第一部分 集合论

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

主要内容

- 集合论
- 关系
- 函数
- 有限集与无限集

第一章 集合论初步

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合代数

  并、交、补、差等

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

1.1 集合的基本概念

1. 集合定义

理解：由若干个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素。

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合。

例. {人，a，1，A，{1，A}}是集合吗?

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合（显式）

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质（隐式）

实例：

枚举法 正整数集合 $Z^+=\{1,2,3,\ldots\}$

谓词法 $S=\{x \mid x$是实数，$x^2-9=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质

无序性：元素列出的顺序无关

相异性：集合的每个元素只计数一次

确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

任意性：集合的元素也可以是集合 例. $A=\{a,b,c, \{0,1\}\}$

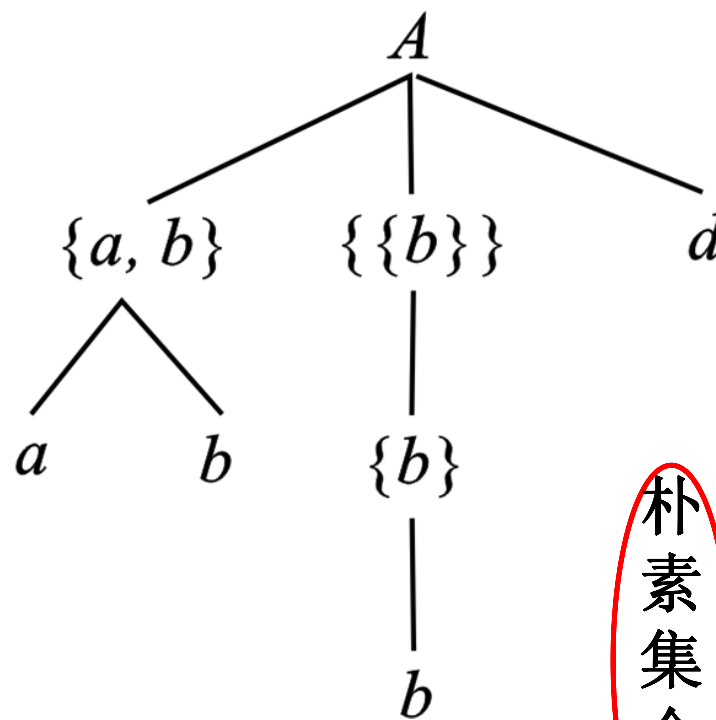
注意：仅含有一个元素的集合称为单元素集合。

应把单元素集合与这个元素区别开来。例如$\{A\}$与A不同

2. 元素与集合的关系

隶属关系：$\in$或者$\notin$

集合的树型层次结构



如果a是集合A的一个元素，则记为$a \in A$
读做“a属于A”，或说“a在A中”。
如果a不是集合A的一个元素，则记为$a \notin A$
读做“a不属于A”，或说“a不在A中”

例. A={{a,b}, {{b}}, d}

$d \in A$, $a \notin A$

朴素集合论

隶属关系可看作不同层次上的集合间的关系。规定任何集合$A \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, \nsubseteq, =, \neq, \subset, \not\subset$

定义1.1包含关系 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$ A为B的子集

定义1.2相等关系 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义1.3 真子集 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

类似地：$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

思考：$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

集合与集合

注意：隶属关系$\in$ 和包含关系 $\subseteq$ 是不同层次的问题

对于A={a, {a}} 和 {a}，

既有{a}$\in A$，又有{a} $\subseteq A$

空集

1\. 定义1.4 空集 $\varnothing$：不含有任何元素的集合

实例： $\{\, x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \,\}$

定理1.1 空集是任何集合的子集。

证 对于任意集合A，

假命题

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T\ (\text{恒真命题})$$

推论 $\varnothing$是唯一的

幂集

2. **定义1.5 幂集**：集合的全体子集构成的集合。

记作$P(A)=\{\ x \mid x \subseteq A\ \}$（或$2^A$）

实例1：$P(\{0,1,2\})=$？　　$P(\{\varnothing,a,\{a\}\})=$？

实例2：$P(\varnothing)=$ $\{\varnothing\}$

$P(\{\varnothing\})=$ $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

幂集

计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=?$

2^n

练习：求下列集合的幂集.

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$\{\{\varnothing, a\}, \{a\}\}$$

练习

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$.

(2) $\varnothing \subset \varnothing$.

(3) $\varnothing \in \varnothing$.

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(5) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$.

(7) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合,判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing \in P(A)$.

(2) $\varnothing \subseteq P(A)$.

(3) $\{\varnothing\} \in P(A)$.

(4) $\{\varnothing\} \subseteq P(A)$.

(5) $\{\varnothing\} \in P(P(A))$.

(6) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq P(P(A))$.

全集

3. 定义1.6 全集 E：在一个具体的问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集

全集包括我们所考虑的目标之内的所有元素.

性质1. 对任一集合A，必有$A \subseteq E$.

性质2. 对任一集合A，必有$\emptyset \subseteq A \subseteq E$.

性质3. 对任一集合A，必有 $A \subseteq A$.

1.2 集合代数

集合的基本运算有

定义1.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ B对A的相对补集

相对补也称为：差运算

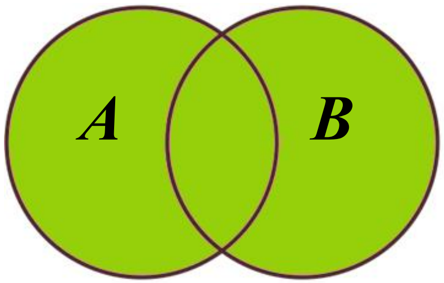
定义1.8 对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

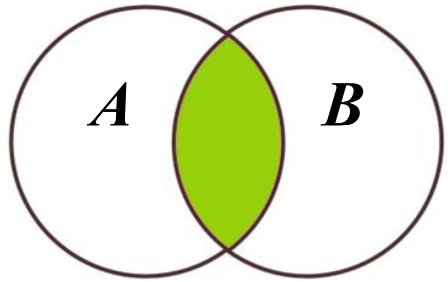
定义1.9 绝对补 $\sim A = E - A$ E为全集 简称：补

文氏图

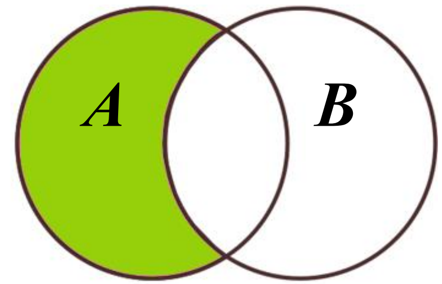
集合运算的表示



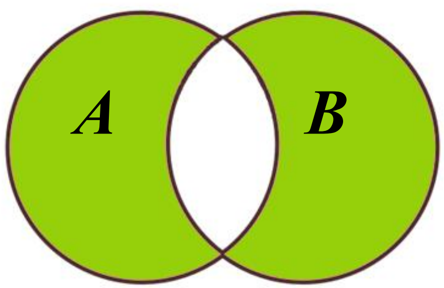
$A \cup B$



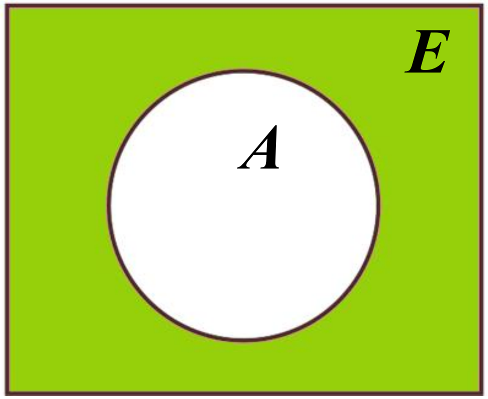
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

举例

设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,g\}$，则

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,g\}$$

$$A\cap B=\{a,c,e\}$$

$$A-B=\{b,d\}$$

$$B-A=\{g\}$$

$$A\oplus B=\{b,d,g\}$$

取全集 $E=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，则

$$\sim A=\{f,g,h\}$$

$$\sim B=\{b,d,f,h\}$$

举例

例. 设 E 是某中学高中一年级学生集合，A，B 是 E 的子集，且 $A=\{x \mid x$ 是男生$\}$，$B=\{x \mid x$ 是校足球队员$\}$，试用描述法表示 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$，$A\oplus B$，$\sim A$，$\sim B$.

$A\cup B=\{x \mid x$ 是男生或是足球队员$\}$

$A\cap B=\{x \mid x$ 是男生并且是足球队员$\}$

$=\{x \mid x$ 是男生中的足球队员$\}$

$A-B=\{x \mid x$ 是男生，但不是足球队员$\}$

$=\{x \mid x$ 是非足球队员的男生$\}$

$B-A=\{x \mid x$ 是足球队员，但不是男生$\}$

$=\{x \mid x$ 是女生中的足球队员$\}$

$A\oplus B=\{x \mid x$ 是非足球队员中的男生或是女生中的足球队员$\}$

$\sim A=\{x \mid x$ 是女生$\}$

$\sim B=\{x \mid x$ 不是足球队员$\}$

计算机表示集合的方法有多种。

位串表示法：

设全集E={x_1, x_2, … x_n}，且计算机的内存量足够存储E。

1. 给E的元素任意规定一个顺序，如，x_1, x_2, …, x_n

2. 对E的任意子集A, 若$x_i \in$A, 则位串中第i位是1;

若$x_i \notin$ A, 则位串中第i位是0。

这样便得到一个长度为n的0,1位串，用来表示子集A。

注：当E中元素的顺序给定时，子集与位串一一对应。

集合的计算机表示

实例1. 令E={3, 2, 1, 6, 9, 5, 8,11}, 且E的元素以降序排序。E中所有偶数构成子集A、所有奇数构成子集B，求A和B的位串。

A可由位串0011 0010表示； B可由位串1100 1101表示。

实例2.已知{1, 3,5,6,9,11} 的位串为1101 1101，求其补集的位串。

0010 0010

集合的计算机表示

实例3. 已知{1, 3,5,6,9,11}和{1,2,5,6,8}的位串分别为1101 1101和0011 1011。用位串求他们的并集和交集。

并集的位串：

1101 1101 ∨ 0011 1011=

交集的位串：

1101 1101 ∧ 0011 1011=

几点说明

- 并和交运算可以推广到有限个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$
- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：
交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：
分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双补律

	$-$	$\sim$
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双补		$\sim\sim A=A$

集合算律

4． 涉及全集和空集的算律：

互补律、零一律、同一律、否定律

矛盾律

排中律

	$\varnothing$	E
互补律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零一律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

a) 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

b) 任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例1 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A \qquad \text{吸收律}$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例2 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

证明分配律

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) && \cup \text{的定义} \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && \cap \text{的定义} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C) && \vee \text{在} \wedge \text{上可分配} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) && \cup \text{的定义} \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) && \cap \text{的定义}
\end{aligned}
$$

等式代入法

方法二：等式置换法

例3 假设交换律、分配律、同一律、零一律已经成立，证明吸收律.

证

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$=A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$=A\cap(B\cup E)$ （交换律）

$=A\cap E$ （零一律）

$=A$ （同一律）

例4 设A, B, C为任意三个集合，已知$A\cup B=A\cup C$, $A\cap B=A\cap C$, 试证B=C.

证 $B=B\cap(A\cup B)$ （吸收律）

$=B\cap(A\cup C)$ （已知条件）

$=(B\cap A)\cup(B\cap C)$ （分配律）

$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ （交换律，已知条件）

$=(A\cup B)\cap C$ （分配律）

$=(A\cup C)\cap C$ （已知条件）

$=C$ （吸收律）

思考：用另外一个吸收率证明。

包含等价条件的证明

例5 证明 $\underline{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underline{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underline{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underline{A-B=\varnothing}$

① ② ③ ④

证明思路：

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

证 ①⇒② $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B$

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③ $A\cup B=B \Rightarrow A\cap B=A$

$$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$$

(由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用B代入)

证明

③⇒④ $A \cap B = A \Rightarrow A - B = \varnothing$

假设$A-B \neq \varnothing$, 即$\exists x \in A-B$，那么知道$x \in A$且$x \notin B$. 而

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$$

从而与$A \cap B = A$矛盾.

④⇒① $A - B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$

假设$A \subseteq B$不成立，那么

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \varnothing$$

与条件④矛盾.

练习

1. 化简$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \cap (A \cup (A \cap C))$

解 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \cap (A \cup (A \cap C))$

$= (A \cup B) \cap (A \cup (A \cap C))$

$= (A \cup B) \cap A$

$= A$

2. 对任意集合A、B、C确定下列各命题是真或假:

(1) 如果$A \in B$及$B \subseteq C$，则$A \in C$。

(2) 如果$A \in B$及$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

(3) 如果$A \subseteq B$及$B \in C$，则$A \in C$。

(4) 如果$A \subseteq B$及$B \in C$，则$A \subseteq C$。

练习

1. 证明$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

2. 证明$D.M$律（关于差运算的）

1.5 证明下列等式：

(1) $(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B)$；

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$.

1.6 设有集合 A,B,

(1) 若 $A-B=B$,则 A 与 B 有什么关系？

(2) 若 $A-B=B-A$,则 A 与 B 有什么关系？

作业

1.3 判断下列每组的两个集合是否相等.

(1) $A=\{3,1,1,5,5\}$, $B=\{1,3,5\}$.

(2) $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$.

(3) $A=\varnothing$, $B=\{x \mid x$ 是有理数并且是无理数$\}$.

(4) $A=\{1,2,\varnothing\}$, $B=\{\{\varnothing\},2,1\}$.

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$.

(2) $\varnothing\subset\varnothing$.

(3) $\varnothing\in\varnothing$.

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

(5) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$.

(7) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合,判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing\in P(A)$.

(2) $\varnothing\subseteq P(A)$.

(3) $\{\varnothing\}\in P(A)$.

(4) $\{\varnothing\}\subseteq P(A)$.

(5) $\{\varnothing\}\in P(P(A))$.

(6) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq P(P(A))$.

1.11 求下列集合的幂集.

(1) $\varnothing$.

(2) $\{1,\{a,b\}\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

1.12 设全集 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$,其子集 $A=\{1,4\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4\}$. 求下列集合.

(1) $A\cap\sim B$.

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$.

(3) $\sim(A\cap B)$.

(4) $P(A)\cap P(B)$.

(5) $P(A)\cap\sim P(B)$.

$A\oplus B$.

$(A\cap B)\oplus A$.

$A\oplus C$.

1.28 设 A,B 为集合,证明:$A\cap(B-A)=\varnothing$.

1.29 设 A,B 为集合,证明:$(A\cap B)\cup(A-B)=A$.

1.32 化简下列集合表达式.

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$.

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$.

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$.

THE END