第八章 多元函数微分法及其应用

一元函数微分学

↓ 推广

多元函数微分学

注意: 善于类比，区别异同

第一节

多元函数的极限与连续

- 一、平面点集　n维空间
- 二、n元函数　$R^n \to R^m$的映射
- 三、多元函数的极限
- 四、多元函数的连续性

一、平面点集 n维空间

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质P 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\,|\,(x,y)\text{所具有的性质 } P\}.$$

(1) 邻域 在平面上，点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\},$$ 称为点 P_0 的δ邻域.

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

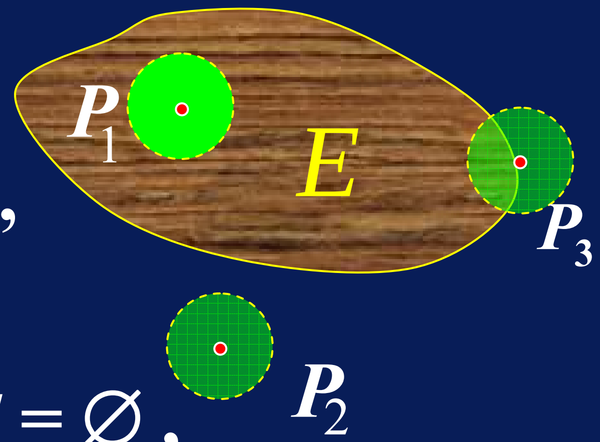
说明： 若不需要强调邻域半径δ，也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 内点、外点、边界点

设有点集 E 及一点 P：

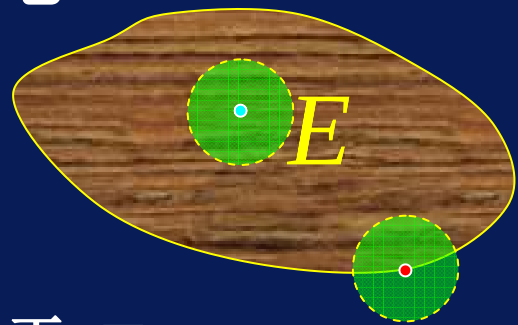


- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**，例如 P_1；
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的**外点**，例如 P_2；
- 若点 P 的任一邻域 $U(P)$ 中既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**，例如 P_3 .

显然，E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E .

(3) 聚点

若对任意给定的正数δ，点P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点.**



注 聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

聚点可以为E 的内点 或E的边界点

1° 内点一定是聚点；

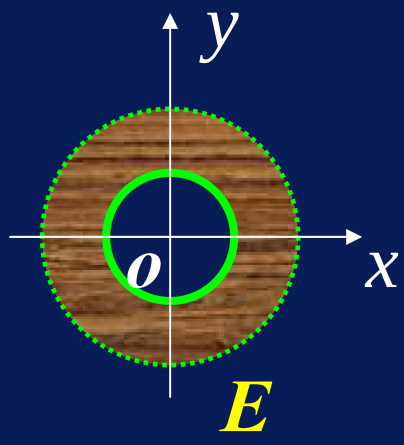
2° 边界点可能是聚点，也可能不是聚点；

目录 上页 下页 返回 结束

例如: 设点集 $E=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2<3\}$,

则点集 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<3\}$

中的点都是E的内点;



点集 $E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

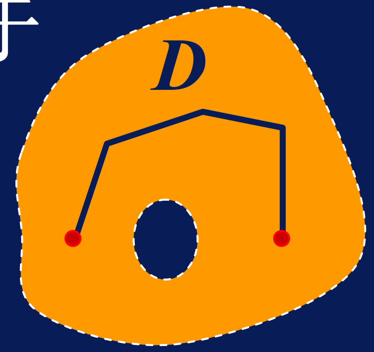
和 $E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2=3\}$

中的点都是E的聚点,

但E_2的点属于E, E_3的点不属于E.

(4)开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界，记作∂E ；
- 若点集 $\partial E \subseteq E$，则称 E 为闭集；
- 若点集E中任意两点 都可用一完全属于 E的折线相连，则称 E 是连通集；



- 连通的开集称为开区域，简称区域 ；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

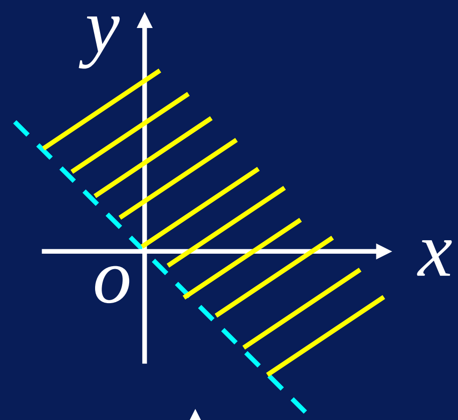
如，$E_3 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 3\}$是开集、连通集、是区域；

$E_4 = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 3\}$ 是闭集、连通集、闭区域.

例如，在平面上

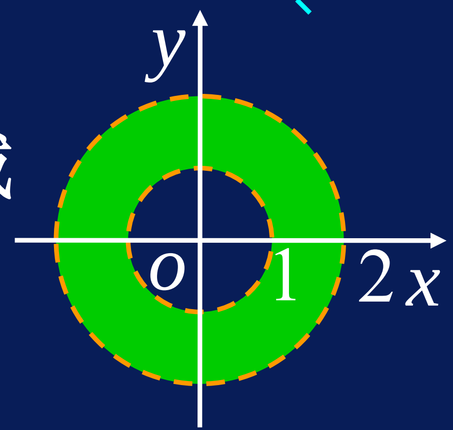
- $\left\{(x,y)\mid x+y>0\right\}$
- $\left\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\right\}$

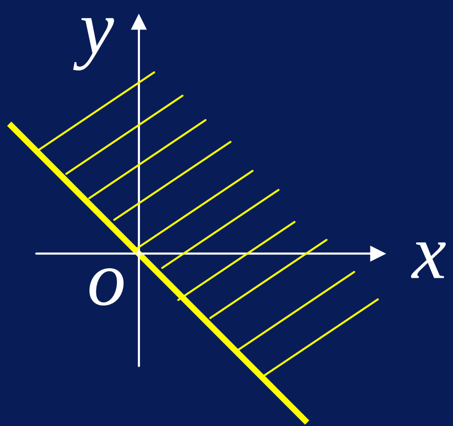
开区域

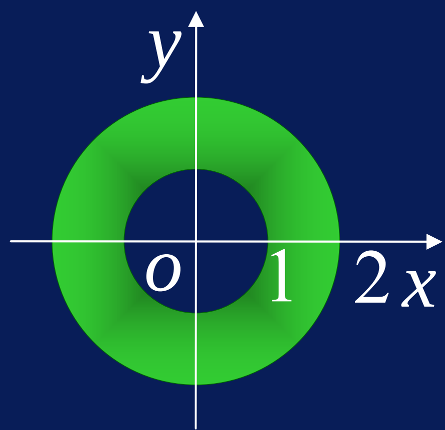


- $\left\{(x,y)\mid x+y\geq 0\right\}$
- $\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$

闭区域

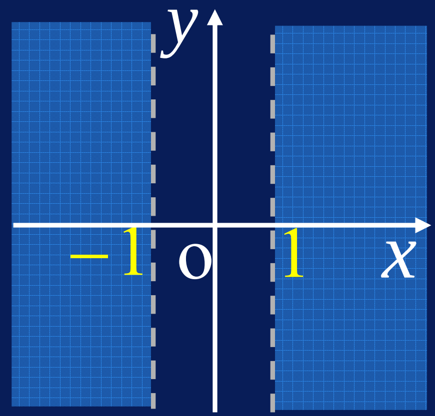






♣ 整个平面是最大的开域，也是最大的闭域；

♣ 点集 $\{(x,y)\,|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域.



- 对点集 E，若存在正数 K，使对一切点 $P\in E$，P 与原点 O 的距离 $|OP|\le K$，则称 E 为有界点集；否则，称为无界点集.

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

2. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合,记作 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \middle| x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个n维向量, 数 x_k 称为该点或该n维向量的第 k 个坐标 .

当所有坐标 $x_k = 0$ 时, 称该点为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点, 或n维零向量, 记作0 .

对于$\mathbf{R}^n$中的向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

以及实数 λ， 规定

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

称引入了上述线性运算的集合$\mathbf{R}^n$为n维(实)空间.

$\mathbf{R}^n$中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与点$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

的距离记作$P(x,y)$或$\|x-y\|$, 规定为

$$P(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

$\mathbf{R}^n$中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 0 的距离为

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

并称 $\|x\|$ 为向量x的模. 当 $n = 1, 2, 3$ 时, $\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

于是，对于R^n 中的向量x与y, 它们的差为

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = P(x, y)$$

若R^n 中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x - a\| \to 0$

则称 a为变元 x 的极限，记作 $x \to a$.　显然,

$$x \to a \iff x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots x_n \to a_n.$$

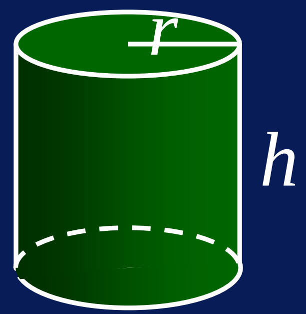
R^n 中点 a 的 δ邻域为

$$U(a, \delta) = \{ x \mid x \in \mathrm{R}^n, P(x, a) < \delta \}$$

二、 n元函数 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$的映射

1. n元函数

引例: • 圆柱体的体积



$$V = \pi r^2 h\,,$$

$$\{(r,h)\,|\, r>0,\, h>0\}$$

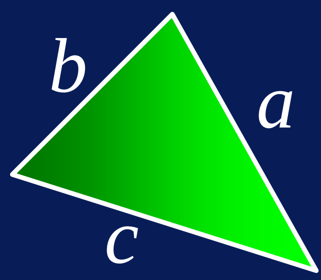
• 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\quad \{(V,T)\,|\, V>0,\, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$



定义8.1 设非空点集 $D \subset \mathrm{R}^n$,

映射 $f: D \mapsto \mathrm{R}$

称为定义在 D 上的 n 元函数，记作

$$f: D \in \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},$$

或 $y = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad x \in D.$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为自变量，点集 D 称为函数的定义域；

数集 $f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \}$称为函数的值域 .

R^{n+1}的子集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$
$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_f \}$

称为函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的图形.

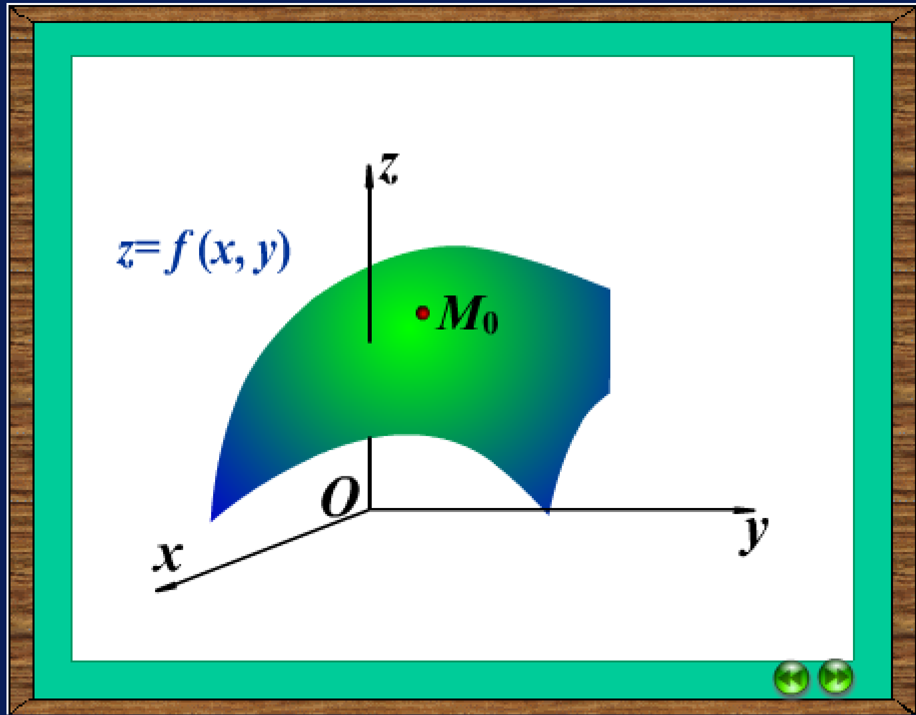
特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$$

当 $n=3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z),$$

$$(x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$$



一般地，二元函数

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

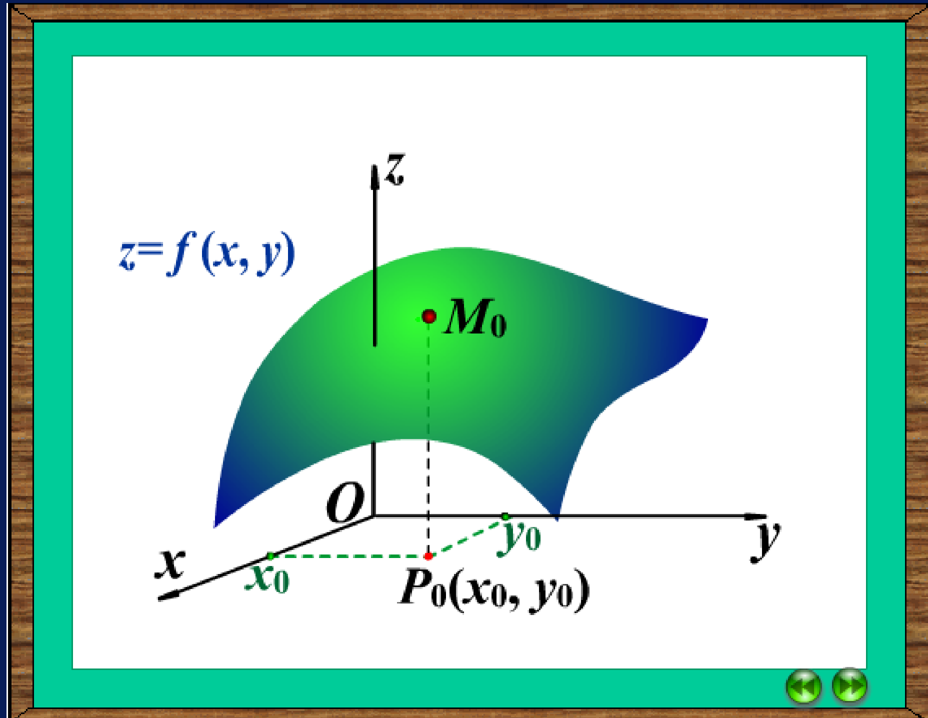
的图形为空间曲面 Σ.

二元函数的定义域 是平面点集.

当 $n=3$ 时，有三元函数

$$u = f(x,y,z),$$

$$(x,y,z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$



一般地，二元函数

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D$$

的图形为空间曲面 Σ .

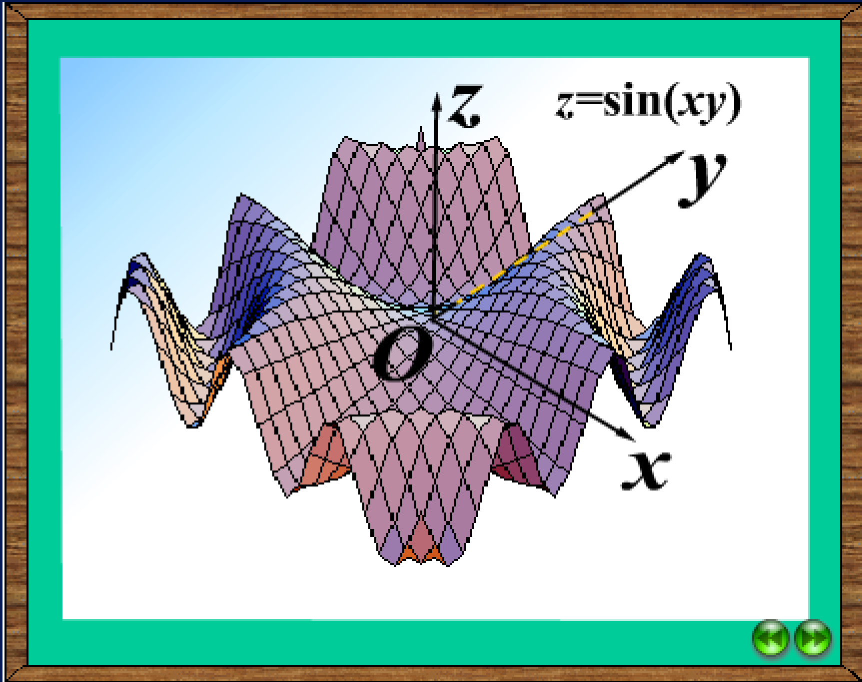
二元函数的定义域 是平面点集.

目录 上页 下页 返回 结束

例如，二元函数

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

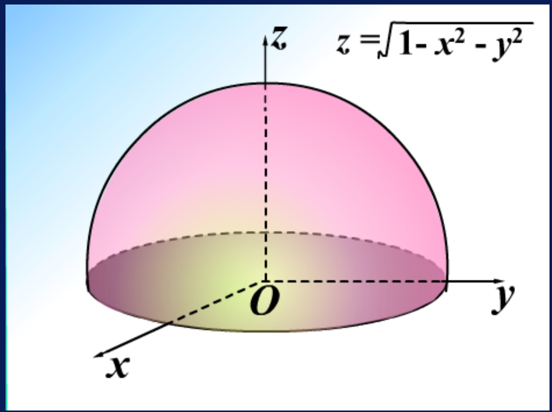
图形为中心在原点的上半球面.



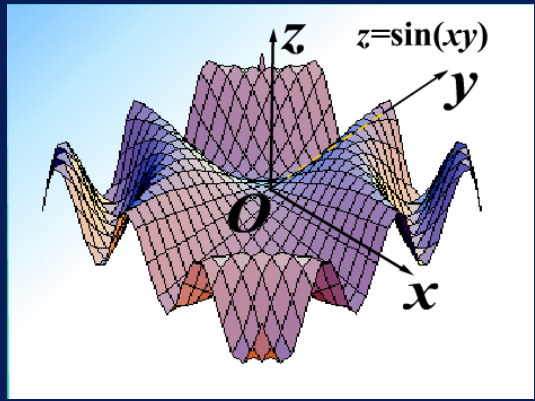
定义域为圆域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

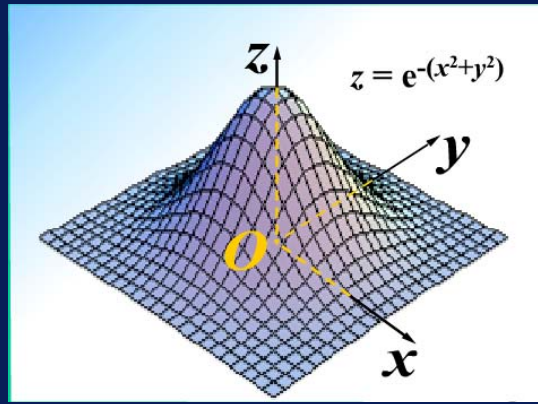
又如，$z = -\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$，$(x, y) \in \mathrm{R}^2$



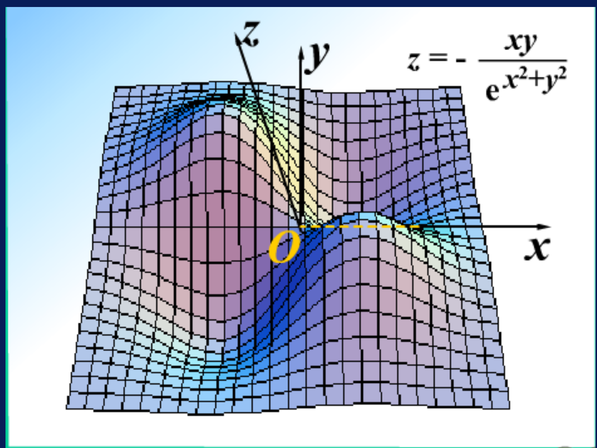
$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$
z
y
x
O



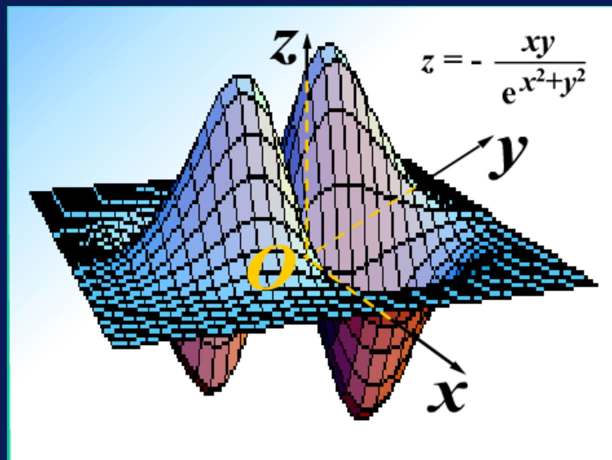
$z=\sin(xy)$
z
y
x
O



$z=e^{-(x^2+y^2)}$
z
y
x
O



$z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$
z
y
x
O



$z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$
z
y
x
O

三元函数 的定义域是三维空间的点集.

如，三元函数

$$u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$$

的定义域为 单位闭球

$$\left\{ (x, y, z) \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\}$$

图形为 $\mathbf{R}^4$ 空间中的超曲面.

2. $R^n \to R^m$的映射

引例 设$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$，质量为$m_0$的质点$M_0$，对位于$\Omega$内质量为$m$的质点$M$的引力为

$$F(x, y, z) = G\frac{m_0 m}{\left|\overrightarrow{MM_0}\right|^2}\frac{\overrightarrow{MM_0}}{\left|\overrightarrow{MM_0}\right|}$$

$$= G\frac{m_0 m}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$= (F_x, F_y, F_z)$$

这里的函数$F(x, y, z)$是一个定义在$\Omega \subset R^3$上的向量值函数，从R^3到R^3的映射.

定义8.2 设非空点集 $D \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}^m$ 称为定义在 D 上的 一个n 元向量值函数，记作

$$f: D \in R^n \to R^m,$$

或$(y_1, y_2, \cdots, y_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

当m=1 时,就是定义8.1中的n 元函数，当n=1 时,就是第七章讲的一元向量值函数 .

向量值函数的几何或物理意义举例

$$R^1 \to R^2: \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

平面曲线的方程或平面质点随时间运动的轨迹.

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

$$R^1 \to R^3 : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \\ w = w(t), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

空间曲线的方程或空间质点随时间运动的轨迹.

$$R^2 \to R^2 : \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

平面向量场或平面到平面的坐标变换.

$$R^2 \to R^3 : \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ w = w(x, y), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

曲面的方程或一族空间曲线(当固定x或y).

三、多元函数的极限

1. 定义8.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y), P\in D\subseteq \mathrm{R}^2$, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，使得 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$，对于一切 $P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$，总有

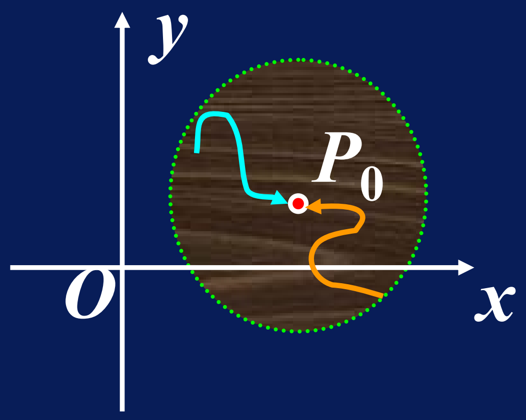
$$\left|f(P)-A\right|=\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

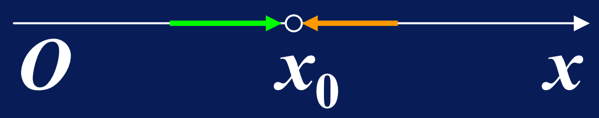
或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$

注 1° 在二元函数极限定义中，$P \to P_0$ 是指在平面上位于D内以任意方式趋于P_0；



对比：一元函数极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



2° 二元函数的极限又称为二重极限;

3° 关于二元函数的极限概念，可相应地推广到n元函数 $u = f(P)$, $P \in D \subseteq \mathbf{R}^n$上去;

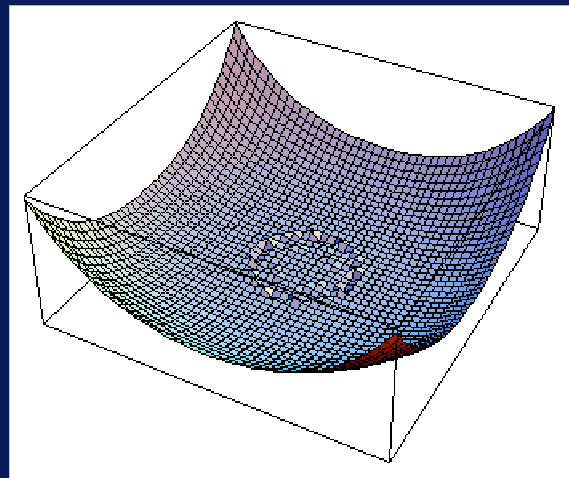
4° 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

2. 求二重极限的常用方法

(1) 利用定义

例1 求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

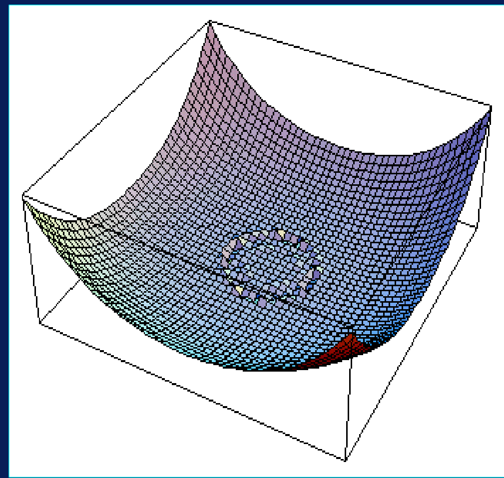
证 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$



$$\left|f(x,y)-0\right|$$

$$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$

$\forall\, \varepsilon > 0,$



要使 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$

只要 $0 < x^2+y^2 < \varepsilon$

故取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$， 则

当 $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ 时，

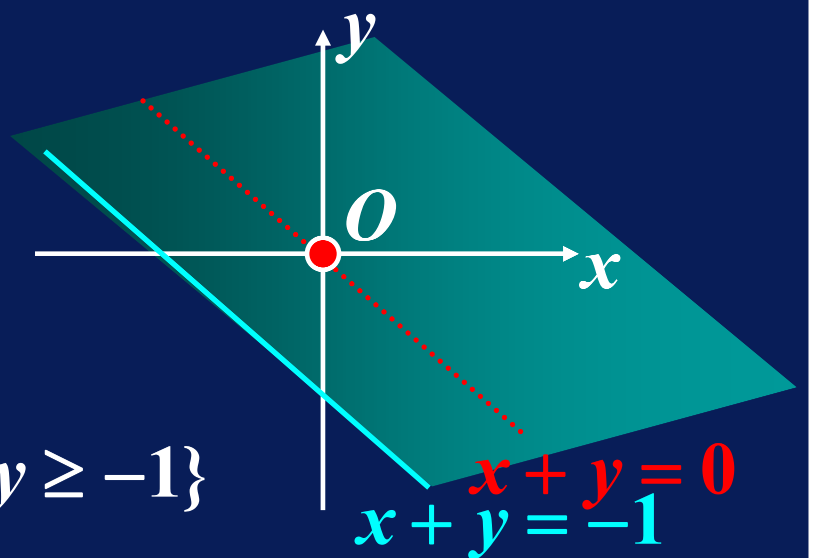
$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

原结论成立.

(2) 用变量代换

化二重极限为一元函数的极限.

例2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$.



解 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$,

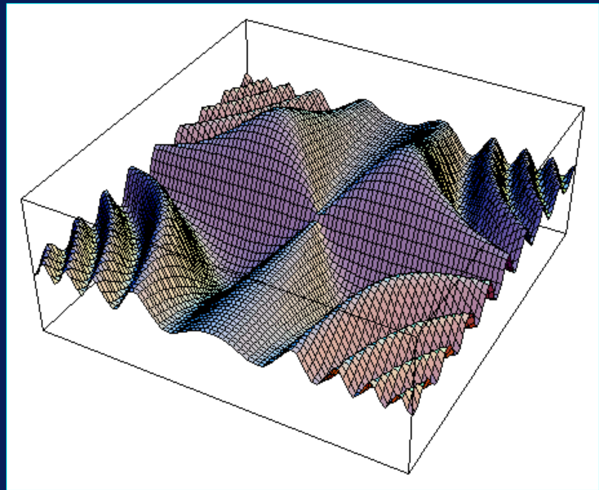
$$D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0,\ x+y\geq -1\}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1} \overset{令t=x+y}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1)=2.$$

(3) 利用夹逼准则，重要极限

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \xlongequal{u=x^2 y} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1,$

$$\because 2|x||y| \le x^2 + y^2$$

$$0 < \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0, \quad (x^2+y^2 \ne 0)$$

$\therefore$ 由夹逼准则，可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

从而 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$= 1\times 0 = 0.$$

(4) 利用极坐标变换，将二重极限化成 $\rho \to 0$ (θ 任意变化) 时的极限

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\because \lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$

$\left|(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta\right| < 2$

解 令 $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2} > 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\theta\text{任意})}} \frac{\rho(\sin\theta - \cos\theta)\cdot\rho\cos\theta}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\theta\text{任意})}} \rho\cdot(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta = 0.$$

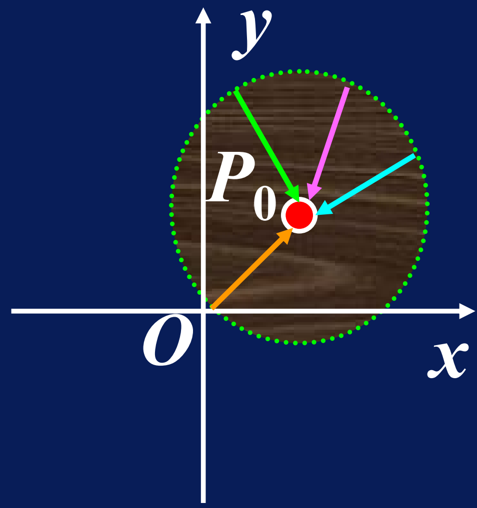
3. 确定极限不存在的方法:

(1) 令 $P(x,y)$沿直线 L: $y=y_0+k(x-x_0)$

趋向于$P_0(x_0,y_0)$，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\(P\in L\cap D)}} f(P)$的值

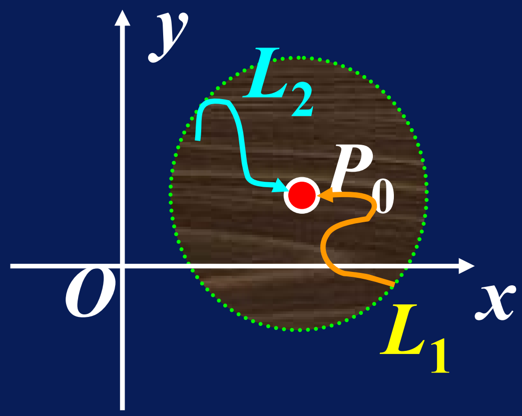
与 k 有关，则可断言：二重极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在 .



(2) 找两条特殊路径L_1，L_2，若

$$\lim_{\substack{P\to P_0 \\ (P\in L_1\cap D)}} f(P) \neq \lim_{\substack{P\to P_0 \\ (P\in L_2\cap D)}} f(P)$$



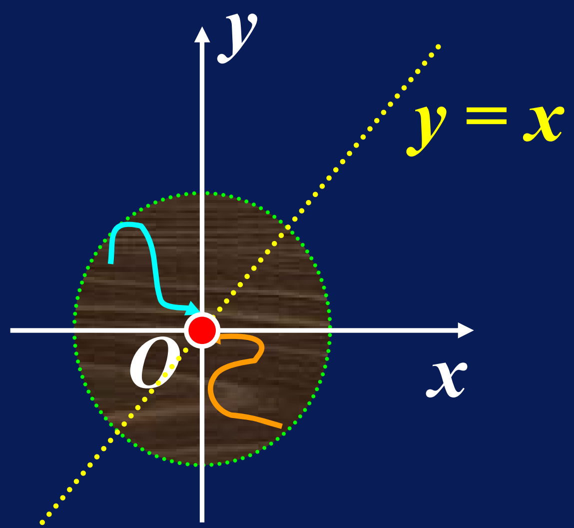
则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在 .

目录 上页 下页 返回 结束

例5 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.



证 (1) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

定义域 $D = \{(x,y) \mid x \neq y\}$

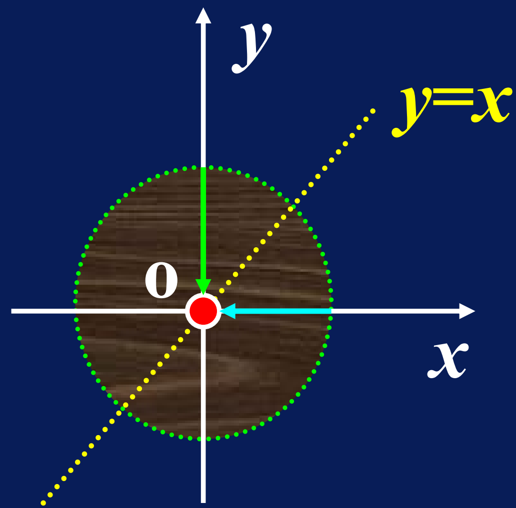
目录 上页 下页 例题 继续

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x-0}=1$$

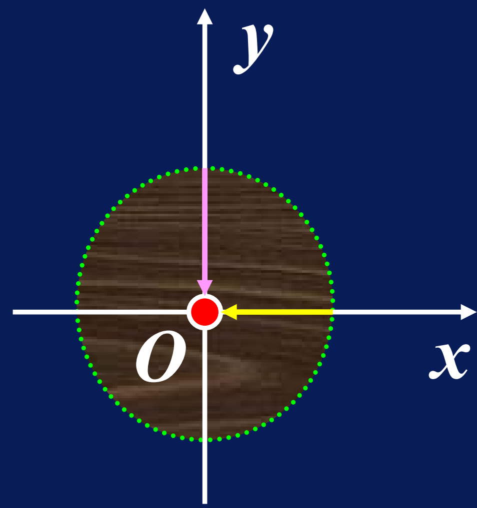
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0+y}{0-y}=-1$$

$$\because\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)\neq \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)$$

$\therefore\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在 .



(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$



分析 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$$

$$=\lim_{\substack{y\to0\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=0$$

能否说 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 存在？ 不能！

证 $\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

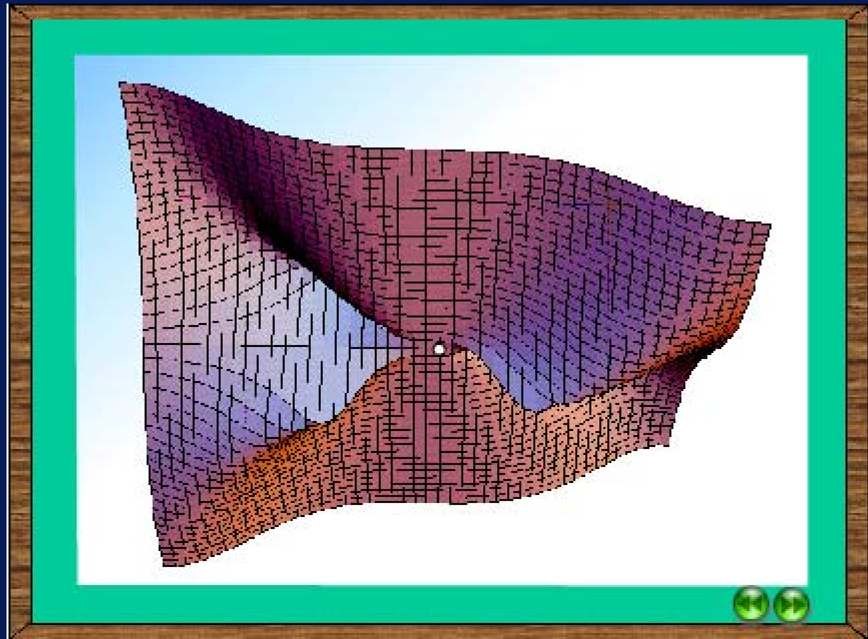
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}$$

$$= \frac{k}{1+k^2}$$

其值随 k 的不同而变化，

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

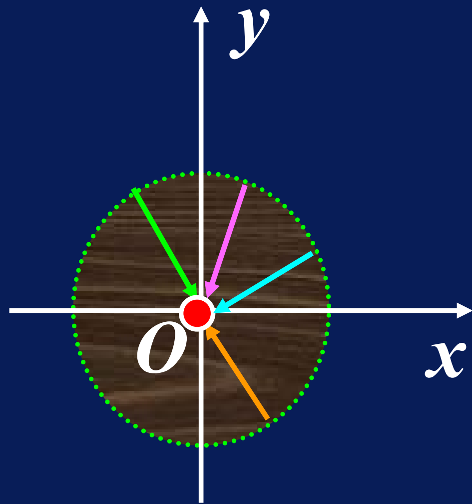
(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$



分析 $f(x,y)=\dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot kx}{x^6+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0.$$



能否说 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ 存在？不能！

$$f(x,y)=\frac{x^3 y}{x^6+y^2}$$

证　取 $y=kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3\to 0}}\frac{x^3 y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}$$

$$=\frac{k}{1+k^2},$$

其值随k的不同而变化，

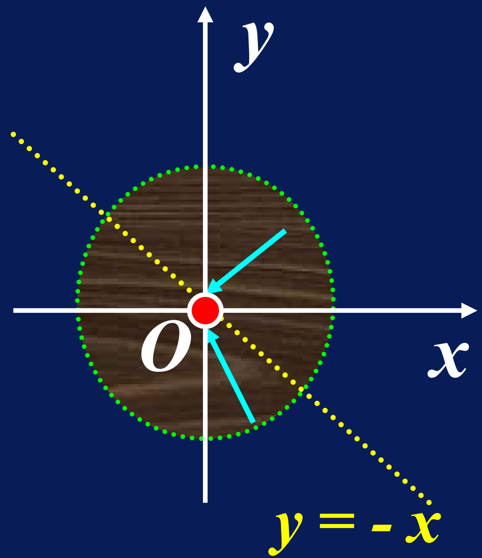
故该极限不存在.

例6 问：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在？

分析 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx}\quad (k\neq -1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{1+k}=0.$$



能否说 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 存在？ **不能！**

目录 上页 下页 返回 结束

证 取 $x+y=x^2$，即 $y=x^2-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x^2-x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

$$\neq \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x+0} = 0$$

$\therefore$ 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

四、 多元函数的连续性

定义8.4 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 定义在 D 上，P_0 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数在 D 上各点处都连续，则称此函数在 D 上连续. 记作 $f(x,y)\in C(D)$.

定义8.5 设函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上，P_0 为 D 的聚点，如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续. 则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点 .

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 (0 , 0)点极限不存在(例5(2)), 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$上间断.

结论: 一切多元初等函数在其定义区域内连续.

例7 证明 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在全平面连续.

证 在$(x,y)\neq(0,0)$处, $f(x,y)$为初等函数, 故连续.

又 $0\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .

闭区域上的多元连续函数有与一元函数类似的性质:

性质1 (有界性与最大最小值定理)

在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在D上有界,

且能取得它在 D 上的最大值 M 及最小值 m ;

性质2 (介值定理)

在有界闭区域 D 上连续的多元函数必取得介于它在

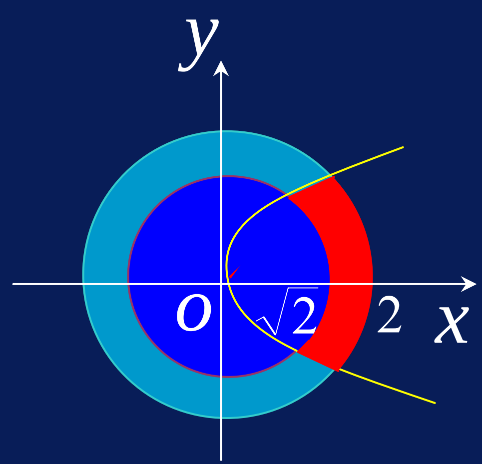
D 上的最大值 和最小值之间的一切值.

例8 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解 初等函数的连续域就是其定义域.

$$\begin{cases} \left|3-x^2-y^2\right|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$$



目录 上页 下页 返回 结束

例9 利用函数的连续性求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解　函数 $z=\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，

(1,0)点是它的定义区域内的点,

故函数在(1,0)点连续.

于是 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2.$

内容小结

1. 平面点集

- 邻域 :$U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- R^n 空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$x \in D \subset \mathrm{R}^n$$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

(1) 定义. $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

当 $0 < |PP_0| < \delta$ 且 $P \in D$ 时,

有 $|f(P) - A| < \varepsilon$

(2) 求二重极限的常用方法

1) 利用定义

2) 用变量代换化二重极限为一元函数的极限.

3) 利用夹逼准则，重要极限

4) 利用极坐标变换，将二重极限化成

$\rho \to 0$(θ 任意变化)时的极限

(3) 确定极限不存在的两种常用方法.

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\rightleftarrows \lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$

2) 闭区域上的多元连续函数的性质:

有界性定理 ;

最值定理 ;

介值定理

3) 一切多元初等函数在其定义区域内连续

思考题

1.已知$f(x,\ y)=x^2+y^2+xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求$f(tx,\ ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2+txty\tan\dfrac{tx}{ty}$

$$=t^2(x^2+y^2+xy\tan\frac{x}{y})=t^2f(x,y).$$

(满足关系式：$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$，称为n次齐次函数）

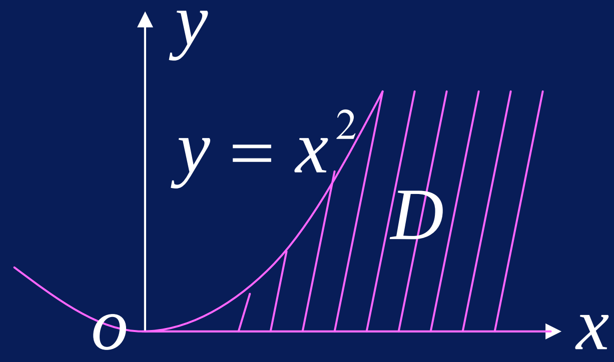
2.求下列函数的定义域：(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

$$(2)\ u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$$

$$(R>r>0).$$

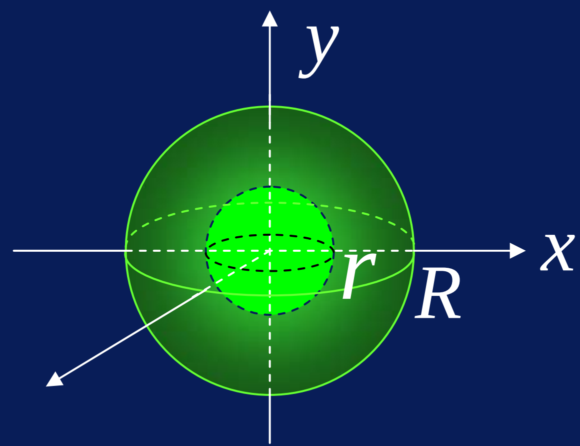
解 (1)定义域

$$D:\begin{cases} x\ge\sqrt{y} \\ y\ge 0\end{cases}$$



(2)定义域

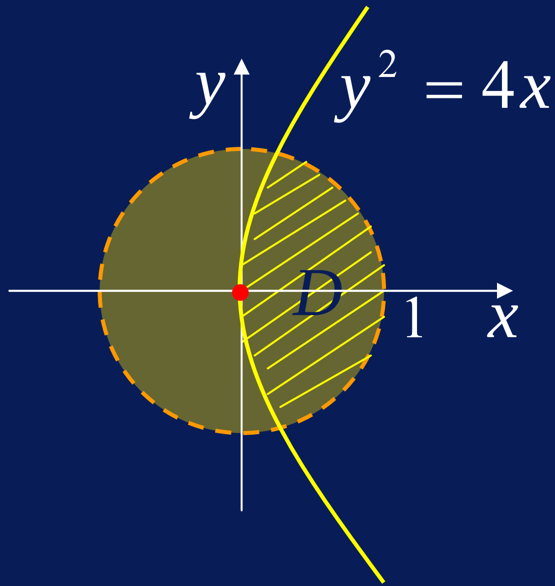
$$D: r^2<x^2+y^2+z^2\le R^2$$



目录 上页 下页 返回 结束

3.求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，

并求 $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)$.



解 定义域 $D:\begin{cases} y^2\le 4x \\ 0<x^2+y^2<1 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)=f(\frac{1}{2},0)=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3/4}$$

4. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$, 求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解 令 $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt[3]{uv}} \\ y = \sqrt[3]{uv} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$$

$$u = \frac{y^2}{x}, v = xy$$

$$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

目录 上页 下页 返回 结束

备用题

例2-1 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 原式 $\overset{t=xy}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{t+4}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2+\sqrt{t+4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

例2-2求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x, y 轴

解 $\because$ $x^2y^2 \le \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

化为一元函数极限

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6}$

$1-\cos r^2 \sim \dfrac{r^4}{2}$ $(r\to 0)$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty.$

例3-1 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$

即函数在y轴之外的一切点处有定义.

当 $y \neq 0$时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} y$

$= 1 \cdot 0 = 0,$

当$y=0$时,即点 P沿x轴趋于 $(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

综上所述, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}=0.$

例3-2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

证 因为 $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le 1,$

所以

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$$((x,y)\to(0,0)),$$

从而由夹逼定理得证 .

目录 上页 下页 返回 结束

例5-1 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 处的极限.

解 当 $P(x\,,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 (0, 0)点， 则有

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}$$

$$=\frac{k}{1+k^2}$$

此结果随k 值不同而不同！

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

例5-2 说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在．

解 $\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \dfrac{xy+1-1}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}$

$= \dfrac{xy}{x+y} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

沿 $y = kx^2 - x,\ k \neq 0,\ x \to 0,$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{x\cdot(kx^2-x)}{x+kx^2-x} = \frac{kx^3-x^2}{kx^2} = \frac{kx-1}{k} \to -\frac{1}{k}.$$

所以原极限不存在．

目录 上页 下页 返回 结束

例5-3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在？

解 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$，沿 $y=x^{\alpha}-x$，$x\to 0$，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^{\alpha}-x}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^{\alpha}-x}}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.