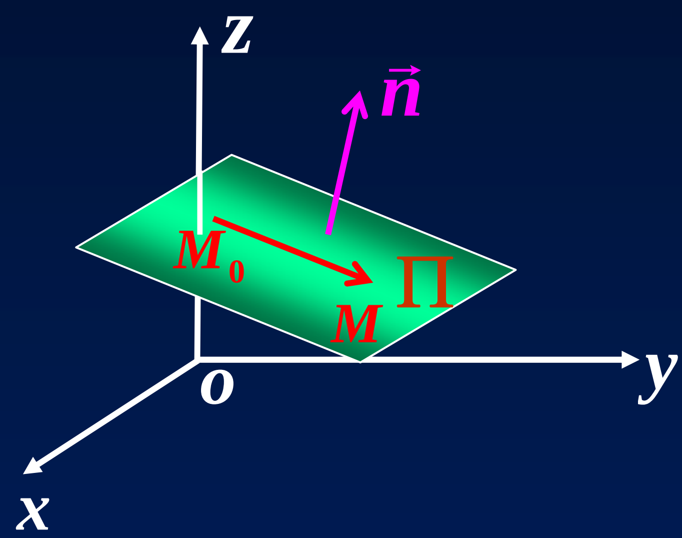
第三节 平面及其方程

- 一、平面方程
  1. 点法式方程
  2. 一般式方程
  3. 截距式方程
- 二、两平面的夹角
- 三、点到平面的距离

一、平面方程

设有平面Π，点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Pi$

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法向量.



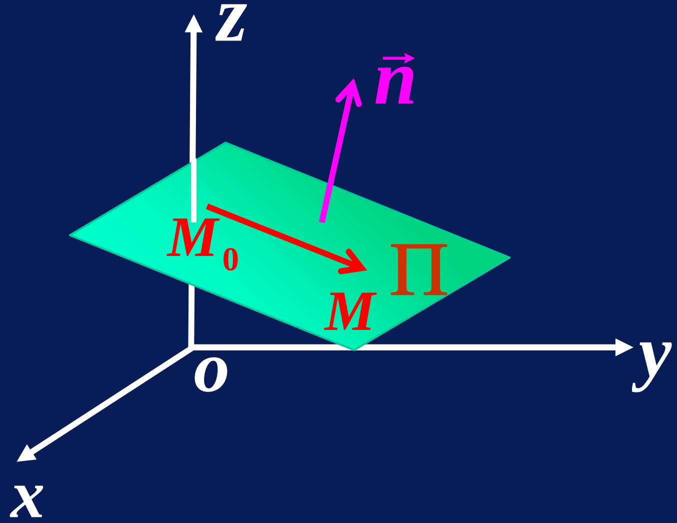
平面Π的法向量$\vec{n}$的特征：

① $\vec{n}\neq\vec{0}$

② $\vec{n}\perp\Pi$

设法向量：$\vec{n} = (A, B, C)$,

$(|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0)$



平面方程有三种表达形式：

1. 点法式

$\forall\ M(x, y, z) \in \Pi$

$\because\quad \overrightarrow{M_0M}$在平面$\Pi$上

$\therefore\quad \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$\because\quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\therefore \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (3.1)$$

—— 平面的点法式方程

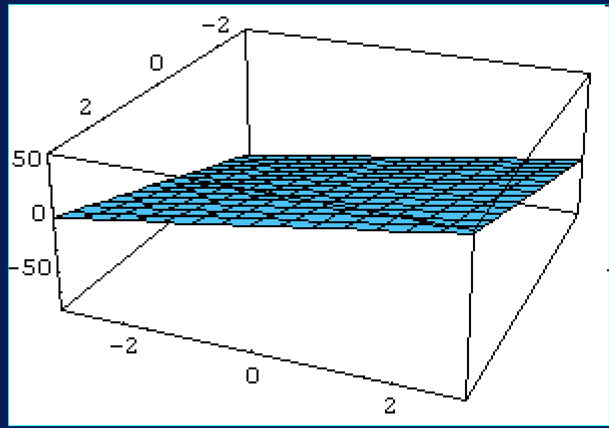
反之，若点M不在平面Π上，则 $\overrightarrow{M_0M}$与$\vec{n}$不垂直，$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}\neq 0$，即点$M$的坐标一定不满足(3.1). 所以(3.1)式是平面Π的方程.

注　确定平面方程的二 要素:

① 法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$;　(可不唯一)

② 平面上的一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

例1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$ 的平面方程.



解 (方法1) $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1),$

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

(方法2) 设$M(x,y,z)$是所求平面上的任意一点，

则 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

$\overrightarrow{AM}=(x-2,y+1,z-4)$

共面，故所求平面方程为

$$[\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

即 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$

亦即 $14x+9y-z-15=0.$

2. 一般式

法向量: $\vec{n} = (A, B, C)$

三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (3.2)$$

$\rightleftharpoons$ 平面方程 —— 平面的一般式方程

证 $(\longleftarrow)$ 由(3.1), 令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

则(3.1)可写成(3.2).

$(\longrightarrow)$ 任取定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$满足(3.2), 则

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

代入(3.2), 便可化为(3.1).

例2 一些特殊平面方程

(1) 平面Π 通过坐标原点；

由 $O(0,0,0)$满足(3.2)， 得 $D=0$,

$\therefore \quad \Pi: \ Ax+By+Cz=0$

(2) 平面Π平行于坐标轴；

若平面Π // x轴，则

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)\perp\vec{i}=(1,0,0)$

$\therefore \quad \vec{n}\cdot\vec{i}=0, \quad A=0$

$\therefore \quad \Pi: \ By+Cz+D=0$ (缺少x项)

即 $A=0,\ \begin{cases} D=0, & \text{平面通过}\,x\,\text{轴；} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}\,x\,\text{轴；} \end{cases}$

类似地，可讨论平面平行于y 轴、z 轴的情形.

(3) 平面Π平行于坐标面；

平面Π平行于xoy坐标面：

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)\ //\ \vec{k}=(0,0,1)$

$\therefore\quad A=B=0,\ \ \vec{n}=C\vec{k}=(0,0,C)\quad (C\neq 0)$

$\therefore\quad \Pi:\ Cz+D=0,$ 或 $z=c.$

类似地，可讨论平面平行于其他坐标面的情形.

例3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 (方法1) 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

法向量： $\vec{n}=(A,B,C)$

由平面过原点知 $D=0$,

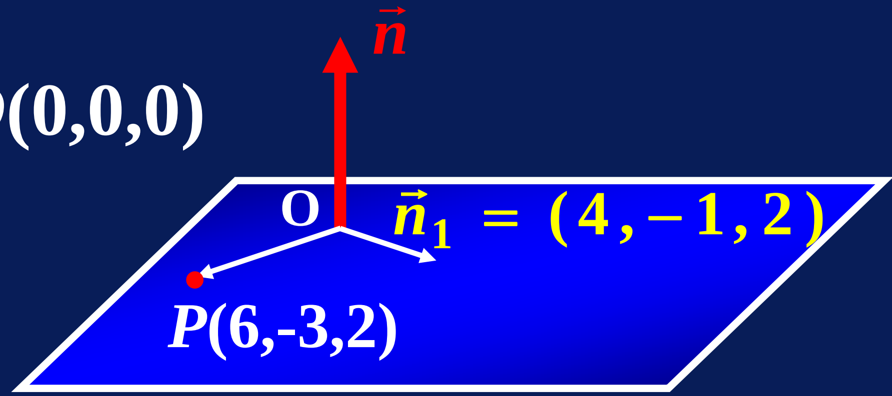
由平面过点$(6,-3,2)$知 $6A-3B+2C=0$

$\because \quad \vec{n}\perp\vec{n}_1=(4,-1,2) \quad \therefore \ 4A-B+2C=0$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

(方法2)　点$P(6,-3,2)$，$O(0,0,0)$



法向量：

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \overrightarrow{OP}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (4,4,-6) = 2(2,2,-3)$$

所求平面方程：$2\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)-3\cdot(z-0)=0$

即　$2x+2y-3z=0$

例4 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 设所求平面的法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$;

依题设，知 $\vec{n}\perp\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}\perp\vec{n}_2=(3,2,-12)$

故可取法向量：

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=(10,15,5),$$

所求平面方程为：

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

3. 截距式

例5 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$），求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0,$

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

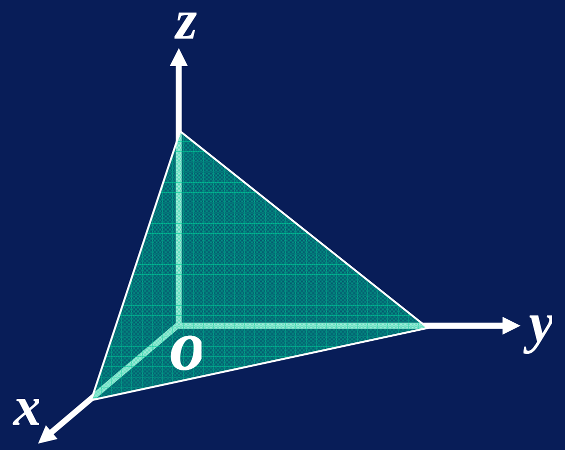
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ —— 平面的截距式方程

x轴上截距　y轴上截距　z轴上截距

例6 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$\because V=1,\quad \therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|abc|=1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件） $\dfrac{1/a}{6}=\dfrac{1/b}{1}=\dfrac{1/c}{6},$

目录 上页 下页 例题 继续

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$, 令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{6t},\quad b=\dfrac{1}{t},\quad c=\dfrac{1}{6t},$ 代入体积式

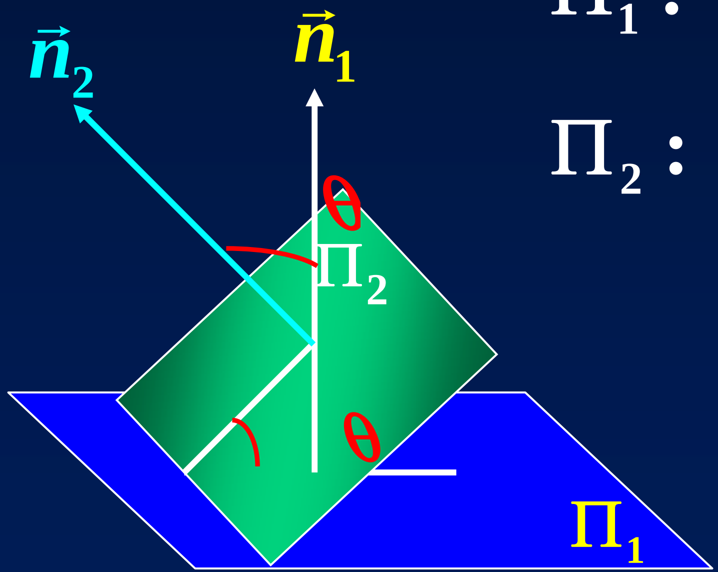
$\therefore 1=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\dfrac{1}{6t}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{1}{6t}\right| \Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{6},$

$\therefore a=\pm1,\quad b=\pm6,\quad c=\pm1,$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm6.$

二、两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

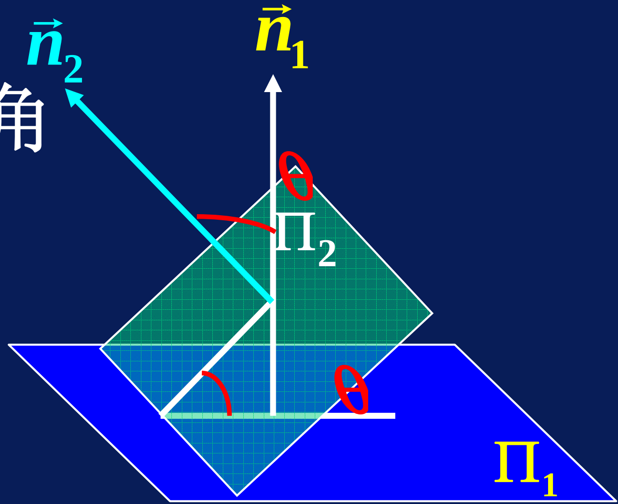
$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

$$\theta=\begin{cases}(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2), & (\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)\text{为锐角}\\ \pi-(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2), & (\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)\text{为钝角}\end{cases}$$

$$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$



按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta=\left|\cos(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)\right|$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

—— 两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 \,//\, \Pi_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

(3) Π_1 与 Π_2重合 $\iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}.$

事实上，若Π_1与Π_2重合，则 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = k$

$$
\begin{aligned}
0 &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \\
&= k(A_2x + B_2y + C_2z) + D_1 \\
&= k(-D_2) + D_1
\end{aligned}
\qquad \therefore \quad \frac{D_1}{D_2} = k.
$$

例7 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $\cos\theta=\dfrac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $2x-y+z-1=0,\quad -4x+2y-2z-1=0$

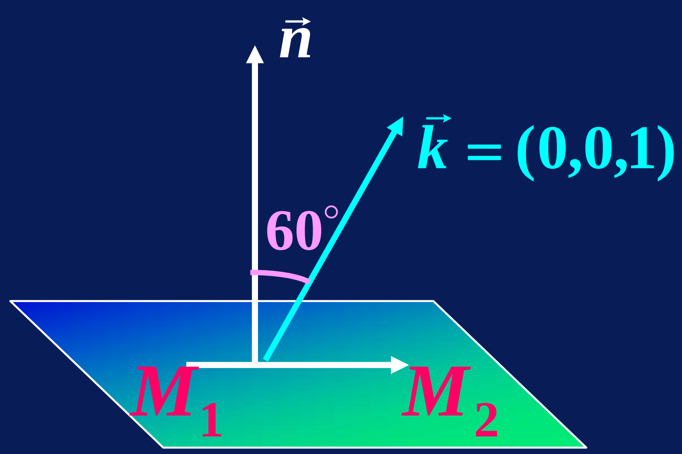
$$\because\quad \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}\neq\frac{D_1}{D_2}=\frac{-1}{-1}=1,$$

$\therefore$ 两平面平行但不重合.

(3) $2x-y-z+1=0,\quad -4x+2y+2z-2=0$

$$\because\quad \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面重合

例8 求过点 $M_1(0,-1,0)$, $M_2(0,0,1)$, 且与 xoy 面成 60° 角的平面.



解 所求平面的法向量为:

$$\vec{n}=(A,B,C),$$

$\because$ $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}=(0,1,1)$

$\therefore$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0,$ $B+C=0$

又 $\because$ $(\widehat{\vec{n},\vec{k}})=60^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\dfrac{C}{|\vec{n}|}$

即 $C=\frac{1}{2}|\vec{n}|$，从而 $B=-\frac{1}{2}|\vec{n}|$

再由 $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$， 得 $A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{n}|$

$\therefore$ 所求平面方程为：

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{n}|x-\frac{1}{2}|\vec{n}|y+\frac{1}{2}|\vec{n}|(z-1)=0 \quad (\because |\vec{n}|\neq 0)$$

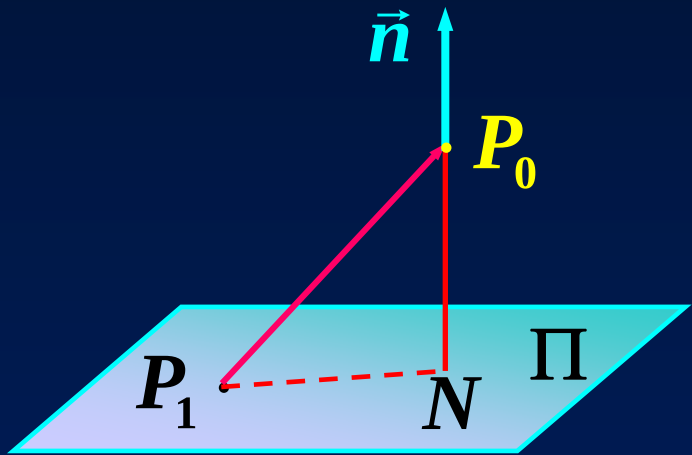
即 $\sqrt{2}x-y+z-1=0$

或 $-\sqrt{2}x-y+z-1=0$

三、点到平面的距离

例9 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = \left|\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore \quad \mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\text{故} \quad d = \left| \mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} \right|$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

—— 点到平面距离公式

例10 在z轴上求与两平面

$$\Pi_1: \quad 12x+9y+20z-19=0$$

$$\Pi_2: \quad 16x-12y+15z-9=0$$

等距离的点.

解 设所求点为$P(0,0,z)$, 则

$$\frac{|12\cdot 0+9\cdot 0+20\cdot z-19|}{\cancel{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}}=\frac{|16\cdot 0-12\cdot 0+15\cdot z-9|}{\cancel{\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}}}$$

$$\therefore \quad |20z-19|=|15z-9|, \quad 20z-19=\pm(15z-9)$$

$z=2$或$z=\dfrac{4}{5}$, 故所求点为: $(0,0,2)$或$(0,0,\dfrac{4}{5})$.

内容小结

平面的方程 $\begin{cases} \text{点法式方程.} \\ \text{一般方程.} \\ \text{截距式方程.} \end{cases}$

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

两平面的夹角.（注意两平面的位置特征）

点到平面的距离公式.

思考题

若平面 $x + ky - 2z = 0$ 与平面 $2x - 3y + z = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $k = ?$

思考题解答

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1\times 2+k\times(-3)-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-3k}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}\quad\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

备用题

例3-1 求过 x 轴和点 $M(4,1,-2)$ 的平面方程 .

解 (方法1) 因为所求 $\boxed{\text{平面过 } x \text{ 轴}}$,

故可设平面的一般式方程为

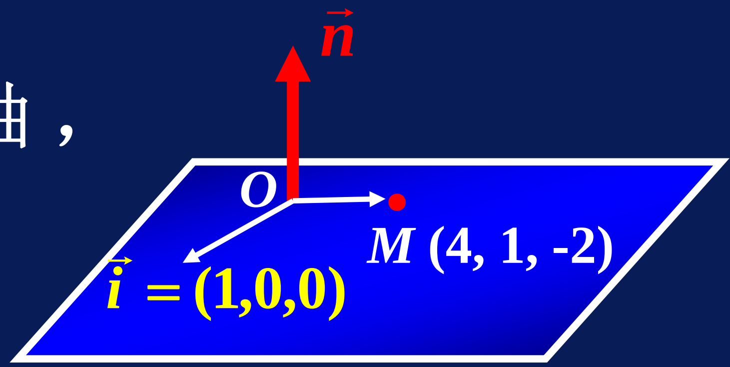
$$By + Cz = 0 \qquad (1)$$

又 $\because$ 点 $M(4,1,-2)$ 在该平面上

$$\therefore \quad B\cdot 1 + C\cdot(-2) = 0, \qquad B = 2C$$

代入(1), 消去 C 得所求平面方程 $2y + z = 0.$

(方法2) 因为所求平面过 x 轴，



∴ 所求平面的法向量 $\vec{n}\perp\vec{i}$

又∵ 原点$O(0, 0, 0)$ 在该平面上.

$$\therefore\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{OM}=(4,1,-2)$$

故可取 $\vec{n}=\overrightarrow{OM}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-2,-1)$

所求平面的点法式为

$$0\cdot(x-4)+(-2)\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z+2)=0$$

即 $2y+z=0.$

例6-1 求过点$A(6,3,0)$,且在三个坐标轴上的截距之比为$a:b:c=1:3:2$的平面方程.

解 依题设，所求平面的截距式方程为

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{3k}+\frac{z}{2k}=1$$

$\because$ 所求平面过点 $A(6, 3, 0)$

$\therefore$ $\dfrac{6}{k}+\dfrac{3}{3k}+\dfrac{0}{2k}=1,$ 即 $k=7.$

故所求平面方程为 $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{21}+\dfrac{z}{14}=1.$

例8-1 设平面 $x+\lambda y+2z-4=0$

和 $2x+y+z+3=0$

的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，试求常数 λ.

解 由两平面夹角余弦公式，得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|1\times 2+\lambda\times 1+2\times 1|}{\sqrt{1+\lambda^2+4}\cdot\sqrt{4+1+1}}$$

化简得 $\lambda^2-16\lambda-17=0$

$\therefore\quad \lambda=-1$ 或 17.