分配格、有界格和有补格

2008-2010 by Li Weigang. All RightS ReSeRved.

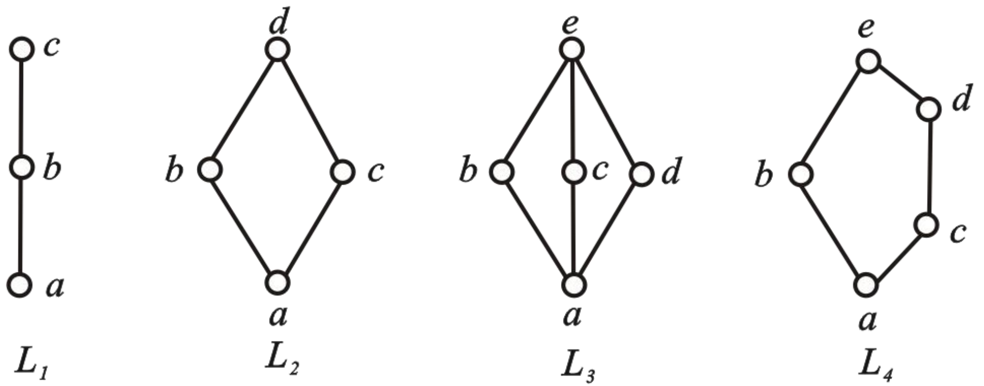
分配格

定义7.5 设$<L,\wedge,\vee>$是格，若$\forall a,b,c\in L$,有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格.

实例



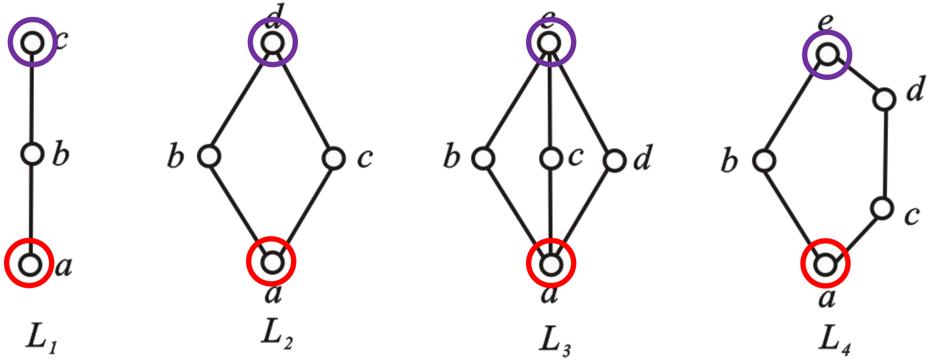
L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4不是分配格.
称 L_3为钻石格, L_4为五角格.

有界格的定义

定义7.6 设L是格,

(1) 若存在$a\in L$使得$\forall x\in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称a为L的(全)下界

(2) 若存在$b\in L$使得$\forall x\in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称b为L的(全)上界



说明:

- 格L若存在全下界或全上界, 一定是唯一的.
- 一般将格L的全下界记为0, 全上界记为1.

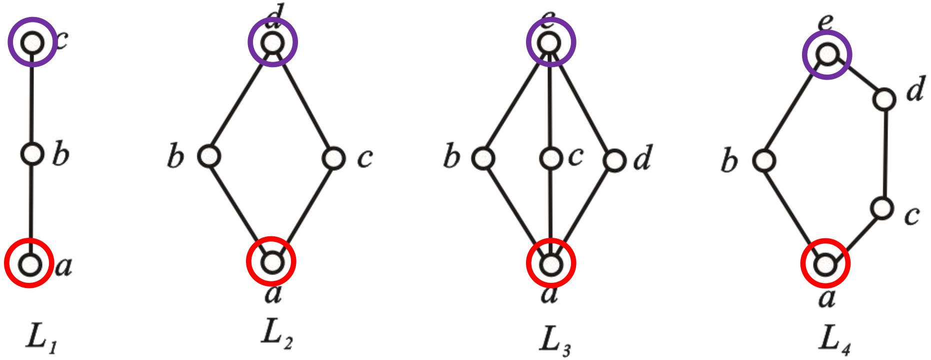
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

有界格的定义

定义7.6 设L是格,

(1) 若存在$a \in L$使得$\forall x \in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称a为L的(全)下界

(2) 若存在$b \in L$使得$\forall x \in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称b为L的(全)上界



定义7.7 设L是格,若L存在全下界和全上界, 则称L 为有界格, 一般将有界格L记为$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$.

有界格的性质

定理7.5 设<L,∧,∨,0,1>是有界格, 则$\forall a \in L$有

$$a \wedge 0 = 0,\ a \vee 0 = a,\ a \wedge 1 = a,\ a \vee 1 = 1$$

注意:

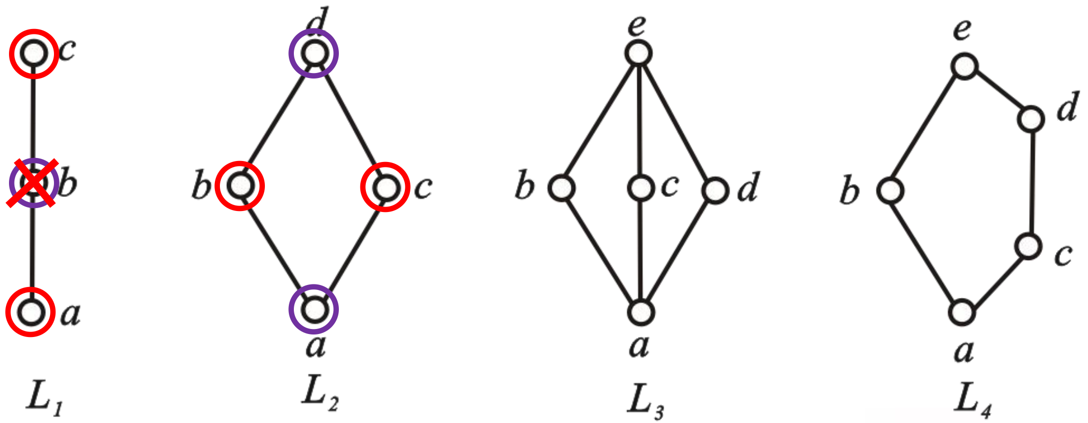
- 有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格, $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$是$L$的全下界, $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$是$L$的全上界.
- 0是关于∧运算的零元,∨运算的单位元；1是关于∨运算的零元,∧运算的单位元.
- 对于涉及到有界格的命题, 如果其中含有全下界0或全上界1, 在求该命题的对偶命题时, 必须将0替换成1, 而将1替换成0.

有界格中的补元及实例

定义7.8 设<L,∧,∨,0,1>是有界格, $a \in L$, 若存在$b \in L$ 使得 $a \wedge b = 0$ 和$a \vee b = 1$成立, 则称b是a的补元, 记为 $\bar{a}$或a'.

- 注意：若b是a的补元, 那么a也是b的补元. a和b互为补元.

例7 考虑下图中的格. 针对不同的元素，求出所有的补元.



解答

(1) L_1中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c为全上界, b 没有补元(如,$\{b, a\}$的上确界b与全上界c不同).

(2) L_2中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b与 c 也互为补元.

(3) L_3中a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b 和 d；d 的补元是 b 和 c； b, c, d 每个元素都有两个补元.

(4) L_4中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b； d 的补元是 b .

有界分配格的补元唯一性

定理7.6 设<L,∧,∨,0,1>是有界分配格. 若L中元素 a 存在补元, 则存在唯一的补元.

证 反证法, 假设b, c都是 a 的补元, 则有

$$\boxed{\begin{array}{l} a\vee b=1,\ a\wedge b=0 \\ a\vee c=1,\ a\wedge c=0 \end{array}}$$

已知条件

要证: $b=c$

从而有: $b=b\wedge 1=b\wedge(a\vee c)=(b\wedge a)\vee(b\wedge c)=0\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$
$=(a\vee b)\wedge c=1\wedge c=c$.

注意:

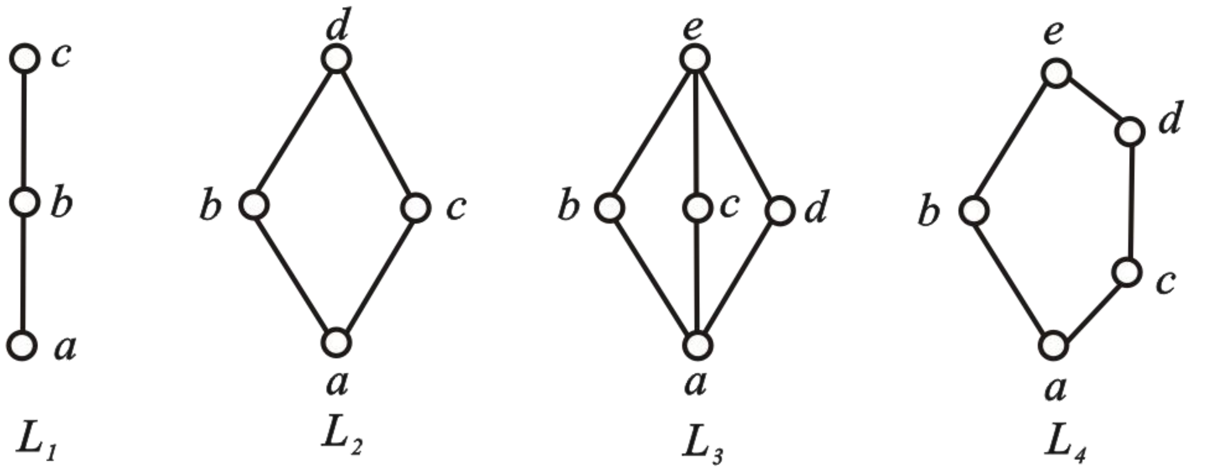
- 在任何有界格中, 全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是唯一的, 也可能是多个补元. 对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是唯一的.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

有补格的定义

定义7.9 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，若L中所有元素都有补元存在, 则称L为有补格.

例如, 图中的L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.



德摩根律

定理7.7 设<$L,\wedge,\vee$>是有补分配格，则对$\forall a, b\in L$,有

(1) $(a\vee b)' = a'\wedge b'$

(2) $(a\wedge b)' = a'\vee b'$

证 (1) 用分配律可证：

$$(a\vee b)\wedge(a'\wedge b') = 0$$

$$(a\vee b)\vee(a'\wedge b') = 1$$

所以，$(a'\wedge b')$是$(a\vee b)$的补，(1)成立。

由对偶律，(2)成立。

德摩根律的例子

命题逻辑的基本等值式：

$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$,

$\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$

集合算律：

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$

$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

THE END