第三部分
中值定理和导数的应用

第三部分　中值定理和导数的应用

基本思想：用导数研究函数

一　重点和难点：

1. 理解和掌握四个重要的微分中值定理：

罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理及泰勒定理的内容；

中值定理的条件是定理成立的什么条件？中值定理中的 ξ 唯一吗？

2. 熟悉常用的麦克劳林公式.

3. 用洛必达法则求未定式极限应注意什么？

4. 会判别函数单调性、凹凸性。能利用函数的单调性做证明题.

5. 熟练掌握求函数极值(确定极大还是极小)和最值的方法.

6. 求给定函数的竖直渐近线及斜渐近线.

7. 会做 $y = f(x)$ 的图形.

8. 正确求出函数在某点处的曲率.

二　课堂练习

1. 判断是非（共7个）

2. 选择题（共7个）

3. 计算题（共5个）

4. 证明题（共7个）

1. 掌握四个微分中值定理　罗尔中值定理:

若 $f(x)$: (1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2)在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $f(a)=f(b)$;

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0 \ .$$

几何解释:

曲线 $y=f(x)$ 至少有一条水平切线。

推广: 减少一个条件

拉格朗日中值定理:

若 $f(x)$: (1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)内可导;

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

几何解释:

曲线 $y=f(x)$ 至少有一条切线平行于连接曲线端点的弦。

推广: 用 $F(x)$代替 x.

柯西中值定理:

若 $f(x)$和$F(x)$: (1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)内可导;

(3)$F'(x) \neq 0 \quad x \in (a,b)$.

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

几何解释:

曲线的参数式方程, x为参数.

曲线 $\begin{cases} X = F(x) \\ Y = f(x) \end{cases}$ 至少有一条切线平行于连接曲线端点的弦。

泰勒中值定理: 用$(x-x_0)$的n次多项式逼近$f(x)$.

若$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导函数，则对$\forall x\in(a,b)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中， $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 叫皮亚诺型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ 叫拉格朗日型余项

这里ξ是x与x_0之间某个值.

当$x_0=0$,此公式叫麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

2. 常用麦克劳林公式:

$$1^{\circ}\quad e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})$$

$$2^{\circ}\quad \sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^{m}\frac{\sin\xi}{(2m)!}x^{2m}$$

$(\xi$在0与x之间$)$

$$3^{\circ}\quad \cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\xi}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$(\xi$在0与x之间$)$

2. 常用麦克劳林公式:

$$4^{\circ}\quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$$

(ξ在0与x之间)

$$5^{\circ}\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!(1+\theta x)^{\alpha+n+1}}x^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$

3. 用洛必达法则求未定式极限应注意什么?

例1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+x}}{(\sin x)^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

1°. 及时求出已定式的极限.

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$$

3. 用洛必达法则求未定式极限应注意什么?

2°. 需要先验证条件.

例 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} \neq \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$不存在 .

应该怎么做?

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} = 1.$

4. 利用函数的单调性做证明题

例 求证 当$x>1$时 $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$

证明 令 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}>0 \quad (x>1)$$

故当 $x>1$时，$f(x)>f(1)=0$

所以，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

注：$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$
推不出$f(x)>0$!

证毕.

5. 求函数极值和最值

求极值的步骤：

(1) 求函数的所有驻点和导数不存在的点；

(2) 在x_0邻域内，若$f'(x)$改变符号，则x_0是极值点。否则x_0不是极值点。

当x渐增地过x_0时，$f'(x)$的符号由$+$变$-$ (或$f''(x_0)<0$),

$f(x_0)$是极大值；

当x渐增地过x_0时，$f'(x)$的符号由$-$变$+$ (或$f''(x_0)>0$),

则$f(x_0)$是极小值；

求$[a,b]$上连续函数$f(x)$的最值的步骤：

(1) 求函数的所有驻点和导数不存在的点；

(2) 把 $f(x)$在这些点的值与$f(a)$, $f(b)$比较，最大者为最大值，最小者为最小值。

注：若连续函数$f(x)$在区间 I 内有唯一的极值点。则极大值就是最大值；极小值就是最小值。

6. 给定函数 $y=f(x)$,求其竖直渐近线及斜渐近线。

若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$， 则$x=a$是竖直渐近线

若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，

则 $y=ax+b$ 是斜渐近线。

（其中， 当$a=0$，$y=b$ 就是水平渐近线。）

7. 对函数进行全面讨论并作图

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

解： 定义域：$(-\infty,\ 0)$ 及 $(0,+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0,\qquad y''=\frac{1-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0\Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

列表

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
y'	+	不存在	+	+	+
y''	+	不存在	+	0	–
y		不存在		e^{-2} 拐点	

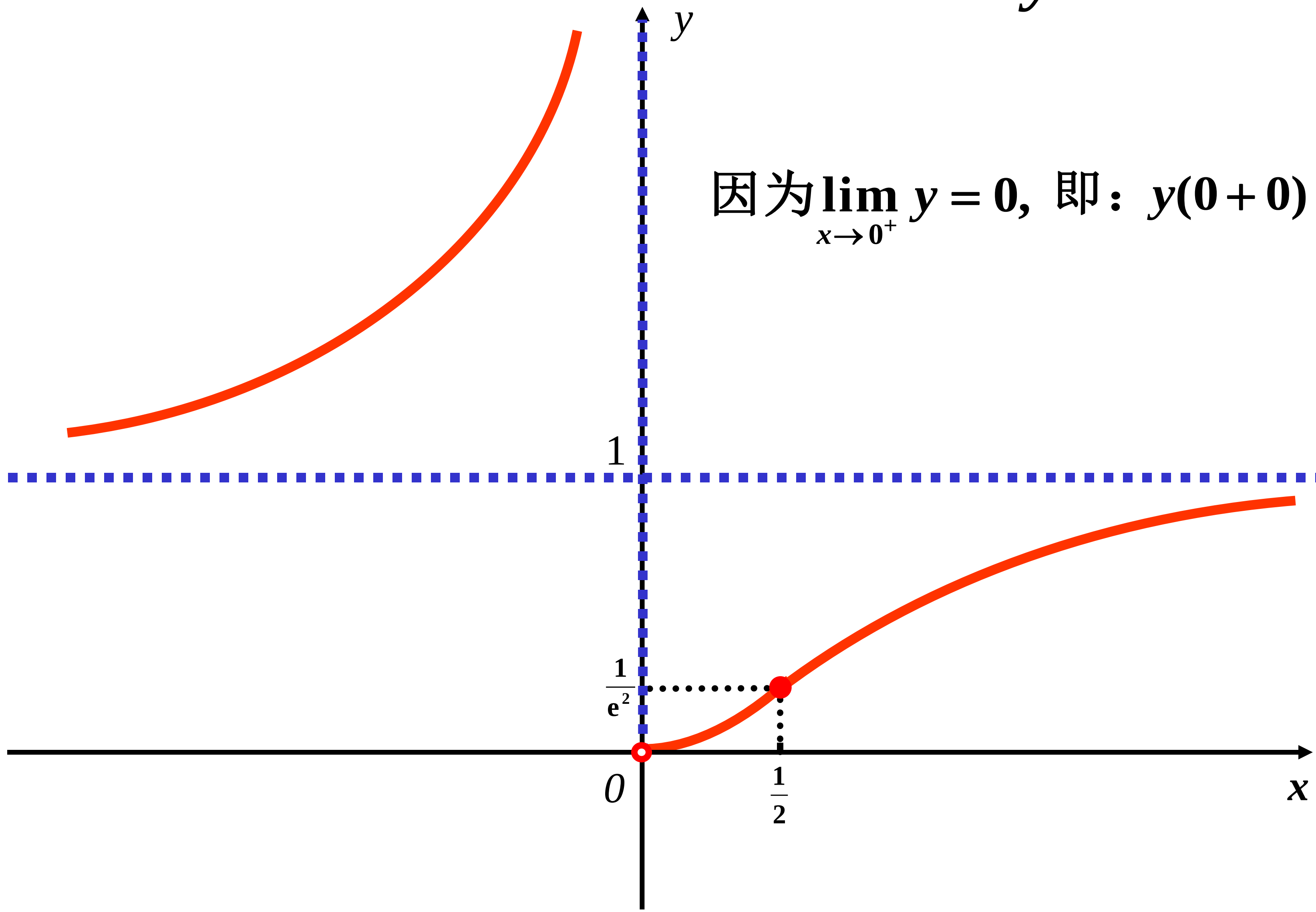
因 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}y=+\infty,$ 故曲线有渐近线 $y=1$ 和 $x=0$.

下 面 画 图

7. 对函数进行全面讨论并画图:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} y = 0$, 即: $y(0+0) = 0$.



8. 求 函数在某点 处的曲率.

(1) 曲线 $y = f(x)$在点 $x=a$处的曲率：

$$k = \left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{x=a}$$

(2)曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 在点t处的曲率：

$$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)\right]^{3/2}}$$

二 课堂练习

1 判断是非：是：√ 非：× .

（1）函数的极值点一定是驻点。(×)

（2）函数的驻点一定是极值点。(×)

（3）函数的最大值点一定是极大值点。(×)

（4）函数的极大值一定大于极小值。(×)

(5) $f(x) \in D^2[a,b], f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0,$

则对一切$x \in (a,b)$，有$f(x) > 0.$

（ √ ）

(6) 若 $f(x), g(x) \in c^1$ 且 $f'(x) > g'(x),$

则 $f(x) > g(x).$ （ × ）

(7) 函数在驻点处的二 阶导等于零，则该驻点不是极值点。

（ × ）

2.选择题

(1) 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的有(A).

(A) $y = x^2 - 5x + 6$. $[2,3]$.　　(B) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. $[0,2]$.

(C) $y = xe^{-x}$. $[0,1]$.　　(D) $y = \begin{cases} x+1 & x<5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$ $[0,5]$.

(2) 函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$a < x_1 < x_2 < b$，则至少存在一点ξ，使 (A B D) 必然成立。

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, $\xi \in (a,b)$.

(B) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (a,b)$.

(C) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, $\xi \in (x_1, x_2)$.

(D) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1, x_2)$.

(3) 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$适合罗尔定理条件的区间是(A).

(A) $[0,\ 1]$.　　(B) $[-1,\ 1]$.

(C) $[-2,\ 2]$.　　(D) $\left[-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right]$.

(4) 若函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，x_1和x_2是区间(a,b)内任意两点$(x_1<x_2)$，则至少存在一点ξ，使有 (C).

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$,　其中$a<\xi<b$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$,　其中$x_1<\xi<b$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$,　其中$x_1<\xi<x_2$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$,　其中$a<\xi<x_2$.

(5) 若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x) > g'(x)$ 则当 $a < x < b$ 时，有 (B). 令 $F(x) = f(x) - g(x)$，在 $[a,x]$ 用 L 定理。

(A) $f(x) > g(x)$. (B) $f(x) + g(a) > f(a) + g(x)$.

(C) $f(x) < g(x)$. (D) $f(x) + g(b) > f(b) + g(x)$.

(6) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值，则必有 (D).

(A) $f'(x_0) = 0$. (B) $f''(x_0) < 0$.

(C) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$. (D) $f'(x_0) = 0$ 或不 $\exists$.

(7) 点 $(0,1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点，则有 (B).

(A) $a = 1, b = -3, c = 1$. (B) $a \neq 0, b = 0, c = 1$.

(C) $a = 1, b = 0, c$ 为任意值. (D) a, b 为任意值, $c = 1$. .

3. 计算题

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

(3) 讨论 $y=(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!})e^{-x}$ 的极值.

(4) 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的渐近线.

(5) 在抛物线 $y=x^2$ 上找出到直线 $3x-4y=2$ 的距离为最短的点。

4. 证明题

(1)设$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$连续，可微，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(x)$单调增加。求证：$f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加。

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$$

若 $f(x)$在某一点 $x_0\neq 0$ 处有极值,则它是极大值还是极小值?为什么?

(3) $f(x)$在$[0,1]$上可导，且$0<f(x)<1,\ f'(x)\neq 1,(0\leq x\leq 1)$.证明：方程$f(x)=x$在$(0,1)$内有且仅有一个根

(4)设$f(x)$在(a,b)内可微，但无界。试证明$f'(x)$在(a,b)内无界。

(5) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$f''(x)\neq 2$. 试证明： 当 $x\in(0,1)$ 时， $f(x)\neq x^2$.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 但 $f(x)\neq x$.

证明: 在 $(0,1)$ 内必有 x_1， x_2 存在, 使 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

(7) 指出函数 $y=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\dfrac{1}{x-a_3}$ 的零点个数和范围,

其中 $a_1<a_2<a_3$. 并说明理由.

谢谢使用

返回首页

3.计算题 解答 (1)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$

解：　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}$$

$$=2.$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

解：此为未定式 0^0.

令 $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{xe^x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x}$$

$= 1.$ $\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e.$

(3) 讨论 $y=(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!})\mathrm{e}^{-x}$ 的极值.

解： $y'=-\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}=0$ 驻点：$x=0$.

当n为偶数时，恒有$y'<0$. 函数无极值.

当n为奇数时，

若 $x<0$, $y'>0$； 若 $x>0$, $y'<0$.

$\therefore y(0)=1$为极大值.

(4) 求曲线$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$的渐近线.

解：因$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$, ∴曲线有竖直渐近线：$x=-1$.

$$\text{又} \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\frac{1}{2} .$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-\frac{x}{2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1.$$

∴曲线$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$有斜渐近线： $y=\dfrac{x}{2}-1$.

(5) 在抛物线$y=x^2$上找出到直线$3x-4y=2$的距离为最短的点。

解：方法 I

设抛物线上任意点(x,x^2)到直线的距离为

$$d=\frac{|3x-4x^2-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}(4x^2-3x+2)$$

$$d'=\frac{1}{5}(8x-3).$$ 唯一驻点：$x=\frac{3}{8}$.

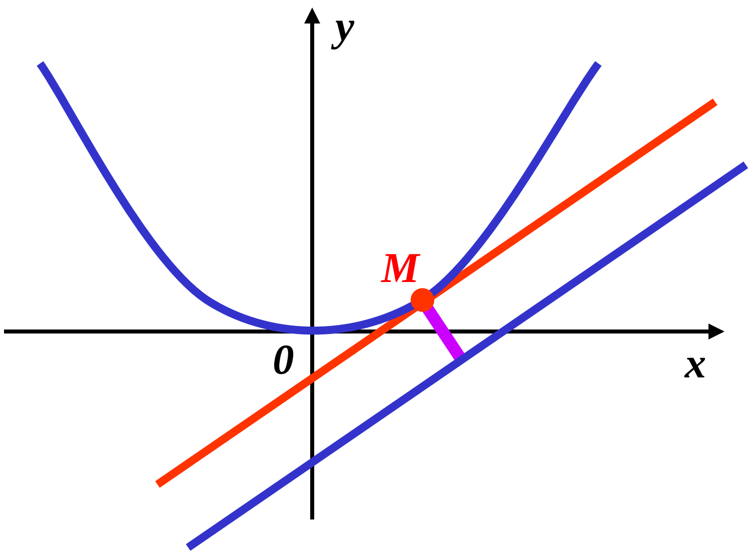
$$d''=\frac{8}{5}>0.$$ 故$x=\frac{3}{8}$时d取极小值，即最小值.

$\therefore$点$\left(\frac{3}{8},\frac{9}{64}\right)$到直线$3x-4y=2$的距离最短。

此题有更简单的方法吗？

(5) 在抛物线$y = x^2$上找出到直线$3x - 4y = 2$的距离为最短的点。

解： 方法 II



距离最短的点必是切点，

切线必与已知直线平行.

由 $y' = 2x = \dfrac{3}{4}$

得：$x = \dfrac{3}{8}$

$\therefore$ 点$(\dfrac{3}{8}, \dfrac{9}{64})$到直线$3x - 4y = 2$的距离最短。

4. 证明题 (1) 解答.

设$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$连续， 可微，$\varphi(0)=0$， $\varphi'(x)$单调增加。

求证：$f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加。

分析： 需证$f'(x)$存在,且$f'(x)=\dfrac{\varphi'(x)\cdot x-\varphi(x)}{x^2}>0$.

证明： 由拉格朗日中值定理，对$x>0$，有

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)x<\varphi'(x)\cdot x$$

$$\therefore \varphi'(x)\cdot x-\varphi(x)>0$$

因为$\varphi(x)$可微，$\therefore f(x)$可微.

$$\therefore f'(x)=\frac{\varphi'(x)\cdot x-\varphi(x)}{x^2}>0. \qquad \therefore f(x)\uparrow.$$

证毕.

(2) 解答. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

若 $f(x)$在某一点 $x_0 \neq 0$ 处有极值,则它是极大值还是极小值?为什么?

解 由已知，在$x_0 \neq 0$处，有$f'(x_0) = 0$

$\therefore \quad x_0 f''(x_0) = 1 - \mathrm{e}^{-x_0}$， 即 $f''(x_0) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x_0}}{x_0}$

当 $x_0 > 0$, $\mathrm{e}^{-x_0} < 1$, $f''(x_0) > 0$;

当 $x_0 < 0$, $\mathrm{e}^{-x_0} > 1$, $f''(x_0) > 0$;

总之，$x_0 \neq 0$时，$f''(x_0) > 0$. $\therefore f(x_0)$是极小值。

(3)解答. $f(x)$在[0,1]上可导，且$0<f(x)<1$, $f'(x)\neq 1$,

$(0\le x\le 1)$.证明：方程$f(x)=x$在(0,1)内有且仅有一个根

证明： 令 $g(x)=f(x)-x$. 因为 $g(0)\cdot g(1)<0$，

由介值定理至少$\exists$一$\xi\in(0,1)$, 使 $g(\xi)=0$.

即 $f(x)=x$ 至少有一个根ξ .

设还有一个根$\xi_1\in(0,1)$. 因为$g(\xi)=g(\xi_1)=0$.

由罗尔定理, $\exists\xi_2\in(\xi,\xi_1)$或$(\xi_1,\xi)$,

使$g'(\xi_2)=f'(\xi_2)-1=0$.

即 $f'(\xi_2)=1$. $\xi_2\in(0,1)$. 与已知矛盾.

$\therefore f(x)=x$只有一根$\in(0,1)$.

证毕.

(4)解答　设$f(x)$在(a,b)内可微，但无界。试证明 $f'(x)$在(a,b)内无界。

证明:反证法.设$f'(x)$在(a,b)内有界.

即$\exists M>0$，对$\forall x\in(a,b)$有$|f'(x)|\le M$.

取$x_0\in(a,b)$，则对$\forall x\in(a,b)$，$x\neq x_0$，

在以x和x_0为端点的区间上,$f(x)$满足Lagrange定理条件. $\therefore$ 有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\quad \xi\text{在}x\text{和}x_0\text{之间.}$$

即:$|f(x)|\le|f(x_0)|+|f'(\xi)|(b-a)$

$$\le|f(x_0)|+M(b-a)\overset{\text{记}}{=\!=}K$$

$\therefore f(x)$在(a,b)内有界,与已知矛盾。证毕

(5) 解答

函数$f(x)$在[0,1]上具有二阶导数, $f(0)=0,\ f(1)=1,$ $f''(x)\neq 2.$ 试证明：当$x\in(0,1)$时，$f(x)\neq x^2.$

以下证明对吗?

证明： 反证法。

设当$x\in(0,1)$时，$f(x)=x^2.$

则 $f'(x)=2x,\quad f''(x)=2.$

与已知矛盾。 证毕。

以上证明不对!

这里要求证明

对任意一点$x\in(0,1),$

都有 $f(x)\neq x^2.$

即:在(0,1)内，

$f(x)$处处$\neq x^2.$

比如 $f(x)=\begin{cases} x & x\neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & x=\frac{1}{2} \end{cases}$

也不行!

(5) 正确解答

函数$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$f''(x)\neq 2$. 试证明：当$x\in(0,1)$时，$f(x)\neq x^2$.

证明： 反证法。

设$\exists \xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=\xi^2$.

考虑 $F(x)=f(x)-x^2 \qquad x\in[0,1]$

因为 $F(0)=F(1)=F(\xi)=0$, $(0<\xi<1)$

$\therefore \exists \xi_1\in(0,\xi)$及$\xi_2\in(\xi,1)$,

由罗尔定理有$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

又$\exists \xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$, 有$F''(\xi_3)=f''(\xi_3)-2=0$.

与已知$f''(x)\neq 2$矛盾. 证毕。

(6)解答

设$f(x)$在$[0,1]$上可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$,但 $f(x)\neq x$.

证明:在$(0,1)$内必有x_1, x_2存在,使 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

证明: 因为$f(x)$在$[0,1]$上可导, $\therefore f(x)$在$[0,1]$上连续.

又 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 由介值定理,存在$\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}$.

在$[0,\xi]$及$[\xi,1]$上分别对$f(x)$用拉格朗日中值定理

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(x_1),\qquad \text{即}\ \frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{1}{2\xi}=f'(x_1).$$

$$\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(x_2),\qquad \text{即}\ \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\xi}=\frac{1}{2(1-\xi)}=f'(x_2).$$

$$\therefore \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2\xi+2(1-\xi)=2.\qquad (0<x_1<x_2<1)$$

(7)解答

指出函数$y=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\dfrac{1}{x-a_3}$的零点个数和范围，其中$a_1<a_2<a_3$.并说明理由

解： $$y'=-\frac{1}{(x-a_1)^2}-\frac{1}{(x-a_2)^2}-\frac{1}{(x-a_3)^2}<0$$

x	$(-\infty,a_1)$	(a_1,a_2)	(a_2,a_3)	$(a_3,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$
y	$\searrow$ $(-\infty,0)$	$\searrow$ $(-\infty,+\infty)$	$\searrow$ $(-\infty,+\infty)$	$\searrow$ $(0,+\infty)$

y在$(-\infty,a_1),(a_3,+\infty)$内无零点在$(a_1,a_2),(a_2,a_3)$内各有唯一一个零点