第六节

傅里叶级数

- 一、三角级数　三角函数系的正交性
- 二、以2 π 为周期的函数的傅里叶级数
- 三、正弦级数和余弦级数

一、三角级数　三角函数系的正交性

1. 三角级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$

其中 $u_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

令 $A_0 = \dfrac{a_0}{2},$

$A_n = a_n, \quad B_n = b_n \quad (n = 1,2,\cdots)$

则 $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ —— 三角级数

2. 研究意义

(1) 物理背景

简单周期运动： $y = A\sin(\omega t + \varphi)$

(A: 振幅， ω :角频率， ϕ: 初相)

复杂周期运动：

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$$

(谐波迭加)

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos n\underline{\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t})$$

(2) 回顾 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \quad x\in(-R,R)$ (6.1)

优点：$f(x)\approx \underline{S_{n+1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}, \quad x\in(-R,R)$

易于计算

缺点：1° 对 $f(x)$的要求过高

若(6.1)成立，则 $f(x)$在$(-R,R)$内有任意阶导数 .

2° $S_{n+1}(x)$非周期函数

若 $f(x)$为周期函数，则用$S_{n+1}(x)\approx f(x)$

将失去 $f(x)$的周期特性.

将 $f(x)$展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (6.2)$$

$$x\in I$$

则可克服上述两个缺点 .

3. 函数展开成三角级数的基本问题

(1) 若(6.2)成立， $a_n=?$， $b_n=?$

展开式是否唯一?

(2) 在什么条件下才能展开成三角级数?

(3) 三角级数的收敛域? 展开式成立的范围?

4. 三角函数系的正交性

定义 (正交函数系)

设有函数系：$\{\varphi_n(x)\}\ (x \in [a,b], n = 1,2,\cdots)$

若 $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$

$(m,n = 1,2,\cdots,\quad 且 m \neq n)$

则称 $\{\varphi_n(x)\}\ (n = 1,2,\cdots)$为$[a,b]$上的

正交函数系.

定理1 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在区间$[-\pi, \pi]$上正交.

证 $n, m \in N, n \neq 0, m \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x = 0. \quad (\text{其中 } m, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}\,x = 2\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{0}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \begin{cases} \left.\dfrac{\sin(n+m)x}{n+m}\right|_{0}^{\pi} + \left.\dfrac{\sin(n-m)x}{n-m}\right|_{0}^{\pi}, & m \neq n \\ \left.\left(\dfrac{\sin 2nx}{2n} + x\right)\right|_{0}^{\pi}, & m = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

类似地，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

注 1° 三角函数系中任两相同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于 0 .

2° 正交性:

(1) 向量正交： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (内积为零);

(2) 函数正交： $\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}\, x = 0$ (乘积积分为零).

二、以2π 为周期的函数的傅里叶级数

1. 函数展开成三角级数的形式

定理2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，若

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \quad (6.3)$$

且(6.3)式可逐项积分，则 展开式是唯一的，且

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

——— 傅里叶系数

证 由假设: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad(6.3)$

(1) 求 a_0:

对(6.3)逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\right)$$

由正交性, 值为零

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,\qquad \therefore\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) 求a_n：

$(6.3)\times\cos nx$, 再积分

由正交性,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\underline{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\underline{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x}+b_k\underline{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x}]$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=a_n\pi,$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 求b_n：

$(6.3) \times \sin nx$, 再积分

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

2. 傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{6.4}$$

或

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

3. 傅里叶级数

定义（傅里叶级数）

设 $f(x)$在$[-\pi, \pi]$上可积分，若三角级数 ：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n是傅里叶系数 (6.4)， 则称此

三角级数是$f(x)$的周期为2π的傅里叶级数 ,记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$

问题：

$$f(x) \overset{\text{条件?}}{=\!=\!=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

4. 函数展开成傅里叶级数的充分条件

定理11.15 (收敛定理, 展开定理)

设以2π为周期的函数 $f(x)$ 满足狄利克雷条件:

在一个周期内

1) 连续，或最多只有有限个第一类间断点;

2) 最多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$处处收敛，且

其和函数

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

与 $f(x)$ 有如下关系：

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的间断点} \end{cases}$$

注 函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低的多.

例1 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，且

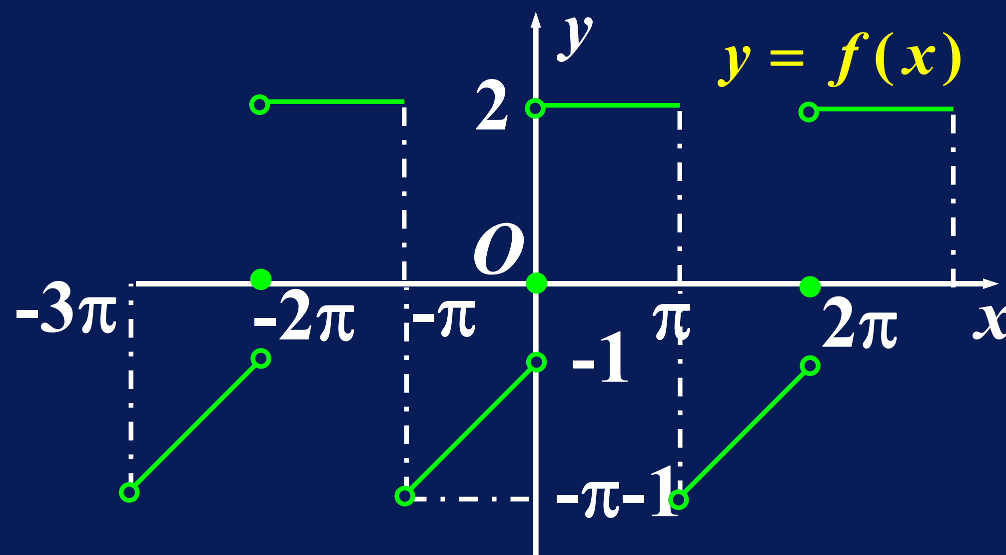
$$f(x)=\begin{cases} x-1, & -\pi<x<0; \\ 0, & x=0; \\ 2, & 0<x\le\pi, \end{cases}$$

设$S(x)$为$f(x)$的傅里叶级数的和函数　，求$S(\pi)$, $S(4\pi)$及$S(\frac{5\pi}{2})$.

解　$f(x)$的间断点：

$$x_k=k\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

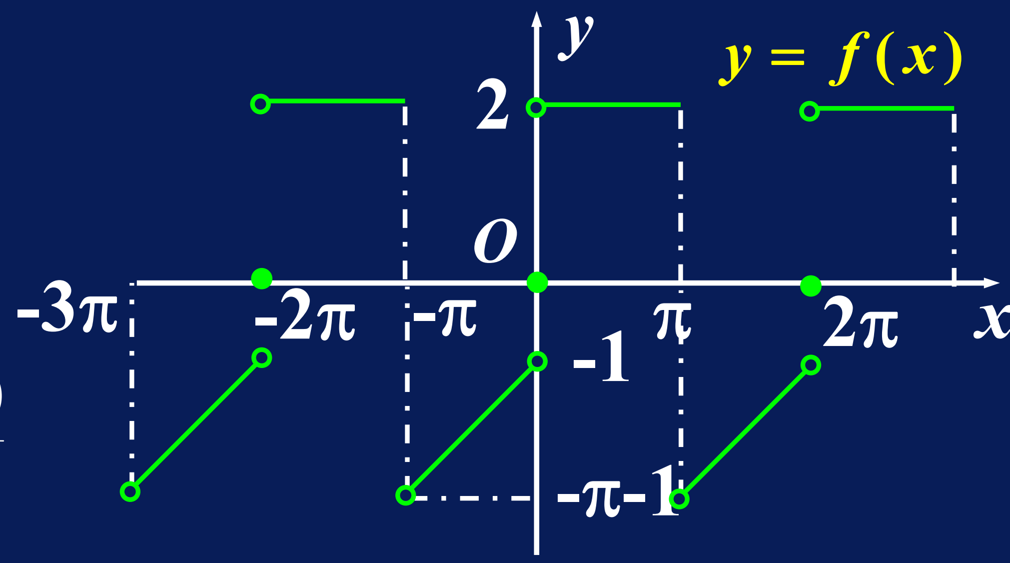


在端点 $x=\pi$ 处,

$$S(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}$$

$$=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$$

$$=\frac{2+(-\pi-1)}{2}=\frac{1-\pi}{2}\quad(\neq f(\pi)=2)$$



$S(x)$是以2π为周期的周期函数

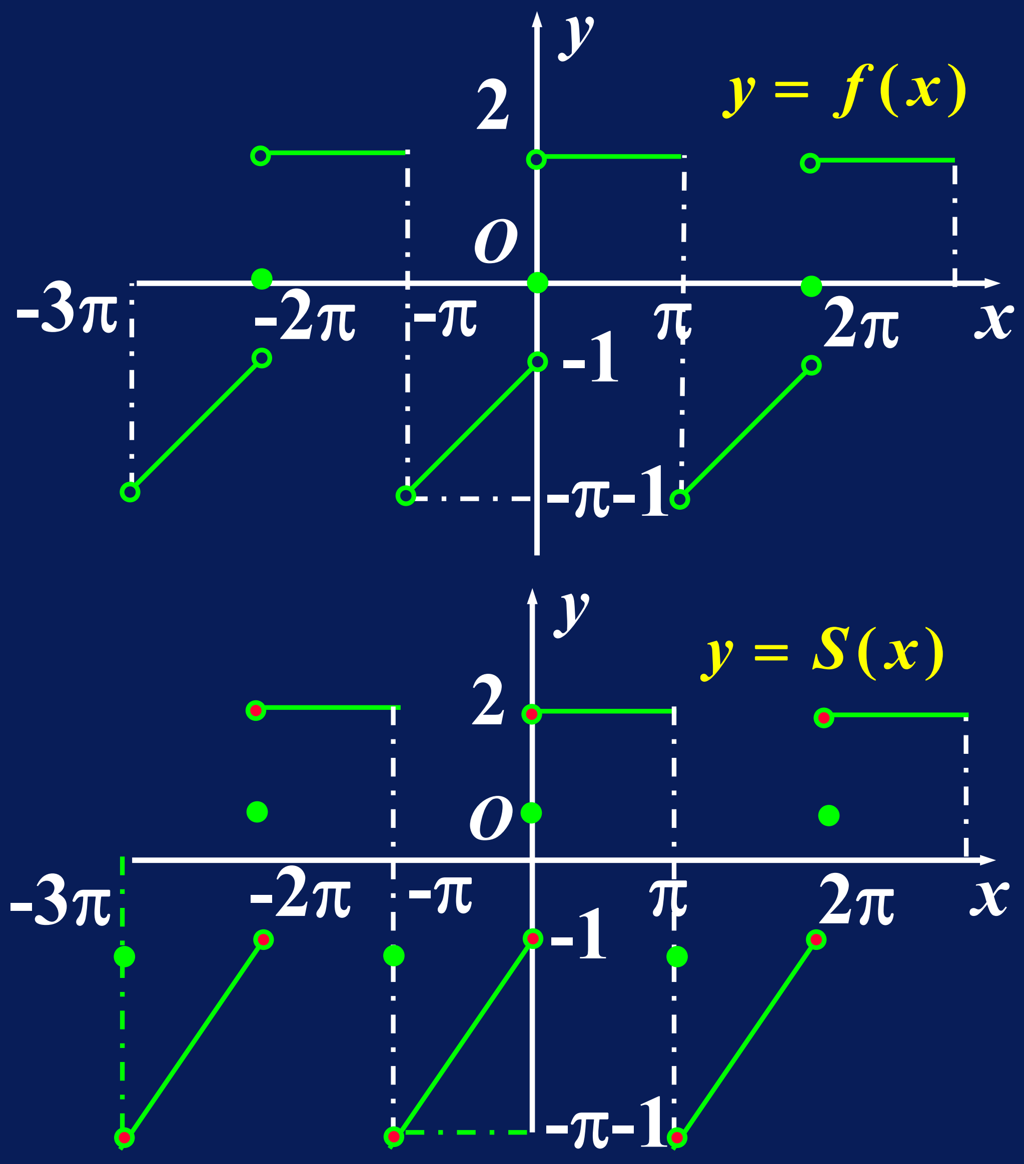
在间断点 $x=4\pi$ 处,

$$S(4\pi)=S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{(-1)+2}{2}=\frac{1}{2}$$

在连续点 $x=\dfrac{5\pi}{2}$ 处,

$$S(\frac{5\pi}{2})= S(\frac{\pi}{2})$$

$$= f(\frac{\pi}{2})=2$$



目录 上页 下页 返回 结束

5. 展开步骤

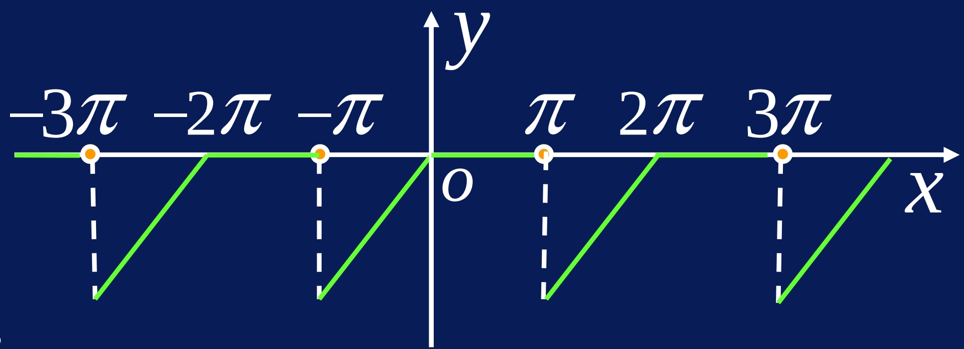
1° 对于 $f(x)$ 检验收敛定理的条件， 且找出 $f(x)$ 的间断点，写出 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 在间断点处的值及展开 式成立的范围;

2° 确定傅里叶系数 a_n, b_n;

3° 写出展开式 (包括展开式成立的范围).

例2 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，$(-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 1° $f(x)$满足收敛定理的条件

间断点：$x_k=(2k+1)\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$S(x_k)=\frac{f(x_k^-)+f(x_k^+)}{2}=\frac{0+(-\pi)}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

目录 上页 下页 例题 继续

当$x \neq x_k$时，$f(x)$连续

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$(x \neq (2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

2° 确定傅里叶系数：a_n, b_n

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$(\, n = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad (\, n = 1, 2, \cdots)$$

3° 所求函数的傅里叶展开式为:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{-\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例3 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，$(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-E, & -\pi<x<0\\ 0, & x=0\\ E, & 0<x\le\pi\end{cases}\qquad (\text{常数}E>0)$$

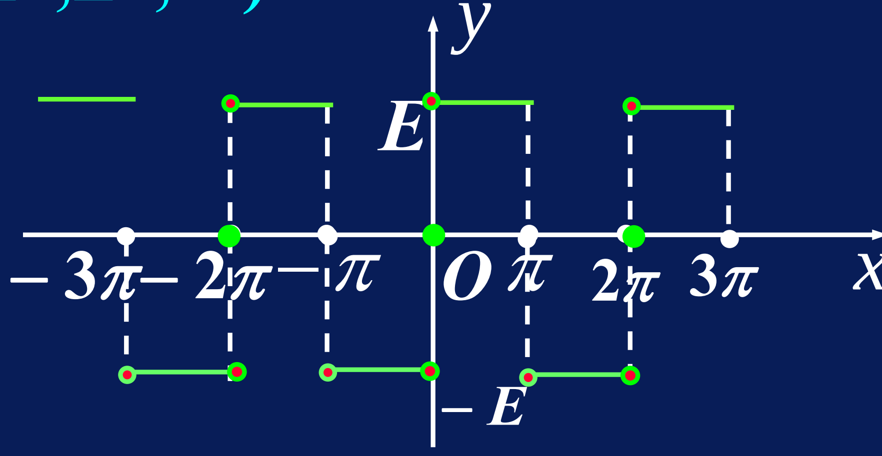
将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 1° $f(x)$满足收敛定理的条件

间断点：$x_m=m\pi,\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

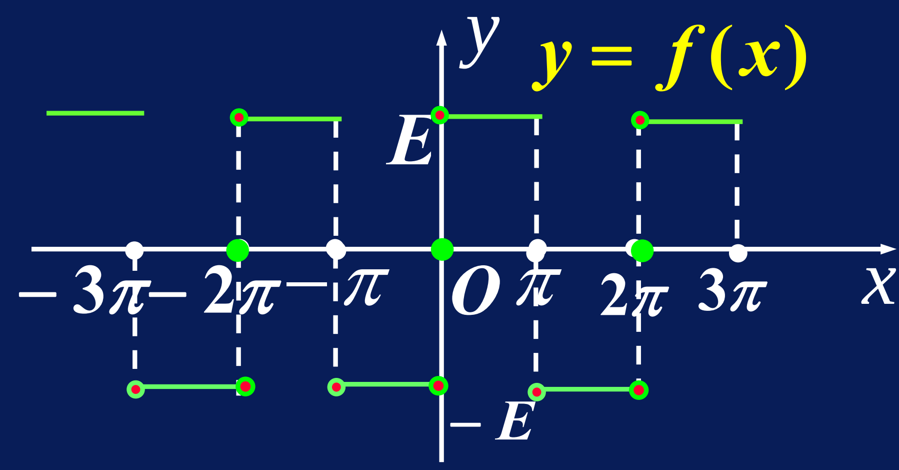
$$S(x_m)=\frac{f(x_m^-)+f(x_m^+)}{2}$$

$$=\frac{-E+E}{2}=0$$



$$S(x_m)=0\begin{cases}= f(x_m), & m=2k\\ \neq f(x_m)=E, & m=2k-1\end{cases}$$

$$(k=1,\pm1,\pm2,\cdots)$$



当$x\neq x_m$时，$f(x)$连续

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$(x\neq(2k-1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

目录 上页 下页 返回 结束

2° 确定傅里叶系数：a_n, b_n

$$f(x)=\begin{cases}-E, & -\pi<x\le 0\\ 0, & x=0\\ E, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{奇函数}}\,\mathrm{d}x$$

$$=0\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{偶函数}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2E}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$b_n = \frac{2E}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2E}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$a_n=0$

$$= \frac{2E}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4E}{n\pi}, & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

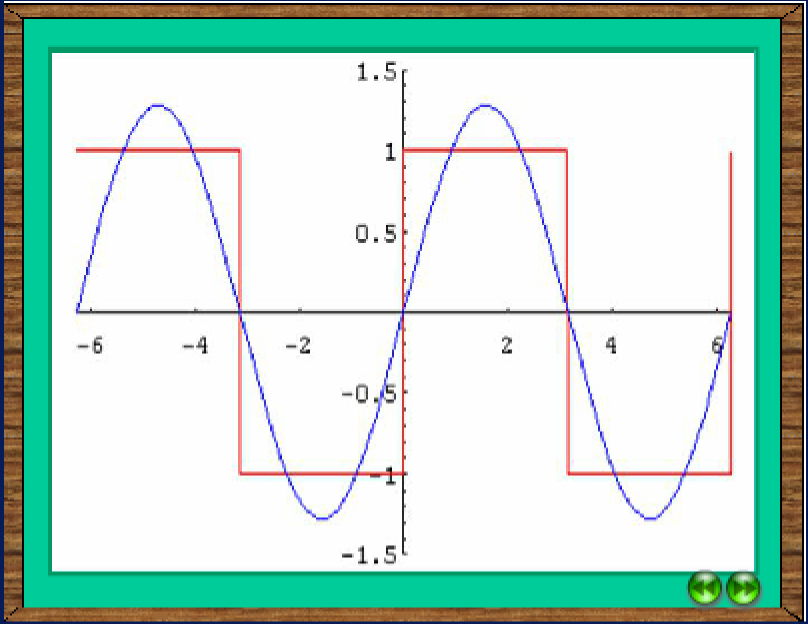
故 $f(x) = \dfrac{4E}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\Big[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\Big]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\cdots)$$

注 矩形波是无穷多正弦波的叠加, 见右图.



三、正弦级数和余弦级数

1. 定义 正(余)弦级数: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right)$

2. 奇、偶函数(周期:2π)的傅里叶级数

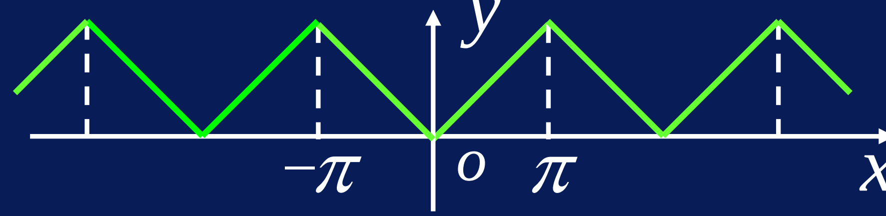
定理3 周期为 2π 的奇(偶)函数$f(x)$, 其傅里叶级数为正(余)弦级数, 傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}\right)$$

例4 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，$(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 为偶函数(如图)，可展成余弦级数. $b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 \;, & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$b_n = 0$$
$$a_0 = \pi$$

故 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x +$$

$$\frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \cdots \Big)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

目录 上页 下页 返回 结束

注 函数展开成傅里叶级数的应用：**求数项级数的和.**

例5 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\leq 0\\ x, & 0<x\leq\pi\end{cases}$$

解 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right)$

$(-\infty<x<+\infty)$

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，得

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

设

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots, \quad \sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots, \quad \sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

因 $\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$, 故 $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$.

$$\sigma = 4\sigma_2 = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

内容小结 1. 函数(周期: 2π)的傅里叶展开:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x:\text{连续点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

注 若 x_0 为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

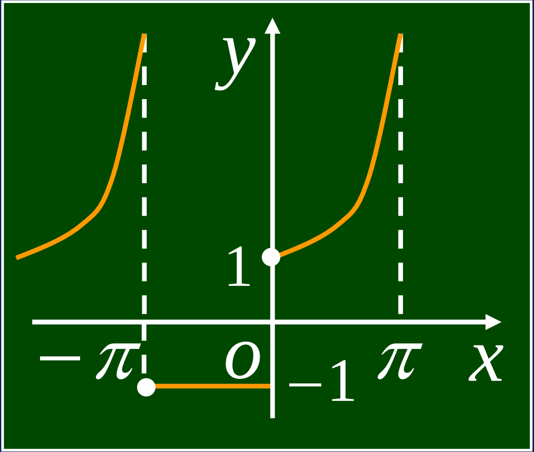
- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数

3. 三角级数与幂级数的特点对照.

项目	三角级数	幂级数
周期性	有	无
计算	繁	简
展开条件	弱(比连续弱)	强($f^{(n)}(x)$存在)
收敛域	大(复杂)	区间(简)

思考题 1.设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\pi^2/2}$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其傅氏系数为 a_n, b_n，则 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅氏系数

$a_n' =$ $\underline{a_n \cos nh + b_n \sin nh}$，$b_n' =$ $\underline{b_n \cos nh - a_n \sin nh}$.

提示 $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,dx$

$\boxed{\text{令 } t = x + h}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

由周期函数性质

$$\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

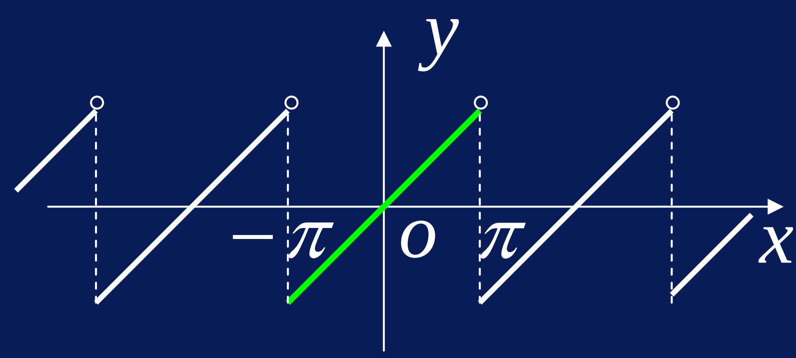
$$= \cos nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \cos nh \cdot a_n + \sin nh \cdot b_n$$

备用题

例2-1 设 $f(x)$ 以2π 为周期, $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 不计 $x=(2k+1)\pi$处, 则 $f(x)$ 是周期为2π 的奇函数.



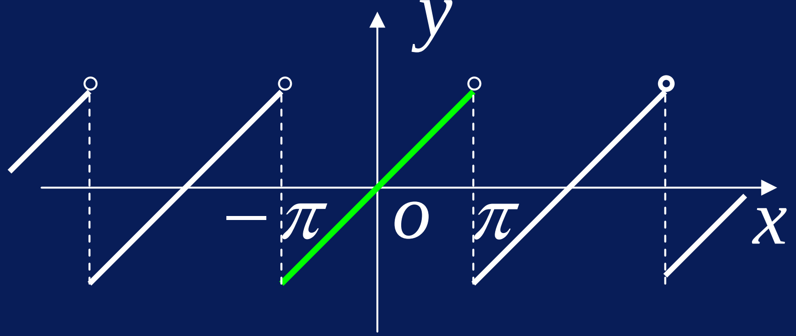
$$a_n=0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

由收敛定理得正弦级数:



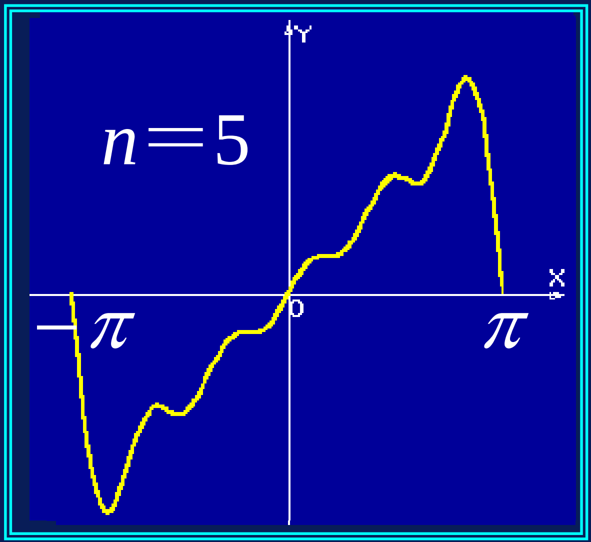
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

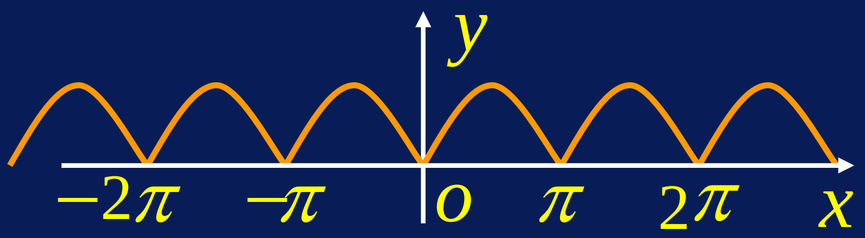
$(-\infty < x < +\infty$,

$x \neq (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \cdots)$

注 在$[-\pi, \pi)$上级数的部分和逼近$f(x)$的情况见右图.



例2-2 将周期函数 $u(t)=\left|E\sin t\right|$ (常数 $E>0$)展成傅里叶级数.



解 $u(t)$ 是以2π 为周期的偶函数.

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

积化和差

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^\pi\left(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}\,t = 0$$

故 $u(t) = \dfrac{2E}{\pi} - \dfrac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$

$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$