高等数学总复习专栏一

求极限的各种方法

1．约去零因子求极限

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

分析：$x\to 1$表明x与 1无限接近，但$x\neq 1$，所以$x-1$这一零因子可以约去.

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(x^2+1)=6$ =4

2．分子分母同除求极限

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}$

分析：$\dfrac{\infty}{\infty}$型且分子分母都以多项式给出的极限，可通过分子分母同除来求.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$

【注】(1) 一般分子分母同除x的最高次方；

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & m>n\\ \infty & m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n} & m=n\end{cases}$$

3．分子(母)有理化求极限

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$

分析：分子或分母有理化求极限，是通过有理化化去无理式.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=0$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{4}$

【注】本题除了使用分子有理化方法外，及时分离极限式中的非零因子是解题的关键.

4．应用两个重要极限求极限

两个重要极限是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

分析：第二个重要极限主要搞清楚凑的步骤：先凑出 1，再凑 $+\dfrac{1}{X}$，最后凑指数部分.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=e^2$

例 6 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$；(2) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a.

5. 用等价无穷小量代换求极限

(1) 常见等价无穷小有

当 $x \to 0$ 时，$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim \mathrm{e}^x - 1$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+ax)^b - 1 \sim abx$；

(2)等价无穷小量代换，只能代换极限式中的因式；

(3)此方法在各种求极限的方法中应作为首选.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$.

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan^3 x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} == \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

6 用罗比达法则求极限

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x - \ln(1+\sin^2 x)}{x^2}$

分析：$\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 型的极限，可通过罗比达法则来求.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x - \ln(1+\sin^2 x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{-2}{\cos 2x} - \frac{1}{1+\sin^2 x}\right) = -3$

【注】遇到含有变上限函数的极限时，常用罗比达法则求解.

例 10 设函数 f(x) 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

解：由于 $\int_0^x f(x-t)dt \overset{x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt \Big/ x}{\int_0^x f(u)du \Big/ x + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}.$$

7．用指对数恒等式求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ 极限

例 11 极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}} = e^2.$

【注】重要命题：当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则未定式 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ 的极限，也可用公式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1]\cdot g(x)} \quad \text{计算.}$$

证：由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln[1+(f(x)-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

例 13 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=1$， $f'(0)=6$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{3}{n}\right)\right]^n$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{3}{n}\right)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[f\left(\frac{3}{n}\right)\right]^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[f\left(\frac{3}{n}\right)\right]^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{3}{n}\right)-1\right]\cdot n}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(0+\frac{3}{n}\right)-f(0)\right]}{\frac{1}{n}}}=e^{3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(0+\frac{3}{n}\right)-f(0)\right]}{\frac{3}{n}}}=e^{3f'(0)}=e^{18}$$

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解法 1　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

解法 2　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

8．利用 Taylor 公式求极限

例 14　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$,　$(a>0)$.

解：由于 $a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+\frac{x^2}{2}\ln^2 a+\circ(x^2)$，

$$a^{-x}=1-x\ln a+\frac{x^2}{2}\ln^2 a+\circ(x^2)；$$

$$a^x+a^{-x}-2=x^2\ln^2 a+\circ(x^2).$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln^2 a+\circ(x^2)}{x^2}=\ln^2 a$.

例 15　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x}-\cot x)$.

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x}-\cot x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-x[1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!})x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

9．数列极限转化成函数极限求解

例 16 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

分析：　这是1^∞形式的的数列极限，由于数列极限不能使用罗比达法则，若直接求有一定难度，若转化成函数极限，可通过例 11 注释的重要命题提供的方法，再结合罗比达法则求解.

解：考虑函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}\overset{令\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to 0^+}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}}\ \lim_{t\to 0^+}e^{\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$

10．n 项和数列极限问题

n 项和数列极限问题极限问题有两种处理方法

(1)用定积分的定义把极限转化为定积分来计算;

(2)利用两边夹法则求极限.

例 17 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

分析：用定积分的定义把极限转化为定积分计算，把 $f(x)$ 看成

[0, 1] 定积分. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(\sqrt{2}+1)$$

例 18 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

【说明】

(1)该题遇上一题类似，但是不能凑成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ 的形式，因而用两边夹法则求解;

(2) 两边夹法则需要放大不等式，常用的方法是都换成最大的或最小的.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

11．单调有界数列的极限问题

例 19 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$

(I) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；

(II) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析： 一般利用单调增加有上界或单调减少有下界数列必有极限的准则来证明数列极限的存在.

解: (I) 因为$0<x_1<\pi$，则$0<x_2=\sin x_1\le 1<\pi$.

可推得 $0<x_{n+1}=\sin x_n\le 1<\pi, n=1,2,\cdots$，则数列$\{x_n\}$有界.

于是 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}<1$，（因当$x>0$时$,\sin x<x$）， 则有$x_{n+1}<x_n$，

可见数列$\{x_n\}$单调减少，故由单调减少有下界的数列必有极限知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_{n+1}=\sin x_n$两边令$n\to\infty$，得 $l=\sin l$，解得$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

解：(II) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由(I)知该极限为$1^\infty$型，

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

故 原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

注：通过例 11 注释的重要命题提供的方法，再结合罗比塔法则，可得正解.