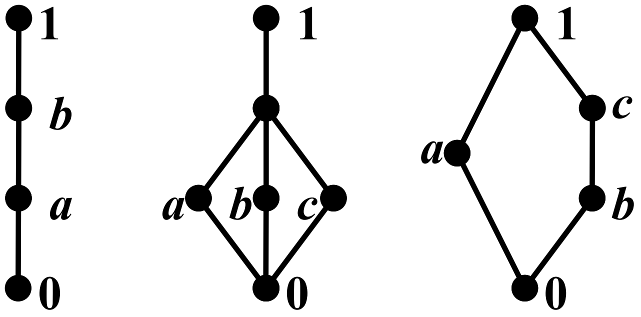
有限布尔代数的表示定理

格的原子

定义7.12 设 L 是格, $0\in L$, $a\in L$, 若$\forall b\in L$有 $0< b\leqslant a\Leftrightarrow b=a$, 则称 a 是 L 中的**原子**.

实例:

(1) 图中L_1的原子是a, L_2的原子是a, b, c, L_3的原子是a 和 b



L_1 L_2 L_3

(2) 若L是B的幂集, 则L的原子就是B中元素构成的单元集

有限布尔代数的表示定理

定义7.13 设有布尔代数$<B,\wedge,\vee,',0,1>$, 如果$|B|$有限, 则称其为有限布尔代数.

定理7.9 (有限布尔代数的表示定理，Stone表示定理)

设B是有限布尔代数, A是B的全体原子构成的集合，则B同构于A的幂集代数$<P(A),\cap,\cup,\sim,\varnothing,A>$.

实例

实例：(1) $S_{110}=\{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$是关于gcd, lcm运算构成的布尔代数．它的原子是2, 5和11, 因此原子的集合$A=\{2,5,11\}$．幂集

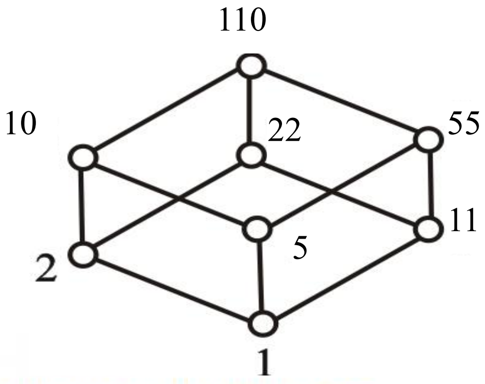
$$P(A)=\{\varnothing,\{2\},\{5\},\{11\},\{2,5\},\{2,11\},\{5,11\},\{2,5,11\}\}.$$

幂集代数是$<P(A),\cap,\cup,\sim,\varnothing,A>$. 只要令 $f: S_{110}\to P(A)$,

$$f(1)=\varnothing,\ f(2)=\{2\},\ f(5)=\{5\},\ f(11)=\{11\},$$

$$f(10)=\{2,5\},\ f(22)=\{2, 11\},\ f(55)=\{5, 11\},\ f(110)=A,$$

那么f就是从S_{110}到幂集$P(A)$的同构映射.



推论

推论1 任何有限布尔代数的基数为2^n, $n \in \mathbf{N}$.

证 设B是有限布尔代数, A是B的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n$, $n \in N$. 由定理得 $B \cong P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以 $|B| = 2^n$.

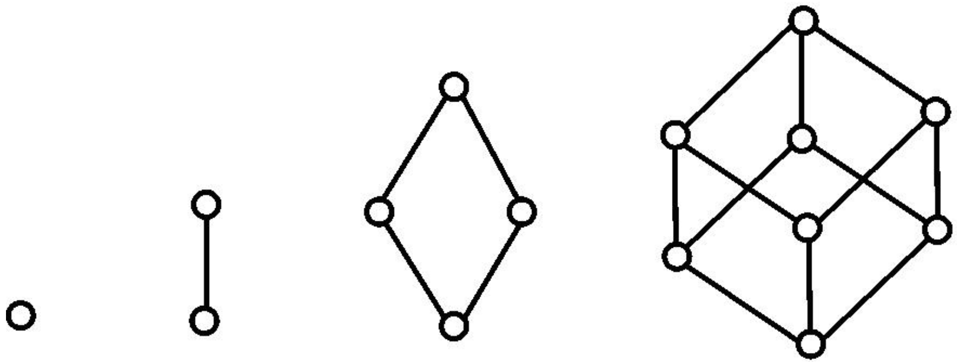
推论2 任何等势的有限布尔代数都是同构的. (证明省略)

结论：

- 有限布尔代数的基数都是2的幂.
- 对于任何自然数n, 2^n元的布尔代数必同构.
- 一般, 我们关心的布尔代数的最小元素数是2, 称为最小布尔代数, 例如开关代数$<\{0,1\}, \wedge, \vee>$是所有布尔代数的最小子代数.

实例

下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



开关代数

布尔函数是开关代数的一种扩展

THE END