &\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge ((P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)) \\ &= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \\ &\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \quad \text{—主合取范式} \end{aligned}$$

需要说明



求任何一个公式的主析取范式和主合取范式不仅要取决于**该公式**，而且取决于该公式所包含的**命题变元**。

如公式：

$$G_1 = (P \rightarrow Q) \wedge Q,$$

$$G_2(P, Q, R) = (P \rightarrow Q) \wedge Q。$$

前者是依赖于两个命题变元的，后者应依赖于三个命题变元。

1.5.3 范式中的难点

- 1、如何正确的理解范式定义中的“有限个文字”、“有限个短语”、“有限个子句”的概念是很关键的，“有限个” $\in N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;
- 2、使用真值表技术求主范式时注意正确地建立真值表，正确地掌握真值解释还原成子句和短语的方法；

1.5.3 范式中的难点

- 3、使用公式转换法求主范式时，需要增加某一个命题变元，此时注意关于该变元的永真公式和永假公式的正确加入，同时注意公式的正确化简；
- 4、利用主析取求主合取或者利用主合取求主析取时，注意是“ G ”的主析取范式的否定或“ G ”的主合取范式的否定，而非直接是 G 的否定。

1.5.4 联结词扩充与规约

命题联结词的扩充

- (1) 异或联结词: $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$
- (2) 谢佛联结词: $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$
- (3) 魏泊联结词: $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$
- (4) 蕴涵否定联结词: $A \searrow B = \neg(A \rightarrow B)$

与之前学习的五种联结词一起, 穷尽了一切命题间的联结词

联结词完备集

- 设 S 是一个联结词集合，如果任何公式都可以由仅含 S 中的联结词表示，则称 S 是**联结词完备集**
- **定理** $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集
- **证明** 由范式存在定理可证

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

- (1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
- (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$
- (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$
- (5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明

(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

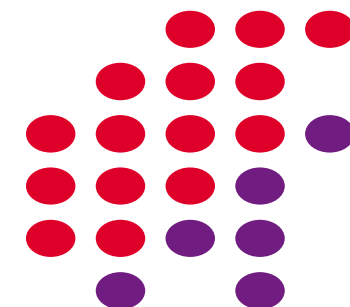
$$(3) A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$(4) A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(5) A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集, 0不能用它表示

它的子集 $\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 等都不是



Thank You !