§2.2 矩阵的基本运算

一、矩阵的相等

同型矩阵：两个矩阵行数和列数都相等

矩阵相等：设两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 是同型矩阵，且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 则称矩阵A和B相等，记做 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

例如：

$$\begin{pmatrix} x & -1 & -8 \\ 0 & y & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & z \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

可得

$$x=3 \quad y=2 \quad z=-8$$

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

设有两个同型矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$,那末矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

前提： 同型矩阵

规则： 对应元素分别相加

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. 数乘

用数字k乘以矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$等于用$k$乘以矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个元素，即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意：要与行列式的乘法区分。

3. 负矩阵　　$\boldsymbol{A}$的负矩阵记做$-\boldsymbol{A}$

$$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$$

4. 减法 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})$

5. 运算规律

设A, B, C都是$m\times n$阶矩阵，k, l为常数, 则有

关于加法
$$\begin{cases}(1)\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}; \\ (2)\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}). \\ (3)\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \\ (4)\ \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}\end{cases}$$
加法交换律

加法结合律

关于乘法
$$\begin{cases}(5)\ 1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \\ (6)\ (kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A}); \\ (7)\ (k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}; \\ (8)\ k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}.\end{cases}$$
关于数乘的结合律

关于数乘的分配律

例1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -7\\ 5 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -5 & -3\end{pmatrix}$，且 $3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=5\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$。

解　移项得

$$2\boldsymbol{X}=-3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}=-3\begin{pmatrix}0 & -7\\ 5 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}4 & 6\\ -5 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 21\\ -15 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16 & 24\\ -20 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 45\\ -35 & -15\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}8 & 45/2\\ -35/2 & -15/2\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

特殊情况：设行矩阵 $\boldsymbol{P}_{1\times n}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 及列矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{n\times1}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{PQ}\overset{\text{规定}}{=\!=\!=}p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$$

一般情况：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 及矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定矩阵**A**与**B**的乘积为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}\overset{\text{记做}}{=\!=\!=}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \boldsymbol{C}$$

注意：1. ***A***的列数＝***B***的行数；（前提）

2. ***AB***的行数＝***A***的行数，***AB***的列数＝***B***的列数；

3. ***AB***中***A***、***B***的顺序不能变。

例 1

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解 $\because A=(a_{ij})_{3\times 4}$, $B=(b_{ij})_{4\times 2}$, $\therefore C=(c_{ij})_{3\times 2}$.

故

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 10 & 2 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$$

注意:

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

没意义

例3

$$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+2\times2+3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\end{pmatrix}=10$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

注意：AB是一阶方阵，BA是三阶方阵，乘积都有意义，但阶数不同。

例4 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，求$AB$和$BA$。

解

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

注意：AB与BA都有意义，但$AB \neq BA$。

总结：矩阵乘法不满足交换律，有三层意义：

(1) AB可以有意义，但BA无意义；

(2) AB, BA都有意义，但其乘积不同阶；

(3) AB, BA都有意义且其乘积为同阶方阵，但仍有 $AB \neq BA$;

但是也不是所有情况都这样，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$ 有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

- 在矩阵乘法中, 实数或复数的乘法运算的某些性质, 可能不再成立。

(1) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但有可能有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$;

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能得出$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(3) $AB=O$，且$A\neq O$，也不能得出$B=O$；

(4) $AB=AC$，且$A\neq O$，也不能得出$B=C$；

矩阵乘法运算规律：

(1) $(A_{m\times s}B_{s\times n})C_{n\times l}=A_{m\times s}(B_{s\times n}C_{n\times l})$ 乘法结合律

(2) $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n})=AB+AC$

$(A_{m\times s}+B_{m\times s})C_{s\times n}=AC+BC$ 乘法分配律

(3) $k(A_{m\times s}B_{s\times n})=(kA)B$

(4) $E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$

E_m和E_n类似于数字乘法中的1

- 矩阵乘法的应用：可以把复杂的问题简化

例如　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组可以简记为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

再例如　若已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \qquad \vdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1s}z_s, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2s}z_s, \\ \qquad \vdots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{ns}z_s. \end{cases}$$

求 $z_1, z_2, \cdots, z_s$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的线性变换。

分析：如果直接代入很麻烦，若记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_s\end{pmatrix},$$

则这两个线性变换可以简记为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\qquad\qquad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$$

则 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{z}$$

求出$\boldsymbol{AB}$即可。

四、方阵的幂

设A为n阶方阵，则规定A的k次方为

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{k}$$

可以看出：只有方阵才有幂运算。

规定：

$$A^0 = E \qquad A^1 = A$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

运算规律：

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$

$$(A^k)^l = A^{kl}$$

k，l为任意正整数

注意：当 $AB \neq BA$时，某些关于数字幂运算的规律不再成立，例如

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$$

$$(\boldsymbol{AB})^k = \underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{k} = (\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})$$

$$\neq (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})$$

所以 $(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$

另外不成立的规则还有：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k \neq \boldsymbol{A}^k+C_k^1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}+\cdots+C_k^{k-1}\boldsymbol{AB}^{k-1}+\boldsymbol{B}^k$$

例5

设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$求$A^k$.

解 法一 归纳法

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

由此猜测

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 $k=n$ 时成立，则 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$$
=\begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} & \frac{(n+1)n}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},
$$

所以对于任意的k都有

$$
A^{k}=\begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}.
$$

法二　拆项法

令 $$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}}_{\parallel\atop \boldsymbol{B}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\parallel\atop \boldsymbol{C}}$$

又因为

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{CB}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^k=\boldsymbol{B}^k+C_k^1\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{C}+C_k^2\boldsymbol{B}^{k-2}\boldsymbol{C}^2+C_k^3\boldsymbol{B}^{k-3}\boldsymbol{C}^3\cdots+\boldsymbol{C}^k$$

因为

$$\boldsymbol{B}^k=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^k & & \\ & \lambda^k & \\ & & \lambda^k\end{pmatrix}$$

且

$$\boldsymbol{C}^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^k=\boldsymbol{B}^k+C_k^1\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{C}+C_k^2\boldsymbol{B}^{k-2}\boldsymbol{C}^2+C_k^3\boldsymbol{B}^{k-3}\boldsymbol{C}^3\cdots+\boldsymbol{C}^k$$

$$\boldsymbol{C}^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{O}\quad(k\geq 3)$

所以

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&&\\&\lambda^k&\\&&\lambda^k\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\lambda^{k-1}&&\\&\lambda^{k-1}&\\&&\lambda^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix}\lambda^{k-2}&&\\&\lambda^{k-2}&\\&&\lambda^{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

附　对角阵的乘积与幂

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \lambda_2\mu_2 & \\ & & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \lambda_3^k \end{pmatrix}$$

五、矩阵的转置

*A*的行与列互换得到的矩阵称作*A*的转置矩阵，记做 A^{T}。如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则 $$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

运算规律：

$(1)\ (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$ $(2)\ (A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

$(3)\ (kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$ $(4)\ (AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

证明 只证第(4)式

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}$

则

$$c_{ji}=\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{js} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{si} \end{pmatrix}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots a_{js}b_{si}$$

$$d_{ij}=\begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{si} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{js} \end{pmatrix}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots a_{js}b_{si}$$

$$c_{ji}=d_{ij}\qquad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$$

$\therefore \boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

例6

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$

解 法一

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\-2 & -3 & 1\\-2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&-3&1\\-2&-3&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\3&-3&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

法二

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\3&-3&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

例7 已知矩阵 $B=(1,2,3),C=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，又矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，求$\boldsymbol{A}^n$。

分析

$$A = B^{\mathrm{T}}C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^n$$

解 利用矩阵乘法满足结合律

$$\begin{aligned} A^n &= (B^{\mathrm{T}}C)(B^{\mathrm{T}}C)\cdots(B^{\mathrm{T}}C) \\ &= B^{\mathrm{T}}(CB^{\mathrm{T}})(CB^{\mathrm{T}})\cdots(CB^{\mathrm{T}})C \end{aligned}$$

又 $CB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$

$$\therefore A^n=3^{n-1}B^{\mathrm{T}}C=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

定义2.7

对称矩阵：n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，满足$A^{\mathrm{T}}=A$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

反对称矩阵：n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，满足$A^{\mathrm{T}}=-A$，即

$$a_{ij}=-a_{ji}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

说明：（1）对称矩阵和反对称矩阵都一定是方阵；

（2）对称矩阵的特点：元素以主对角线为对称轴对应相等；

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（3）反对称矩阵的特点：主对角线元素全为0，其余元素以主对角线为对称轴对应互为相反数；

因为，当$i=j$的时候，$a_{ii}=-a_{ii}$，则$a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$

如

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

注意：对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵，如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

六、方阵的行列式

定义2.8 由 n 阶方阵 A 的元素按原位置所构成的行列式，叫做**方阵 A 的行列式**，记作 $\det A$.

注：有的教科书记做 $|A|$

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ 则 $\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-2.$

运算规律：

$(1)\ \det(A^{\mathrm{T}})=\det A;$ $(2)\ \det(kA)=k^n\det A;$

$(3)\ \det(AB)=\det A\det B=\det(BA);$

$(4)\ \det A^k=(\det A)^k;$ $|A+B|\neq|A|+|B|$

例8　2005数一(4分)　课后题20题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，记矩阵$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，且 $\det A=1$，且 $\det \boldsymbol{B}=$ ______

解　若记

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_1+2b_1+4c_1 & a_1+3b_1+9c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & a_2+2b_2+4c_2 & a_2+3b_2+9c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & a_3+2b_3+4c_3 & a_3+3b_3+9c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det\boldsymbol{B}=\det(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\det(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3)$$

$$\xlongequal{c_3-2c_2}\det(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3)$$

$$=2\det(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3)$$

$$\xlongequal[c_1-c_3]{c_2-3c_3}2\det(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)\xlongequal{c_1-c_2}2\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$=2\det\boldsymbol{A}=2$$

➢ 对于n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的各个元素的代数余子式$\boldsymbol{A}_{ij}$所构成的如下方阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵$\boldsymbol{A}$的**伴随矩阵**。

重要性质： $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$

证明

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} & & & \\ & \det \boldsymbol{A} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}
$$

七、共轭矩阵

定义2.9 当 $A=(a_{ij})$为复矩阵时，用 $\bar{a}_{ij}$表示a_{ij}的共轭复数，记 $\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$，称$\overline{A}$为 A 的共轭矩阵.

运算规律：

（设A, B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

$$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$$

$$(2)\ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\ \ \overline{A}$$

$$(3)\ \overline{AB}=\overline{A}\ \ \overline{B}.$$

$$(4)\ (\overline{A})^{\mathrm{T}}=\overline{(A^{\mathrm{T}})}=A^{\mathrm{H}}$$ 称作矩阵A的共轭转置