第四节

全微分方程

- 一、全微分方程及其求法
- ★ 二、积分因子法
- 三、一阶微分方程小结

一、全微分方程及其求法

1.类型5 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \quad (5.1)$

若 $\exists\, u=u(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}u(x,y)\equiv P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \quad (x,y)\in G$$

其中G为一单连通区域，则称 (5.1)为 全微分方程.

如: $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程

$$\because u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ \therefore \mathrm{d}u(x,y)=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y,$$

注 全微分方程(5.1)的通解为： $u(x,y)=C$

(C为任意常数).

事实上，$\forall$ 常数C,

$$u(x,y)=C \to y=y(x), \quad x\in I \text{ — 区间}$$

即 $u(x,y(x))\equiv C, \quad x\in I$

$\therefore \quad \mathrm{d}u(x,y(x))\equiv 0, \quad x\in I$

即 $\mathrm{d}u(x,y(x))\equiv P(x,y(x))\mathrm{d}x+Q(x,y(x))\mathrm{d}y(x)$

$\equiv 0, \quad x\in I$

$\therefore \quad u(x,y)=C$是(5.1)的(隐式)解.

2. 判别法

(5.1)是全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y)\in G$

其中 P，Q在单连通域 G内有一阶连续偏导数 .

3. 求解法 关键：求 $u(x, y)$.

常用的方法有三种：

1° 特殊路径法：

$P(x, y)\,\mathrm{d}\,x+Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y=0$ 全微分方程

由曲线积分与路径无关的四个等价命题，知

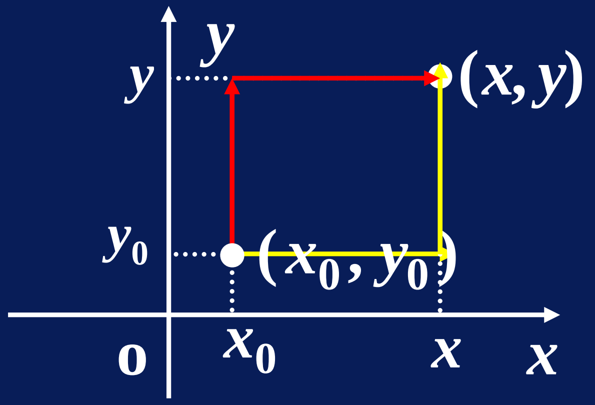
$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

(5.1)的通解为:

$$u(x,y)=C\,.$$



2° 分项组合法(凑微分法)：

思路：将 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 重新进行适当的组合，使得每一组合式的原函数易求.

3° 偏积分法：

$$\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q$$

$$u(x,y)=\int P\,\mathrm{d}x+C(y)$$

$$u(x,y)=\int P\,\mathrm{d}x+C(y) \qquad (5.2)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P\,\mathrm{d}x\right)+C'(y)$$

$$C'(y)=Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P\,\mathrm{d}x\right)=\varphi(y)$$

$$C(y)=\int\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

代入(5.2),即可求得 $u(x,y)$.

例1 求方程 $(\underbrace{x^3-3xy^2}_{P})\mathrm{d}x+(\underbrace{y^3-3x^2y}_{Q})\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 原方程是全微分方程

$$u(x,y)=\int_0^x(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+\int_0^y y^3\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4},$$

原方程的通解为 $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{y^4}{4}=C.$

例2 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$ 的通解.

解 原方程恒等变形为

$$\underbrace{(x-y+1)}_{P}\mathrm{d}x\underbrace{-(x+y^2+3)}_{Q}\mathrm{d}y=0$$

$\because$ $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$ 这是一个全微分方程

$\because \quad (x-y+1)\mathrm{d}x-(x+y^2+3)\mathrm{d}y$

$=(x+1)\mathrm{d}x-(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-(y^2+3)\mathrm{d}y$

$=\mathrm{d}[\dfrac{(x+1)^2}{2}-xy-(\dfrac{y^3}{3}+3y)]$

$\therefore$ 所求通解为

$$\frac{(x+1)^2}{2}-xy-(\frac{y^3}{3}+3y)=c.$$

★ 二、积分因子法

引例：求 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

可变量分离方程

解 $\because \quad P = y, \quad Q = -x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = -1$$

$\therefore$ 此方程不是全微分方程 . 如何求解?

$\frac{1}{y^2} \times$ 原方程，得 $\frac{1}{y}\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}(\frac{1}{y}) = 0$

全微分方程

原方程的通解为 $\frac{x}{y} = C.$

目录 上页 下页 返回 结束

1.定义 若 $\mu(x,y)\neq 0$是连续可微函数，使方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

成为全微分方程.则称$\mu(x,y)$为方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \quad (5.1)$$

的**积分因子**.

注 (5.1)的积分因子不惟一 .

如：对于引例，$\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{xy},\dfrac{1}{x^2\pm y^2}$均是该方程的积分因子.

例4 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解法1 整理得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{1+x}y=-x^2,$

原方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\left[\int -x^2e^{\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right],$$

$$=\frac{1}{1+x}\left[\int -x^2(1+x)\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{(1+x)}\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C\right).$$

解法2 将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 恒等变形为

$$(x^2+x^3+y)\mathrm{d}x+(1+x)\mathrm{d}y=0,$$

$\because\ \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 此方程是全微分方程.

(方法1) 特殊路径法:

$$u(x,y)=\int_0^x(x^2+x^3)\mathrm{d}x+\int_0^y(1+x)\mathrm{d}y,$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+(1+x)y,$$

$\therefore$ 原方程的通解为: $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+(1+x)y=C.$

(方法2) 凑微分法:

$$\mathrm{d}\,y+(x\,\mathrm{d}\,y+y\,\mathrm{d}\,x)+x^2\,\mathrm{d}\,x+x^3\,\mathrm{d}\,x=0,$$

$$\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=0,$$

$$\mathrm{d}\left(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)=0.$$

$\therefore$ 原方程的通解为: $y+xy+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=C.$

(方法3) 偏积分法: $\because \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + y,$

$$\therefore \quad u(x, y) = \int (x^2 + x^3 + y)\,\mathrm{d}\,x + C(y)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

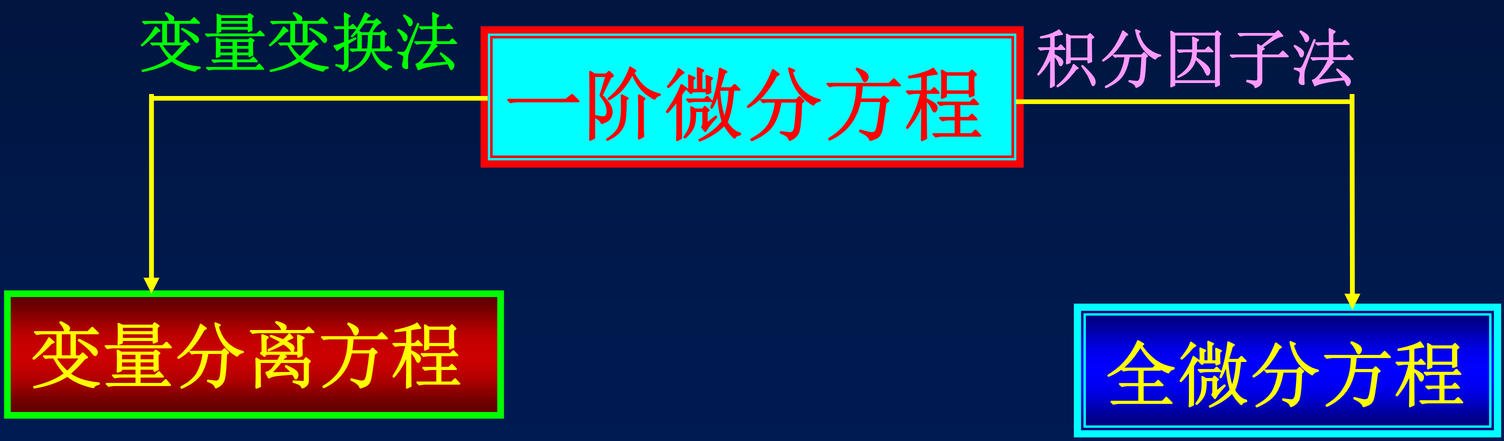
$\therefore \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y),$ 又 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$

$\therefore \quad x + C'(y) = 1 + x, \quad C'(y) = 1, \quad C(y) = y,$

原方程的通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$

三、一阶微分方程小结

用初等积分法求解一阶微分方程的思路有两条：



备用题

例1-1 求 $(\cos x - y)\mathrm{d}x - (x - 4y^3)\mathrm{d}y = 0$的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 此方程是全微分方程

将方程左端重新分项组合,

$$\cos x\,\mathrm{d}x + 4y^3\,\mathrm{d}y - (x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x) = 0$$

即 $$\mathrm{d}(\sin x) + \mathrm{d}(y^4) - \mathrm{d}(xy) = 0,$$

$$\mathrm{d}(\sin x + y^4 - xy) = 0,$$

故方程的通解为 $\sin x + y^4 - xy = C.$

例1-3 求微分方程

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=0$$ 的通解.

解 $2x\,\mathrm{d}x+2x\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$

$$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(x^2)-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}[\mathrm{d}(x^2)-\mathrm{d}y]$$

$$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(x^2-y)=\mathrm{d}[x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}]$$

原方程的通解为 $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$

例3-1 求微分方程

$$2xy\ln y\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y=0$$的通解.

解 将方程左端重新组合,有

$$(2xy\ln y\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y)+y^2\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0,$$

$$(y\cdot\ln y\,\mathrm{d}x^2+x^2\,\mathrm{d}y)+y^2\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0 \quad ①$$

易知 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{y}$, ① $\times\ \dfrac{1}{y}$, 得

$$(\ln y\,\mathrm{d}x^2+x^2\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y)+y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0,$$

全微分方程

$$\left(\ln y\,\mathrm{d}x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\right) + y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

全微分方程

$$\left(\ln y\,\mathrm{d}x^2 + x^2\,\mathrm{d}\ln y\right) + y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

即 $\mathrm{d}(x^2\ln y) + \frac{1}{3}\mathrm{d}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$

原方程的通解为

$$x^2\ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = C.$$

例4-1 求方程 $\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$的通解.

解法1 $\because \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{2x}{y^3})=-\frac{6x}{y^4},$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^2-3x^2}{y^4})=-\frac{6x}{y^4},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (y>0\text{或}y<0)$$

原方程是全微分方程.

(方法1) 分项组合法

$$\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y=0$$

将左端重新组合:

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+(\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x-\frac{3x^2}{y^4}\mathrm{d}y)=\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+[\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}(\frac{1}{y^3})]$$

$$=\mathrm{d}(-\frac{1}{y})+\mathrm{d}(\frac{x^2}{y^3})=\mathrm{d}(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}),$$

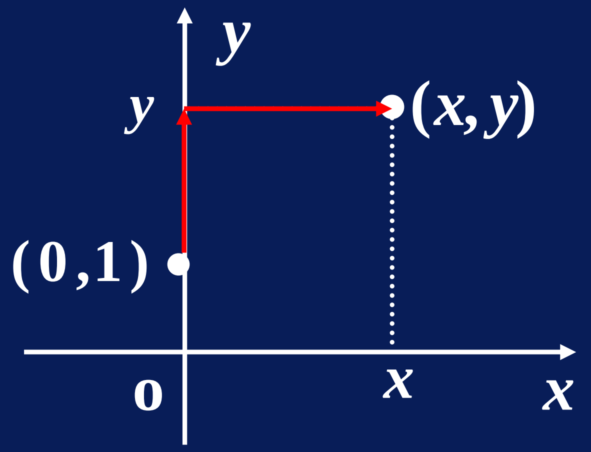
原方程的通解为: $-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}=C.$

(方法2) 特殊路径法

$$u(x,y)=\int_{(0\overset{?}{,}1)}^{(x,y)}\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^y\frac{y^2-0}{y^4}\,\mathrm{d}y+\int_0^x\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\Big|_1^y+\frac{1}{y^3}\cdot x^2\Big|_0^x$$

$$=1-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}$$



通解： $1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C_1$

即 $\quad -\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C.$

解法2

(方法1) $$\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$$ 齐次方程 令 $u=\dfrac{y}{x}$.

(方法2) 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{3}{2y}x-\frac{y}{2}x^{-1}$$ 关于x的$\alpha=-1$的伯努利方程

令 $z=x^2$.

例4-2 求方程： $x\,\mathrm{d}y = y(xy-1)\,\mathrm{d}x$ 的通解.

解 $x\,\mathrm{d}y = y(xy-1)\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} + y^2 \quad (\alpha = 2\ \text{伯努利方程})$$

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}y^{-1} + 1$$

令 $z = y^{-1}$， 得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x}z = -1$

原方程的通解：

$$y^{-1} = z = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int (-1)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right] = x(-\ln|x| + C)$$

例4-3 求 $(2y-3xy^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 $$(2y-3xy^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x}y-3y^2$$ 关于y的$\alpha=2$的伯努利方程

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=-3y^2$$

令 $z=y^{-1}$,得 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}z=3$$ 关于z的线性方程

通解: $$y^{-1}=z=e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int 3e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}(x^3+C)$$