

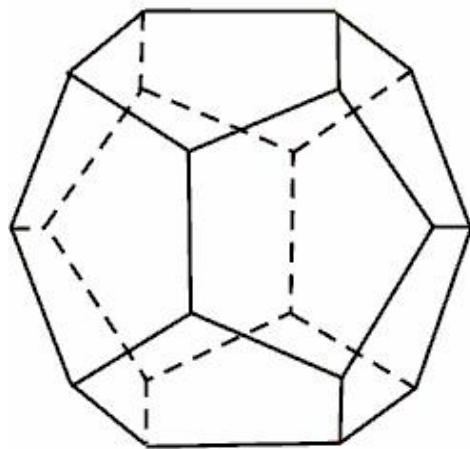


# 哈密顿图

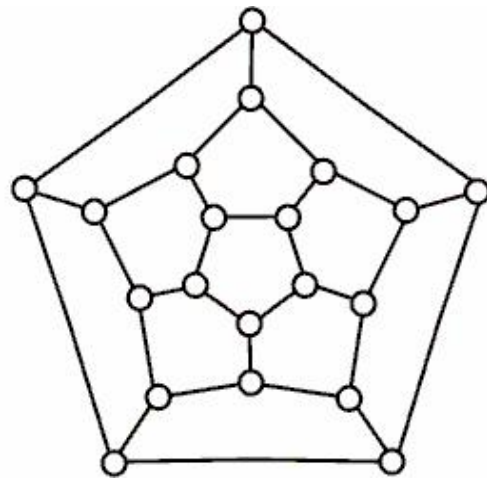




## 历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)





### 定义8.14

- (1) **哈密顿通路**——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.
- (2) **哈密顿回路**——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.
- (3) **哈密顿图**——具有哈密顿回路的图.
- (4) **半哈密顿图**——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

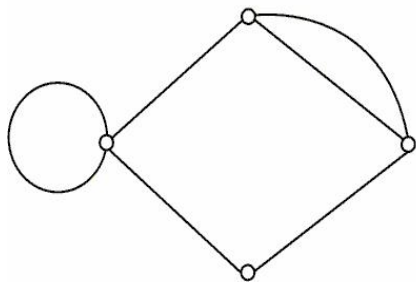
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是基本通路, 哈密顿回路是基本回路.

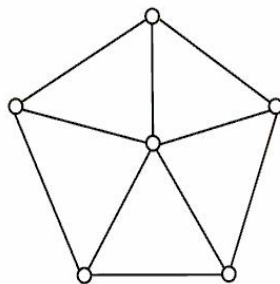
环与平行边不影响哈密顿性.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上.

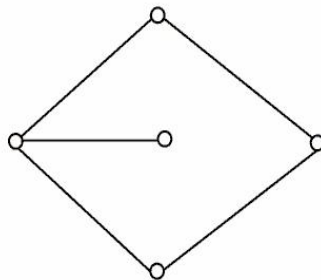




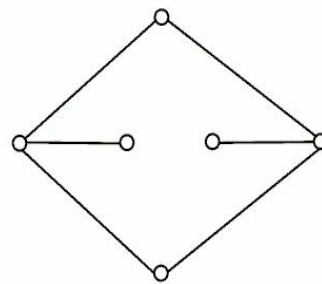
(1)



(2)



(3)



(4)

在上图中,

(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图, 也不是半哈密顿图.





**定理8.9** 设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图, 对于任意 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$ , 均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

其中 $p(G-V_1)$  是从 $G$ 中删除 $V_1$ 后所得到的图的连通分支数.

**推论** 设无向图 $G=<V,E>$ 是半哈密顿图, 对于任意的 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$  均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

- 定理8.9中的条件是哈密顿图的必要条件, 但不是充分条件.
- 常利用定理8.9判断某些图不是哈密顿图.





**定理8.10** 设 $G$ 为 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶无向简单图, 若对于 $G$ 中任意两个不相邻的顶点 $v_i, v_j$ , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n \quad (*)$$

则 $G$ 中存在哈密顿回路, 从而 $G$ 为哈密顿图.

证明 略.

推论: 设 $G$ 为 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶无向简单图, 若 $\delta(G) \geq n/2$ , 则 $G$ 为哈密顿图.

对有向图, 有:

**定理8.11** 若 $D$ 为 $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶竞赛图, 则 $D$ 中具有哈密顿通路.

证明 略.





判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

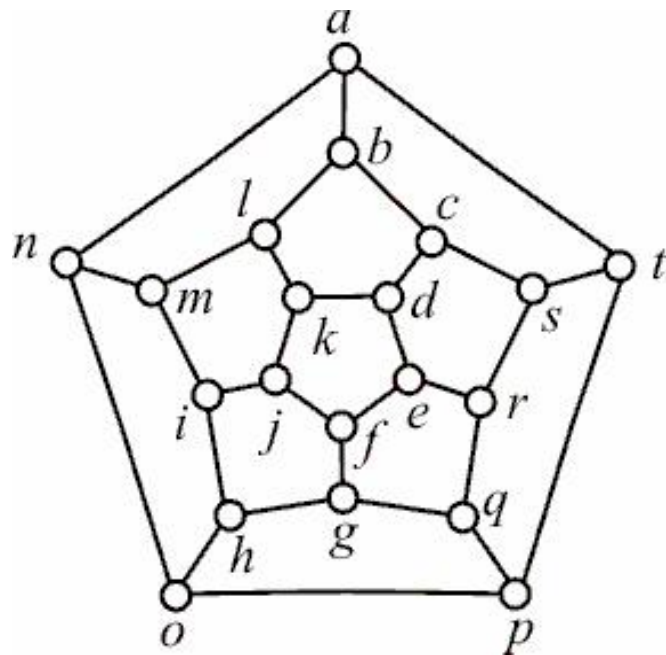
总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

**例3** 右图(周游世界问题)是哈密顿图  
易知

$a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t a$   
为图中的一条哈密顿回路.

注意, 此图不满足定理8.10  
条件.





2. 满足定理8.10的条件 (\*) 或其推论.

**例4** 完全图 $K_n$  ( $n \geq 3$ ) 中, 当 $n \geq 3$ 时满足

$$\delta(G) \geq n/2$$

所以 $K_n$ 为哈密顿图.

3. 破坏定理8.9的条件的图不是哈密顿图.







**THE END**

