§3 函数展开成幂级数

两类问题：

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}}$ 函数 $S(x)$

第五节

函数展开成幂级数

- 一、函数的幂级数展开式

  ——泰勒 (Taylor) 级数

- 二、函数展开成幂级数的充分必要条件

- 三、函数展开成幂级数的方法

一、函数的幂级数展开式

—— 泰勒 (Taylor) 展开式

1. 函数展开成幂级数

定义 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ x\in I$ (I为区间),

则称 $f(x)$ 在 I 上可以展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数 .

问题: (1) 如果能展开, a_n 是什么?

(2) 展开式是否唯一?

(3) 在什么条件下才能展开成幂级数?

2. a_n 的确定、展开式的唯一性

定理11.13 若在邻域$U(x_0,R)$ 内任意阶可导的函数 $f(x)$ 能展成幂级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0,R)$$

则其系数

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ (n=0,1,2,\cdots),$$

且展开式是唯一的.

证 若 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

$x\in U(x_0,R)$ $\qquad a_0=f(x_0)$

则 $f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$

$\cdots\cdots$ $\qquad a_1=f'(x_0)$

$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots3\cdot2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$

$\cdots\cdots$

令 $x=x_0$, 即得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

系数是唯一的, $\therefore$ $f(x)$的展开式是唯一的.

3. 泰勒级数

定义11.3 设$f(x)$在x_0处具有任意阶导数，则称

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}(x-x_0)^n+\cdots$$

为$f(x)$在x_0处的 泰勒级数.

泰勒系数

麦克劳林级数 $(x_0=0)$:

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

4. 泰勒级数基本问题

(1) 构造 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

(2) 收敛域 ?

(3) 在收敛域 I 内，级数是否一定收敛到 $f(x)$?

即 $$f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in I$$

答：不一定.

反例： $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 点任意可导，且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore \quad f(x)$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$

该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，且其和函数 $S(x)\equiv 0.$

由此可见，除 $x=0$ 外，$f(x)$ 的麦克劳林级数处处不收敛于 $f(x)$.

二、函数展开成幂级数的充分必要条件

定理11.14 设 $f(x)$ 在区间 I 上具有各阶导数，则 $f(x)$ 在 I 上能展开成泰勒级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in I$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad (\forall\ x\in I)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在x，x_0之间）

——— $f(x)$的泰勒公式中的余项

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

证 由泰勒公式，得

泰勒多项式

$$f(x)=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}+R_n(x)$$

$$=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

必要性 $(\Rightarrow)$ 设 $f(x)$ 在 I 上能展开为泰勒级数，

即 $$f(x)=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}\quad x\in I$$

泰勒级数

则 $$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x),\quad x\in I$$

而 $R_n(x) = f(x) - s_{n+1}(x)$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = 0 \quad (\forall x \in I)$

充分性 $(\Leftarrow)$ 若 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$

$\because \quad f(x) - S_{n+1}(x) = R_n(x)$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} [f(x) - S_{n+1}(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,

即 $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x), \quad x \in I$

$\therefore$ $f(x)$的泰勒级数在区间 I上收敛于 $f(x)$.

三、函数展开成幂级数的方法

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 用已有展开式} \end{cases}$

1. 直接展开法

$f(x)$ 展开成 x 的幂级数的 步骤:

1° 求 $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$;

2° 写出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 并求收敛半径 R ;

3° 判断 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$? $x \in (-R, R)$

例1 将 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 1° $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ $(n=0,1,\cdots)$,

2° 写出 e^x 的麦克劳林级数

$$e^x \sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

即 $$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

收敛区间：$(-\infty,+\infty)$

3° $e^x \overset{?}{=} S(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$\because$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

(ξ介于x与0之间)

$$< e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

收敛级数的

通项$u_n \to 0$

(当$n \to \infty$时)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例2 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 1° $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$,

$$\therefore\quad \begin{aligned} &f^{(2k)}(0)=0, \\ &f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k, \end{aligned} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases} 0, & n=2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n=2k+1 \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

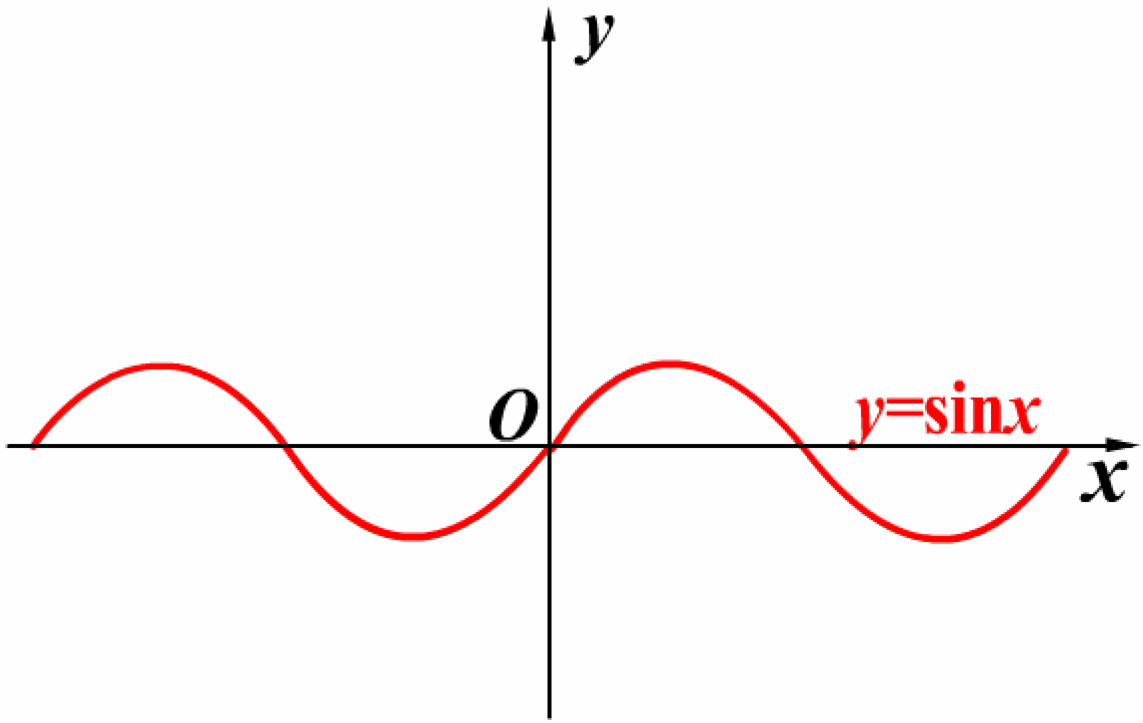
2° $\sin x \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, 收敛半径 $R=+\infty$.

3° $\forall x \in (-\infty,+\infty)$，余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{\sin[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}]}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

$$< \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)}$$


y
O
y=sinx
x

例3 将 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数

(m: 任意常数) .

解 1° $f(0)=1,\ f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1)\,,$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,,\ \cdots$$

2° 麦克劳林级数

$$F(x)\stackrel{\Delta}{=}1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1 \qquad x\in(-1,1)$$

3° 设和函数为 $F(x),\quad -1<x<1$

下证：$F(x)=(1+x)^{m}$.

$$\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$F'(x)=m\Big[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^{n}+\cdots\Big]$$

$$xF'(x)=m\Big[x+\frac{m-1}{1}x^{2}+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n}+\cdots\Big]$$

$$(1+x)F'(x)=m\Big[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots\Big]=mF(x)$$

$$(1+x)F'(x)=mF(x),\qquad x\in(-1,1)$$

$$F(0)=1$$

$$(1+x)^{-m}\{F'(x)-m(1+x)^{-1}F(x)\}=0$$

$$(1+x)^{-m}F'(x)-m(1+x)^{-m-1}F(x)=0$$

$$[(1+x)^{-m}F(x)]'=0,$$

$(1+x)^{-m}F(x)=C$，由 $F(0)=1$，得 $C=1$.

$$\therefore\quad F(x)=(1+x)^m,\quad x\in(-1,1)$$

目录 上页 下页 返回 结束

二项展开式:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

注 1° 在 $x = \pm 1$ 处收敛性与 m 的取值有关 .

2° m 为正整数时, 得二项式定理:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^m$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

3° $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

$$(-1 \le x \le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$

$$(-1 < x \le 1)$$

2. 间接展开法

根据展开式的唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法, 求展开式.

例4 将 $\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

逐项求导:

$$\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例5 将 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x,\quad |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad -1<x\le 1.$$

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\qquad -1<x\le 1}$$

注 取$x=1$得, $\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}+\cdots$

例6 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 令 $t=x-\frac{\pi}{4}$

则 $x=t+\frac{\pi}{4}$

$$\sin x=\sin(\frac{\pi}{4}+t)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos t+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots]$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

展开形式：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{\pi}{4})^n,$$

a_n与x无关

注 将$f(x)$展开成 $\varphi(x)$的幂级数:

展开形式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\varphi(x)]^n$$

思路: 令$t=\varphi(x)$, 解出$x=\varphi^{-1}(t)$

代入 $f(x)=f[\varphi^{-1}(t)]\ \overset{\Delta}{=}\ g(t)$

再将 $g(t)$展开成 t的幂级数,

变量代回即可.

例7 将 $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数 .

解 $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

$$= -\frac{1}{3\left(1-\frac{x+4}{3}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{x+4}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n \qquad |x+4|<2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

$$(-6 < x < -2)$$

例8 将 arcsin x 展开成 x 的幂级数

解 $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

取二项展开式中 $m=-\dfrac{1}{2}$，得

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\,!}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3\,!}x^3+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{3!!}{4!!}x^2-\frac{5!!}{6!!}x^3+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1,1)$$

$-x^2$ 代替 x 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1,1)$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x \in [-1,1]$$

若 $0<a<b,$

则 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+1}{b+1}$

事实上，$x=1$： $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}$

$$u_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $v_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，则

$$v_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{v_n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$v_n^2<\frac{1}{2n+1},\quad v_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

类似224页 1 (10) (11)

$$\because \quad u_n = v_n \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 故 $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ 收敛

$x=-1$： $-[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}]$ 收敛

$\therefore$ 展开式成立的范围是 $x \in [-1,1]$.

例9 将$f(x)=\ln\dfrac{x}{3-2x}$展成$x-1$的幂级数．

解 $f(x)=\underline{\ln x-\ln(3-2x)}$

$=\underline{\ln[1+(x-1)]-\ln[1-2(x-1)]}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[-2(x-1)]^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n}(x-1)^n\qquad\left(|x-1|<\frac{1}{2}\right)$$

$x=\dfrac{1}{2}$时 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$收敛，$x=\dfrac{3}{2}$时发散．

$x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

拆

配

展

范围

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 用幂级数性质及已有展开式.

2. 常用函数的幂级数展开式

1° $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,\quad x \in (-\infty, +\infty)$

2° $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,\quad x \in (-1, 1)$

3° $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$

$x \in (-1, +1]$

4° $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

5° $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

6° $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ $x \in (-1, 1)$

思考题

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同 ?

提示 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数 ?

提示 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

备用题

例6-1 将 $f(x)=\ln x$展开为$\dfrac{x-1}{x+1}$的幂级数.

解 令 $t=\dfrac{x-1}{x+1}$, 则 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$

$$\therefore \quad f(x)=\ln x=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}t^n,\quad t\in(-1,1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}t^{2k-1},\quad t\in(-1,1)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n-1},\quad x\in(0,+\infty)$$

$$-1<t<1$$

$$0<1+t<2$$

$$0<x=\frac{1+t}{1-t}<+\infty$$

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

例5-1 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$在$x=0$处展为幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$2+x-3x^2$
$=(1-x)(2+3x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\tfrac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\tfrac{3}{2}x)^n\quad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

故 $$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\tfrac{3}{2}x)^n$$

$$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\tfrac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

例7-1 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$(\,|x-1|<2\,)$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3\,)$$

例8-1　将函数展开成 x 的幂级数:

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

问题:

$f(x)$ 的

导数

积分

易展?

解　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 故

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1,1]}$$

目录　上页　下页　返回　结束

例8-2 将 $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

展成 x 的幂级数 .

解 $f'(x) = (\arctan x + \cancel{\dfrac{x}{1+x^2}})$

$$\cancel{- \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \arctan x$$

不易积分,
试求导数,
再展开.

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (\,|x| < 1\,)$$

导函数仍
不易展,再
求导.

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$f'(0) = \arctan 0 = 0$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$x = \pm 1$ 处, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ 收敛.