第三节

三重积分的计算

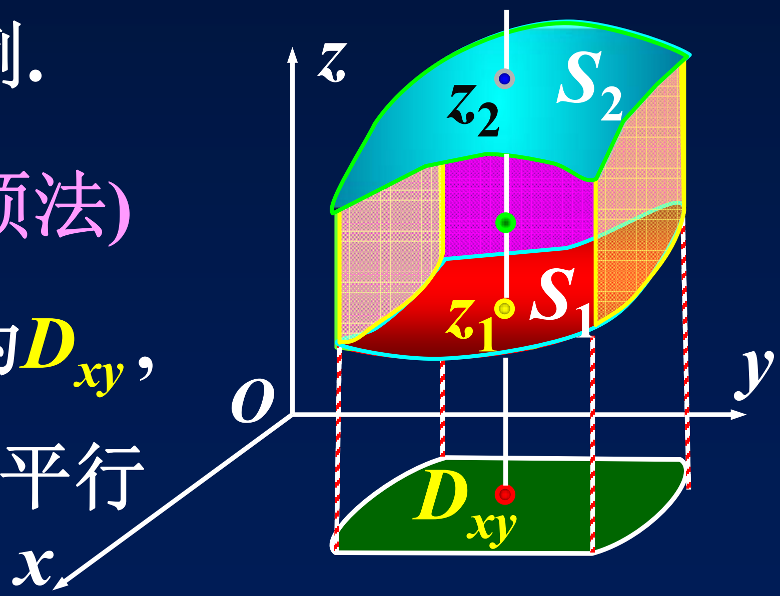
- 一、直角坐标系下三重积分的计算
- 二、柱面坐标系下三重积分的计算
- 三、球面坐标系下三重积分的计算

一、直角坐标系下三重积分的计算

假设：1° $f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω上连续；

2° 过Ω内任一点M且平行于某坐标轴的直线与Ω 的边界曲面S 至多有两个交点.

以下以z 轴的情形为例.



1. “先一后二”法(求围定顶法)

Ω 在xOy面上的投影区域为D_{xy}，

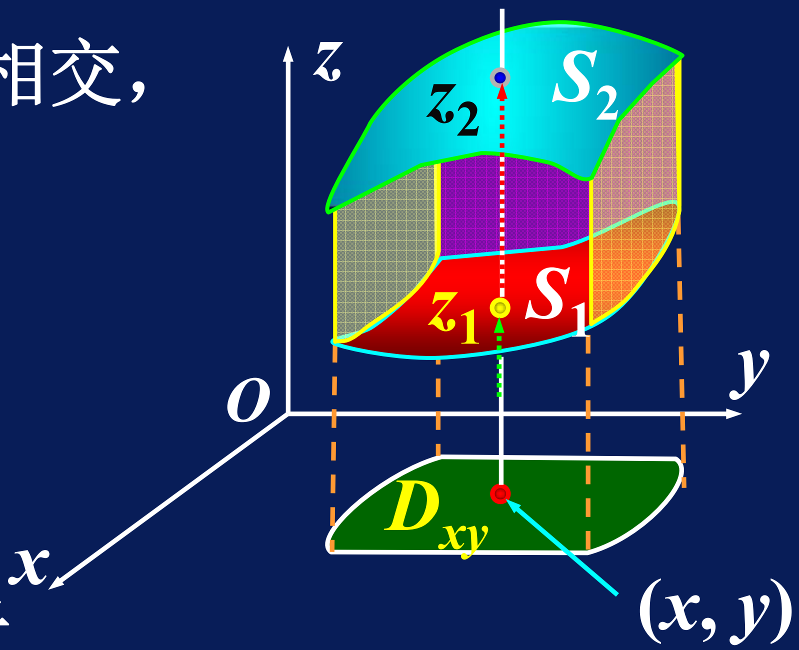
以D_{xy}的边界为准线作母线平行z 轴的柱面.

这柱面与 Ω 的边界曲面S 相交，

并将S分成上、下两部分:

$$S_1: \quad z = z_1(x, y),$$

$$S_2: \quad z = z_2(x, y).$$



过D_{xy}内任点(x, y)作平行于

z 轴的直线，　这直线通过曲面S_1穿入Ω 内，

通过曲面S_2穿出Ω 外，则Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}.$$

"先一后二"法描述:

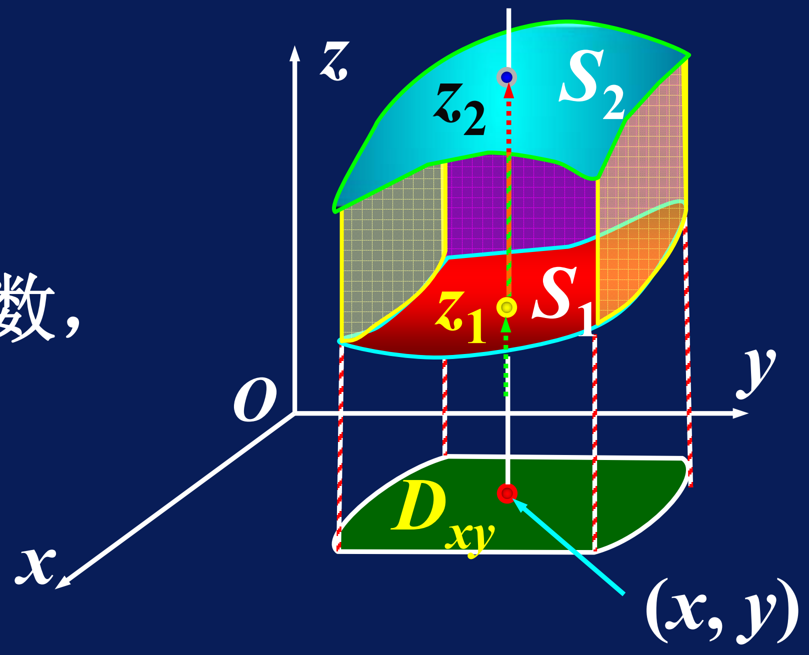
先将 x, y 看作定值,

将 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数,

在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$

上对 z 积分,

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$



再计算 $F(x,y)$ 在投影区域 D_{xy} 上的二重积分，即

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

从而原三重积分可表示为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}\sigma.$$

上式也常记作

先一后二

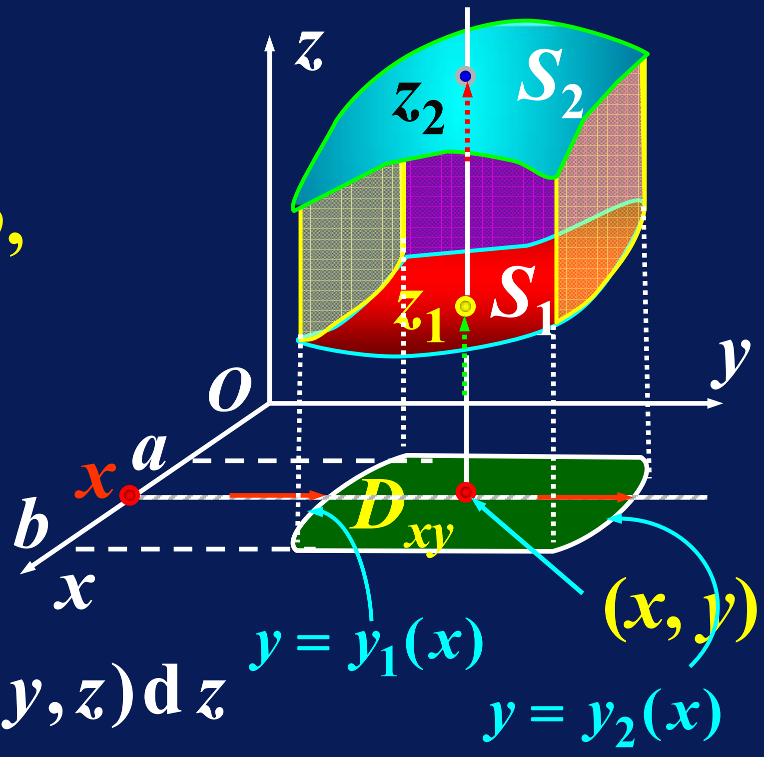
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

若 D_{xy} 可表示为:

$$y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b,$$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

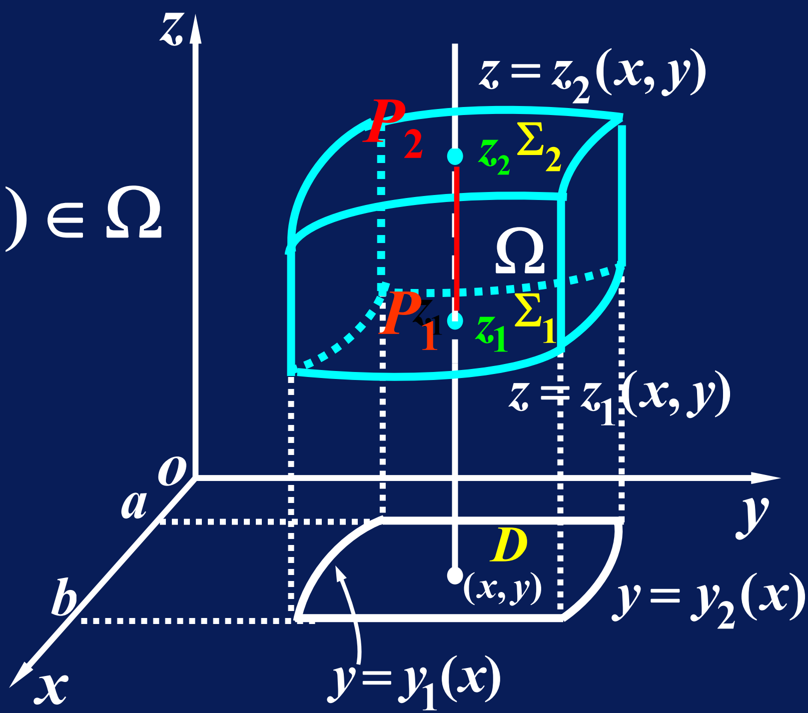


先对z，再对y，最后对x的三次积分

注 1° 物理解释

设 $f(x,y,z)\geq 0,\quad (x,y,z)\in\Omega$

则 $M=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$



(1) 先算线质量

即先将 x, y 看作定值，

将 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数，则

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

线密度为 $f(x,y,z)$ 的线状非均匀体 $\overline{P_1P_2}$ 的质量 .

(2) 再算体质量

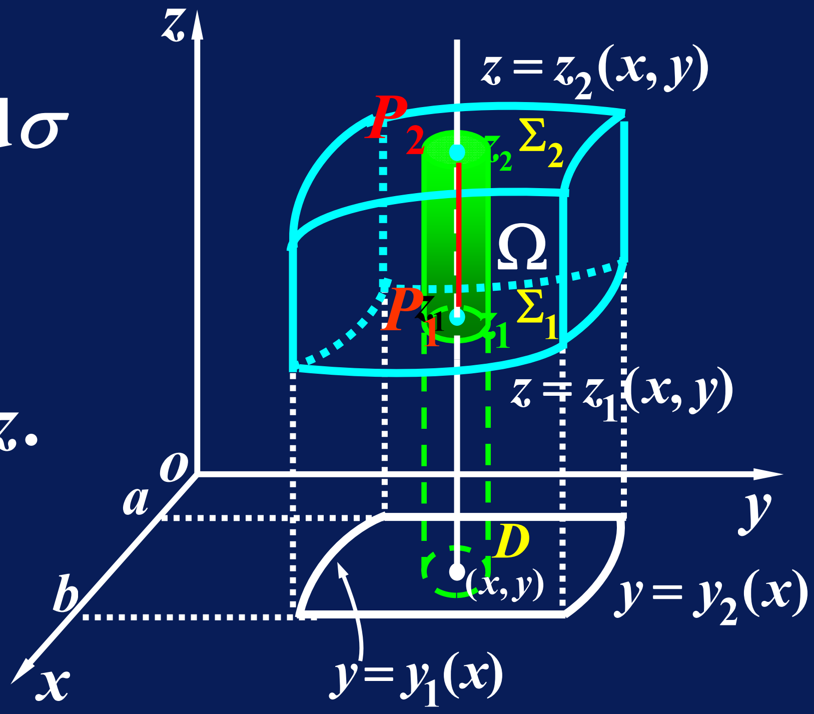
$\forall\,(\mathrm{d}\sigma)\subset D$,与之相应的位于$\Omega$内的小曲顶柱体的质量:

$$\Delta m \approx \mathrm{d}m = F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$M = \iint_D F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\Delta}{=} \iint_D \mathrm{d}\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$



2° 若将积分域 Ω 投影到 yOz 或 xOz 面上，则可把三重积分化为按其它顺序的三次积分.

3° 用“先一后二”法(求围定顶法)求三重积分的

步骤： **(1) 求围**

求积分域 Ω 在某坐标面，如：xOy 面上的投影区域 D_{xy};

(2) 定顶

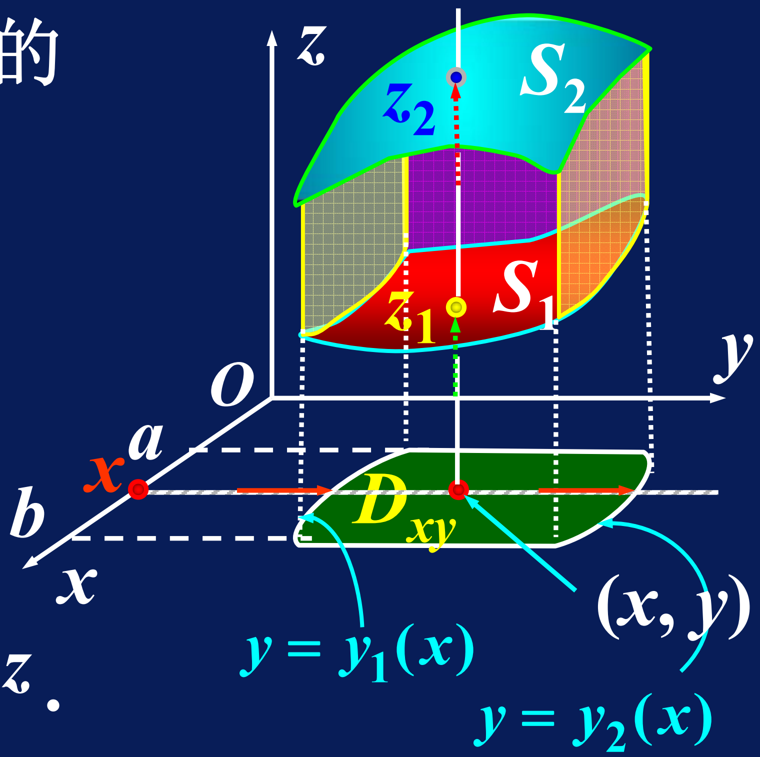
下顶 S_1: $z = z_1(x, y)$;

上顶 S_2: $z = z_2(x, y)$.

(3) 定限

过D_{xy}中任意一点(x, y)，作平行于z轴的直线，

由下至上穿Ω, 穿入点所对应的竖坐标为最内层积分的下限.
(出) (上)



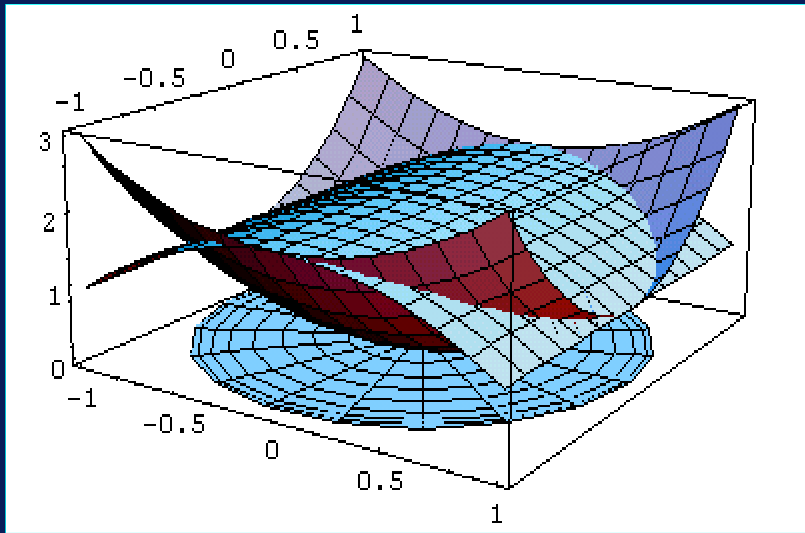
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

(4) 计算

例1 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分区域Ω为由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域.

解 **1° 求围**



$$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$$

消去z
$\Rightarrow x^2+y^2=1$

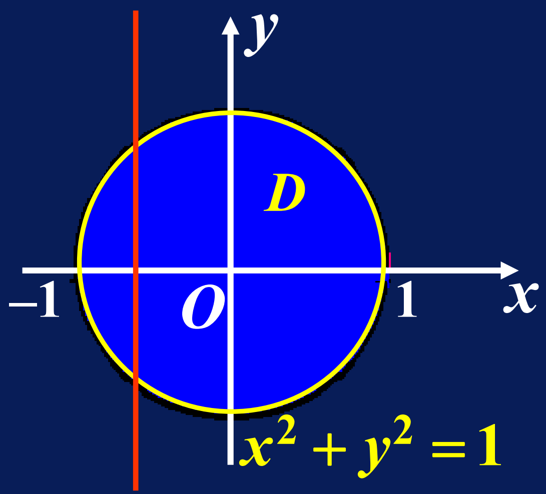
得Ω在 xOy 面上的投影区域 D： $x^2+y^2\leq 1.$

2° 定顶

下顶：$z = x^2 + 2y^2 = z_1(x, y)$

上顶：$z = 2 - x^2 = z_2(x, y)$

$(z_2(0,0) = 2 > z_1(0,0) = 0)$



$$\therefore \quad I = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z)\mathrm{d}z$$

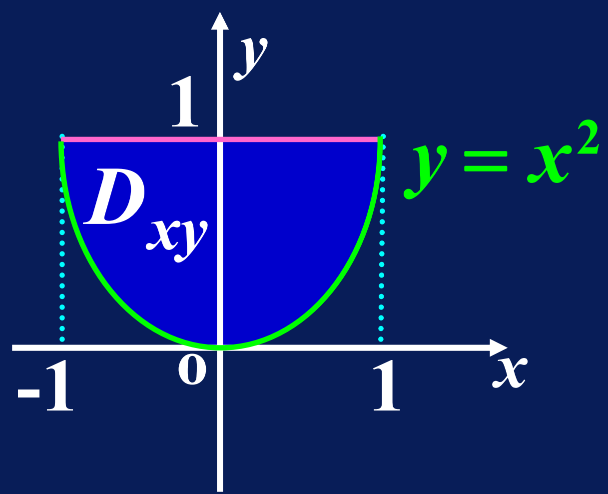
$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

例2 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中Ω为由曲面 $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$ 所围成的空间闭区域.

解 1° 求围

Ω在xOy面上的投影区域

D_{xy}： $x^2 \le y \le 1,\ -1 \le x \le 1.$



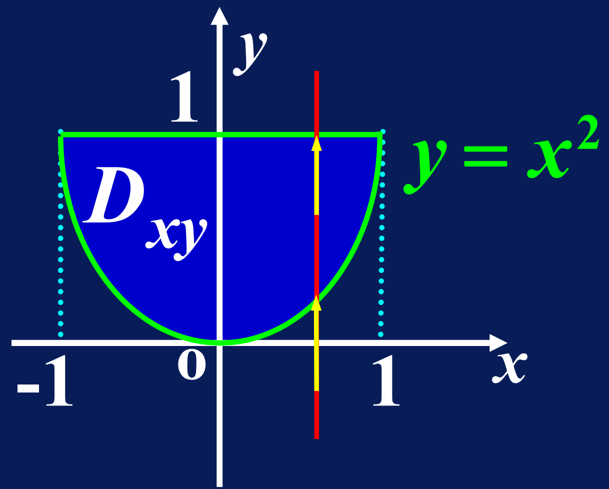
2° 定顶

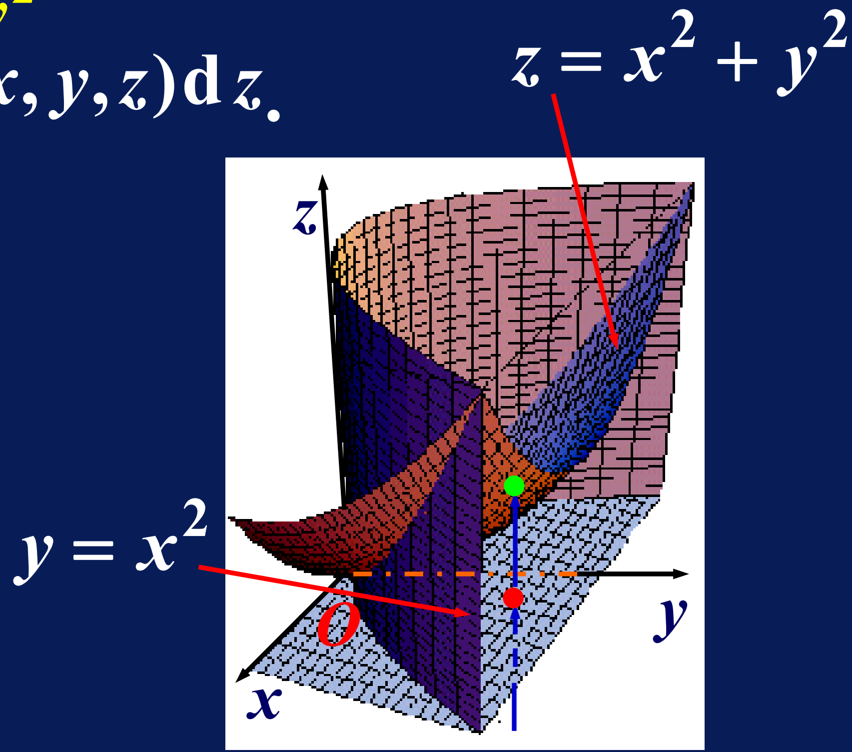
下顶：$z=0$， 上顶：$z=x^2+y^2$

$$D_{xy}:\quad x^2 \le y \le 1,\ -1 \le x \le 1.$$

下顶：$z = 0$，　上顶：$z = x^2 + y^2$

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$





例3 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

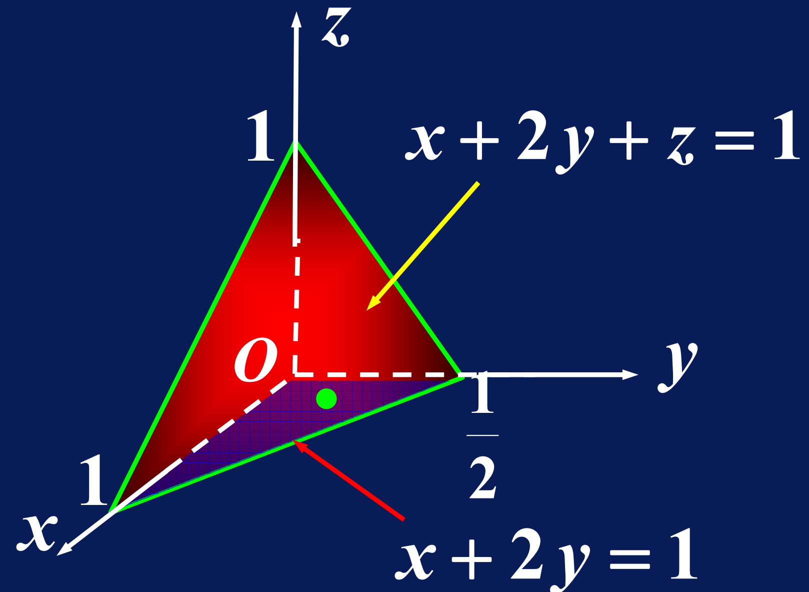
解 (方法1) “先一后二法”

将 Ω 投影到xOy面上，

得投影区域为

$$D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1-x}{2}.$$

在投影域 D内任取一点(x, y),

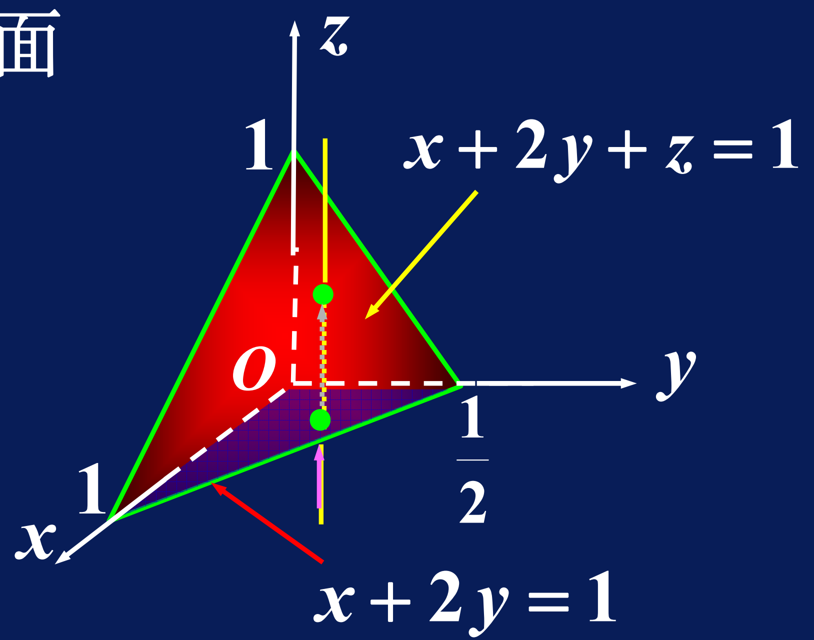


目录 上页 下页 例3-1 继续

过该点作平行于 z 轴的直线，该直线先通过

$z=0$ 穿入Ω内，再通过平面

$x+2y+z=1$ 穿出Ω.



因此，Ω可表示为

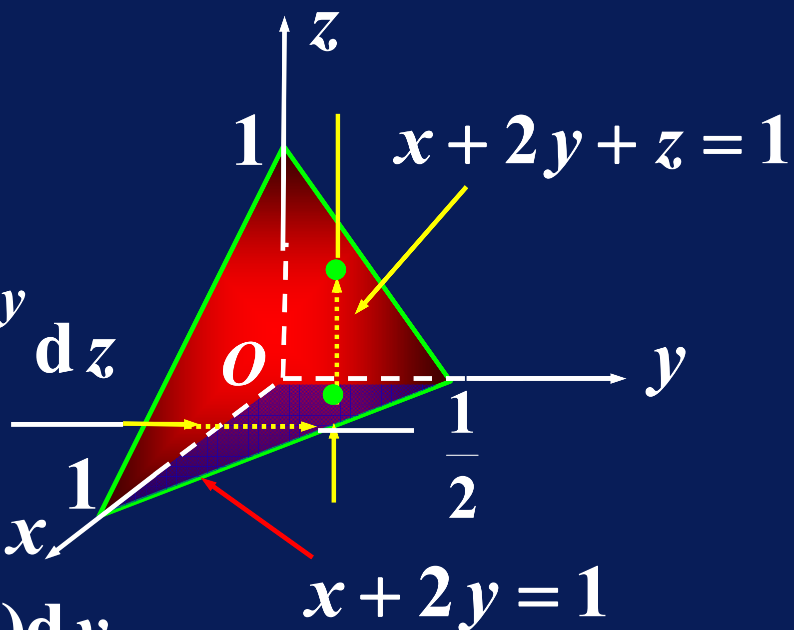
$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-x-2y\\ 0\le y\le \dfrac{1}{2}(1-x)\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} \mathrm{d}z$$

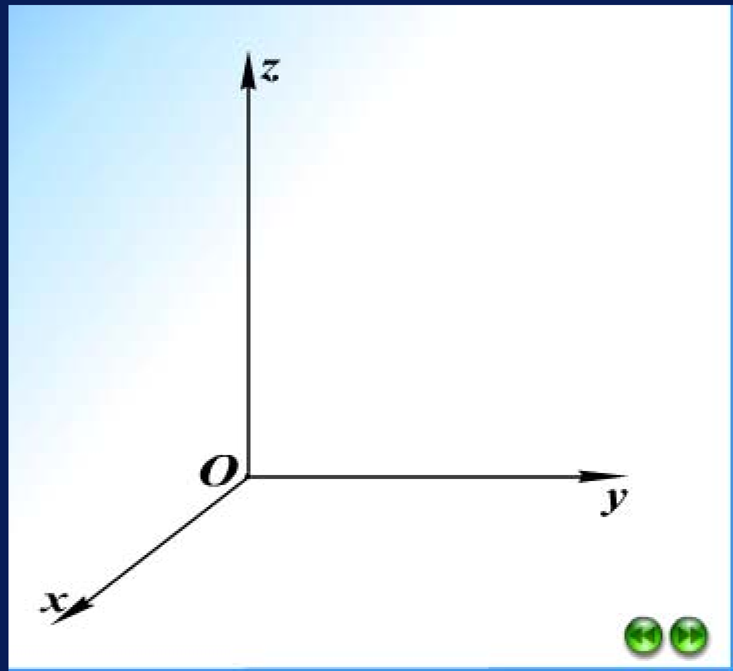
$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$



2. “先二后一”法(截面法)

步骤:



1° 把空间区域 Ω 向某坐标轴 (如: z 轴)投影，得投影区间: $[c, d]$;

2° 过区间$[c, d]$上任一点 z 作垂直于 z 轴的平面$z=z$，

该平面截 Ω 得平面闭区域 D_z，即空间闭区域Ω

可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_z, c\le z\le d\}$;

3° 计算　$F(z)=\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

4° 计算　$\int_c^d F(z)\mathrm{d}z$

即有　$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d F(z)\mathrm{d}z$

$$=\int_c^d [\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}z,$$

上式也常记作

先二后一

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例4 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$， 其中

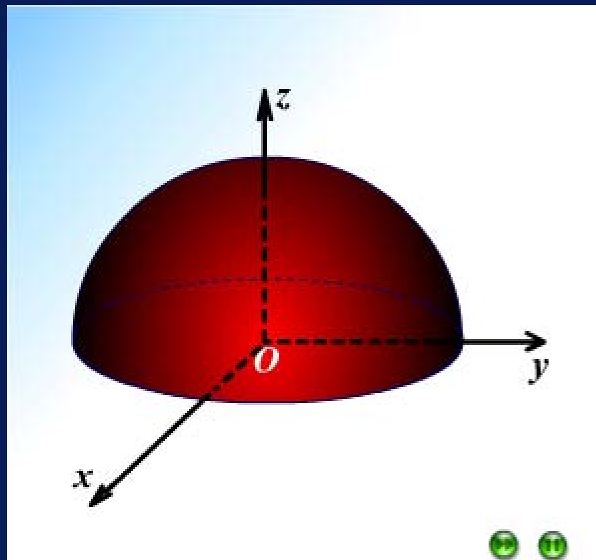
$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0\right.\right\}.$$

解 Ω在$z=0$与$z=c$平面之间，

在区间$[0, c]$中任取一点z，

过点$(0, 0, z)$ 作垂直于z 轴

的平面，截Ω得区域D_z:



$$D_z=\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}, z=z\right.\}.$$

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}v = \int_0^c \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^c z\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}abc^2.$$

D_z是椭圆域: $\dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \dfrac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \le 1$,其面积为

$$\pi\sqrt{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\sqrt{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} = \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}).$$

注 1° 何时采用"先二后一"法(截面法)?

一般地，当 $\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 易求时，

如：$f(x,y,z)=F(z)$(或$F(x)$或$F(y)$)，

且 D_z的面积$\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$易求时，可采用截面法 .

2° 使用截面法时，可根据被积函数和积分区域的特点，将积分域向y 轴或x轴投影来计算三重积分.

例3 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

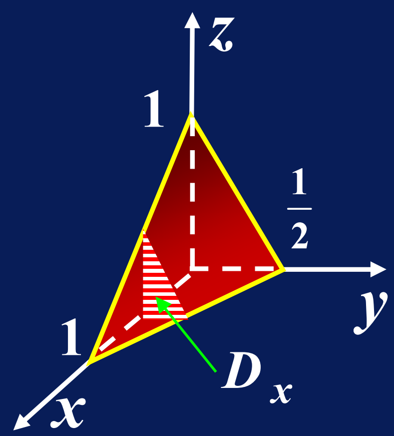
解(方法2) “先二后一”法

将积分域向 x 轴投影，得投影区间[0, 1].

过区间[0, 1]上任一点 x 作垂直于 x 轴的平面 $x=x$，

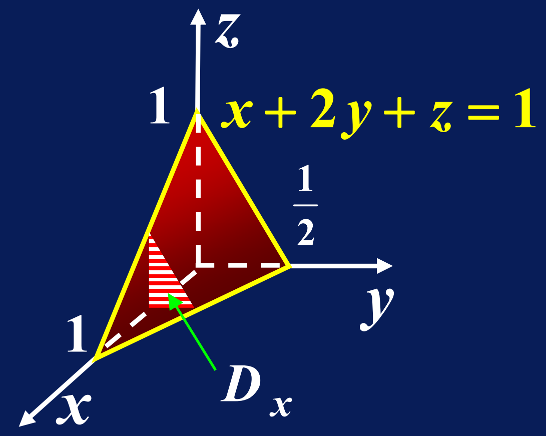
该平面截 Ω 得平面闭区域 D_x，则

$$\Omega: 0\le x\le 1, (y,z)\in D_x.$$



由于 D_x 是直角三角形, 直角边长分别为

$$1-x \text{ 与 } \frac{1}{2}(1-x),$$



因此 D_x 的面积为 $\frac{1}{4}(1-x)^2$. 于是

$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \iint_{D_x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \iint_{D_x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

3° 注意利用对称性简化三重积分的计算

当 $f(x,y,z)$在 Ω 上连续时，$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 存在.

若Ω关于xOy ($z=0$)面对称， 且 $f(x,y,z)$ 关于 z

具有奇偶性，则

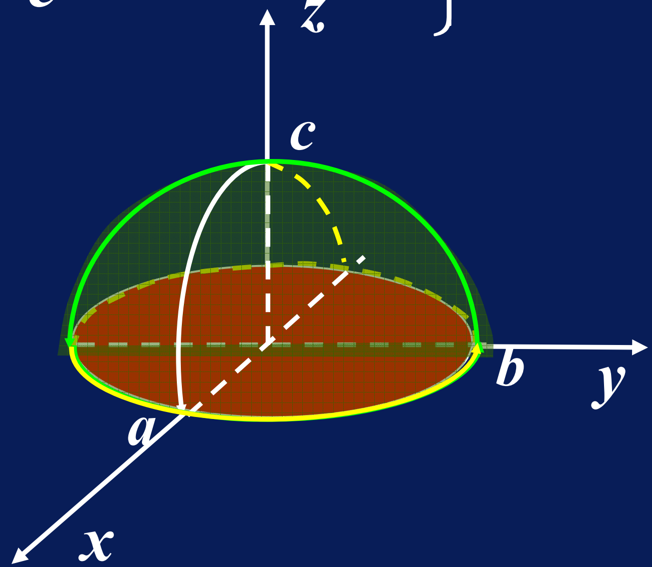
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases} 0\,, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\text{ 时} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\text{ 时} \end{cases}$$

其中$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Omega,\ z\geq 0\}$.

如：将例4稍作变化，有

例5 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(y+z)\,\mathrm{d}v$，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0\right.\right\}.$$



解 Ω 关于 $y=0$ 平面对称，

$$\iiint\limits_{\Omega}(y+z)\,\mathrm{d}v$$

关于y是奇函数

$$=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v$$

$$=0+\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v\overset{\text{例4}}{=}\frac{\pi}{4}abc^2.$$

小结：三重积分的直角坐标计算方法

方法1. “先一后二”　　将积分域向坐标面投影

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”　　将积分域向坐标轴投影

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二、 柱面坐标系下三重积分的计算

设 $M(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$，将x, y用极坐标

ρ,θ 代替， 则(ρ,θ,z)

就称为点M 的柱面坐标.

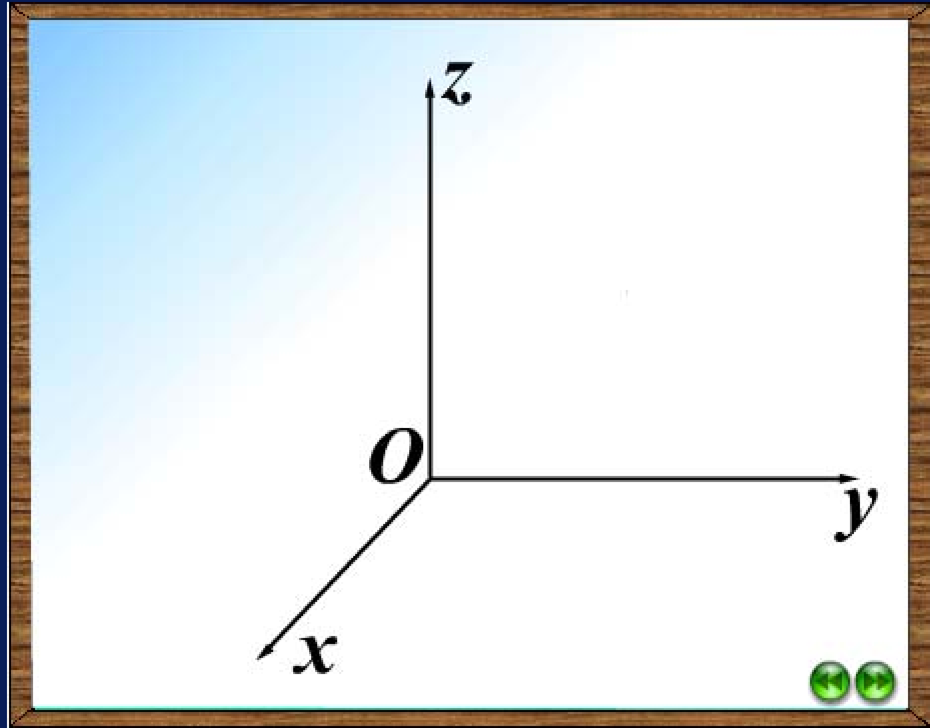
直角坐标与柱面坐标的

关系:
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

$$(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty)$$

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



因此

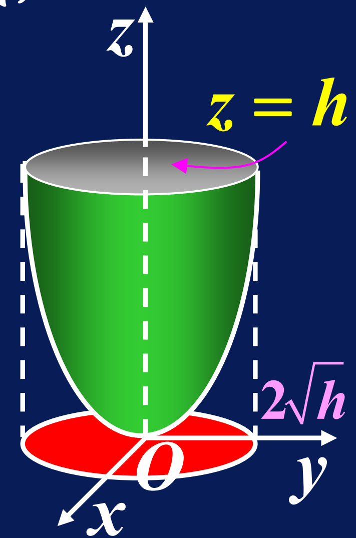
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$

例6 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成 .

解 为求出 Ω 在 xOy 面上的投影区域，



由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=4z \\ z=h \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=4h,$$

Ω 在 xOy 面上的投影区域：$x^2+y^2\le(2\sqrt{h})^2$

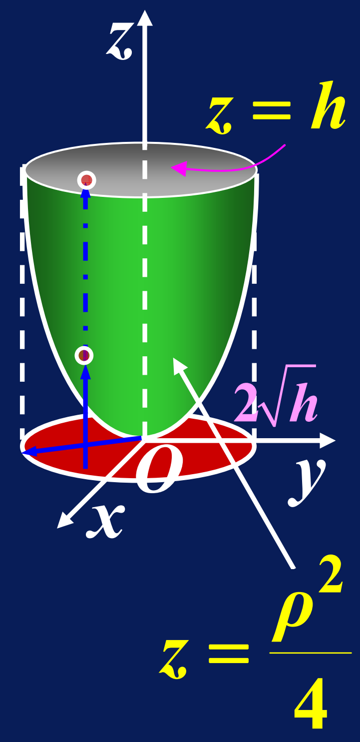
$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

$$原式 = \iiint_{\Omega} \frac{1}{1+\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h} dz$$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h - \frac{\rho^2}{4}\right) d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h) - 4h].$$



注 由例6可见，三重积分的柱面坐标计算方法实际上是三重积分的直角坐标先一后二计算方法先对z作定积分，再对x，y作二重积分）与二重积分的极坐标计算方法的结合物.

何时采用柱面坐标?

适用范围:

1) 积分域用柱面坐标表示时方程简单;

具体来说,

√ Ω在坐标面(如:xOy面)上的投影区域D的边界易于用极坐标表示;

2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

√ 如: $f(x,y,z)$呈现$g(x^2+y^2), g(\frac{y}{x}), g(z)$等形式.

例7 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$和球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围.

解 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

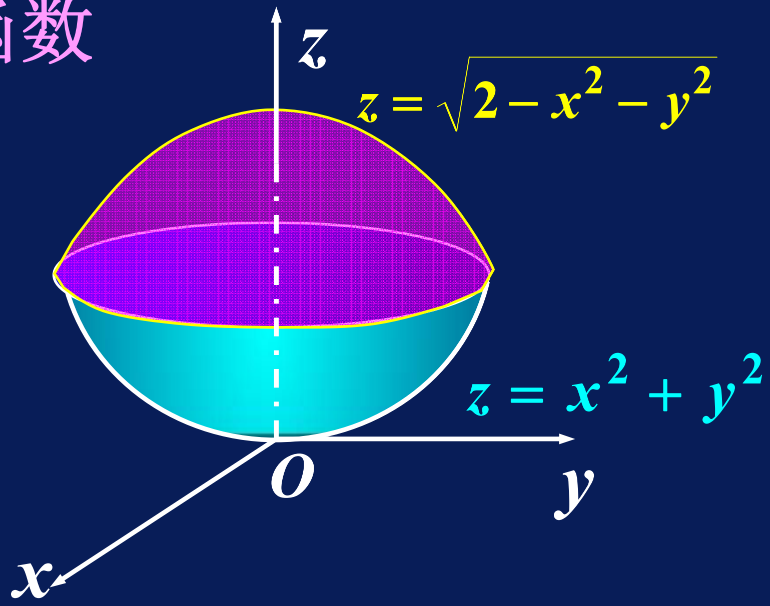
Ω关于 $y=0$对称,

关于y是奇函数

$$\iiint_{\Omega}(xy+yz)\,\mathrm{d}v=0.$$

类似可得$\iiint_{\Omega}zx\,\mathrm{d}v=0$.

故 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$.



采用柱面坐标计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$

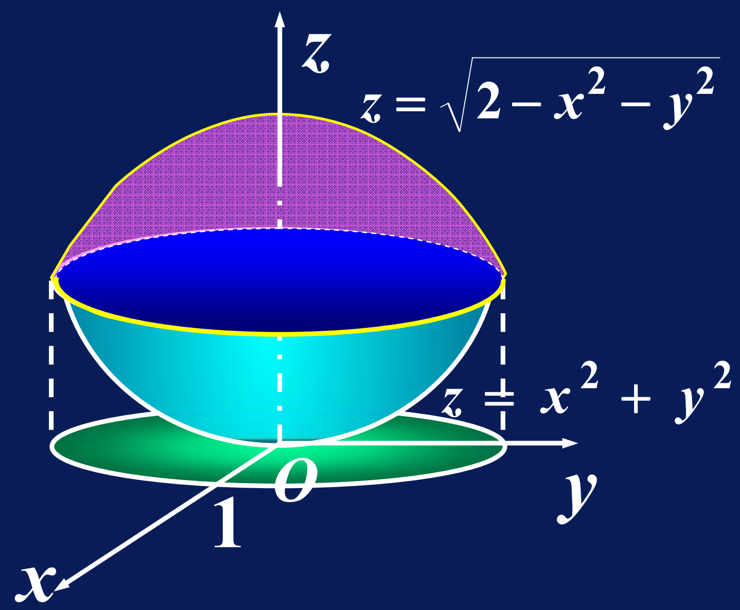
$$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

$$z^2+z-2=0,$$

$z=1,\ z=-2$ (舍去)

消去z

$\Rightarrow\quad x^2+y^2=1$



Ω 在xOy面上的投影区域：$x^2+y^2\le 1$

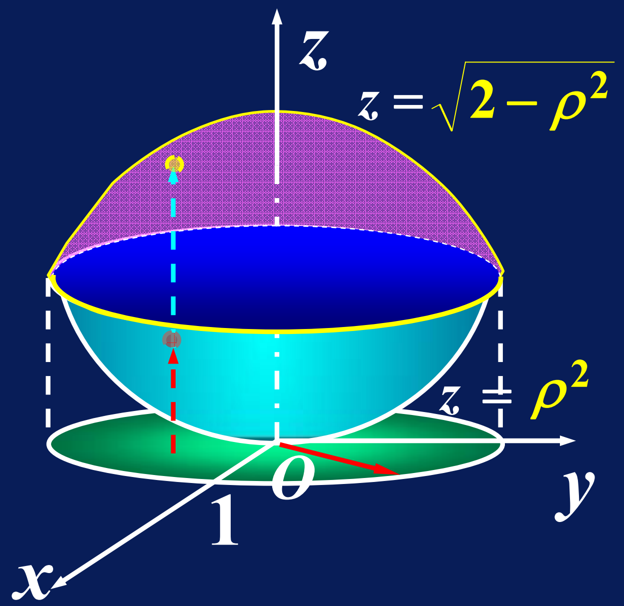
$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3 (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

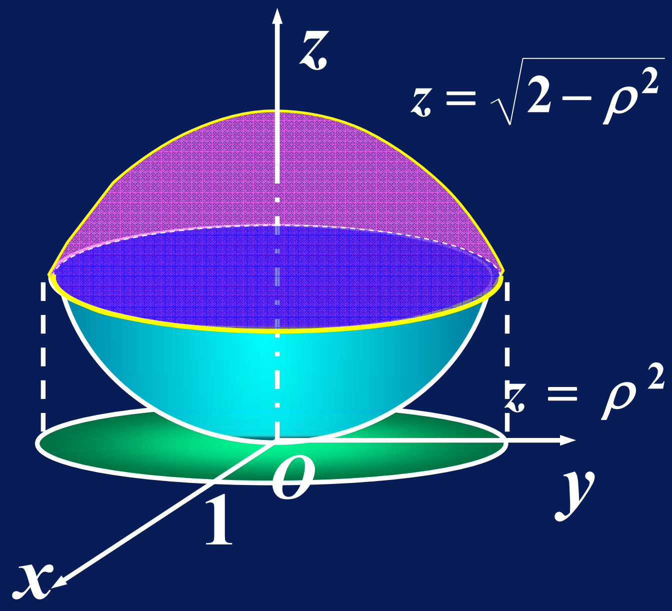
$$= \frac{\pi}{15}(16\sqrt{2} - 19).$$



$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \rho[(2-\rho^2)^{3/2}-\rho^6]\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{60}(32\sqrt{2}-13).$$



$$I = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v + \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-89).$$

例8 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由曲线 $y^2 = 2z$，$x = 0$ 绕 z轴旋转一周而成的曲面与两平面$z = 2, z = 8$所围.

解 旋转面方程为

$$x^2 + y^2 = 2z,$$

所围成的立体如图.

目录 上页 下页 返回 继续

(方法1) 求围定顶法

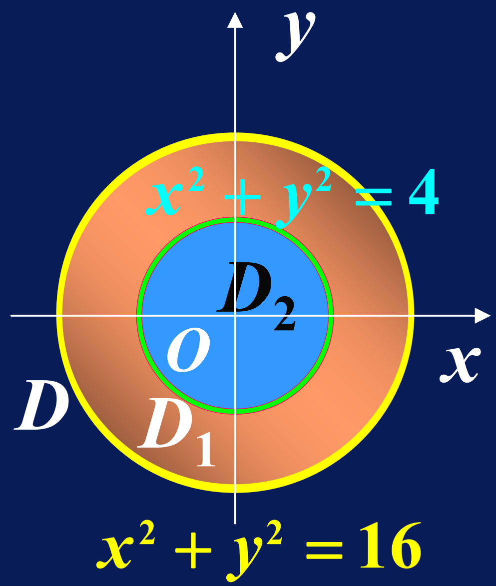
1^o 求所围立体Ω在xOy面上的投影区域D

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=2 \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=4$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=8 \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=16$$

$$\therefore \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 16\}$$

$$D=D_1\cup D_2$$



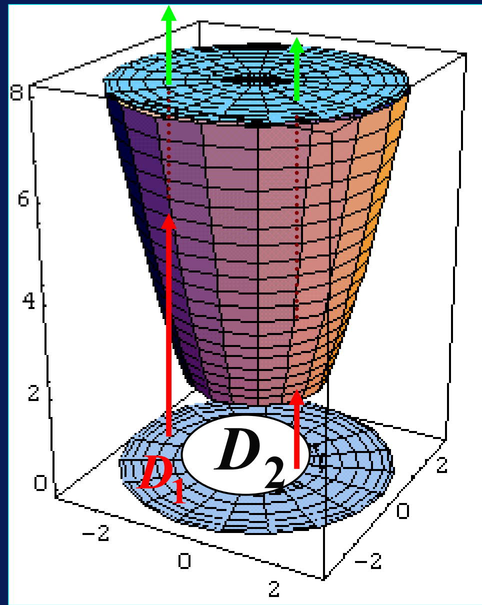
目录 上页 下页 返回 结束

2° 定顶

在D_2上，下顶: $z=2$

上顶: $z=8$

$$\Omega_1:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 2,\\ 2\le z\le 8.\end{cases}$$



在D_1上，下顶: $z=\dfrac{\rho^2}{2}$

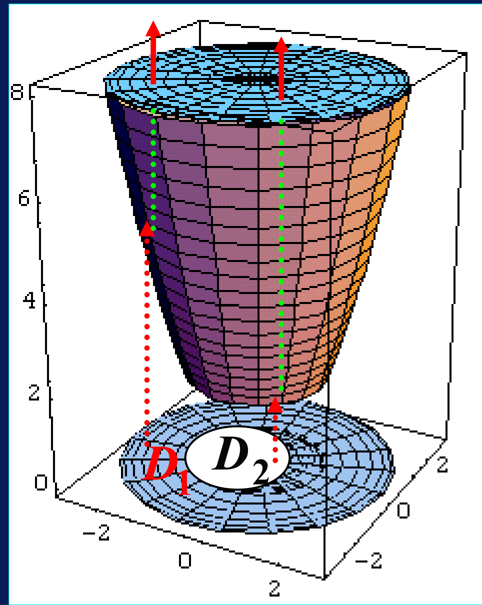
上顶: $z=8$

$$\Omega_2:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 2\le\rho\le 4,\\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 8.\end{cases}$$

$$I = I_2 + I_1$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{D_2} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \int_2^8 \rho^2\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_1} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2\,\mathrm{d}z$$



$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_2^8 \rho^2\,\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_2^4 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2\,\mathrm{d}z$$

$$= 48\pi + 288\pi = 336\pi.$$

(方法2) 截面法

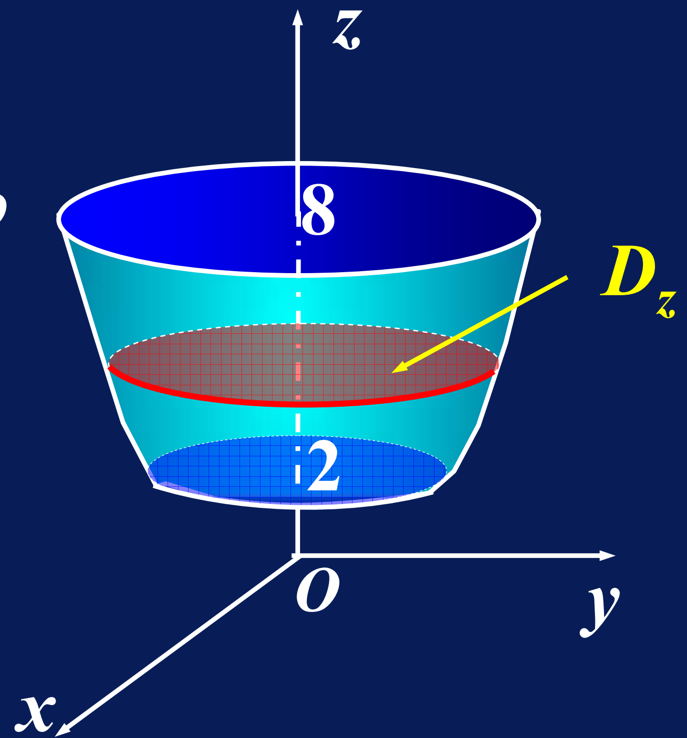
$$I=\int_2^8 \mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^8 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_2^8 \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_2^8 z^2\,\mathrm{d}z=336\pi.$$

$D_z: x^2+y^2\le 2z$

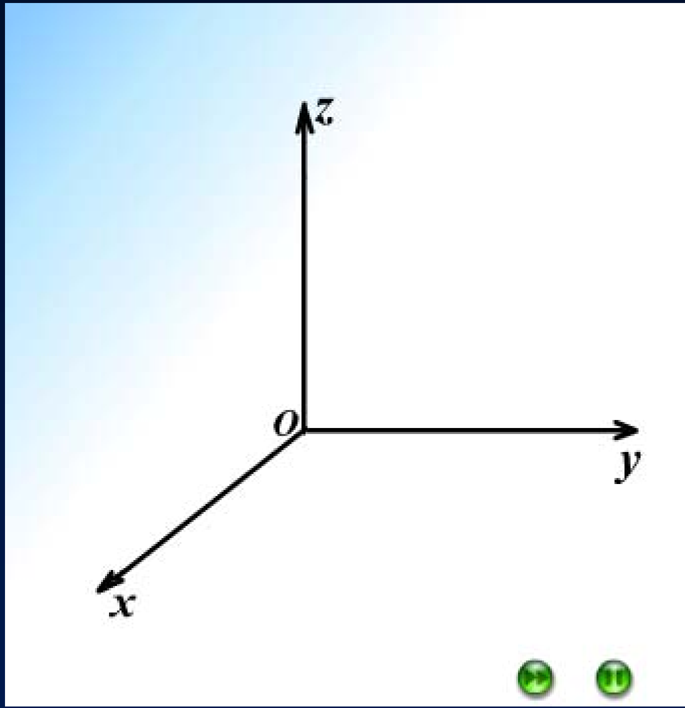


三、球面坐标系下三重积分的计算

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$，令 $|\overrightarrow{OM}|=r$，

正 z 轴与 $|\overrightarrow{OM}|$ 的夹角为 φ，则

(r,φ,θ) 称为点 M 的球坐标.



易知 $\rho = r\sin\varphi,$

$z = r\cos\varphi.$

直角坐标与球面坐标有如下关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{pmatrix}$$

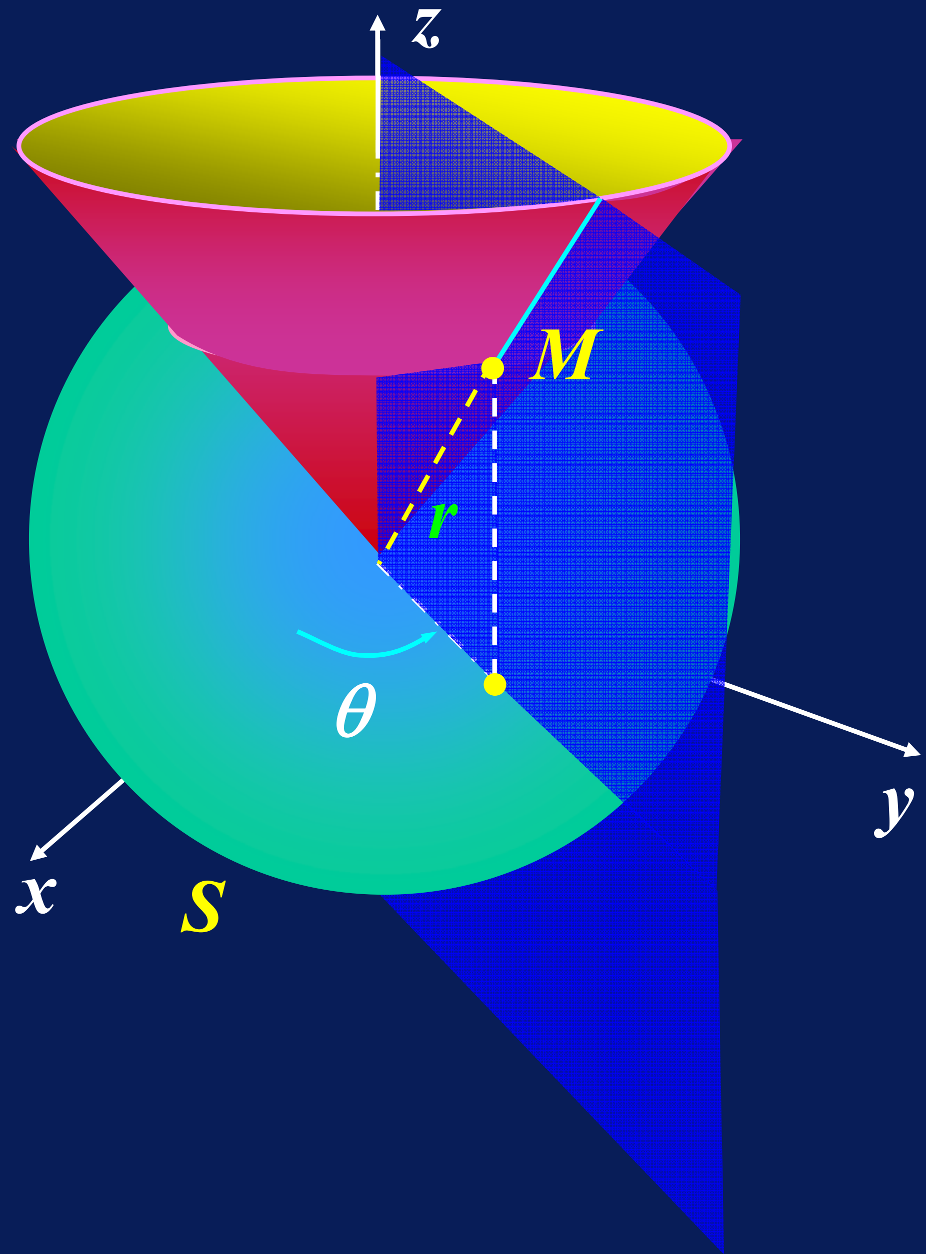
球面坐标的坐标面：

动点 $M(r, \theta, \varphi)$

$r =$ 常数 ⟶ 球面S

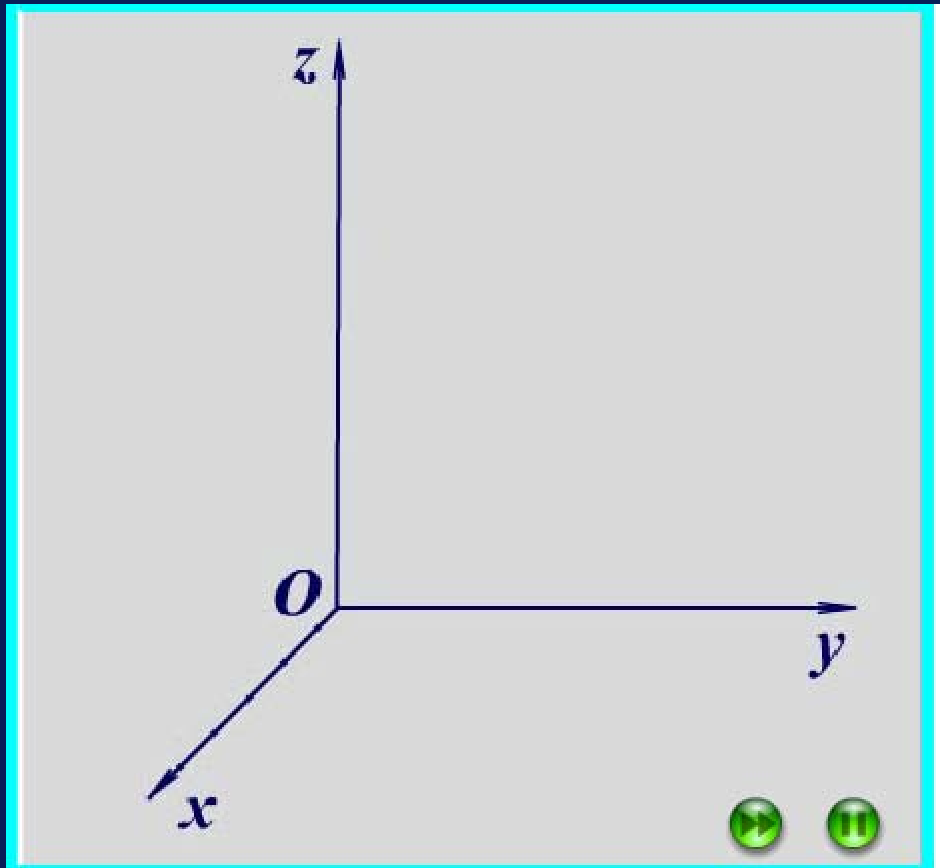
$\varphi =$ 常数 ⟶ 圆锥面

$\theta =$ 常数 ⟶ 半平面



在球面坐标系中体积元素为

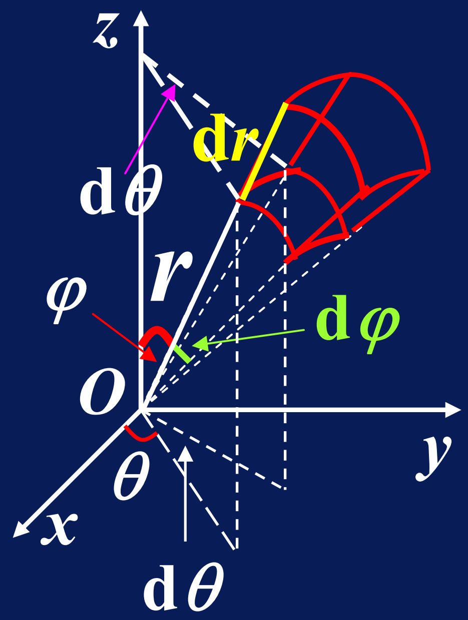
$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi)\ r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$



其中 $F(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$.

例9 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

Ω由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$所围.

解 采用球面坐标计算.

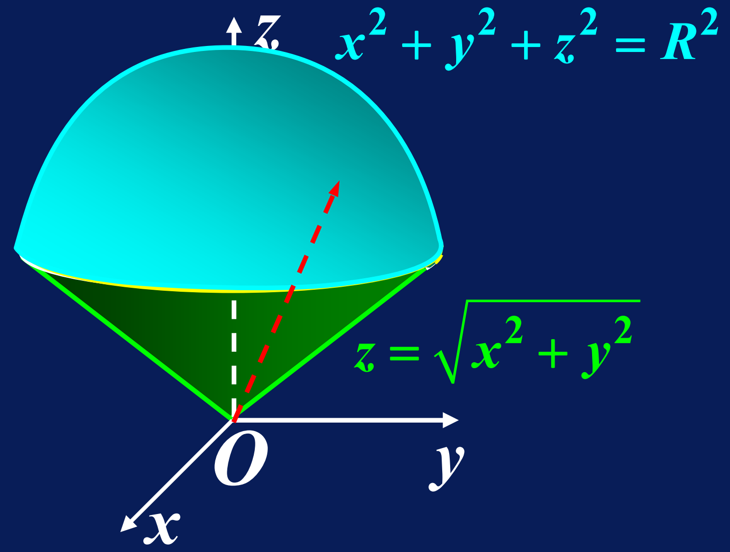
$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$\Omega:\ 0\leq r\leq R,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2}).$$



何时采用球面坐标？

适用范围:

1) 积分域用球面坐标表示时方程简单;

如 :中心在原点或轴上的球 面，由顶点在原点的圆锥面与中心 在原点或轴上的球面所组成的边界曲 面;

2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.

如：$f(x,y,z)$呈现 $g(x^2+y^2+z^2), g(z)$等形式.

例10 求$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$,其中

Ω：$\pi^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\pi^2$.

解 采用球面坐标计算.

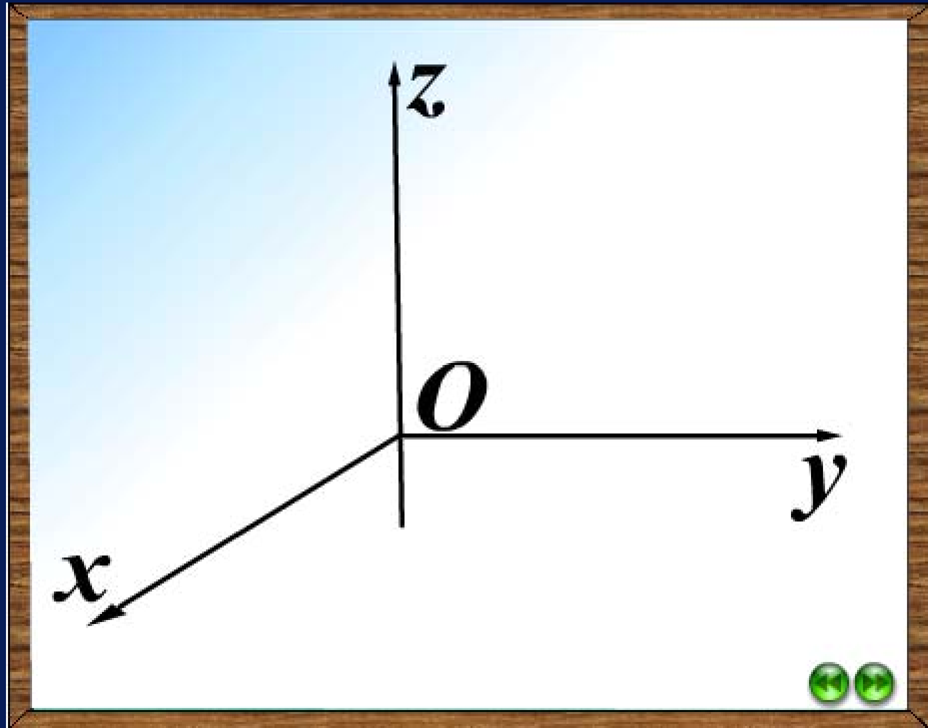
$\Omega: \pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos r}{r}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \quad = 8\pi.$$

例11 选择适当的坐标系计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$由$y=\sqrt{x}, z=0, y=0$及$x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围.



解 宜采用直角坐标计算, 先对z积分.

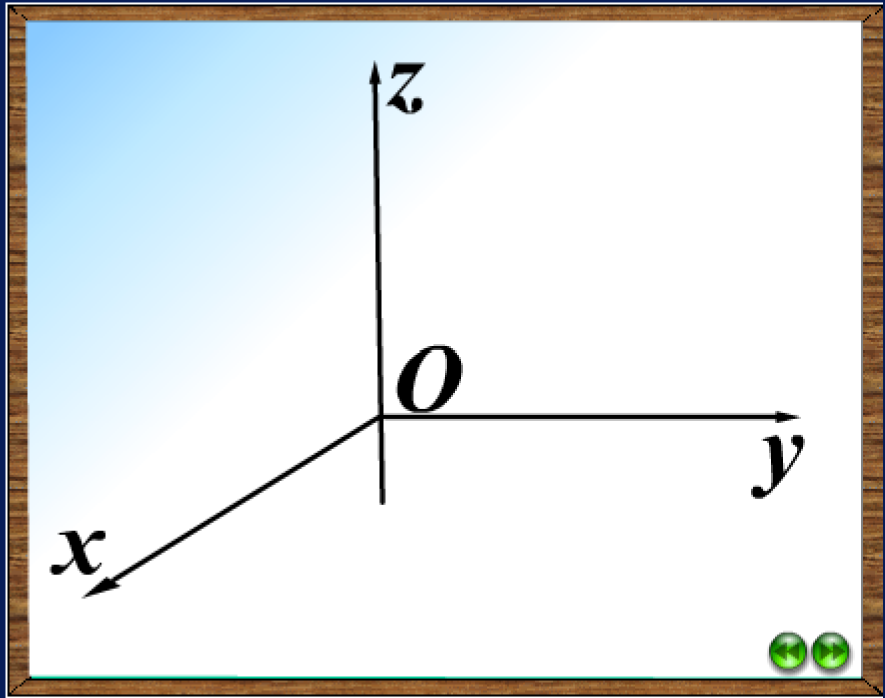
$$\Omega:\quad 0\le z\le \frac{\pi}{2}-x,$$
$$0\le y\le \sqrt{x},$$
$$0\le x\le \frac{\pi}{2}.$$

$$\iiint_{\Omega} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}z$$

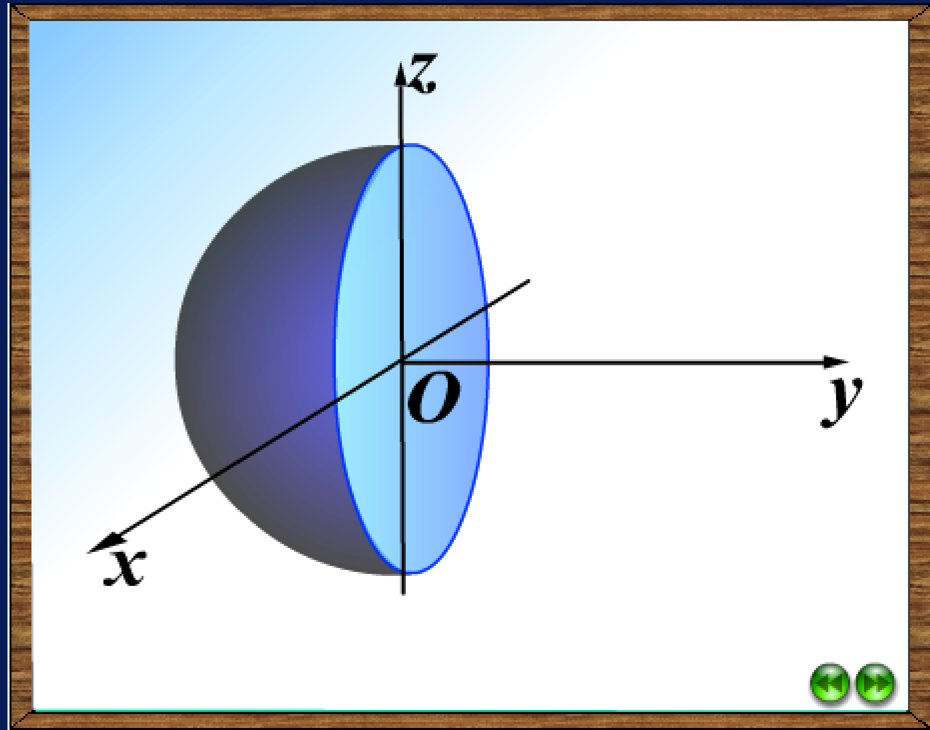
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x(1-\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$



(2) $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$及$y=1$所围.



解 可采用直角坐标计算，先对 y 积分.

$$\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x^2+z^2}{2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3]\mathrm{d}x$$

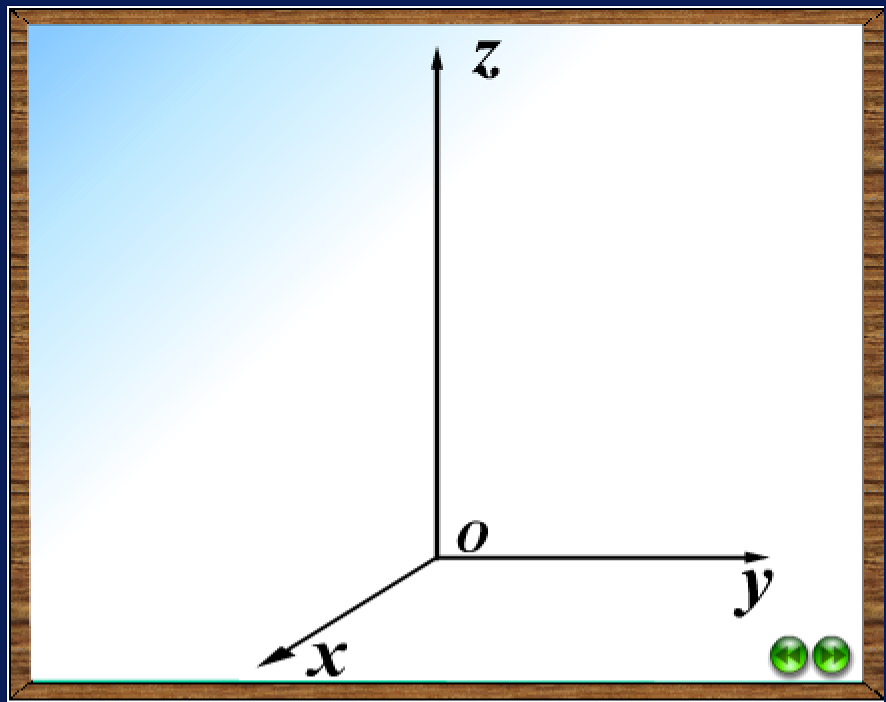
$$=\int_{-1}^{1}(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3})\mathrm{d}x=\frac{28}{45}.$$

本题亦可采用柱面坐标计算.

(3) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=1$及$z=0$所围.

解(方法1) 采用柱面坐标计算.

$$\Omega: 0\le z\le \rho,\quad 0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$



$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho}z\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

(方法2) 采用直角坐标, “先二后一” 法计算.

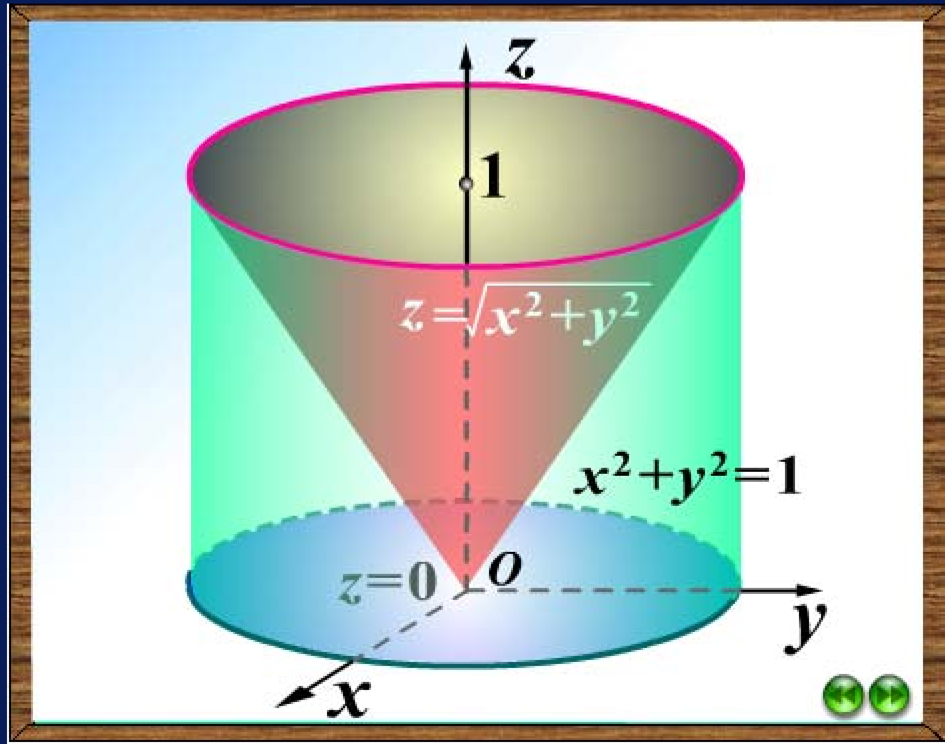
D_z 为圆环域: $z^2 \le x^2 + y^2 \le 1.$

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) z \,\mathrm{d} v$$

$$= \int_0^1 z \,\mathrm{d} z \iint\limits_{D_z} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d} x \,\mathrm{d} y$$

$$= \int_0^1 z \,\mathrm{d} z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_z^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 (z - z^5) \,\mathrm{d} z = \frac{\pi}{6}.$$



采用极坐标计算

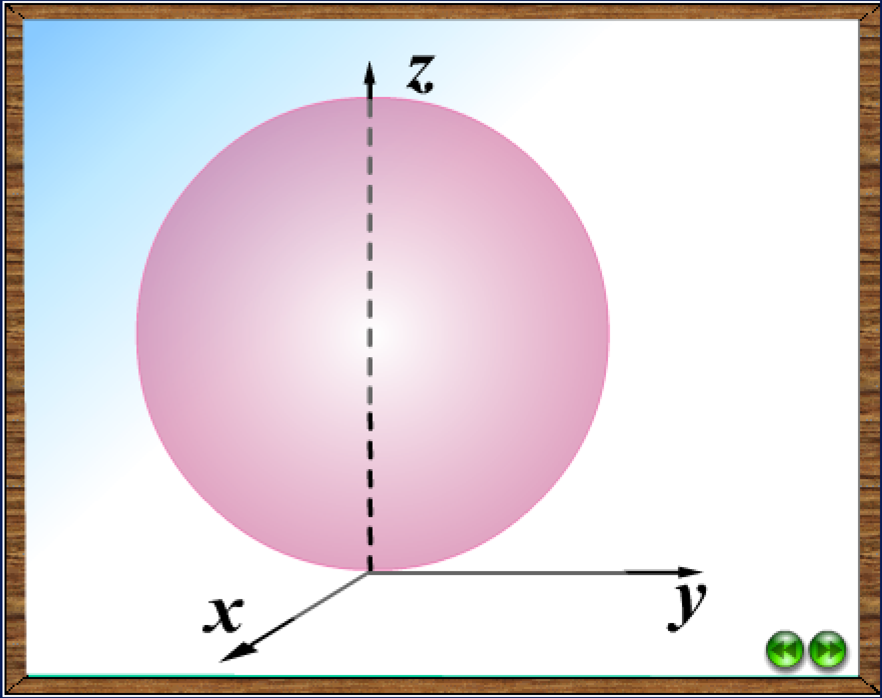
(4) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}v$, 其中$\Omega$由$z=1$,

$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $y \geq 0$所围.

解 Ω 为四分之一球体域，

可采用球面坐标计算.

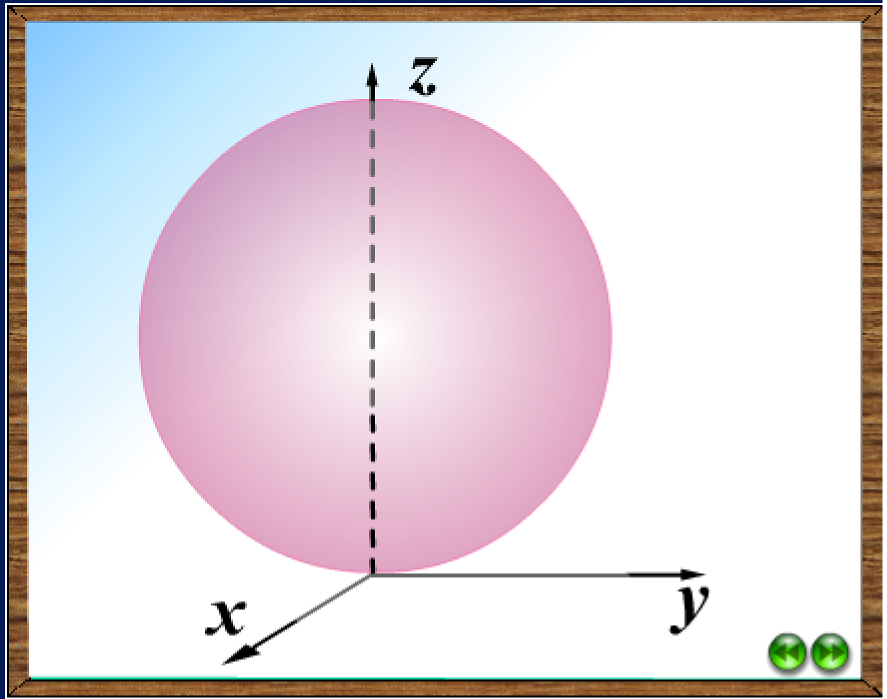
$z=1 \Longrightarrow r=\frac{1}{\cos\varphi}$



$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$

$\Longrightarrow r=2\cos\varphi$

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, & \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ r = 2\cos\varphi & \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$\Omega: \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi. \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\cos\varphi} \le r \le 2\cos\varphi, \end{array}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathrm{d}v = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \frac{1}{r} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$=\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \frac{1}{r} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r$$

$$=\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin\varphi \,(4\cos^2\varphi - \frac{1}{\cos^2\varphi})\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pi(-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\cos\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos^{-2}\varphi \,\mathrm{d}\cos\varphi)$$

$$=(\frac{7}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2})\pi.$$

注 本题亦可采用柱面坐标计算，但计算量较大.

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；
柱面坐标系	$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$	被积函数形式简洁, 或
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$	变量可分离.

注 三重积分也有类似二重积分的换元积分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} F(u,v,w)\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

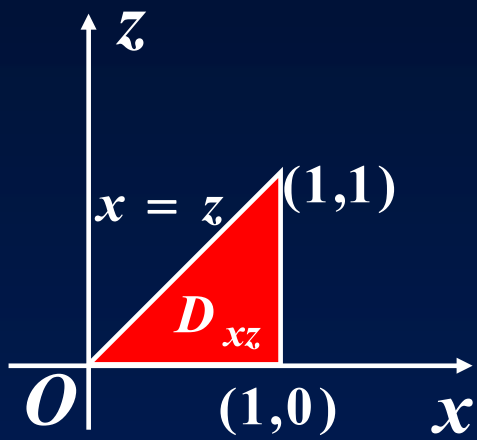
对应雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

思考题

1\. 化 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 为三次积分，其中Ω是由

$x=1, z=0,\ x+y-z=0, x-y-z=0$围成.

解　Ω是四面体，其边界



曲面中含y的方程恰有两个，

含x或z的方程都有 3个，

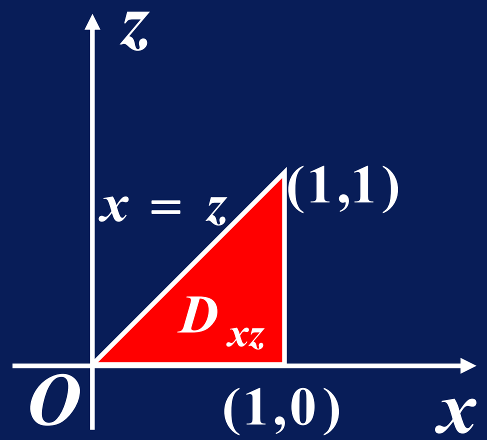
故选择向 xOz平面投影，投影区域D_{xz}的边界为

$x=1, z=0$ 及由$y=z-x$与$y=x-z$消去y所得的

$x-z=0$.

目录　上页　下页　返回　结束

在 D_{xz} 内显然有 $x - z \geq 0,$



即 $z - x \leq x - z,$

故 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$

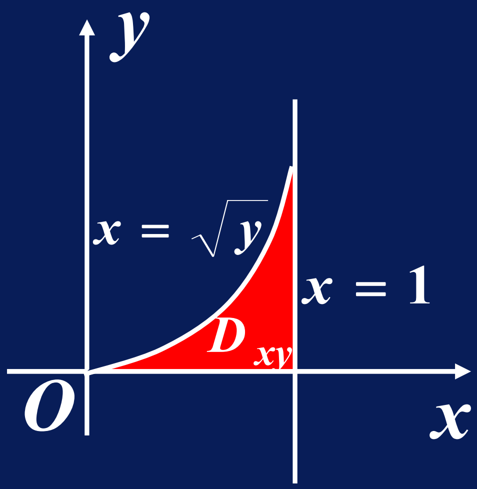
$$= \iint\limits_{D_{xz}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \int_{z-x}^{x-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y,$$

再把 D_{xz} 上的二重积分化为二次 积分,有

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}z \int_{z-x}^{x-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 - y}\, \mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $y = 0$, $z = 0, x + z = 1, x = \sqrt{y}$ 围成 .

解 Ω边界的曲面的方程中含x, y, z的方程都恰有两个，因此向三个坐标面投影均可，但就被积函数的特点，先对z次对y、后对x积分比较方便，故选择Ω向xOy平面投影，投影区域D_{xy}由$y = 0, x = \sqrt{y}$及$x = 1$围成.



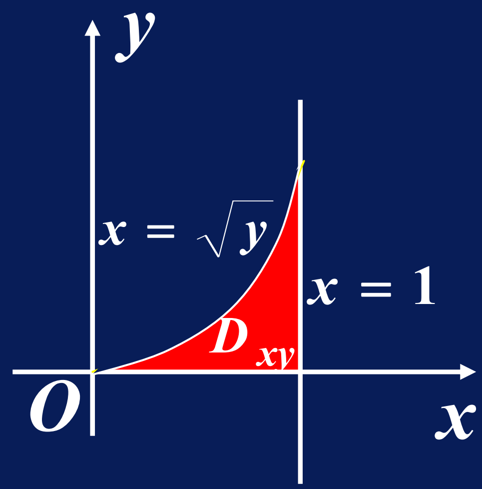
其中 $x=1$由 $z=0$和 $z=1-x$所得．

故 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}v$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{30}.$$



3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$,

其中Ω是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$围成的闭区域.

解 积分区域Ω由椭球面围成，被积函 数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

此时若作广义球面坐标 转换 : $x=ar\sin\varphi\cos\theta$,

$y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi$,

则积分区域 Ω 由 $0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$ 给出，

体积元素

$$\mathrm{d}v = abcr^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 abcr^4 \sin\varphi \,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^4 \,\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi abc .$$

备用题

例2-1 化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$为三次积分：

(1) Ω由曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$

所围；

(2) Ω由曲面 $z=\dfrac{1}{x}, y=z^2$,平面 $x=0, z=1, z=2$,

$y=0$所围.

解 (1) 由 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$

消去 z 得 $x^2+y^2=a^2$, 即 D_{xy} 为圆域 $x^2+y^2\le a^2$,

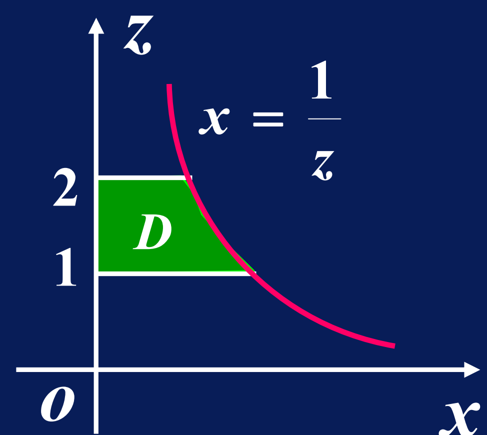
且当 $(x,y)\in D_{xy}$ 时，显然有

$$-a\le x\le a, -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\frac{x^2+y^2}{a}\le 2a-\sqrt{x^2+y^2},$$

故 $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

(2) 在围成Ω的曲面方程中，$y=0$和$y=z^2$中有变量y，此时可考虑先对 y积分，显然$z^2\geq 0$，因此 对y积分的下限为 0，上限为 z^2，其它方程在 xOz 面上围成区域 为D，故



$$I=\int_1^2 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}x\int_0^{z^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例3-1 设Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$，计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v.$$

解 将Ω投影到xOy面上，得投影区域为

$$D_{xy}:\ x^2+y^2\le 1.$$

$$原式=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

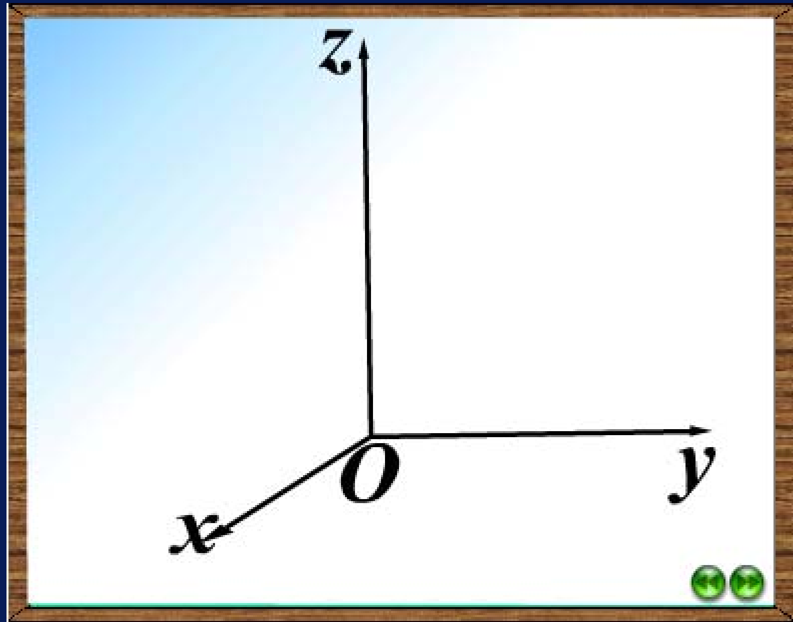
关于z是奇函数

$$=0.$$

例5-1 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)\,\mathrm{d}v$，$\Omega$ 由半球面 $x^2+y^2+z^2=2z(z\geq 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

解 利用区域的对称性及被积函数的奇偶性,可推得

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^3\,\mathrm{d}v.$$



因被积函数仅依赖于 z，

故可先关于x,y作二重积分，再关于z作一次积分.

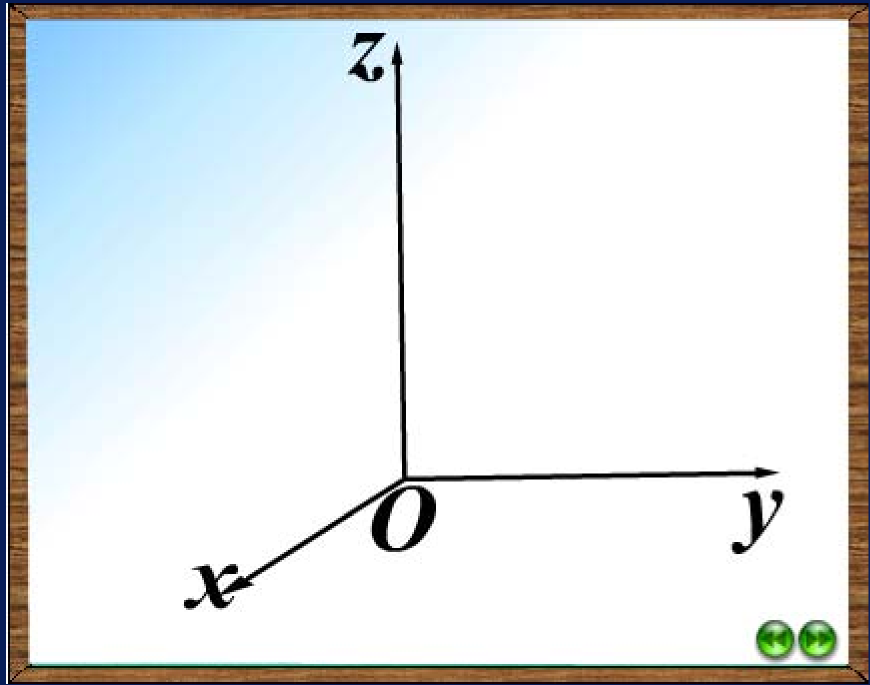
因此

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D_z} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}z\iint_{D'_z} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \pi z^5\mathrm{d}z$$

$$+\int_1^2 \pi(2z-z^2)z^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{31}{15}\pi.$$

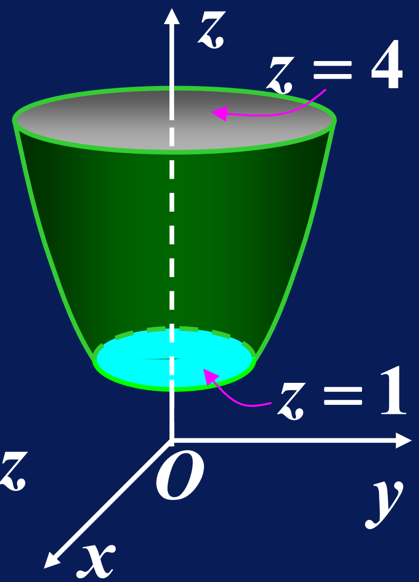


目录 上页 下页 返回 结束

例4-2 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,)\mathrm{d}v,$

其中 Ω 由 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2),\ z=1,\ z=4$ 围成.

解 易知 Ω 关于 $x=0$ 平面对称 .



关于 x 是偶函数

$$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$+5\iiint\limits_{\Omega}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

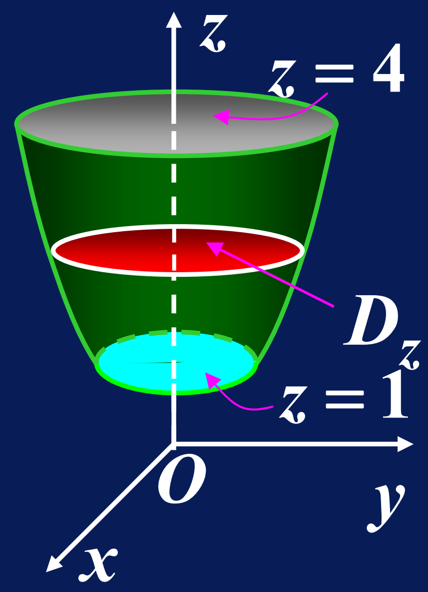
关于 x 是奇函数

$$=\iiint\limits_{\Omega}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

“先二后一”法



$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$=21\pi.$$

例9-1 设函数 $f(x)$连续，且 $f(0)=a$,若

$$F(t)=\iiint_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}v,$$

其中 $\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{t^2-x^2-y^2}$,

求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^3}$.

解 先将三重积分化为 t的函数,用球面坐标,可得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2\mathrm{d}r,$$

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2\mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{2\pi}{t^3}\left[\frac{1}{16}t^4+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^3}\left[\pi(2-\sqrt{2})\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to0}\frac{t^2 f(t^2)}{3t^2}$$

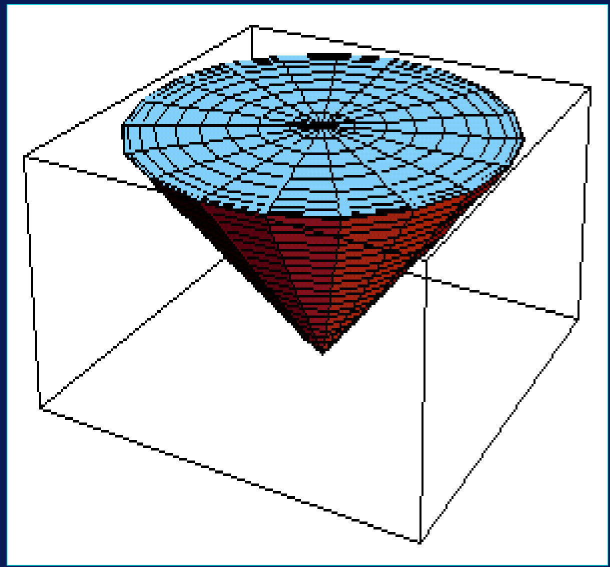
$f(0)=a$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to0}\frac{f(t^2)}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$$

例11-1 采用多种方法计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，

其中 Ω 由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a\ (a>0)$ 所围.

解 (方法1) 采用球面坐标



$$\because\quad z=a\ \Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+y^2=z^2\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\Omega:\ 0\le r\le\frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

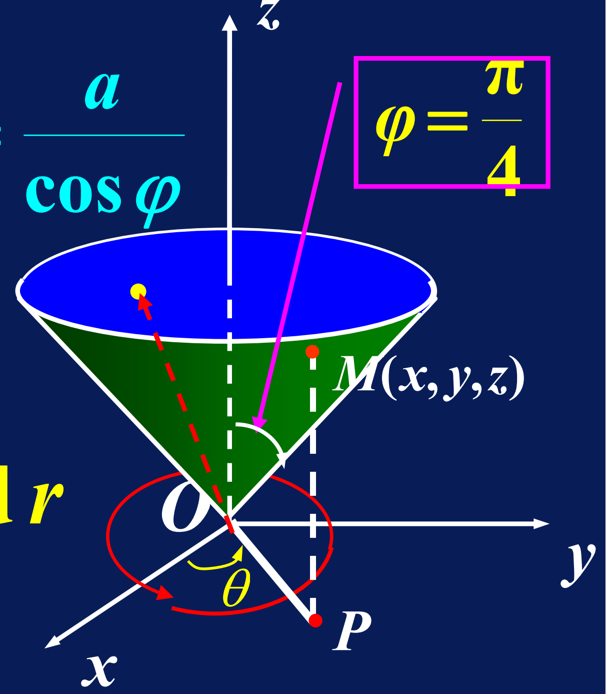
$$=\iiint\limits_{\Omega}(r\sin\varphi)^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{10}a^5.$$

$r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$



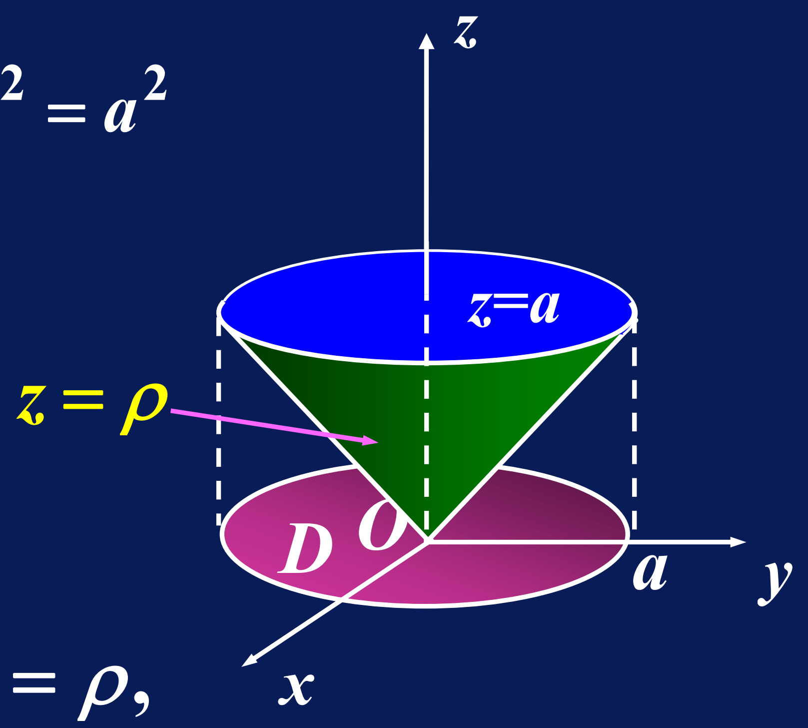
目录 上页 下页 返回 结束

(方法2)　采用柱面坐标

1° 求所围成立体Ω在xOy面上的投影区域D

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=a \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=a^2$$

$\therefore\quad D:\quad x^2+y^2\le a^2,$



2° 定顶

上顶: $z=a$

下顶: $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho,$

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{a}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^a\rho^3(a-\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[a\cdot\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}\right]$$

$$=\frac{\pi}{10}a^5.$$