2019-2020学年第一学期线性代数期末考试

一.（12分）回答问题：

1. 矩阵 $A_{m\times n}$ 等价于矩阵 $B_{m\times n}$ 的定义是：

2. 矩阵 $A_{n\times n}$ 相似于矩阵 $B_{n\times n}$ 的定义是：

3. 实矩阵 $A_{n\times n}$ 是正交矩阵的定义，或者充要条件是：

4. 实矩阵 $A_{n\times n}$ 是对称正定矩阵的定义，或者充要条件是：

二.（24分）填空：

1. 设矩阵 $A_{n\times n}$ 对应特征值 λ_0 的3个线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，常数 k_1,k_2,k_3 满足什么条件时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 也是 A 的特征向量.

2. 将3阶行列式 D_1 的第1列的2倍加到第2列得到的行列式记为 D_2，再对换 D_2 的第2行与第3行得到的行列式记为 D_3，那么 D_1 和 D_2 及 D_3 的数值关系是什么？

3. 设矩阵 $A_{3\times 3}$ 的特征值互不相同，且 $\det A=0$，则 $\operatorname{rank} A=$

4. 设 A 为2阶方阵，2维列向量组 α_1,α_2 线性无关，且满足 $A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的全体特征值是

5. 设矩阵 $A_{3\times 3}$ 的各行元素之和是3，且 $\det A=9$，则 A 的伴随矩阵 A^* 的各行元素之和是

6. 设线性方程组 $A_{(n+1)\times n}x=b$ 有唯一解，划分 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，其中 A_1 为 $2\times n$ 矩阵，A_2 为 $(n-1)\times n$ 矩阵，则齐次方程组 $A_2x=0$ 的基础解系中含解向量的个数的范围是

三.（10分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&1&&&\\1&2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&2&1\\&&&1&2\end{vmatrix}\ (n>1)$

提示：D_n 的第一行 $(2\quad 1\quad 0\quad \cdots\quad 0)=(1+1\quad 0+1\quad 0+0\quad \cdots\quad 0+0)$

四.（16 分）已知 $\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\a-1\end{pmatrix}$ 可由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\\1\end{pmatrix}$ 线性表示，求数 a 及全体表示式.

五.（16 分）已知 A 为实对称矩阵，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $2y_1^2+2y_2^2$，且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

1) 求矩阵 A 及 Q；
2) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

六.（14 分）在向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中，基（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基（II）β_1,β_2,β_3 满足

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2，\ \beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3，\ \beta_2+\beta_3=\alpha_3$$

1) 求由基（I）改变为基（II）的过渡矩阵；
2) 求 $\alpha=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3$ 在基（I）下的坐标.

七.（8 分）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维列向量组，令 $A=\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_m\alpha_m^{\mathrm{T}}$.

1) 证明 $\operatorname{rank} A\le m$；
2) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，证明 $\operatorname{rank} A<m$.