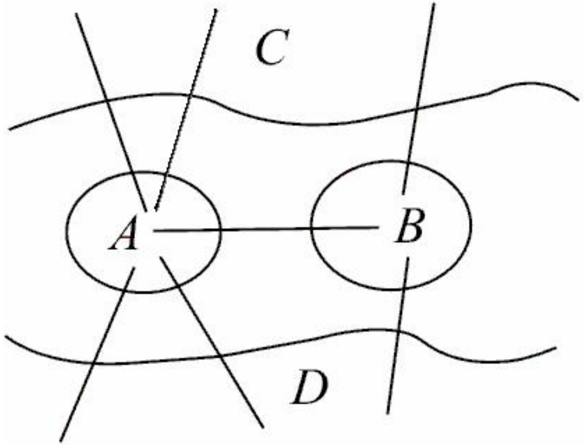
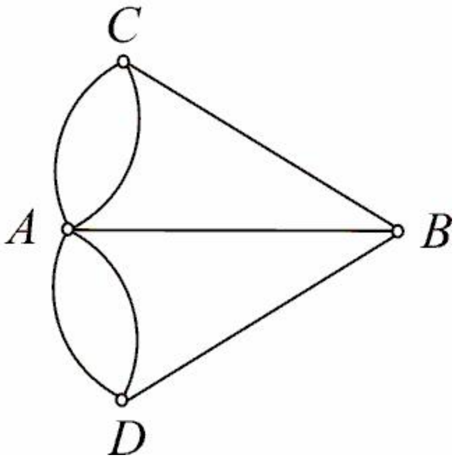
欧拉图

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义8.13

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

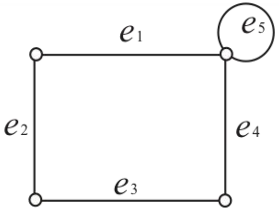
几点说明:

规定平凡图为欧拉图.

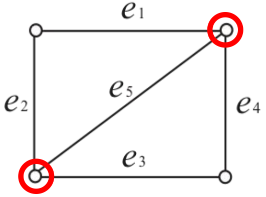
欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

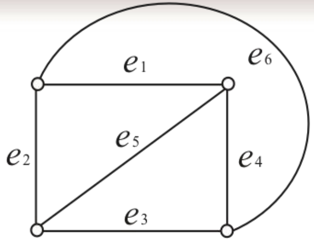
欧拉图实例



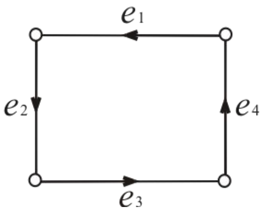
(1)



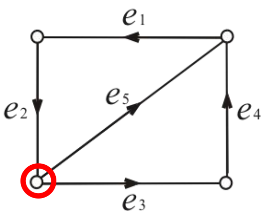
(2)



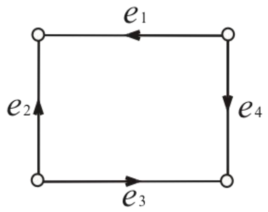
(3)



(4)



(5)



(6)

上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图.

无向欧拉图的判别法

定理8.7 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证 若G为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C为G中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

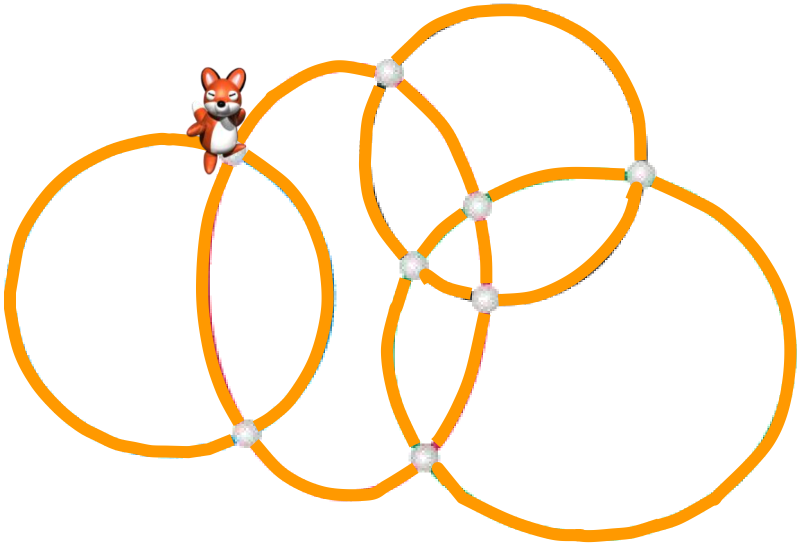
由v_i的任意性，结论为真.

充分性 对边数m做数学归纳法.

(1) m=1时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \leq k$（$k \geq 1$）时结论为真，$m=k+1$时证明：

不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图.



PLAY

欧拉图的判别法

定理8.8 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性简单.

充分性（利用定理8.7）

设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G\cup(u,v)$$

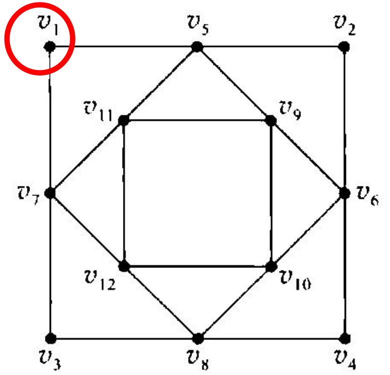
则G' 连通且无奇度顶点，由定理8.7知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C-(u,v)$$

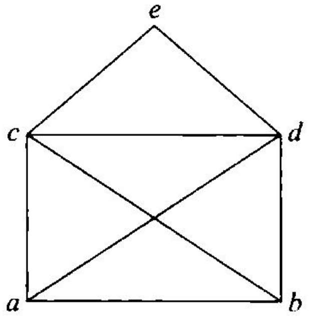
则Γ为 G 中欧拉通路.

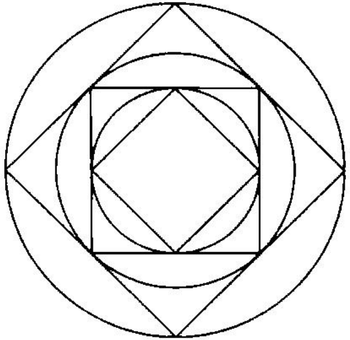
欧拉图的应用

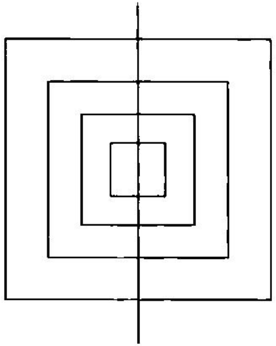
例1： 邮递员投递问题.

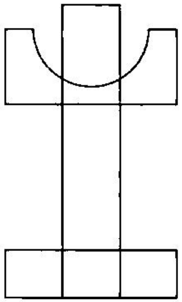


例2： 一笔画问题.









THE END