# 高等数学(上)期中试题解答（20—21 学年第一学期）20-11-7

一、（48 分）**1.** $x^2+2,2x$；　**2.** $\frac{1}{12}$；　**3.** $a=1, b=-2$；　**4.** $-2e^2$；

**5.** $\sin 2(x-1)\cdot e^{\sin^2(1-x)}dx$；　**6.** $-3$；　**7.** $[0,+\infty)$；　**8.** $2$；

**9.** $0$；　**10.** $(-1)^n n!(1-\frac{1}{2^{n+1}})$；　**11.** $2$；　**12.** $\frac{1}{4}$.

二、（20 分）1. B;　2.C;　3.A;　4.D;　5.B.

三、1．解　当 $x\neq 0$ 时，$x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$（3 分）

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$I=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\ (x\neq 0),$$（5 分）

当 $x=0$ 时，$I=\lim_{n\to\infty}x_n=1$，

故 $I=\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$（6 分）

2．解　$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}$　（2 分）$=\pi\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{1}=-\frac{\pi}{2}$　（5 分）

$$I=\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^{\lim_{x\to0^+}\ln y}=e^{-\frac{\pi}{2}}$$（6 分）

3．解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$（2 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)\cdot/\frac{dx}{dt}$$（4 分）

$$=\frac{-(\sin t+\cos t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\sin t+\cos t)^2}\cdot\frac{1}{e^x(\sin t+\cos t)}=\frac{-2}{e^x(\sin t+\cos t)^3}$$ （6 分）

四、解　定义域为：$(-\infty,+\infty)$．$y'=\dfrac{1-3x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$．（2 分）

令 $y'=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{3}$；导数不存在的点为：$x=0$ 及 $x=1$．（3 分）

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\frac{1}{3})$ | $\frac{1}{3}$ | $(\frac{1}{3},1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 不存在 | + | 0 | - | 不存在 | + |
| $y$ | ↗ |  | ↗ | 极大 | ↘ | 极小 | ↗ |

（6 分）

单调增加开区间：$(-\infty,\frac{1}{3}),(1,+\infty)$，单调减少开区间：$(\frac{1}{3},1)$

极大值 $f(\frac{1}{3})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$，极小值 $f(1)=0$．（9 分）

五、证　令 $F(x)=f(x)-x$，要证 $F'(\xi)=0$．（2 分）

$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$F(0)=0$．

下证：存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使$F(\eta)=0$．（3 分）

$F(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，$F(1)=-1<0$，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，

由零点定理，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使$F(\eta)=0$.即$F(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理条件，

故存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$．（5 分）