第二节

二重积分的计算(1)

- 一、直角坐标系下二重积分的计算

1. 积分区域D为X–型区域

2. 积分区域D为Y–型区域

3. D既不是X–型区域，也不是Y–型区域

一、直角坐标系下二重积分的计算

问题： 如何计算二重积分

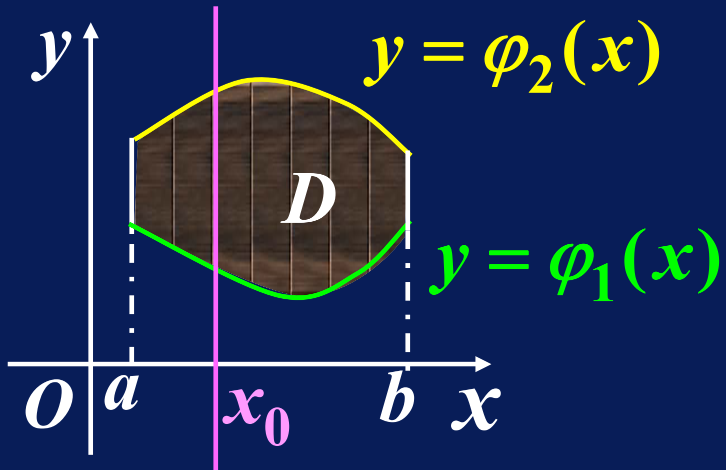
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad ?$$

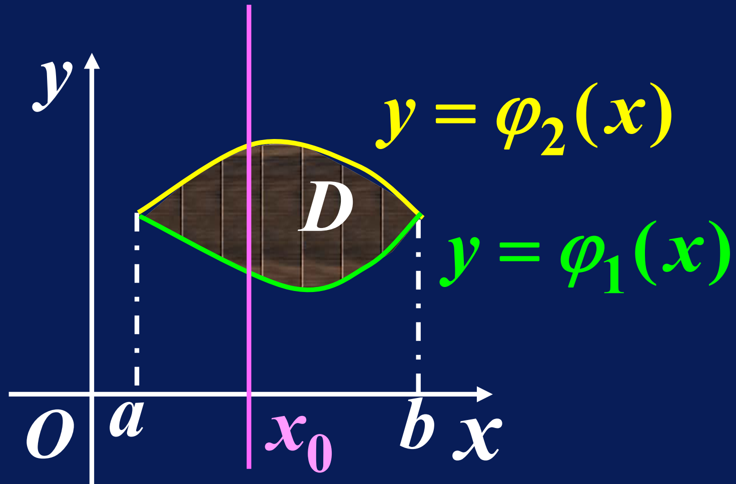
解决方法： 化二重积分化为两次定积分.

1. D为X–型区域

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在区间 $[a,b]$上连续 .





特点： 用直线 $x=x_0(a<x_0<b)$穿区域D，该直线与 D的边界至多有两个交点 .

定理 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D上连续,

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

先对y, 后对x 积分的二次积分

记作 $\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

几何解释: 设 $f(x,y)\ge 0,\ (x,y)\in D$

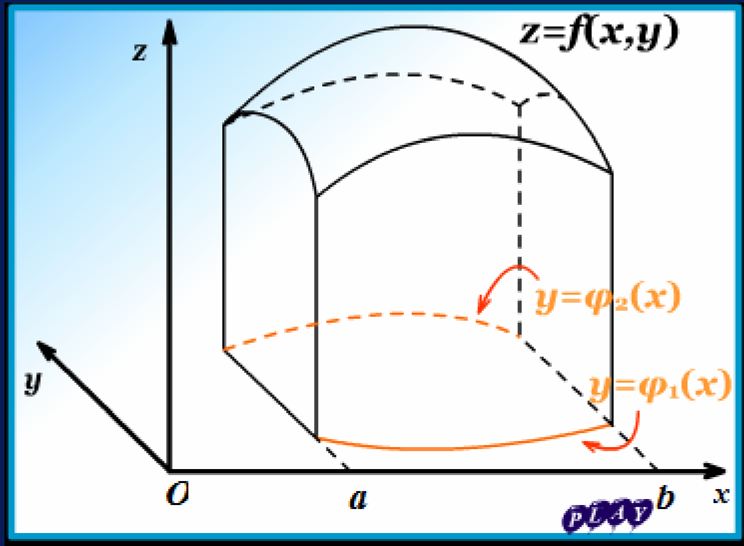
则 $V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$: 以$D$为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

应用计算“已知平行截面面积的立体求体积”的方法(简称平行截面法), 可求此体积.

步骤: 1° 求平行于坐标面的截面面积 $A(x)$

$$\forall\ x_0\in[a,b],$$

作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$. 这个平面截曲顶柱体所得到的截面是一个以区间[$\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)$] 为底，曲线 $z=f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形.



其面积:

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}\,y$$

即$\forall x \in [a,b]$，有

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$ —— 已知平行截面面积

$$2^\circ \quad V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x$$

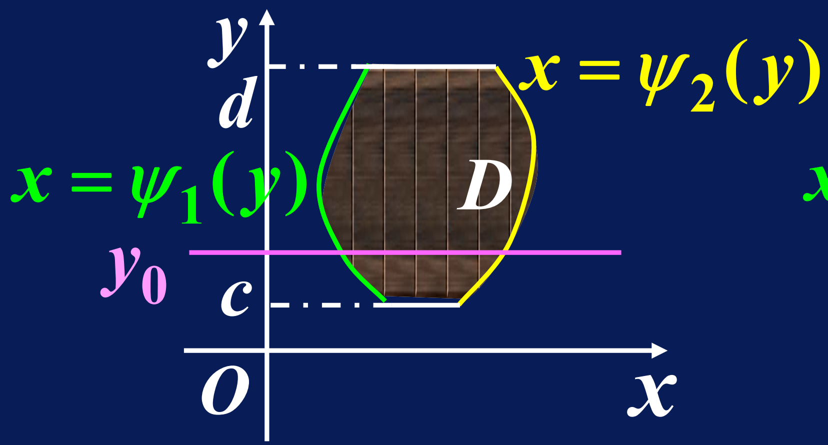
$$\therefore V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x$$

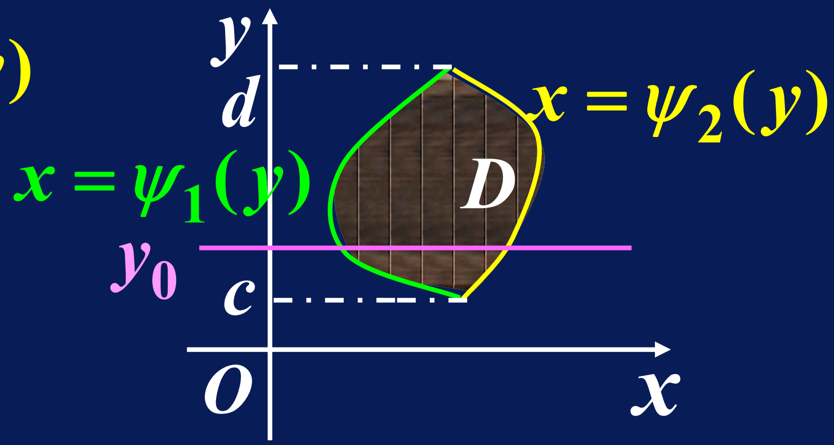
$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_a^b \mathrm{d}\,x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

2. D为Y–型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

其中函数$\psi_1(y),\psi_2(y)$在区间 $[c,d]$上连续.





特点: 用直线 $y=y_0(c<y_0<d)$穿区域D,
该直线与 D的边界至多有两个交点 .

当 D 为Y–型区域时，有

先对x, 后对y 积分的二次积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\boxed{\int_c^d \left[\boxed{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y}$$

记作

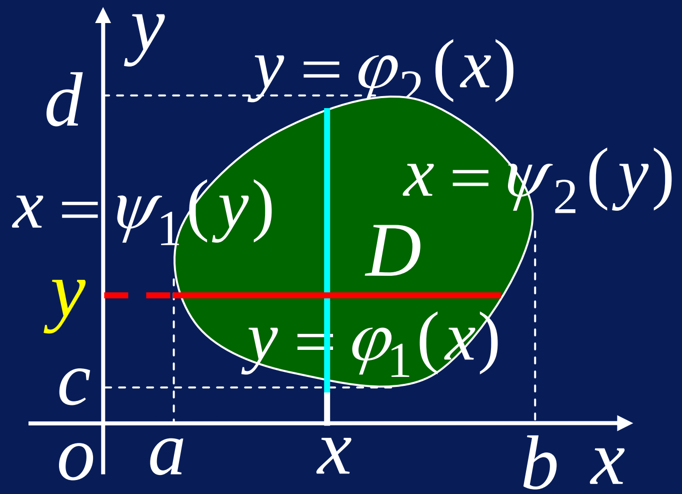
$$=\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

若积分区域既是 X–型区域又是 Y–型区域，

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



为计算方便，可选择积分次序，

必要时还可以交换积分次序.

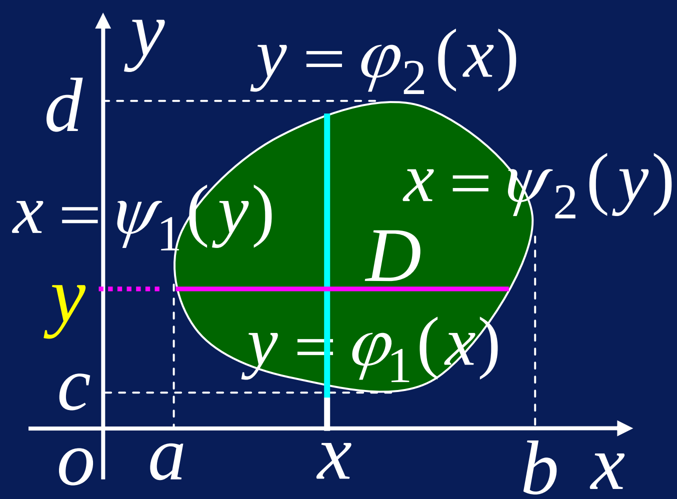
注 1° 对于给定的积分区域 D，外层积分的上、下限均为常数.

2° 内层积分上下限只能是 外层积分变量的函数或常数，不能与内层积分变量有关.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



目录 上页 下页 返回 结束

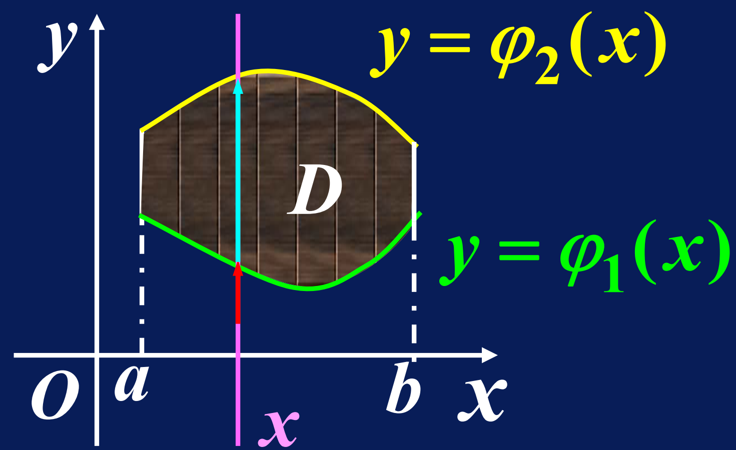
3° 对于 $X-$ 型区域 D，用直线 $x=x$ 由下

至上穿 D，穿入点所对应的纵坐标为

(出)

内层积分的下限.

(上)



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

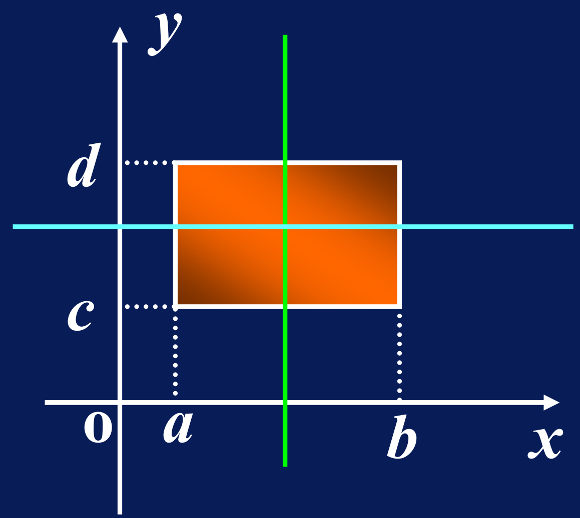
4° 两种特殊情形

设 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 则

(1) $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\displaystyle=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$

$\displaystyle=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$



积分顺序可交换

(2)当 $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$时，有

$$\iint_D g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d g(x)h(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b [g(x)\cdot\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$$

$$=[\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x]\cdot[\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y]$$

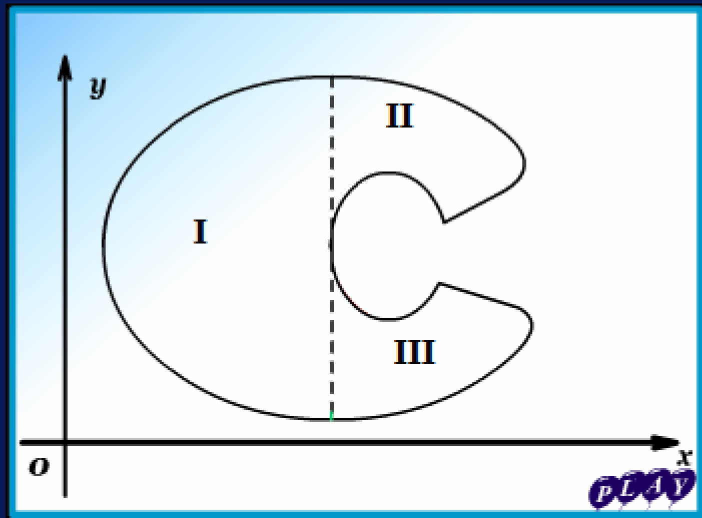
3. D既不是X–型区域，也不是Y–型区域

解决方法： 可将它分成若干个 X–型域 或Y–型域，

如图中区域 D 被 分成三个子区域，

则有

$$\iint_D = \iint_{\mathrm{I}} + \iint_{\mathrm{II}} + \iint_{\mathrm{III}} .$$



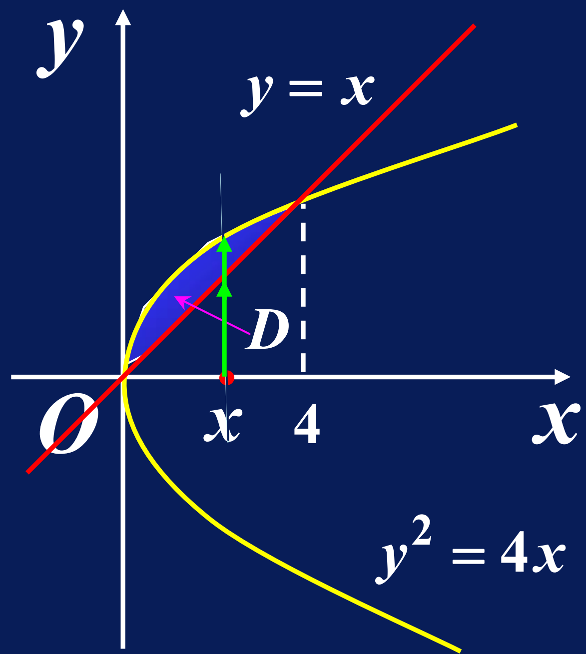
目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

例1 化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为二次积分，

其中 D 是由 $y = x$ 和 $y^2 = 4x$ 所围 .

解 D 是 X—型的, $x \in [0,4]$.

$\forall x \in (0,4)$, $x \le y \le 2\sqrt{x}$.



$D: x \le y \le 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4,$

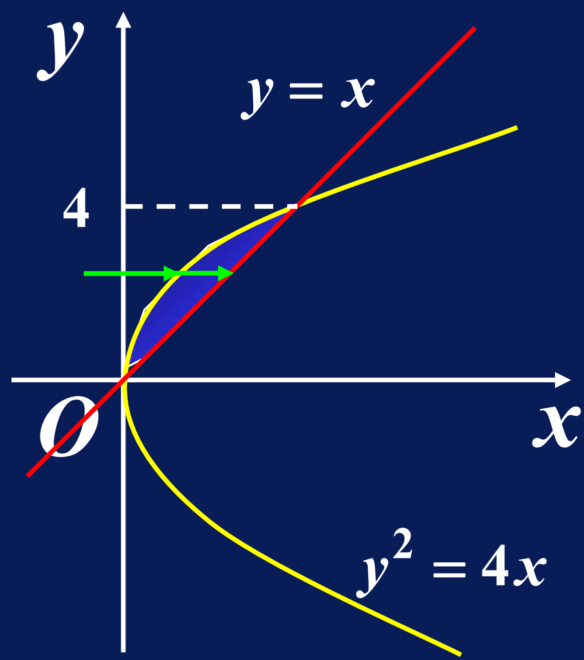
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

目录 上页 下页 返回 继续

D 又是 $Y-$ 型的，$y \in [0,4]$.

$\forall\, y \in (0,4)$, $\quad \dfrac{y^2}{4} \le x \le y.$

$D: \dfrac{y^2}{4} \le x \le y,\ 0 \le y \le 4,$



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

例2 交换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x;$

(2) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\,\mathrm{d}y;$

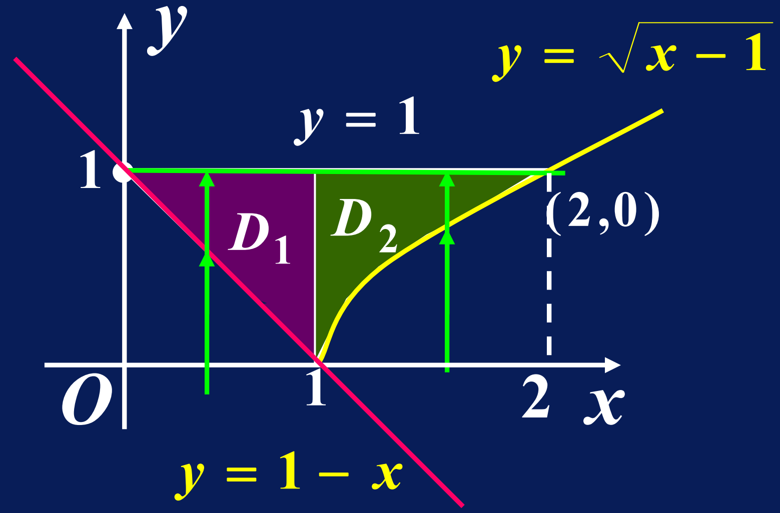
(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f\,\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_x^{\frac{2}{x}} f\,\mathrm{d}y.$

解 (1) 由二次积分的积分限可知

$$D: 0 \le y \le 1,\ 1 - y \le x \le 1 + y^2,$$

化为先对 y 后 x 的积分，

$$D = D_1 \cup D_2,$$



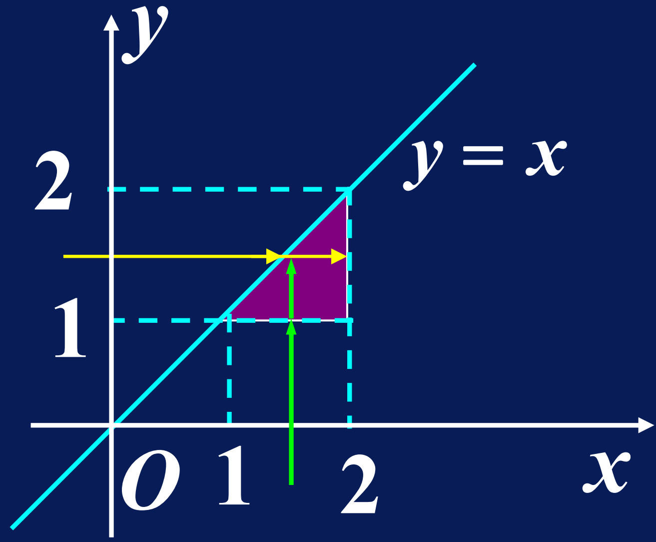
则有

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x-1}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

目录 上页 下页 返回 结束

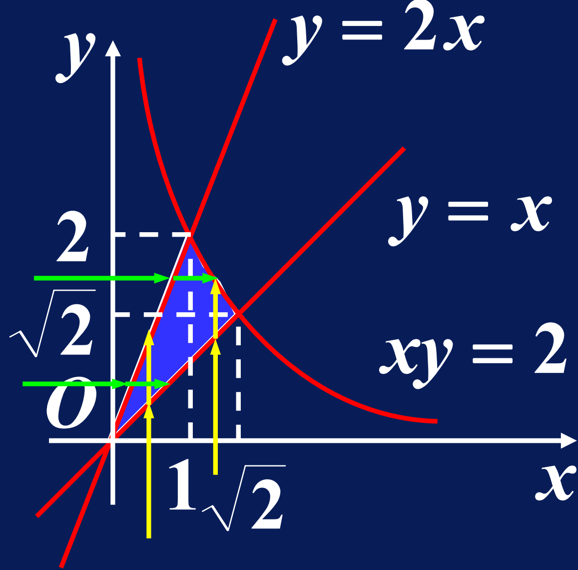
(2) $\int_1^2 \mathrm{d}\,x \int_1^x xy \,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_y^2 xy \,\mathrm{d}\,x$$



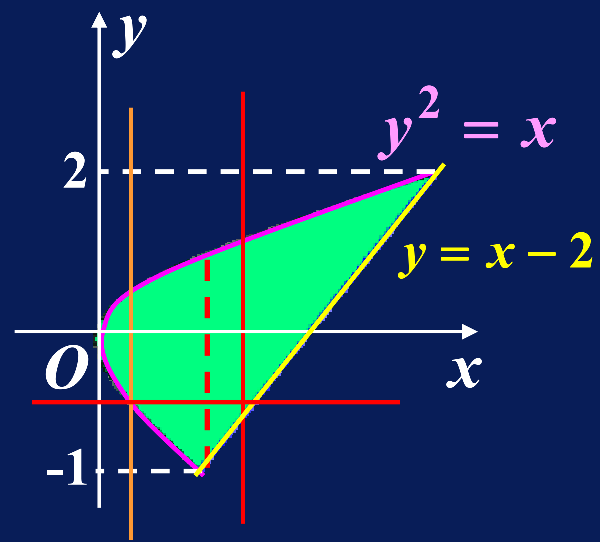
(3) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_x^{2x} f \,\mathrm{d}\,y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,x \int_x^{\frac{2}{x}} f \,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f \,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f \,\mathrm{d}\,x$$



例3 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

解 1° 画 D 的草图



求交点：$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases}$

$y^2 - y - 2 = 0,\ (y+1)(y-2) = 0$

$y = -1, y = 2$ 交点：$(1,-1), (4,2)$.

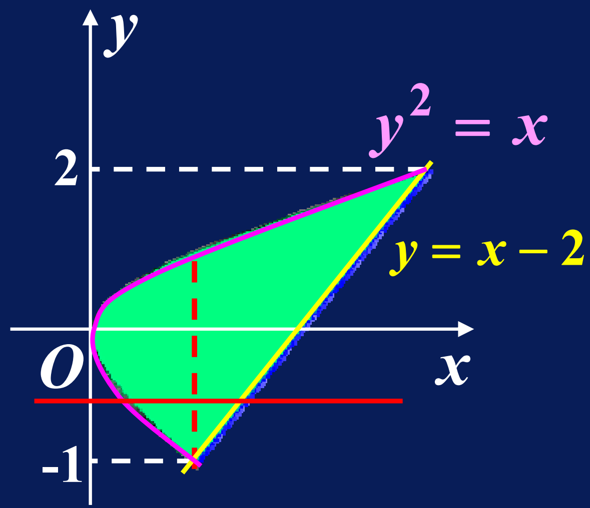
2° 选择积分变量，定限

先对 x, 后对y 积分

$$I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

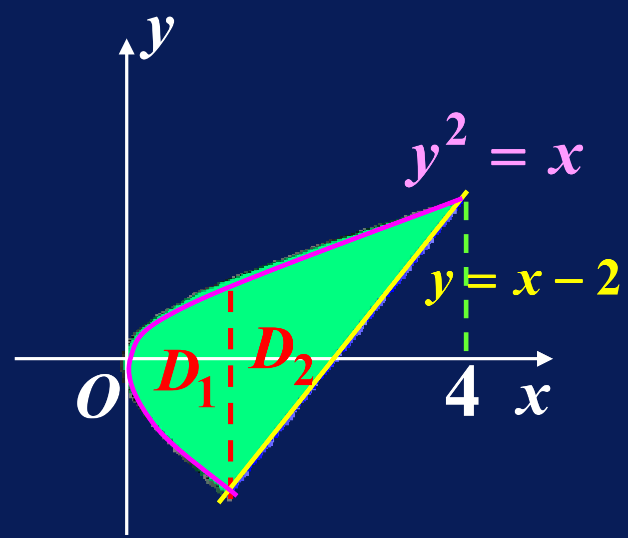
$$=\int_{-1}^{2}y\left(\int_{y^2}^{y+2}x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$



$$=\int_{-1}^{2}y\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=y^2}^{x=y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}y[(y+2)^2-y^4]\mathrm{d}y=\frac{45}{8}.$$

注 若选择先对y 后对 x 积分的次序,

则有



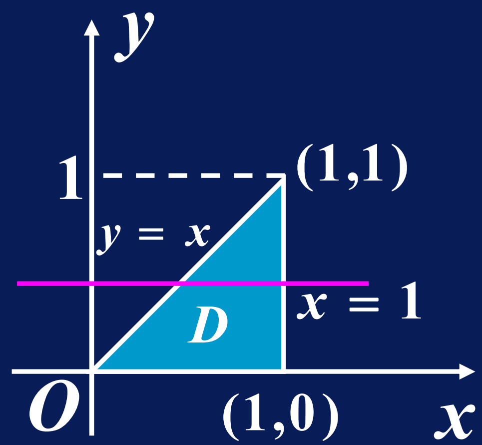
$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_1^4 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

显然这样计算会麻烦些.

例4 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,\sigma$, 其中 D是由直线 $y=x, x=1$和x轴围成的三角形区域 .

解 D既是 X—型, 又是 Y—型.



若将积分区域看成 Y – 型:

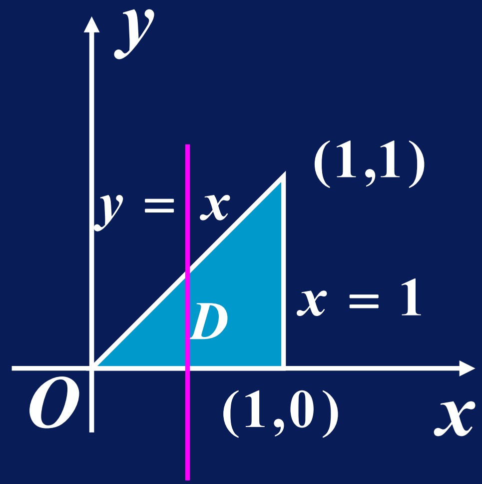
$$D: y \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$$

则有 $$\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x,$$

但$\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x$无法算出.

目录 上页 下页 例题 继续

若将积分区域看成 X – 型:



则 $$\iint_D e^{x^2}\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2}\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x^2} y\right)\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(e-1).$$

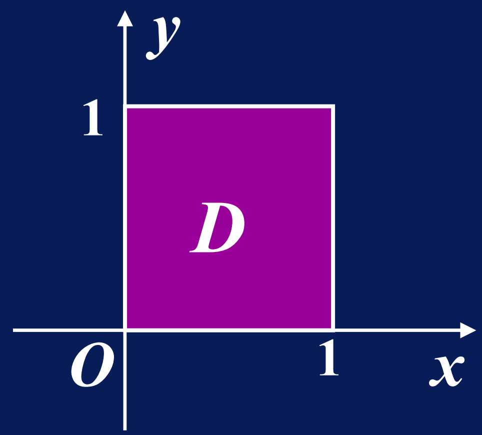
注 计算二重积分时，要适当地选择积分次序.

先对哪个变量积分，要视积分区域 D 及被积函数 $f(x,y)$ 的不同情况而定.

例5 计算 $I=\iint\limits_{D}(\sqrt{y^2-2x^2y+x^4}+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

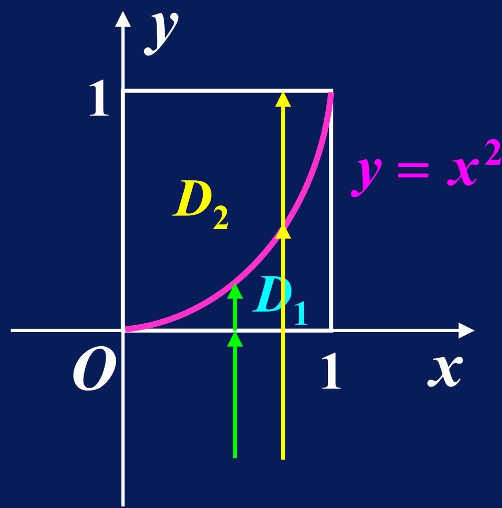
其中 $D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$

解
$$I=\iint\limits_{D}(\sqrt{(y-x^2)^2}+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}(\left|y-x^2\right|+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+1$$



目 录 上 页 下 页 例5-1 继 续

$$\left|y-x^2\right|=\begin{cases}x^2-y, & y<x^2 \quad (D_1)\\ y-x^2, & y\ge x^2 \quad (D_2)\end{cases}$$



分界线： $y=x^2$， $D=D_1\cup D_2$，

$$I=\iint\limits_D \left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+1$$

$$=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+1$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\,\mathrm{d}y+1$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (y-x^2)\,\mathrm{d}y+1$$

$$=\int_0^1 -\frac{1}{2}(x^2-y)^2\Big|_{y=0}^{y=x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_{y=x^2}^{y=1}\,\mathrm{d}x+1$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x+1$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{4}{15}+1=\frac{41}{30}.$$

例6 计算 $\iint\limits_D (3x^3 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是两条抛物线 $y = x^2$ 与 $y = 4x^2$，$y = 1$ 所围．

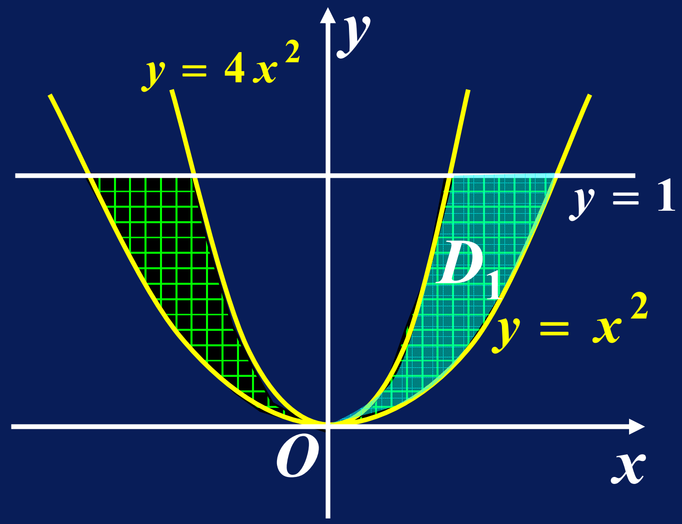
解 D 关于 y 轴 $(x = 0)$ 对称，

关于 x 是奇函数

$$\iint\limits_D (3x^3 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D 3x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

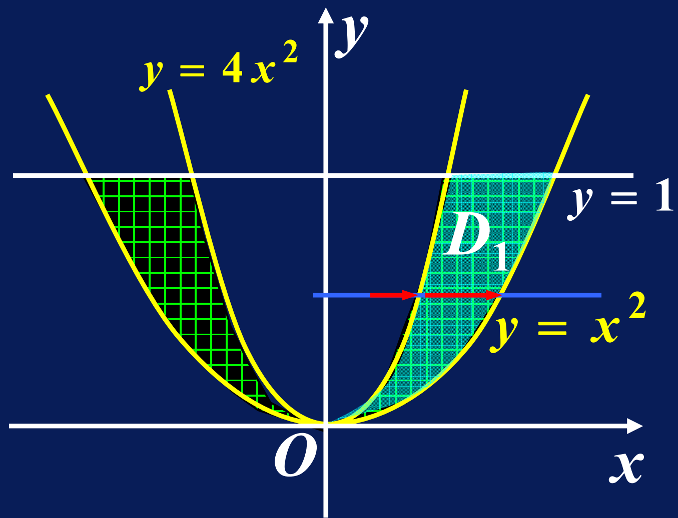


$$\iint_D (3x^3 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{5}.$$



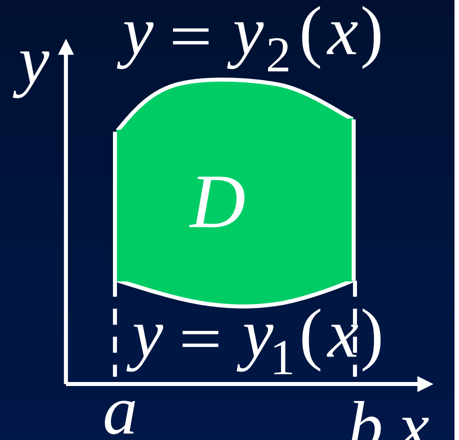
内容小结

(1) 直角坐标系情形下二重积分化为累次积分的方法

- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

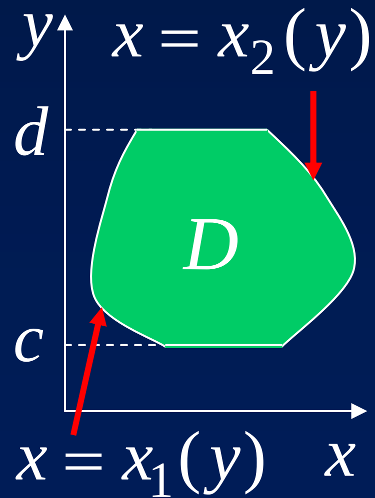
则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$



- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\},$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$



(2) 计算步骤

1° 画出积分域;

2° 确定积分次序;

3° 写出积分限;

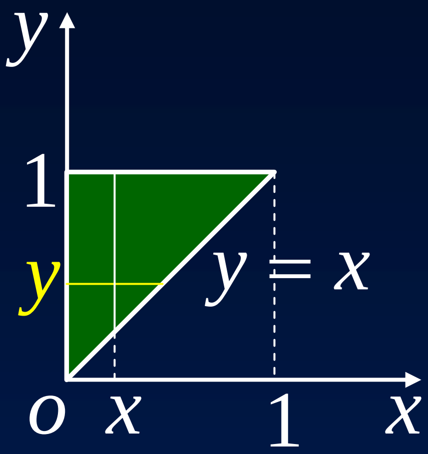
4° 计算累次积分.

目录 上页 下页 返回 结束

思考题

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.



提示 交换积分顺序后, x , y 互换

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=A^2$$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 设D是平面上以$A(1,1)$, $B(-1,1)$和$C(-1,-1)$为顶点的三角形, D_1是它的第一象限部分,

设 $I=\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 则有 (　　).

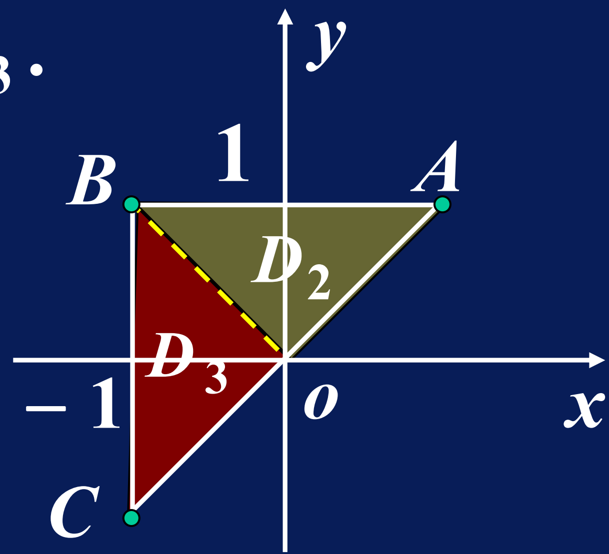
(A) $I=4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(B) $I=2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $I=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(D) $I=4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解 连 BO, 把 D 分成 $D_2 \cup D_3$.



因为D_2关于y轴对称,

D_3关于x轴对称,

被积函数 xy关于x为奇函数,

关于 y也为奇函数 ,

$$\therefore \quad \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_3} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 0.$$

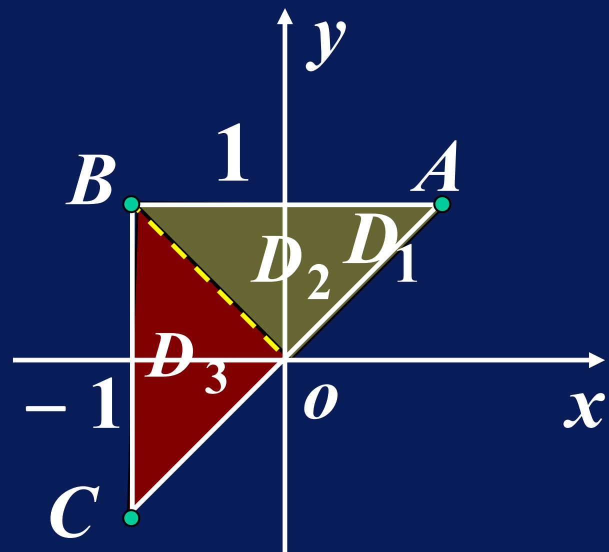
又被积函数 $\cos x \sin y$ 关于 x 为偶函数，

关于 y 为奇函数，

$$\therefore \quad \iint_D \cos x \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_2} \cos x \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_3} \cos x \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_1} \cos x \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



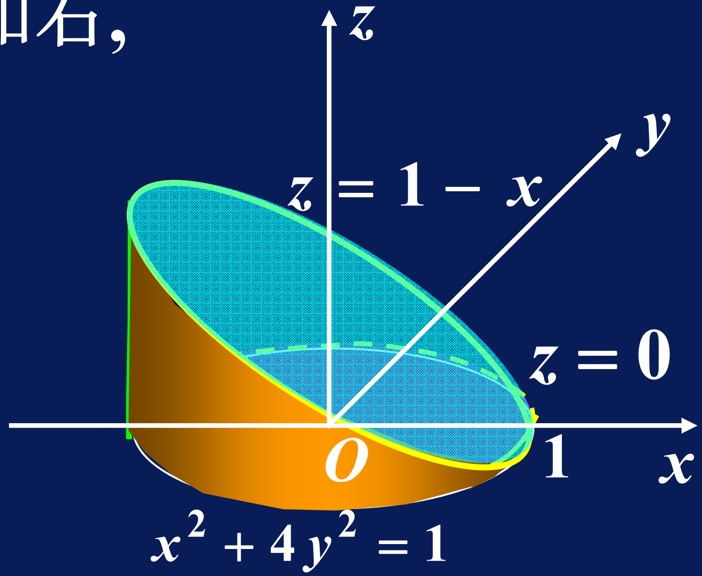
因此应选 B.

3. 求椭圆柱面 $x^2+4y^2=1$与平面 $z=1-x$及 $z=0$所围成的空间体的体积 .

解　画出该空间体的图形如右,

这是一个曲顶柱体，其顶

为 $z=1-x$，底为



$$D:\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 1\}$$

$$=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-4y^2}\le x\le\sqrt{1-4y^2},-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\}.$$

目录　上页　下页　返回　结束

于是所求体积为

$$V=\iint_D(1-x)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma-\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma$$

由对称性知

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma=0$$

而积分 $\iint_D\mathrm{d}\sigma$ 数值上等于区域 D 的面积 $\frac{\pi}{2}$，故

$$V=\frac{\pi}{2}.$$

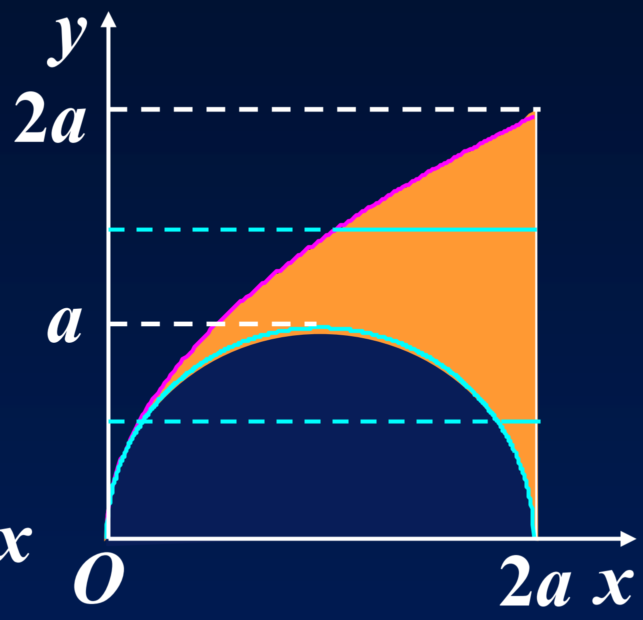
备用题

例2-1 改变 $\int_0^{2a} \mathrm{d}\,x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \ (a>0)$ 的积分次序.

解 $y=\sqrt{2ax} \Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$

$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$

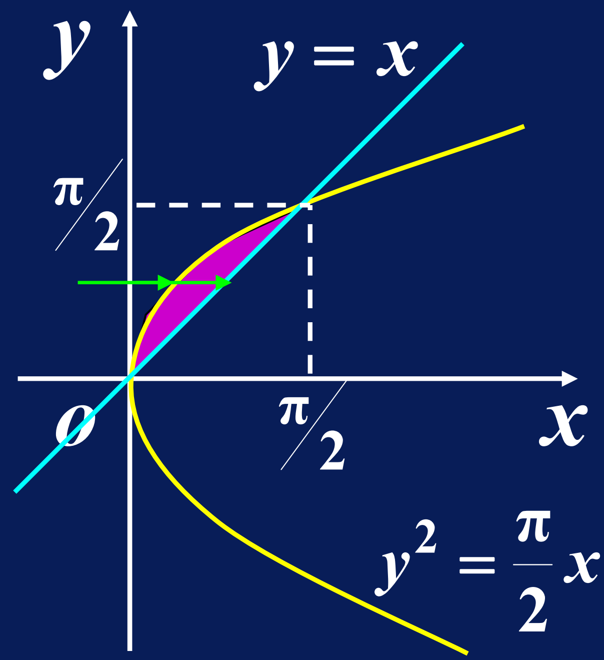


$$原式=\int_0^a \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$+\int_0^a \mathrm{d}\,y \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x+\int_a^{2a} \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$$

例4-1 计算$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}\sigma$, D由$y^2=\frac{\pi}{2}x$与$y=x$所围.

解 选取先y后x的次序无法计算，只能取先x后y的次序.



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{2}{\pi}y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}\left(y-\frac{2}{\pi}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=1-\frac{2}{\pi}.$$

例4-2 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}\,x$.

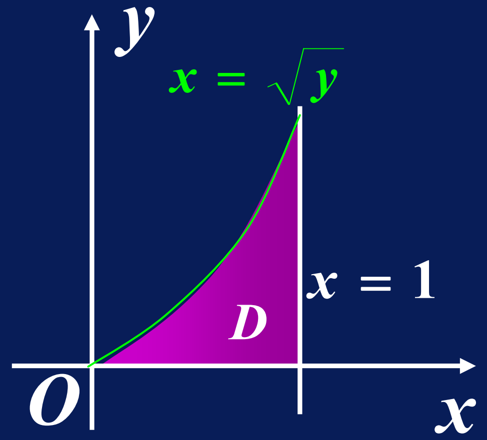
解 由于积分 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}\,x$无法求出，故考虑交换积分次序.

$$D: \sqrt{y} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

其边界区域为

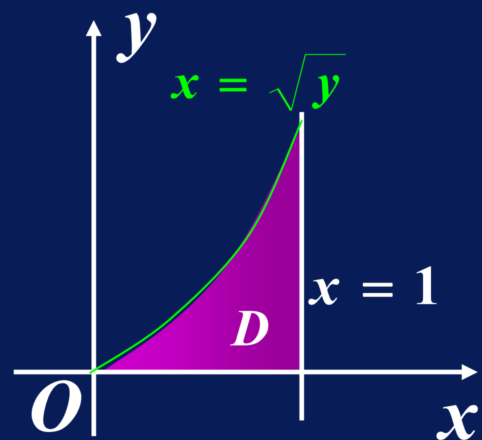
$$x = \sqrt{y},\ x = 1,\ y = 0$$

于是可作出 D的图形如右



再将 D 按另一种次序表示

$$D: 0 \le y \le x^2, 0 \le x \le 1$$



于是

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [x\mathrm{e}^{y/x}]_0^{x^2} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x\mathrm{e}^x - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

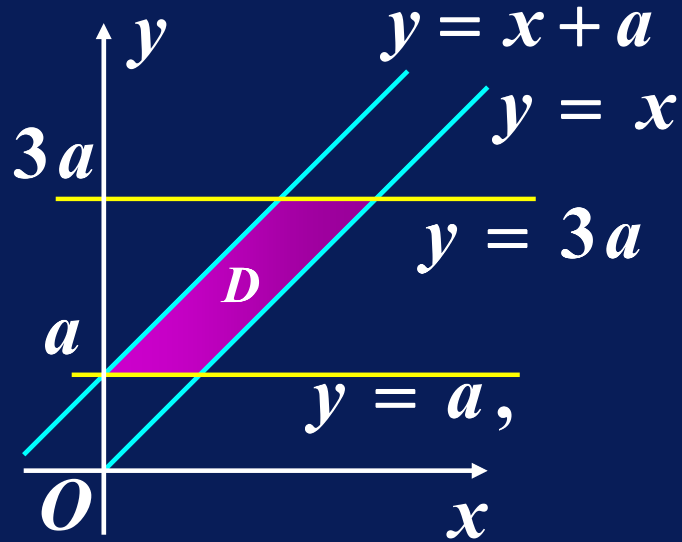
例4-3 用适当的积分次序计算 $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线 $y = x$，$y = x + a$，$y = a$，$y = 3a$ $(a > 0)$ 所围成的 闭区域.

解 由被积函数及积分区域的特点知，

选先x后y的次序比较合适.

$$I = \int_a^{3a} \mathrm{d}\,y \int_{y-a}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= 14\,a^4.$$

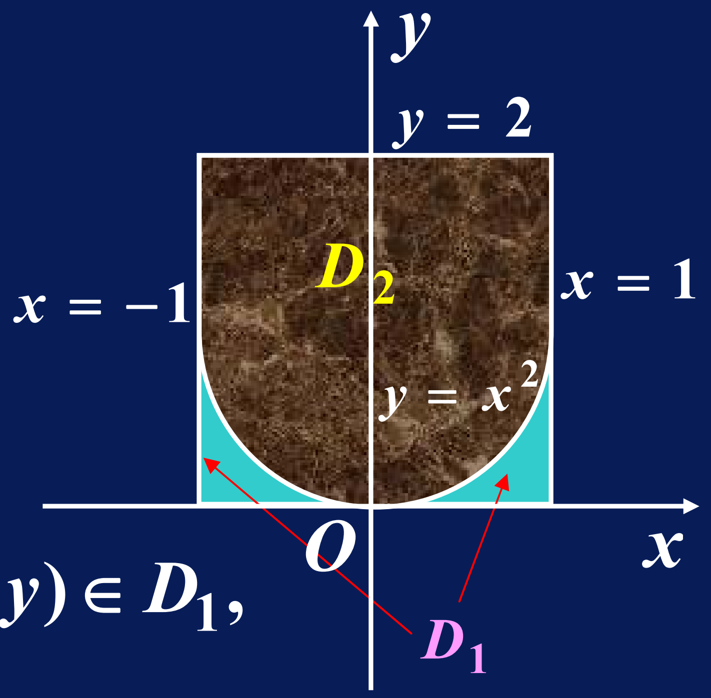


例5-1 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=1$, $x=-1$, $y=2$ 和x轴所围区域．

解 为去掉绝对值符号,

用抛物线 $y=x^2$将D

分为两个子区域 D_1, D_2,



$$\sqrt{|x^2-y|}=\begin{cases}\sqrt{x^2-y}, & (x,y)\in D_1,\\ \sqrt{y-x^2}, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D_1、D_2关于y轴$(x=0)$对称，

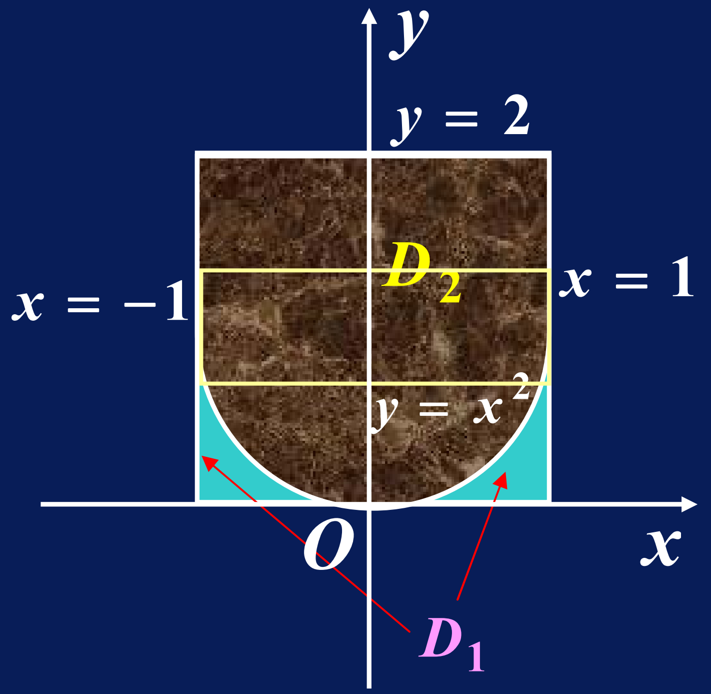
关于x 均为偶函数

$$=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$$

$$+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$$



例6-1 设 $f(x)$在[0,1]上连续，试证

$$\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx \geq 1.$$

证 设 $A=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx$

则有 $A=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(y)}\,dy$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{f(x)-f(y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 e^{f(y)}\,dy\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{f(y)-f(x)}\,dx\,dy$$

于是

$$2A=\int_0^1\int_0^1\left[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\frac{1}{\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\geq\int_0^1\int_0^1 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\quad(\text{利用 } a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2)$$

即

$$A=\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x\geq 1.$$

例6-2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

证 (方法1) 用二重积分证明

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2$

在矩形区域 D：$a\le x\le b, a\le y\le b$ 上连续，且

$$\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge 0.$$

显然 $$\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2 \mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D f^2(x)\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D f^2(y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geq 0,$$

$$\therefore\quad (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geq\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2,$$

两端同乘以 $\dfrac{1}{(b-a)^2}$ 并开方得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

(方法2) 用定积分证明

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，有

$$0 \le \int_a^b [f(x) + t\, g(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x + 2t \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x + t^2 \int_a^b g^2(x) \, \mathrm{d}x$$

由于关于 t 的二次三项式恒大于零，故判别式

$$\Delta = [2 \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x]^2 - 4 \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x) \, \mathrm{d}x \le 0,$$

即 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$

令$g(x)=1$,则有

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

两端同乘以$\dfrac{1}{(b-a)^2}$并开方得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

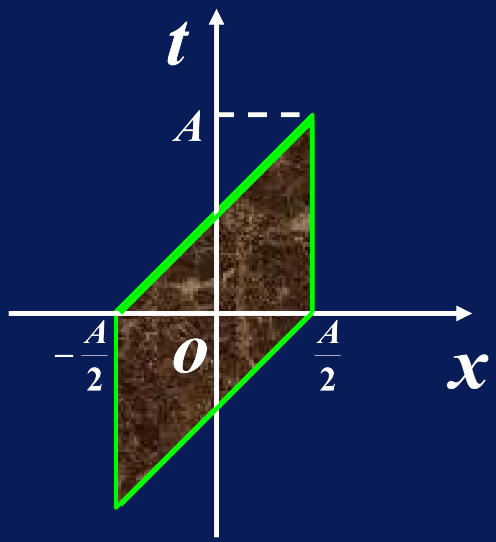
例6-3 设$f(t)$为连续函数，证明

$$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $D:|x|\le \dfrac{A}{2},|y|\le \dfrac{A}{2}$，$A$是常数 .

证
$$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{令}t=x-y}\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$



画出积分区域

目录 上页 下页 返回 结束

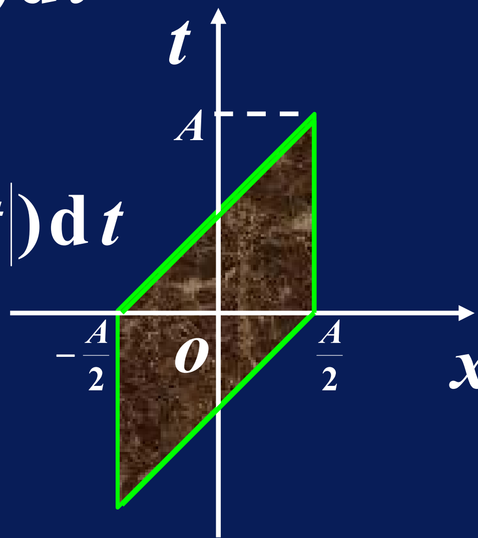
$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \mathrm{d}x \int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(t)\mathrm{d}t$ 交换积分次序

$$= \int_{-A}^{0} f(t)\mathrm{d}t \int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}} \mathrm{d}x + \int_{0}^{A} f(t)\mathrm{d}t \int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t)(A+t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} f(t)(A-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t.$$



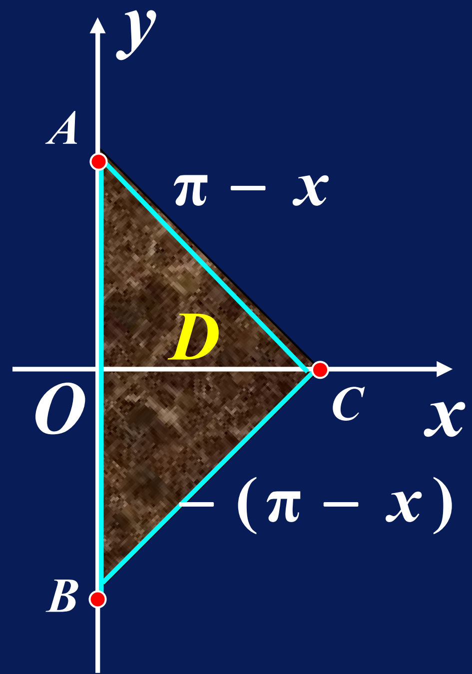
例7-1 计算 $\iint\limits_D y\sin x\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是以 $A(0,\pi)$, $B(0,-\pi)$, $C(\pi,0)$ 为顶点的三角形区域 .

解 D 关于 x 轴 $(y=0)$ 对称,

关于 y 是奇函数

$$\iint\limits_D y\sin x\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= 0.$$



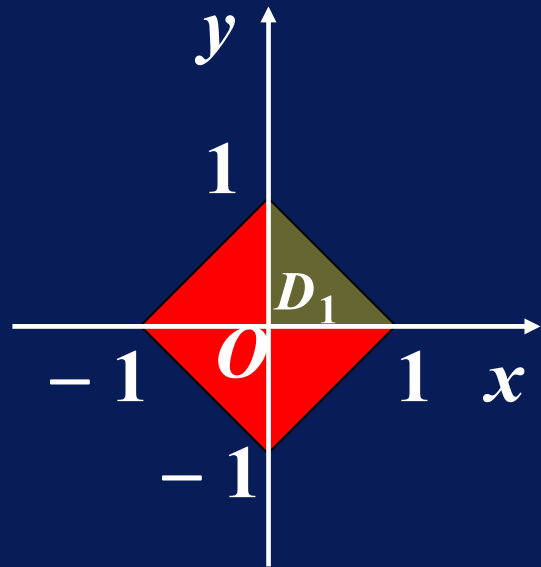
目录 上页 下页 返回 结束

例7-2 求$I = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D: |x| + |y| \le 1.$

关于x, y均为偶函数

解 D关于x, y轴对称,

$$I = 4\iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



再利用积分区域D_1和被积函数

关于变量x, y的轮换对称性, 得

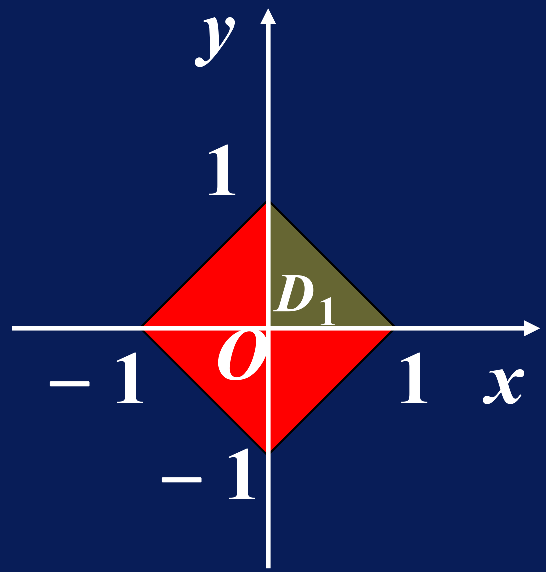
$$\iint\limits_{D_1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故

$$I = 8\iint_{D_1} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}.$$



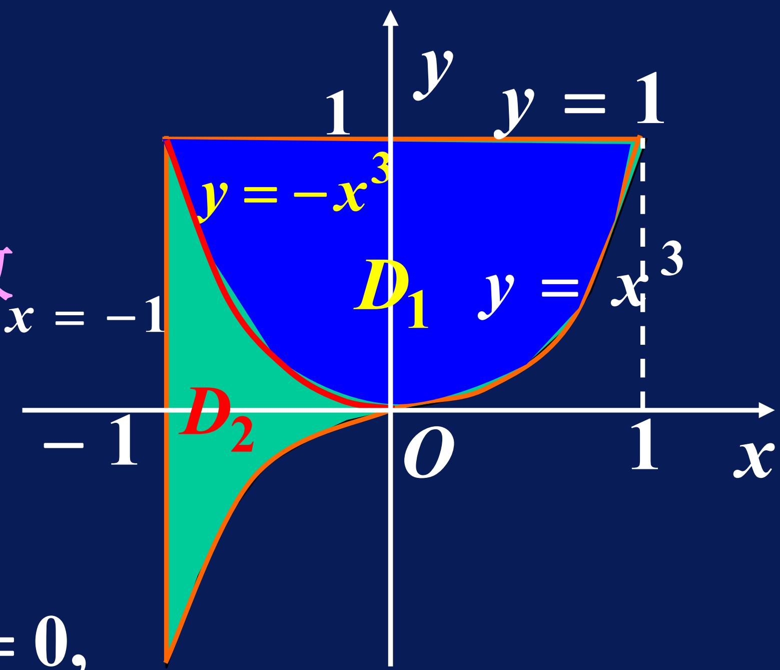
例7-3 求$I=\iint\limits_{D} x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$D$是由$y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 围成, f 是连续函数.

解 $I=\iint\limits_{D} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\iint\limits_{D} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

关于x, y均为奇函数

$$=\iint\limits_{D_1} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$



目录 上页 下页 返回 结束

$$I = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^3}^{1} x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} x(1 - x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{5}.$$