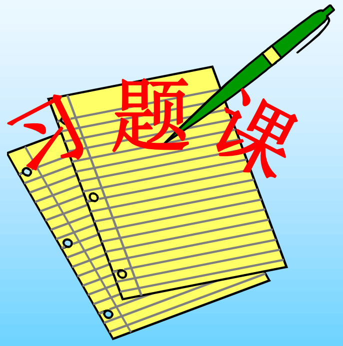
第二部分
导数与微分



第二部分　导数与微分

一　重点与难点

1. 导数与微分的概念；
2. 初等函数求导方法；
   - (1)函数的和差积商的导数.
   - (2) 反函数的导数。
   - (3) 复合函数求导法.
   - (4) 复合函数求导练习23题.
   - (5) 分段函数求导.
   - (6) 参数方程的一、二阶导数.
   - (7) 隐函数的导数.
   - (8) 幂指函数的导数.
   - (9) 求高阶导数.

二　课堂练习

1. 选择(4题)
2. 填空(9题)
3. 计算(8题)
4. 计算题解答

1. 导数与微分的概念

(1) 导数与微分的实质各是什么？它们的关系及区别是什么？

$y=f(x)$在点x_0的导数：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

导数是函数平均变化率的极限。

$y=f(x)$在点x_0的微分：

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x\approx\Delta y.$$

微分是函数的局部线性化。

它们的关系： 函数在 x 点可导 $\Leftrightarrow$ 函数在 x 点可微.

它们的区别：从$\Delta x,\Delta y$的比值出发得导数概念；

从Δy的近似值出发得微分概念。

(2)判断是非(是：√ 非：×)：

已知$y = f(x)$在点x_0可导：

a. $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$ (√).

b. $f'(x_0) = \left[f(x_0) \right]'$ (×).

c. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (√).

d. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (√).

(2)判断是非(是：√ 非：×)：

已知$y=f(x)$在点x_0可导:

$$e.\ f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (\ \surd\ ).$$

$$f.\ f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \qquad (\ \times\ ).$$

$$g.\ f'(x_0)=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h} \qquad (\ \surd\ ).$$

(3)下列各式表示什么意义？

$$a.\ \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

$$b.\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$$

$$c.\ \lim_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$$

$$d.\ \lim_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0-0)$$

$f(x)$在点x_0可导的充要条件是$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

(4) 一元函数 $y = f(x)$在点 $x = a$处：

a. 有定义　　b. 有极限　　c. 连续

d. 可导　　e. 可微

等五个命题之间有什么关系？ 将它们的序号填入空格：

$$\begin{tikzcd} & & & a \\ d \arrow[r, Leftrightarrow] & e \arrow[r, Rightarrow] & c \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & & & b \end{tikzcd}$$

单向箭头都不可逆，试举反例。

(5) 导数基本公式练习23题

$1^\circ\quad (\ln 2)' = 0$

$2^\circ\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$3^\circ\quad (2^x)' = 2^x \ln 2$

$4^\circ\quad (\tan x)' = \sec^2 x$

$5^\circ\quad (\log_3 x)' = \dfrac{1}{x\ln 3}$

$6^\circ\quad (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

$7^\circ\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$8^\circ\quad (\cos x)' = -\sin x$

$9^\circ\quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$10^\circ\quad (e^2)' = 0$

$11^\circ\quad (\cot x)' = -\csc^2 x$

$12^\circ\quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$

(5) 导数基本公式练习23题

$13^\circ \quad (\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$

$14^\circ \quad (\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x$

$15^\circ \quad (\operatorname{th}x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$16^\circ \quad (\operatorname{cth}x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$17^\circ \quad (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

$18^\circ \quad (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$19^\circ \quad (\operatorname{arccot}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$20^\circ \quad (\sin x)' = \cos x$

$21^\circ \quad (\cot\dfrac{\pi}{3})' = 0$

$22^\circ \quad (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$

$23^\circ \quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. 初等函数求导法

(1) 函数的和差积商的导数:

$$u=u(x),\quad v=v(x)$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (uv)'=u'v+uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

例1 $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$ 求 y'

解: $$y'=\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)'=\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}.$$

例2 $x=\dfrac{1-t^3}{2}$ 求 x'

解: $$x'=-\frac{3}{2}t^2.$$

(2)反函数的导数:

若$y=f(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}\neq 0$，则其反函数$x=f^{-1}(y)$

的导数存在，且 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

例3 $y=\tan x$ 求$\dfrac{dx}{dy}$.

解: $\dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x$. $\therefore \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{\sec^2 x}$

若把自变量化成y $=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+y^2}$.

(3) 复合函数求导法　　“链”式法则

若函数$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在$u=\varphi(x)$处可导，则复合函数$=f[\varphi(x)]$在点x可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

例4　$y=\ln\frac{1}{1-x}$ 求 y'

解　$y=-\ln(1-x)$, 令 $u=1-x$.　$y=-\ln u$.

$$\therefore y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{u'}{u}=-\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

(4)复合函数求导练习23题

$1^\circ \quad (\sin 2x)' = 2\cos 2x$

$2^\circ \quad (e^{2x})' = 2e^{2x}$

$3^\circ \quad (\ln 3)' = 0$

$4^\circ \quad (1+2x^3)' = 6x^2$

$5^\circ \quad (3^{2x})' = 2\ln 3 \cdot 3^{2x}$

$6^\circ \quad (\tan 2x)' = 2\sec^2 2x$

$7^\circ \quad (2^{\sin x})' = \ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$

$8^\circ \quad (\ln 3x)' = \dfrac{1}{x}$

$9^\circ \quad (1-2x)' = -2$

$10^\circ \quad (e^2+1)' = 0$

$11^\circ \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$12^\circ \quad [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{x}$

$13^\circ \quad (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(4)复合函数求导练习23题

$14^\circ\quad (\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}$

$15^\circ\quad (\ln 2x^3)' = \dfrac{3}{x}$

$16^\circ\quad (e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$

$17^\circ\quad (\arctan 2x)' = \dfrac{2}{1+4x^2}$

$18^\circ\quad (\csc 3x)' = -3\csc 3x \cdot \cot 3x$

$19^\circ\quad (\sec 2x)' = 2\sec 2x \cdot \tan 2x$

$20^\circ\quad (\sec^3 2x)' = 6\sec^3 2x \cdot \tan 2x$

$21^\circ\quad (\arcsin 3x)' = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

$22^\circ\quad (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$

$23^\circ\quad [(\ln(2x+1)]' = \dfrac{2}{2x+1}$

(5)分段函数的求导

在分段点处怎么求导？　用定义.

含绝对值符号的函数怎么求导？　写成分段函数再求导.

例5　$y = x|x|$　求 y'

解：$y = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

当 $x > 0,\ y' = 2x$；　当 $x < 0,\ y' = -2x$

当 $x = 0,\ f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

$$\therefore y' = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

(6)参数方程的一、二阶导数

已知参量函数 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\mathrm{d}t}}{x'(t)}$$

例6　设 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{mt^{m-1}}{1/t} = mt^m$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}(mt^m)}{\mathrm{d}t}}{x'(t)}$$

$$= \frac{m^2 t^{m-1}}{1/t} = m^2 t^m$$

(7)隐函数的导数

若$F(x,y)=0$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

在 $y=y(x)$的关系下，两边对 x 求导。

例 7　设　$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$　求 $y''(0)$.

解：　两边对x求导：　$\mathrm{e}^y\cdot y'+y+xy'=0$　　(1)

两边再对x求导：

$$\mathrm{e}^y\cdot y'^2+\mathrm{e}^y\cdot y''+y'+y'+xy''=0\qquad(2)$$

由原式知：　当$x=0$时　$y=1$,

代入(1)式：　$y'(0)=-\mathrm{e}^{-1}$

再代入(2)式：　$y''(0)=\mathrm{e}^{-2}$.

(8)幂指函数的导数 ——对数求导法

例8 $y=(\sin x)^x$ 求 y'.

解： 两边取对数：

$$\ln y = x\ln\sin x$$

两边对x求导：

$$\frac{y'}{y}=\ln\sin x + x\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x + x\cot x).$$

对数求导法也可用于对多个因子积商的导数。

(8) 幂指函数的导数——对数求导法

例 9 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2(x-5)}{x^2+1}}$ 求 y'.

解： 两边取对数：

$$\ln y=\frac{1}{3}\left[2\ln(x-1)+\ln(x-5)-\ln(x^2+1)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{x^2+1}\right]$$

$$\therefore y'=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x-5)}{x^2+1}}\cdot\left[\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{x^2+1}\right]$$

注：有的学生提出以下问题：

(8). 幂指函数的导数——对数求导法

例 9 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2(x-5)}{x^2+1}}$ 求 y'.

解： 两边取对数：

$$\ln y=\frac{1}{3}\left[2\underline{\ln(x-1)}+\underline{\ln(x-5)}-\ln(x^2+1)\right]$$

问题：原函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,取对数缩小了定义域对吗？

因为：$[\ln(x-1)]'=[\ln(1-x)]'=[\ln|x-1|]'=\dfrac{1}{x}$;

所以第一项不影响结果。 对第二项：当 $x<5$，有

$-y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2(5-x)}{x^2+1}}$. 采用同样方法做，结果与上面相同.

(9)求高阶导数

求n阶导数一般公式的方法是什么？

（1） 先求函数前几阶导数，找出规律，写出n阶导数的一般公式, 再用数学归纳法给出证明。

若前几阶导数很繁，很难找出规律，可先把函数或导函数变形。

（2） 对两个函数的积，可用莱布尼茨公式求n阶导数。

常用的高阶导数公式

1° $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$

$$y^{(n)} = a_0 n! \qquad y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0$$

2° $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$

3° $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ $\qquad$ 4° $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

(9)求高阶导数

例10 $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$，求 $y^{(100)}$

解： $$y=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

$$y'=-\left(\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}\right),$$

$$y''=(-1)^2\left(\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3}-\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}\right),$$

······

$$y^{(100)}=\frac{100!}{(x+2)^{101}}-\frac{100!}{(x+3)^{101}}.$$

莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

常见错误: $u^{(0)} = ?\ \ v^{(0)} = ?$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\underline{v} + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \cdots$$

$$+ C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + \underline{u} v^{(n)}$$

见下例

例 11 $y=x^2\sin x$，求$y^{(80)}$.

解： 由莱布尼茨公式：

$$y^{(80)}=(\sin x)^{(80)}x^2+80(\sin x)^{(79)}2x+\frac{80\cdot 79}{2}(\sin x)^{(78)}\cdot 2$$

$$=\sin(x+40\pi)x^2+80\sin(x+\frac{79}{2}\pi)2x+$$

$$+\frac{80\cdot 79}{2}\sin(x+39\pi)\cdot 2$$

$$=x^2\sin x-160x\cos x-6320\sin x.$$

二 课堂练习　1. 选择题

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ xe^{x} & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处(**ABC**).

(A)连续.　(B)可导.　(C)可微.　(D)连续不可导.

(2)下列函数中(**ACD**)的导数等于 $\frac{1}{2}\sin 2x$.

(A) $\frac{1}{2}\sin^2 x$.　(B) $\frac{1}{4}\cos 2x$.　(C) $-\frac{1}{2}\cos^2 x$.　(D) $1-\frac{1}{4}\cos 2x$.

(3) $f(x)=|x|$,在 $x\neq 0$ 点的导数 $f'(x)$ 为(**D**).

(A) 1.　(B) -1.　(C)不存在.　(D) $\frac{|x|}{x}$.

(4)若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点(**B**).

(A)必可导.　(B)连续但不一定可导

(C)一定不可导　(D)不连续.

2.填空(9题)

(1) $\left(\ln|x|\right)' = \underline{\quad \dfrac{1}{x} \quad}$.

(2) $f(x)=x|x|$,则 $f'(0)=\underline{\quad 0 \quad}$.

(3) $\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{1}{1+x^2}\right)=\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}(1+x^2)$

(4) 在$t=2$时,曲线$\begin{cases} x=t^3-4 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$上对应点的切线方程

为$\underline{\quad 2x-3y+19=0 \quad}$.

(5) $y=\ln x$,则 $y^{(n)}=\underline{\quad (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n} \quad}$.

(6) 若$f(u)$可导，且$y=f(\mathrm{e}^x)$,则$\mathrm{d}y=\underline{\quad f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \quad}$.

2.填空(9题)

(7) 设$y = f(x)$单调且二阶可导,则

$$\frac{dx}{dy} = \underline{\frac{1}{f'(x)}} \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \underline{-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}}$$

(8) 设$f(x)$在x_0点可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \underline{2f'(x_0)}.$$

(9) 可导的偶函数的导数是____奇____函数;

而可导的奇函数的导数是____偶____函数。

因为____________________________

3. 计算题

(1) $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$，求 y'.

(2) $y = \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$，求 y'.

(3) $y = \cos^2\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$，求 y'.

(4) $y = (\ln x)^{e^x}$，求 $y'(e)$.

(5) 设 $F(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x) \in C^2$. 求 $F''(x)$.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

(7) 设 $y=\dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}$，$f(x)\in C^1$，求 $\mathrm{d}y$.

(8) 设 $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$，求 $y^{(n)}$.

谢谢使用

返回首页

习题课

2. 填空

(7) 设 $y = f(x)$ 单调且二阶可导,则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = ?$ $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = ?$

解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'(x)}\right] \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

2. 填空

(8) 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

因只知 $f(x)$ 在点 x_0 可导，故此题只能

从定义出发:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-\left[f(x_0-h)-f(x_0)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=2f'(x_0).$$

2. 填空

(9) 可导的偶函数为什么是奇函数?

证明: 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$

$$\therefore\ f'(x) = [f(-x)]'$$

$$= f'(-x)\cdot(-x)'$$

$$= -f'(-x)$$

即 $f'(x)$ 为奇函数。 证毕.

3. 计算题解答:

(1) 设 $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$， 求 y'.

解: $y'=2x\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}+x^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=\frac{8x+9x\sqrt{x}}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$$

(2) 设 $y=\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$，求 y'.

解：
$$y'=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

(3) 设 $y=\cos^2\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$，求 y'.

解： $$y'=2\cos\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\left(-\sin\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})^2}\cdot\sin\frac{2}{1+\sqrt{x}}.$$

(4) 设 $y=(\ln x)^{e^x}$,求 $y'(e)$.

解: 两边取对数 $\ln y = e^x \ln\ln x$

两边对x求导: $\dfrac{y'}{y} = e^x \ln\ln x + e^x \dfrac{1}{x\ln x}$

由原式: $x=e$时, $y=1$.

代入此式: $y'(e)=e^{e-1}$.

(5) 设$F(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x)\in C^2$, 求$F''(x)$.

解: $F'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+xf'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

$$F''(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+$$

$$+xf''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+xf'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}.$$

$$=\frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right).$$

(6) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解: 当 $x\neq 0$, $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x^2}{x}\right)'=\dfrac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x}-0}{x}=1.$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

(7) 设 $y=\dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}$， $f(x)\in C^1$ ，求 $\mathrm{d}y$.

解: $$y'=\frac{f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{f(x)}-f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)}{\mathrm{e}^{2f(x)}}$$

$$=\frac{f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x-f(\mathrm{e}^x)\cdot f'(x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}$$

$$\therefore \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)-f(\mathrm{e}^x)f'(x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}\mathrm{d}x.$$

(8) 设 $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$， 求 $y^{(n)}$.

解： $y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\cdot(3x+1)^{-1}$

$$y'=-\frac{5}{3}\cdot(-1)(3x+1)^{-2}\cdot 3=(-1)^2 5\cdot(3x+1)^{-2}$$

$$y''=(-1)^3 5\cdot 3\cdot 2!(3x+1)^{-3}$$

$$y'''=(-1)^4 5\cdot 3^2\cdot 3!(3x+1)^{-4}$$

……

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}5\cdot 3^{n-1}\cdot n!(3x+1)^{-(n+1)}.$$