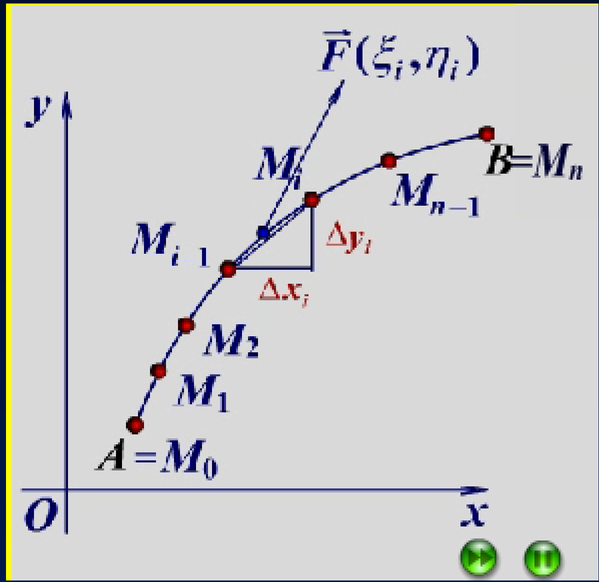
第二节

第二类曲线积分

- 一、第二类曲线积分的概念及性质
- 二、两类曲线积分的联系
- 三、第二类曲线积分的计算法

一、第二类曲线积分的概念及性质

1. 问题引入 变力沿曲线所作的功.



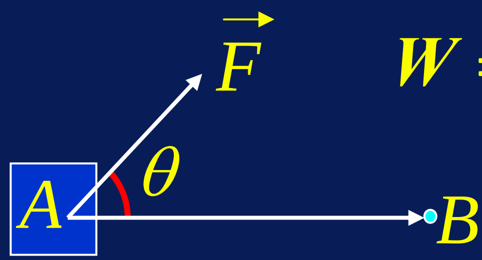
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

L: $A\to B$, 求移动过程中变力所作的功W. 解决办法:

"分割，近似，求和，取极限"

联想：恒力沿直线做功

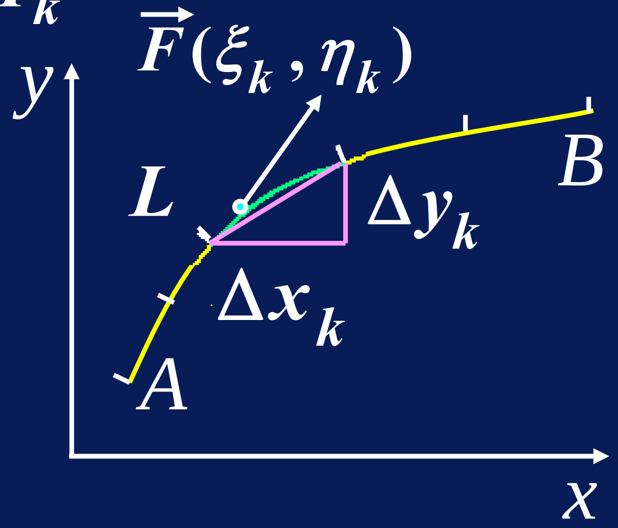


$$W=|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

1° 分割

把L分成 n 个小弧段，$\vec{F}$ 沿$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$所做的功为$\Delta W_k$，则



$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$

2° 取近似

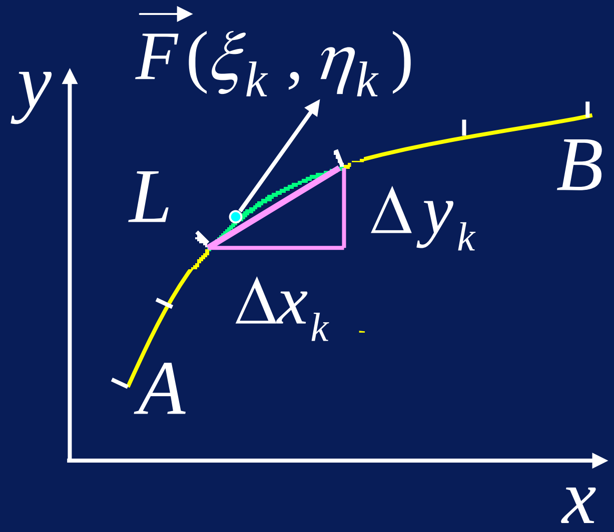
有向小弧段$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k, \Delta y_k)$

近似代替，$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 在上任取一点 (ξ_k, η_k)，则有

$$\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_k, \eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$
$$= P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

3° 求和

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$



4° 取极限

变力沿曲线所作的功

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right]$$

(其中λ 为 n 个小弧段的最大长度)

2. 定义10.2 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条有向光滑弧, 在L 上定义了一个有界向量函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\,]$$

都存在(与分化和取点无关), 其中$\Delta\vec{r}_i=\Delta x_i\,\vec{i}+\Delta y_i\,\vec{j}$,

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta \vec{r}_i|\}$, 则称此极限值为向量值函数

$F(x,y)$在有向曲线弧 L 上第二类曲线积分,

或对坐标的曲线积分，记作

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

积分路径

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\,]$$

注 1° 关于第二类曲线积分的几个术语

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$ 第二类曲线积分的向量形式

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$ 第二类曲线积分的坐标形式

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$ 对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$ 对 y 的曲线积分.

2° 若 Γ 为空间曲线弧 ,

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3° 如果L 是闭曲线, 则对坐标的曲线积分记为

$$\oint_{L} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \oint_{L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

4° 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!

5° 变力沿曲线所作的功

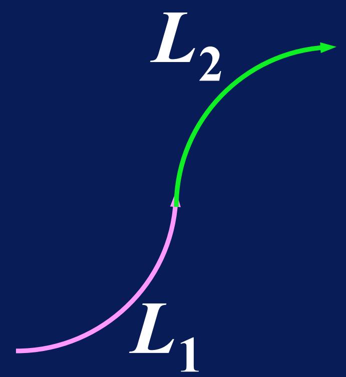
$$W = \int_{L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

性质 (1) 线性性质： $\forall\alpha,\ \beta\in R^1$

$$\int_L[\alpha\vec{F}_1(x,y)+\beta\vec{F}_2(x,y)]\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\alpha\int_L\vec{F}_1(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\beta\int_L\vec{F}_2(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

(2) 可加性： L由L_1和L_2组成



$$\int_L\vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{L_1}\vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{L_2}\vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

(3) 有向性: 用L^-表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_{L} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$

对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向.

这是第一类和第二类线积分的一个重要区别

二、两类曲线积分之间的联系

定理 设有向平面曲线弧 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

起点： $A \leftrightarrow a$,　　终点： $B \leftrightarrow b$

$\varphi'(t), \psi'(t)$在以a, b为端点的区间上连续，且

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0.$$

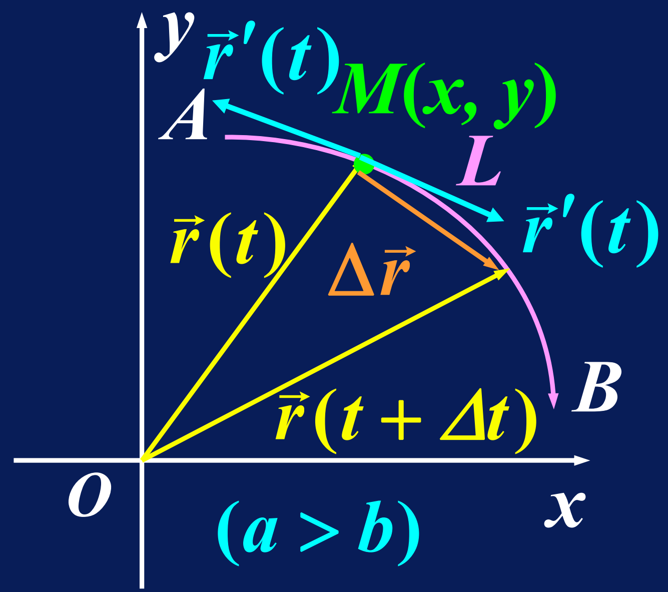
L上点(x, y)处与L同方向的切向量 的方向角为α, β，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

证　曲线L的方程的向量形式：

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t))$$

$$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t};$$



曲线L在$\vec{r}(t)$的终点处切向量，

其指向与参数t增大时曲线L上的点移动

的方向一致.

目录　上页　下页　返回　结束

一方面 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}'(t)\mathrm{d}t = (\varphi'(t), \psi'(t))\mathrm{d}t$

$$= (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

另一方面，

1° 当 $a < b$ 时，沿着L的方向移动时，参数 t 增加.

$$\therefore \quad \mathrm{d}t > 0$$

故 $\mathrm{d}\vec{r}$ 与$\vec{r}'(t)$同方向，从而与 L的方向一致.

于是 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_{\vec{r}'}\,\mathrm{d}s \qquad (1)$

2° 当$a>b$时，

沿着L的方向移动时，参数 t 减少.

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}t<0$$

故 $\mathrm{d}\vec{r}$ 与$\vec{r}'(t)$方向相反，而与 L的方向一致.

于是 $$\mathrm{d}\vec{r}=(-\vec{\mathrm{e}}_{\vec{r}'})\,\mathrm{d}s \qquad (2)$$

综合(1)、(2)，得

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{\mathrm{e}}_L\,\mathrm{d}s$$

其中 $\vec{\mathrm{e}}_L$ 是与L同方向的单位切向量 .

$$\vec{e}_L = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$$

$$= \begin{cases} \vec{e}_{\vec{r}'}, & \text{当} a < b \text{时} \\ -\vec{e}_{\vec{r}'}, & \text{当} a > b \text{时} \end{cases}$$

其中 $\vec{e}_{\vec{r}'} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

$$= \left(\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right)$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_L\,\mathrm{d}s = (\cos\alpha, \cos\beta)\,\mathrm{d}s$$

从而 $\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_L \vec{F}(x,y)\cdot \vec{\mathrm{e}}_L \mathrm{d}s$

$\because \quad \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$\vec{\mathrm{e}}_L = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$$

$\therefore \quad \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s.$$

可以推广到空间曲线上

注 $$\cos\alpha = \pm\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

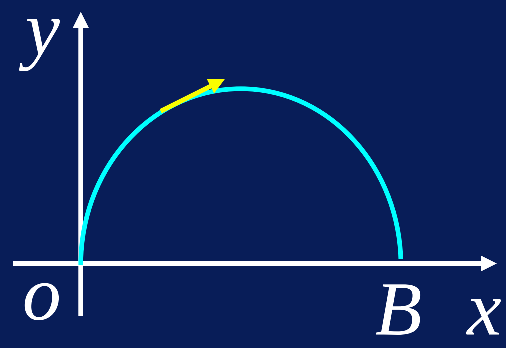
当$a<b$时，取“+”号；

当$a>b$时，取“−”号.

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,|\mathrm{d}t|$$

例1 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分，其中L 沿上半圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 从 $O(0,0)$ 到$B(2,0)$.



解(方法1) $L:\quad y = \sqrt{2x - x^2},$

$x:\quad 0 \longrightarrow 2 \qquad (a < b)$

$$y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

切向量 $\vec{T} = \vec{r}\,'(x) = (1, y')$ 与L方向一致.

其方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{2x-x^2}$$

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 1-x$$

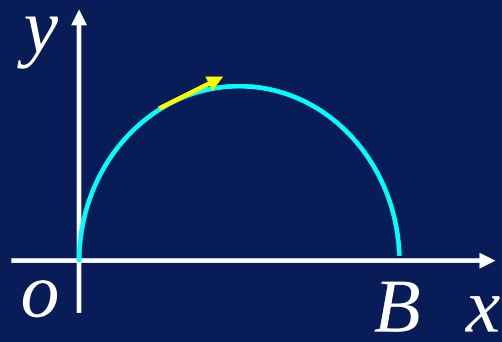
$$\therefore \quad \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_L [\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y) + (1-x)Q(x,y)]\,\mathrm{d}s$$

(方法2) $L:\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \end{cases},$

$t:\quad \pi \longrightarrow 0 \qquad (a > b)$



切向量 $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

与L方向相反.

与L同方向的切向量：$\vec{T} = -\vec{r}'(t) = (\sin t, -\cos t)$

其方向余弦： $\cos\alpha = \sin t = y = \sqrt{2x - x^2},$

$\cos\beta = -\cos t = 1 - x$

… ….

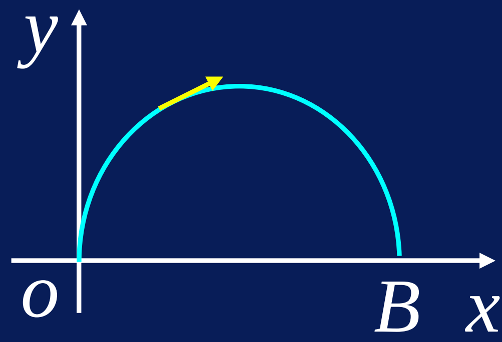
目录 上页 下页 返回 结束

(方法3) $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$O \xrightarrow{L} B$

弧长s ↗



$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

三、第二类曲线积分的计算法

定理10.2 设 L 是一条平面有向光滑曲线弧，其参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t: a \to b,$$

当 t： $a \xrightarrow{\text{单调}} b$时， 点$M(x,y)$： $A \xrightarrow{\text{沿}L} B$.

$P(x,y), Q(x,y)$在L上连续， $\varphi(t), \psi(t)$在以a和b为端点的区间上具有一阶 连续的导数，且

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0,$$

则有 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \{ P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t) \}\mathrm{d}t$$

证 首先证明:

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

由两类曲线的关系，得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_L P(x,y)\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

再由第一类曲线积分的计算法，得

$$\int_L P(x, y)\cos\alpha \,\mathrm{d}s$$

链 接

$$=\begin{cases} \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, & \text{当} a < b \text{时}; \\ \int_b^a P[\varphi(t),\psi(t)]\cdot [-\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t, & \text{当} a > b \text{时}. \end{cases}$$

$$= \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

同理可证

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

所以 $\displaystyle\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \{\, P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\}\,\mathrm{d}t$$

注 1° 计算$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，可将

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

代入上式，且同时换限.

下限$a \longleftrightarrow L$的起点A

上限$b \longleftrightarrow L$的终点B

a不一定小于 b！

即计算定积分：

$$\int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$ 即可；

2° 如果 L 的方程为 $y=\psi(x), x: a \to b,$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \{P[x,\psi(x)] + Q[x,\psi(x)]\,\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

3° 对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $\quad t: \alpha \to \beta$

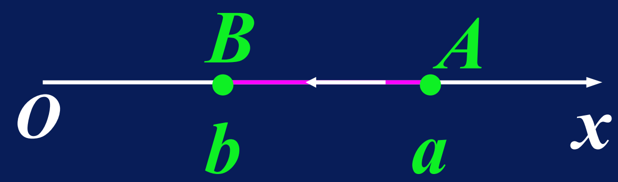
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+ Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t) + R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\,\}\mathrm{d}t$$

思考 定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



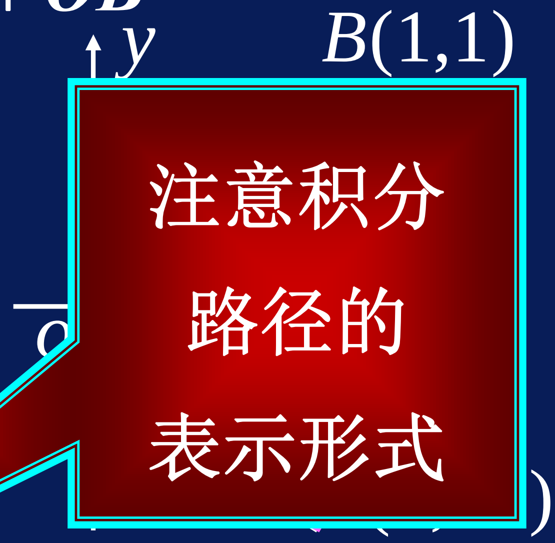
是否可看作第二类曲线积分的特例？

是！ 第二类曲线积分

$$\int_{\overline{AB}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例2 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.

解(方法1) 取 x 为参数, 则 $L: \overset{\frown}{AO} + \overset{\frown}{OB}$



$$\overset{\frown}{AO}: \ y = -\sqrt{x}, \ \ x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}: \ y = \sqrt{x}, \quad x: 0 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

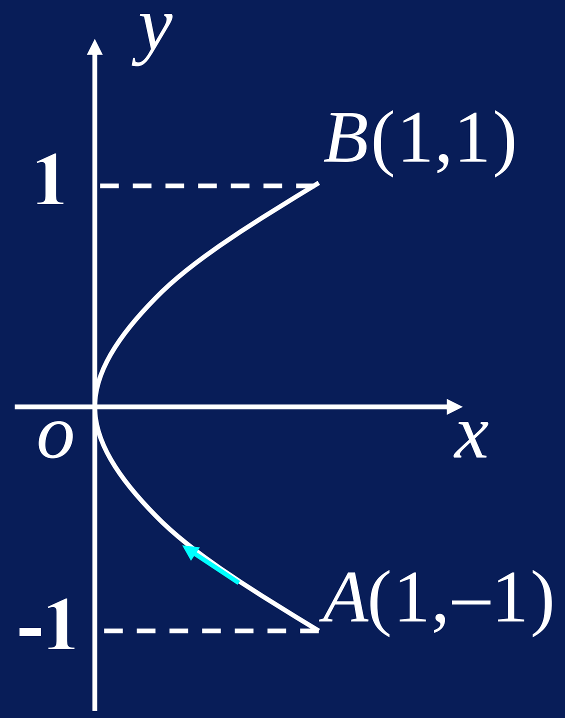
注意积分
路径的
表示形式

(方法2) 取 y 为参数, 则

$$L: x = y^2\,,\quad y: -1 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2 y (y^2)'\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{-1}^{1} y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$



注意积分
路径的
表示形式

例3 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周，方向为逆时针方向；

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.

沿不同的路径积分，其结果不同

解 (1) L： $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t:0 \to \pi$

则
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) L： $y=0,\ x:a\to -a,$

则
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

例4 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}.$

沿不同的路径积分，所得到结果相同

解 (1) 原式$= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式$= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\,\mathrm{d}y = 1$$

例5 计算$\int_{\Gamma} x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$, 其中 Γ是从点 $A\ (3, 2, 1)$到点$B\ (0, 0, 0)$的直线段AB.

解 直线AB为:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t: 1 \to 0.$$

$$\int_{\Gamma} x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$$

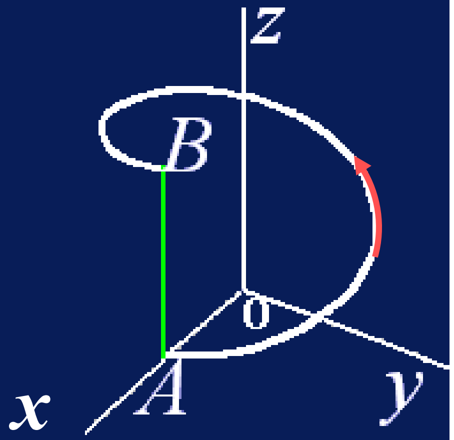
$$= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t] \mathrm{d}t$$

$$= 87 \int_1^0 t^3 \mathrm{d}t = -\frac{87}{4}$$

例6 设在力场 $\overrightarrow{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿Γ移动到 $B(R,0,2\pi k)$,其中Γ为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$. 试求力场对质点所作的功.



解 (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

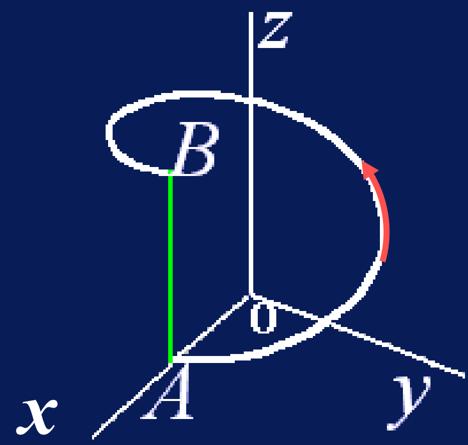
$$=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

目录 上页 下页 返回 结束

(2) Γ 的参数方程:

$$x = R,\ y = 0,\ z = t,\ \ t: 0 \to 2\pi k$$



$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{0}^{2\pi k} t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi^2 k^2$$

内容小结

1. 定义 $\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

2. 性质 $\int_L [\alpha \vec{F}_1(x,y) + \beta \vec{F}_2(x,y)]\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= \alpha\int_L \vec{F}_1(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \beta\int_L \vec{F}_2(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{L_2} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

3. 计算 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t : \alpha \to \beta,$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{ P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t) \}\mathrm{d}t$$

4. 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!

5. 两类曲线积分之间的关系

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

思考题

已知 Γ 为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

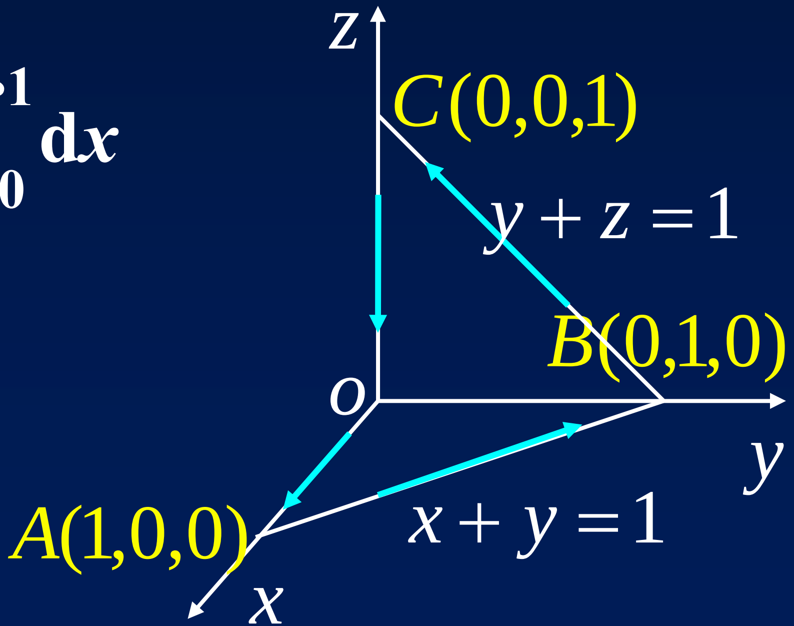
解

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-2+(1+\frac{1}{2})+1$$

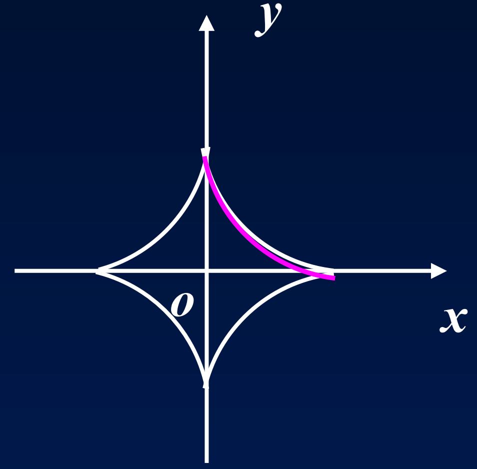
$$=\frac{1}{2}$$



备用题

例1-1 计算$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$， 其中$L$是从点(0,1)沿曲线

$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \quad (x\ge 0)$到点(1,0).



解 L的参数方程：

$$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t, 0\le t\le \frac{\pi}{2},$$

$$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [(\cos^3 t+2\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t)+3\sin^2 t\cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [(\cos^3 t + 2\sin^3 t)(-3\cos^2 t \sin t) + 3\sin^2 t \cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^5 t \sin t + 2(1-\sin^2 t)\sin^4 t - (1-\cos^2 t)\cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= 3\left[\frac{1}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 3\left(\frac{3}{4\times 2} - \frac{5\times 3}{6\times 4\times 2}\right).\frac{\pi}{2} \quad = \frac{1}{2} + \frac{3}{32}\pi.$$

例1-2 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

化为对弧长的曲线积分，其中L为：

(1) 在xOy面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线$y=x^2$从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0,0)到点(1,1).

解 (1) 过点 (0,0), (1,1) 的直线 $y=x$,

方向余弦：$\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_L\left[P(x,y)+Q(x,y)\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}s$$

(2) 由 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + {y'_x}^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$, 得

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}},$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

$$\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\left[P(x, y) + 2xQ(x, y)\right]\mathrm{d}s$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$(3)\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x,\text{则}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta=\sin\alpha=\sqrt{1-(2x-x^2)}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

例3-1 计算$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y$,其中$L$是:

(1) 由$O(0,0)$、$A(1,0)$、$B(1,1)$ 三点连成的折线段;

(2) 由$O(0,0)$沿圆弧 $y=\sqrt{2x-x^2}$到$B(1,1)$;

(3) 由$O(0,0)$沿曲线 $y=x^n$(n是正的实数)到$B(1,1)$.

解 (1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=\int_{OA}+\int_{AB}$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{6}$$

(2)　把L的方程化成参数式：

$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

$$x=1+\cos t,\quad y=\sin t,\quad \frac{\pi}{2}\le t\le \pi.$$

$$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos t)^2(-\sin t)-\sin^2 t(-\sin t)$$

$$+(1+\cos t)\sin t\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^2 t+\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=(-\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{2}\cos^2 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{6}.$$

(3) $\int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$

曲线 $y = x^n$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^{2n} + nx^{2n})\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{n-1}{2n+1} x^{2n+1} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{n-1}{2n+1}.$$

例5-1 求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,

$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向看为顺时针方向.

解 Γ 的参数方程:

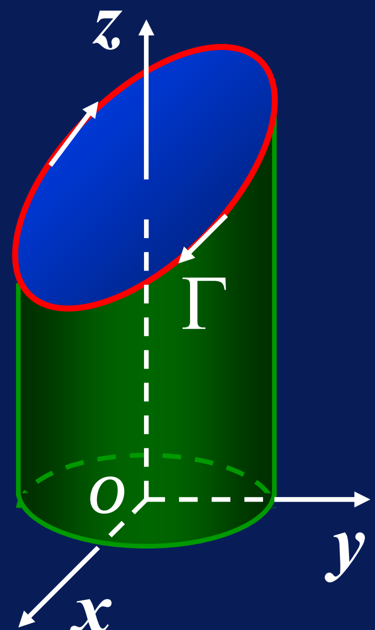
$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t\quad(t:2\pi\to 0)$

$$I=-\int_0^{2\pi}[\ (2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

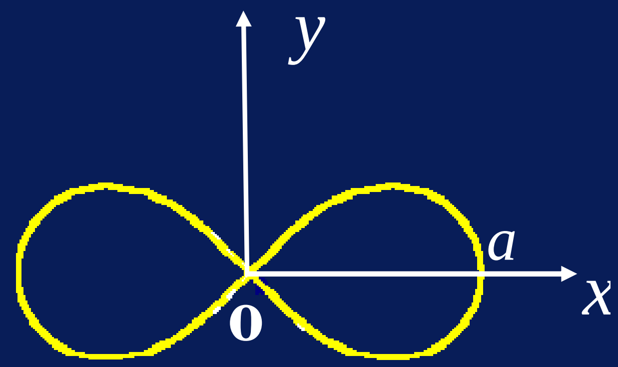
$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\mathrm{d}t=-2\pi$$



例5-2 计算$\oint\limits_L xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$，$L$是双纽线的右半支：$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), x \geq 0$的逆时针方向。

解 L的参数方程是：



$$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta,$$

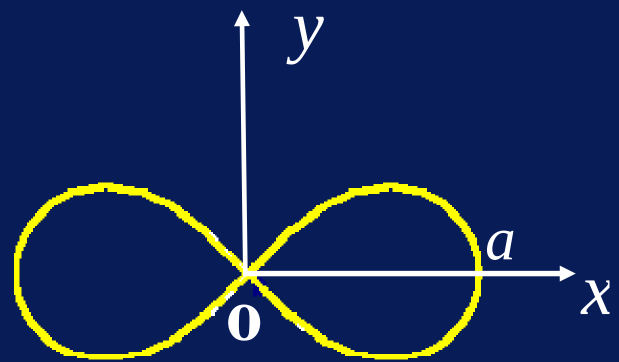
$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin 3\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos 3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\mathrm{d}x = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin 3\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos 3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\oint_L xy(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$



$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos 2\theta \sin\theta\cos\theta(-\sin\theta\sin 3\theta - \cos\theta\cos 3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{a^4}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \ = 0.$$

目录 上页 下页 返回 结束