

西北工业大学《线性代数》2018-2019 第一学期期末试卷

一、填空题（将正确答案填在题中横线上。每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $A_{n \times n}$ 满足 $A^2 - A + 2E = O$, 则 $A^{-1} =$ _____。

2. 若齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 只有零解, 则 λ 应满足_____。

3. 已知矩阵 $A, B, C = (c_{ij})_{s \times n}$, 满足 $AC = CB$, 则 A 与 B 分别是_____阶矩阵。

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ 的行向量组线性_____。

5. n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - E = O$, 则 $A^{-1} =$ _____。

二、判断正误（正确的在括号内填“√”，错误的在括号内填“×”。每小题 2 分，共 10 分）

1. 若行列式 D 中每个元素都大于零, 则 $D > 0$ 。()

2. 零向量一定可以表示成任意一组向量的线性组合。()

3. 向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 中, 如果 a_1 与 a_m 对应的分量成比例, 则向量组 a_1, a_2, \dots, a_s

线性相关。()

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = A$ 。()

5. 若 λ 为可逆矩阵 A 的特征值, 则 A^{-1} 的特征值为 λ 。()

三、单项选择题（每小题仅有一个正确答案，将正确答案题号填入括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $|A|A^T| =$ ()。

- ① 2^n ② 2^{n-1} ③ 2^{n+1} ④ 4

2. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充要条件是 ()。

- ① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

更多考试真题
请扫码获取



- ② $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示
- ③ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任一个向量都不能用其余向量线性表示
- ④ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中不含零向量

3. 下列命题中正确的是()。

- ① 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关
- ② 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关
- ③ 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关
- ④ 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

4. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 下面结论正确的是()。

- ① 若 A, B 均可逆, 则 $A+B$ 可逆
- ② 若 A, B 均可逆, 则 AB 可逆
- ③ 若 $A+B$ 可逆, 则 $A-B$ 可逆
- ④ 若 $A+B$ 可逆, 则 A, B 均可逆

5. 若 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ 是线性方程组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$ 是 $AX=0$

的()

- ① 解向量 ② 基础解系 ③ 通解 ④ A 的行向量

四、计算题 (每小题 9 分, 共 63 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$ 。

解·

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)x^3$$

2. 设 $AB = A + 2B$, 且 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 B 。

解. $(A - 2E)B = A$ $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足关系式 $X(C - B)' = E$, 求 X 。

4. 问 a 取何值时, 下列向量组线性相关 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ a \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ a \end{pmatrix}$ 。

5. λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解和有无穷多解当方程组有无穷多解时

求其通解。

① 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解;

② 当 $\lambda = -2$ 时方程组无解

③ 当 $\lambda = 1$ 时, 有无穷多组解, 通解为 $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$. 求此向量组的秩和一个极大无关组, 并将其余

向量用该极大无关组线性表示。

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值及对应的特征向量。

五、证明题 (7分)

若 A 是 n 阶方阵, 且 $AA^T = I, |A| = -1$, 证明 $|A + I| = 0$ 。其中 I 为单位矩阵。

微信公众号: 工大小星球