4. 设以 2 为周期的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{4x}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线斜率为________.

分析：由周期性知，$f'(3)=f'(1)$，故只需求 $f'(1)$。又已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，所以利用导数定义求极限。

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{4x}=1$$

$$-\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=1$$

$$-\frac{1}{4}f'(1)=1\Rightarrow f'(1)=-4$$

7. 设 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$，则 $y^{(n)}=$____________________ $(n\geq2)$.

解：$y=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$

故，$y^{(n)}=(\dfrac{1}{x+1})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

10. 设函数 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数，则 $f^{(n)}(a)=$_____.

解 由莱布尼茨公式，可得

$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{1}n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$$
$$+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)+n!\,(x-a)\varphi(x).$$

因此 $f^{(n-1)}(a)=0$.于是

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=n!\,\varphi(a).$$

【注】 由于 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内具有 $n-1$ 阶导数，未必具有 n 阶导数，因此不能直接求 $f(x)$ 的 n 阶导数，只能利用定义来求 $f^{(n)}(a)$.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$，可去间断点 $x=1$，则（　　）.

A. $a=0$，$b=e$； B. $a=0$，$b=1$； C. $a=1$，$b=e$； D. $a=1$，$b=1$.

分析：考查间断点的定义和分类

解：x=0 为无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0\Rightarrow a=0$$

x=1 为可去间断点，即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在。

x-1 位于分母上，且 $\lim\limits_{x\to1}(x-a)(x-1)=0$，要 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，则有

$$\lim_{x\to1}(e^x-b)=e-b=0\Rightarrow b=e$$

6. 下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f'(x_0)$ 存在；B. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续；

C. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在点 x_0 连续；

D. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续.

分析：函数在一点可导仅仅是个局部概念，$f'(x_0)$ 存在，只能得出以下结论：

① f(x)在 x_0 有定义，某 x_0 邻域有定义；

② f(x)在 x_0 连续；

③ f(x)在 x_0 可微，因可微和可导等价

在 x_0 可导，函数 y=f(x)在 x_0 的任意邻域内未必处处可导，甚至未必连续；

例如：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\text{为有理数} \\ -x^2 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

此函数仅在 $x=0$ 处连续、可导，但是在 $x\neq 0$ 的个点处处不连续、处处不可导。

解： A. 连续不一定可导，×

B.可导必连续，√

C. 一点可导和导函数 f′(x)的连续性没有任何关系，×

D. 一点可导，得不到在此点邻域连续的结论，×

2. 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-2})^n$，则 $f(x)=$（　　）.

A. e^{x-1}；　　B. e^x；　　C. e^{x+1}；　　D. e^{x+2}.

分析：　1^∞ 极限，利用第二个重要极限

解：

$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-2})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x+2}{n-2})^{\frac{n-2}{x+2}\cdot\frac{n(x+2)}{n-2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(x+2)}{n-2}}=e^{x+2}$$

故　$f(x)=e^{x+1}$

8. 设 $f(x)=g(x^2)$，其中函数 $g(t)$ 可导，则 $\mathrm{d}\,f(x)=$（　　）.

A. $2xg'(x^2)$；B. $2x[g(x^2)]'$；　C. $2xg'(x^2)\,\mathrm{d}\,x$；　D. $2x[g(x^2)]'\,\mathrm{d}\,x$.

解：

$\because\quad f'(x)=g'(x^2)\cdot 2x$

$\because\quad df(x)=2x\,g'(x^2)dx$

9. 设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$（　　）.

A. $n![f(x)]^{n+1}$；　B. $n[f(x)]^{n+1}$；　C. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$；　D. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$.

解： 利用归纳法求高阶导数

$$f'(x)=[f(x)]^2$$

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$$

$$f'''(x)=2\{[f'(x)]^2+f(x)f''(x)\}=2\{[f(x)]^4+2[f(x)]^4\}$$

$$=2\cdot 3[f(x)]^4=3!\cdot[f(x)]^4$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$$

10. 设函数 $f(x)$ 可导，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $y=2-x$ 垂直，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　　）.

A. 比 Δx 高阶的无穷小；　　B. 比 Δx 低阶的无穷小；

C. 与 Δx 同阶但不等价的无穷小；　　D. 与 Δx 等价的无穷小.

解： 由题目条件可知，$f'(x_0)=1$，故

$$dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=\Delta x$$

$dy\big|_{x=x_0}$ 是△x 的等价无穷小。