§4.4 向量空间

三维向量空间$\boldsymbol{R}^3$中，向量之间的关系——线性结构：

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{R}^3 & \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{R}^3 \\ (2)\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{R}^3,\forall k\in \boldsymbol{R} & \Rightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{R}^3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{对加法运算封闭}\\ \text{对数乘运算封闭}\end{array}$$

加法与数乘合称线性运算，三维向量空间对线性运算封闭.

一、向量空间的概念

1. 向量空间的定义

定义4.11 设V是非空的n维实向量集合，

若 (1) 对 $\forall \alpha,\beta\in V$，有$\alpha+\beta\in V$； (对加法运算封闭)

(2) 对 $\forall \alpha\in V,\forall k\in \boldsymbol{R}$，有$k\alpha\in V$. (对数乘运算封闭)

则称 V 为向量空间(线性空间).

命题 若V是向量空间，则V必含有零向量.

即 V含零向量是V为向量空间的必要条件.

证明 设V是向量空间，所以

任取$\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V}, 0\in R$ $\Rightarrow 0\bullet\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\in \boldsymbol{V}.$

例

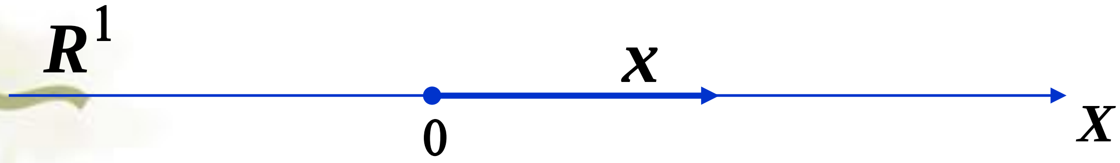
(1)$\boldsymbol{R}^n \triangleq \left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \mid x_j\in \boldsymbol{R}, j=1,2,\cdots,n\right\}$是向量空间.

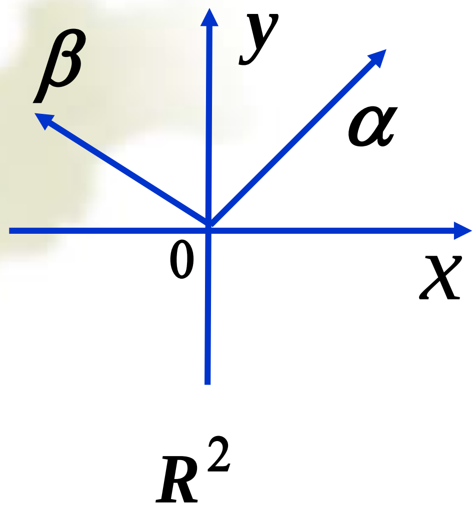
特别：$\boldsymbol{R}^1$ 是实数集， 每个 $x\in \boldsymbol{R}^1$ 是实数轴上的向量；

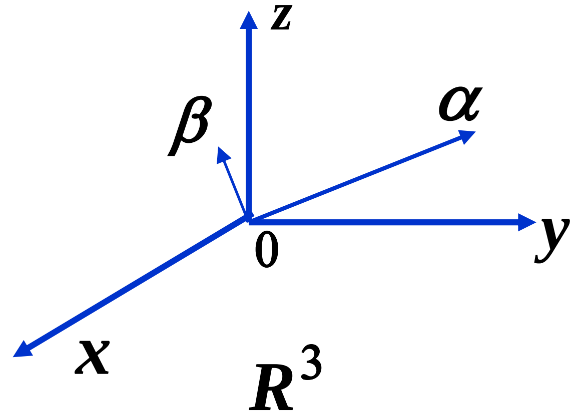
$\boldsymbol{R}^2$ 是实数对集, 每个 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^2$ 是 XOY 平面上的向量；

$\boldsymbol{R}^3$ 是三元有序实数组的集,

每个 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^3$ 是 $O-XYZ$ 空间中的向量.

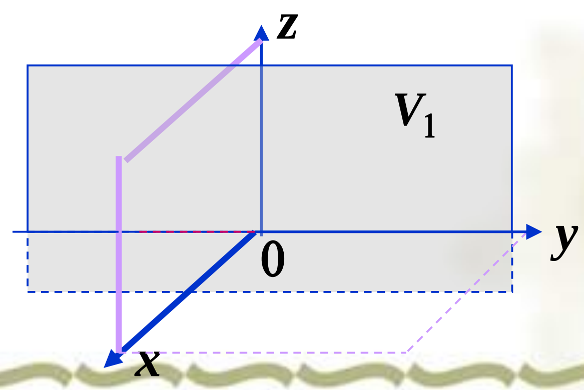






(2) $V_1=\{\ \boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_j\in\boldsymbol{R}, j=2,\cdots,n\ \}$ 是向量空间。

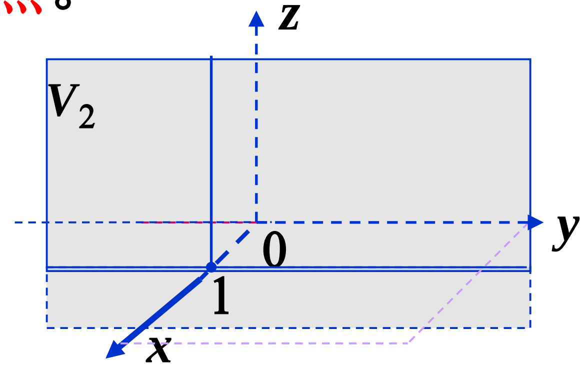
特别：$V_1=\{\ (0,x_2,x_3)\mid x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\ \}$ 是$Oxyz$ 中的yoz平面。



(3) $\boldsymbol{V}_2=\{\ x=(1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_j\in R,\ j=2,\cdots,n\ \}$ 不是向量空间。

特别：$\boldsymbol{V}_2=\{\ x=(1,x_2,x_3)\,|\,x_j\in R,\ j=2,3\ \}$ 是0xyz中的平面，

不通过坐标原点。



(4) $\boldsymbol{V}_3=\{x=(0,\cdots,0)\}$ 是向量空间.

例1 由n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 1)$所有可能的线性组合生成的向量集合

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\,|\,k_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,2,\cdots,m\}$$

是向量空间。

证明

$\because m\geq 1$, $\therefore \boldsymbol{\alpha}_1\in \boldsymbol{V}$，即$\boldsymbol{V}$非空.

(1)对$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{V},\exists k_j\in \boldsymbol{R}, l_j\in \boldsymbol{R}, j=1,2,\cdots,m,$使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

加法封闭

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{V}$$

(2)对$\forall \boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V},\forall k\in \boldsymbol{R}$

数乘封闭

$$\Rightarrow\ k\boldsymbol{\alpha}=(kk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(kk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(kk_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{V}$$

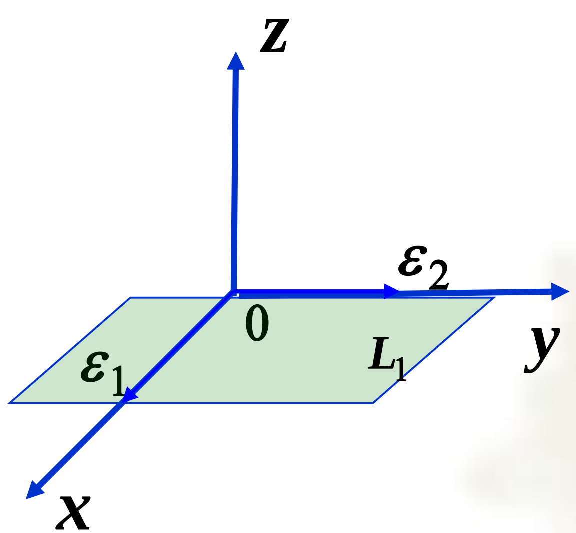
$\therefore \boldsymbol{V}$是向量空间。

定义 $V=\left\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid k_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,2,\cdots,m\right\}$

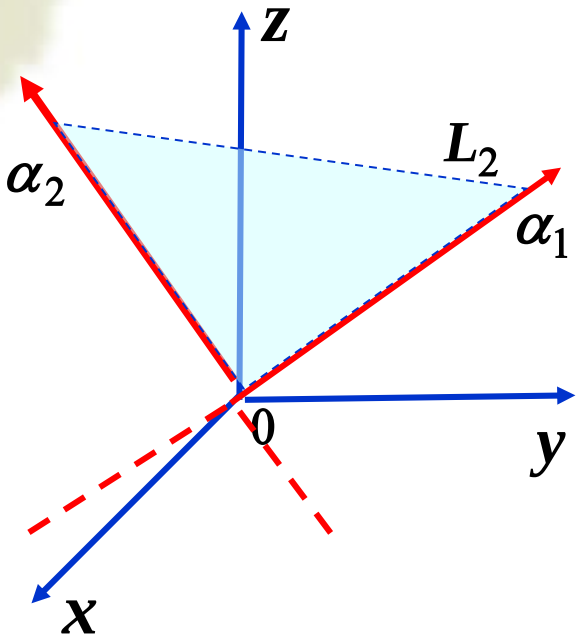
称为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$生成的向量空间，记为$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$或$span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

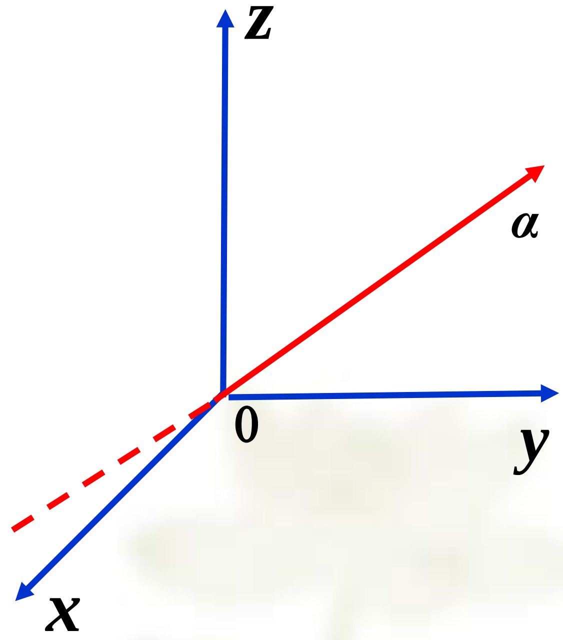
例 (1)$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，则由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$生成的向量空间为$L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\left\{\boldsymbol{x}=(k_1,k_2,0)\mid k_1,k_2\in\boldsymbol{R}\right\}$

此为$Oxyz$中的xoy平面上的向量全体.



(2)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in\boldsymbol{R}^3$, 且线性无关, $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$为由原点$O$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$决定的平面.





(3)设$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}^3$且$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, $L(\boldsymbol{\alpha})$为过原点O, 方向为$\boldsymbol{\alpha}$的直线.

(4) $\boldsymbol{R}^3=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$.

定义4.12 对两个n维向量集合V_1与V_2，若

(1) $V_1 \subset V_2$，

(2) V_1, V_2都是向量空间，

则称V_1是V_2的子空间.

例 (1)设$m < n, \boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{R}^n (i = 1, 2, \cdots, m)$，则

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \subset \boldsymbol{R}^n$是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间；

(2)$\boldsymbol{V}_1 = \{(0, x_2, \cdots, x_n) \mid x_j \in \boldsymbol{R}, j = 2, \cdots, n\} \subset \boldsymbol{R}^n$

是$\boldsymbol{R}^n$的子空间；

(3)设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \boldsymbol{R}^3$，且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

$\Rightarrow L(\boldsymbol{\alpha}_1)$是$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$的子空间，

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$是$\boldsymbol{R}^3$的子空间.

命题 **(例4.11)**

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

若 $V_1 \triangleq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $V_2 \triangleq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

则 $V_1 = V_2$

即：等价向量组生成相同的向量空间.

证明 欲证, 对$\forall \alpha \in V_1$, 有$\alpha \in V_2$.

$\because \alpha \in V_1$, $\therefore \alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.

又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示,

$\therefore \alpha$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示$\Rightarrow \alpha \in V_2 \Rightarrow V_1 \subset V_2$.

同理可证$V_2 \subset V_1$. $\therefore V_1 = V_2$. **证毕**

有必要寻求L（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$）的最小生成：

即在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中，生成$L$的最少向量.

根据向量组与极大无关组等价$\Rightarrow$

推论 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个极大无关组为

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}, r\geq 1$$

则 $$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$$

即$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的任一个极大无关组生成.

问题：对向量空间，可否寻求其最少生成？

需引出如下“基”概念。

2. 向量空间的基

定义4.13 设V为向量空间，若

(1)V中有r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，

且(2) V中任一向量α都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示；

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V$的一个基，称$r$是$V$的维数，

记作$\dim V=r$.

规定：只含零向量的向量空间V，$\dim V=0$.

注意：向量空间的维数与向量的维数是两个不同的概念

向量空间维数：其基所含的向量个数；

向 量 维 数：此向量所含的坐标个数；

确定V的基的一般方法：先通过观察找出V的一组向量，并证明其线性无关，再验证V中任一向量都可由该向量组线性表示，这组向量即为V的一组基。

例

（1）向量空间$\boldsymbol{R}^n$,取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,\cdots,0),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots 0,1)$$

$$\because \begin{cases} ① \ \boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\in\boldsymbol{R}^n \text{ 线性无关} \\ ② \ \forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n \ \Rightarrow \boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{cases}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的基，且 $\dim\boldsymbol{R}^n=n$

称 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维向量空间。

（2）向量空间$\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{x}=\left(0,x_2,x_3\right)\mid x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\right\}$

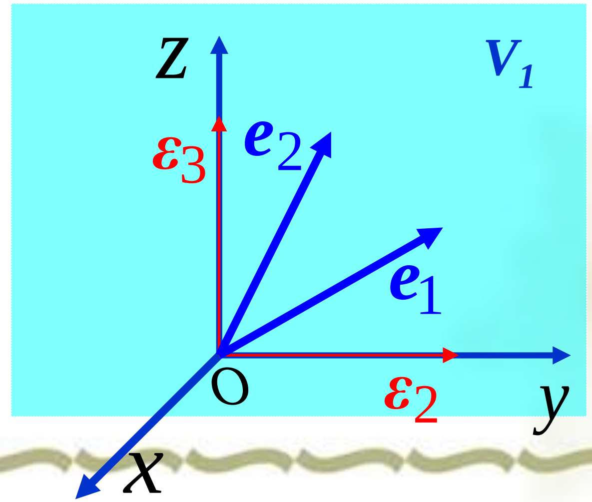
基（Ⅰ）: $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$

$$\because\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\ \text{线性无关}\\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}_1,\ \text{有}\ \ \boldsymbol{x}=x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}$$

$\therefore\dim\boldsymbol{V}_1=2$, $\boldsymbol{V}_1$ 是 yoz平面.

基（Ⅱ）：$\boldsymbol{e}_1=(0,\ 1,\ 0.5)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 0.5,\ 1)$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\ \text{线性无关}\\ \forall\boldsymbol{x}=\left(0,x_2,x_3\right),\\ \text{有}\ \ \boldsymbol{x}=\left(\frac{4}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3\right)\boldsymbol{e}_1+\left(-\frac{2}{3}x_2+\frac{4}{3}x_3\right)\boldsymbol{e}_2\end{cases}$$



命题 设V是由n维向量构成的r维向量空间，则

1. V的任意$r+1$个向量必定线性相关.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$\boldsymbol{V}$的一个基,

则对任意$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}\in\boldsymbol{V}$,

$\therefore$每个$\boldsymbol{\beta}_j$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示

$\therefore$向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$的秩$\leq$向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的秩$=r$.

$\therefore\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$线性相关. **证毕**

2. $\boldsymbol{V}$的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量组$\boldsymbol{V}$的一个极大无关组，从而$\dim\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$秩.

证明 $\because$ 基向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,

由命题1, $\boldsymbol{V}$中$r+1$个向量线性相关,

$\therefore$由极大无关组定义, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$\boldsymbol{V}$的一个极大无关组.

3. V中任意r个线性无关向量都可作为V的一个基.

证明 设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$\boldsymbol{V}$中任一组线性无关向量,

由命题1, 对$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关,

$\therefore\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性表示$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$\boldsymbol{V}$的基.

证毕

4. (例4.12) V可由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$所生成, 即
$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

证明 $\because\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$\boldsymbol{V}$的基,

$\therefore\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V},\exists$数$l_1,l_2,\cdots,l_r$, 使

$$\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

$\therefore\boldsymbol{\alpha}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\ \Rightarrow V\subset L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$.

反之，对$\forall \boldsymbol{\alpha} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$，∃数 $l_1, l_2, \cdots, l_r$，使

$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是$\boldsymbol{V}$ 的基，

$\therefore \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V} \Rightarrow L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \subset \boldsymbol{V}$.

故$\boldsymbol{V} = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ **证毕**

5. $\dim \boldsymbol{V} \le n$;

证明 $\because \boldsymbol{V}$中任意$n+1$向量线性相关，

$\therefore \boldsymbol{V}$秩$\le n \Rightarrow \dim \boldsymbol{V} \le n$. **证毕**

6. 当$\boldsymbol{V}_1$是$\boldsymbol{V}_2$子空间时，$\dim \boldsymbol{V}_1 \le \dim \boldsymbol{V}_2$.

证明 设$\dim \boldsymbol{V}_1 = r_1, \dim \boldsymbol{V}_2 = r_2$，且

$\boldsymbol{V}_1$基：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r_1}$；　$\boldsymbol{V}_2$基：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$

$\therefore \boldsymbol{\alpha}_j \in \boldsymbol{V}_1 \subset \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{\alpha}_j$可由组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$线性表示，$(j = 1, 2, \cdots, r_1$

$\Rightarrow$秩$r_1 \le$秩r_2，即$\dim \boldsymbol{V}_1 \le \dim \boldsymbol{V}_2$. **证毕**

3. 向量坐标

定义4.14 设向量空间V, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是基，则对$\alpha\in V$，必有 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$, $(x_1,x_2,\cdots,x_r\in \boldsymbol{R})$ 称有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$为α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$下的坐标。

注：坐标通常记做列向量，即 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$

例4.13 在向量空间$\boldsymbol{R}^3$中，给定两组基：

基Ⅰ：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$

基Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1)$

求$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)$分别在这两个基下的坐标。

解 (1) $\because (1,2,1)=\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3$

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}$在基（Ⅰ）下的坐标为 $(1,2,1)$.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$

$$=x_1(1,1,1)+x_2(1,1,-1)+x_3(1,-1,-1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2-x_3=2\\x_1-x_2-x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{1}{2}\\x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(II)下的坐标为 $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

注1：同一向量在不同基下的坐标一般不相同。

注2：向量的分量和其在某组基下的坐标一般不相同。

注3： $\because\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$,关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的线性表示

$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 是唯一的,

$\therefore$坐标（线性表示的系数）$x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是唯一的,

$\therefore\boldsymbol{V}$中向量 $\boldsymbol{\alpha}\xleftrightarrow{\text{一一对应}}(x_1,x_2,\cdots,x_r)$

二、正交基

1.正交基概念

定义4.15 设向量空间V中的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足条件

$$[\alpha_i,\alpha_j]=0,\qquad (i\neq j,\qquad i,j=1,2,\cdots,r)$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$两两正交，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V$的正交基.

进而, 若$\|\alpha_i\|=1(i=1,\cdots,r)$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是标准正交基.

简言之，

正交基$\Leftrightarrow$基中向量两两正交.

标准正交基$\Leftrightarrow$正交基中每个向量都是单位向量.

注意:两两正交的非零向量组,必定线性无关.

例 (1) $\boldsymbol{R}^n$中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是标准正交基.

(2) $\boldsymbol{V}=\{(0,x_2,x_3)\mid x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\}$

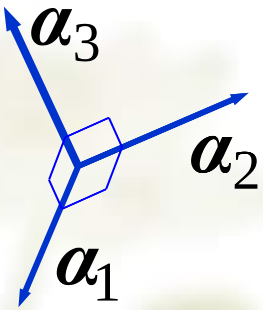
$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=0,\qquad \|\boldsymbol{\alpha}_1\|=\|\boldsymbol{\alpha}_2\|=1,$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{V}$的标准正交基。

分析：设向量空间 $\boldsymbol{V}$.

(1) 正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,



$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$,有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$,

两边与 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 作内积 $\Rightarrow$ $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i]=x_i[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]$

$$\Rightarrow x_i=\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i]}{[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]}=\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i]}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2},$$

形式简单！

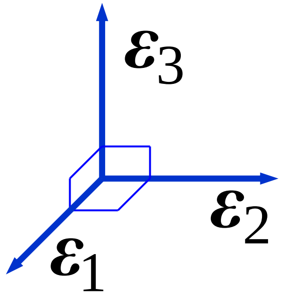
$$(i=1,2,\cdots,r)$$

(2) 标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$

$$\Rightarrow x_i = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha_i}],$$

$$= \|\boldsymbol{\alpha_i}\| \cdot \|\boldsymbol{\alpha}\| \cos < \boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha} >$$

$(i = 1, 2, \cdots, r)$ 形式更简单!



问题: 如何根据

向量空间的已知基,

求正交基,

或单位正交基?

3. 正交化方法 (施密特方法)

目的：由已知V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,

构造V的正交基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$.

(1) 令 $\beta_1=\alpha_1$;

(2) 令 $\beta_2=\alpha_2+k_{21}\beta_1$，使$[\beta_2,\ \beta_1]=0$

$$\Rightarrow k_{21}=-\frac{[\alpha_2,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]},\quad \text{即}\ \beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1$$

$\Rightarrow \beta_2\neq \boldsymbol{0}$(否则$\alpha_1,\alpha_2$线性相关)

(3)令$\beta_3=\alpha_3+k_{32}\beta_2+k_{31}\beta_1$,使$[\beta_3,\ \beta_2]=0$，$[\beta_3,\ \beta_1]=0$

$$\Rightarrow k_{32}=-\frac{[\alpha_3,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]},\qquad k_{31}=-\frac{[\alpha_3,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}$$

$$\text{即}\ \beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2-\frac{[\alpha_3,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1$$

$\Rightarrow \beta_3\neq \boldsymbol{0}$(否则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关)

(4)最后令$\boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r + k_{r,r-1}\boldsymbol{\beta}_{r-1} + \cdots + k_{r,1}\boldsymbol{\beta}_1$,

使$\left[\boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_j\right] = 0, (j = 1, \cdots, r-1)$

$$\Rightarrow k_{rj} = -\frac{\left[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_j\right]}{\left[\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j\right]}, \quad (j = 1, \cdots, r-1) \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_r \neq 0$$

由上述正交化步骤$\Rightarrow$

1°. $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$，两两正交，非零向量($\Rightarrow$线性无关)；

2°. $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 等价(可互相线性表示)，

从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是$\boldsymbol{V}$ 的一个正交基；

3°. 进一步令 $\gamma_i = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}, \ (i = 1, 2, \cdots, r)$,

从而 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ 是$\boldsymbol{V}$ 的一个标准正交基。

例4.14 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)$

求$\boldsymbol{V}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的

(1) 一个正交基,

(2) 一个标准正交基.

解 先证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个基.

（1）令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)$，$\quad\therefore[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]=2$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),$$

$$\therefore[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]=\frac{3}{2}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2-\frac{[\alpha_3,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1$$

$$=\alpha_3+\frac{1}{3}\beta_2+\frac{1}{2}\beta_1=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)\qquad \therefore[\beta_3\ \ \beta_3]=\frac{4}{3}$$

此 β_1,β_2,β_3 为所求正交基.

(2) $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

注意验证！

此 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为所求的标准正交基.

三、基变换与坐标变换

总结：对向量空间V:

(1) 基不唯一，但各个基所含线性无关的向量组个数相同；

(2) 不同基等价，即可互相线性表示；

(3) 同一个向量，在不同基下坐标不同。

问题: (1) 两个不同基之间的关系，即互相表示方法(基变换公式)；

(2) 同一个向量在不同基下，坐标之间的关系，即互相表示方法(坐标变换公式)。

1. 基变换与过渡矩阵

设r维向量空间V的两个基为

$$(\mathrm{I}):\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\qquad (\mathrm{II}):\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r;$$

(1) 基(II)可以由基(I)表示, 或用基(I)表示基(II):

设
$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1+c_{21}\alpha_2+\cdots+c_{r1}\alpha_r\\ \beta_2=c_{12}\alpha_1+c_{22}\alpha_2+\cdots+c_{r2}\alpha_r\\ \qquad\vdots\\ \beta_r=c_{1r}\alpha_1+c_{2r}\alpha_2+\cdots+c_{rr}\alpha_r\end{cases}$$

从基(I)到基(II)的基变换公式

矩阵

$$C=(c_{ij})_{r\times r}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix}$$

从基(I)到基(II)的过渡矩阵

$\therefore$基变换公式的矩阵形式:

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)C$$

注意： 上式中各向量$\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i$都看作单个量，其分量还不能代入运算，是形式上的矩阵相乘

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

或
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{r1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1r} & c_{2r} & \cdots & c_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r \end{pmatrix}$$

(2) **定理4.10：过渡矩阵 C 是可逆的。**

证明 （反证法）假设 $\det \boldsymbol{C} = 0$.

$\therefore$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$）

必有非零解。设此非零解为 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_r)^{\mathrm{T}}$,

即有 $\boldsymbol{Ck} = \boldsymbol{0}$. 考察线性组合

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_r = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{k}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{Ck} = \boldsymbol{0}$$

与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关矛盾.

$\therefore \det \boldsymbol{C} \neq 0$, 即 $\boldsymbol{C}$ 可逆。 **证毕**

(3) 由基 (II) 到基 (I) 的基变换公式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{C}$$

2. 坐标变换公式

设**V** 中向量$\boldsymbol{\alpha}$，在基（Ⅰ）下坐标为$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$

在基（Ⅱ）下坐标为$(y_1, y_2, \ldots, y_r)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{\beta}_r = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\mathbf{C}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基（Ⅰ）下表示唯一性 $\Rightarrow$ 坐标变换公式

$$\underset{（\mathrm{I}）}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}} = \boldsymbol{C} \underset{（\mathrm{II}）}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{（\mathrm{II}）}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}} = \boldsymbol{C}^{-1} \underset{（\mathrm{I}）}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}}$$

例4 **(2005.5 五 10分)**

已知三维向量空间$\boldsymbol{R}^3$的两个基

$$\text{(I)}\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)\end{cases}\qquad \text{(II)}\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,-2,-1)\\ \boldsymbol{\beta}_2=(-2,-3,-4)\\ \boldsymbol{\beta}_3=(-3,-4,-3)\end{cases}$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵;

(2) 求在两个基下有相同坐标的全部向量$\boldsymbol{\alpha}$.

解

(1)引入“中介基”:基本坐标向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+(-1)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}$$

$$\therefore(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}$$

同理$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\underbrace{(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}})}_{\boldsymbol{B}}$

$$\therefore(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}$$

代入$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{B}$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

所以基(I)到基(II)的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

又因为

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\qquad}_{\boldsymbol{B}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\boldsymbol{E}} \quad \underbrace{\qquad}_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}}$$

所以基(I)到基(II)的过渡矩阵为$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(I)和基(II)下的坐标均为$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$

则有$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

所以有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，即$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$

由于$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 通解为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = k \\ x_3 = -\dfrac{3}{4}k \end{cases}$

所以在基(I)和基(II)下有相同坐标的非零向量为

$$\boldsymbol{\alpha} = 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + k\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{3}{4}k\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{1}{4}k, 0, -\frac{7}{4}k\right) \ (k \neq 0)$$

例5 **(2009年 数一 4分)**

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为（ ）