第二节

正项级数及其审敛法

- 一、正项级数收敛的充分必要条件
- 二、比较审敛法
- 三、比值审敛法和根值审敛法

一、正项级数收敛的充分必要条件

问题：
正项级数收敛的条件?

1. 定义 正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （$u_n \geq 0$）

2. 定理11.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：部分和数列 S_n 有上界.

证 （$\Rightarrow$） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\{S_n\}$收敛，故有界.

（$\Leftarrow$） 由$u_n \geq 0$，知$\{S_n\}$ 单调递增，

又知$\{S_n\}$有上界，故$\{S_n\}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

二、比较审敛法

分析： 欲寻找能控制该级数部分和S_n的新收敛级数

1. 引例

例1 判定正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\mathrm{e}}$的敛散性.

解 由于$\frac{1}{3^n+\mathrm{e}}<\frac{1}{3^n}$，部分和

$$S_n=\frac{1}{3+\mathrm{e}}+\frac{1}{3^2+\mathrm{e}}+\cdots+\frac{1}{3^n+\mathrm{e}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\sigma_n$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$收敛，知$\sigma_n<\sigma$有上界，

从而$S_n<\sigma_n<\sigma$有上界，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\mathrm{e}}$收敛.

目录 上页 下页 返回 结束

定理11.2 (比较审敛法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $u_n \le v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $u_n \ge v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证 (1)设 $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 由 $u_n \le v_n$, 部分和满足:

$$0 \le S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

σ_n有上界

$$\le v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sigma_n < \sigma$$

故 S_n 有界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法:

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 又 $u_n \geq v_n$,

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 ,

由(1)

矛盾!

推论 (比较审敛法) 设正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 , $u_n \le c\, v_n\ (n \ge N)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 ;

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 , $u_n \ge c\, v_n\ (n \ge N)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散 .

比较法的使用思路：

欲证收敛(发散)，则放大(缩小)

例2 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解 $\because \quad \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{2}{n+1},$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散 $\quad\therefore$ 所给级数发散 .

例3 讨论 p -级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的敛散性

(常数 $p>0$).

猜：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}敛 & p\begin{cases}大\\ 小\end{cases} ?\\ 散 & \end{cases}$$

解 1) $p\le 1$时，$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$，

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

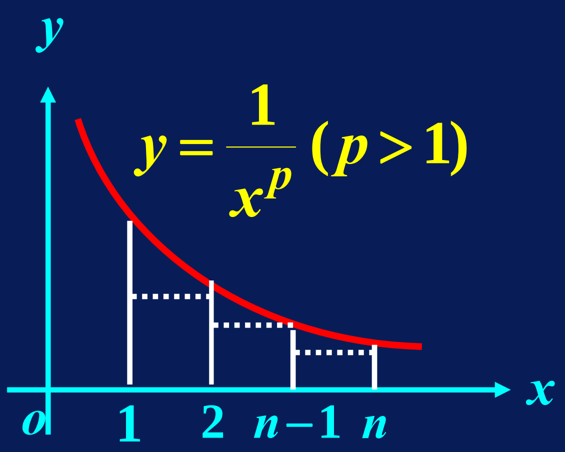
2) 当$p>1$时，

$$\frac{1}{n^p}\le\frac{1}{x^p}, \qquad \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

$(n-1\le x\le n)$, $\qquad (n=2,3,\cdots)$

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} \mathrm{d}x \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \qquad (n = 2,3,\cdots)$$

p – 级数的部分和



$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

$$\le 1 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} \quad (n = 2,3,\cdots)$$

p -级数部分和S_n有上界，故当$p > 1$时，p -级数收敛.

结论 p-级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p>1 \\ \text{发散}. & p \le 1 \end{cases}$

注 **常用的比较级数:** 等比级数,

调和级数 与 p-级数.

欲证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 判 $u_n \ge \dfrac{1}{n^p}$? (某 $p \le 1$)

欲证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 判 $u_n \le \dfrac{1}{n^p}$ (某$p>1$)?

例4 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}$ 的敛散性.

解 $\because \quad u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}\le\frac{1}{n^{3/2}}=v_n$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}$ 收敛.

定理11.3 (极限形式的比较审敛法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l \le +\infty),$$

则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 两级数同敛散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l \quad (l\neq+\infty)$

对 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$$

$$(l-\varepsilon)v_n\le u_n\le(l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 取 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}$, 由定理 11.2 知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散;

目录 上页 下页 返回 结束

(2) $l=0$ 情形, 请自证;

(3) 当$l=+\infty$时,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$,

有$N\in Z^{+}$, 当$n>N$时, $\dfrac{u_n}{v_n}>1$, $u_n>v_n$

由定理11.2知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

极限形式的比较审敛法使用思路:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l \\ (0<l<+\infty),\end{array}\right\}$$

寻找u_n的同阶无穷小

例5 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$.

分析 寻找 $u_n = \ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$ 的同阶无穷小.

解 当 $x \to 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})}{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}} = 1, \qquad u_n = O(\frac{1}{n^{1/3}})$$

而 $p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ (p=\frac{1}{3}<1)$ 发散,

由定理 11.3 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$ 发散.

例6 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$.

3^n 起主要作用

分析 寻找 $u_n = \frac{1}{3^n - 2^n}$ 的等价无穷小.

解 由于 $u_n = \frac{1}{3^n - 2^n} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^n} \sim \frac{1}{3^n} \; (n \to \infty)$,

即 $u_n \sim \frac{1}{3^n}$, 故取 $v_n = \frac{1}{3^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n - 2^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^n} = 1.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 收敛, 由定理 11.3 知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$ 收敛.

例7 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.

解 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$,

得 $u_n=\frac{\ln n}{n^3}=\frac{\ln n}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=o(\frac{1}{n^2})$

u_n 是 v_n 的高阶无穷小$(n\to\infty)$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

由定理 11.3 知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$ 收敛.

三、比值审敛法和根值审敛法

1. 比值审敛法

定理11.4 (达朗贝尔审敛法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \quad (0 \le \rho \le +\infty)$,

则 (1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 比值审敛法失效.

证　(1)当$\rho < 1$时，

取$\varepsilon > 0$，使$\rho + \varepsilon < 1$，由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

有$N \in Z^+$，当$n > N$时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon < 1$

$$u_{n+1} < (\rho + \varepsilon) u_n$$

$$< (\rho + \varepsilon)^2 u_{n-1} < \cdots < (\rho + \varepsilon)^{n-N} u_{N+1}$$

$\because \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^n$ 收敛，

$\therefore$ 由比较法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛．

目录　上页　下页　返回　结束

(2) 当$\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时,

$$\text{由} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \quad \text{有} N \in Z^+,$$

当$n \geq N$时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$

从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

(3) 当$\rho = 1$时，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$时，

级数可能收敛也可能发散.

例如，p – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{级数收敛}; \\ p \le 1, \text{级数发散}. \end{cases}$

例8 判断级数 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}+\cdots$ 的敛散性 .

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e>1$，故级数发散 .

小结： 通项含 $n!$ 的级数，

适合用比值法判敛散.

例9 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 $\because\ u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

$$\le\frac{n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}=v_n$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)(n+1)!}{[2(n+1)]!}}{\frac{nn!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2(2n+1)n}$

$=0<1$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛， 故原级数收敛 .

例10 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$ 的敛散性(x为常数 ，$x\neq 0,\pm 1$).

解 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}\big/(n+1)^2}{x^{2n}\big/n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}x^2=x^2$$

由比值法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}\begin{cases}\text{收敛}, & 0<|x|<1\\ \text{发散}, & |x|>1\end{cases}$

小结：通项含 a^n 的级数，适合用比值法判敛散.

目 录 上 页 下 页 例10-1 结 束

2. 根值审敛法

定理11.5 (柯西审敛法)

证明与比值法类似

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 根值审敛法失效.

如 p – 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$: $\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1\ (n\to\infty)$

但 $p>1$, 级数收敛 ; $p\le 1$, 级数发散 .

例11 判别下列级数的收敛性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$.

解 (方法1) 根值法

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}=2^{-1}<1 \quad \therefore \quad 原级数收敛.$$

(方法2) 比较法 $u_n=2^{-n-(-1)^n}=2^{-n}\cdot 2^{(-1)^{n+1}}$

$$\le 2^{-n}\cdot 2=\frac{1}{2^{n-1}} \quad (n\ge 1)$$

$$\because \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} 收敛, \quad \therefore \quad 原级数收敛.$$

目 录 上 页 下 页 例 题 继 续

注　对于 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$，　比值法失效！

$$\because \quad a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1+2(-1)^n} = \begin{cases} 2, & n\text{偶数} \\ \frac{1}{8}, & n\text{奇数} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2 \neq \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{8}$$

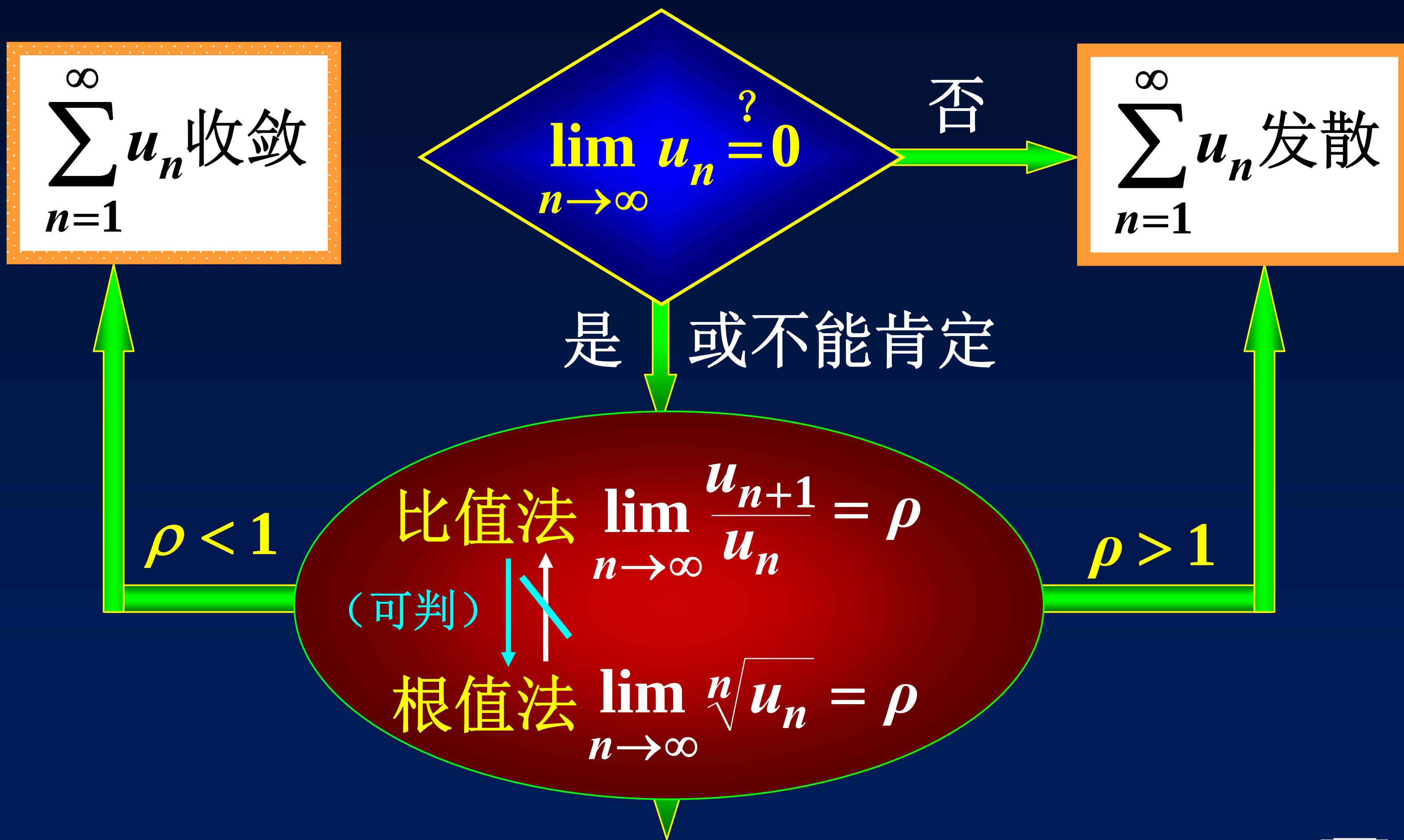
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 不存在(且} \neq +\infty)$$

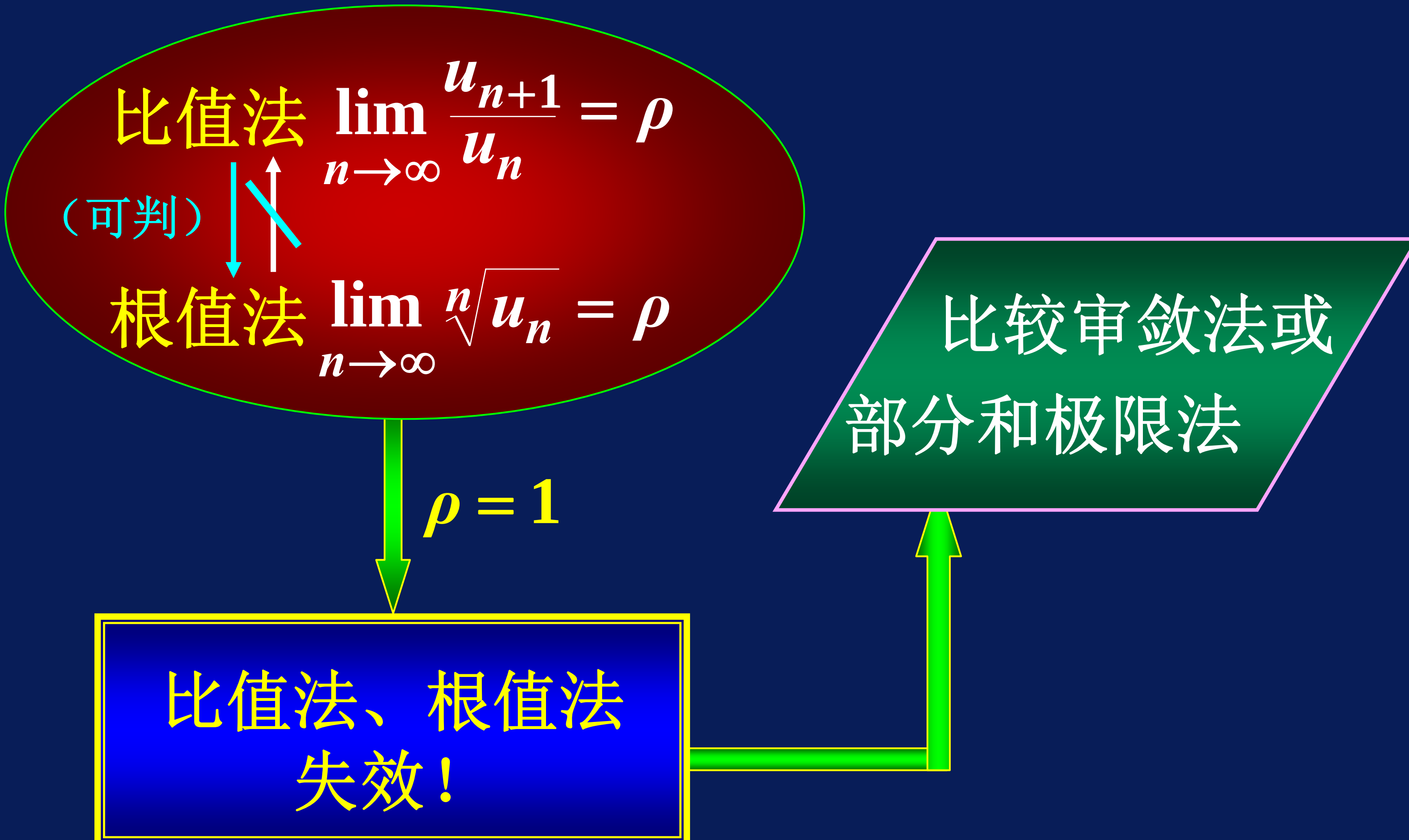
故比值法失效.

目录　上页　下页　返回　结束

内容小结

1 .判断正项级数敛散性的一般程序：




比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$
（可判）
根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$
$\rho=1$
比值法、根值法失效！
比较审敛法或部分和极限法

2. 级数发散与一般项极限不为零的关系

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\not\Rightarrow$ $(\Leftarrow)$ $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$

如：调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

3. 比值法和根值法的关系：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty)$$

这表明：(1)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则用比值法和根值法判断的结论一致；

(2)从理论上看，根值法较 比值法适用的范围更广．

4. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0)$收敛 $\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$

思考题 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$ 的敛散性.

分析 $u_n = \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$

因 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$

因u_n含$(-1)^n$项

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]}{3}$ 不存在,

根值法失效.

目录 上页 下页 返回 结束

判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$ 的敛散性.

又因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3[\sqrt{2}+(-1)^{n+1}]^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\left[\frac{\sqrt{2}-(-1)^n}{\sqrt{2}+(-1)^n}\right]^n\left[\sqrt{2}-(-1)^n\right]$$ 不存在，

比值法失效 .

判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$ 的敛散性.

解 用比较法

$$u_n=\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}\le\frac{n^3\left[\sqrt{2}+1\right]^n}{3^n}=v_n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1$

$\left(\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1\right)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，故原级数收敛.

目录 上页 下页 返回 结束

备用题

例2-1 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ 的敛散性

解 由 $n(n+2)\le(n+2)^2$,

得 $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}>\frac{1}{n+2}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+2}+\cdots$ 发散,

由比较法知，原级数发散.

例2-2 讨论下列级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$.

解 因为 $\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} \geq \frac{1}{(n+1)^{2/3}} \quad (n=1,2,\cdots)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2/3}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}} \left(p=\frac{2}{3}<1\right)$ 发散

由比较法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$ 发散.

例2-3 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

解 由 $\sin x < x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$知，

$$0 \le 2^n \sin\frac{\pi}{3^n} \le 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n \ \left(r = \frac{2}{3} < 1\right)$收敛，

由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛 .

例5-1 判别级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$.

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$

由比较法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{In}[1+1/n^2]}{1/n^2} = 1$

由比较法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$ 收敛.

$p-$级数 $:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

例5-2 判定级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 不是 p–级数

解 (1) $\because \ln(n+1)<n$, $\therefore \frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

例5-3 判定下列级数的敛散性 ：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + a^2}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$.

解 (1) 因 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^3 + a^2}}}{n^{-\frac{3}{2}}} = 1,$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,

由定理 11.3知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + a^2}}$ 收敛 .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$

解 因 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ 收敛 .

例8-1 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性.

解 $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

由定理11.4，当$0<x<1$时, 级数收敛；

当$x>1$时, 级数发散；

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

例8-2 判定下列级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\ (a>0)$.

解 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{a^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot a=a$，由比值法知，

当$0<a<1$时，级数收敛;

当$a>1$时，级数发散;

当$a=1$时，为调和级数，发散 .

例8-3 判定下列级数的敛散性 ：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=+\infty$$

由比值法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$ 发散 .

例8-4 判定下列级数的敛散性 ： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

由比值法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$ 收敛.

例10-1 判定级数的敛散性 ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\quad (\text{常数}a>0)$$

解 $$u_n=\frac{a^n n!}{n^n}$$

$$\because\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\therefore\quad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}$$

$$\therefore \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{e}$$

故当 $0 < a < e$ 时, $\rho < 1$, 原级数收敛;

当 $a > e$ 时, $\rho > 1$, 原级数发散;

当 $a = e$ 时, $\rho = 1$, 比值法失效,

此时, 由 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$

得 $u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 = e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

故原级数发散.

例11-1 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解 (方法1) 比较法

$$\because \quad u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}=v_n,$$

$$\text{而} \quad \sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n} \quad \text{收敛},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n} \quad \text{收敛}.$$

(方法2) 利用性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{2^n}+(-\frac{1}{2})^n],$$

(方法3) 根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2+(-1)^n]^{\frac{1}{n}}}{2}=2^{-1}<1$$

$\therefore$ 原级数收敛 .

小结: 通项含 a^n 的级数，适合用根值法判敛散.

注 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$，比值法失效！

$$\because \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}=a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\frac{1}{6}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=\frac{3}{2},$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在(且 $\neq +\infty$).

例11-2 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$.

解 (1) 因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$,

由根值法知，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛.

(2) 由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{3+(-1)^n}=\frac{1}{3}<1$

由根值法 知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$ 收敛.