第七节

二阶常系数齐次线性微分方程

- 一、常系数线性微分方程的标准形式
- 二、二阶常系数齐次线性方程解法
- 三、 n阶常系数齐次线性方程解法

一、常系数线性微分方程的标准形式

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_n y=f(x)$$

其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$均为实常数 .

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y''+p\,y'+q\,y=0 \qquad (7.1)$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y''+p\,y'+q\,y=f(x) \qquad (7.2)$$

二、二阶常系数齐次线性方程解法

$$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (7.1)$$

其中 p,q 均为实常数.

欧拉待定指数法(或特征方程法):

设 $y = e^{rx}$ (r为待定常数), 将其代入方程(7.1), 得

$$L[e^{rx}] = (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0 \quad \because e^{rx} \neq 0,$$

$\therefore \quad y = e^{rx}$是方程(7.1)的解

$\Leftrightarrow$ r是方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根.

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (7.3)$$

特征方程

$$F(r) = r^2 + pr + q$$

特征多项式

特征根: $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

1. 当 $\Delta = p^2 - 4q > 0$ 时,

(7.3)有两个不相等的实根:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

从而得到方程 (7.1)的两个解:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x},$$

$$\because \quad \frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{常数}$$

$\therefore \quad y_1$ 与 y_2 线性无关

故齐次线性方程(7.1)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x};$$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 当 $\Delta = p^2 - 4q = 0$ 时，

(7.3) 有两个相等的实根： $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$,

得(7.1)的一特解为： $y_1 = e^{r_1 x}$,

设另一特解为： $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$,

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入方程(7.1)并化简

$$L[y_2] = L[ue^{r_1 x}]$$

$$= e^{r_1 x}[u'' + \underbrace{(2r_1 + p)}_{0}u' + \underbrace{(r_1^2 + pr_1 + q)}_{0}u] = 0,$$

$\because$ r是特征根，且是重根

目录 上页 下页 返回 结束

$$\therefore \quad F(r_1) = r_1^2 + pr_1 + q = 0$$

$$F'(r_1) = 2r_1 + p = 0$$

从而 $u'' = 0$, 取 $u(x) = x$,

则 $y_2 = xe^{r_1 x}$,

得齐次线性方程(7.1)的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x};$$

3. 当 $\Delta = p^2 - 4q < 0$ 时，

(7.3)有一对共轭复根:

$$r_1 = \alpha + i\beta,\quad r_2 = \alpha - i\beta,\quad (\beta \neq 0)$$

得(7.1)的两个复值特解:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x},$$

由欧拉公式，得

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

重新组合： $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

由齐次线性方程解的叠 加原理，知

$\bar{y}_1, \bar{y}_2$ 仍是方程 (7.1)的解. 又因

$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \cot\beta x \neq$ 常数，$\therefore$ $\bar{y}_1$ 与 $\bar{y}_2$ 线性无关

故齐次线性方程(7.1)的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

例1 通解为 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$的微分方程是 $\underline{\quad y'' - 4y' + 3y = 0 \quad}$.

解 特征根：$r_1 = 1,\ r_2 = 3$

特征方程：$(r-1)(r-3) = 0,$

即 $r^2 - 4r + 3 = 0.$

$\therefore$ 所求微分方程是：$y'' - 4y' + 3y = 0$

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数齐次线性微分方程求通解的一般步骤:

（1）写出相应的特征方程; $r^2 + pr + q = 0$

（2）求出特征根; r_1, r_2

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

特征根的情况	通解的表达式
单根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;
重根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

定义 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

例2 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,

解得 $r_1 = r_2 = -2$,

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

例3 求方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$,

解得 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$,

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

三、n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

其中 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为实常数 .

特征方程为 $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是 k 重根 r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是 k 重共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

注意

n次代数方程有n个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

例4 求解 $y''' - 6y'' + (9 + a^2)y' = 0$,

其中常数 $a \geq 0$.

解 特征方程为 $r^3 - 6r^2 + (9 + a^2)r = 0$

$$r[r^2 - 6r + (9 + a^2)] = 0$$

特征根： $r_1 = 0$，$r_{2,3} = 3 \pm a i$

(1) 当$a = 0$ 时，特征根： $r_1 = 0$，$r_{2,3} = 3$

所求通解为 $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x}$.

(C_1, C_2, C_3为任意常数)

(2) 当$a > 0$ 时，

特征根： $r_1 = 0$

$r_2 = 3 - a i$

$r_3 = 3 + a i$

所求通解为：

$$y = C_1 + (C_2 \cos ax + C_3 \sin ax)e^{3x}$$

(C_1, C_2, C_3为任意常数)

例5 求方程

$$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为

$$r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

例6 设函数 $f(u)$具有二阶连续导数 ,而

$z = f(e^x \sin y)$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$$

求$f(u)$.

解 令$u = e^x \sin y$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y$$

目 录 上 页 下 页 例6-1 继 续

代入到方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{2x}z$$

有 $$f''(u)e^{2x}=e^{2x}f(u)$$

即 $$f''(u)-f(u)=0$$

对应的特征方程为

$$r^2-1=0,\text{ 即 } r_{1,2}=\pm 1$$

故所求函数为

$$f(u)=C_1e^{u}+C_2e^{-u}\quad (C_1,C_2\text{为任意常数})$$

内容小结

二阶常系数齐次微分方程求通解的一般步骤:

（1）写出相应的特征方程;

（2）求出特征根;

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

(见下表)

目录 上页 下页 返回 结束

齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

特征根情况	通解的表达式
单根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
重根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
复根 $r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

思考题

求微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ 的通解.

思考题解答

(方法1) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$

属于 $y'' = f(y, y')$ 型，

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - (p)^2 = y^2 \ln y$

即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - \dfrac{1}{y}\cdot p = (y\ln y)\cdot p^{-1}$ —— 关于p的$\alpha = -1$的伯努利方程

令 $z = p^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - \frac{2}{y} \cdot z = 2y \ln y$$

$$p^2 = z = e^{\int \frac{2}{y} \mathrm{d}y} \left[\int (2y \ln y) e^{-\int \frac{2}{y} \mathrm{d}y} \mathrm{d}y + C_1 \right]$$

$$= y^2 \left(2 \int \frac{\ln y}{y} \mathrm{d}y + C_1 \right)$$

$$= y^2 (\ln^2 y + C_1)$$

⋯ ⋯ 太繁！

(方法2) $\because y \neq 0$, $\therefore$ 原方程化为 $\dfrac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \ln y$,

$\because$ $\dfrac{yy'' - (y')^2}{y^2} = (\dfrac{y'}{y})'$, 而 $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$,

$\therefore$ 原方程又可写为 $(\ln y)'' = \ln y$,

令 $z = \ln y$ 则 $z'' - z = 0$, 特征根 $r = \pm 1$

通解 $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ $\therefore \ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

备用题

例1-1 求微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$的通解 .

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2 + r - 2 = 0$$

特征根 $r_1 = -2$, $r_2 = 1$ 为两个不同的特征根

所以方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$$

例3-1 求微分方程 $y''+25y=0$满足初始条件

$y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$的特解

解 特征方程为 $r^2+25=0,$

特征根 $r_{1,2}=\pm 5i$为一对共轭复根 ,

故方程的通解为 $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$

由 $y|_{x=0}=2$ 得 $C_1=2,$

而 $y'=-5C_1\sin 5x+5C_2\cos 5x$ 再由 $y'|_{x=0}=5,$

得 $C_2=1,$ 故所求方程特解为

$$y=2\cos 5x+\sin 5x$$

例4-1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\lambda x=0\ (\lambda\text{为常数})$

的通解

解 特征方程为 $r^2+\lambda=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$.

下面分三种情况讨论

(1)若 $\lambda<0$，

则 $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$ 为两个不相等的实根

方程的通解为 $x=C_1e^{\sqrt{-\lambda}t}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}t}$

(2) 若 $\lambda = 0$,

则 $r = 0$为二重实根

方程的通解为 $x = C_1 + C_2 t$

(3) 若 $\lambda > 0$,

则 $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i$为一对共轭复根

方程的通解为

$$x = C_1 \cos\sqrt{\lambda} t + C_2 \sin\sqrt{\lambda} t$$

例5-1 求微分方程 $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 5y^{(2)} = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5 - 4r^4 + 5r^3 = 0$

即 $r^3(r^2 - 4r + 5) = 0$

特征根为$r_1 = r_2 = r_3 = 0$(三重根)

$$r_{4,5} = 2 \pm i$$

方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{2x}\left(C_4 \cos x + C_5 \sin x\right)$$

例5-2 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^{x}$ 的3阶常系数齐次线性微分 方程是（）.

$(A)\quad y''' - y'' - y' + y = 0$

√ $(B)\quad y''' + y'' - y' - y = 0$

$(C)\quad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$(D)\quad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

解(方法1) 由题设知 $r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1$ 为3阶常系数齐次方程的三个 特征根，

故其对应的特征方程为 $(r+1)^2(r-1) = 0$

即 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

故所求方程为 $y''' + y'' - y' - y = 0$

所以选 (B).

(方法2) 由题设可得齐次方程的 通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x}$$

求出 y'，y''，y'''有:

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x}$$

$$y'' = C_1 e^{-x} - 2C_2 x e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x}$$

$$y''' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 x e^{-x} - C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x}$$

消去常数 C_1, C_2, C_3 得 $y''' + y'' - y' - y = 0$

例6-1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和函数 .

解 令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

$$S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$$

$$S^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}\overset{m=n-1}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m}}{(4m)!}=S(x)$$

于是有 $S^{(4)}(x)-S(x)=0$

且 $S(0)=1,\ S'(0)=S''(0)=S'''(0)=0$

解得 $S(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

代入初始条件得

$$C_1=C_2=\frac{1}{4},\ C_3=\frac{1}{2},\ C_4=0$$

故 $$S(x)=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})+\frac{1}{2}\cos x$$

即 $$\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x}+2\cos x)$$

$$(-\infty<x<\infty)$$