



第四部分 数理逻辑



- **逻辑学**是研究推理是否有效，

数理逻辑则采用**数学方法**研究推理的有效性，
即，完全使用**符号化的语言**，根据公理化的基本
思想建立一个形式系统，推理变成按照明确规则
进行的符号改写。



本篇介绍命题逻辑与谓词逻辑

它们是统一的整体，谓词逻辑是命题逻辑的细化。

命题逻辑：研究命题之间逻辑关系的理论。



第十章 命题逻辑



- 命题与命题联结词
- 命题变元与命题公式
- 重言式
- 命题逻辑的基本等式及等式推理
- 命题逻辑的基本蕴涵式及蕴涵推理
- 范式
- 命题联结词的扩充与归约



命题是一个可以判断真假（判断结果**唯一**）的陈述句。

命题的真值：判断的结果

真值的取值：真与假

用“1”或“T”表示真，用“0”或“F”表示假

真命题与假命题

注意：

感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。

陈述句中的悖论，判断结果不唯一确定的不是命题。



例1 下列句子中哪些是命题？（练一练）

- (1) π 是有理数.
- (2) $2 + 5 = 7$.
- (3) 你去教室吗？
- (4) 这个苹果真大呀！
- (5) 请不要讲话！
- (6) 飞碟来自地球外的星球.
- (7) $1+1=10$.
- (8) 城里所有不自己理发的人都由我给他们理发,我也只给这些人理发.
- (9) 我正在说谎.



例1 下列句子中哪些是命题？

- (1) π 是有理数. \longrightarrow 假命题
- (2) $2 + 5 = 7$. \longrightarrow 真命题
- (3) 你去教室吗？ \longrightarrow 不是命题
- (4) 这个苹果真大呀！ \longrightarrow 不是命题
- (5) 请不要讲话！ \longrightarrow 不是命题
- (6) 飞碟来自地球外的星球. \longrightarrow 命题
- (7) 这盘菜太咸. \longrightarrow 命题
- (8) $1+1=10$. \longrightarrow 命题

视语境、条件、标准等来判断。区分“已知其真假”和“本身能分辨真假”，凡是能分辨真假均为命题。



例1 下列句子中哪些是命题？

(9)城里所有不自己理发的人都由我给他们理发,我也只给这些人理发.

不是命题

(10)我正在说谎.

若真，即“我正在说假话”为真，则我正在说真话，因而(10)的真值为假，矛盾，反之亦然。悖论

悖论：按普遍认可的逻辑推理方式，可推导出两个对立的结论，

形式为—如果事件 A 发生，则推导出非 A ，非 A 发生则推导出 A 。

悖论不是命题



原子命题：不包含其他命题的命题。（**简单命题**）

复合命题：包含其它命题的命题，

即，可以分解为更为简单命题的命题。

这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果…那么…”、“当且仅当”等这样的关联词复合构成复合命题。

复合命题有两个基本构成要素：**支命题**和**联结词**。

(1) 如果天气好，那么我去散步。

(2) 2或者4是素数。



(3) 我散步并且吃饭。

(4) 我散步在吃饭之后。

真值唯一地决定于其支命题的真值的复合命题称为
真值函项复合命题，
对应的连接词称为真值函项连接词。

（日常语言中的大部分连接词并不是真值函项连接词，

只有一小部分是，逻辑学里就研究这一小部分）

如，“...在...之后”不是真值函项连接词，“并且”是。





- 一般用大写的英文字母 $P, Q, R, \dots, P_i, Q_i, R_i$ 表示命题。

例. A_i : 北京是中国的首都

P : 2或4是素数



否定词

\neg

合取词

\wedge

析取词

\vee

蕴含词

\rightarrow

等价词

\leftrightarrow



读作“非 P ”，是指命题：“ P 的否定”。

例 P ：雪是黑色的。

$\neg P$ ：并非雪是黑色的。

例：刘备喜欢曹操是假的。

P ：刘备喜欢曹操。

$\neg P$

P	$\neg P$
T	F
F	T

真值表



将真命题变成假命题，将假命题变成真命题。但这并不是简单的随意加个不字就能完成的。

例 P : 这些都是学生。

$\neg P$: 这些不都是学生
 \neq 这些都不是学生

练习. 下列命题的否定式是什么？

(1) P : 上海是一个大城市

(2) Q : 大学生都大于18岁

A. 大学生不都大于18岁

B. 大学生都不大于18岁



读作“ P 合取 Q ”，是指命题：“ P 并且 Q ”。

例1 P : 今天刮风。

Q : 今天下雨。

$P \wedge Q$: 今天刮风，下雨。

例2 他睡觉并且打呼噜。

他打呼噜并且睡觉。

P :他睡觉, Q : 他打呼噜

$P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

真值表



例3 将下列命题符号化.

- (1) 吴颖既用功又聪明.
- (2) 吴颖不仅用功而且聪明.
- (3) 吴颖虽然聪明，但不用功.
- (4) 张辉与王丽都是三好生.
- (5) 张辉与王丽是同学.



解 令 P :吴颖用功, Q :吴颖聪明

(1) $P \wedge Q$

(2) $P \wedge Q$

(3) $\neg P \wedge Q$

(4) 设 P :张辉是三好生, Q :王丽是三好生

$$P \wedge Q$$

(5) P :张辉与王丽是同学, 原子命题

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(4)—(5) 要求分清 “与” 所联结的成分

P :我们去看电影, Q :苹果熟了

$P \wedge Q$:我们去看电影并且苹果熟了. (可连接毫无关系的命题)



读作“ P 析取 Q ”，是指命题：“ P 或者 Q ”。

例 P ：他会英语。

Q ：他会法语。

$P \vee Q$ ：他会英语或者法语。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F



P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

他会英语或法语。

今晚8点我去看电影，
或去看球赛。

P	Q	$P \vee Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F



例3 将下列命题符号化

- (1) 2 或 4 是素数.
- (2) 2 或 3 是素数.
- (3) 4 或 6 是素数.
- (4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
- (5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.



解 (1) 2 或 4 是素数.

令 P :2是素数, Q :4是素数, $P \vee Q$

(2) 2 或 3 是素数.

令 P :2是素数, Q :3是素数, $P \vee Q$

(3) 4 或 6 是素数.

令 P :4是素数, Q :6是素数, $P \vee Q$

(4)小元元只能拿一个苹果或一个梨.

令 P :小元元拿一个苹果, Q :小元元拿一个梨

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

(5)王小红生于 1975 年或 1976 年.

P :王小红生于 1975 年, Q :王小红生于1976 年,

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$



读作“ P 蕴含 Q ”，是指命题：“如果 P ，则 Q ”

例 我说：“如果你来，我就不出去玩”

如果你不来
那我不论出不出去
都是正确的

只有你来了而且我也出去玩了
那才是错误的

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



如果蕴含前件 P 是假命题，那么不管 Q 是什么命题，命题 $P \rightarrow Q$ 在逻辑中都被认为是真命题。

例

- 如果 $1=2$ ，那太阳从西边升起。
- 只要太阳从西边升起，张三考试就能够及格。



在日常语言中“如果.....则.....”所联结的句子之间表现的是一种因果关系，但在数理逻辑中，尽管说前件蕴涵后件，但两个命题可以是毫不相关的。

例 P: $2 \times 3 = 5$

Q: 雪是黑色的

$P \rightarrow Q$: 如果 $2 \times 3 = 5$ ，则雪是黑色的



“如果 P , 则 Q ” 有很多不同的表述方法:

若 P , 就 Q

只要 P , 就 Q

只有 Q 才 P

P 仅当 Q (P 只有 Q)

除非 Q , 才 P

除非 Q , 否则非 P ,

....

$P \rightarrow Q$

例. 只有合理施肥庄稼才会长得好。

如果庄稼长得好, 那么一定合理施肥了。

例. 一个平面图形是矩形仅当它是四边形。

如果一个平面图形是矩形, 那么它一定是四边形。



“如果 P , 则 Q ” 有很多不同的表述方法:

若 P , 就 Q

只有 Q 才 P

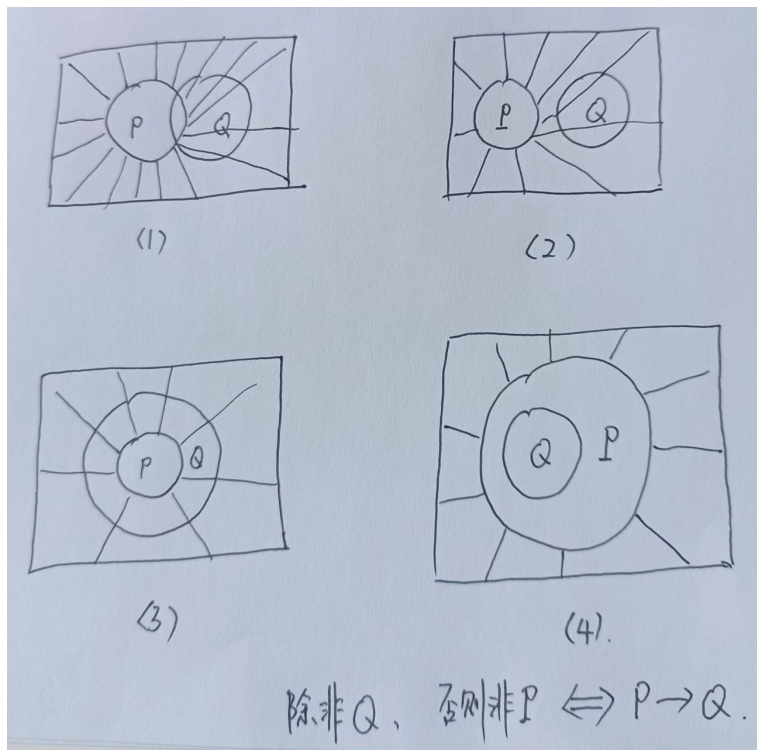
除非 Q , 才 P

只要 P , 就 Q

P 仅当 Q (P 只有 Q)

除非 Q , 否则非 P , ...

$P \rightarrow Q$



例. (1) 如果你口渴了, 那么你想喝水

除非你想喝水, 否则你不口渴;

(2) 如果 a 感染了, 那么 a 出家门了

除非 a 出家门了, 否则 a 不会感染。



例4 设 P : 天冷, Q : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

(1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服.

$$P \rightarrow Q$$

(2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服.

$$P \rightarrow Q$$

(3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷.

$$\neg Q \rightarrow \neg P$$

(4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服.

$$Q \rightarrow P$$

(5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服.

$$Q \rightarrow P$$

(6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷.

$$P \rightarrow Q$$

(7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服.

$$\neg P \rightarrow \neg Q$$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候.

$$Q \rightarrow P$$



把下列语句写成“如果 p ，那么 q ”的形式。

- 1) 要想晋升，帮老板洗车是很有必要的。
- 2) 吹南风预示着纯聊天要来了。
- 3) 保单有效的充分条件是第的计算机购买时间不超过一年。
- 4) Willy只要行骗就会被抓住。
- 5) 只有支付了订阅费，你才能访问网站。
- 6) 获得选举源于认识右翼人士。
- 7) 每当坐船Carol就会晕船。





读作“**P**等价**Q**”，是指命题：“**P**当且仅当**Q**”

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

注意： $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真或同时为假.

$P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系： P 与 Q 互为充分必要条件

双蕴含



例5 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$. $\longrightarrow 1$

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数. $\longrightarrow 0$

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起. $\longrightarrow 1$

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲. $\longrightarrow 0$

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是 它在 x_0 连续. $\longrightarrow 0$



- (1) 陕西**不是**人口最多的省份；
- (2) 张伟是一个**德智体**全面发展的好学生；
- (3) 教室的灯不亮可能是灯管坏了**或者是**停电了；
- (4) **如果**周末天气晴朗，**那么**学院将组织我们到世园会游玩；
- (5) 两个三角形全等**当且仅当**三角形的三条边全部相等。



为了不使句子产生混淆，作如下约定，**命题联结词之优先级**如下：

1. **否定 \rightarrow 合取 \rightarrow 析取 \rightarrow 蕴涵 \rightarrow 等价**
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(**从左到右**)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用**括号**；同级符号相邻时，也可使用括号。**括号中的运算为最优先级。**



例. P: 明天上午七点下雨

Q: 明天上午七点下雪

R: 我去学校

“如果明天上午七点不下雨夹雪，则我去学校”

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$$

“如果明天上午七点下雨或下雪，则我不去学校”

$$P \vee Q \rightarrow \neg R$$

“明天上午七点我将雨雪无阻，一定去学校”

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

“只有当明天上午七点不下雪并且不下雨时我才去学校”

$$R \rightarrow \neg P \wedge \neg Q$$



P, Q, R, \dots 均表示命题.

- 联结词集为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

$\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 为基本复合命题.

其中要特别注意理解 $P \rightarrow Q$ 的涵义.

反复使用 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词组成更为复杂的复合命题.

练习. 设 P : π 是无理数, Q : 3 是奇数,

R : 苹果是方的, S : 太阳绕地球转

则复合命题 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((R \wedge \neg S) \vee \neg P)$ 是_____命题.

- 联结词的运算顺序: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 同级按先出现者先运算.



判断下列这些双蕴含是真是假：

- a) $2+2=4$ 当且仅当 $1+1=2$ 。
- b) $1+1=2$ 当且仅当 $2+3=4$ 。
- c) 现在是冬季当且仅当现在不是春季、夏季或秋季。
- d) $1+1=3$ 当且仅当猪会飞。
- e) $0>1$ 当且仅当 $2>1$ 。

判断下列各蕴含是真是假：

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) 若 $1+1=2$ ，则 $2+2=5$ 。 | b) 若 $1+1=3$ ，则 $2+2=4$ 。 |
| c) 若 $1+1=3$ ，则 $2+2=5$ 。 | d) 若猪会飞，那么 $1+1=3$ 。 |
| e) 若 $1+1=3$ ，就存在上帝。 | f) 若 $1+1=3$ ，猪就会飞。 |
| g) 若 $1+1=2$ ，猪就会飞。 | h) 若 $2+2=4$ ，则 $1+2=3$ 。 |



令 p 、 q 为如下命题：

p ：你的车速超过每小时 65 英里（1 英里 = 1.6 公里）。

q ：你接到一张超速罚单。

用 p 、 q 和逻辑联接词写出下列命题：

a) 你的车速没有超过每小时 65 英里。

b) 你的车速超过每小时 65 英里，但没接到超速罚单。

c) 你的车速若超过每小时 65 英里，将接到一张超速罚单。

d) 你的车速不超过每小时 65 英里，就不会接到超速罚单。

e) 车速超过每小时 65 英里足以接到超速罚单。

f) 你接到一张超速罚单，但你的车速没超过每小时 65 英里。

g) 只要你接到一张超速罚单，你的车速就超过每小时 65 英里。



1. “可兼或”，“不可兼或”的例子，区别？
2. 谈谈你对蕴含、等价连接词的认识。



- 与相应
- 果最
- 将命题公式 $\neg(P \wedge (Q \rightarrow \neg P))$ 记作 G , 使 G 的真值指派为 F 的 P, Q 的真值是下列 4 个中的哪一个?
 - (T, F) ; (2) (F, T) ;
 - (T, T) ; (4) (F, F) .
 - 与命题公式 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 等值的公式是下列 4 个中的哪一个?
 - $(P \vee Q) \rightarrow R$; (2) $(P \wedge Q) \rightarrow R$;
 - $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$; (4) $P \rightarrow (Q \vee R)$.
 - 命题公式 $(P \wedge Q) \rightarrow P$ 是下列 4 个中的哪一个?
 - 永真式; (2) 永假式;
 - 可满足式; (4) 合取范式.
 - 若由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出结论 B 的推理正确, 则 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 应为下列 3 个中的哪一个?
 - 重言式; (2) 矛盾式;
 - 可满足式.
 - 设 $P: 2$ 是素数, $Q: 3$ 是素数, $R: \sqrt{2}$ 是有理数, 下列复合命题中哪一个是假命题?
 - $(P \vee Q) \rightarrow R$; (2) $R \rightarrow (P \vee Q)$;
 - $(P \wedge Q) \rightarrow P$; (4) $(R \vee P) \leftrightarrow Q$.
 - 设 P, Q 为命题, 复合命题“如果 P , 则 Q ”称为 P 与 Q 的_____, 记作_____.
 - 设命题公式 $G = P \wedge (\neg Q \vee R)$, 则使 G 的真值为 T 的指派是_____.
 - 已知命题公式 $G = (\neg P \vee Q) \rightarrow R$, 则 G 的析取范式是_____.
 - 命题公式 $P \rightarrow (P \vee \neg P)$ 的真值是_____.
 - 判别下列语句是否为命题, 如果是命题, 指出其真值.
 - 中国是一个人口众多的国家; (2) 存在最大的素数;
 - 这座楼可真高啊; (4) 请你跟我走;
 - 火星上也有人.
 - 将下列命题符号化:
 - 虽然交通堵塞, 但是老王还是准时到达火车站;
 - 张小宝是三好生, 他是北京人或河北人;
 - 除非天天下雨, 否则我骑车上班.
 - 设命题 P, Q 的真值为 F , 命题 R, S 的真值为 T , 求公式 $(P \leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \vee S)$ 的真值.
 - 用多种方法判定命题公式 $(P \rightarrow (P \wedge Q)) \vee R$ 是否为可满足式.



THE END