§2.4 分块矩阵

一、定义

对于行数和列数较高的矩阵 A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算．具体做法是：将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块(或子矩阵)，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

再如

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

特点：同行上的子矩阵有相同的行数，同列上的子矩阵有相同的列数.

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$$ 其中 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中 $A_1=\dots$

二、基本运算

(1) 设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

前提：A与B同型，且分块方式相同.

"原"同型+"新"同型$\begin{cases}\text{分块后以子块为元素的矩阵同型}\\ \text{每个对应子块同型}\end{cases}$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为数, 那么

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{ij}$的行数，那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

例1 已知

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\qquad B=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hdashline 1 & -1\\ -1 & 1\end{array}\right)$$

求AB.

分析 若直接进行矩阵乘法运算，需进行乘法32次，加法24次，比较复杂。

解 将A,B分块, 得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}\\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}\end{pmatrix}$$

又因为

$$\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\\ -5 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

注：此解法需乘法运算12次，加法运算8次。

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

记法："大转"＋"小转"

(5) 设A为n阶方阵，若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵。即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵,那末称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵具有下述性质:

性质1 $\det A=(\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_s)$

性质2 A 可逆 $\Leftrightarrow A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可逆

性质3

$$A_i\text{可逆} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

附　若

$$A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$$

$$A_i\text{可逆} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

特别地　当每一个子块都是数的时候，有

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{pmatrix}\Rightarrow\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \lambda_n^{-1}\\ & & \iddots & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ \lambda_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

性质4

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0} \\ \boxed{0 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \boxed{0 \quad 0 \quad \cdots \quad A_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

推广：

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^k \end{pmatrix}$$

例2 设 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$, ABA.

解　将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$ABA=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1A_1 & 0\\ 0 & A_2B_2A_2\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0\\ a^2 & a^3+a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1\\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix}.$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1\\ a^2 & a^3+a\end{pmatrix},\qquad A_2B_2A_2=\begin{pmatrix}b^3+2b & 2b^2+1\\ 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix},$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\ \hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$,

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix}; \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

练习：求下面矩阵的逆矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

例5（2005.5）

已知B,C,D均为n阶可逆矩阵, 则$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1}=$______

解　用待定系数法

记 $M=\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}_{2n}$　假设 $M^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}_{2n}$

则由　$MM^{-1}=E_{2n}$

所以 $$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & \\ & E_n \end{pmatrix}$$

所以
$$\begin{cases} BX_{21}=E \\ BX_{22}=O \\ CX_{11}+DX_{21}=O \\ CX_{12}+DX_{22}=E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{21}=B^{-1} \\ X_{22}=O \\ X_{11}=-C^{-1}DB^{-1} \\ X_{12}=C^{-1} \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

补充　2009数一(4分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为2阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若det$A$=2，det$B$=3，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ______

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

- 下周一交第二章作业