离 散 数 学

西北工业大学

2022年4月6日星期三

6. 0 Outline

1. Equivalence Relations
2. Quasi order 拟序关系
3. Partial order 偏序关系
4. Total order 全序关系
4. Well order 良序关系

6.1本章学习要求

重点掌握

1

1 几个特殊关系的概念
2 等价和偏序关系的证明
3 等价类和商集的计算
4 8个特殊元

一般掌握

2

1 拟序、全序和良序关系的定义；
2拟序与偏序关的联系
3 拟序、全序、良序的联系。

了解

3

1 拟序、全序和良序关系的相关性质。

判定下列关系具有哪些性质

1、在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系；

2、对任何非空集合A，A上的全关系；

3、三角形的“相似关系”、“全等关系”；

4、直线的“平行关系”；

5、“朋友”关系；

等价关系

解：1，2，3都具有*自反性，对称性和传递性；*

4 具有反自反，对称和传递性，不具有自反性；

5 具有自反和对称性，不具有传递性。

6. 2 Equivalence Relations

定义6. 2. 1 设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的等价关系。

由定义6. 2. 1知：

（1）关系R是等价关系当且仅当R同时具备自反性、对称性和传递性；

（2）关系R不是等价关系当且仅当R不具备自反性或对称性或传递性。

例6.2.1

判定下列关系是否是等价关系?

1. 幂集上定义的“$\subseteq$”关系;不具有对称性
2. 整数集上定义的“<”关系;不具有对称性，自反性
3. 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系。是等价关系

例6.2.2

在时钟集合A＝{1, ⋯, 24}上定义**整除关系：R＝{<x, y>|{x, y∈A)∧((x−y)被12所整除)}** 。

（1）写出R中的所有元素；

（2）画出R的关系图；

（3）证明R是一个等价关系。

例6.2.2 解

（1）R={<1, 1>, …, <24, 24>, <1, 13>, <13, 1>, <2, 14>, <14, 2>, …, <11, 23>, <23, 11>, <12, 24>, <24, 12>}}

（2）此等价关系的关系图：

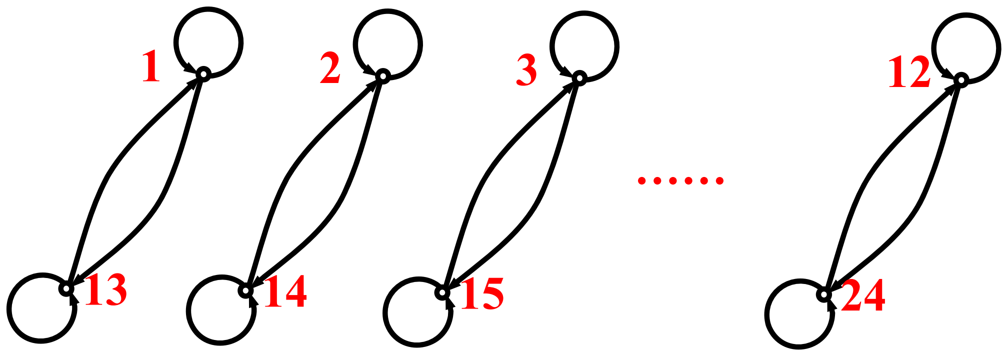


图6.2.1

例6.2.2 解（续）

1、对$\forall x\in A$，有$(x-x)$被12所整除，所以$\langle x, x\rangle\in R$，即R是自反的。

2、对$\forall x, y\in A$, 若$\langle x, y\rangle\in R$, 有$(x-y)$被12整除，则$(y-x)=-(x-y)$被12整除, 所以, $\langle y, x\rangle\in R$, 即R是对称的。

3、对$\forall x, y, z\in A$, 若$\langle x, y\rangle\in R$且$\langle y, z\rangle\in R$, 有$(x-y)$被12所整除且$(y-z)$被12所整除, 所以$(x-z)=(x-y)+(y-z)$被12所整除, 所以, $\langle x, z\rangle\in R$, 即R是传递的.

由1, 2, 3知R是等价关系。■

从例6.2.2可以看出

关系R将集合A分成了如下的12个子集：

{1, 13}， {2, 14}， {3, 15}， {4, 16}， {5, 17}，
{6, 18}， {7, 19}， {8, 20}， {9, 21}， {10, 22}，
{11, 23}， {12, 24}。

这12个A的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间无关系R。

例6.2.3 定义整数集合Z上的模N运算为R，证明R为Z上的等价关系

证明 (1) 对$\forall x \in Z$，有$n|(x-x)$，所以$\langle x,x\rangle \in R$，

即R是自反的。

(2) 对$\forall x,y \in Z$，若$\langle x,y\rangle \in R$，即$n|(x-y)$，所以

$m|(y-x)$，所以，$\langle y,x\rangle \in R$，即R是对称的。

(3) 对$\forall x,y,z \in Z$，若$\langle x,y\rangle \in R$且$\langle y,z\rangle \in R$，有

$n|(x-y)$且$n|(y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$

得$n|(x-z)$，

所以，$\langle x,z\rangle \in R$，即R是传递的。

由(1)、(2)、(3)知，R是Z上的等价关系。 ■

以n为模的同余关系(CongruenceRelation)

上述R称为Z上以n为模的同余关系，记xRy为

$$x=y(\mathrm{mod}\ n)$$

称为同余式。如用$res_n(x)$表示x除以n的余数，则

$$x=y(\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow res_n(x)=res_n(y)。$$

此时，R将Z分成了如下n个子集：

$\{\ldots,-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,\ldots\}$

$\{\ldots,-3n+1,-2n+1,-n+1,1,n+1,2n+1,3n+1,\ldots\}$

$\{\ldots,-3n+2,-2n+2,-n+2,2,n+2,2n+2,3n+2,\ldots\}$

…

$\{\ldots,-2n-1,-n-1,-1,n-1,2n-1,3n-1,4n-1,\ldots\}$

说明

同样地，这n个Z的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间没有关系R；

3、不同子集的交集是空集；

4、所有这些子集的并集就构成集合Z。

称为集合Z的一个划分

6.2.2 集合的划分

定义6.2.2 给定非空集合A，设有集合

$S=\{S_1,S_2,S_3\ldots S_m\}$.如果满足

- $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$，$i=1,2,\ldots,m$；
- $S_i \cap S_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2,\ldots,m$；
- $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$。

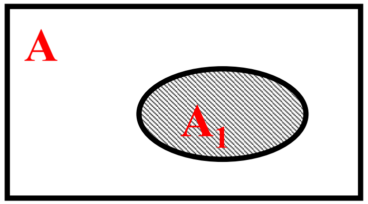
则集合S称作集合A的一个划分(Partition)，而 $S_1,S_2,\ldots S_m$ 叫做这个划分的块(Block)或类(Class)。

例6.2.4

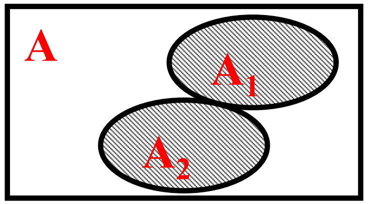
试给出非空集合A上2个不同的划分

解（1）在A中设定一个非空子集A_1，令$A_2=A-A_1$，则根据集合划分的定义，$\{A_1,A_2\}$就构成了集合A的一个划分，见图（a）；

（2）在A中设定两个不相交非空子集A_1和A_2，令$A_3=A-(A_1\cup A_2)$，则根据集合划分的定义，$\{A_1,A_2,A_3\}$就构成了集合A的一个划分，见图（b）。



(a)



(b)

例6.2.5

设设A={0,1,2,4,5,8,9},

1、写出R是A上的以4为模的同余关系R的所有元素;

2、求分别与元素1,2,3,4有关系R的所有元素所作成的集合。

解:1、R={⟨0,0⟩,⟨1,1⟩,⟨2,2⟩,⟨4,4⟩,⟨5,5⟩,⟨8,8⟩,⟨9,9⟩,⟨0,4⟩,⟨4,0⟩,⟨4,8⟩,⟨8,4⟩,⟨0,8⟩,⟨8,0⟩,⟨1,5⟩,⟨5,1⟩,⟨1,9⟩,⟨9,1⟩,⟨5,9⟩,⟨9,5⟩}.

显然,R是A的一个等价关系。

例6.2.5 解

2、与元素1有关系R的所有元素所作成的集合{1, 5, 9}；

与元素2有关系R的所有元素所作成的集合{2}；

与元素4有关系R的所有元素所作成的集合{0, 4, 8}.

集合{1, 5, 9}称为元素1关于等价关系R的等价类，记为$[1]_R$，即$[1]_R=\{1, 5, 9\}$；

$[2]_R=\{2\}$，$[4]_R = \{0, 4, 8\}$.

6.2.3 等价类与商集

定义6.2.3 设R是非空集合A上的等价关系，对任意$x\in A$，称集合

$$[x]_R=\{y \mid y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\}$$

为x关于R的等价类(equivalence class)，或叫作由x生成的一个R等价类，其中x称为$[x]_R$的生成元(或叫代表元，或典型元)(generator）。

由定义6.2.3可以看出：

（1）等价类产生的前提是A上的关系R必须是等价关系；

（2）A中所有与x有关系R的元素y构成了$[x]_R$；

（3）A中任意一个元素一定对应一个由它生成的等价类；

（4）R具有自反性意味着对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

（5）R具有对称性意味着对任意x，$y \in A$，若有$y \in [x]_R$，则一定有$x \in [y]_R$。

例6.2.5(续)

设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，R是A上的以4为模的同余关系。求

（1）R的所有等价类；（2）画出R的关系图。

解：(1) $[1]_R = \{1, 5, 9\} = [5]_R = [9]_R$；$[2]_R = \{2\}$；$[4]_R = \{0, 4, 8\} = [0]_R = [8]_R$。

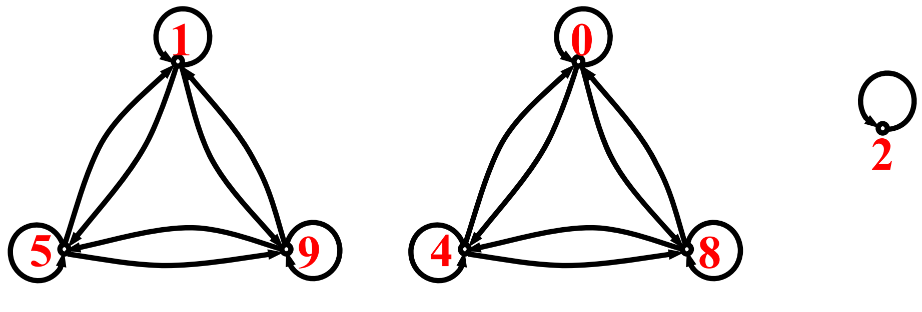


图6.2.3

定理6.2.1

设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立：

1) 对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

2) 对$\forall x, y \in A$，

a) 如果$y \in [x]_R$，则有$[x]_R = [y]_R$，

b) 如果$y \notin [x]_R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$；

定理6.2.1的证明

证明：1）对任意$x\in A$，因为R是等价关系，所以R是自反的，因此$\langle x,x\rangle\in R$，即$x\in[x]_R$，故$[x]_R\neq\Phi$。

2）对任意$x,y\in A$，若$y\in[x]_R$，则$\langle x,y\rangle\in R$。

a）对$\forall z\in[x]_R$，则有：$\langle x,z\rangle\in R$，又$\langle x,y\rangle\in R$，由R的对称性有：$\langle y,x\rangle\in R$，由R的传递性有：$\langle y,z\rangle\in R$。所以$z\in[y]_R$，即：$[x]_R\subseteq[y]_R$。

定理6.2.1的证明

证明：1）对任意$x \in A$，因为R是等价关系，所以R是自反的，因此$\langle x, x\rangle \in R$，即$x \in [x]_R$，故$[x]_R \neq \Phi$。

2）对任意$x, y \in A$，若$y \in [x]_R$，则$\langle x, y\rangle \in R$。

b）对$\forall z \in [y]_R$，则有：$\langle y, z\rangle \in R$，又$\langle x, y\rangle \in R$，由R的传递性有：$\langle x, z\rangle \in R$。所以，$z \in [x]_R$，即：$[y]_R \subseteq [x]_R$。

所以，由a)和b)知：$[x]_R = [y]_R$。

定理6.2.1的证明（续）

(2) 若$y \notin [x]_R$，设$[x]_R \cap [y]_R \neq \Phi$，则存在$z \in [x]_R \cap [y\}_R$。即$z \in [x]_R$，$z \in [y]_R$，则有：$\langle x, z\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$，由R的对称性，$\langle z, y\rangle \in R$。由R的传递性有：$\langle x, y\rangle \in R$，即$y \in [x]_R$，矛盾。所以$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。■

3）因为对任意$x \in A$，$[x]_R \subseteq A$，所以$\bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$。

对任意$x \in A$，因R是自反的，所以$\langle x, x\rangle \in R$，即$x \in [x]_R$。

所以$x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$，即$A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$。故$\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

商 集

定义6.2.4 设R是非空集合A上的等价关系，由R确定的一切等价类的集合，称为集合A上关于R的商集(QuotientSet)，记为A/R，即

$$A/R = \{[x]_R \mid (x \in A)\}$$

例6.2.6 设集合A={0,1,2,4,5,8,9}，R为A上以4为模的同余关系。求A/R。

解 根据例6.2.5，商集

$A/R=\{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5, 9\},\{2\}\}$。

例6.2.7

设集合$A=\{1,2,3,4,5,8\}$，R为A上以3为模的同余关系。求A/R。

解 根据例6.2.3知，A上以3为模的同余关系R是等价关系。

因为$[1]_R=\{1,4\}=[4]_R$, $[2]_R=[5]_R=[8]_R=\{2,5,8\}$,

$[3]_R=\{3\}$,

所以根据商集的定义，$A/R=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R\}=\{\{1,4\},\{2,5,8\},\{3\}\}$。

计算商集A/R的通用过程：

（1）任选A中一个元素a，计算$[a]_R$；

（2）如果$[a]_R \neq A$，任选一个元素$b \in A-[a]_R$，计算$[b]_R$；

（3）如果$[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素$c \in A-[a]_R-[b]_R$，计算$[c]_R$；

以此类推，直到A中所有元素都包含在计算出的等价类中。

6.2.4等价关系与划分

定理6.2.2 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R所导出的等价划分。

定理6.2.3 给定集合A的一个划分$\Pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，则由该划分确定的关系

$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\cup(A_n\times A_n)$$

是A上的等价关系。我们称该关系R为由划分Π所导出的等价关系。

定理6.2.3的证明

证明 1）R是自反的

对$\forall x\in A$，因为$\Pi(A)$是A的一个划分，所以存在一个划分块$A_i\in\Pi(A)$，使得$x\in A_i$，显然x和x同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，故$\langle x,x\rangle\in R$，所以R是自反的。

2)R是对称的

对$\forall x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$，则x和y同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，因此y和x同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，故$\langle y,x\rangle\in R$，所以R是对称的。

定理6.2.3的证明(续)

3) R是传递的

对$\forall x,y,z\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in R$，则x和y同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，y和z同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_j，因此$y\in A_i\cap A_j$，由于不同的划分块交为空，所以$A_i=A_j$，因此x和z同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，即$\langle x,z\rangle\in R$，所以R是传递的。

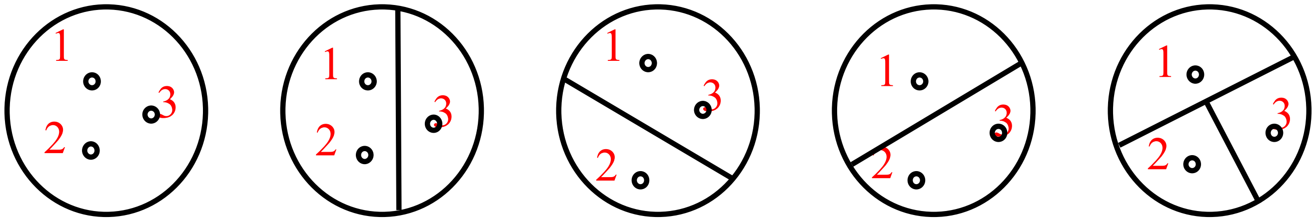
综上，由1)、2)、3)知，R是A上的等价关系。

说明：集合A上的等价关系和A的划分是一一对应的。

例6.2.8

设A={1,2,3}，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解 只有1个划分块的划分为S_1，见图(a)；具有2个划分块的划分为S_2、S_3和S_4，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为S_5，见图(e)。



(a) (b) (c) (d) (e)

例6.2.8(续)

假设由S_i导出的对应等价关系为R_i，$i=1,2,3,4,5$，则有

$R_1=S_1\times S_1=A\times A$，　$A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$；

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$；

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$；

例6.2.8(续)

$R_4=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{1\}\times\{1\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_4=\{\{1\},\{2,3\}\}$;

$R_5=\{1\}\times\{1\}\cup\{2\}\times\{2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=I_A$,

$A/R_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$。

例6.2.9

设R是A上的自反和传递关系，S也是A上的关系，且满足：$\langle x,y\rangle\in S \Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)$

证明 S是A上的等价关系。

证明（1）S是自反的：

对任意$a\in A$，因R是自反的，所以$\langle a,a\rangle\in R$，由$\langle a,a\rangle\in R$并且$\langle a,a\rangle\in R$，得$\langle a,a\rangle\in S$，

即S是自反的。

例6.2.9（续）

（2）S是对称的：

对$\forall a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in S$，则由题上定义可得$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, a\rangle \in R$，即有$\langle b, a\rangle \in R$并且$\langle a, b\rangle \in R$，所以有$\langle b, a\rangle \in S$，即S是对称的。

例6.2.9（续）

（3）S是传递的：

对∀a, b, c∈A，若<a, b>∈S，<b, c>∈S，则由题上定义可知<a, b>∈R且<b, a>∈R和<b, c>∈R且<c, b>∈R。因为R是传递的，所以有<a, c>∈R和<c, a>∈R。从而，<a, c>∈S，即S是传递的。

由(1), (2)和(3)知，S是A上的一个等价关系。

例6.2.10

设R是集合A上的一个关系.

对∀a, b, c∈A，若<a, b>∈R并且<a, c>∈R，则有<b, c>∈R，则R称为A上的循环关系。

试证明R是A上的一个等价关系的充要条件是R是循环关系和自反关系。

6.2.6等价关系的应用

例6.2.11 在下图中，点i和j之间有路当且仅当从结点i通过图中的边能够到达结点j。规定对任意结点i，i和i之间一定有路。定义R如下：

$$\langle i,j\rangle \in R \Leftrightarrow i\text{和}j\text{之间有路。}$$

试说明该关系R是否可以给定结点集A={1,2,3,4,5,6,7,8}一个划分？如果能，请给出具体的划分。

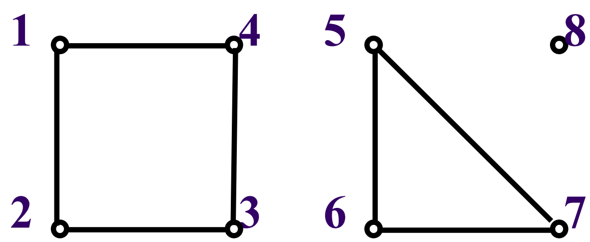


图6.2.5

例6.2.11 解

（1）由于规定任意结点i与他自身之间一定有路，因此<i,i>∈R，即R具有自反性；

（2）若<i,j>∈R，则两个结点i和j之间存在路，当然也存在j和i之间的路，所以<j,i>∈R，即R具有对称性；

（3）若<i,j>∈R,<j,k>∈R，则结点i和j之间有路，j和k之间也有路，从而i到k之间存在经过j的路，即有<i,k>∈R，因此得到R具有传递性。

由(1)、(2)和(3)知，R是等价关系。

例6.2.11 解(续)

于是所有不同的等价类为：$[1]_R=\{1,2,3,4\}$，$[5]_R=\{5,6,7\}$，$[8]_R=\{8\}$。

根据定理6.2.2知，

$A/R=\{[1]_R, [5]_R, [8]_R\}=\{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7\}, \{8\}\}$

就是A的一个划分。

例6.2.12

信息检索系统中的信息有{离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}。试给该信息检索系统指定三种不同的划分。

解 设A={离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}，则

例6.2.12 解（续）

划分1：含关键词离散数学，则

A={{离散数学},{高等数学,计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}}；

划分2：含关键词数学，则

A={{离散数学,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}}；

划分3：含关键词计算机，则

A={{离散数学，数据结构,编译原理,软件工程,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,计算机组成原理}}。

总结

1、熟记等价关系的定义；

2、利用等价关系的定义证明一个关系是等价关系；

3、给定A上的等价关系R，会求所有的等价类和商集A/R；并求出对应的集合的划分；

4、给定集合A上的划分，会求对应的等价类。

判定下列关系具有哪些性质

1、对任何非空集合A，A上的恒等关系；
2、多边形的“相似关系”、“全等关系”；
3、集合A的幂集P(A)上定义的“包含关系”；
4、集合A的幂集P(A)上定义的“真包含关系”

解：1，2都具有自反性，对称性和传递性，是等价关系；

3 具有*自反性*，反对称性和传递性；

4 具有*反自反性*，反对称性、传递性。

偏序关系

拟序关系

6.3 Order Relation 次序关系

拍摄一张室内闪光灯照片，需要完成如下任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

这些任务中有的必须在其他任务之前完成。例如，任务1必须在任务2之前完成，任务2，3必须在任务4之前完成，即任务之间存在“先后”关系，即次序关系。

6.3.1 Quasi order 拟序关系

定义6.3.1 设R是非空集合A上的关系，如果R是反自反和传递的，则称R是A上的拟序关系(Quasi-OrderRelation)，简称拟序，记为“<”，读作“小于”，并将“<a,b>∈<”记为“a<b”。序偶<A,<>称为拟序集(Quasi-OrderSet)。

由定义6.3.1知：

（1）R是拟序关系⇔R同时具有反自反性和传递性；

（2）R不是拟序关系⇔R不具有反自反性或者传递性；

（3）拟序“<”的逆关系“$<^{T}$”也是拟序，用“>”表示，读作“大于”。

例6.3.1

设R是集合A上的拟序关系，则R是反对称的。

证明 假设R不是反对称的关系，则必存在x, y∈A，且x≠y，满足<x, y>∈R并且<y, x>∈R。因为R是A上的拟序关系，所以R具有传递性，从而有<x, x>∈R。这与R是反自反的矛盾，从而假设错误，即R一定是反对称的。

例6.3.2

判断下列关系是否为拟序关系

（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”；

（2）实数集R上定义的“小于”关系(<)；

解（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”具有反自反性和传递性，所以<P(A)，$\subset$ >是拟序集。

（2）实数集合R上定义的“小于”关系(<)具有反自反性和传递性，所以<R, <>是拟序集。

6.3.2 Patial Order偏序关系

定义6.3.2 设R是非空集合A上的关系，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A上的偏序关系(PartialOrderRelation)，简称偏序，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。序偶<A,≤>称为偏序集(PartialOrderSet)。

由定义6.3.2知

（1）R是偏序关系⇔R同时具有自反性、反对称性和传递性；

（2）R不是偏序关系⇔R不具备自反性或反对称性或传递性；

（3）偏序“≤”的逆关系“$\leq^T$”也是一个偏序，我们用“≥”表示，读作“大于等于”；

（4）（“≤”$-I_A$）为A上的拟序关系，（“<”$\cup I_A$）为A上的偏序关系。

例6.3.3

试判断下列关系是否为偏序关系

（1）集合A的幂集P(A)上的包含关系“$\subseteq$”；

（2）实数集合R上的小于等于关系“$\leqslant$”；

（3）自然数集合N上的模m同余关系；

（4）正整数集合N上的整除关系“|”；

（5）ALGOL或PL/I等都是块结构语言，设 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是这种语言的一个程序中的块的集合。对所有i和j，定义关系“$\leqslant$”如下：$b_i \leqslant b_j$ 当且仅当 b_i 被 b_j 所包含。

例6.3.3 解

根据偏序关系的定义知，（1），（2），（4），（5）所对应的关系同时具有自反性，反对称性和传递性，所以都是偏序集；

（3）所对应的关系不具有反对称性，所以它不是偏序关系。

例6.3.4

设X是所有4位二进制串的集合，在X上定义关系R：如果s_1的某个长度为2的子串等于s_2的某个长度为2的子串，则$\langle s_1, s_2\rangle \in R$，例如因为0111和1010中都含有子串01，所以<0111，1010>∈R。试判断R是否是一个偏序关系。

例6.3.4 解

对任意的$s,t\in X$，如果$\langle s,t\rangle\in R$，则s的某个长度为2的子串等于t的某个长度为2的子串，也可以说t的某个长度为2的子串等于s的某个长度为2的子串，即有$\langle t,s\rangle\in R$，从而R是对称的。根据对称性，存在0111，1010∈X，有< 0111，1010 >∈R且< 0111，1010 >∈R ，但是0111≠1010，从而R不是反对称的，从而R不是偏序关系。

例6.3.5

考虑任务集T，它包含了拍摄一张室内闪光照片必须按顺序完成的任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

在T上定义关系R如下：

$\langle i, j\rangle \in R \Leftrightarrow$ 如果i=j或者任务i必须在任务j之前完成。

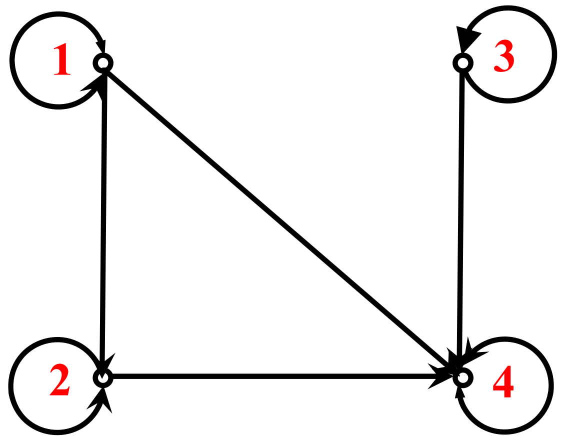
试判断R是T上的偏序关系并画出它的关系图。

例6.3.5 解

根据R的定义，有

R={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 4>, <3, 4>}。

根据自反、反对称和传递的定义知，关系R具有自反性，对称性和传递性。从而R是偏序关系，其关系图如右图所示。



2 哈斯图

（1）用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环；（因自反性）

（2）对任意$x,y\in A$，若$x<y$，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；（因反对称性）

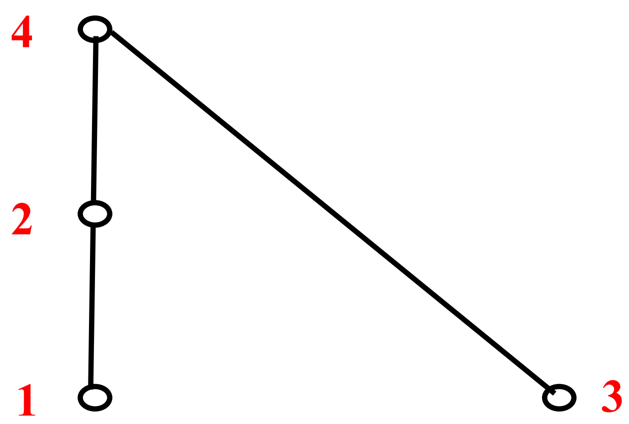
（3）对任意$x,y\in A(x\neq y)$，若$x\leqslant y$，且x与y之间不存在$z\in A$，使得$x\leqslant z, z\leqslant y$，则x与y之间用一条线相连，否则无线相连。（因传递性）

例6.3.6

画出例6.3.5中关系R的哈斯图。

R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,2>,<1,4>,<2,4>,<3,4>}

解 例6.3.5中关系R的哈斯图如下图所示。



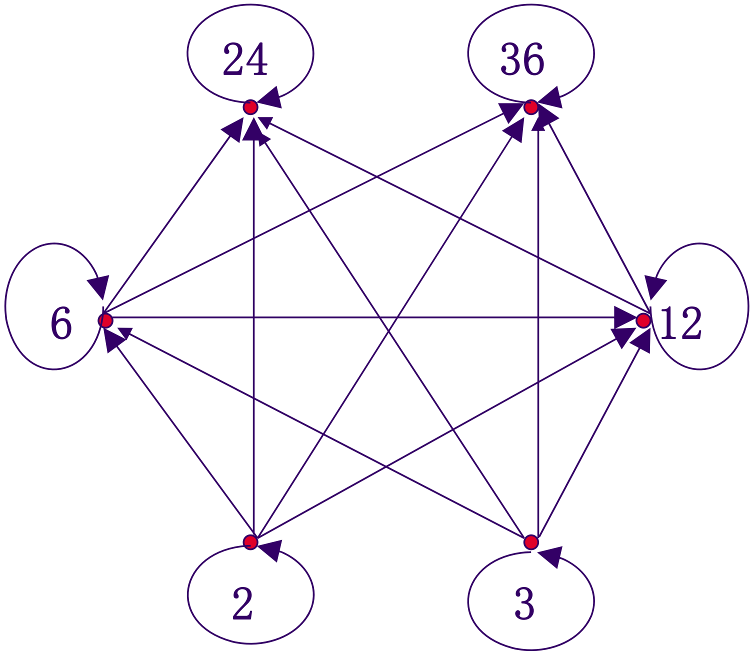
例6.3.7

设A={2, 3, 6, 12, 24, 36}，“≤”是A上的整除关系R，画出其一般的关系图和哈斯图。

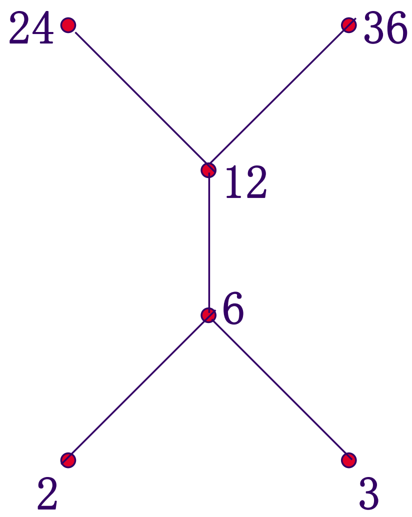
解 由题意可得

R={<2, 2>, <2, 6>, <2, 12>, <2, 24>, <2, 36>, <3, 3>, <3, 6>, <3, 12>, <3, 24>, <3, 36>, <6, 6>, <6, 12>, <6, 24>, <6, 36>, <12, 12>, <12, 24>, <12, 36>, <24, 24>, <36, 36>}，从而得出该偏序集<A, ≤>的一般关系图和哈斯图如下：

例6.3.7 （续）



关系图



哈斯图

3 特殊元素

定义6.3.3 设<A, ≤>是偏序集，B是A的任何一个子集，若存在元素$b \in B$，使得对$\forall x \in B$，

（1）都有$x \leq b$，则称b为B的最大元素，简称最大元 the greatest element

（2）都有$b \leq x$，则称b为B的最小元素，简称最小元 the least element

（3）满足$b \leq x \Rightarrow x = b$，则称b为B的极大元素，简称极大元（maximal）

（4）满足$x \leq b \Rightarrow x = b$，则称b为B的极小元素，简称极小元（minimal）

定义6.3.3可以符号化为：

$$b\text{是}B\text{的最大元} \Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \to (x \le b)) = 1$$

$$b\text{是}B\text{的最小元} \Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \to (b \le x)) = 1$$

$$b\text{是}B\text{的极大元} \Leftrightarrow (\forall x \in B)((b \le x) \to (b = x)) = 1$$

$$b\text{是}B\text{的极小元} \Leftrightarrow (\forall x \in B)((x \le b) \to (b = x)) = 1$$

注意

（1）B的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；

（2）b是B的最大元$\Leftrightarrow$ B中所有的元素都比b小；

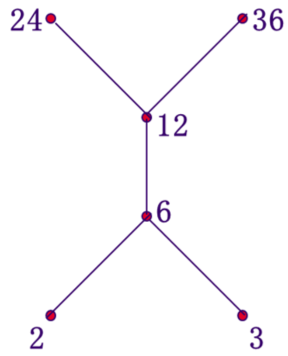
b是B的最小元$\Leftrightarrow$ B中所有的元素都比b大；

b是B的极大元$\Leftrightarrow$ B中没有比b大的元素；

b是B的极小元$\Leftrightarrow$ B中没有比b小的元素。

例6.3.8

在例6.3.7中，设$B_1=\{6,12\}$，$B_2=\{2,3\}$，$B_3=\{24,36\}$，$B_4=\{2,3,6,12\}$是集合A的子集，试求出B_1,B_2,B_3和B_4的最大元，最小元，极大元和极小元。



解 A的子集合B_1,B_2,B_3和B_4的最大元，最小元，极大元和极小元见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元
B_1	12	6	12	6
B_2	无	无	2,3	2,3
B_3	无	无	24,36	24,36
B_4	12	无	12	2,3

定义6.3.4

设<A,≤>是偏序集，B是A的任何一个子集。若存在元素a∈A，使得

（1）对任意x∈B，都有x≤a，则称a为B的上界；

（2）对任意x∈B，都有a≤x，则称a为B的下界；

（3）若元素a′∈A是B的上界，元素a∈A是B的任何一个上界，若均有a′≤a，则称a′为B的最小上界或上确界。记a′=SupB；

（4）若元素a′∈A是B的下界，元素a∈A是B的任何一个下界，若均有a≤a′，则称a′为B的最大下界或下确界。记a′=InfB。

由定义6.3.4知

（1）子集合B的上、下界和上、下确界可在集合A中寻找；

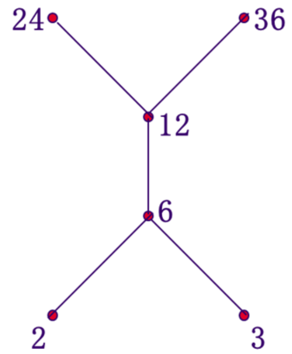
（2）一个子集合B的上、下界不一定存在，如果存在，可以不唯一的；

（3）一个子集合B的上、下确界不一定存在，如果存在，一定唯一；

（4）一个子集合B有上(下)确界，一定有上(下)界，反之不然。

例6.3.9

在例6.3.7中，设$B_1=\{6,12\}$，$B_2=\{2,3\}$是集合A的子集，试求出B_1，B_2的上界、下界、上确界和下确界。



解 集合B_1、B_2的各种特殊元素见下表。

集合	上界	下界	上确界	下确界
B_1	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
B_2	6, 12, 24, 36	无	6	无

例6.3.10

$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，A上定义偏序集$\langle A, \leqslant\rangle$的哈斯图如图6.3.4所示。求$B=\{x_1, x_2\}$和$C=\{x_3, x_4\}$上界、下界、上确界和下确界。

解　B、C的各种特殊元见下表。

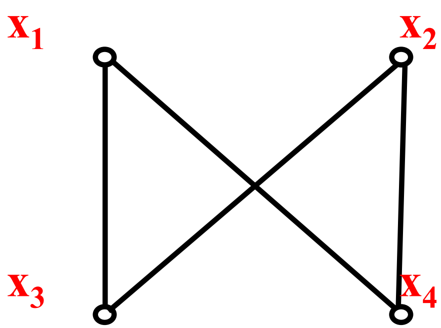


图6.3.4

集合	上界	下界	上确界	下确界
B	无	x_3,x_4	无	无
C	x_1,x_2	无	无	无

定理6.3.1

设<A, ≼>是一偏序集，B是A的子集。则：

（1）若b是B的最大元⇒b是B的极大元、上界、上确界；

（2）若b是B的最小元⇒b是B的极小元、下界、下确界；

（3）若a是B的上确界，且a∈B⇒a是B的最大元；

（4）若a是B的下确界，且a∈B⇒a是B的最小元。

定理6.3.2

设<A, ≼>是一偏序集，B是A的子集。则：

（1）若B存在最大元，则B的最大元是惟一的；

（2）若B存在最小元，则B的最小元是惟一的；

（3）b是B的最大元⇔ b是B的惟一极大元；

（4）b是B的最小元⇔ b是B的惟一极小元；

（5）若B存在上确界，则B的上确界是惟一的；

（6）若B存在下确界，则B的下确界是惟一的。

6.3.3 Total order 全序关系

定义6.3.5 设<A, ≤>是一个偏序关系，若对任意x, y∈A，总有x≤y或y≤x，二者必居其一，则称关系“≤”为全序关系(TotalOrderRelation)，简称全序，或者线序关系，简称线序。称<A, ≤>为全序集(TotalOrderSet)，或者线序集，或者链(Chain)。

从定义6.3.5可以看出：

全序关系是偏序关系，反之则不然。

例6.3.13

试判断下列关系是否为全序关系，如果是，请画出其哈斯图。

（1）设集合A={a, b, c}，其上的关系 “≤” ={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>}

（2）实数集R上定义的小于等于关系“≤”；

（3）实数集R上定义的小于关系“<”；

（4）集合A的幂集P(A)上定义的包含关系“⊆”。

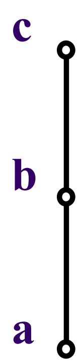
例6.3.13

（1）设集合A={a, b, c}，其上的关系

"≤" = {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>}

解：

<A, ≤>是全序集，其哈斯图见下图：

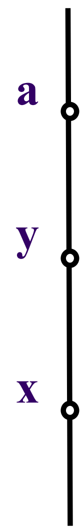


例6.3.13

（2）实数集R上定义的小于等于关系“≤”；

解：

〈R, ≤〉是全序集，其哈斯图是数轴，见下图，其中x, y, z∈R；

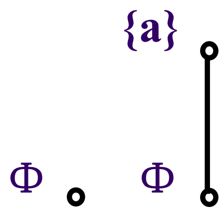


例6.3.13

（4）集合A的幂集P(A)上定义的包含关系“⊆”

解：

当|A|<2时，P(A)上定义的“ ⊆ ”是全序关系，<P(A),>是全序集，其哈斯图见下图



当|A|≥2，则<P(A),>不是全序集。

6.3.4 Well order 良序关系

定义6.3.6 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是一偏序集，若$A$的任何一个非空子集都有最小元素，则称“$\preccurlyeq$”为良序关系，简称良序，此时$\langle A, \preccurlyeq\rangle$称为良序集。

从定义6.3.6可以看出：

（1）R是良序关系$\Leftrightarrow$R是偏序关系和A的任何非空子集都有最小元；

（2）良序关系一定是偏序关系，反之则不然；

（3）良序关系一定是全序关系，反之则不然。

例6.3.14

试判断例6.3.13的(1)和(2)是否为良序关系。

（1）设集合A={a, b, c}，其上的关系

“≤” = {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>}

（2）实数集R上定义的小于等于关系“≤”

解（1）<A, ≤>是良序集；

（2）<R, ≤>是不良序集。

注：

1、“≤”是良序关系“≤”是全序关系“≤”是偏序关系；

2、有限全序集一定是良序集。

6.3.6次序关系的应用

例6.3.15 计算机科学中常用的字典排序如下：

设Σ是一有限的字母表。Σ上的字母组成的字母串叫Σ上的字；Σ*是包含空字“ε”的所有字组成的集合，建立Σ*上的字典次序关系L：

设$x=x_1x_2\cdots x_n$, $y=y_1y_2\cdots y_m$，其中$x_i, y_j\in\Sigma$ $(i=1, 2, \cdots, n；j=1, 2, \cdots, m)$，则$x, y\in\Sigma^*$。

例6.3.15 （续）

（1）当$x_1 \neq y_1$时，若$x_1 \leqslant y_1$，则xLy；若$y_1 \leqslant x_1$，则yLx。

（2）若存在最大的k且$k<\min(n,m)$，使$x_i=y_i(i=1,2,\cdots,k)$，而$x_{k+1} \neq y_{k+1}$，若$x_{k+1} \leqslant y_{k+1}$，则xLy；若$y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$，则yLx。

（3）若存在最大的k且$k=\min(n,m)$，使$x_i=y_i(i=1,2,3,\cdots,k)$，此时，若$n \leqslant m$，则xLy；若$m \leqslant n$，则yLx。

证明 L是Σ*上的一个偏序关系且是一个全序关系。

例6.3.15 证明

首先证明L是偏序关系。

（1）L是自反的。

对任意$x \in \Sigma^*$，令$x=x_1x_2\cdots x_n$，其中$x_i \in \Sigma$，显然有$x_i \leqslant x_i (i=1, 2, \cdots, n)$，从而有xLx；

（2）L是反对称的。

对任意x，$y \in \Sigma^*$，令$x=x_1x_2\cdots x_n$，$y=y_1y_2\cdots y_m$，其中$x_i, y_j \in \Sigma (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$。若xLy且yLx，根据L的定义有x=y；

例6.3.15 证明（续）

（3）L是传递的。

对任意x, y, z∈Σ*，令$x=x_1x_2\cdots x_n$， $y=y_1y_2\cdots y_m$，$z=z_1z_2\cdots z_p$，其中x_i, y_j, z_k∈Σ(i=1, 2, …, n; j=1, 2, …, m；k=1, 2, …, p)。若xLy且yLz，根据L的定义和“≤”的传递性，有xLz。

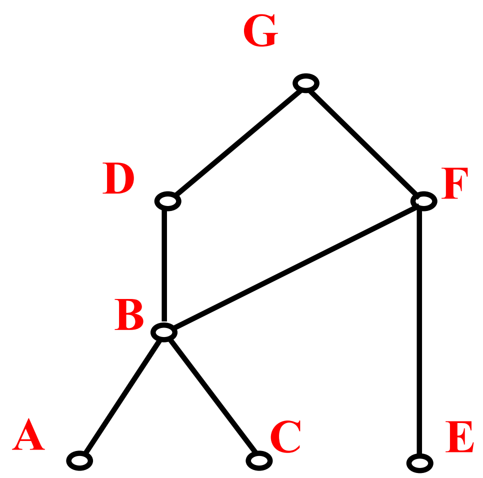
综上所述，L是Σ*上的一个偏序关系。

对任意的x, y∈Σ*，由x和y的表示形式知，x_i和y_i(i=1, 2, …, n)总能进行比较，所以一定有xLy和yLx之一成立，从而L是Σ*上的一个全序关系。

例6.3.16

一个计算机公司开发的项目需要完成7个任务，其中的某些任务只能在其他任务结束之后才能开始。考虑如下建立任务上的偏序，如果任务Y在任务X结束之后才能开始，则X≤Y。这7个任务的关于偏序的哈斯图如右图，

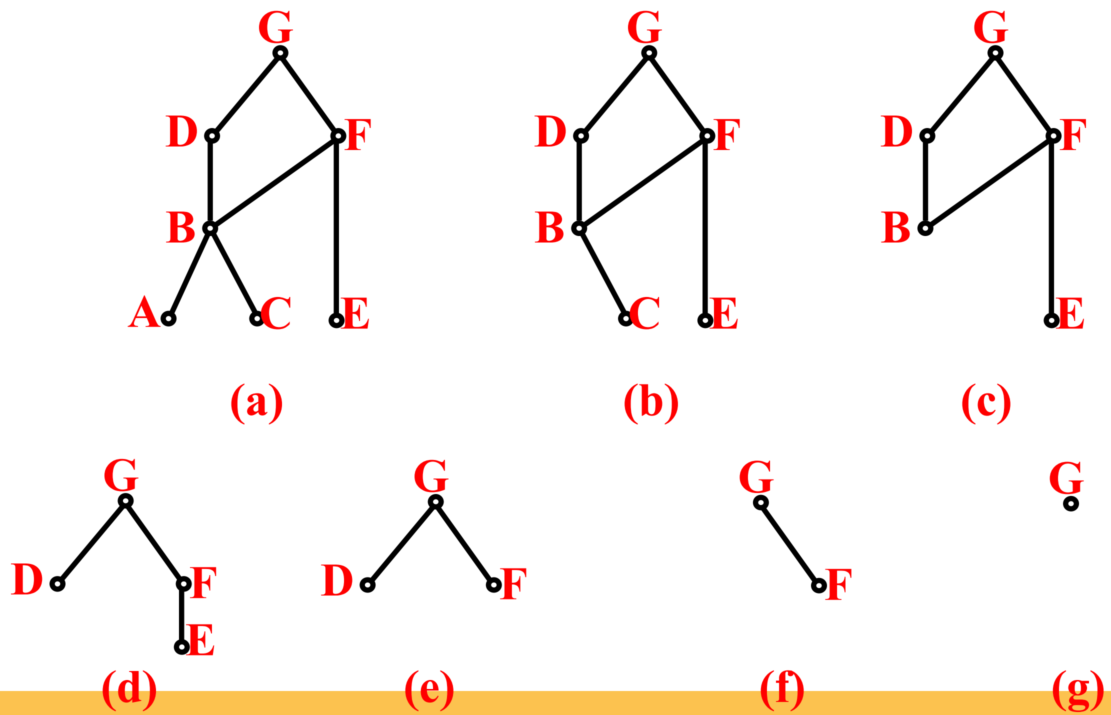
求一个全序执行这些任务以完成这个项目。



例6.3.16 解

可以通过执行一个排序得到7个任务的一种排序，

排序的步骤见下图(a)到(g)



6.4 本章总结

（1）等价关系的概念及证明、等价类和商集的计算；

（2）集合划分的定义、求给定集合的划分；

（3）等价关系与集合划分的关系；

（4）偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义，它们之间的异同；

（5）哈斯图的画法；

（6）八个特殊元的定义和基本性质。

Thank You！