§1.5 行列式按行（列）展开

目的：把高阶行列式化为低阶行列式

一、余子式与代数余子式

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

注1 行列式的每个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式

注2 M_{ij}和 A_{ij}与a_{ij}的大小无关，而与a_{ij}的位置有关。

二、行列式按行（列）展开法则

定理1.3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \qquad i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

或 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, \qquad j\in\{1,2,\cdots,n\}$$

例 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{展开}}{\overset{\text{按第一行}}{=}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第二列}}{\underset{\text{展开}}{=}} \quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

注：代数余子式中，余子式前的符号“+”、“-”的规律

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

（1）主对角线元素余子式前带“＋”

（2）相邻两元素的余子式前“＋”、“－”相间

证明　只对行证明. 分三步（先特殊，后一般）

(1)假设行列式第一行除a_{11}外都为0，则由定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{(1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}\sum_{(p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

(2)假设行列式第i行除 a_{ij}外都为0，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用第一步的结论，我们要把它化为第一步里面的形式，我们把 D的第 i行依次与第 $i-1, i-2, \cdots, 1$行交换，共交换 $i-1$次；再把 D的第 j列依次与第 $j-1, j-2, \cdots, 1$列交换，共交换 $j-1$次，得

$$D=(-1)^{i-1}\cdot(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素a_{ij}在行列式$\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中的

余子式仍然是a_{ij}在

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 中的余子式 M_{ij}.

于是有 $$\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}M_{ij},$$

故得

$$D=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

$$=a_{ij}A_{ij}.$$

(3) 一般情形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$
(i = 1,2,\cdots,n)
$$

证毕

注：在计算数字行列式时，直接应用行列式展开公式并不一定简化计算，因为把一个n阶行列式换成n个（$n-1$）阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用展开定理才有意义。但展开定理在理论上是重要的。

利用行列式按行按列展开定理，并结合行列式性质，可简化行列式计算：计算行列式时，可先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开，变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式。

例1

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+(-2)c_3}{\underset{c_4+c_3}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 + r_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例2 计算 n 阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}} (a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & & & \\ & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

由递推公式 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 可得

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$$

$$= \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

又因为 $D_1 = a+b$，$D_2 = a^2 + ab + b^2$，则 $D_n - aD_{n-1} = b^n$，

于是

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \cdots =$$

$$a^{n-1}D_1 + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n =$$

$$a^n + a^{n-1}b^1 + \cdots + ab^{n-1} + b^n =$$

$$\begin{cases} (n+1)a^n, & a = b \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b \end{cases}$$

一般地，若导出的递推关系式为

$$D_n = \alpha D_{n-1} - \beta D_{n-2} \quad (\beta \neq 0)$$

则可先将其转化为

$$D_n - pD_{n-1} = q(D_{n-1} - pD_{n-2})$$

进行递推得

$$D_n - pD_{n-1} = \cdots = q^{n-2}(D_2 - pD_1) \overset{\text{记做}}{=\!=\!=} f(n, p, q)$$

其中 p, q 为一元二次方程 $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ 的两根. 然后再利用

$$D_n = pD_{n-1} + f(n, p, q)$$

依次递推求出 D_n .

例3 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix} \qquad \longleftarrow D_{2n-2}$$

解 把行列式按照第一行展开，得

$$D_{2n}=(-1)^{1+1}a\left|\begin{array}{ccc:c} & D_{2(n-1)} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & d\end{array}\right|_{(2n-1)}+(-1)^{1+2n}b\left|\begin{array}{c:ccc}\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & D_{2(n-1)} & \\ \hdashline c & 0 & \cdots & 0\end{array}\right|_{(2n-1)}$$

$$=(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}ad\cdot D_{2(n-1)}+(-1)(-1)^{(2n-1)+1}bc\cdot D_{2(n-1)}$$

$$=(ad-bc)D_{2(n-1)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2$$

又因为 $D_2=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

所以 $D_{2n}=(ad-bc)^n$

例4　证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j). \qquad \textbf{(1)}$$

$$=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_2-x_1)$$

$$(x_n-x_2)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_3-x_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$(x_n-x_{n-1})$$

所以，共有$\dfrac{n(n-1)}{2}$项。

证 用数学归纳法 当$n=2$时

$$\because \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le j<i\le 2}(x_i-x_j),$$

$\therefore$ 当$n=2$时（1）式成立.

假设(1)对于$n-1$阶范德蒙行列式成立，

$$D_n=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

***n*-1阶范德蒙行列式**

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j).$$

证毕

❖ 可以利用范德蒙行列式的结论求行列式

例5 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & (a-1) & \cdots & (a-n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

分析 该行列式与范德蒙行列式形式不同，不能直接用范德蒙行列式的结论，因此要把它化为范德蒙行列式。

解 把 D_{n+1} 最后一行依次与前面各行交换到第一行，新的最后一行再依次与前面各行交换到第二行，这样继续做下去，则共经过交换 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次行后可得范德蒙行列式

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & (a-1) & \cdots & (a-n) \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} [(a-i+1)-(a-j+1)]$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} (j-i)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} (i-j)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n+1} (i-j)$$

定理1.4 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即
$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证 把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 a_{jk} 换成 a_{ik} $(k=1,\cdots,n)$,可得

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|,\quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array} \text{相同}$$

当 $i\neq j$ 时,

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad (i\neq j).$$

同理 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad (i\neq j).$

例6 已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$和 $A_{44}+A_{45}$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 的第4行第 j个元素的代数余子式。

解 由已知条件有

$$\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0\end{cases}$$

解得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,\quad A_{44}+A_{45}=18$

关于代数余子式的重要结论

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D\text{，当 }i=j,\\0\text{，当 }i\neq j;\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D\text{，当 }i=j,\\0\text{，当 }i\neq j;\end{cases}$$

思考题

设n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

思考题解答

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\right).$$