21—22 学年微积分(上)期中试题解答

21-11-6

一、（40 分）1. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；　2. 2,　1；　3. $a=1, b=\mathrm{e}$；　4. -4；

5. $\ln 2\cdot 2^{\tan x}\cdot\sec^2 x$；　6. $-\mathrm{e}^{-1}$；　7. $(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}\ (n\geq 2)$；

8. $\frac{1}{2}$；　9. 3；　10. $n!\varphi(a)$.

二、（40 分）1. D;　2.C;　3.A;　4.A;　5.C;　6.B;　7.B;　8.C;　9.A;　10.D.

三、解　设 $y=(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$，则 $\ln y = x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi})+\ln\arctan x}{x^{-1}}$$（3 分）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}$$（5 分）$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}$$（6 分）

故　原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}y=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.（7 分）

四、解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta,$$（4 分）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan\theta)=\frac{\frac{\mathrm{d}(-\tan\theta)}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}$$（6 分）

$$=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta$$（7 分）

五、解　$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^x+\beta)=1+\beta$，$f(0)=1+\beta$，（1 分）

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0, & \alpha>0\\ \text{不存在}, & \alpha\le 0\end{cases},$$（3 分）

(1)当$\alpha>0,\beta=-1$时，$f(x)$在$x=0$处连续；

（2）当$\alpha>0,\beta\ne -1$时，$x=0$为$f(x)$的第一类跳跃间断点；

（3）当$\alpha\le 0,\beta$为任意实数时，$x=0$为$f(x)$的第二类间断点.（6 分）

六、证　当$M=0$时，$f(x)\equiv 0$，则对$\forall\xi\in(0,2)$，有$|f'(\xi)|\ge M=0$.（2 分）

当$M>0$时，设$M=|f(x_0)|$.

（a）　若$x_0\in(0,1)$，因$f(x)$在$[0,x_0]$上可导，利用微分中值定理，存在$\xi\in(0,x_0)$，使

$f(x_0)-f(0)=f'(\xi)x_0$，

故　$$|f'(\xi)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0}>|f(x_0)|=M.$$（6 分）

（b）　若$x_0\in(1,2)$，因$f(x)$在$[x_0,2]$上可导，利用微分中值定理，存在$\xi\in(x_0,2)$，使

$f(2)-f(x_0)=f'(\xi)(2-x_0)$，

故　$$|f'(\xi)|=\frac{|f(x_0)|}{2-x_0}>|f(x_0)|=M.$$（9 分）

（c）　若$x_0=1$，因$f(x)$在$[0,1]$上可导，利用微分中值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使

$f(1)-f(0)=f'(\xi)$，

故　$|f'(\xi)|=|f(1)|=M$.

综上，存在$\xi\in(0,2)$，使$|f'(\xi)|\ge M$.（10 分）