图论基本概念

图论

- 图论是用图的方法研究客观世界的一门科学；
- 用结点表示事物，用边表示事物间的联系，结点和边构成的图表示所研究的客观对象；
- 图论中所关注的并不是图的几何状态，而是其抽象结构性质；
- 将结点组成集合，将边看成集合上的关系，所以图论是从结构观点研究关系的一门学科。

主要内容

- 图论的基本概念
- 欧拉图、哈密顿图
- 树

预备知识

- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序集——$A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

图的定义

定义8.1 无向图$G = \langle V,E \rangle$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为**顶点**

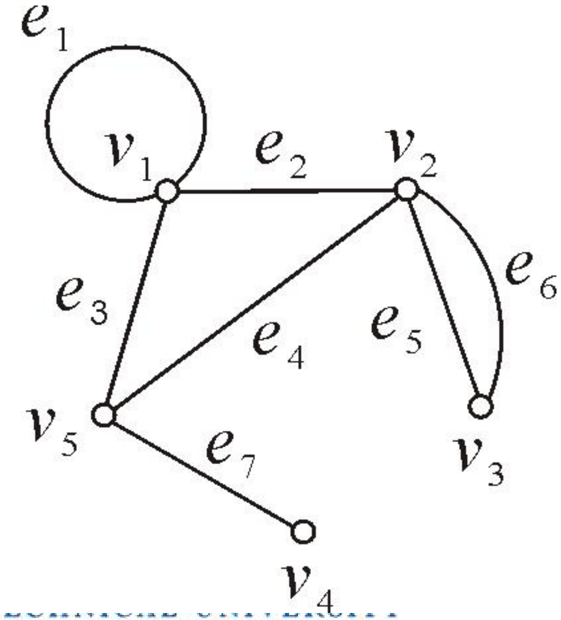
(2) E为$V\&V$ 的多重子集，其元素称为无向边，简称**边**

实例：

设 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3),$
$(v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

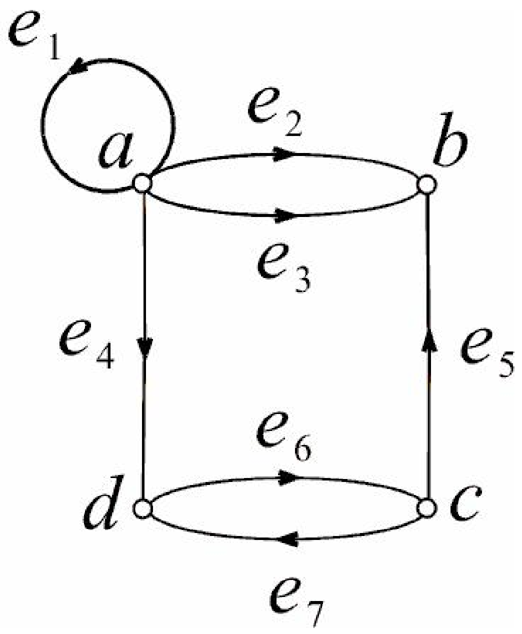
则 $G = \langle V,E \rangle$为一无向图



有向图

定义8.2 有向图$D=<V,E>$, 只需注意E是$V\times V$ 的多重子集

图2表示的是一个有向图，试写出它的V 和 E



注意：图的数学定义与图形表示，在同构（待叙）的意义下是一一对应的

相关概念1

1. 图
   ① 可用*G*泛指图（无向的或有向的）
   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$
   ③ 顶点数称为图的阶， *n*个顶点的图称作***n*阶图**
2. 有限图
3. 无边的图称为**零图**，*n* 阶零图记为N_n，1阶零图称为**平凡图**
4. 顶点集为空集称为**空图**——$\varnothing$

相关概念2

5. 用 e_k 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系
   ① 端点、关联、关联次数
   ② 环
   ③ 孤立点
7. 标定图与非标定图
8. 有向图的基图(将有向图中的有向边改成无向边)

相关概念3

9. 顶点之间的相邻(邻接)与边之间的相邻(邻接)

10. 邻域与关联集

① $v\in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v)\cup\{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e\in E(G)\wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v\in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge <v,u>\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge <u,v>\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$

多重图与简单图

定义8.3

(1) 无向图中的平行边及重数

(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图

(4) 简单图(不含平行边也不含环)

在定义8.3中定义的简单图是极其重要的概念

顶点的度数

定义8.4

(1) 设$G=<V,E>$为无向图, $\forall v\in V$, $d(v)$——v的度数(次数), 简称度: v作为边的端点的次数

(2) 设$D=<V,E>$为有向图, $\forall v\in V$,

$d^+(v)$——v的出度(引出次数)

$d^-(v)$——v的入度(引入次数)

$d(v)$——v的度或度数$= d^+(v)+d^-(v)$

(3) 最大度$\Delta(G)$ $\Delta(D)$, 最小度$\delta(G)$ $\delta(D)$

(4) 最大出度$\Delta^+(D)$, 最小出度$\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$

(5) 奇度顶点与偶度顶点，度数为1称为悬挂顶点，悬挂边

握手定理

定理8.1 设G=<V,E>为任意无向图，V={v_1,v_2,…,v_n}, |E|=m, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理8.2 设D=<V,E>为任意有向图，V={v_1,v_2,…,v_n}, |E|=m, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

本定理的证明类似于定理8.1

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=<V,E>$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为奇数$\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为偶数$\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解　本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$，则

$$d(v_i) \leq 2，\ i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$32 \leq 24+2x$$

得 $x \geq 4$, 阶数 $n \geq 4+4+3=11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

图的同构

定义8.5 设G_1=<V_1,E_1>, G_2=<V_2,E_2>为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1 \to V_2$, 对于$v_i,v_j \in V_1$, $(v_i,v_j) \in E_1$当且仅当$(f(v_i),f(v_j)) \in E_2$ (<v_i,v_j>$\in E_1$当且仅当<$f(v_i),f(v_j)$>$\in E_2$) 并且, (v_i,v_j)（<v_i,v_j>）与$(f(v_i),f(v_j))$（<$f(v_i),f(v_j)$>）的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性，即等价.
- 能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件：

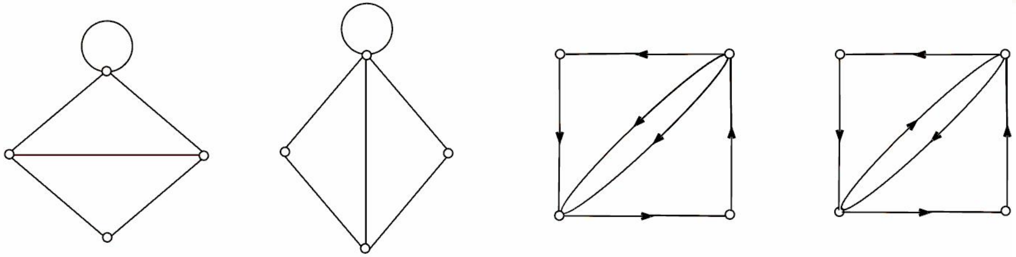
① 边数相同，顶点数相同; ② 度数列相同;

③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

若破坏必要条件，则两图不同构

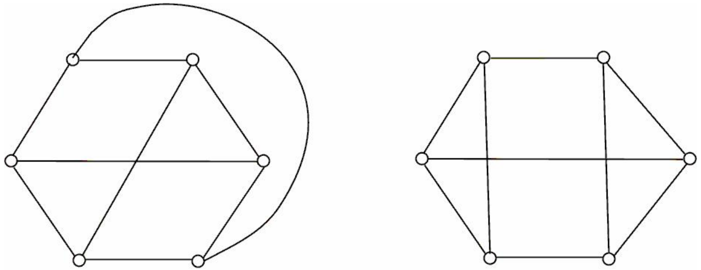
判断两个图同构是个难题

图同构的实例



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图中，(1)与(2)不同构（度数列不同），(3)与(4)也不同构.



(1)　　(2)

图中(1)与(2)的度数列相同，它们同构吗？为什么？

n 阶完全图与竞赛图

定义8.6

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

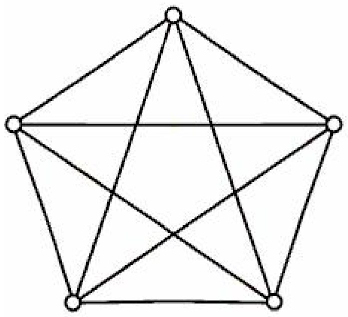
(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质： $m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^+=\delta^+=n-1$

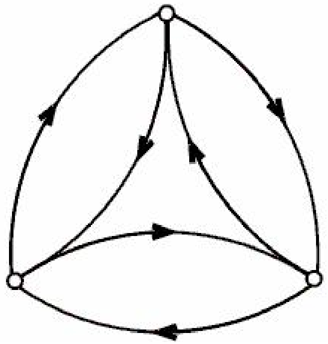
(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

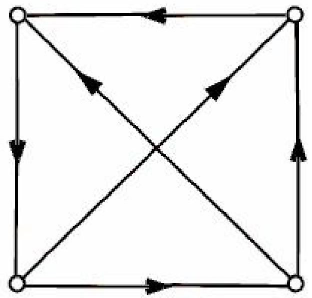
n 阶完全图与竞赛图的例子



(1)



(2)



(3)

(1)为K_5，(2)为3阶有向完全图，(3)为4阶竞赛图.

n 阶 k 正则图

定义8.7 n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

简单性质：边数（由握手定理得）

$$m=\frac{nk}{2}$$

K_n是 $n-1$正则图

子图

定义8.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(1) $G'\subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图

(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

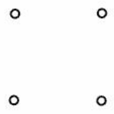
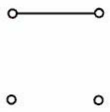
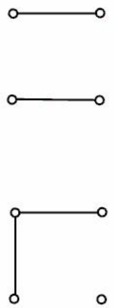
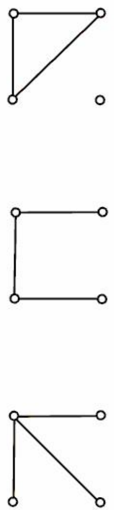
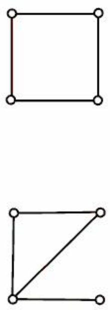
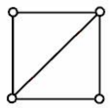
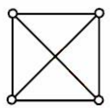
(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

(4) V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$

(5) E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

补图

定义8.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合导出的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.

若$G \cong \overline{G}$, 则称G是自补图.

相对于K_4, m=3时，指出上面图中的补图和自补图.

THE END