陪集的定义与性质

陪集定义与性质

定义6.18 设H是G的子群，$a\in G$.令

$$Ha=\{h\circ a \mid h\in H\}$$

称Ha是子群H在G中的右陪集. 称a为Ha的代表元素.

定理6.22 设H是群G的子群，则

(1) $He = H$

(2) $\forall a\in G$ 有$a\in Ha$

(3) $\forall a,b\in G$有$a\in Hb \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb$

证 (1) $He = \{h\circ e \mid h\in H\} = \{h \mid h\in H\} = H$

(2) 任取 $a\in G$，由$a = e\circ a$ 和 $e\circ a\in Ha$ 得 $a\in Ha$

陪集的基本性质

(3) $\forall a,b\in G$有$a\in Hb \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb$

先证$a\in Hb \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$

$$a\in Hb \Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge a=h\circ b)$$
$$\Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge a\circ b^{-1}=h) \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$$

再证 $a\in Hb \Leftrightarrow Ha=Hb$.

充分性. 若$Ha=Hb$，由$a\in Ha$ 可知必有 $a\in Hb$.

必要性. 由 $a\in Hb$ 可知存在 $h\in H$ 使得 $a=h\circ b$，即$b=h^{-1}\circ a$

任取 $h_1\in H$则$\underline{h_1\circ a\in Ha}$，则有

$$\underline{h_1\circ a} = h_1\circ(h\circ b) = (h_1\circ h)\circ \underline{b\in Hb}$$

从而得到 $Ha\subseteq Hb$. 反之，任取$\underline{h_1\circ b\in Hb}$，则有

$$\underline{h_1\circ b} = h_1\circ(h^{-1}\circ a) = (h_1\circ h^{-1})\circ a\underline{\in Ha}$$

从而得到$Hb\subseteq Ha$. 综合上述，$Ha=Hb$得证.

陪集的基本性质

定理6.23 设H是群G的子群，在G上定义二元关系R:

$$\forall a,b\in G,\ \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$$

则 R是G上的等价关系，且$[a]_R = Ha$.

证 先证明R为G上的等价关系.

自反性. 任取$a\in G$，$a\circ a^{-1} = e\in H \Leftrightarrow \langle a,a\rangle\in R$

对称性. 任取$a,b\in G$，则

$$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow a\circ b^{-1}\in H\Rightarrow (a\circ b^{-1})^{-1}\in H\Rightarrow b\circ a^{-1}\in H\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R$$

传递性. 任取$a,b,c\in G$，则 运算封闭

$$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R \Rightarrow a\circ b^{-1}\in H\wedge b\circ c^{-1}\in H \Rightarrow a\circ c^{-1}\in H \Rightarrow \langle a,c\rangle\in R$$

下面证明：$\forall a\in G$，$[a]_R = Ha$.

任取$b\in G$，$b\in[a]_R \Leftrightarrow \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow \underline{a\circ b^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow b\in Ha}$

定理6.22

推论

推论 设H是群G的子群, 则

(1) $\forall a,b\in G$，$Ha = Hb$ 或 $Ha\cap Hb = \varnothing$

(2) $\cup\{Ha \mid a\in G\} = G$

证明：由等价类性质可得.

例8 <Z, +>是整数加法群, <H, +>是正整数m的所有倍数作成的子群, 若m=3, H的右陪集为:

$$H0 =\{\ldots, -6,-3,0,3,6,\ldots\}$$

$$H1 =\{\ldots, -5,-2,1,4,7,\ldots\}$$

$$H2 =\{\ldots, -4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

0,1,2是它们的代表元素. 这三个右陪集将<Z, +>划分成三个互不相交的集合并完全覆盖Z.

左陪集的定义与性质

设G是群，H是G的子群，H 的左陪集，即

$$aH = \{a \circ h \mid h \in H\}，a \in G$$

关于左陪集有下述性质：

(1) $eH = H$

(2) $\forall a \in G$，$a \in aH$

(3) $\forall a,b \in G$，$a \in bH \Leftrightarrow b^{-1} \circ a \in H \Leftrightarrow aH=bH$

(4) 若在G上定义二元关系R，

$$\forall a,b \in G，\langle a,b \rangle \in R \Leftrightarrow b^{-1} \circ a \in H$$

则R是G上的等价关系，且$[a]_R = aH$.

例如, 例8对左陪集同样适用.

Lagrange定理

定理6.24 （Lagrange）设G是有限群，H是G的子群，则

$$|G| = |H|\cdot[G:H]$$

其中$[G:H]$ 是H在G中的不同右陪集(或左陪集) 数，称为H在G 中的指数.

证 设$[G:H] = r$，$a_1,a_2,\ldots,a_r$分别是H 的r个右陪集的代表元素，

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_r$$

由于这r个右陪集两两不交，$|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \ldots + |Ha_r|$

由$|Ha_i| = |H|$，$i = 1,2,\ldots,r$, 得

$$|G| = |H|\cdot r = |H|\cdot[G:H]$$

Lagrange定理的推论

推论1 任一阶为素数的有限群没有除平凡群{e}外的真子群.

推论2 任一阶为n的有限群的循环子群, 其周期均能整除n.

推论3 对于任一阶为n的有限群, 可得$a^n = e$.(a为群中任意元素)

证 任取$a\in G$，由循环群的定义有$\langle a\rangle$是G的子群，由L定理$\langle a\rangle$的阶是n的因子. $\langle a\rangle$是由a生成的子群，若$|a| = r$，则

$$\langle a\rangle = \{a^0=e,a^1,a^2,\ldots,a^{r-1}\}$$

即$\langle a\rangle$的阶与$|a|$相等, 所以$|a|$是n的因子. 从而$a^n = e$.

推论4 阶小于6 的群都是Abel群.

证 由阶为1; 素数2,3,5; 4分别讨论. 略

THE END