§6.3 正定二次型

一、二次型标准化的规律

$$f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

① 经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$

化为二次型 f 为: $f=5{y_1}^2+5{y_2}^2+2{y_3}^2$

（还可化为 $=(\sqrt{5}y_1)^2+(\sqrt{5}y_2)^2+(\sqrt{2}y_3)^2$
$=z_1^2+z_2^2+z_3^2$ ）

② 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

化为二次型 f 为: $f = 4{y_1}^2 + \dfrac{15}{4}{y_2}^2 + \dfrac{18}{5}{y_3}^2$

（还可化为 $= (2y_1)^2 + (\dfrac{\sqrt{15}}{2}y_2)^2 + (\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}y_3)^2$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ ）

又如 $f = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3$

① 可经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

化为标准型 $f = -2y_1^2 - 2y_3^2$

再经可逆线性变换
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

可将二次型化为 $f = -z_1^2 - z_3^2$

② 经可逆线性变换
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化为标准型 $f = -y_1^2 - 2y_2^2$

再经可逆线性变换 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

可将二次型化为 $f = -z_1^2 - z_2^2$

说明 **(1) 用可逆线性变换化二次型为标准型时，所用的线性变换不唯一；所得的标准型不唯一；**

(2) 标准型中，非零平方项的个数相同，等于二次型的秩（二次型矩阵互相合同）

证明 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$,

经可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{y}$

经可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}$ 化为标准形 $f = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Lambda}_2 \boldsymbol{z}$

由定理6.1的推论知

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\Lambda}_2 \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda}_1 \simeq \boldsymbol{\Lambda}_2$$

由合同矩阵秩相同知 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$

因此两个对角阵的非零项个数相同，即两个标准形中非零平方项个数相同，都等于二次型的秩。 **证毕**

因此有二次型标准化的一般定理

定理6.3 秩为r的任意n元实二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化 f 为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2, \qquad (d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r)$$

定理6.4 秩为r的任n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$都合同于一个对角矩阵,即存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} (d_i \neq 0, i=1,2,\cdots,r)$$

二、惯性定理

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

经可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

可将二次型化为 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$

再经可逆线性变换 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

可将二次型化为 $f = 2z_1^2 + 6z_2^2 - 2z_3^2$

二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，秩为 r，可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，标准型

$$f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2 + 0y_{r+1}^2 + \cdots + 0y_n^2$$

其中$d_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, r$

故有

$$f=(\sqrt{d_1}y_1)^2+\cdots+(\sqrt{d_p}y_p)^2-(\sqrt{d_{p+1}}y_{p+1})^2-\cdots-(\sqrt{d_r}y_r)^2$$

再令$z_1=\sqrt{d_1}y_1,\cdots,z_r=\sqrt{d_r}y_r,z_{r+1}=y_{r+1},\cdots,z_n=y_n$

得 $f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2+0z_{r+1}^2+\cdots+0z_n^2$

称此简单形式为实二次型的规范型

- **化二次型为标准形的规律**

(1) 可逆线性变换 C 不唯一；

(2) 标准型中，系数 $d_1,\cdots,d_n$ 不唯一；

(3) 标准型中，非零项个数唯一，等于二次型矩阵 *A*的秩；

(4) 标准型中，正项个数唯一，负项个数唯一.

定理6.5 (惯性定理)

设n元实二次型$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,秩$=r$,则其任一标准型中

(1) 系数非零的平方项个数= r ;

(2) 正项个数唯一，记为 p ， p 称为正惯性指数;

(3) 负项个数唯一，为 r-p ， r-p 称为负惯性指数;

(4) 任实二次型总可用实可逆线性变换，化为规范型，且唯一。

例6.1中

$$f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=z_1^2+z_2^2+z_3^2$$

二次型秩$r=3$;正惯性指数$p=3$;负惯性指数$r-p=0$

例6.2中

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = z_1^2 + z_2^2$$

二次型秩$r = 2$;正惯性指数$p = 2$;负惯性指数$r-p = 0$

例6.3中

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$$

二次型秩$r = 3$;正惯性指数$p = 2$;负惯性指数$r-p = 1$

- **惯性定理的矩阵形式**

定理6.6 秩为r的n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$必定合同于形式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$$

的对角矩阵,

即存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} p\text{个}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} r\text{-}p\text{个}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} n\text{-}r\text{个}\end{array}$$

其中 p 由矩阵$\boldsymbol{A}$ 唯一确定

推论1 若 A 为实对称矩阵，则

1. A的正惯性指数 = A的正特征值的个数；
2. A的负惯性指数 = A的负特征值的个数；
3. A的秩 = A的非零特征值的个数；

例1 (1998.12) 8分 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^3 = A$，且rank$A$= r，正惯性指数为k ($k < r < n$)，求行列式 $\det(2E - A)$

推论2 规范型反应了二次型和实对称矩阵的正、负惯性指数和秩。

例2 (2009 数一）设二次型 $\lambda_1 = a; \lambda_2 = a+1; \lambda_3 = a-2$

$f = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

1. 求 f 的矩阵的所有特征值；
2. 若 f 的规范型为 $y_1^2 + y_2^2$，求a。

三、正定性

1. **定义6.3** 设n元实二次型$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

(1) f是正定二次型, 若$\forall \boldsymbol{x}\neq 0$, 恒有$f(\boldsymbol{x})>0$;称$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

(2) f是负定二次型, 若$\forall \boldsymbol{x}\neq 0$, 恒有$f(\boldsymbol{x})<0$;称$\boldsymbol{A}$为负定矩阵.

(3) f是半正定二次型, 若$\forall \boldsymbol{x}\neq 0$, 恒有$f(\boldsymbol{x})\geq 0$;
称$\boldsymbol{A}$为半正定矩阵.

(4) f是半负定二次型, 若$\forall \boldsymbol{x}\neq 0$, 恒有$f(\boldsymbol{x})\leq 0$;
称$\boldsymbol{A}$为半负定矩阵.

(5) f是不定二次型, 若f不为上述情形;称$\boldsymbol{A}$为不定型.

例如 $f=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型

$f=-x_1^2-3x_2^2$ 为负定二次型

例2 已知A是实反对称矩阵（即满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$ ），试证 $E-A^2$ 为正定矩阵，其中E是单位矩阵。

证明

$$(E-A^2)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-(A^2)^{\mathrm{T}}=E-(A^{\mathrm{T}})^2=E-(-A)^2=E-A^2$$

$\therefore\ E-A^2$ 是对称矩阵.

$$\forall\ x\neq 0,\ x^{\mathrm{T}}(E-A^2)x=x^{\mathrm{T}}Ex-x^{\mathrm{T}}A^2x$$

$$=x^{\mathrm{T}}x-x^{\mathrm{T}}(-A^{\mathrm{T}})Ax$$

$$=x^{\mathrm{T}}x+(x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})Ax$$

$$=x^{\mathrm{T}}x+(Ax)^{\mathrm{T}}Ax>0$$

$\therefore\ E-A^2$ 是正定矩阵

证毕

2. 判别条件

定理6.7 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型，则

f 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow$ f 的标准型中 n 个系数全为正

即在 $f(\boldsymbol{x})=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 中，$d_i>0,\ i=1,\cdots,n$

证明 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为标准型 $f(\boldsymbol{x})=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

充分性.已知 $d_i>0, i=1,\cdots,n,\ \therefore$ 对 $\forall \boldsymbol{x}\neq 0$，有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,

故 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2>0$

必要性. 用反证法. 假设某个 $d_s \le 0$. 现取

$$y = \varepsilon_s = (0,\cdots,0,\underset{\downarrow\atop \text{第}s\text{个}}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

此时存在$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_s \ne \boldsymbol{0}$, 二次型

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_s$$

$$= d_1 \cdot 0^2 + \cdots + d_{s-1} \cdot 0^2 + d_s \cdot 1^2 + d_{s+1} \cdot 0^2 + \cdots + d_n \cdot 0^2 \le 0$$

与 f 正定相矛盾. 故 $d_i > 0,\ i = 1,\cdots,n.$

证毕

推论1 实对称矩阵 A 为正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为正.

推论2 实对称矩阵 A 为正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq E$.

推论3 实对称矩阵 A 为正定 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $\det A > 0$

$(\because \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0)$

- **引入顺序主子式的概念**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11}$

一阶顺序主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶顺序主子式

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 三阶顺序主子式

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$ $n-1$阶顺序主子式

$\Delta_n=\det \boldsymbol{A}>0$ n阶顺序主子式

定理6.8 (判定正定的实用方法)

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式 $\Delta_k>0,\ (k=1,\cdots,n)$

即:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0$$ 1 阶顺序主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$ 2 阶顺序主子式

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$ 3 阶顺序主子式

………

$$\Delta_n = \det \boldsymbol{A} > 0$$ n 阶顺序主子式

注意到:若 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是负定二次型,则 $-f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，则有

定理6.9 (负定二次型的判断定理)

n元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为负定二次型

$\Leftrightarrow$ (1) 负惯性指数为 n;

$\Leftrightarrow$ (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ (3) $\boldsymbol{A}\simeq-\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow$ (4) $\boldsymbol{A}$ 奇数阶顺序主子式为负,

偶数阶顺序主子式为正,

即

$$\Delta_1 = a_{11} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\Delta_n = \det \boldsymbol{A} \begin{cases} > 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ < 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

例3 判断下列二次型的正定性

(1) $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

(2) $f=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$

解

(1) 二次型矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

顺序主子式为$\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=6>0$,

$\Delta_3=\det\boldsymbol{A}=10>0$ $\therefore$二次型 f 是正定的.

(2) 二次型矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

顺序主子式为

$$\Delta_1=-5<0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0，\ \Delta_3=\det\boldsymbol{A}=-80<0$$

$\therefore$二次型 f 是负定的.

例4 (2009.5) 当 t 满足____________时，二次型

$f=x_1^2+2x_2^2+tx_3^2+2(1-t)x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的。

例5 (1999.5) 当 λ 满足____________时，二次曲面

$$x^2+(2+\lambda)y^2+\lambda z^2+2xy-2xz-yz+x-y+2z-5=0$$

是椭球面。

补充 正定矩阵的性质

1. 若 A 正定 $\Rightarrow \det \boldsymbol{A} > 0 \Rightarrow \det \boldsymbol{A} \neq 0$ (A可逆)

2. 若 A 正定 $\Rightarrow$ A的特征值全为正

3. 若 A 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0\ (i = 1, \cdots, n)$ (正定的必要条件)

证明 因为 A 为正定矩阵，则对任意的 $\boldsymbol{x} \neq 0$

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0 \quad \text{取} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_i\ (i = 1, \cdots, n)$$

则有 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\varepsilon}_i = a_{ii} > 0 (i = 1, \cdots, n)$

(同理可证，若A为负定矩阵，则 $a_{ii} < 0\ (i = 1, \cdots, n)$)

4. 若 A 正定 $\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^{*}, k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{m}$ 均为正定矩阵

（因为他们的特征值都为正。）

5. 若 A 正定 $\Rightarrow$ 则 A 与单位阵合同

6. 若 A,B 均为正定矩阵 $\Rightarrow$ $A+B$也为正定矩阵

例6 (2010 数一 11分) 已知二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 下的标准型为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第3列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$

1. 求矩阵A;

2. 证明 $A+E$ 为正定矩阵。