线性代数

第五章

矩阵的相似变换

§ 5.1 方阵的特征值与特征向量

一、概念

定义5.1 对n阶方阵A，若数$\lambda\in R$和非零向量$x\in R^n$使

$$Ax=\lambda x$$

则称λ为方阵A的**特征值**，

非零向量x称为A的对应于λ的**特征向量**。

注： 1. A是方阵；

2. 特征向量x是非零列向量；

3. 方阵A的与λ对应的特征向量不唯一；

4. 一个特征向量只能属于一个特征值.

二、特征值，特征向量的求法

$\because Ax=\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda E)x=0$ 　注：$(A-\lambda)x=0(\times)$

$\therefore A$有特征向量$\Leftrightarrow$齐次方程组$(A-\lambda E)x=0$有非零解x

$$\Leftrightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\det(A-\lambda E)$称为A的**特征多项式**，是λ的一元n次多项式;

$\det(A-\lambda E)=0$称为A的**特征方程**,是λ为未知数的一元n次方程,在复域内有n个根（包括根的重数）.

命题 n 阶方阵 A 有 n 个特征值 (计根的重数).

- 求特征值、特征向量的步骤:

1. 计算A的特征多项式 $\det(A-\lambda E)$;
2. 求特征方程 $\det(A-\lambda E)=0$ 的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即为A 的全部特征值;
3. 对每个特征值 λ_i ,求齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的非零解向量------基础解系, 即为 λ_i对应的特征向量。

例1 求$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 (1) A的特征多项式

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

(2) 因此A的特征方程$\det(A-\lambda E)=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

的三个根 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$ 就是A的三个特征值

$\Rightarrow$特征值 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$ (二重特征值)

(3) 对每一个特征值求相应的特征向量.

对$\lambda_1=-1$,求解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\because\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$ 得基础解系$\boldsymbol{p}_1=(1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$;

所以对应于$\lambda_1=-1$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$

对$\lambda_2=\lambda_3=2$,求解方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\because\quad \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为$\{x_2=4x_1-x_3$

得基础解系$\boldsymbol{p}_2=(1\ 4\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(0\ -1\ 1)^{\mathrm{T}}$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$

（k_2,k_3不同时为0）

注：在例1中，特征值的重数恰巧与对应的线性无关的特征向量的个数相等，一般情况下不一定。

例2 求$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$**的特征多项式**

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow$特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ (二重特征值)

对$\lambda_1=-2$,求解方程组$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\because \quad \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系$\boldsymbol{p}_1=\left(0\ 0\ 1\right)^{\mathrm{T}}$;

所以对应于$\lambda_1=-2$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$

对$\lambda_2=\lambda_3=1$,求解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\because \quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系$\boldsymbol{p}_2=\left(-3\ 6\ -20\right)^{\mathrm{T}}$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$

三、特征值与特征向量性质

定理5.1 设n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det \boldsymbol{A}$.

证明

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

(行列式展开) $=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$
$+(\lambda\text{次数}\leq n-2\text{的各项})$

(λ降幂排列) $=(-\lambda)^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+\cdots$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(-\lambda)^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+\cdots$$

又因为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0$的$n$个根，所以

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$$=(-\lambda)^n+(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(-\lambda)^{n-1}+\cdots+(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$$

比较系数有$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

令$\lambda=0$，有 $\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ **证毕**

定义 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$称为方阵$A$的**迹**.

$\therefore\quad \operatorname{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

推论 对n阶方阵$\boldsymbol{A}$

（1）0是A的特征值$\Leftrightarrow\det\boldsymbol{A}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$奇异$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$不可逆

（2）A可逆$\Leftrightarrow\det\boldsymbol{A}\neq0\Leftrightarrow$ 0不是A的特征值

四、矩阵多项式

定义5.2 对 s 次多项式

$$f(x)=a_s x^s+a_{s-1}x^{s-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

设$\boldsymbol{A}$ 是方阵，称下式为$\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式

$$f(\boldsymbol{A})=a_s\boldsymbol{A}^s+a_{s-1}\boldsymbol{A}^{s-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$$

定理5.2 设λ 是$\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, $f(x)$是多项式，则

(1) $f(\lambda)$是$f(\boldsymbol{A})$的特征值, 对应的特征向量仍是$\boldsymbol{x}$;

(2) 若$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 则对$\boldsymbol{A}$的任意一个特征值, 有$f(\lambda)=0$, 即 λ 是$f(x)$的零点.

证明

(1)由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=\cdots=\lambda^k\boldsymbol{x}$

即λ^k是$\boldsymbol{A}^k$的特征值

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=a_s\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{x}+a_{s-1}\boldsymbol{A}^{s-1}\boldsymbol{x}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+a_0\boldsymbol{x}$$
$$=(a_s\lambda^s+a_{s-1}\lambda^{s-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\boldsymbol{x}$$
$$=f(\lambda)\boldsymbol{x}$$

即$f(\lambda)$的$f(\boldsymbol{A})$特征值，$\boldsymbol{x}$是$f(\boldsymbol{A})$对应$f(\lambda)$的特征向量

(2) 当$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$时，$f(\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\quad\therefore f(\lambda)=0$ **证毕**

定理说明：

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$成立$\Rightarrow f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=f(\lambda)\boldsymbol{x}$成立；

(2) $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$成立$\Rightarrow\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda$是$f(x)=0$的根.

例3 (2000.11)

已知3阶方阵A的特征值是0,1,3,方阵$B=A^2-2E$,

则B的特征值为 **-2,-1,7** , $\det B=$ **14**

解 方阵$B=A^2-2E$是方阵A的矩阵多项式

所以$f(A)=A^2-2E$对应的多项式为$f(x)=x^2-2$

由定理5.2(1)知，$f(\lambda)$为B的特征值

所以B的特征值为$f(0), f(1)$和$f(3)$

由定理5.1(2)知,$\det B=(-2)(-1)\cdot 7=14$

例4 (1999.11)

设方阵A满足$A^2-3A+2E=O$,则A的特征值为 **1或2** .

解 由定理5.2(2)知，A的特征值λ是$f(x)=0$的零点

推论 设$\lambda, \boldsymbol{p}$是A的特征值和特征向量，则

(1) $k\lambda, \boldsymbol{p}$是kA的特征值和特征向量；

(2) $\lambda^s, \boldsymbol{p}$ 是A^s 的特征值和特征向量；

(3) 当A可逆时，$\lambda^{-1}, \boldsymbol{p}$是$A^{-1}$的特征值和特征向量.

五、特征向量的线性无关性

定理5.3 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是方阵$A$的$m$个互不相同的特征值, 对应的特征向量分别为$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$, 则$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$线性无关.

证明 对 m 用数学归纳法证明.

1° 当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{p}_1$ 线性无关；

2° 假设在$m-1$时，结论成立，则当 m 时，设

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0} \qquad (1)$$

用A乘(1)式两边，由$A\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,$
$A\boldsymbol{p}_m=\lambda_m\boldsymbol{p}_m,$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1k_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+\lambda_mk_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

$(1)\times\lambda_m-(2)$ 消去含 $\boldsymbol{p}_m$ 的项$\Rightarrow$

$$k_1(\lambda_m-\lambda_1)\boldsymbol{p}_1+k_2(\lambda_m-\lambda_2)\boldsymbol{p}_2+\cdots +k_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})\boldsymbol{p}_{m-1}=\boldsymbol{0}$$

再由假设$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{m-1}$的线性无关性

$$\Rightarrow k_1(\lambda_m-\lambda_1)=k_2(\lambda_m-\lambda_2)=\cdots=k_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})=0$$

但$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$两两互异

$$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_{m-1}=0\Rightarrow k_m=0.$$

所以$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$线性无关.

证毕

定理5.3可以推广为如下的定理.

定理5.4 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个互不相同的特征值，$\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1r_1}$是对应$\lambda_1$的线性无关特征向量，

$\boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22},\cdots,\boldsymbol{p}_{2r_2}$是对应$\lambda_2$的线性无关特征向量，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\boldsymbol{p}_{m1},\boldsymbol{p}_{m2},\cdots,\boldsymbol{p}_{mr_m}$是对应$\lambda_m$的线性无关特征向量，

则向量组

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1r_1}\\ \boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22},\cdots,\boldsymbol{p}_{2r_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{p}_{m1},\boldsymbol{p}_{m2},\cdots,\boldsymbol{p}_{mr_m}\end{array}$$

线性无关.

例5 **(2005 数一；2005,5)**

设λ和μ是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 x 和 y，则向量组 x，$A(x+y)$ 线性无关的充要条件是 ______

练习 **（2005.5）**

设 n 阶方阵 A 的各行之和为5，则 A 的一个特征值是 ________

练习（2006 数一到数四）

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，求 A 的特征值和特征向量。

关于方阵可逆性的等价命题

设A为 n 阶方阵，则

A 可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow A$ 非奇异

$\Leftrightarrow A$ 满秩

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性无关

$\Leftrightarrow A$ 与 E_n 等价

$\Leftrightarrow A$ 经有限次行(列)初等变换可化为单位矩阵

$\Leftrightarrow A$ 可表为若干初等方阵乘积

$\Leftrightarrow A$ 没有零特征值

$\Leftrightarrow A^*$ 可逆

$\Leftrightarrow A^T$ 可逆

逆否命题成立

A 不可逆 $\Leftrightarrow \det A = 0$

$\Leftrightarrow A$ 奇异

$\Leftrightarrow rankA < n$

$\Leftrightarrow$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 与E_n不等价

$\Leftrightarrow \cdots\cdots$

$\Leftrightarrow \cdots\cdots$

$\Leftrightarrow$ 有零特征值

$\Leftrightarrow A^*$ 不可逆

$\Leftrightarrow A^T$ 不可逆