2018-2019 学年高等数学（下）期中试题解答

（2019-5-11）

一、填空题(每小题 4 分，共 40 分)

1\. $\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\mathrm{d}y$ ；　2. $f'(u)\frac{\varphi(x+y)}{2-\cos u}$ ；　3. $yf_1'+\varphi_1' f_2'$ ；

4\. $\frac{5}{3}$ ；　5. $4x+3y-5z=0$ ；　6. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$ ；

7\. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} f\,\mathrm{d}z$ ；　8. π ；　9. $\frac{1}{2}$ ；　10. $4a\pi$.

二、选择题(每小题 4 分，共 20 分)：1.A；2.C；3.B；4.C；5.D.

三、1.解　由对称性知 $\bar{x}=0$.　　(2 分)

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{A}=\frac{\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r}{2^2\pi-1^2\pi}\qquad \text{(5 分)}$$

$$=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta\ \text{(6 分)}=\frac{56}{9\pi}2\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}\qquad \text{(7 分)}$$

2.解　$L: y=x^2\quad(0\le x\le 1)$ ，　　(2 分)

$$I=\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\qquad \text{(5 分)}$$

$$=\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\qquad \text{(7 分)}$$

3.解　因点 $(1,-2,1)$ 是曲线 L 上的点，将 $x=1, y=-2$ 代入方程 $y^2=2mx$ 可得 $m=2$，

所给曲线为 $L:\begin{cases} y^2=4x \\ z^2=2-x \end{cases}$.　　(2 分)

曲面 $4x-y^2=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处法向量：$\vec{n}_1=(4,-2y,0)\big|_{(1,-2,1)}=(4,4,0)$；

曲面 $x+z^2-2=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处法向量：$\vec{n}_2=(1,0,2)$.

故曲线 L 上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为：$\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4(2,-2,-1)$.　(5 分)

所求切线方程为：　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$,　　(6 分)

法平面方程为：$2(x-1)-2(y+2)-(z-1)=0$，即:　$2x-2y-z-5=0$.　(7 分)

四、解　补充平面 $S_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 取下侧.　　(2 分)

$$I=\iint_S 4xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\right)4xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iiint_\Omega(4z-2y+2y)\mathrm{d}v-0 \quad (6\text{ 分})$$

$$=4\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \quad (8\text{ 分})$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r=\pi a^4 \quad (10\text{ 分})$$

(或 $I=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}z\,\mathrm{d}z=8\pi\int_0^a\dfrac{a^2-r^2}{2}r\,\mathrm{d}r=\pi a^4$)

五、解　闭路 L：$|x|+|y|=a$（逆时针方向），L 所围的正方形域记为 D.　　(2 分)

将 L 方程代入被积表达式得

$$I=\oint_L\frac{xy\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\frac{1}{a}\oint_L xy\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x \quad \text{（利用格林公式）} \quad (4\text{ 分})$$

$$=+\frac{1}{a}\iint_D(y+1)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a}\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{a}\iint_D\mathrm{d}\sigma \quad (6\text{ 分})$$

(由于 D 关于 $y=0$（x 轴）对称，y 为 y 的奇函数) $=0+\dfrac{1}{a}\iint_D\mathrm{d}\sigma$　(8 分)

$=2a$ (9 分)