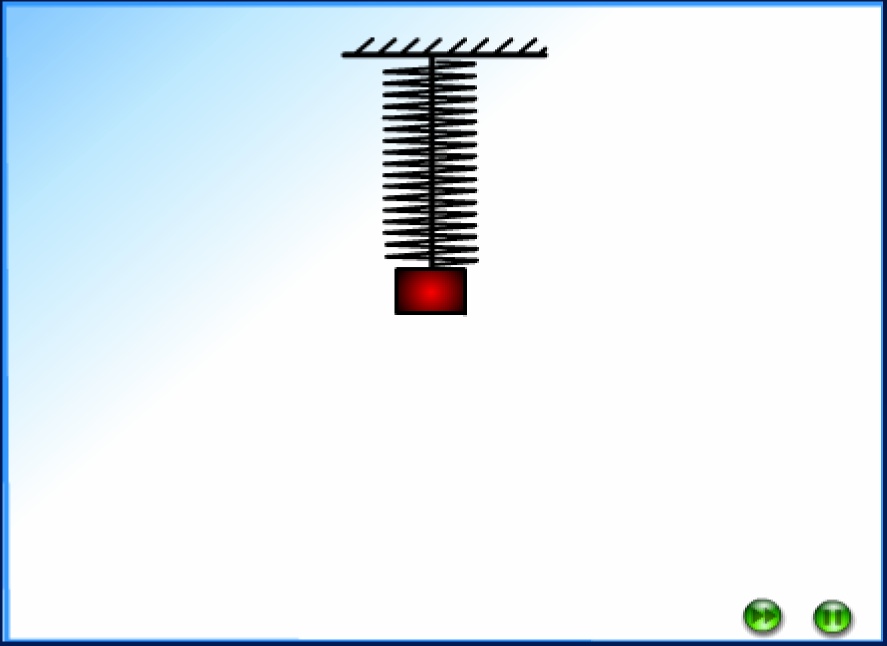
第六节

线性微分方程通解的结构

- 一、二阶线性微分方程举例
- 二、二阶线性微分方程解的性质
- 三、二阶线性微分方程解的结构

一、二阶线性微分方程举例

例1 设有一弹簧下挂一重物,如果使物体具有一初始速度$v_0 \neq 0$,物体便离开平衡位置,并在平衡位置附近作上下振动.试确定物体的振动规律$x = x(t)$.



解 受力分析

$$f_0 = P, \quad kl = mg$$

1. 恢复力 $f = -kx$,

2. 阻力 $R = -\mu \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$;

$$\because F = ma, \quad \therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

有阻尼自由振动微分方程

若受到铅直干扰力 $F = H\sin pt$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{H}{m}\sin pt$$

有阻尼强迫振动的方程

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\beta\frac{du_c}{dt} + \omega_0{}^2u_c = \frac{E_m}{LC}\sin\omega t$$

串联电路的振荡方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x)$$

—— 二阶线性微分方程

当 $f(x)\equiv 0$时， 二阶齐次线性微分方程

当 $f(x)\not\equiv 0$时， 二阶非齐次线性微分方程

n 阶线性微分方程:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x).$$

二、二阶线性微分方程解的性质

二阶线性微分方程解的性质

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

性质 1（齐次线性方程解的叠加原理)

若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(6.1)的两个解,则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(6.1)的解.

(C_1，C_2是任意常数）

证 $y'' + p(x)y' + q(x)y$

$$= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)'$$

$$+ q(x)(C_1y_1 + C_2y_2)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

性质2 若 $y(x)$是方程(6.1)的解，$y^*(x)$是方程(6.2)的解，则 $y(x) + y^*(x)$必是方程(6.2)的解.

性质3 若 $y_1(x), y_2(x)$均是非齐次线性方程 (6.2)的解，则 $y_1(x)-y_2(x)$必是齐次线性方程 (6.1)的解.

性质4 (非齐次线性方程解的叠加原理)

若 $y_i(x)$是方程：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的解，则 $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ 是方程:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$$

的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$均为常数.

注 性质1 ~ 性质4可推广到 n阶线性微分方程的情形.

例2 已知 $y_1=\frac{x}{2}\sin x$ 和 $y_2=-\frac{1}{8}\cos 3x$分别

是方程：$y''+y=\cos x,$

$$y''+y=\cos 3x$$

的解，试求 $y''+y=\cos x\cos 2x$ 的一个特解.

解 $$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)$$

$\because$ y_1 满足：$y''+y=\cos x,$

y_2 满足：$y''+y=\cos 3x,$

$\therefore$ $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{x}{4}\sin x-\frac{1}{16}\cos 3x$为所求特解.

三、二阶线性微分方程解的结构

回顾： $$y' + p(x)y = 0 \qquad (6.3)$$

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (6.4)$$

若 Y为(6.3)的通解， y^*是(6.4)的一个特解，则 $Y + y^*$ 是(6.4)的通解.

问题1 对于方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

是否有类似的结论？

问题2 若 $y_1(x), y_2(x)$ 均是二阶齐次线性方程 (6.1)

的解，$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 一定是(6.1)的通解吗？

答: 不一定.

例如: $y_1(x)$ 是某二阶齐次线性方程的解, 则

$y_2(x) = 2y_1(x)$ 也是齐次线性方程的解

但是 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2) y_1(x)$

并不是通解. 为解决通解的判别问题, 还需引入

函数的线性相关与线性无关概念.

定义12.1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的n 个函数，若存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n个函数在 I 上线性相关；否则称为线性无关.

例3 下列各函数组在给定区间上是线性相关还是线性无关？

(1) e^{x}, e^{-x}, e^{2x} $(x\in(-\infty,+\infty))$; 线性无关

解 若 $k_1e^{x}+k_2e^{-x}+k_3e^{2x}\equiv 0,$

则 $k_1e^{x}-k_2e^{-x}+2k_3e^{2x}\equiv 0,$

$k_1e^{x}+k_2e^{-x}+4k_3e^{2x}\equiv 0,$

$\boxed{\text{“}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\text{”}}$

令 $x=0,$ 得 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2+2k_3=0 \\ k_1+k_2+4k_3=0 \end{cases}$

求解得 $k_1=k_2=k_3=0.$

(2) $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, $(x \in (-\infty, +\infty))$;

解 $\because$ $\exists$不全为零的常数 $C_1 = 1, C_2 = C_3 = -1,$

使 $1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$ $, x \in I \subseteq (-\infty, +\infty)$

故该函数组在任何区间 I 上都线性相关;

例4 证明：函数组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$在任何区间 I上线性无关.

证 (用反证法)

假设：$1, x, x^2, \cdots, x^n$在区间 I上线性相关

则 $\exists$不全为零的常数 $C_0, C_1, \cdots, C_n,$

使得 $C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n \equiv 0, \quad x \in I$

令 $p_n(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$

则 $p_n(x)$至多是x的n次多项式，从而至多有

n 个零点，故

$$p_n(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n \not\equiv 0, \quad x \in I$$

矛盾！

$\therefore \quad 1, x, x^2, \cdots, x^n$在任何区间 I上线性无关．

特别地, 对于两个函数的情形:

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$在 $\mathrm{I}=[a,b]$ 上连续，若

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数或} \ \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{常数}$$

则函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$在 I 上线性无关.

例如: $\because \quad \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq$ 常数

$\therefore \quad \sin x, \cos x$在任何区间上线性无关 .

1.齐线性微分方程解的结构

定理 12.1 (齐次线性方程(6.1)的通解结构)

如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(6.1)的两个线性无关的特解, 那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(6.1)的通解.

推论 设 $y_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$是$n$阶齐次线性微分方程：$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$

n个线性无关的特解，则此方程的通解为

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots,\ C_n$为任意常数.

例5 验证：$y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$ 均是方程 $y'' + y = 0$ 的解，并求此方程的通 解.

验证： $(\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x \equiv 0$

$(\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x \equiv 0$

$\therefore$ $y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$ 均是所给方程的解 .

又 $\because$ $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数,

$\therefore$ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$是所给方程的通解 .

2. 非齐线性微分方程解的结构

定理12.2 (二阶非齐次线性方程(6.2)的解的结构)

设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

的一个特解，Y 是与(6.2)对应的齐次线性方程(6.1)的通解，那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(6.2)的通解.

证 由性质3, 可知

$$y = Y(x) + y^*(x)$$ 是非齐次线性方程(6.2)的解,

又 Y 中含有两个独立任意常数，因而

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

也含有两个独立任意常数，因而它是(6.2)的通解 .

例6 设 y_1, y_2, y_3 是微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的三个不同解，且 $\dfrac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \neq$ 常数，

则该微分方程的通解为 (**D**).

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

(B) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$;

(D) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$.

例7 已知 $y_1 = x^2, y_2 = x + x^2, y_3 = e^x + x^2$

都是方程

$$(x-1)y'' - x\,y' + y = -x^2 + 2x - 2 \qquad (1)$$

的解，求此方程的通解 .

解 由性质3，知 $\tilde{y}_1 = y_2 - y_1 = x, \quad \tilde{y}_2 = y_3 - y_1 = e^x$

均是对应齐次线性方程 ：

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \qquad (2)$$

的解.

又 $\because \quad \dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \dfrac{x}{e^x} \neq$ 常数,

$\therefore \quad \tilde{y}_1$ 与 $\tilde{y}_2$线性无关

齐次线性方程(2)的通解为:

$$Y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1 x + C_2 e^x$$

由定理12.2，知

原方程(1)的通解为:

$$y = Y + y_1 = C_1 x + C_2 e^x + x^2.$$

注 求二阶非齐次线性微分方程(6.2) 的通解的关键:

1° 确定与其相对应的二阶齐次线性方程(6.1) 的两个线性无关的解;

2° 求(6.2) 的一个特解.

内容小结

1、二阶线性微分方程解的性质

解的叠加原理

2、二阶线性微分方程解的结构

函数组线性相关与线性无关

思考题

设$y'' + P(x)y' = f(x)$有一特解 $\dfrac{1}{x}$,对应

齐次线性方程有一特解 为x^2,试求：

(1) $P(x), f(x)$的表达式;

(2) 此方程的通解 .

思考题解答

(1)　由条件可得

$$\begin{cases} 2 + P(x)2x = 0 \\ \dfrac{2}{x^3} + P(x)(-\dfrac{1}{x^2}) = f(x) \end{cases}$$

解得　$P(x) = -\dfrac{1}{x},\quad f(x) = \dfrac{3}{x^3}$

代入原方程，得　$y'' - \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{3}{x^3}$

$$y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}$$

(2) 显见 $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$ 有一特解 $y = 1$,

故齐次线性方程的通解 $Y = C_1 + C_2 x^2$

由解的结构定理知,

原方程的通解为 $y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{1}{x}$

备用题

例6-1 设 $y_1(x), y_2(x)$是微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的两个不同特解，则此 微分

方程的通解是 $\underline{y = C(y_1 - y_2) + y_1}$.

解 $\because$ $y_1 - y_2 \neq 0$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解

$\therefore$ $C(y_1 - y_2)$ 也是该方程 的解，且是通解 .

$\therefore$ 所给非齐次线性方程的 通解为:

$$y = C(y_1 - y_2) + y_1$$