§ 6.2 化二次型为标准形

三种方法：正交变换法，配方法，初等变换法

一、正交变换法

由定理5.8， 实对称矩阵必正交相似于对角矩阵.

即对实对称阵 $\boldsymbol{A}$，设特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (可相等)，

则 $\exists$正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

相应对二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

$\exists$正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，作变换(称正交变换)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$$

可使

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

用正交变换化二次型为标准型的方法称为正交变换法.

定理6.2 对任一个 n 元实二次型 **(主轴定理)**

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

存在正交变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y},$$

使二次型化为标准型

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{Q}$的列向量是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值所对应的$n$个单位正交的特征向量.

称$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$为实二次型在正交变换下的标准形.

步骤 ---- 正交变换法

1). 将二次型表示为矩阵形式 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,求出$\boldsymbol{A}$;

2). 由$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0$,求$A$的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{\boldsymbol{n}}$;

3). 由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 求基础解系,

即对应于 λ_i 线性无关的全部的特征向量,

并且正交化,单位化, $i=1,\cdots,n$

$$\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n$$

4). 写出正交变换矩阵和正交变换

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n) \qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$$

5). 写出 f 的标准型:

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

注意: λ_i 在标准型中位序应与 $\boldsymbol{q}_i$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 中位序一致.

例 1 用正交变换化二次型

$$f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

为标准型，并求所用的正交变换.

解

① 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}$

② $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}4-\lambda&-1&-1\\-1&4-\lambda&-1\\-1&-1&4-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)^2(\lambda-2)$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5,\ \lambda_3=2$

③ 对应特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

注意：p_1, p_2都必与p_3正交，但p_1, p_2不正交，需正交化.

把p_1, p_2正交化得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

再把 η_1, η_2, p_3 单位化

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

④ 令 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则所用正交变换为$x = Qy$

⑤ 化为二次型 f 为: $f = 5y_1^2 + 5y_2^2 + 2y_3^2$

（还可化为 $= (\sqrt{5}y_1)^2 + (\sqrt{5}y_2)^2 + (\sqrt{2}y_3)^2$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ ）

➢ 正交变换几何意义

设正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 把向量

$$\boldsymbol{y}_1 \mapsto \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{y}_2 \mapsto \boldsymbol{x}_2$$

$$\Rightarrow [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]$$

命题 正交变换不改变两向量的内积.

$\therefore$ (1). 正交变换不改变向量的长度: $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$

(2) 正交变换不改变两向量的夹角

$$\because \cos\langle x_1, x_2\rangle = \frac{[x_1, x_2]}{\|x_1\|\cdot\|x_2\|}, \qquad \cos\langle y_1, y_2\rangle = \frac{[y_1, y_2]}{\|y_1\|\cdot\|y_2\|},$$

$$[x_1, x_2] = [y_1, y_2], \qquad \|x_1\| = \|y_1\|, \|x_2\| = \|y_2\|$$

$$\therefore \cos\langle x_1, x_2\rangle = \cos\langle y_1, y_2\rangle$$

因此，正交变换不改变空间中任意两点的距离，是等距变换.

∴几何上的正交变换，对应物体的刚体运动
物体上任意两点的相对位置不变（不含平移）.

补例：在例 1 中,考虑二次曲面：

$$f \triangleq 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 10$$

经过正交变换——不改变二次曲面的形状，化为

$$f = 5x'^2 + 5y'^2 + 2z'^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z'^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

在空间直角坐标系 $Ox'y'z'$ 中，这是椭球面方程

例 2 **(2008.11 15分)** 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准型 $f=by_1^2+9y_3^2$

1. 求参数a，b的值及所用的正交变换；

2. 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

由二次型的标准型可知 A 的特征值为b，0，9，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

则有 $\begin{cases} a+5+3=b+0+9 \\ \det \boldsymbol{A}=3(2a-10)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$

即，A 的三个特征值为 $\lambda_1=4, \lambda_2=0, \lambda_3=9$

分别求其所对应的特征向量，得

$$\boldsymbol{p}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

将其单位化后组成正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

注意列的排列顺序

所用正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$

(2) 由 $f=0$ 得 $\begin{cases} y_1=0 \\ y_3=0 \end{cases}$

二次曲面的形状

所以方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}=y_2\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ k任意

二、配方法

例3 用配方法化如下二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

解 先把含x_1的所有的项，即x_1^2, x_1x_2, x_1x_3合在一起配方

$$f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= [x_1{}^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2]$$

$$-(x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = \qquad\quad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \end{cases}$

得 $$f = y_1^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 + 4y_3^2 = y_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2$$

再令 $$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \quad y_2 + 2y_3 \\ z_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \quad z_2 - 2z_3 \\ y_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

得可逆线性变换 $$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ x_2 = \quad z_2 - 2z_3 \\ x_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

二次型化为 $$f = z_1^2 + z_2^2$$

例4 化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,

得 $$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $\left(即\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$

得 $$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\quad \left(\left|C\right|=-2\neq 0\right).$$