生成树

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9.2 生成树

定义9.2 设G为无向图

(1) G的**树**——T是G的子图并且是树

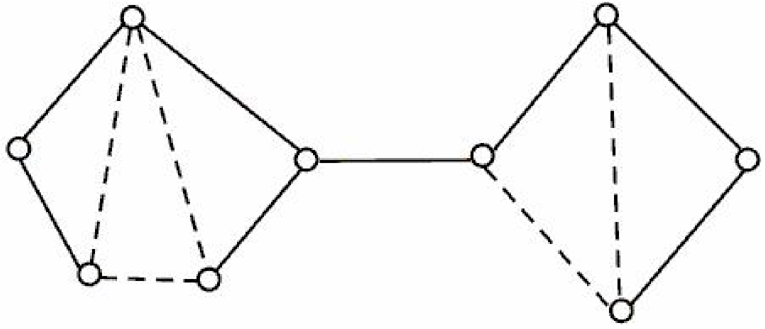
(2) G的**生成树**——T是G的生成子图并且是树

(3) 生成树T的**树枝**——T中的边

(4) 生成树T的**弦**——不在T中的边

(5) 生成树T的**余树**$\overline{T}$——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路。生成树T不唯一。如图所示



生成树存在条件

定理9.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.

充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

——求生成树的方法: 寻找基本回路, 删除其一边

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m\geq n-1$.

推论2 $\overline{T}$ 的边数为$m-n+1$.　　这个数称为G的基本回路的秩

推论3 $\overline{T}$为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与 $\overline{T}$一定有公共边.

证 否则，C中的边全在T中，这与T为树矛盾.

基本回路系统

定理9.4 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$形成一个圈. 不同的弦对应的圈也不同.

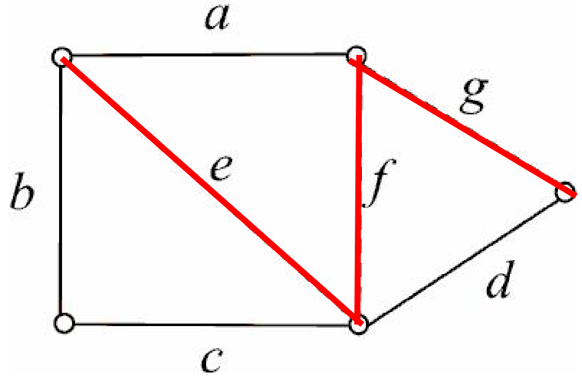
证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有唯一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义9.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e'_r$产生的只含弦$e'_r$、其余边均为树枝的圈. 称$C_r$为$G$的对应弦$e'_r$的**基本回路**或**基本圈**，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的**基本回路系统**，称$m-n+1$为$G$的**基本回路的秩(圈秩)**，记作$\xi(G)$.

求基本回路的算法：设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

实例

例3 图中实线边所示为生成树，求基本回路系统



解 弦e, f, g对应的基本回路分别为

$C_e = e\ b\ c$, $C_f = f\ a\ b\ c$, $C_g = g\ a\ b\ c\ d$,

$C_{基} = \{C_e, C_f, C_g\}$.

最小生成树

定义9.4 T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) **最小生成树**——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法

避圈法（Kruskal克鲁斯卡尔算法）

设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

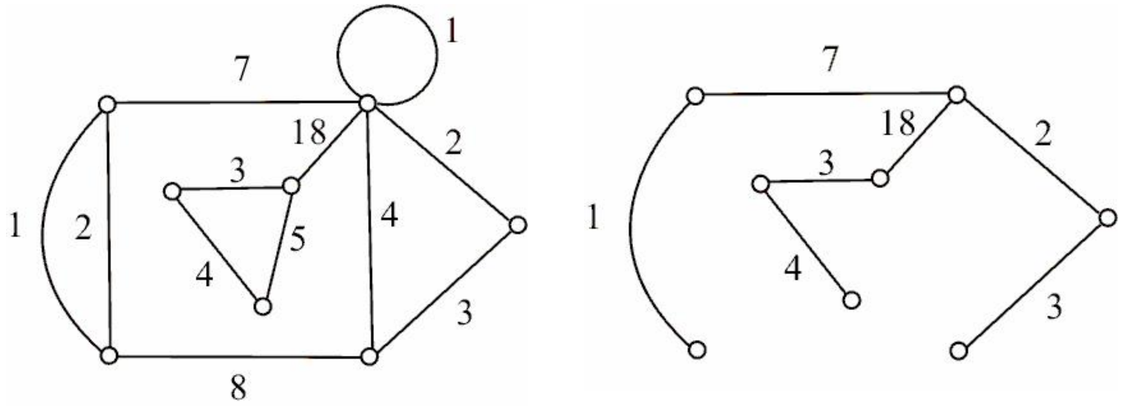
(1) 取e_1在T中;

(2) 依次查$e_2, \ldots, e_m$.若$e_j(j\geq 2)$与已在T中的边不能构成回路，则取e_j也在T中，否则弃e_j;

(3) 直到得到生成树为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.

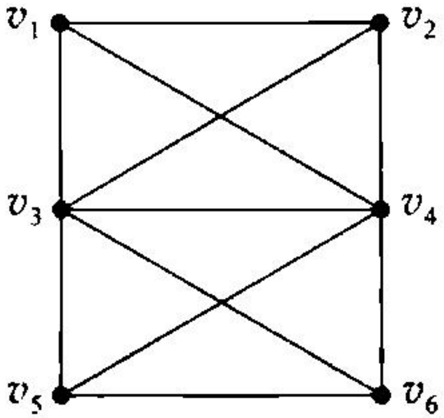


所求最小生成树如图所示 $W(T)=38$.

实例

实际应用　6个城市之间架设的输油管道的守护问题.

1. 最少需要多少队士兵?
2. 驻守在哪里?



实际是求生成树的边数，以及最小生成树.

THE END