第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程

- 一、二阶常系数非齐次线性方程解法

  1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

  2. $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ 型

- ★ 二、欧拉方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数齐次线性微分方程求通解的一般步骤:

（1）写出相应的特征方程; $r^2 + pr + q = 0$

（2）求出特征根; r_1, r_2

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

特征根的情况	通解的表达式
单根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;
重根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

一、二阶常系数非齐次线性方程解法

二阶常系数非齐次线性方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8.1)$$

对应齐次线性方程:

$$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (8.2)$$

其中 p,q 均为实常数 .

(8.1)的通解结构: $y = Y + y^*,$

如何求(8.1)的特解？ 方法：待定系数法.

类型1 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$,

$\lambda, a_i(i=1,2,\cdots,m)$均为常数， $a_0\neq 0.$

方程(8.1)必有如下形式的特解:

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$,

$b_i(i=1,2,\cdots,m)$均为待定常数,

由方程 (8.1)所确定；k的取法如下:

λ	非特征根	特征单根	特征重根
k	0	1	2

推导如下：

设非齐次线性方程(8.1)的特解为

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x}$$

x的待定多项式

则 $$(y^*)' = Q'(x)e^{\lambda x} + Q(x)\cdot\lambda e^{\lambda x}$$

$$= [Q'(x) + \lambda Q(x)]e^{\lambda x}$$

$$(y^*)'' = [Q''(x) + 2\lambda Q'(x) + \lambda^2 Q(x)]e^{\lambda x}$$

代入方程(8.1)，得

$$L[y^*] = (y^*)'' + p(y^*)' + qy^*$$

$$= \cancel{e^{\lambda x}}[Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x)]$$

$$\equiv P_m(x)\cancel{e^{\lambda x}}$$

$\therefore$ y^*是方程(8.1)的解 $\Leftrightarrow$

$$Q''(x) + \underline{(2\lambda + p)}Q'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}Q(x) \equiv P_m(x)$$

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)\equiv P_m(x)$$

(1) 若 λ不是特征方程的根,

$$F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,$$

可设 $Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$,

代入方程,对比两端 x同次幂的系数

即可确定$Q_m(x)$. 此时, $k=0$,

(8.1)有特解: $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$;

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)\equiv P_m(x)$$

(2) 若λ是特征方程的单根，

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

故$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)\equiv P_m(x)$

取 $Q'(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m \quad (B_0\neq 0)$

可设 $Q(x)=x(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)=xQ_m(x)$,

此时，$k=1$. 方程(8.1)有如下形式的特解:

$$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x};$$

(3) 若 λ 是特征方程的重根,

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

可设 $Q(x)=x^2Q_m(x)$, $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

综上所述：(8.1)的特解可设立为：

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}, \quad k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda\text{是特征单根}, \\ 2, & \lambda\text{是特征重根} \end{cases}$$

例1 设 $y''-y'=f(x)$，问 $f(x)$ 如下时，特解应如何设立？

解 特征方程：$r^2-r=0$

特征根：$r_1=0,\ r_2=1$

$f(x)$	设立特解 y^*	k
$3x^2 \quad (\lambda=0)$	$x(ax^2+bx+c)$	1
$e^x \quad (\lambda=1)$	$x\cdot ae^x$	1
$x2^x \quad (\lambda=\ln 2)$	$(ax+b)2^x$	0
$xe^{-x}+e^x$	$(ax+b)e^{-x}+x\cdot ce^x$	

$$f(x)=xe^{-x}+e^{x}=f_1(x)+f_2(x)$$

对于 $y''-y'=xe^{-x}$,

$\lambda=-1$ 不是特征根，$k=0$

$\therefore$ 可设立特解：$y_1^*=(ax+b)e^{-x}$,

对于 $y''-y'=e^{x}$,

$\lambda=1$ 是特征单根，$k=1$

$\therefore$ 可设立特解：$y_2^*=x\cdot ce^{x}$,

由解的叠加原理，对于 $y''-y'=xe^{-x}+e^{x}$,

$\therefore$ 可设立特解：$y^*=y_1^*+y_2^*$

例2 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 1° 特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

2° 对应齐次线性方程通解 $Y=c_1e^x+c_2e^{2x},$

3° $\because \lambda=2$ 是单根， 设立特解：$y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ $\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

4° 原方程的通解为:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$$

例3 求方程 $y'' + a^2 y = x + 1$ (1)

的通解，其中常数 $a \geq 0$.

解 对应的齐次线性方程：

$$y'' + a^2 y = 0 \qquad (2)$$

特征方程： $r^2 + a^2 = 0$

(1) 当 $a = 0$ 时，特征根： $r_{1,2} = 0$

(2)的通解： $y = C_1 + C_2 x$

$\because \quad f(x) = x + 1 = (x + 1)e^{0 \cdot x}$,

$\lambda = 0$ 是二重特征根， $k = 2$

$\therefore$ 可设立 (1)的特解形为

$$y^* = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$$

$$(y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx, \quad (y^*)'' = 6Ax + 2B$$

代入(1)，得 $6Ax + 2B = x + 1$

$$\therefore \begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}$$

故(1)有特解： $y^* = x^2(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2})$

$\therefore$ 当$a = 0$时， (1)的通解为：

$$y = C_1 + C_2x + x^2(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}).$$

目录 上页 下页 返回 结束

另法：当$a=0$时，方程(1)为：

$$y''=x+1$$

$$y'=\frac{1}{2}x^2+x+C_1$$

(1)之通解：$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$

(2)当$a>0$时，特征根：$r_{1,2}=\pm ai$

(2)的通解：$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$

$\lambda=0$不是特征根，$k=0$

$\therefore$ 可设立(1)的特解形为 $y^*=Ax+B$

$$(y^*)' = A, \quad (y^*)'' = 0$$

代入(1)，得 $a^2(Ax+B) = x+1$

$\therefore \quad A = B = \dfrac{1}{a^2}$

故(1)有特解：$y^* = \dfrac{1}{a^2}(x+1)$

$\therefore$ 当$a>0$时，(1)的通解为：

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2}(x+1).$$

类型2 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

其中 $P_l(x), P_n(x)$分别是x的l次和n次实系数多项式; α, β为实常数.

方程(8.1)必有如下形式的特解:

$$y^*=x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

其中 k的取法如下:

λ= $\alpha+i\beta$	非特征根	特征根
k	0	1

$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$为$x$的待定多项式, $m=\max\{l,n\}$.

引理 若 $y=\varphi(x)+i\psi(x)$是方程

$$y''+py'+qy=u(x)+iv(x) \quad (p,q\text{为实常数})$$

的解， $u(x),v(x),\varphi(x),\psi(x)$均为实函数，则

$\varphi(x),\psi(x)$分别是方程

$$y''+py'+qy=u(x)$$

和 $$y''+py'+qy=v(x)$$ 的解.

推导类型 2结论的思路:

将类型 2 转化为类型 1 的情形.

推导类型 2的结论如下：

利用欧拉公式，得

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$$

$$=e^{\alpha x}[P_l\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+P_n\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}]$$

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2i})e^{(\alpha+i\beta)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2i})e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$=\boxed{(\frac{P_l}{2}-i\frac{P_n}{2})e^{(\alpha+i\beta)x}}+(\frac{P_l}{2}+i\frac{P_n}{2})e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$=g(x)+\overline{g(x)}=\mathrm{Re}[2g(x)]$$

$$L[y] = y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8.1)$$

考虑： $L[y] = y'' + p\,y' + q\,y = 2g(x) \quad (8.4)$

其中 $2g(x) = [P_l(x) - iP_n(x)]e^{(\alpha + i\beta)x}$

$$= Q_m(x)e^{\lambda x}$$

$$m = \max\{l, n\},$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

若 y_1^* 是(8.4)的解，则 $y^* = \mathrm{Re}(y_1^*)$ 必是 (8.1)的解 .

(8.4)属于类型 1， 必有如下形式的特解：

$$y_1^* = x^k D_m(x) e^{\lambda x},$$

其中 $D_m(x)$为x的待定多项式,

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda = \alpha + i\beta \text{不是特征根} \\ 1, & \lambda = \alpha + i\beta \text{是特征单根} \end{cases}$$

设 $D_m(x) = R_m^{(1)}(x) - iR_m^{(2)}(x)$, 其中 $R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$

均为实系数多项式，则

$$y_1^* = x^k [R_m^{(1)}(x) - iR_m^{(2)}(x)] e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$= x^k [R_m^{(1)}(x) - iR_m^{(2)}(x)] e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_1^* = x^k[R_m^{(1)}(x) - iR_m^{(2)}(x)]e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$= x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

$$+ i\, x^k[R_m^{(1)}(x)\sin\beta x - R_m^{(2)}(x)\cos\beta x]e^{\alpha x}$$

$$\mathrm{Re}(y_1^*) = x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

由引理，知

$$y^* = \mathrm{Re}(y_1^*)$$

$$= x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

必是 (8.1)的解 .

例4 设 $y''' + y' = f(x)$，问 $f(x)$ 如下时，特解应如何设立？

解 特征方程：$r^3 + r = 0$

特征根： $r_1 = 0,\ r_{2,3} = \pm i$

$f(x)$	设立特解 y^*	k
$xe^x \cos 2x$ $(\lambda = 1+2i)$	$e^x[(ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x]$	0
$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + 1)$ $(\lambda_1 = i)$ $(\lambda_2 = 0)$	$x(a\cos x + b\sin x) + x\cdot c$	1

例5 求方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解.

解 1° 特征方程： $r^2 + 1 = 0$

特征根： $r_{1,2} = \pm i$

2° 对应齐次线性方程的通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

3° 求非齐次线性方程的特解

$\lambda = i$ 是特征单根， $k = 1$

$\therefore$ 可设立原方程的特解为

$$y^* = x \cdot (a\cos x + b\sin x)$$

目录 上页 下页 例题 继续

$$y'' + y = 4\sin x$$

$$y^* = x\cdot(a\cos x + b\sin x)$$

$$(y^*)' = (a\cos x + b\sin x) + x\cdot(-a\sin x + b\cos x)$$

$$(y^*)'' = 2(-a\sin x + b\cos x) + x\cdot(-a\cos x - b\sin x)$$

代入原方程，得

$$2(-a\sin x + b\cos x) \equiv 4\sin x$$

比较同类项系数： $\begin{cases} -2a = 4 \\ 2b = 0 \end{cases}$ $\therefore \quad a = -2, \quad b = 0$

从而原方程有特解：

$$y^* = -2x\cos x$$

故原方程通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.$

例6(综合题)

求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

$$s''+s'+s=e^{x}$$
$$s(0)=1,\ s'(0)=0.$$
$$s=?$$

解 $$s=s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$$s'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$s''=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

$$s'' + s' + s = e^x \qquad ①$$

对应的齐次线性方程：

$$s'' + s' + s = 0 \qquad ②$$

其特征方程为 $r^2 + r + 1 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\therefore$ ②的通解为

$$S = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$\because\quad \lambda=1$不是特征根，$k=0$

$\therefore\quad$ 设非齐次线性方程 ①的特解为 $s^*=Ae^x$

代入①，得 $\quad A=\dfrac{1}{3}$

故①有特解：$\quad s^*=\dfrac{1}{3}e^x$

①的通解为：$\quad s=S+s^*$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$$

又 $\because$ 当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases} s(0)=1=C_1+\dfrac{1}{3} \\ s'(0)=0=-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2+\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad C_1=\frac{2}{3}, \quad C_2=0$$

从而所求和函数为

$$s(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^{x}$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

内容小结

待定系数法:

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$, (λ可以是复数）

$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$;

(2) $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$,

$y^*=x^k e^{\alpha x}[R_m^{(2)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$;

思考题

1 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = f(x)$的特解 y^* 具有什么形式？其中非 其次项 $f(x)$为：

(1) $f(x) = x$;

(2) $f(x) = e^{2x}$;

(3) $f(x) = x^2 e^x$;

解 所给方程对应的齐次线 性方程为

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

特征方程 $r^2 - 4r + 4 = 0$的根为 $r_1 = r_2 = 2.$

特征根： $r_1 = r_2 = 2.$

$(1)\ f(x) = x$ 属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，

$m = 1$，$\lambda = 0$ 不是特征根，故取 $k = 0$，

方程的特解 $y*$ 具有形式：

$$y* = x^0(Ax + B)e^{0x} = Ax + B.$$

$(2)\ f(x) = e^{2x}$ 属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，

$m = 1$，$\lambda = 2$ 是特征方程的二重根，故取 $k = 2$，

方程的特解 $y*$ 具有形式：

$$y* = x^2 Ae^{2x}.$$

$(3)\ f(x)=x^2e^x$

属于 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，

$m=2$， $\lambda=1$ 不是特征根，故取 $k=0$，

方程的特解 $y*$ 具有形式：

$$y*=x^0(Ax^2+Bx+C)e^x$$

$$=(Ax^2+Bx+C)e^x.$$

2. 写出微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$ 的待定特解的形式.

解 设 $y'' - 4y' + 4y = 6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^* = y_1^* + y_2^*$

$\because r^2 - 4r + 4 = 0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2} = 2$

$\therefore y_1^* = Ax^2 + Bx + C$ $y_2^* = Dx^2 e^{2x}$ （重根）

$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax^2 + Bx + C + Dx^2 e^{2x}$.

3. 求下列微分方程的通解

(1) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\sin x$

(2) $y'' + 4y = 10\sin x\cos x$

(3) $y'' + 2y' = \sin^2 x$

(4) $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1 + 5^x$

解　特征方程为　$r^2 + 3r + 2 = 0$

特征根为　$r_1 = -2, r_2 = -1$

所以对应齐次线性方程　的通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

因为 $\lambda \pm i\omega = -1 \pm i$ 不是特征根

故设 $y^* = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$

求 $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入原方程比较系数，

解得 $a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$

所以 $y^* = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

从而原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

(2) $y'' + 4y = 10\sin x\cos x$

特征方程为 $r^2 + 4 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$

所以对应齐次方程的通 解为

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

因为方程左端自由项为 $f(x) = 5\sin 2x$,

又 $\lambda \pm i\omega = 0 \pm 2i$ 为特征根

故设 $y^* = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$

求 $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入原方程 ，

解得 $a = -\frac{5}{4}, b = 0$

所以 $y^* = -\frac{5}{4} x \cos 2x$

从而原方程的通解为

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x$$

$(3)\ y'' + 2y' = \sin^2 x$

特征方程为 $r^2 + 2r = 0$

特征根为 $r_1 = -2,\ r_2 = 0$

所以对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-2x}$

因为 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ 而且 $\lambda = 0$为特征根，

故设 $y^* = y_1^* + y_2^* = ax + b_1 \cos 2x + b_2 \sin 2x$

则 $y^{*\prime} = a - 2b_1 \sin 2x + 2b_2 \cos 2x$

$y^{*\prime\prime} = -4b_1 \cos 2x - 4b_2 \sin 2x$

代入原方程比较两端系 数,得

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{1}{2} \\ 4b_2 - 4b_1 = -\dfrac{1}{2} \\ -4b_1 - 4b_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $a = \dfrac{1}{4}, \ b_1 = \dfrac{1}{16}, \ b_2 = -\dfrac{1}{16}$

所以 $y^* = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{16}(\cos 2x - \sin 2x)$

从而原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}(\cos 2x - \sin 2x)$$

(4) $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1 + 5^x$

特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$

特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 3$

所以对应齐次线性方程 的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

因为 $f(x)=3x+1+5^x=3x+1+e^{x\ln 5}$

且 $\lambda=\ln 5$不是特征根，故设

$$y^*=y_1^*+y_2^*=(a_0x+a_1)+be^{x\ln 5}=a_0x+a_1+b5^x$$

$$y^{*\prime}=a_0+(b\ln 5)5^x \qquad y^{*\prime\prime}=b(\ln 5)^2 5^x$$

代入原方程比较两端系数，得

$$\begin{cases} -3a_0=3 \\ -3a_1-2a_0=1 \\ -3b-2b(\ln 5)+b(\ln 5)^2=1 \end{cases}$$

解得 $a_0=-1,\quad a_1=\dfrac{1}{3},$

$$b=\frac{1}{(\ln 5)^2-2\ln 5-3}$$

所以 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}+\dfrac{5^x}{(\ln 5)^2-2\ln 5-3}$

从而原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}+\frac{5^x}{(\ln 5)^2-2\ln 5-3}$$

备用题

例2-1 求微分方程 $y'' - y' = 2x + 1$的特解 y^* .

解 方程的非齐次项 $f(x) = 2x + 1$,

属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$型,

$m = 1$, $\lambda = 0$

特征方程: $r^2 - r = 0$

特征根: $r_1 = 0, r_2 = 1$.

故设特解 $y^* = x(Ax + B)$

(λ为单根，故取 $k = 1$),

求导数 $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$。

代入方程得

$$2A-(2Ax+B)=2x+1,$$

比较系数，得

$$\begin{cases} -2A=2 \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

解得 $A=-1,\quad B=3.$

从而特解为

$$y^*=-x^2-3x.$$

例2-2 设 $\varphi(x)=e^{x}-\int_{0}^{x}(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

其中 $\varphi(x)$为连续函数， 求 $\varphi(x)$.

分析 (1) 题中所给方程为积分方程,根据积分方程的特点，应先将方程两端对 x 求导.

把问题转化为求微分方程满足一定初始条件的解;

(2) 方程右端的积分中,被积函数出现 x ,

相对与积分变量 t 而言, x 可看作常数.可以将它提到积分号外, 然后求导.

解 $$\varphi(x)=e^x-\int_0^x x\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=e^x-x\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

两边对 x求导数

$$\varphi'(x)=e^x-\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t-x\varphi(x)+x\varphi(x)$$

$$=e^x-\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

再对 x求导数 ,得 $\varphi''(x)=e^x-\varphi(x)$

即 $$\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$$

这是二阶常系数非齐次 线性微分方程，

对应齐次线性方程的特 征方程为

$$r^2+1=0,\quad r=\pm i$$

故齐次线性方程的通解 为

$$\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

设原方程的一个特解为 $\varphi^*(x)=Ae^x$,

将$\varphi^{*\prime}(x),\varphi^{*\prime\prime}(x)$.代入原方程， 得 $A=\frac{1}{2}$

故方程的通解为

$$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

由原方程得初始条件

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=1,$$

代入通解中，得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$

故所求函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

例3-1 求微分方程 $y'' + a^2 y = e^x \ (a > 0)$的通解 .

解 先求对应方程 $y'' + a^2 y = 0$的通解 .

其特征方程 $r^2 + a^2 = 0$的根为

$$r_{1,2} = \pm ai .$$

故对应其次方程的特解 为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax .$$

设非齐次线性方程的特 解为

$$y^* = x^0 Ae^x = Ae^x$$

（$\lambda = 1$非特征根，故取 $k = 0$ ），

那么， $y*' = y*'' = Ae^{x},$

代入方程得 $Ae^{x} + a^{2}Ae^{x} = e^{x}.$

即 $A + a^{2}A = 1.$ $A = \dfrac{1}{1+a^{2}}.$

于是，特解 $y* = \dfrac{1}{1+a^{2}}e^{x}.$

非齐次线性方程的通解 为

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \frac{1}{1+a^{2}}e^{x}.$$

例5-1 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\sin x$ 的通解．

解 对应齐次线性方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$

的特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0.$$

特征根为

$$r_{1,2} = 1 + 2i.$$

故对应齐次线性方程的 通解为

$$Y = e^{x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right].$$

又$\lambda + i\omega = 1 + i$不是特征方程的根，故可设

$$y^* = x^0 e^x [D_1 \cos x + D_2 \sin x]$$

为所给方程的特解 .求得

$$y^{*\prime} = e^x (D_1 + D_2) \cos x + e^x (D_2 - D_1) \sin x,$$

$$y^{*\prime\prime} = e^x 2D_2 \cos x - e^x 2D_1 \sin x,$$

代入所给方程， 消去 e^x，并整理得，

$$3D_1 \cos x + 3D_2 \sin x = \sin x,$$

比较系数，得

$$3D_1\cos x + 3D_2\sin x = \sin x,$$

$$\begin{cases} 3D_1 = 0 \\ 3D_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

于是，特解 $y^* = \dfrac{e^x}{3}\sin x.$

从而，所给方程的通解　为

$$y = e^x\left[C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right] + \frac{e^x}{3}\sin x.$$

例5-2 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐线性方程的通解

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

作辅助方程 $y'' + y = xe^{2ix}$,

$\because \lambda = 2i$ 不是特征方程的根,

设 $y_1^* = (Ax + B)e^{2ix}$,代入辅助方程

$$\begin{cases} 4Ai - 3B = 0 \\ -3A = 1 \end{cases} \qquad \therefore A = -\frac{1}{3},\ B = -\frac{4}{9}i,$$

$\therefore$ 辅助方程的特解: $y_1^* = (-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i)e^{2ix},$

$$= (-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x - (\frac{4}{9}\cos 2x + \frac{1}{3}x\sin 2x)i,$$

原方程的特解为： $y^* = \mathrm{Re}(y_1^*)$ （取实部）

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x,$$

原方程通解为:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

注 $Ae^{\alpha x}\cos\beta x, Ae^{\alpha x}\sin\beta x$

分别是 $Ae^{(\alpha+i\beta)x}$ 的实部和虚部 .

例6-1 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶非齐次线性方程的三个解，求此微分方程．

解(方法1) 由线性微分方程解的结构定理知，e^{2x} 及 e^{-x} 是相应齐次方程的两个线性无关的解，

且 xe^x 是非齐次方程的一个特解，

故设此微分方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x)$$

将$y = xe^x$代入，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = e^x - 2xe^x$$

因此所求方程为

$$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$$

(方法2) 由题设知， e^{2x}及e^{-x}是相应齐次方程的两个线性无关的解，

且xe^x是非齐次方程的一个特解，

故 $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x e^{x}$$

是非齐次方程的通解，

由 $$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{x} + (x+1) e^{x}$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (x+2) e^{x}$$

消去 C_1，C_2 得所求方程为

$$y'' - y' - 2y = e^{x} - 2x e^{2x}$$