# 离 散 数 学

西北工业大学

2022年3月30日星期三

# Relations

关系理论历史悠久。它与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切的联系。

关系是日常生活以及数学中的一个基本概念，例如：兄弟关系，师生关系、位置关系、大小关系、等于关系、包含关系等。

在某种意义下，关系可以理解为有联系的一些对象相互之间的比较行为。而根据比较结果来执行不同任务的能力是计算机最重要的属性之一，在执行一个典型的程序时，要多次用到这种性质。

# 关系理论在计算机科学技术中的应用

- 计算机程序的输入、输出关系；
- 数据库的数据特性关系；
- 数据结构本身就是一个关系等。
- 数据结构、情报检索、数据库、算法分析、计算机理论等计算机学科很好的数学工具。

# 内容提要

# 内容提要

1. 二元关系
2. 关系运算
3. 关系性质
4. 闭包

# 5.1 本章学习要求

**重点掌握**

1

1 二元关系的概念和表示
2 关系的复合与逆运算
3 关系的性质

**一般掌握**

2

1 关系的闭包运算

**了解**

3

1 n重有序组
2 n个集合的笛卡儿积
3 n重有序组相等的判定

# 5.2 Binary Relation(二元关系)

## 5.2.1 序偶与笛卡尔积

- 上,下；左，右；3<4；中国地处亚洲；平面上点的坐标（x,y）等。
- 特征：成对出现、具有一定的顺序。
- 定义5.2.1　由两个元素x,y按照一定的次序组成的二元组称为有序偶对(序偶)，记作<x,y>，其中称x为<x,y>的第一元素，y为<x,y>的第二元素。

# 例5.2.1

用序偶表示下列语句中的次序关系

| | |
|---|---|
| (1) 平面上点A的横坐标是x，纵坐标是y，x, y∈R； | 〈x, y〉，x, y∈R； |
| (2) 西安是陕西的省会； | 〈西安, 陕西〉； |
| (3) 英语课本在书桌上； | 〈英语课本, 书桌〉； |
| (4) 左，右关系。 | 〈左, 右〉。 |

# 序偶与集合的关系

1. 序偶可以看作是具有两个元素的集合，
2. 但是序偶中的两个元素具有确定的次序。即
   $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$，但是 $\{a, b\}=\{b, a\}$。

**定义5.2.2** 给定序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$，

$$\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c \text{且} b=d。$$

# N重有序组

定义5.2.3 由n个元素$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$按照一定次序组成的n元组称为n重有序组(n-Type)(Vector)，记作：$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$

例5.2.2 用n重有序组描述下列语句。

（1）中国陕西西安西北工业大学网络空间安全学院；

（2）2014年3月10日18点16分25秒；

（3）16减5再加3除以7等于2。

# Cartesian Product(笛卡尔积)

- Let A and B be two sets

> The cartesian product of A and B, denoted by $A \times B$, is the set of all ordered pairs
>
> $$\{ (a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B \}$$

- $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K \}$ = all ranks

  $B = \{ ♠, ♥, ♦, ♣ \}$ = all suits

  ➔ $A \times B$ = all 52 cards in a deck

  $= \{ (1,♠), (2,♠), (3,♠), \ldots, (J,♣), (Q,♣), (K,♣) \}$

# Cartesian Product(笛卡尔积)

- Let $A_1, A_2, \ldots, A_k$ be k sets

> The cartesian product of $A_1, A_2, \ldots, A_k$, denoted by $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, is the set of all ordered pairs
> $\{ (a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_j \in A_j \text{ for all } j = 1, 2, \ldots, k \}$

- Let $A_j$ = the set $\Re$ of real numbers, for all j

➔ $A_1 \times A_2 \times A_3$ = the 3-d Euclidean space $\Re^3$

# 例5.2.3

设A={a}，B={b,c}，C=Φ，D={1,2}，请分别写出下列笛卡儿积中的元素。

（1）A×B，B×A；（2）A×C，C×A；

（3）A×(B×D)，(A×B)×D。

# 注意

**由例5.2.3我们可以看出：**

**（1）笛卡儿积不满足交换律；**

**（2）$A\times B=\Phi$当且仅当$A=\Phi$或者$B=\Phi$；**

**（3）笛卡儿积不满足结合律；**

**（4）对有限集A,B，有$|A\times B|=|B\times A|=|A|\times|B|$。**

# 推广

**定义5.2.6** 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个集合，称集合

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle \mid (a_i \in A_i) \wedge i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}\}$$

为集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**笛卡儿积**(DescartesProduct)

当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，有$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n=A^n$。

**定理5.2.3** 当集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是**有限集**时，$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n|=|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$。

# Binary Relation

**定义5.2.7** 设A,B为两个非空集合，称A×B的任何子集R为**从A到B的二元关系**，简称关系(Relation)。如A＝B，则称R为**A上的二元关系**。

这里，A称为R的**前域**，B称为R的**后域**。

令 $C=\{x \mid \langle x,y\rangle \in R\} \subseteq A$,

$D=\{y \mid \langle x,y\rangle \in R\} \subseteq B$,

称C为R的**定义域**，记为C＝**domR**；称D为R的**值域**，记D＝**ranR**；并称fldR＝D∪C为R的**域**。

# 特别

当R=Φ时，称R为空关系(empty relation)；

当R=A×B时，则称R为全关系(Total Relation)。

设一有序对<x, y>：

若<x, y>∈R，则记为xRy，读作“x对y有关系R”；

若<x, y>∉R，则记为$x \not R y$，读作“x对y没有关系R”。

# 例5.2.4

假设A={a, b}， B={c, d}， 试写出从A到B的所有不同关系。

解 因为A={a, b}， B={c, d}， 所以

A×B={<a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>}。

于是A×B的所有不同子集为：

0－元子集： Φ；

1－元子集： {<a, c>}, {<a, d>}, {<b, c>}, {<b, d>}；

2－元子集： {<a, c>, <a, d>}， {<a, c>, <b, c>}，
{<a, c>, <b, d>}， {<a, d>, <b, d>}，
{<a, d>, <b, d>}， {<b, c>, <b, d>}；

# 例5.2.4 解（续）

3－元子集：

{<a, c>, <a, d>, <b, c>}，{<a, c>, <a, d>, <b, d>}，

{<a, c>, <b, c>, <b, d>}，{<a, d>, <b, c>, <b, d>}；

4－元子集：{<a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>}。

**注意**

当集合A, B都是有限集时，$A\times B$共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的子集，即从A到B的不同关系共有$2^{|A|\cdot|B|}$个。

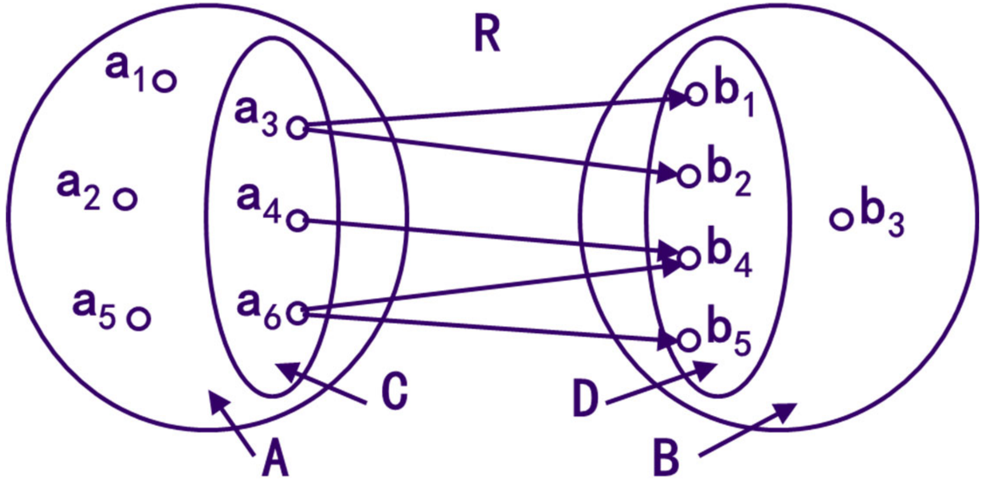
# 用图表示关系

假设$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$，

$C=\{a_3, a_4, a_6\}$，$D=\{b_1, b_2, b_4, b_5\}$，

$R=\{\langle a_3, b_1\rangle, \langle a_3, b_2\rangle, \langle a_4, b_4\rangle, \langle a_6, b_4\rangle, \langle a_6, b_5\rangle\}$。

显然，$R\subseteq C\times D\subseteq A\times B$。



# 例5.2.5

求定义在Z上关系的定义域、值域和域。

（1）$R_1=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in Z)\wedge\{y=x^2\}\}$；

（2）$R_2=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in Z)\wedge\{|x|=|y|=7\}\}$。

**解 略**

**推广**

**定义5.2.8** 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个非空集合，称$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$的任意子集R为以$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$为基的**n元关系**(n-Relation)。

# 5. 2. 3 Representing Binary Relations

## 1. 集合表示法（枚举法和叙述法）

例5. 2. 7（1）设A={a}，B={b, c}，用枚举法写出从A到B的不同关系；

（2）用叙述法写出定义在R上的“相等”关系。

解（1）A到B的不同关系有：

$R_1=\Phi$，　　$R_2=\{\langle a, b\rangle\}$，

$R_3=\{\langle a, c\rangle\}$，　　$R_4=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$；

（2）设R上的“相等”关系为S，则

$$S=\{\langle x, y\rangle \mid (x, y\in R)\wedge(x=y)\}。$$

# 2. 关系图法

## （1）A≠B

设A＝{$a_1$, $a_2$, …, $a_n$}，B＝{$b_1$, $b_2$, …, $b_m$}，R是从A到B的一个二元关系，则规定R的关系图如下：

①. 设$a_1$, $a_2$, ..., $a_n$和$b_1$, $b_2$, ..., $b_m$分别为图中的结点，用“。”表示；

②. 如<$a_i$, $b_j$>∈R，则从$a_i$到$b_j$可用有向边$a_i$ 。→。 $b_j$相连。<$a_i$, $b_j$>为对应图中的有向边。

# 关系图法（续）

## (2) A=B

设A＝B=$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$，R是A上的关系，则R的关系图规定如下：

①. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为图中结点，用“○”表示

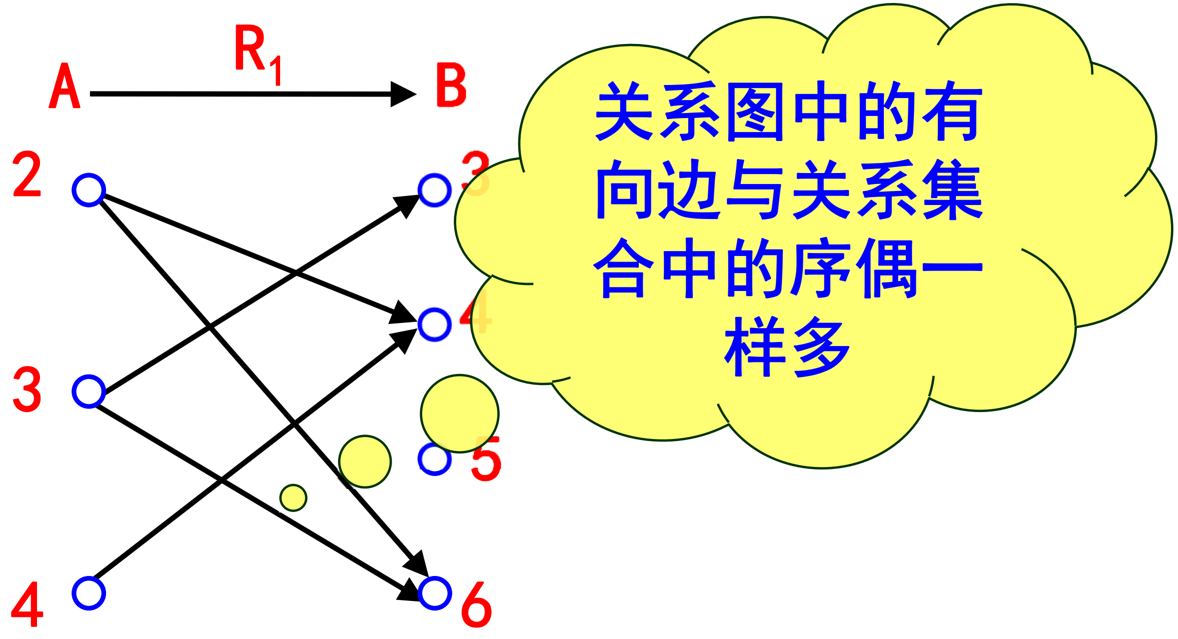
②. 如$\langle a_i, a_j \rangle \in R$，则从$a_i$到$a_j$可用有向边$a_i$○→○$b_j$相连。$\langle a_i, a_j \rangle$为对应图中的有向边。

③. 如$\langle a_i, a_i \rangle \in R$, 则从$a_i$到$a_i$用一带箭头的小圆环表示，即：$a_i$

# 例5.2.8

试用关系图表示下面的关系。

（1）设A={2, 3, 4}，B={3, 4, 5, 6}，则A到B之间的一种整除关系$R_1$={<2, 4>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <4, 4>}

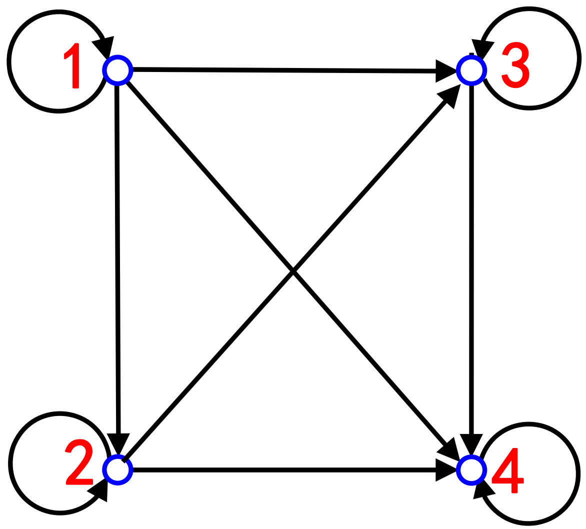


# 例5.2.8（续）

（2）假设A={1,2,3,4}，则A上的小于等于关系

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,$

$\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$。



## 3. Relation Matrix(关系矩阵)

设A＝{$a_1, a_2, \cdots, a_n$}，B＝{$b_1, b_2, \cdots, b_m$}，R是从A到B的一个二元关系，称矩阵$M_R$＝（$r_{ij}$）$_{n\times m}$为关系R的**关系矩阵**(Relation Matrix)，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \langle a_i,b_j\rangle\in R\\ 0 & \langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,...,n, j=1,2,...,m)$$

又称$M_R$为R的**邻接矩阵**(Adjacency Matrix)。

注意

1. 必须先对集合A,B中的元素排序
2. A中元素序号对应矩阵元素的行下标，
3. B中元素序号对应矩阵元素的列下标；
4. 关系矩阵是0-1矩阵，称为布尔矩阵。

# 例5.2.9

设A = {1, 2, 3, 4}，考虑A上的整除关系R和等于关系S。

（1）试写出R和S中的所有元素；

（2）试写出R和S的关系矩阵。

# 例5.2.9 解

（1）根据整除关系和等于关系的定义，有

R={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 4>}

S={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>}。

（2）设R和S的关系矩阵分别为$M_R$和$M_S$，则有

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

# 5.2.4 二元关系的难点

1. 序偶有两层含义：一是“顺序”，二是“偶对”，即由两个元素形成的有顺序的一个偶对。当x≠y时，一定有<x, y> ≠ <y, x>。注意与由两个元素构成的集合的区别；
2. 关系是一种特殊的集合，牢记其元素是以序偶的形式出现的，注意与一般集合的区别。在一个普通集合A中任取一个元素表示为“∀x∈A”，在一个关系R中任取一个元素表示为“∀<x,y>∈R”；
3. 在关系图表示法中，注意A到B的关系与A上的关系相应关系图的区别；
4. 在关系矩阵表示法中，对集合A到B的关系R，对应A和B中不同的元素顺序，可以得到不同的关系矩阵，但是，经过一些初等变换后，这些不同的关系矩阵可以变为同一矩阵。因此，在通常情况下，如果集合以枚举法表示时，则默认枚举的次序为元素的顺序。

# 5.2.5 关系的应用举例

集合A到集合B上的关系可以看成是列出了集合A中的一些元素与集合B中的相关元素的表(table)。

例5.2.11 试用关系表示图5.2.5。

解 图5.2.5可以用关系表示如下：

{<a，c>，<a，b>，<b，b>，<b，f>，<c，d>，<c，e>，<d，c>，<d，b>，<e，f>，<f，d>}。

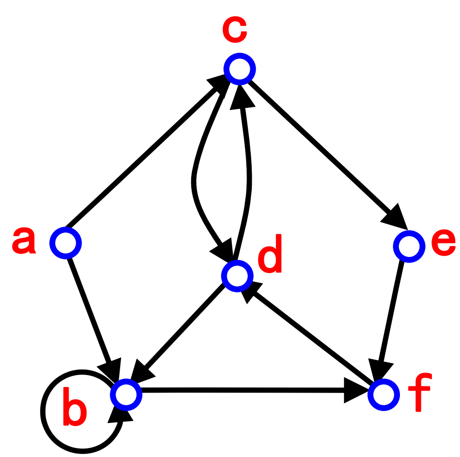



图5.2.5

# 5.3 关系的运算

设R，S都是从集合A到B的两个关系，则：

$R\cup S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\vee(xSy)\}$

$R\cap S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\wedge(xSy)\}$

$R-S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\wedge(x\not{S}y)\}$

$\overline{R}=\{\langle x,y\rangle \mid (x\not{R}y)\}$

注意：A×B是相对于R的全集，所以有

$\overline{R}=A\times B-R$，且$\overline{R}\cup R=A\times B$，$\overline{R}\cap R=\Phi$。

$\overline{\overline{R}}=R$,　　　$S\subseteq R\Leftrightarrow\overline{R}\subseteq\overline{S}$

# 例5.3.1

设A={a, b, c, d}，A上关系R和S定义如下：

$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle\}$，

$S = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$。

计算 $R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，$S-R$，$\overline{R}$。

# 5.3.1 关系的复合运算

**定义5.3.1** 设A, B, C是三个集合，R是从A到B的关系(R：A→B)，S是从B到C的关系(S：B→C)，则R与S的复合关系(合成关系)(Composite)RoS是从A到C的关系，并且：

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xRy \wedge ySz)\}$$

运算“o”称为复合运算(CompositeOperation)。

# 5.3.1 关系的复合运算

定义5.3.1 设A,B,C是三个集合，R是从A到B的关系(R：A→B)，S是从B到C的关系(S：B→C)，则R与S的复合关系(合成关系)(Composite)R∘S是从A到C的关系，并且：

1. R和S是可复合的⇔R的后域和S的前域完全相同；
2. R∘S的前域是R的前域A，后域是S的后域C；
3. R∘S＝Φ⇔对任意x∈A和z∈C，不存在y∈B，使得xRy和ySz同时成立；
4. Φ∘R＝R∘Φ＝Φ 。

# 例5.3.2

试判断下列关系是否是两个关系的复合，如果是，请指出对应的两个关系。

（1）“祖孙”关系；（2）“舅甥”关系；

（3）“兄妹”关系。

解（1）“祖孙”关系是“父女”关系和“母子”关系的复合；（“父子”“父子”）

（2）“舅甥”关系是“兄妹”关系和“母子”关系的复合；

（3）不是。

# 定理5.3.1

设A、B、C和D是任意四个集合，R、S和T分别是从A到B，B到C和C到D的二元关系，则

（1）$RoSoT = Ro(SoT)$；

（2）$RoI_B=I_AoR=R$，其中$I_A$和$I_B$分别是A和B上的恒等关系。

分析：二元关系是集合，二元关系的复合是关系，从而也是集合，因此上面两式就是证明两个集合相等。根据集合相等的定义，有$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$并且$B\subseteq A$，

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A，有x\in B。$$

# 定理5.3.2

设A、B、C和D是任意四个集合，R是从A到B的关系，$S_1$，$S_2$是从B到C的关系，T是从C到D的关系，则：

1） $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$

2） $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$

3） $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$

4） $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$ 证明

# 5.3.2 关系的逆运算

定义5.3.2 设A，B是两个集合，R是A到B的关系，则从B到A的关系

$$\tilde{R}=\{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in R\}$$

称为R的逆关系(InverseRelation)，

运算“~”称为逆运算(InverseOperation)。

由定义：

$\tilde{\tilde{R}}$=R；

$\tilde{\Phi}$=Φ。

注意：关系是一种集合，逆关系也是一种集合，因此，如果R是一个关系，则$\tilde{R}$和$\bar{R}$都是关系，但$\tilde{R}$和$\bar{R}$是完全不同的两种关系，千万不要混淆。

若$R \subseteq A \times B$，则$\bar{R} = A \times B - R \subseteq A \times B, \tilde{R} \subseteq B \times A$.

# 定理5.3.3

设A、B和C是任意三个集合，R,S分别是从A到B，B到C的二元关系，则

$$\widetilde{R \circ S} = \tilde{S} \circ \tilde{R}$$ （证明）

# 定理5.3.4

设R，S是从集合A到集合B的关系，则有

① $\widetilde{R\cup S}=\tilde{R}\cup\tilde{S}$；（分配性）

② $\widetilde{R\cap S}=\tilde{R}\cap\tilde{S}$；

③ $\widetilde{R-S}=\tilde{R}-\tilde{S}$；

④ $\bar{\tilde{\tilde{R}}}=\tilde{\bar{R}}$；（可换性）

⑤ $\widetilde{A\times B}=B\times A$；

⑥ $S\subseteq R\Leftrightarrow\tilde{S}\subseteq\tilde{R}$；（单调性）

# 5.3.3 关系的幂运算

定义5.3.3 设R是集合A上的关系，则R的n次幂，记为$R^n$，定义如下：

1. $R^0 = I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$；
2. $R^1 = R$；
3. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$。

由于关系的复合运算满足结合律，$R^n$即为n个R的复合，也是A上的二元关系。

显然，$R^n \circ R^m = R^{m+n}$，$(R^m)^n = R^{mn}$。

# 例5.3.7

设A={1, 2, 3, 4, 5, 6}，定义在A上的关系

R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 5>, <5, 6>},

S={<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 5>, <5, 6>},

计算：

(1) $R^n$ (n=1, 2, 3, 4, ...)，$\bigcup_{i=1}^{6} R^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

(2) $S^n$ (n=1, 2, 3, 4, ...)，$\bigcup_{i=1}^{6} S^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$

# 解

（1）$R^1 = R$，

$R^2 = R \circ R$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,6\rangle\}$，

$R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,6\rangle\}$，

$R^4 = R^3 \circ R$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,6\rangle\}$，

$R^5 = R^4 \circ R$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle\}$，

$R^6 = R^5 \circ R$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle\} = R^5$，

$R^7 = R^6 \circ R = R^5$， …， $R^n = R^5$ （$n > 5$）。

# 解（续1）

$$\bigcup_{i=1}^{6} R^i = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^6 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle,$$
$$\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle,$$
$$\langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 5, 6\rangle\};$$

$$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^6 \cup R^7 \cup \cdots$$
$$= R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^5 \cup R^5 \cup \cdots$$
$$= \bigcup_{i=1}^{6} R^i$$

# 解（续2）

（2）$S^1 = S$,

$S^2 = S \circ S = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 6\rangle\}$,

$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle\}$,

$S^4 = S^3 \circ S = \{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle\}$,

$S^5 = S^4 \circ S = \{\langle 1, 6\rangle\}$,

$S^6 = S^5 \circ S = \Phi$,

$S^7 = \Phi$,

…,

$S^n = \Phi \quad (n > 5)$。

# 解（续3）

$$\bigcup_{i=1}^{6} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \cdots \cup S^6 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 5,6\rangle\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \cdots \cup S^6 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{6} S^i$$

由例5.3.7可以看出：

（1）幂集$R^n$的基数$|R^n|$并非随着n的增加而增加，而是呈递减趋势；

（2）当$n \geqslant |A|$时，则$R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{6} R^i$

# 定理5.3.5

设A是有限集合，且|A|＝n，R是A上的二元关系，则：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

# 5.3.5关系运算的应用

例5.3.8 设有关系R和S分别如表5.3.1和表5.3.2所示，现在在R中增加关系S中的所有元组，试求增加后的关系。

表5.3.1

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 2 | 1 | 3 |
| 5 | 6 | 2 |

表5.3.2

| A | B | C |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 6 | 1 | 5 |

# 分析

在关系R中增加S中的所有元组，在关系数据库中称为对关系表的**插入操作**，该操作可以通过关系的**并运算**完成。

即求在R中增加关系S的所有元组等价于求R∪S

**解** 关系R增加S的元组后所构成的关系R∪S，见右表。

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 2 | 1 | 3 |
| 5 | 6 | 2 |

| A | B | C |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 6 | 1 | 5 |

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 2 | 1 | 3 |
| 5 | 6 | 2 |
| 4 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | 5 |

# 例5.3.9

设有关系R和S如表5.3.4和表5.3.5所示，现在在R中去掉关系S中所出现的元组，试求去掉S后的关系。

解 关系R中除去S中所出现的元组后所得的关系R-S如表5.3.6所示。

表5.3.4

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

表5.3.5

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 7 | 8 | 9 |
| | | |

表5.3.6

| A | B | C |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| | | |
| | | |

# 5.4 关系的性质(重点掌握)

本节涉及到的关系，如无特别声明，都是假定其前域和后域相同。即都为定义在集合A上的关系，且A是非空集合。对于前后域不相同的关系，其性质无法加以定义。

# 5.4.1 关系性质的定义

## 1、自反性和反自反性

定义5.4.1设R是集合A上的关系，

1. 如果对任意$x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \in R$，那么称R在A上是自反的(Reflexive)，或称R具有自反性(Reflexivity)；

   例如：朋友关系。

2. 如果对任意$x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称R在A上是反自反的(Antireflexive)，或称R具有反自反性(Antireflexivity)。

   例如：父子关系。

# 例5.4.1

(1) 因为A中任意x，都有$\langle x,x\rangle \in R$，
所以R是自反的；

(2) 因为A中任意x，都有$\langle x,x\rangle \notin S$，
所以S是反自反的；

设A={1,

（1） R=

（2） S={$\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle$}；

（3） T={$\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle$}。

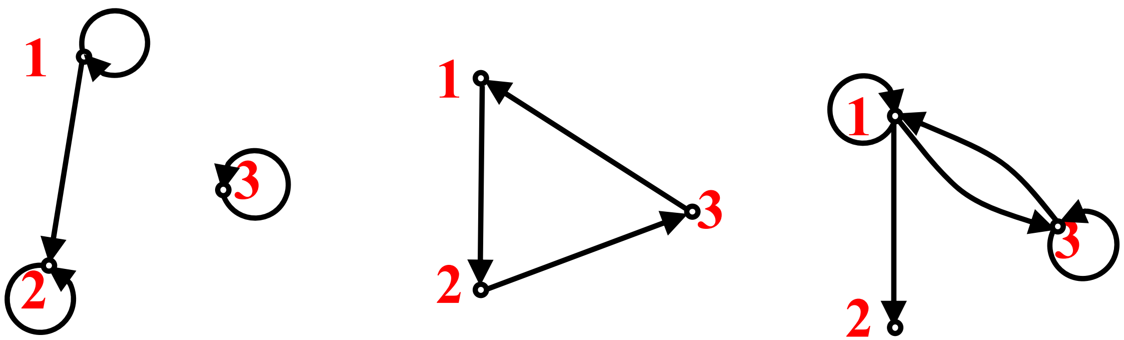
(2) 因为存在2∈A，使$\langle 2,2\rangle \notin T$，
所以T不是自反的；
又因为存在1∈A，使$\langle 1,1\rangle \in T$，
所以T不是反自反的，
即T既不是自反的，也不是反自反的。

# 例5.4.1 解（续）

（2）设R, S和T的关系矩阵分别为$M_R$, $M_S$和$M_T$，则：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）R, S和T的关系图分别是下图的(a), (b)和(c)。




(a) (b) (c)

# 结论

1. 关系R是自反的⇒R不是反自反的
2. 存在既不是自反的也不是反自反的关系
3. 关系R是自反的⇔
   关系图中每个结点都有环
4. 关系R是反自反的⇔
   关系图中每个结点都无环
5. 关系R是自反的 ⇔
   关系矩阵的主对角线上全为1
6. 关系R是反自反的⇔关系矩阵的主对角线上全为0

# 例5.4.2

设A={a, b}，试计算A上所有**具有自反性**的关系R的个数。

**解** 因为$A^2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，所以A上具有自反性的关系R的个数为：

$$C(2,0)+C(2,1)+C(2,2)=4。$$

# 2、对称性和反对称性

**定义5.4.2** 设R是集合A上的关系。

1. 对任意x, y∈A，如果<x, y>∈R，那么<y, x> ∈R，则称关系R是**对称的**(Symmetric)，或称R具有**对称性**(Symmetry)；
2. 对任意x, y∈A，如果<x, y>∈R且<y, x>∈R，那么x＝y（或者如果x≠y且<x, y>∈R，那么<y, x>∉R），则称关系R是**反对称的**(Antisymmetric)，或称R具有**反对称性**(Antisymmetry)。

# 例5.4.2

设A={1,2,3,4},

定义A上的关系R,S,T和V如下:

(1) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

(2) $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$;

(3) $T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,4\rangle\}$;

(4) $V=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

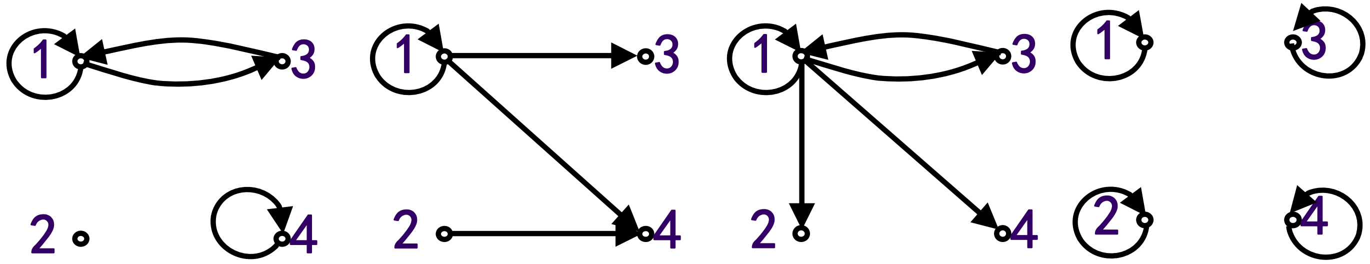
试判定它们是否具有对称性和反对称性，并写出R,S,T和V的关系矩阵和画出相应的关系图。

# 解（2）

设R, S, T和V的关系矩阵分别为$M_R$, $M_S$, $M_T$和$M_V$，则

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) R, S, T和 V 的关系图分别是图 (a), (b), (c) 和 (d)。




(a) (b) (c) (d)

# 注意

1. 存在既不是对称也不是反对称的关系；
2. 存在既是对称也是反对称的关系；
3. 关系R是对称的⇔关系图中任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；
4. 关系R是反对称的 ⇔ 关系图中任何一对结点之间，至多有一条边；
5. 关系R是对称的 ⇔ R的关系矩阵为对称矩阵；
6. 关系R是反对称的 ⇔ R的关系系矩阵满足

$r_{ij} \cdot r_{ji}=0$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，$i \neq j$。

# 3、传递性

定义5.4.3 设R是集合A上的关系。对任意x, y, z∈A，如果<x, y>∈R且<y, z>∈R，那么<x, z>∈R，则称关系R是传递的(Transitive)，或称R具有传递性(Transitivity)。

# 例5.4.3

设A={1,2,3}，定义A上的关系R,S,T和V如下：

（1）R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<1,3>}；

（2）S={<1,2>}；

（3）T={<1,1>,<1,2>,<2,3>}；

（4）V={<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>}。

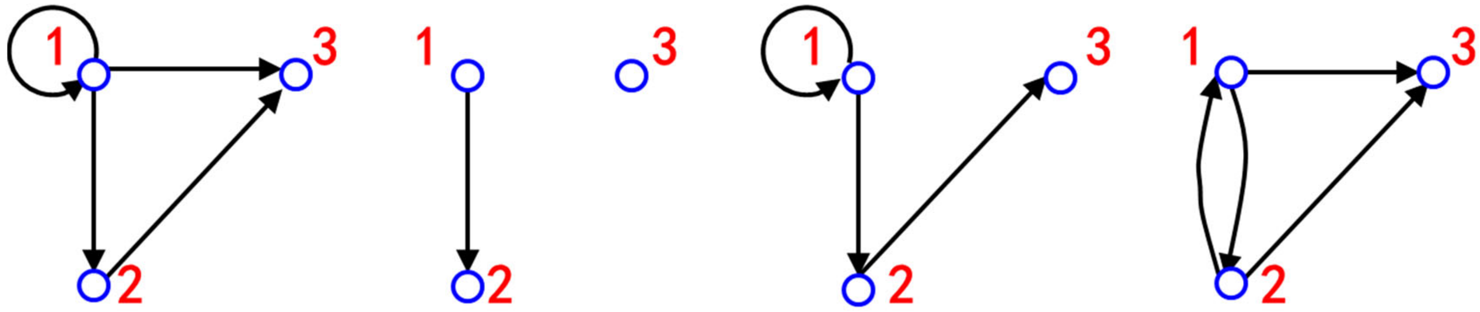
试判定它们是否具有传递性，并写出R,S,T和V的关系矩阵和画出相应的关系图。

# 例5.4.3

（2）设R, S, T和V的关系矩阵分别为$M_R$, $M_S$, $M_T$和$M_V$，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（3）R, S, T和 V 的关系图分别是图(a), (b), (c)和(d)。




(a) (b) (c) (d)

# 总结

| | 自反 | 反自反 | 对称 | 反对称 | 传递 |
|---|---|---|---|---|---|
| 定义 | $\langle x,x\rangle \in R$ | $\langle x,x\rangle \notin R$ | $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$ | $\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \Rightarrow x=y$ | $\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R$ |
| 关系图 | 每个结点都有环 | 每个结点都无环 | 每对结点间或有方向相反的两条边，或无任何边 | 每对结点间至多有一条边存在 | 任三个结点x, y, z，若从x到y有边，从y到z有边，则从x到z一定有边 |
| 关系矩阵 | 对角线上全为1 | 对角线上全为0 | 对称矩阵 | $r_{ij} \cdot r_{ji}=0$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, $i \neq j$ | 如$r_{ij}=1$且$r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$ |

# 总结

对任意给定的A上的关系R，可以采用下面的四种方法判定它所具有的性质：

（1）定义判定法；

（2）关系矩阵判定法；

（3）关系图判定法；

# 例5.4.6

判定下列关系所具有的特殊性质。

（1）集合A上的全关系；

（2）集合A上的空关系；

（3）集合A上的恒等关系。

解(1)集合A上的全关系具有自反性,对称性和传递性

(2)集合A上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性；

(3)集合A上的恒等关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。

# 例5.4.7

判定下列关系所具有的特殊性质。

（1）在实数集R上定义的“等于”关系；

（2）幂集上的“真包含”关系。

**解**（1）R上的“等于”关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性；

（2）幂集上的“真包含”关系具有反自反性，反对称性和传递性。

# 例5.4.8

假设A={a, b, c, d}， R={<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, d>}是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

解 由前面的分析可知，R既不是自反的，也不是反自反的；既不是对称的，也不是反对称的；而且也不是传递的。即R不具备关系的任何性质。

例

性质：

图(c)的关系

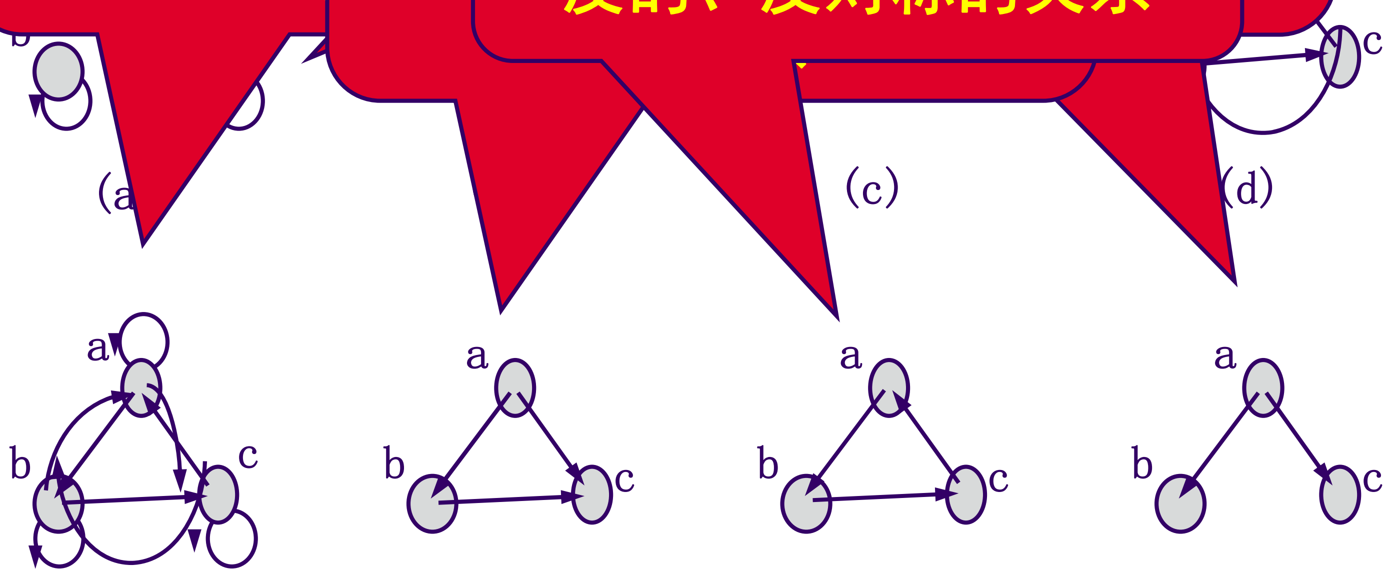
图(e)的关系
的、对称的

图(d)的关

图(b)的关系是具备反自
、反对称

图(
反自

图(g)的关系是具备反自
反的、反对称的关系




(e) (f) (g) (h)

# 例5.4.9

设R={<1,1>,<2,2>}，试判断R在集合A和B上具备的特殊性质，其中A={1,2}，B={1,2,3}。

解 当R是定义在集合A上的关系时，R是自反、对称、反对称和传递的；

当R是定义在集合B上的关系时，R是对称、反对称和传递的。

注意：绝对不能脱离基集（即定义关系的集合）来谈论关系的性质。

# 关系性质的证明

在二元关系中，由于关系的性质的定义全部都是按“如……则……”来描述的，因此，在证明关系的性质时，一般都都采用按定义证明方法，即：将“如……”部分作为附加的已知条件，证得“则……”部分，就证明了关系具有该性质。

# 关系性质的证明方法

1. 自反

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x\in A$, | 中间过程 | $\langle x, x\rangle\in R$。 |

2. 反自反

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x\in A$, | 中间过程 | $\langle x, x\rangle\notin R$。 |

3. 对称

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x, y\in A$,<br>假设$\langle x, y\rangle\in R$, | 中间过程 | $\langle y, x\rangle\in R$。 |

# 关系性质的证明方法(续)

4\. 反对称

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x, y \in A$，假设$\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, x\rangle \in R$， | 中间过程 | $x = y$。 |

或者

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x, y \in A$，$x \neq y$，假设$\langle x, y\rangle \in R$， | 中间过程 | $\langle y, x\rangle \notin R$。 |

5\. 传递

| | | |
|---|---|---|
| 任取$x, y, z \in A$，假设$\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$， | 中间过程 | $\langle x, z\rangle \in R$。 |

# 5.4.2 关系性质的判断定理

**定理5.4.1** 设R是集合A上的二元关系，则：

（1）R是自反的⇔$I_A \subseteq R$；

（2）R是反自反的⇔$R \cap I_A = \Phi$；

（3）R是对称的⇔$R = \tilde{R}$；

（4）R是反对称的⇔$R \cap \tilde{R} \subseteq I_A$；

（5）R是传递的⇔$R \circ R \subseteq R$。

# 证明（5）

"$\Rightarrow$" 设R是传递的。

对任意$\langle a, c\rangle \in R\circ R$，根据"$\circ$"的定义，

必存在$b\in A$，使得$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, c\rangle \in R$，

由R的传递性，有：$\langle a, c\rangle \in R$。所以，$R\circ R\subseteq R$。

"$\Leftarrow$" 设$R\circ R\subseteq R$。

对任意$a, b, c\in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, c\rangle \in R$，

则有：$\langle a, c\rangle \in R\circ R$，

因$R\circ R\subseteq R$，所以，$\langle a, c\rangle \in R$，

即R是传递的。

# 5.4.3 关系性质的保守性

**定理5.4.2** 设R, S是定义在A上的二元关系，则：

(1) 若R, S是自反的，则$\tilde{R}$, R∪S, R∩S, RoS也是自反的；

(2) 若R, S是反自反的，则$\tilde{R}$, R∪S, R∩S也是反自反的。

(3) 若R, S是对称的，则$\tilde{R}$, R∪S, R∩S也是对称的。

注意：

（1）逆运算与交运算具有较好的保守性；

（2）并运算、差运算和复合运算的保守性较差。

# 5.5 关系的闭包运算

对于一个给定的关系，可能不具有某一个特殊性质。但是，如果我们希望它具有该特定的性质，那么应该怎么做呢？

例如，对给定集合A={1,2,3}上的关系R={<1,1>,<1,2>,<2,1>}，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系R中添加<2,2>，<3,3>这两个元素后，所得到的新关系就具有自反性。另外，还可以添加<2,2>，<3,3>，<1,3>，得到的新关系仍然具有自反性。

# 5.5.1关系的闭包

定义5.5.1 设R是定义在A上的关系，若存在A上的另一个关系R′，满足：

（1）R′是自反的(对称的、或传递的)；

（2）对任何自反的(对称的、或传递的)关系R″，如果R⊆R″，就有R′⊆R″，则R′称为R的自反闭包(ReflexiveClosure)(对称闭包(SymmetricClosure)、或传递闭包(TransitiveClosure))，分别记为r(R)(s(R)或t(R))。

从定义5.5.1可以看出，关系的闭包是增加最少元素，使其具备所需性质的扩充。

# 例5.5.1

设A={1,2,3}， R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<1,3>}是A上的关系。试求R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

解 由关系的自反性定义知，R是自反的当且仅当对a∈A，都有<a,a>∈R，因此，在R中添上<2,2>和<3,3>后得到的新关系就具有自反性，且满足自反闭包的定义，即

r(R)={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<1,3>}；

# 例5.5.2

求下列关系的r(R)，s(R)和t(R)。

（1）定义在整数集Z上的“＜”关系；

（2）定义在整数集Z上的“＝”关系。

# 解

（1）定义在Z上的“<”关系的

r(R)为“≤”，

s(R)为“≠”，

t(R)为“<”；

（2）定义在Z上的“=”关系的

r(R)为“=”，

s(R)为“=”，

t(R)为“=”。

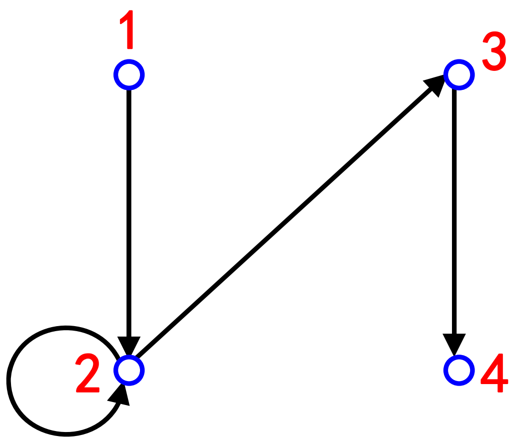
# 例5.5.3

设集合A={1, 2, 3, 4}， R={<1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 4>}是定义在A上的二元关系。

（1）画出R的关系图；

（2）求出r(R), s(R), t(R), 并画出其相应的关系图。

解（1）R的关系图见下图；



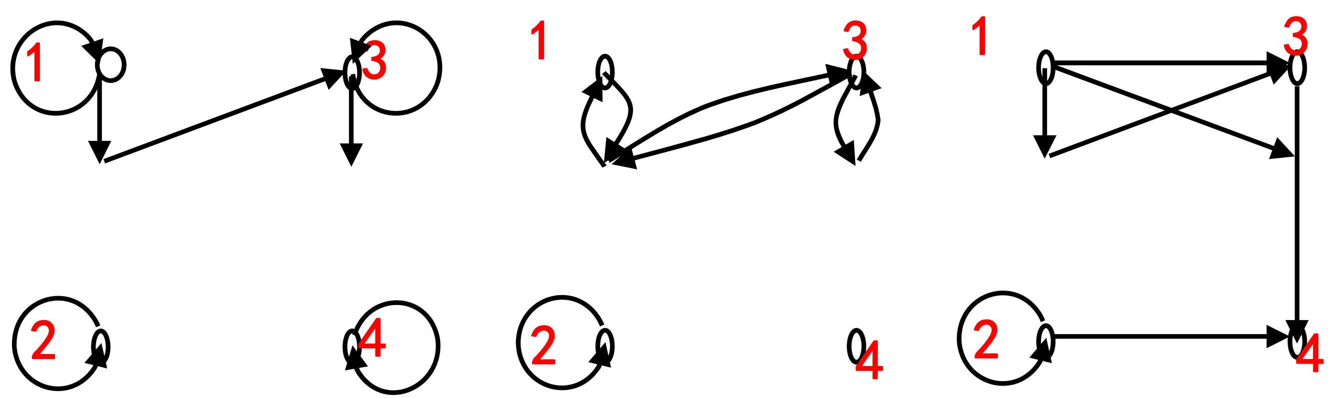
# 例5.5.3（续）（2）

r(R)={<1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 1>, <3, 3>, <4, 4>}；

s(R)={<1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 4>, <4, 3>}；

t(R)={<1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <3, 4>, <1, 4>, <2, 4>}。

r(R)，s(R)，t(R)的关系图分别如下：




r(R)　　s(R)　　t(R)

# 总结

利用关系图求关系R闭包的方法：

1. 检查R的关系图，在没有环的结点处加上环，可得r(R)的关系图；
2. 检查R的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得s(R)的关系图；
3. 检查R的关系图，从每个结点出发，找到其终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边，可得t(R)的关系图。

# 定理5.5.1

设R是集合A上的二元关系，则：

（1）$r(R) = R \cup I_A$。

（2）$s(R) = R \cup \tilde{R}$。

（3）$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，若$|A| = n$，则$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

# 例

设 $P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ 是四个程序，$R=\{\langle P_1,P_2\rangle,\langle P_1,P_3\rangle,\langle P_2,P_4\rangle,\langle P_3,P_4\rangle\}$ 是定义在P上的调用关系。计算r(R)，s(R)，t(R) 。

**解**：$r(R)=R\cup I_A$

$=\{\langle P_1,P_2\rangle,\langle P_1,P_3\rangle,\langle P_2,P_4\rangle,\langle P_3,P_4\rangle\}\cup\{\langle P_1,P_1\rangle,\langle P_2,P_2\rangle,\langle P_3,P_3\rangle,\langle P_4,P_4\rangle\}$

$=\{\langle P_1,P_2\rangle,\langle P_1,P_3\rangle,\langle P_2,P_4\rangle,\langle P_3,P_4\rangle,\langle P_1,P_1\rangle,\langle P_2,P_2\rangle,\langle P_3,P_3\rangle,\langle P_4,P_4\rangle\}$。

# 例5.5.4(续)

$s(R) = R \cup \tilde{R}$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\}$

$\cup \{\langle P_2, P_1\rangle, \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle,$

$\langle P_2, P_1\rangle, \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}$。

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle,$

$\langle P_3, P_4\rangle\} \cup \{\langle P_1, P_4\rangle\} \cup \Phi \cup \Phi$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_4\rangle\}$ 。

# 5.6 本章总结

1. 序偶和笛卡儿积的概念
2. 二元关系的概念和表示
3. 关系的交、并、补、差运算、复合运算和逆运算
4. 关系性质的定义、关系性质的判定、关系性质的证明和关系性质的保守性；
5. 关系的自反、对称、和传递闭包的概念及计算。

# Thank You !