第四部分 数理逻辑

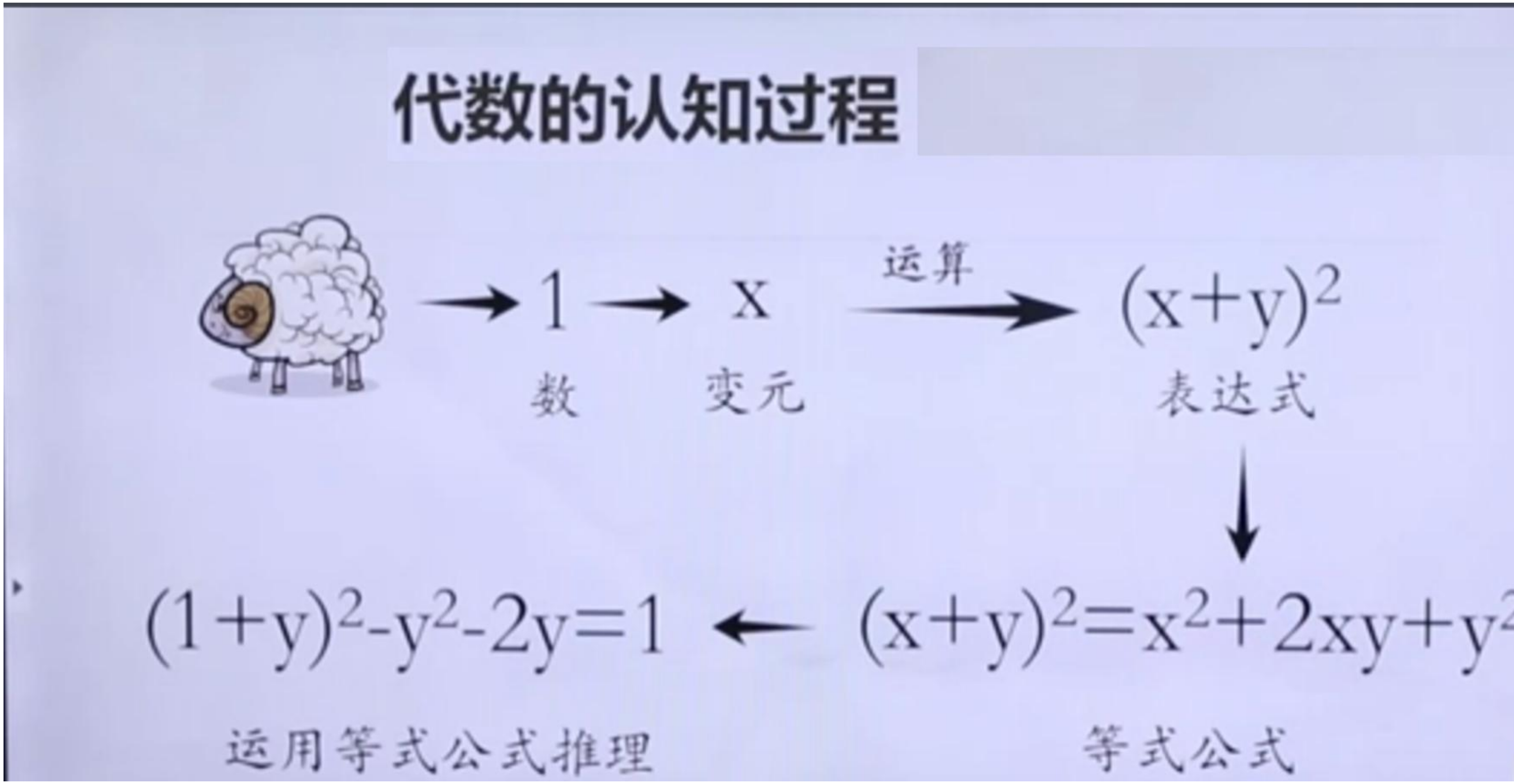
10.2 命题变元与命题公式

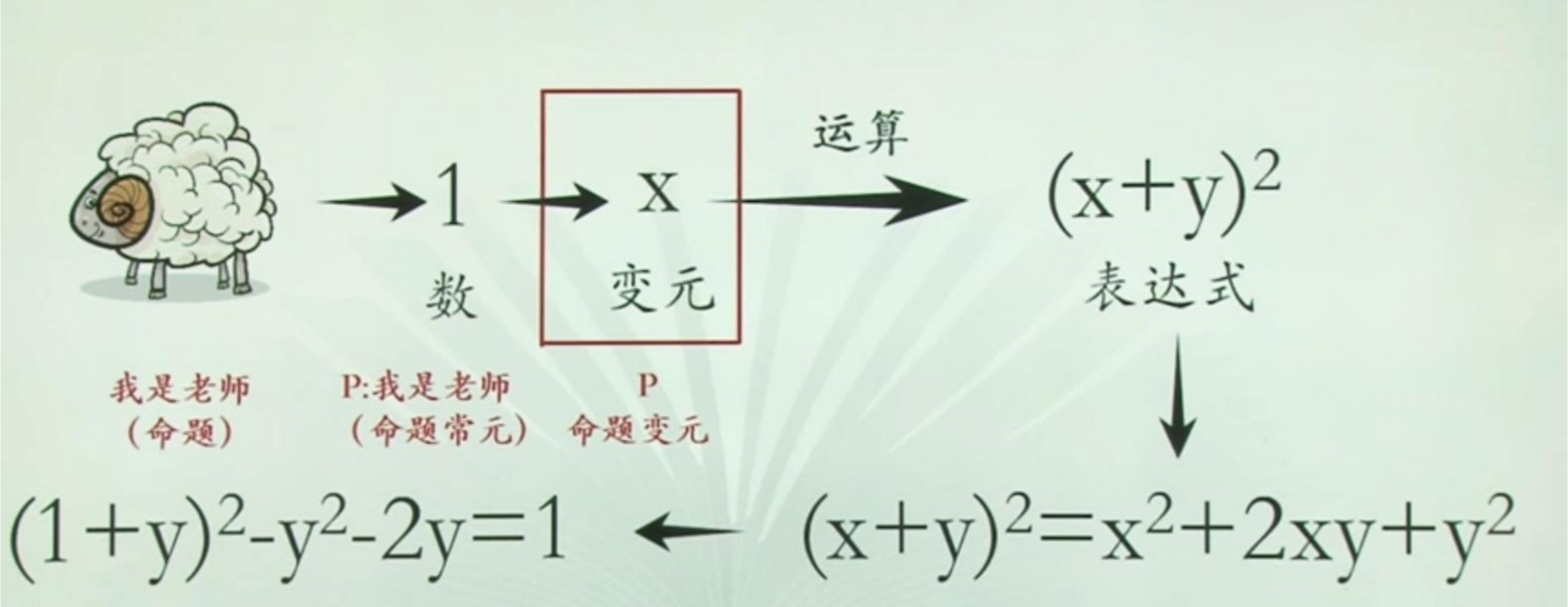
命题变元与命题公式

- 命题变元
- 命题公式

公式的赋值

- 公式赋值
- 真值表


代数的认知过程
1
数
x
变元
运算
$(x+y)^2$
表达式
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
等式公式
$(1+y)^2-y^2-2y=1$
运用等式公式推理


1
数
x
变元
运算
$(x+y)^2$
表达式
我是老师
（命题）
P:我是老师
（命题常元）
P
命题变元
$(1+y)^2-y^2-2y=1$
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

命题变元与命题公式

命题常元

命题变元（以“T”，“F”为取值范围的变量）

命题常元与变元均用 $P, Q, R, \ldots, P_i, Q_i, R_i, \ldots,$ 等表示.

命题变元与命题公式

定义10.6 命题逻辑公式（简称命题公式或公式）的递归定义：

(1) 单个命题变元和命题常元是公式

(2) 若A是公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 公式由且仅由有限次地应用(1), (2), (3) 而得

说明：归纳或递归定义，按上述法则由命题、联结词、圆括号组成的字符串，最外层括号可省略。

命题公式并无真假值,只有给各个命题变元赋值后其才是命题

举例

例 (1) 说明$(P\rightarrow(P\vee Q))$是命题公式。

解 (i) P是命题公式　　根据规则(1)

(ii) Q是命题公式　　根据规则(1)

(iii) $(P\vee Q)$是命题公式　　根据(i)、(ii)和规则(2)

(iv) $(P\rightarrow(P\vee Q))$是命题公式　　根据(i)、(iii)和规则(2)

(2) 以下不是命题公式，因为它们不能由形成规则得出:

$\wedge Q$，　$(P\rightarrow Q$，　$P\rightarrow\wedge Q$，　$((PQ)\wedge R)$

n元公式

——有n个不同命题变元的公式。

一元公式	$\neg P \vee (P \wedge \neg P)$
二元公式	$(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \vee Q)$
三元公式	$((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

公式赋值

定义10.7 设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在公式A中的全部命题变元, 给$P_1, P_2, \ldots, P_n$各指定一个真值, 称为对A的一个赋值或指派.

若使A为1, 则称这组值为A的成真赋值;

若使A为0, 则称这组值为A的成假赋值.

说明（本课程的记法）:

- A中仅出现 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $P_1=\alpha_1, P_2=\alpha_2, \ldots, P_n=\alpha_n$, α_i=0或1, α_i之间不加标点符号

公式赋值

- 含n个命题变元的公式有几个赋值？

  如 000, 010, 101, 110是$\neg(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的成真赋值

  001, 011, 100, 111是成假赋值.

2^n个赋值.

真值表

定义10.8 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的**真值表**.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$(若无下角标则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表

例6 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(P\vee Q)\rightarrow\neg R$

(2) $(Q\rightarrow P)\wedge Q\rightarrow P$

真值表1

(1) $A = (P\vee Q) \rightarrow \neg R$

P Q R	$P\vee Q$	$\neg R$	$(P\vee Q)\rightarrow\neg R$
~~0 0 0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
~~0 0 1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~0 1 0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
0 1 1	1	0	0
~~1 0 0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 1	1	0	0
~~1 1 0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

真值表2

(2) $B = (Q\to P)\wedge Q \to P$

P Q	$Q\to P$	$(Q\to P)\wedge Q$	$(Q\to P)\wedge Q\to P$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值

10.3 公式的类型

定义10.9 设A为任意命题公式

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式;

(4) 不是永真式，也不是永假式的公式称为偶然式.

由例6. (1)可知, $(P\vee Q)\rightarrow\neg R$为非重言式的可满足式，即，偶然式

$(Q\rightarrow P)\wedge Q\rightarrow P$为重言式

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 判断公式的类型

重言式的性质

(1) 重言式的否定为矛盾式，矛盾式的否定为重言式;

(2) 两个重言式的合取、析取、蕴涵、等价均为重言式;

(3) 若等价式$P\leftrightarrow Q$是永真式，则公式P和Q对任何赋值必同真假.

等价重言式与蕴涵重言式

- 等价式$P\leftrightarrow Q$若为永真，则称为等价重言式，记为：$P\Leftrightarrow Q$

也称为P与Q相等，记为：$P=Q$，亦称为等值式。

注意区分：“$\Leftrightarrow$”和“$\leftrightarrow$”

- 蕴涵式$P\rightarrow Q$若为永真，则称为蕴涵重言式，记为：$P\Rightarrow Q$

等值式例题

例1 判断下列各组公式**是否等值**:

$p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

$p\ \ q\ \ r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$

结论：$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

用真值表法判定任意两个命题公式是否等值工作量大，故，考虑利用已知等值式通过代换得到新的等值式.

基本等式(正确性可由真值表给出)

交换律 $A\vee B=B\vee A$, $A\wedge B=B\wedge A$, $A\leftrightarrow B=B\leftrightarrow A$

结合律 $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$

$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow C=A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C)$

分配律 $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ $\vee$对$\wedge$的分配律

$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ $\wedge$对$\vee$的分配律

$A\to(B\to C)=(A\to B)\to(A\to C)$

否定深入 $\neg\neg A=A$ 双重否定律

$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$ 德摩根律

$\neg(A\to B)=A\wedge\neg B$

$\neg(A\leftrightarrow B)=\neg A\leftrightarrow B=A\leftrightarrow\neg B$

基本等式

变元等同

$A\vee A=A$， $A\wedge A=A$ 幂等律

$A\vee\neg A=1$ 排中律

$A\wedge\neg A=0$ 矛盾律

$A\rightarrow A=1$

$A\rightarrow\neg A=\neg A$， $\neg A\rightarrow A=A$

$A\leftrightarrow A=1$

$A\leftrightarrow\neg A=\neg A\leftrightarrow A=0$

基本等式

常量与变元的联结　$A\vee 1=1$，$A\wedge 0=0$　零律

$A\vee 0=A$，$A\wedge 1=A$　同一律

$1\rightarrow A=A$，$0\rightarrow A=1$

$A\rightarrow 1=1$，$A\rightarrow 0=\neg A$

$1\leftrightarrow A=A$，$0\leftrightarrow A=\neg A$

联结词化归　$A\vee B=\neg(\neg A\wedge\neg B)$，$A\wedge B=\neg(\neg A\vee\neg B)$　德摩根律

$A\rightarrow B=\neg A\vee B=\neg(A\wedge\neg B)$　蕴涵等值式

$A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)=(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$

$=(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

等价等值式

基本等式

假言易位 $A \to B = \neg B \to \neg A$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B = \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论 $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) = \neg A$

特别提示： A,B,C代表任意的命题公式，牢记这些等值式是继续学习的基础

等式推理

等式推理——由已知的等值式推演出新的等值式的过程，包括三部分：

1. 基本等式：推理的基础和前提

(注) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性。

传递性：若$A \Leftrightarrow B$、$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$

等式推理

2. 推理规则：推理的主要部分 (1) 代入规则

原理：一个重言式中某个命题变元出现的每一处均代入以同一公式后，所得的仍是重言式。

将基本等式中的命题变元A, B, C等替换成任意命题公式，得到的具体等式称为基本等式的代入实例，代入实例的等式关系不变。

例. $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$，以$R\wedge Q$代$P$得$(R\wedge Q)\wedge\neg(R\wedge Q)\Leftrightarrow F$，仍正确。它的思想就如同在代数中，若$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
则

$$(a+b)^2-(mn)^2=(a+b+mn)(a+b-mn)$$

等式推理

2. 推理规则：推理的主要部分 (1) 代入规则

原理：一个重言式中某个命题变元出现的每一处均代入以同一公式后，所得的仍是重言式。

例. 根据代入规则，由$A\to B=\neg A\vee B$，得$(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})\to B=\neg A\vee B$.

是否正确？

等式推理

2. 推理规则：推理的主要部分 (1) 代入规则

对非重言式通常不作代入运算

例. $B: P \to Q$

不是重言式，若用$R \vee \neg R$代换B中之Q，得

$$A: P \to (R \vee \neg R)$$

却是重言式。

等式推理

2. 推理规则：推理的主要部分

(2) 替(置)换规则

设有恒等式$A \Leftrightarrow B$，若在公式C中出现A的地方替换以B(不必每一处)而得到公式D，则$C \Leftrightarrow D$。

例. 已知等式$P \to Q = \neg P \lor Q$，

设有公式$(P \to Q) \to R$，

则必有 $(P \to Q) \to R$

$= \neg P \lor Q \to R$

等式推理

3. 推理过程

等式的推理过程是一个由公式*P*开始的等式序列，并以另一个公式*Q*作为其结论，它可形式化表示为：

$P=P_1$ (注明所使用的等式与规则)
$P_1=P_2$ (注明所使用的等式与规则)
…
$P_{n-1}=P_n$ (注明所使用的等式与规则)
$P_n = Q$ (注明所使用的等式与规则）

此时有：$P = Q$

可以简化为：

P
$=P_1$ (注明所使用的等式)
$=P_2$ (注明所使用的等式)
…
$=P_{n-1}$
$=P_n$ (注明所使用的等式)
$= Q$ (注明所使用的等式）

等式推理

例：证明$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

$=P\rightarrow(\neg Q\vee R)$　　代入、置换规则、蕴涵等值式

$=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$　　代入、置换规则、蕴涵等值式

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$　　结合律、代入规则

$=(\neg Q\vee\neg P)\vee R$　　交换律　代入规则

$=\neg Q\vee(\neg P\vee R)$　　结合律、代入规则

$=Q\rightarrow(\neg P\vee R)$　　蕴涵等值式、代入、置换规则

$=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$　　蕴涵等值式、代入、置换规则

原命题=逆否命题，逆命题=否命题

设原命题为蕴含式： $P\rightarrow Q$，

则逆命题为： $Q\rightarrow P$，

否命题为： $\neg P\rightarrow\neg Q$，

逆否命题为： $\neg Q\rightarrow\neg P$，

于是

$P\rightarrow Q=\neg Q\rightarrow\neg P$
$Q\rightarrow P=\neg P\rightarrow\neg Q$

(1)真值表法
(2)等值演算法

等式推理的应用举例

一、证明等式

例 证明 $p\to(q\to r) = (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$= \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，替换规则，代入规则）

$= (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，代入规则）

$= \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，代入规则）

$= (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，替换规则，代入规则）

今后在注明中省去替换规则和代入规则

注意：一般情况下用等式推理不能直接证明两个公式不等值。

等式推理的应用举例

二、判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A = 0$

A为重言式当且仅当$A = 1$

例 用等式推理法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$= q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$= q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$= p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$= p\wedge 0$ （矛盾律）

$= 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

$=(\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$=(\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$=1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$=(p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$=p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$=p\wedge r$ （同一律）

偶然试,101和111是成真赋值，000,010,100,001,110,011是成假赋值.

三、化简语句

例 试将下列语句化简：

情况并非如此：如果他不来，那么我不去.

解 设命题P为“他来”，Q为“我去”，则此语句可表示为：

$$\neg(\neg P\to\neg Q)$$

化简此公式 $\neg(\neg P\to\neg Q)$

$= \neg(Q\to P)$ （假言易位）

$= \neg(\neg Q \vee P)$ （蕴涵等值式）

$= Q \wedge \neg P$ （德摩根律，双重否定律）

由此上述语句可简化为：我去了但他没有来

习题

（1）简化表达：你没去火车站接他是不对的，而他不在火车站等你也是不对的。

（2）化简下列程序段：

```
if  A then
    if B then X;
       else Y;
else
    if B then X;
       else Y;
```

程序化简为

```
if B then X;
   else Y;
```

执行X的条件为：

$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B) \Leftrightarrow (A\vee\neg A)\wedge B$

$\Leftrightarrow 1\wedge B \Leftrightarrow B$

执行Y的条件为：

$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B) \Leftrightarrow (A\vee\neg A)\wedge\neg B$

$\Leftrightarrow 1\wedge\neg B \Leftrightarrow \neg B$

习题

1. 指出下列命题哪些是重言式，哪些是偶然式或矛盾式。

(1) $P \vee \neg P$

(2) $P \wedge \neg P$

(3) $P \rightarrow \neg(\neg P)$

(4) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

(5) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

(6) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

(7) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

(8) $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q \vee P \wedge R)$

(9) $P \wedge \neg P \rightarrow Q$

(10) $P \vee \neg Q \rightarrow Q$

(11) $P \rightarrow P \vee Q$

(12) $P \wedge Q \rightarrow P$

(13) $(P \wedge Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

(14) $((P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$

习题

2. 对下述每一表达式，找出仅用∧和 ¬ 的等价表达式，并尽可能简单:

(1) $P \vee Q \vee \neg R$

(2) $P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P)$

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

对下述每一表达式，找出仅用∨和 ¬ 的等价表达式，并尽可能简单:

(4) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

(5) $(P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$

(6) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

3. 用化简联结词 $\leftrightarrow$ 的左边成右边的方法，证明以下命题公式是重言式:

（1）$((P \wedge Q) \to P) \leftrightarrow T$

（2）$\neg(\neg(P \vee Q) \to \neg P) \leftrightarrow F$

（3）$(Q \to P) \wedge (\neg P \to Q) \wedge (Q \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P$

（4）$(P \to \neg P) \wedge (\neg P \to P) \leftrightarrow F$

练一练

4. 证明下列等价关系:

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

(2) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee R \rightarrow Q)$

(3) $\neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(4) $\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

作业

5. 使用等式推理的方法证明下列各式。

(1) $(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow P$

(2) $(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

(3) $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow T$

6. 求出下列公式的最简等价式:

(1) $((P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)) \wedge R$

(2) $P \vee \neg P \vee (Q \wedge \neg Q)$

(3) $(P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S))$

7. 证明下列蕴含永真式:

（1）$P \land Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

（2）$P \Rightarrow (Q \rightarrow P)$

（3）$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

THE END