第四节
重积分的应用

- 一、几何应用
- 二、物理应用

回顾

利用定积分可求的量U具备的特征：

(1) U是与一个变量x的变化区间$[a, b]$有关的量；

(2) U关于区间$[a, b]$具有可加性；

(3) 部分量ΔU_i的近似值可表示为$f(\xi_i)\Delta x_i$；

类似地，能用重积分解决的实际问题的**特点**：

所求量是 $\begin{cases} \text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性} \end{cases}$

用重积分解决问题的方法:

- 用微元分析法 (元素法)
- 从重积分定义出发 建立积分式

解题要点:

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

一、几何应用

1. 立体体积的计算

(1) 曲顶柱体的体积

由二重积分的几何意义知，以曲面$z = f(x, y)$为顶，以xOy面上的闭区域D为底的曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 空间立体的体积

占有空间有界域 Ω 的立体的体积为

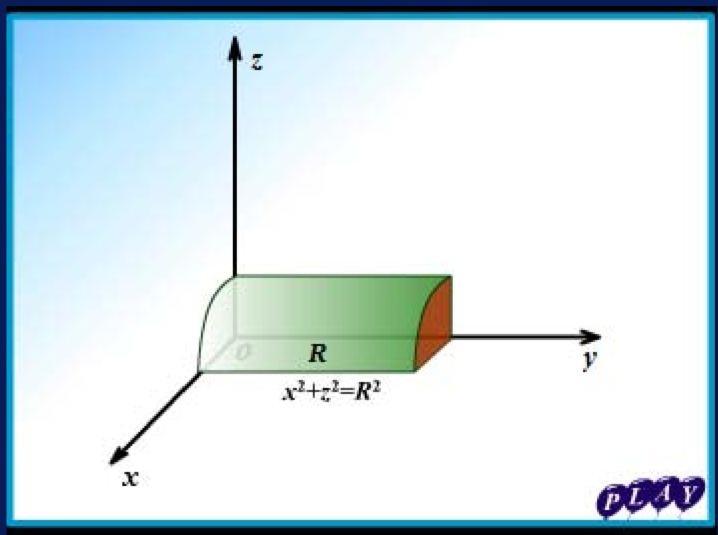
$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v.$$

例1 求两个底圆半径相等的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设圆柱的底半径为R，两个圆柱面的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,\ x^2 + z^2 = R^2,$$

则所围立体在第一卦限的图形如下：



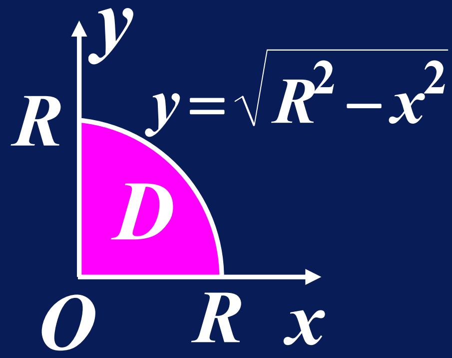
利用对称性，只要计算第一卦限部分的体积再八倍即可.

目 录　上 页　下 页　例 题　继 续

立体在第一卦限的部分可看作是一个曲顶柱体.

它的底为

$$D: 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \le x \le R,$$



它的顶为柱面$z = \sqrt{R^2 - x^2}$，于是

$$V = 8V_1 = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

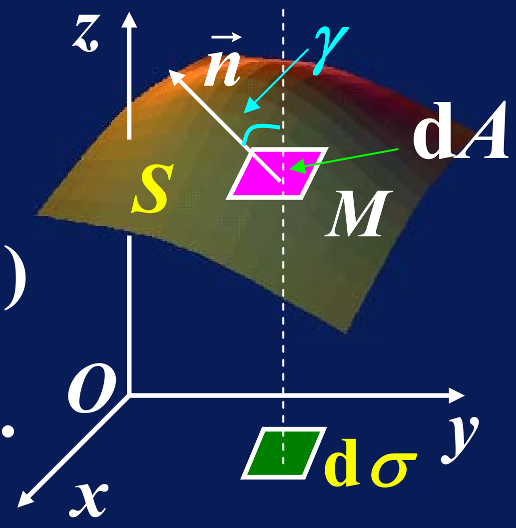
考虑被积函数的特点，选取直角坐标计算，并适当选取积分次序

$$= 8\int_0^R \mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 8\int_0^R (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}R^3.$$

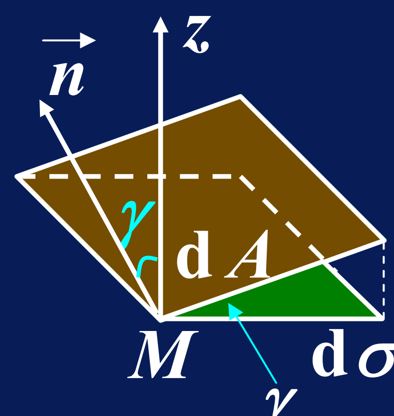
2. 曲面的面积

设光滑曲面$S: z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}$,



则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 d A 无限积累而成. 设它在 D 上的投影为 $(\mathrm{d}\sigma)$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A,$$



其中

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}},$$

因此

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\;\mathrm{d}\sigma,$$

称为曲面的面积元素

故有曲面面积公式

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\;\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

类似地,

若光滑曲面方程为 $x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$,则有

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z .$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z,x)$, $(z,x) \in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x .$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$，且$F_z \neq 0$，

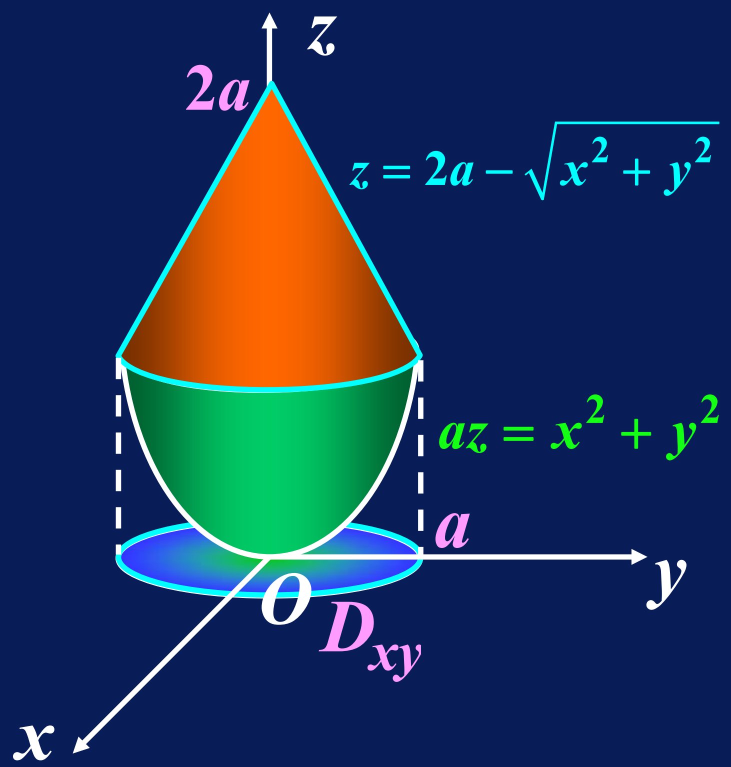
则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}, (x,y)\in D_{xy},$$

因此

$$A=\iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}}}{|F_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例2 求曲面 $az = x^2 + y^2$ 被 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截下部分的面积．



解 $\begin{cases} z = \dfrac{1}{a}(x^2 + y^2) \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

由两曲面方程消去 z, 得

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

故曲面在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2,$$

因此 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

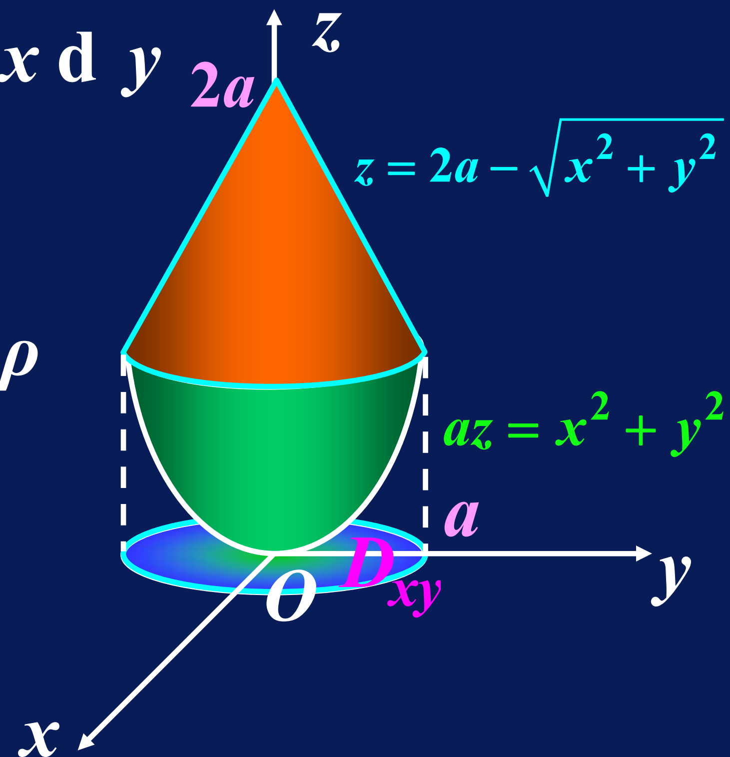
$\Sigma: z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$

采用极坐标计算

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4}{a^2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2+4\rho^2}}{a}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)a^2.$$



二、物理应用

1. 质量的计算

占有xOy面上闭区域D，密度函数为$\mu(x,y)$

的平面薄板的质量为

$$M=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

类似地，占有空间有界域 Ω，密度函数为$\mu(x,y,z)$

的空间物体的质量为

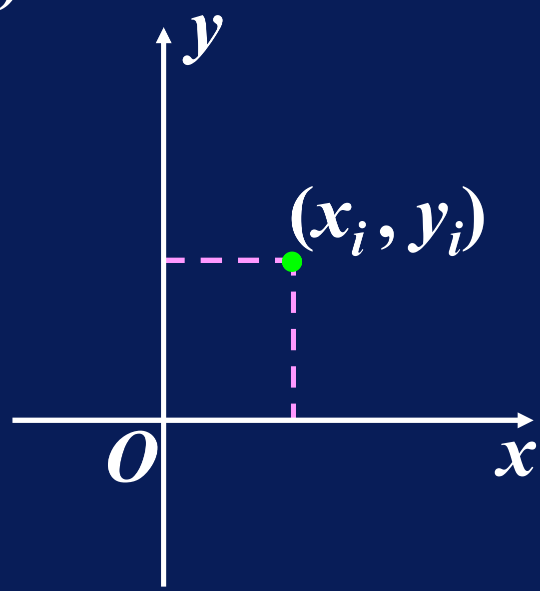
$$M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

2. 质心坐标的计算

(1) 质点系的质心 $(\bar{x},\bar{y})$

设 xOy 面有 n 个质点组成一个质点系，

$$\begin{cases} 点：(x_i, y_i) \\ 质量：m_i \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$



该质点系对 x 轴的静力矩：

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

该质点系对 y 轴的静力矩：

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

质点系的质心：将质点系的质量集中在这一点，该点处的集中质量对各坐标轴的静力矩等于质点系对于同一坐标轴的静力矩，即

$$(\sum_{i=1}^{n} m_i)\overline{x} = M_y\,, \quad (\sum_{i=1}^{n} m_i)\overline{y} = M_x\,,$$

故该质点系的质心坐标为：

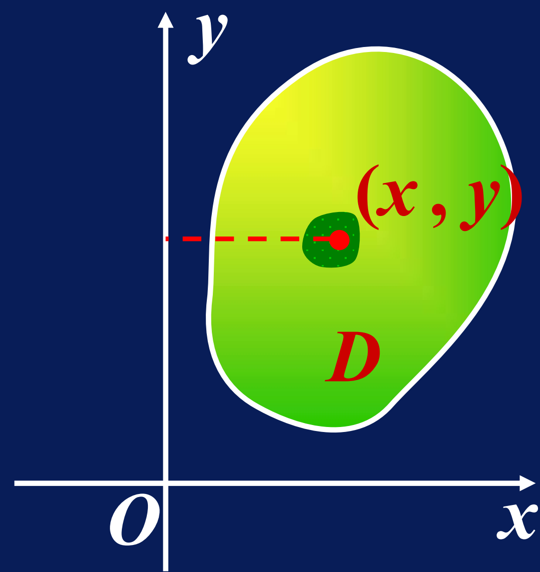
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

(2) 平面薄板的质心 $(\bar{x}, \bar{y})$

若物体为占有xOy 面上区域 D 的平面薄片，其面密度 为$\mu(x, y)$，则它的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x, y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y)\,\mathrm{d}\sigma} = \frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x, y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y)\,\mathrm{d}\sigma} = \frac{M_x}{M}$$



$\mu =$ 常数时，即薄片是均匀的，此时的质心称为形心.

薄片的形心坐标:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中A 为 D 的面积， $A = \iint_D \mathrm{d}\sigma.$

(3) 空间物体的质心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

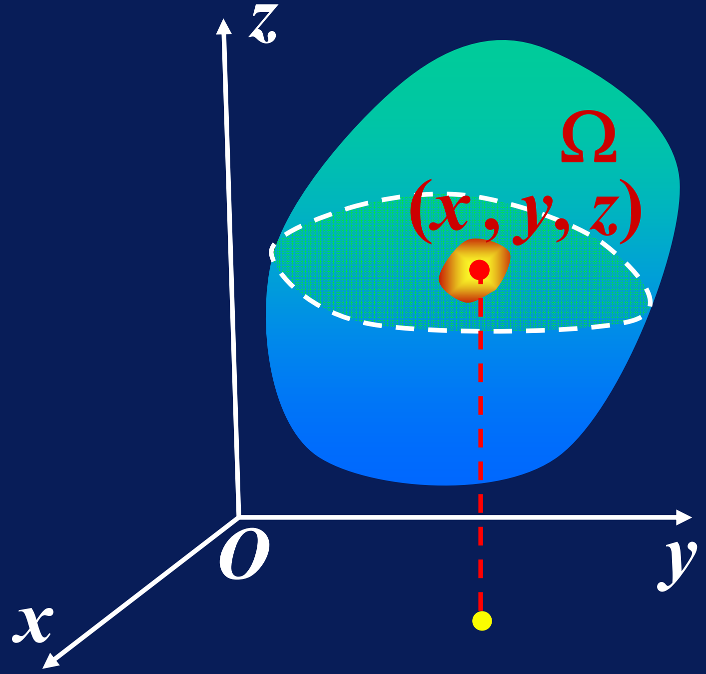
若物体为占有空间区域 Ω 的立体,

其体密度为 $\mu(x,y,z)$, 则它的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$



当$\mu(x,y,z)\equiv$常数时，可得**形心坐标**：

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

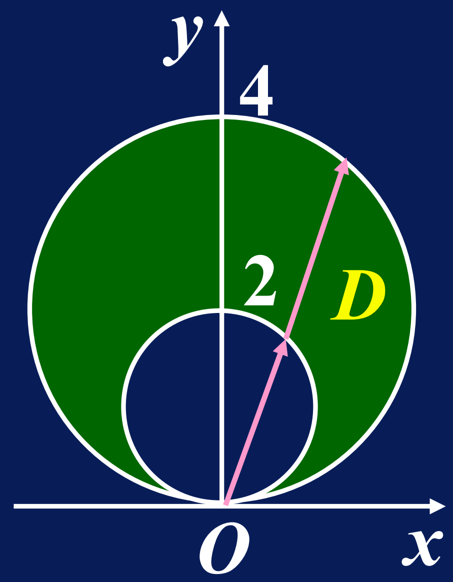
$$\bar{y}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

其中$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为$\Omega$的体积.

例3 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.

解 利用对称性可知 $\bar{x} = 0$, 而



$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

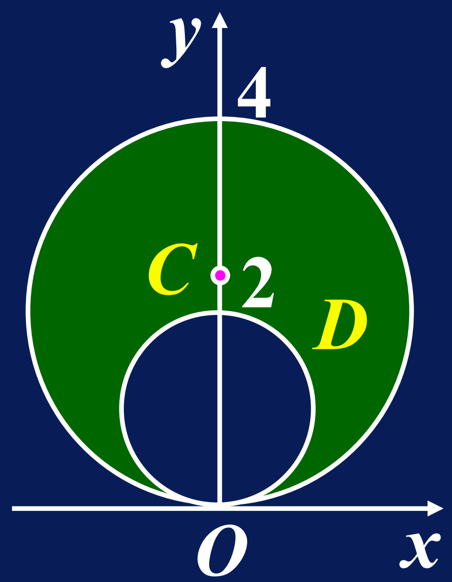
$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

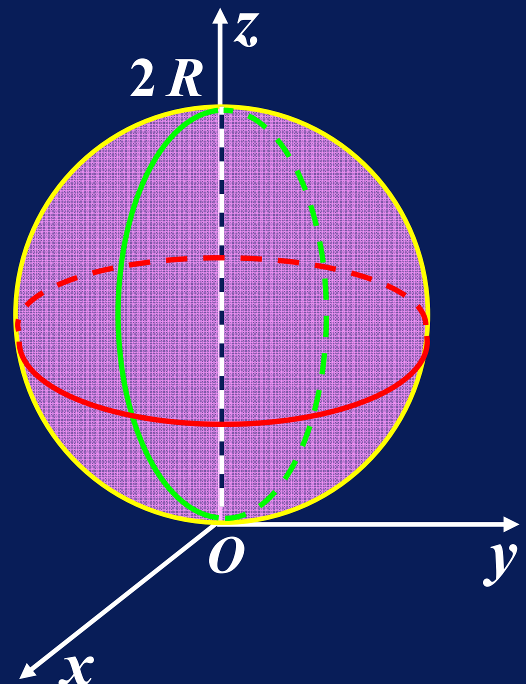
$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{7}{3},$$



故质心位于点$C(0,\frac{7}{3})$.

例4 已知球体 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$，其上任一点的密度在数值上等于该点到原点的距离的平方．求球体的质心.



解 由题意，密度函数

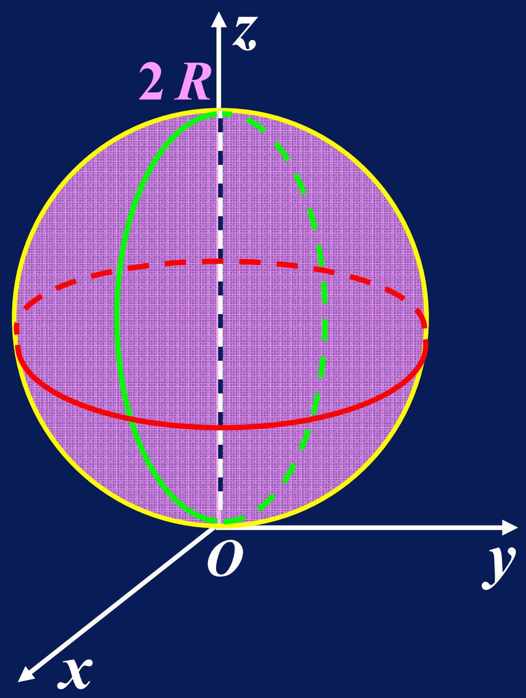
$$\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,$$

空间物体及密度函数都关于 z 轴对称，所以质心坐标为 $(0,\ 0,\ \bar{z})$.

目录 上页 下页 例4-1 继续

球体的质量

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\,\mathrm{d}v$$



$$= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}(2R\cos\varphi)^5 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi R^5 .$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{15}{32\pi R^5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

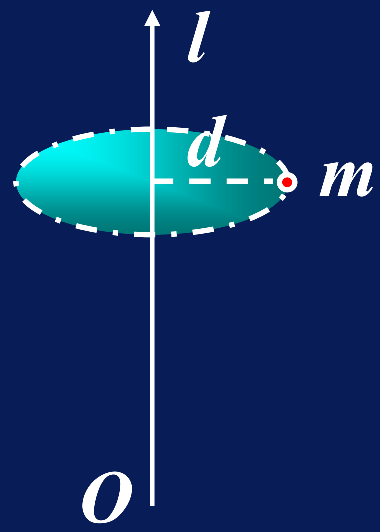
$$= \frac{15}{32\pi R^5}\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}(2R\cos\varphi)^6\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{15}{32\pi R^5}\cdot\frac{8\pi R^6}{3} = \frac{5}{4}R,$$

从而质心为$(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

3. 转动惯量的计算

回顾： 质量为m的质点，在垂直于l轴的平面上，绕l轴旋转的转动惯量为：



$$I = m\,d^2$$

质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和,

故连续体的转动惯量可用积分计算.

如果物体是平面薄片，面密度为

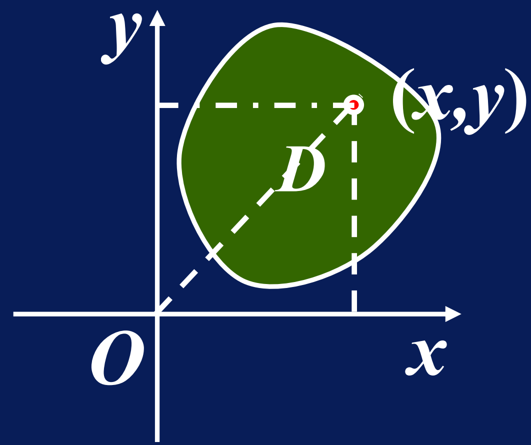
$$\mu(x,y),(x,y)\in D,$$

则转动惯量的表达式是二重积分:

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

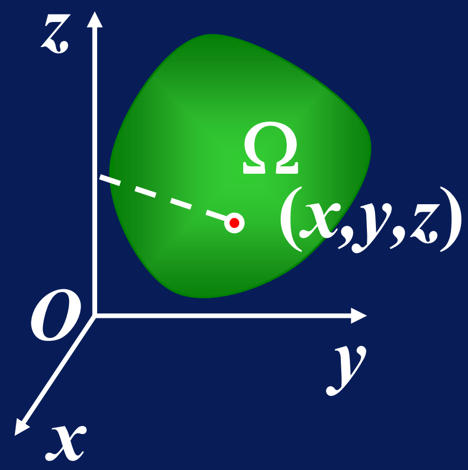
$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



若物体占有空间区域 Ω，有连续分布的密度函数

$\mu(x,y,z)$.

该物体位于(x,y,z) 处的微元



对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_z = (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

类似可得,

对 x 轴的转动惯量

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

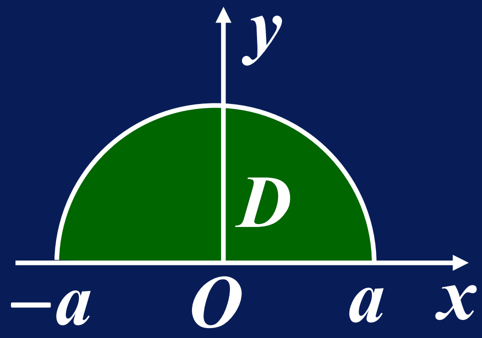
对 y 轴的转动惯量

$$I_y=\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

对原点的转动惯量

$$I_O=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例5 求半径为 a 的均匀半圆薄片(密度为常数 μ)对其直径的转动惯量.



解 建立坐标系如图,

$$D: x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0.$$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \mu \int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^a \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\mu a^4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

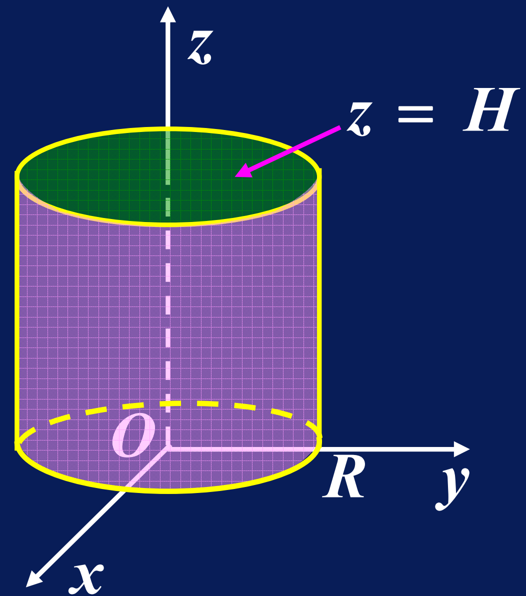
半圆薄片的质量 $M = \frac{1}{2}\pi a^2 \mu$

$$= \frac{1}{4} M a^2.$$

例6 设均匀圆柱体 (密度为常量 μ)的底半径为 R, 高为H,求其对底的直径的转动 惯量.

解 如右图, 圆柱体所占区域为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le R^2, \quad 0 \le z \le H\}.$$



所求转动惯量即为圆柱 体对于 x轴的转动惯量 I_x.

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu \, \mathrm{d}v$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}\rho \int_0^H (\rho^2 \sin^2\theta + z^2)\rho \, \mathrm{d}z$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (H\rho^3 \sin^2\theta + \frac{H^3}{3}\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} (\frac{H}{4}R^4 \sin^2\theta + \frac{H^3}{6}R^2)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu\pi}{4}HR^4 + \frac{\mu\pi}{3}H^3R^2.$$

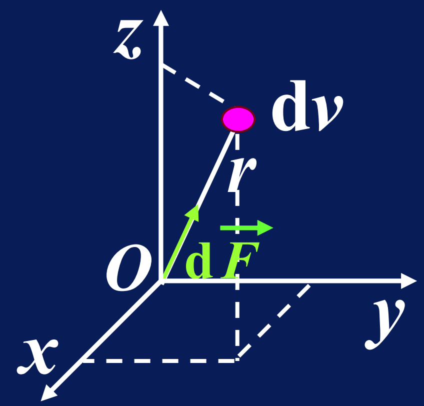
4. 引力的计算

设物体占有空间区域 Ω，其密度函数 $\mu(x,y,z)$ 连续，求物体对位于原点的单位质量质点的引力 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$.

利用元素法，引力元素 $\mathrm{d}\vec{F}$ 在三坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\mu(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\mu(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v,$$



$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

G 为引力常数

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\mu(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v,$$

在Ω上积分即得各引力分量:

$$F_x = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_y = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_z = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v.$$

对 xOy 面上的平面薄片 D，设其密度函数 $\mu(x,y)$ 连续，则它对原点处的单位质量质点的引力为

$\vec{F}=(F_x,F_{y_z})$，其中

$$F_x = G\iint\limits_D \frac{\mu(x,y)x}{r^3}\,\mathrm{d}\sigma,$$

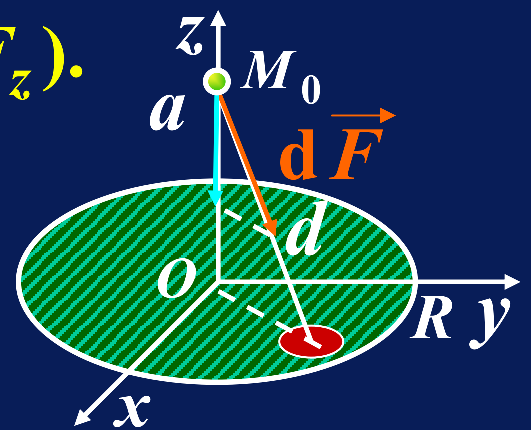
$$F_y = G\iint\limits_D \frac{\mu(x,y)y}{r^3}\,\mathrm{d}\sigma.$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

G 为引力常数

例7 设有面密度为常数 μ，半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2, z=0$, 求它对位于点 $M_0(0, 0, a)$ $(a>0)$ 处的单位质量质点的引力.

解 由对称性知，引力$\vec{F}=(0\,,0\,,F_z)$.

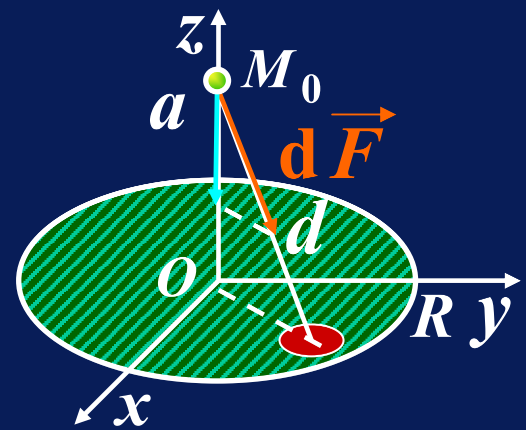


$$\mathrm{d}F_z=-G\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}$$

$$=-Ga\mu\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}},$$

目 录 上 页 下 页 例7-1 继 续

$$\therefore\ F_z = -Ga\mu \iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$



$$= -Ga\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho \,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi Ga\mu \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right).$$

从而

$$\vec{F} = (0, 0, F_z)$$

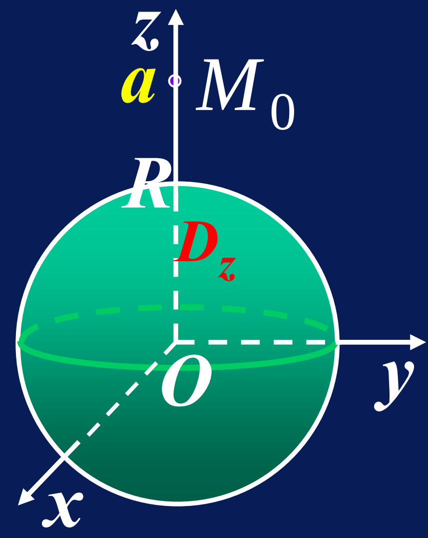
$$= \left(0, 0, 2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right)\right).$$

例8 求半径 R 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点$M_0(0,0,a)$ $(a>R)$的单位质量质点的引力.

解 利用对称性知引力分量

$$F_x=F_y=0.$$

先二后一



$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\mu\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

$$=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$F_z = G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\mu\left[-2R-\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]$$

$$= -G\frac{M}{a^2},$$

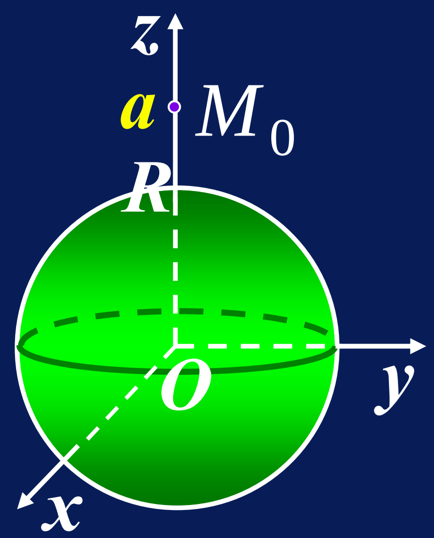
目录 上页 下页 返回 结束

其中$M=\frac{4\pi R^3}{3}\mu$为球的质量.

因此，所求的引力为

$$\vec{F}=(0,0,F_z)$$

$$=(0,0,-G\frac{M}{a^2}).$$



注 上述结果表明:匀质球对球外一质点的引力如同球的质量集中于球心时两质点间的引力.

内容小结

(1) 几何应用

立体体积的计算

曲面面积的计算

(2) 物理应用

质量的计算

质心坐标的计算

转动惯量的计算

引力的计算

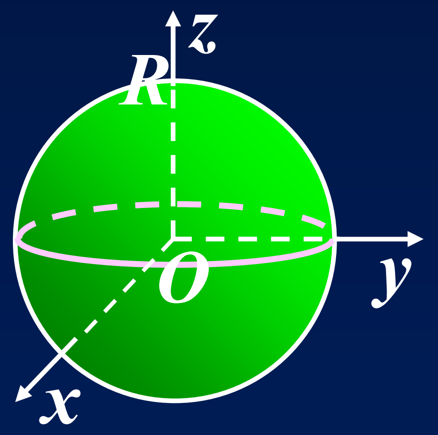
思考题

证明：半径R的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

证 建立坐标系，使球心在原点，则在球面坐标系中，

$$\Omega: 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi.$$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$$



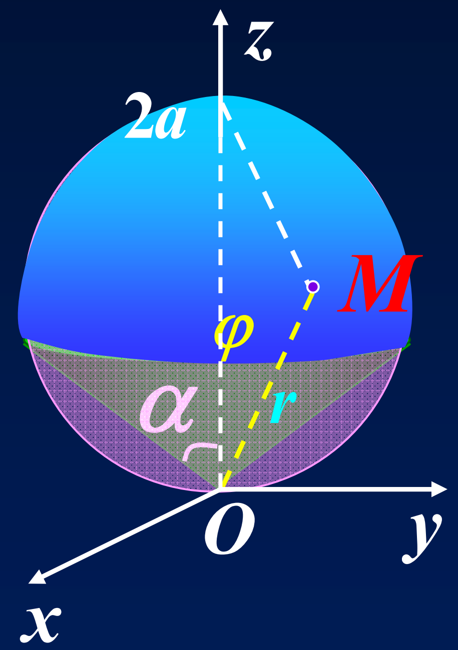
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

备用题

例1-1 求半径为a 的球面与半顶为α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解 在球坐标系下空间立体所占区域为



$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2a\cos\varphi,\\ 0\le\varphi\le\alpha,\\ 0\le\theta\le 2\pi.\end{cases}$$

则立体体积为

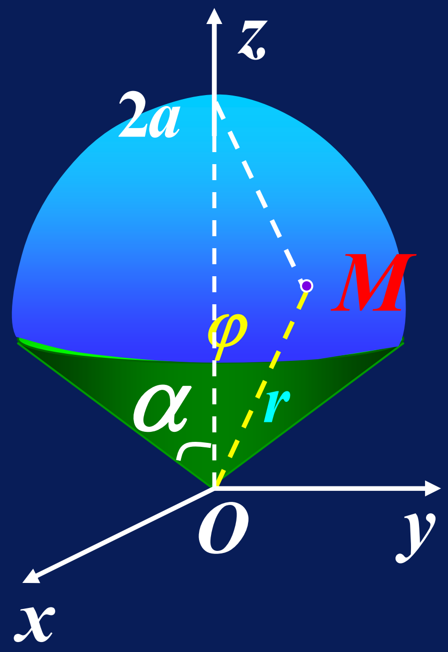
目录 上页 下页 返回 结束

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$



例1-2 求曲面$S_1: z = x^2 + y^2 + 1$任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$所围立体的体积 V.

解 曲面S_1在点(x_0, y_0, z_0)的切平面方程为

$$z = 2x_0x + 2y_0y + 1 - x_0^2 - y_0^2,$$

它与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad (\text{记所围域为} D).$$

因此

$$V = \iint_D [2x_0x + 2y_0y + 1 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - x^2 - y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [1 - ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x - x_0 = \rho\cos\theta$， $y - y_0 = \rho\sin\theta$

$$= \pi - \iint_D \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$$

$$= \pi - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}.$$

例1-3 过曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上点 P 作一切平面，使其与曲面 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和三坐标面在第一卦限内围成的柱体的体积最大，求此点的坐标及最大柱体的体积之值.

解 设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上任一点，

曲面在该点的法向量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$.

曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在 P 点处的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

由$z_0 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + 1$代入此方程，切平面方程表示为

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y + (1 - x_0^2 - y_0^2).$$

柱体的底为$D\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1\}$

切平面下的柱体的体积为

$$V(x_0, y_0) = \iint_D [2x_0 x + 2y_0 y + (1 - x_0^2 - y_0^2)]\,\mathrm{d}\sigma.$$

利用极坐标，有

$$V(x_0, y_0)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 [2x_0\rho\cos\theta + 2y_0\rho\sin\theta + (1 - x_0^2 - y_0^2)]\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + \frac{\pi}{4}(1 - x_0^2 - y_0^2).$$

求其偏导数并令其分别为零，得

$$V_{x_0} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}x_0 = 0, V_{y_0} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}y_0 = 0$$

得唯一驻点 $x_0 = y_0 = \dfrac{4}{3\pi}$,

此时 $z_0 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + 1 = \dfrac{32}{9\pi^2} + 1,$

$$V(x_0, y_0) = \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{4}.$$

下面考虑 $V(x_0, y_0)$在区域边界上的情形 .

当$x_0 = 0$时，有

$$V(0, y_0) = \frac{2}{3}y_0 + \frac{\pi}{4}(1 - y_0^2)$$

$$= \frac{4}{9\pi} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(y_0 - \frac{4}{3\pi}\right)^2$$

$$\le \frac{4}{9\pi}+\frac{\pi}{4} < \frac{8}{9\pi}+\frac{\pi}{4}=V(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}),$$

当$y_0=0$时，有$V(x_0,0)<V(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}).$

当${x_0}^2+{y_0}^2=1$时，

$$V(x_0,y_0)=\frac{2}{3}(x_0+y_0)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+2x_0y_0}$$

$$\le\frac{2}{3}\sqrt{(2{x_0}^2+2{y_0}^2)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}<\frac{8}{9\pi}+\frac{\pi}{4}=V(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}),$$

综上所述，可知

$$V(x_0,y_0)=\frac{8}{9\pi}+\frac{\pi}{4}$$

即为所求最大体积，

$$P(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi},\frac{32}{9\pi^2}+1)$$

即为所求切点.

例2-1 设有一高度为$h(t)$ (t为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程

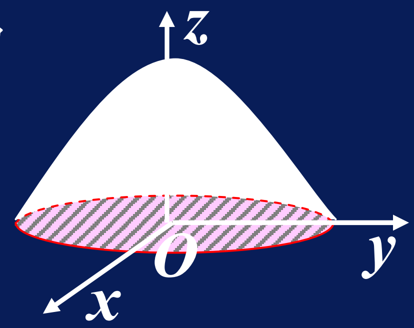
$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)},$$

设长度单位为厘米，时间单位为小时，若体积减少的速率与侧面积成 正比(设比例系数为0.9),问高度为130厘米的雪堆全部融化需多少小时?

解 依题意,首先应求出雪堆的体积 V与侧面积 S,

雪堆是曲顶柱体，上顶曲面的方程为

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)},$$



令$z = 0$, 可得曲顶柱体的底是 xOy面上的圆域：

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le \frac{h^2(t)}{2}\right\} = \left\{(\rho, \theta) \,\middle|\, \rho \le \frac{h(t)}{\sqrt{2}}\right\}.$$

于是其体积

$$V = \iint_D \left[h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [h(t) - \frac{2\rho^2}{h(t)}]\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h(t) - \frac{2\rho^2}{h(t)}]\rho\, d\rho = \frac{\pi h^3(t)}{4}.$$

雪堆的侧面积

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16\rho^2}\, \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{13\pi}{12} h^2(t).$$

据题意知 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S$, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{\pi}{4} h^3(t)] = -0.9 \cdot \frac{13\pi}{12} h^2(t),$$

求导得 $\frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{13}{10}$, 因此

$$h(t) = -\frac{13}{10} t + C.$$

由 $h(0)=130$，得 $C=130$，故 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$．

因为雪堆全部融化之时， 也就是$h(t)=0$时，

令 $h(t)=0$， 可得$t=100$(小时)，

因此雪堆全部融化需100小时.

例2-2 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

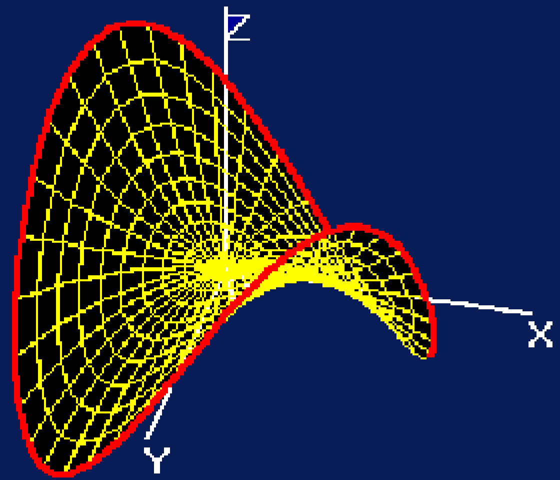
解 曲面在 xOy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{3/2} - 1)].$$



例2-3 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上, 问当R取什么值时,球面在定球面内部的那部分的面积最大?

解 根据题意不妨设球面Σ的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,$$

两球面的交线在xOy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2), \\ z=0. \end{cases}$$

它所围成的平面区域为

$$D: x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2).$$

Σ在定球内的部分的方程 为

$$z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

其面积 $$S(R) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

利用极坐标 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，可得

$$D:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),$$

$$\therefore\quad S(R)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a},\ S''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R)=0$，得驻点 $R_1=\frac{4}{3}a$，　$R_2=0$(舍去).

又 $S''(\frac{4}{3}a)=-4\pi<0$，因此 $S(\frac{4}{3}a)$为极大值，

即为最大值 . 所以当 $R=\frac{4}{3}a$时，球面Σ在定球

面部分面积最大.