

# 狭义相对论基础



爱因斯坦（A.Einstein,1879-1955）是20世纪最伟大的物理学家之一，生于德国，1900年毕业于瑞士苏黎世联邦工业大学。爱因斯坦1905年在物理学三个不同领域：光量子理论，狭义相对论，分子运动论取得了历史性的成就。

# 伽利略相对性原理和伽利略变换

---

主要内容：

1. 伽利略相对性原理
2. 伽利略变换
3. 经典力学的绝对时空观
4. 经典力学的局限性

## 1.1 伽利略相对性原理

**惯性系：**凡是牛顿运动定律适用的参考系。相对已知惯性系作匀速直线运动的参考系也都是惯性系。

**伽利略相对性原理** (经典力学的相对性原理)

力学规律对于一切惯性系都是等价的。

## 1.2 伽利略变换

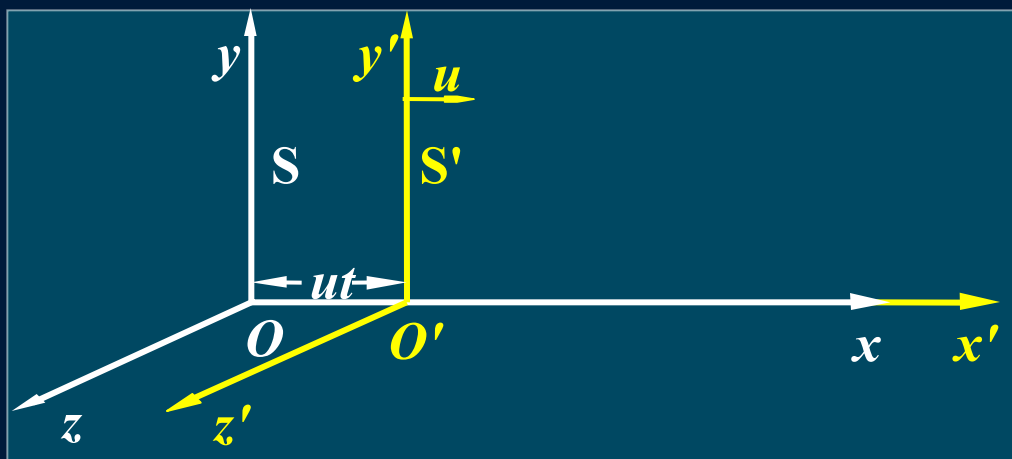
伽利略变换是伽利略相对性原理的数学表达式。

物质的运动是绝对的,但对运动的描述是相对的,观测者所选参考系不同时对运动的描述也不同。

## 1. 伽利略坐标变换

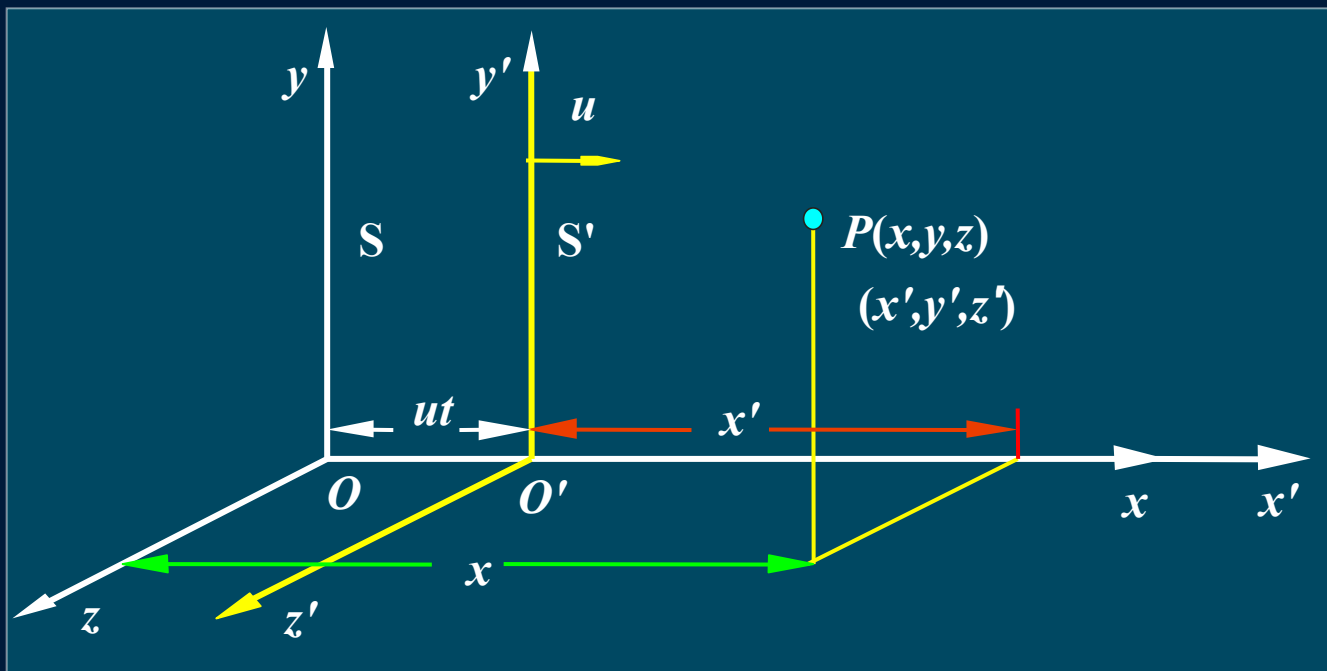
设有两个惯性系 **S** 系和 **S'** 系，各对应轴相互平行，**S'** 系相对于 **S** 系以速度  $u$  沿  $x$  轴方向作匀速直线运动。

当 **S** 系和 **S'** 系的坐标原点  $O$  与  $O'$  重合时，两个惯性系中的时钟开始计时 ( $t = t' = 0$ )。



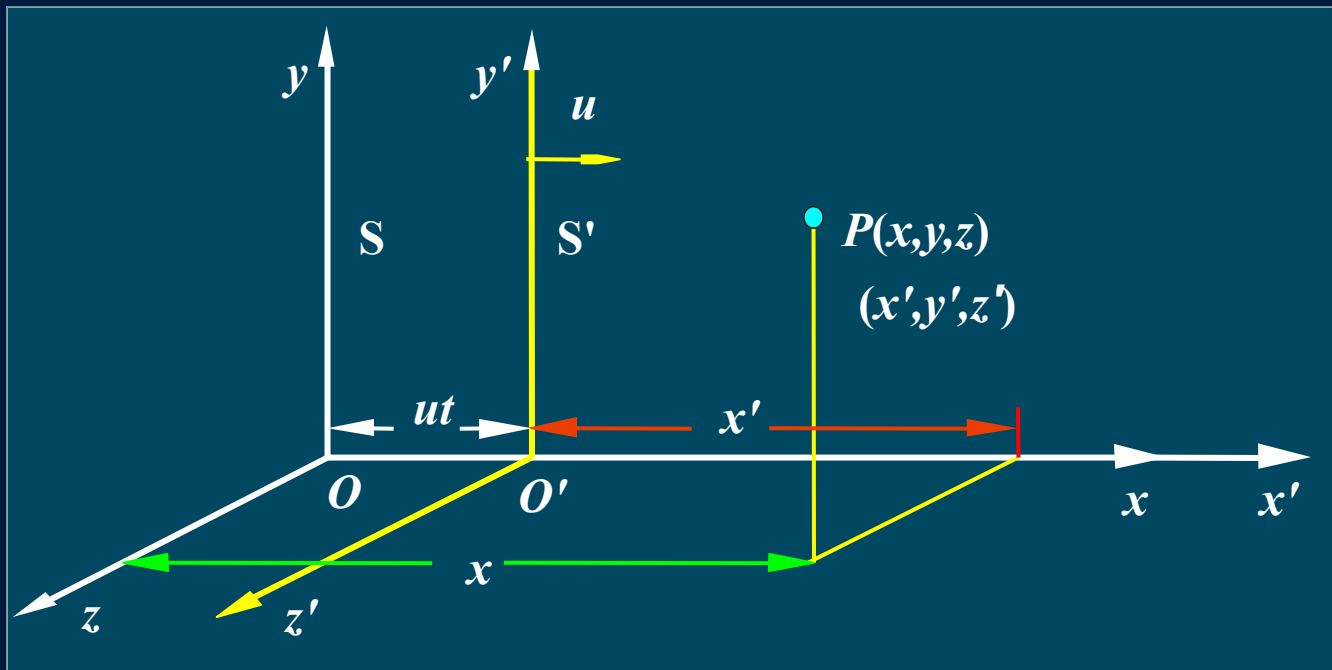
**事件：**某一时刻发生在空间某一点上的一个事例。

如果某时刻在空间某一点 $P$ 发生了一个事件， $S$ 系和 $S'$ 系的观测者分别观测这一事件。



$S$  系中的时空坐标描述  $(x, y, z, t)$ 。

$S'$  系中的时空坐标描述  $(x', y', z', t')$ 。



该事件在两个惯性系中时空坐标间的变换关系为（伽利略坐标变换）

从S系到S'系：  
(正变换)

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

从S'系到S系：  
(逆变换)

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

## 2. 伽利略速度变换和加速度变换

对伽利略时空坐标变换式求导可得伽利略速度变换式

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_z = v_z \\ v'_y = v_y \end{cases}$$

矢量式

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

对伽利略速度变换式求导可得伽利略加速度变换式

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

矢量式

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

## 3. 牛顿定律具有伽利略变换不变性

在牛顿力学中

- 力与参考系无关  $\vec{F}' = \vec{F}$
- 质量与运动无关  $m' = m$

$\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{(S系) (S'系)}} \vec{F}' = m'\vec{a}'$

## ➤ 讨论

1. 伽利略变换说明了同一事件在两个惯性系中时空坐标之间的关系。
2. 在伽利略变换中 $t=t'$ 意味着，不论在哪一个惯性系中，都有一个相同的绝对时间。这实际上是经典力学隐含的一个基本假定。
3. 由伽利略加速度变换式可知质点在两个惯性系中的加速度相同，经典力学中质量 $m$ 是恒量，牛顿定律对伽利略变换保持不变。同时由于力学各种守恒定律均为牛顿定律的推论，所以力学规律对伽利略变换是不变的，即力学规律对一切惯性系都是等价的。
4. 伽利略变换是力学相对性原理的数学表示。



## 1.3 经典力学的绝对时空观

时空观: 有关时间和空间的物理性质的认识。

### 1. 时间间隔

在伽利略变换中  $t = t'$

若有两事件先后发生, 在两惯性系中的观测者测得的时间间隔相同

$$\Delta t = \Delta t' \quad (\text{时间间隔与惯性系的选择无关})$$

### 2. 空间间隔

如果在空间有任意两点, 在S系和S'系的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ 和 $(x'_1, y'_1, z'_1)$ ,  $(x'_2, y'_2, z'_2)$ 。在两惯性系中的观测者测得的空间间隔为:

$$S \text{系: } |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$S' \text{系: } |\Delta \vec{r}'| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$

利用伽利略坐标变换

$$x_2' - x_1' = (x_2 + ut) - (x_1 + ut) = x_2 - x_1$$

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1$$

$$z_2' - z_1' = z_2 - z_1$$

$$|\Delta \vec{r}| = |\Delta \vec{r}'| \quad (\text{空间间隔与惯性系的选择无关})$$

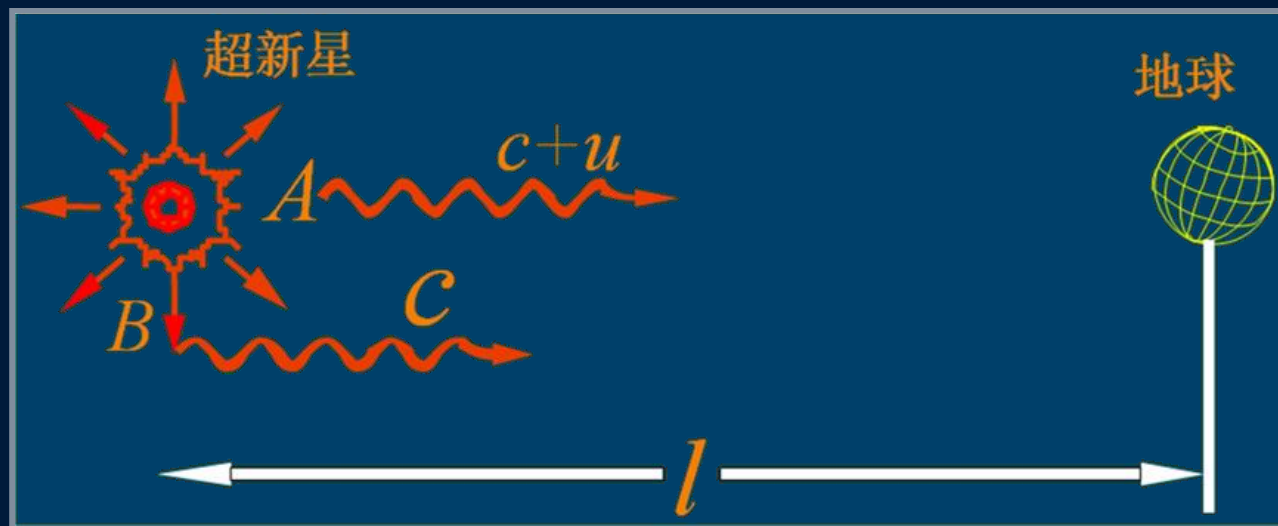
### 3. 经典力学的时空观

时间、长度、质量是绝对的,同时性是绝对的;

坐标、速度等是相对的。

## 1.4 经典力学的局限性

1. 超新星爆发疑问：据史书称，公元1054年5月，出现超新星爆发，前后历时22个月。



由A点发出的光到达地球的时间是  $t_A = \frac{l}{c+u}$

而点B发出的光到达地球的时间是  $t_B = \frac{l}{c}$

蟹状星云与地球距离  $l \approx 5000$  光年

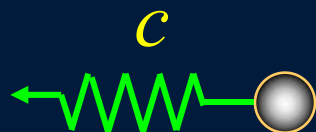
爆发中抛射物的速度  $u = 1500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

$$t_B - t_A \approx 25 \text{ 年}$$

光速不服从经典力学的速度变换定理

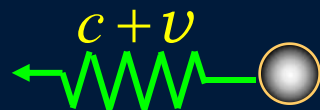
## 2. 投球疑难

击前瞬间



光传到乙的时间:  $\Delta t = l/c$

击后瞬间



$$\Delta t' = l/(c+v)$$

$\Delta t' < \Delta t$  先出球，后击球 —— 先后顺序颠倒

光速不服从经典力学的速度变换定理



甲



乙

# 狭义相对论的基本假设与洛伦兹变换

---

主要内容:

1. 狭义相对论的两个基本假设
2. 洛伦兹变换

## 1.1 狭义相对论的两个基本假设

### 1. 相对性原理

物理定律在所有惯性系中都具有相同的形式。

### 2. 光速不变原理

在所有惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值 $c$ 。

#### ➤ 说明

- ◆ 相对性原理从力学规律推广到一切物理规律。
- ◆ 光速不变原理否定了经典力学的速度变换定理。
- ◆ 两条基本假设是整个狭义相对论的基础。

## 1.2 洛伦兹变换

伽利略变换 → 绝对时空观

洛伦兹变换 → 相对论时空观

### 1. 洛伦兹变换推导

$t=0$ 时S和S'系重合，并在O点发一闪光

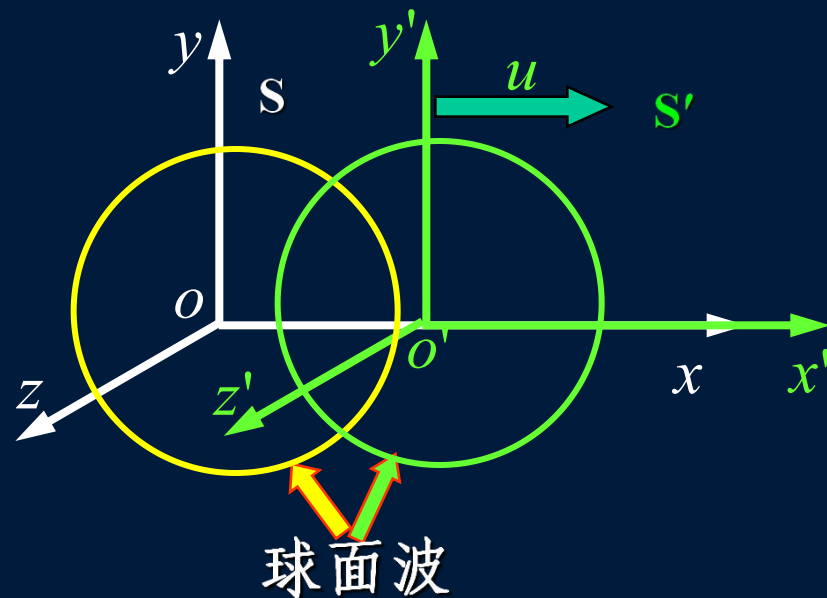
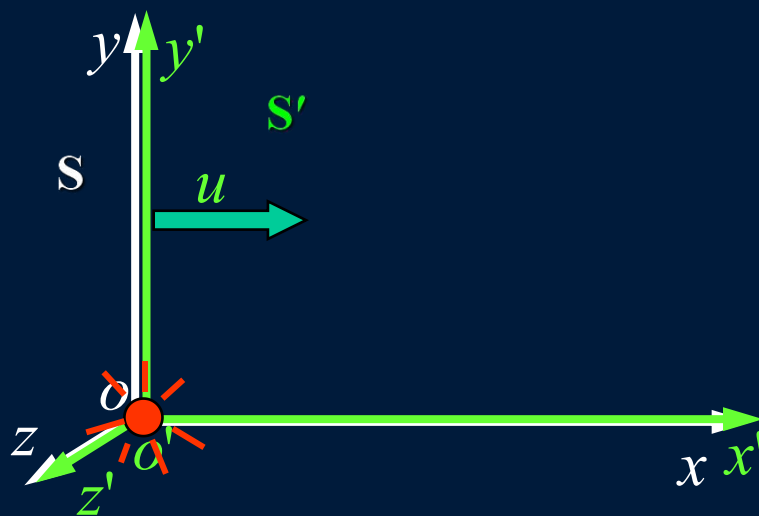
由光速不变原理知， $t$ 秒后：

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据相对性原理，可设

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{cases}$$

同时  $y = y' \quad z = z'$



在S系中观察S'系的O'点

$$x' = 0 \quad a_{11}x + a_{12}t = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = u \quad \text{----- } O' \text{ 点对 S 系的速度}$$

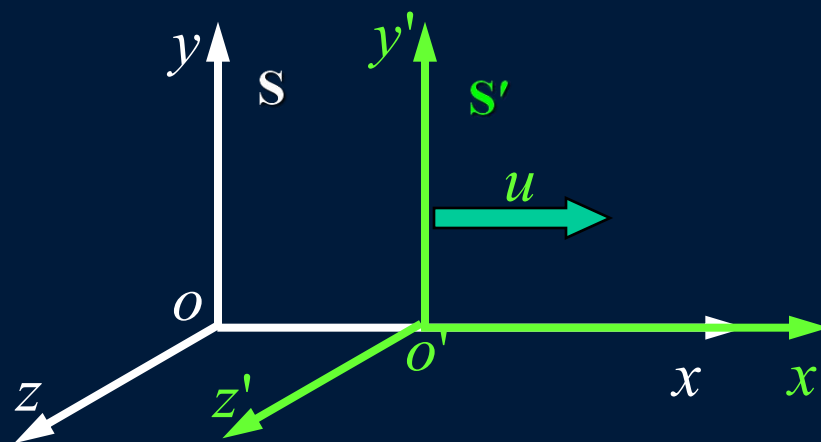
在S'系观察S系中的O点

$$x = 0$$

$$x' = a_{12}t$$

$$t' = a_{22}t$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -u \quad \text{----- } O \text{ 点对 S' 系的速度}$$





$$\text{又 } -\frac{a_{12}}{a_{11}} = u \quad a_{11} = a_{22}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{所以 } \left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x - a_{11}ut \\ t' &= a_{21}x + a_{11}t \\ y &= y' \quad z = z' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将(2)式与前边的(1)式联立, 有

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & a_{12} &= -\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ a_{21} &= \frac{-u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{所以 } \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

## 2. 洛伦兹变换

将四个求得的 $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ 系数代入设定的变换式, 有

从S系变换到S'系(正变换)

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

从S'系变换到S系(逆变换)

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

## ➤ 说明

- (1) 洛仑兹变换中 $x'$ 是 $x$ 和 $t$ 的函数， $t'$ 是 $x$ 和 $t$ 的函数，而且都与 $S$ 系和 $S'$ 系的相对运动速度 $u$ 有关，揭示出时间、空间、物质运动之间的关系。
- (2) 否定了 $t=t'$ 的绝对时间概念。在相对论中，时间和空间的测量互相不能分离。
- (3) 时间和空间坐标都是实数，要求 $u < c$ ，即宇宙中任何物体的运动速度不可能等于或超过真空中的光速。
- (4) 当 $u \ll c$ 时，洛仑兹变换转化为伽里略变换，相对论力学规律转化为经典力学规律。
- (5) 洛仑兹变换是爱因斯坦两条基本假设的必然结果(1905)。

**例** S系O点发出一闪光，1s后同时被 $P_1$ 和 $P_2$ 点接收。设S'系相对S系的运动速度为 $0.8c$  (开始时O与O'重合)。

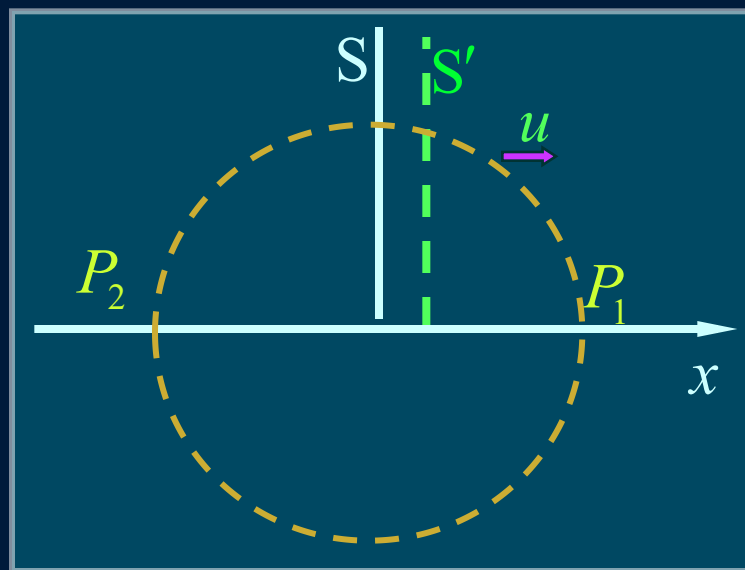
**求**  $P_1$ 和 $P_2$ 接受到信号时在S'系上的时刻和位置。

**解**  $P_1$ 和 $P_2$ 接受信号时的时空坐标分别为  $(c,0,0,1)$ 、 $(-c,0,0,1)$

S'系观测  $y'=0, z'=0$

$$x_{P_1}' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{c - u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{c}{3}$$

$$t_{P_1}' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{3}$$



即 $P_1$ 点在S'中的时空坐标为 $(\frac{c}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$

同理可得 $P_2$ 点在S'中的时空坐标为 $(-3c, 0, 0, 3)$

# 狭义相对论的时空观

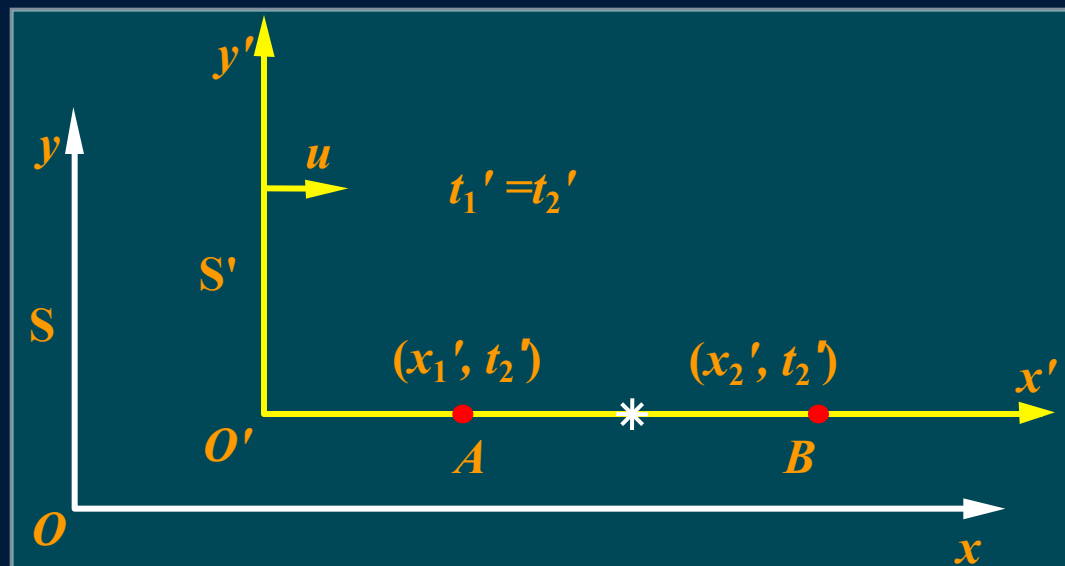
---

主要内容：

1. 同时性的相对性
2. 长度的相对性
3. 时间的相对性

# 从洛伦兹变换 $\longrightarrow$ 狭义相对论时空观

## 1.1 同时性的相对性



$S'$ 系中 $A$ 、 $B$ 中点发出一个光信号，在 $S'$ 系中 $A$ 、 $B$ 将同时接收到光信号，这两个事件的时空坐标分别为：

$S'$ 系  $(x_1', t_1')$ ,  $(x_2', t_2')$ ,  $t_1' = t_2'$ , 即两事件同时不同地.

$S$ 系中两事件时空坐标为  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$ , 两事件同时吗？

利用洛仑兹变换可得

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

于是S系中时间间隔为

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} [(t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2} (x'_2 - x'_1)]$$

$$t'_2 - t'_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{u}{c^2} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \neq 0$$

## ➤ 结论

1. 若两个事件在某一惯性系中为同时异地事件，即

$$t'_2 - t'_1 = 0 \quad x'_2 - x'_1 \neq 0$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

则在其他惯性系中必定不是同时发生的，这就是同时性的相对性。

2. 在一个惯性系中同时同地发生的事件，即

$$t'_2 - t'_1 = 0 \quad x'_2 - x'_1 = 0$$

在其它惯性系也必同时同地发生，因此同时性的相对性只是对两个同时事件发生在不同地点而言，当两个同时事件发生于同一地点时，同时性是绝对的。



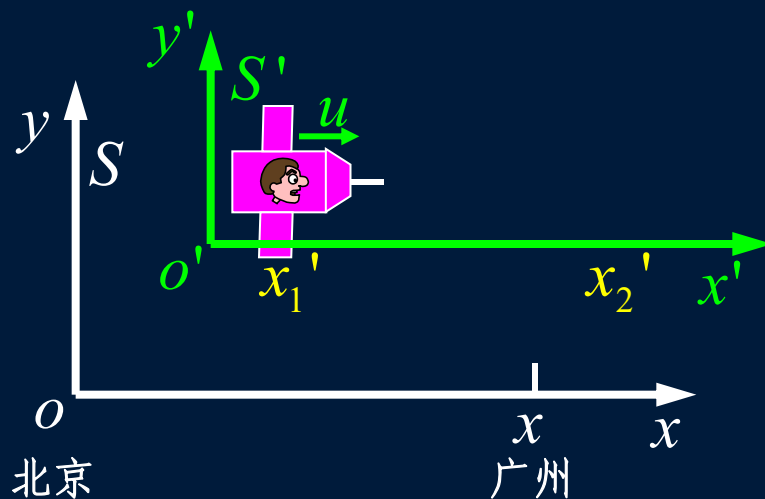
**例** 北京和广州直线距离为  $1.89 \times 10^3 \text{km}$ ，在某一时刻从两地同时各开出一列火车，设有一高速飞行器沿从北京到广州的方向在高空掠过，其速率恒为  $u=0.5c$ 。

**求** 高速飞行器上的观测者观测到哪一列火车先开？两列火车开出时刻的时间间隔是多少？

**解** 以地面为  $S$  系，飞行器为  $S'$  系

设  $S$  系中北京发车  $t_0$ ，广州发车时刻  $t_x$ 。 $S'$  系中观测的发车时间：

$$t'_0 = \frac{t_0 - \frac{u}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t'_x = \frac{t_x - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



$S'$ 系观测两列火车的发车时间间隔为

$$t'_x - t'_0 = \frac{t_x - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_0 - \frac{u}{c^2}x_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(t_x - t_0) - \frac{u}{c^2}(x - x_0)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$S$ 系中两车同时发车:  $t_x=t_0$ , 北京位于坐标原点:  $x_0=0$ , 于是

$$\begin{aligned}\Delta t' &= -\frac{\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -\frac{\frac{0.5c}{c^2} \times 1.89 \times 10^3 \times 10^3}{\sqrt{1 - (\frac{0.5c}{c})^2}} \\ &= -3.6 \times 10^{-3} \text{ s} < 0\end{aligned}$$

$t'_x < t'_0$ , 高速飞行器上的观测者发现从广州发车的时刻比北京早  $3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。

## 1.2 长度的相对性

一刚性直杆沿 $x'$ 轴静止放置于 $S'$ 中, 端点坐标为 $x'_1, x'_2$

$S'$ 系测量杆长

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \text{ (固有长度, 静止长度)}$$

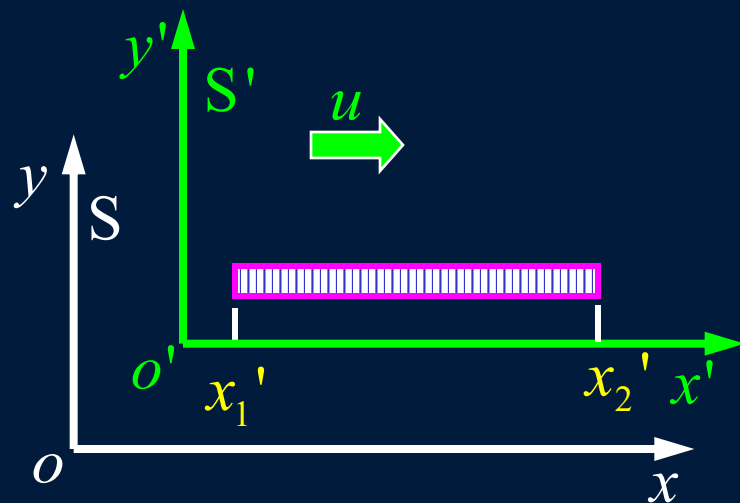
$S$ 系**同时**测得首尾坐标为 $x_1$ 和 $x_2$

$$\text{即 } t_1 = t_2 = t$$

$$L = x_2 - x_1 \text{ (运动长度)}$$

$$\begin{aligned} L_0 = x'_2 - x'_1 &= \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \boxed{L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \text{ (运动长度缩短)}$$



## ➤ 总结

- (1)在相对物体为静止的惯性系测得物体的长度最长。
- (2)相对论长度收缩只发生在运动方向上，在与运动方向垂直的方向上不发生长度收缩。
- (3)相对论长度收缩效应是时空的属性，与物体的具体组成和结构及物质间的相互作用无关。
- (4)运动物体的长度收缩是相对的。
- (5)相对论长度收缩效应可以“观测”或者“测量”，却不能“看到”。

## 思考题

设有一接近于光速相对于地球飞行的宇宙火箭，在地球上的观测者将观测到火箭上物体的长度缩短。有人进一步推论说，在火箭上的观测者将观测到相对于地球静止的物体的长度伸长。他的根据是这样的，在地球上的 **S** 系中，物体两端坐标是  $x_1$ ， $x_2$ ，在宇宙火箭上的 **S'** 系中同一物体两端的坐标是  $x_1'$ ， $x_2'$ 。

由洛伦兹变换

$$x_1' = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

可得

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \longrightarrow \quad x_2' - x_1' > x_2 - x_1$$

- 这个推论对不对？为什么？

**例** 两艘宇宙飞船在同一方向飞行，相对速度为  $u=0.98c$ ，在前面那个飞船上有一个光脉冲从船尾传到船头，该飞船上的观测者测得船尾到船头的距离为 **20m**。

**求** 另一飞船上观测者所测得这两个事件 **A**，**B**（光信号从船尾发出为 **A** 事件，光信号到达船头为 **B** 事件）之间的空间距离是多少？

**解** 取前面的飞船为 **S'** 系，后面的飞船为 **S** 系，**S'** 系相对于 **S** 系以  $u=0.98c$  沿轴正向运动。设在 **S'** 系中的观测者测得 **A**，**B** 两事件的时空坐标分别为  $(x_1', t_1')$ ， $(x_2', t_2')$ ，根据洛仑兹变换可得到 **S** 系中的观测者测得 **A**，**B** 两事件的空间坐标分别为

$$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

则S系，即后面那个飞船上的观测者测得A，B两事件的空间距离为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + u(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x' + u \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

由题意已知：  $\Delta x' = 20\text{m}$ ,  $u = 0.98c$ ,  $\Delta t' = \frac{\Delta x'}{c}$

所以

$$\Delta x = \frac{20 + 0.98c \times \frac{20}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.98c}{c}\right)^2}} = 198\text{m}$$

➤ 讨论: 这个题目能用相对论的长度收缩公式求解吗?

**例** 如图，有一米尺固定在 $x'o'y'$ 平面内， $S'$ 系测得该尺与 $x'$ 轴成 $30^\circ$ 角， $S$ 系测得该尺与 $x$ 轴成 $45^\circ$ 角。

**求**  $S$ 系中观测者测得尺的长度是多少？ $S'$ 相对于 $S$ 系的速度是多少？

**解**  $S'$ 系：  $l' = 1\text{ m}$

$$l'_x = l' \cos 30^\circ$$

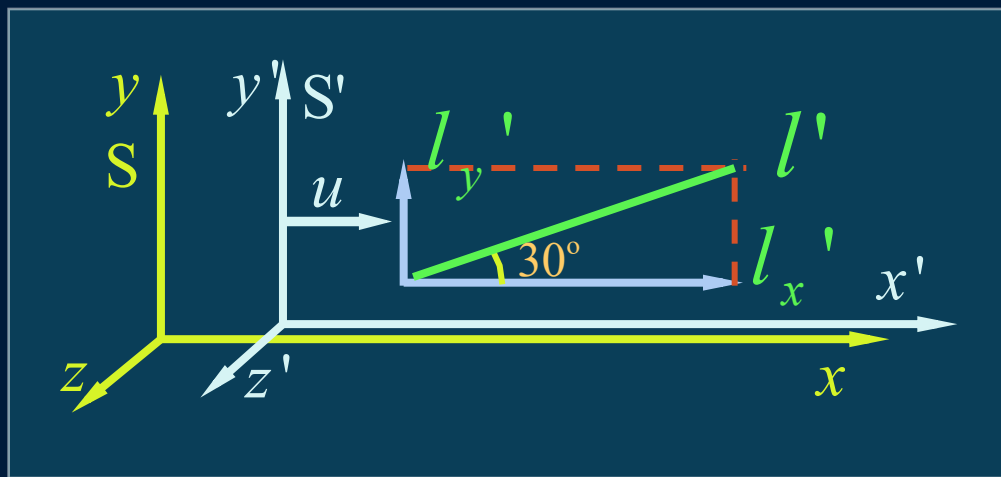
$$l'_y = l' \sin 30^\circ$$

设 $S$ 系测得尺长为 $l$

$$l_x = l \cos 45^\circ, \quad l_y = l \sin 45^\circ$$

尺在 $y$ 方向上得投影长度不变，即

$$l \sin 45^\circ = l' \sin 30^\circ \quad l = l' \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 0.707\text{ m}$$





由长度收缩公式

$$l_x = l'_x \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$l \cos 45^\circ = l' \cos 30^\circ \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

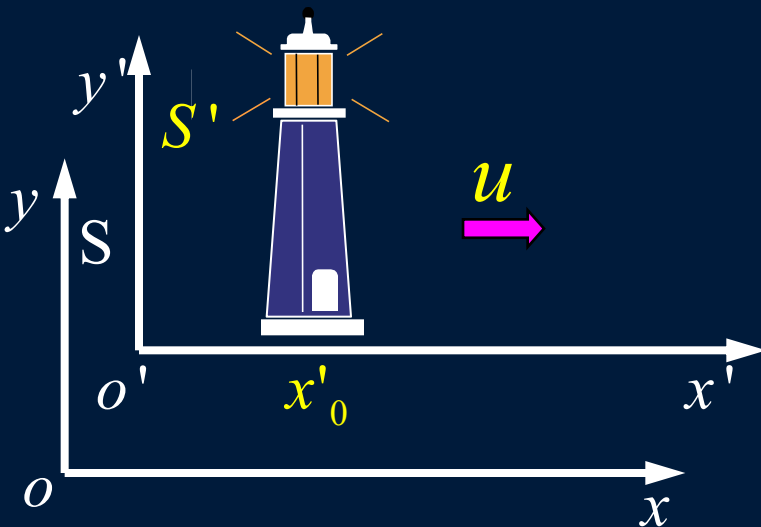
解得

$$u = c \sqrt{1 - \left( \frac{l \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} \right)^2} = 0.817c$$

## 1.3 时间的相对性

**固有时间**  $\tau_0$ : 在相对观测者静止的惯性系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔。

**S'系**  $x'_1 = x'_2$   $\tau_0 = t'_2 - t'_1$



在S系观测到的时间间隔  $\tau = t_2 - t_1 = ?$

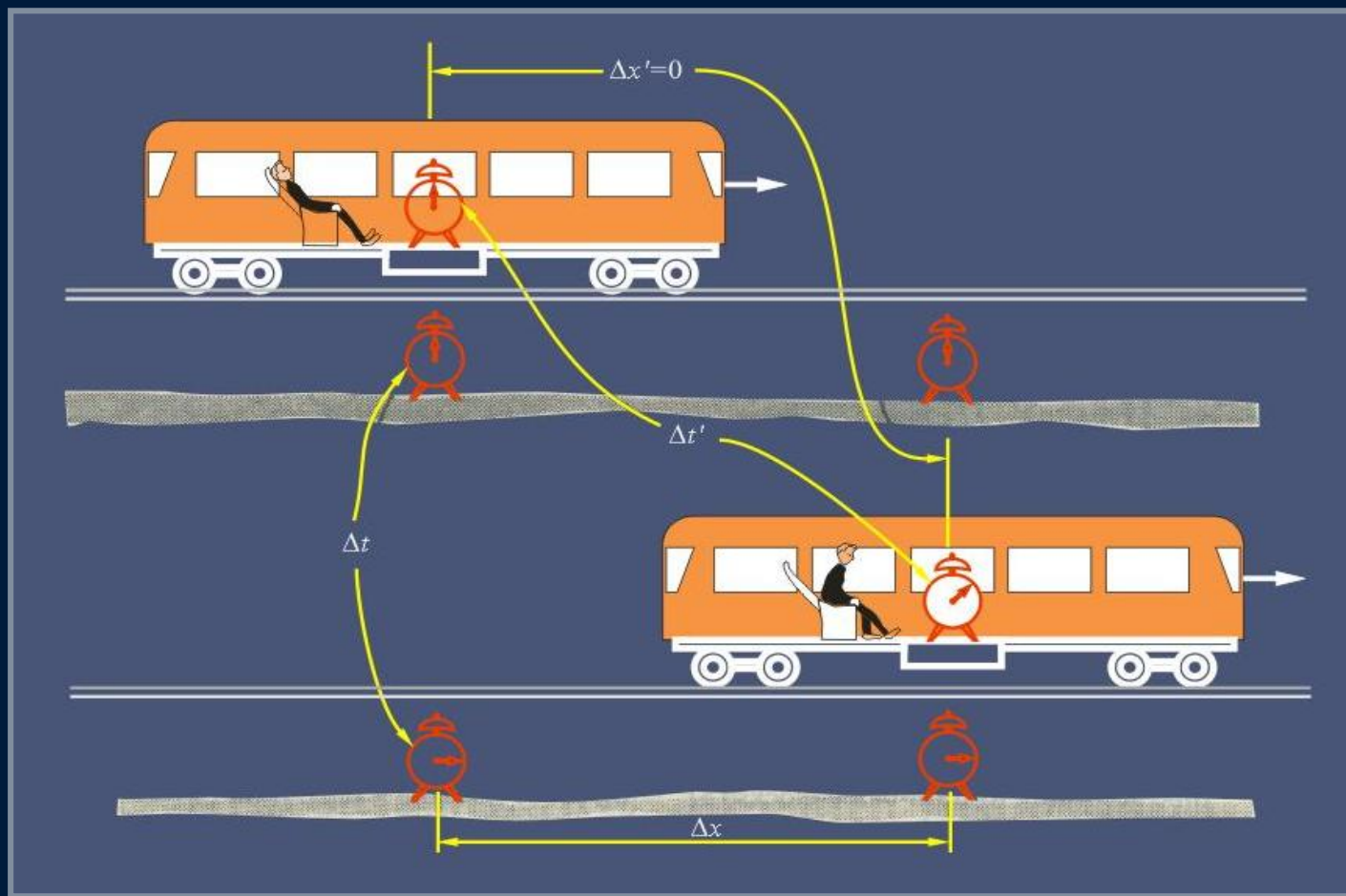
$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

时间间隔

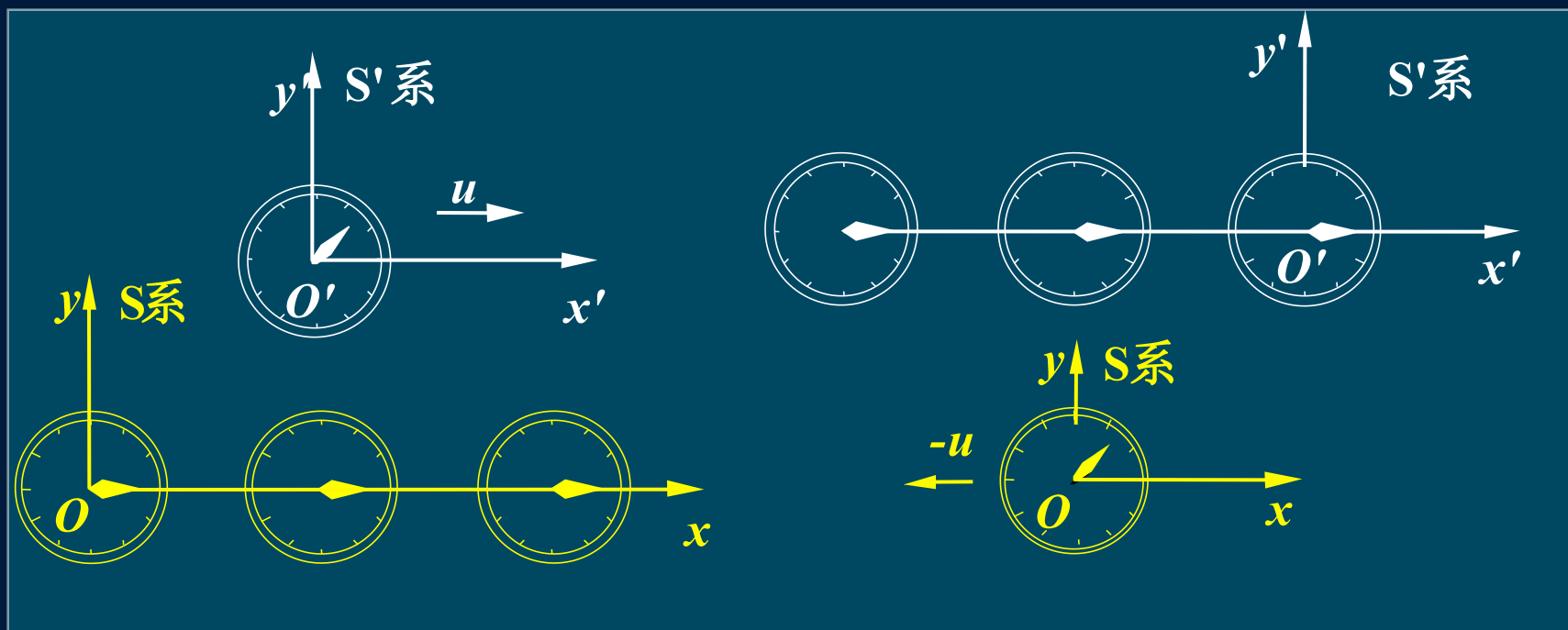
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (\text{时间膨胀})$$

## ➤ 说明

(1)在运动惯性系中测得的时间间隔比固有时间长，这就是相对论的时间延缓或运动时钟变慢。



(2) 时间是相对的，到底谁的钟慢，要看对哪个惯性系而言。  
不同惯性系的共同结论是：对本惯性系作相对运动的时钟变慢。



(a)  $S$ 系的观察者观测， $S'$ 系的钟较自己的钟走得慢

(b)  $S'$ 的观察者观测， $S$ 系的钟较自己的钟走得慢

- (3) 运动的时钟变慢是光速不变原理的直接推论，是时空的属性，不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程。
- (4) 运动时钟变慢，不仅限于任何计时装置变慢，也是指一切发生在运动物体上的过程相对静止的观测者来说都变慢了，运动参考系中的一切物理、化学过程，乃至观测者的生命节奏都变慢了。
- (5) 运动时钟变慢效应，已被许多实验所证实。

**例** 静止的带电 $\pi$ 介子的半衰期为 $1.77 \times 10^{-8}\text{s}$ （不稳定粒子数目减少一半经历的时间称为半衰期，即当 $t=T_{1/2}$ 时 $N=N_0/2$ ）。今有一束平行运动的介子，速率为 $0.99c$ ，在离开 $\pi$ 介子源（加速器中的靶） $39\text{m}$ 处，发现它的强度已减少为原来强度的一半。

**求** 试解释这一实验结果。

**解 (1)** 用经典力学解释实验结果

$\pi$  介子束在半衰期内即半数衰变前通过的路程为

$$S = uT_{1/2} = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.77 \times 10^{-8} = 5.3\text{m}$$

与实验结果矛盾， $\pi$  介子的运动速度接近光速，牛顿力学已不适用，必须考虑相对论效应。

## (2) 用运动时钟变慢效应解释实验结果

- 设相对 $\pi$ 介子静止的参考系为 $S'$ 系, $\pi$ 介子半衰期在 $S'$ 系为 $1.77 \times 10^{-8} \text{s}$ , 是固有时间 $\tau_0$ 。
- 设实验室参考系为 $S$ 系。 $S'$ 系相对于 $S$ 系的运动速度为 $0.99c$ , 在 $S$ 系中观测, $\pi$ 介子以高速运动, 测得的半衰期应为运动时间

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1.77 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99c}{c}\right)^2}} = 1.26 \times 10^{-7} \text{s}$$

$\pi$ 介子在这段时间内通过的路程为

$$S = u\tau = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.26 \times 10^{-7} = 37.5 \text{ m}$$

这与实验结果基本吻合。

### (3) 用长度收缩效应解释实验结果

在S'的半衰期为  $\tau_0 = 1.77 \times 10^{-8} \text{s}$ ， $\pi$ 介子系的观测者认为，实验室参考系即S系的尺子是运动的尺，是要缩短的，S系测得的当 $\pi$ 介子束的强度减少到原强度的一半时前进的距离为39m，在S'系只有

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 39 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0.99c}{c}\right)^2} = 5.5 \text{ m}$$

通过这段距离所需的时间等于

$$t = \frac{L}{u} = \frac{5.5}{0.99c} = \frac{5.5}{2.97 \times 10^8} = 1.86 \times 10^{-8} \text{ s}$$

与 $\pi$ 介子系测得的半衰期基本一致。



## ➤ 讨论

- (1) 用牛顿力学解释实验结果时，利用了S系（实验室系）的长度测量结果（ $39\text{m}$ ），又利用了S'系（介子系）的时间测量结果（ $1.77 \times 10^{-8}\text{s}$ ），导致与实验结果矛盾的结论。
- (2) 运动时钟变慢效应解释实验结果，利用了S系(实验室系)的测量结果（长度: $39\text{m}$ ；时间: $1.26 \times 10^{-7}\text{s}$ ）。实验室的观测者测量的 $\pi$ 介子运动时的半衰期比静止时大得多。在半衰期内可通过 $39\text{m}$ 。
- (3) 用长度收缩效应解释实验结果，利用S'系( $\pi$ 介子系)的长度和时间测量结果(长度: $5.5\text{m}$ ；时间: $1.77 \times 10^{-8}\text{s}$ )。运动着的 $\pi$ 介子观测到实验室的空间距离缩短了，在它的固有半衰期内能通过这段距离。
- (4) 相对论的时钟变慢与长度收缩总是紧密联系在一起的。所有验证相对论时钟变慢效应的近代物理实验，都同样验证了相对论长度收缩效应。

## 解题思路

学习狭义相对论，正确理解和掌握相对论的时空观是最重要的，要理解同时性的相对性，时空量度的相对性，处理实际问题时要注意：

- (1) 明确两个参考系  $S$  系和  $S'$  系。一般情况下选地面为  $S$  系，运动物体为  $S'$  系。
- (2) 明确固有长度，固有时间的概念。相对物体静止的惯性系测量的长度为固有长度，一个惯性系中同一地点测量的两个事件的时间间隔为固有时间。
- (3) 洛仑兹变换式是求解有关相对论时空观问题的依据。处理实际问题时要根据题设条件与待求量设定不同事件在不同惯性系中的时空坐标，选用洛仑兹变换中正变换或逆变换的公式，还要注意同时性的相对性。

#### (4)注意时空量度相对性的两个公式的适用范围。

- 如果待测长度相对于一惯性系静止，计算相对其运动惯性系中的长度

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

- 如果已知一个惯性系中同一地点发生的两个事件的时间间隔，计算这两个事件在另一惯性系中的时间间隔

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- 如果不是这两种情况，要用洛仑兹变换求解。

# 狭义相对论的速度变换

S系中的速度:  $v_x = \frac{dx}{dt}$      $v_y = \frac{dy}{dt}$      $v_z = \frac{dz}{dt}$

S'系中的速度:  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$      $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$      $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$

由洛伦兹坐标变换有

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - udx/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

洛伦兹速度变换式:  $v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - udx/c^2} = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}$$

## 从S系变换到S'系

(正变换)

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}$$

## 从S'系变换到S系

(逆变换)

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2}$$

## ➤ 说明

(1) 当 $u$ 和 $v$ 远小于光速时，相对论速度变换定理又回到伽利略变换，因此伽利略变换是相对论速度变换的低速近似。

(2) 相对论速度变换定理与光速不变原理在逻辑上必然自洽

$$v_x = \frac{c + u}{1 + uc/c^2} = \frac{c + u}{c(c + u)} c^2 = c$$

(3) 由相对论速度变换公式，不可能得出大于光速的物体运动速度。即使在极端情况下，令  $v'_x = c$ ， $u = c$

$$v_x = \frac{c + c}{1 + c \cdot c/c^2} = c$$

真空中的光速 $c$  是物体运动速度的极限。

**例** 一个空间站发射两个飞船，它们的运动方向相互垂直，见图。设一观测者位于空间站内，他测得**1**号飞船和**2**号飞船相对空间站的速率分别为 **$0.60c$** 和 **$0.80c$** 。

**求** **1**号飞船的观测者测得**2**号飞船的速度。

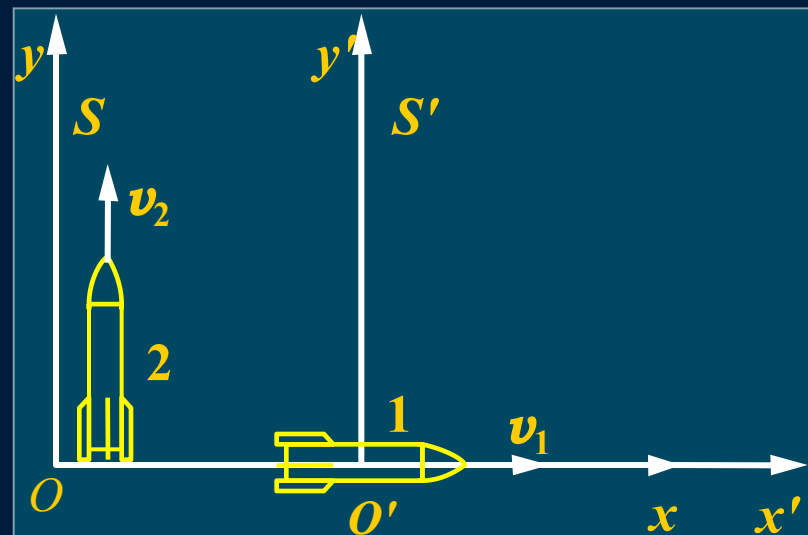
**解** 取空间站为**S**系

**1**号飞船为**S'**系  $u = 0.60c$

在**S**系中观测**2**号飞船

$$v_y = 0.80c \quad v_x = 0$$

**2**号飞船相对于**1**号飞船的速度分量为：



$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{0 - 0.6c}{1 - \frac{0.6c}{c^2} \times 0} = -0.60c$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2} \times 0.8c}{1 - \frac{0.6c}{c^2} \times 0} = 0.64c$$

1号飞船的观测者测得2号飞船的速度大小为:

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{(-0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.877c$$

方向(与 $x'$ 轴正方向夹角)为:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{0.64}{0.60}\right) = 133.2^\circ$$



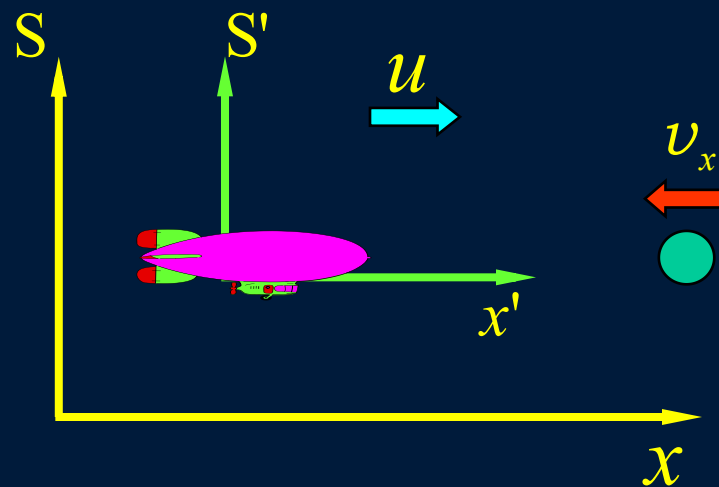
**例** 一飞船和一彗星相对地面分别以 $0.6c$ 和 $0.8c$ 的速度相向而行,在地面上观测,再有 $5s$ 二者就要相遇,

**求** (1)飞船上看彗星的速度为多少?

(2)从飞船上的钟看再经多少时间二者将相遇?

**解** 设地面为 $S$ 系,飞船为 $S'$ 系

$$\begin{aligned}v_x' &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\&= \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + 0.8 \times 0.6} \\&= -0.946c\end{aligned}$$



负号表示沿 $x'$ 轴负向

对飞船, 观察到其与彗星相撞是在同一地点发生的两个事件

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 5 \sqrt{1 - 0.6^2} = 4s$$

# 狭义相对论动力学

---

主要内容:

1. 相对论质量
2. 相对论动力学基本方程
3. 相对论能量
4. 相对论能量与动量的关系

## 1.1 相对论质量

经典力学中：物体质量恒定。

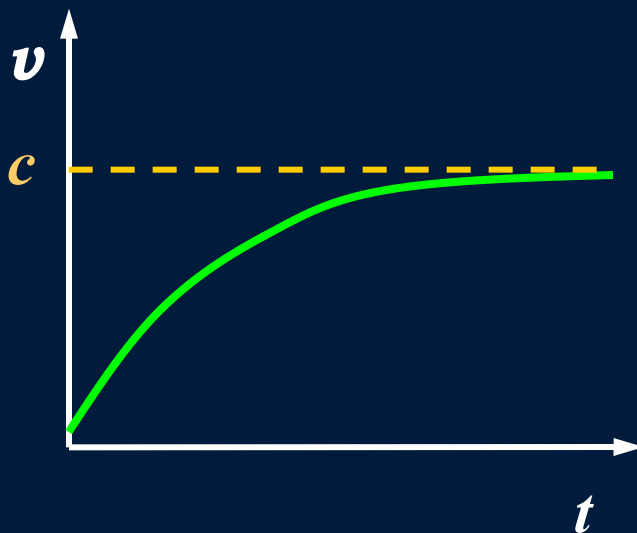
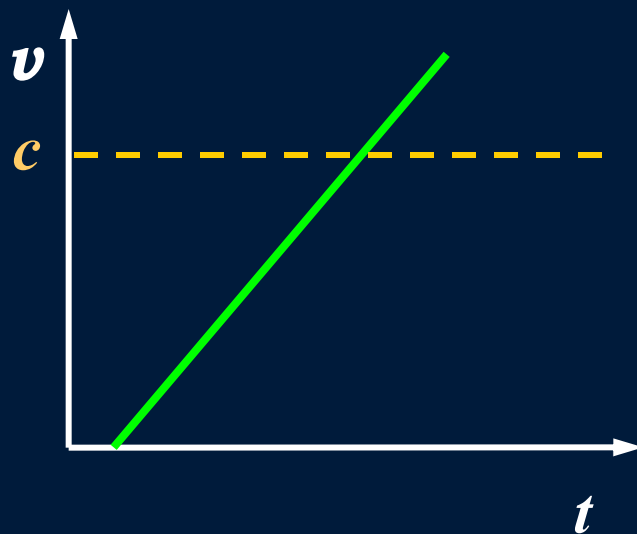
恒力下： $v \propto t$  没有上限。

实验证明，电子在恒力作用下被加速到接近光速时，速度不再线性增加，且不能超越光速。

动能定理成立  $\Rightarrow$  质量不是恒量

狭义相对论从理论上可以证明

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{相对论质速关系})$$



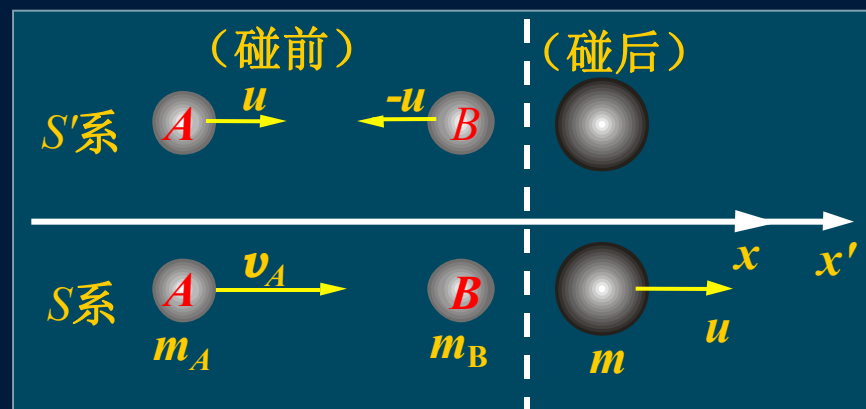
$m_0$ : 物体静止时质量,  $m(v)$ : 物体以速率  $v$  运动时的质量.

## 相对论质量公式的推导

设全同粒子 $A$ 、 $B$ 在 $S'$ 系中速度如图, 并作完全非弹性碰撞

$S'$ 系中碰撞过程质量守恒

$$m_A + m_B = 2m$$



$S'$ 系中碰撞过程满足动量守恒定律

$$m_A \bar{v}'_A + m_B \bar{v}'_B = 2m \cdot 0$$

根据假设  $v'_A = u$ ,  $v'_B = -u$ , 则动量守恒式变为:

$$mu + m(-u) = 2m \cdot 0$$

$S'$ 系相于 $S$ 系以速度 $u$ 沿 $x$ 轴正向作匀速直线运动,  $S$ 系看来,  $m_B$ 是静止的, 此时若保持质量不变, 在洛伦兹变换下则动量不守恒, 即

$$m_A + m_B = 2m$$

$$m_A \bar{v}_A + m_B \cdot 0 \neq 2mu$$

$v_A$ 可由洛伦兹变换公式得出

$$v_A = \frac{v'_A + u}{1 + v'_A \frac{u}{c^2}} = \frac{u + u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

要保持动量守恒定律成立，质量应是速度与速度有关的相对量。

定义： $m=m(v)$ ； $v=0$ 时， $m_0=m(0)$ ，静止质量。

质量守恒  $m(v) + m_0 = m_T(u)$

动量守恒  $m(v) \cdot v = m_T(u) \cdot u = [m(v) + m_0] \cdot u$

式中 $m_T(u)$ 为碰撞后复合粒子的质量， $u$ 为其速度，所以

$$m(v) = \frac{m_0 u}{v - u} = \frac{m_0}{\frac{v}{u} - 1}$$

由洛伦兹速度变换公式有  $v = v_A = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$

故  $\frac{v}{u} = \frac{2}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2}{1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{u^2}{v^2}}$  或  $\frac{v}{u} + \frac{v^2}{c^2} \frac{u}{v} - 2 = 0$

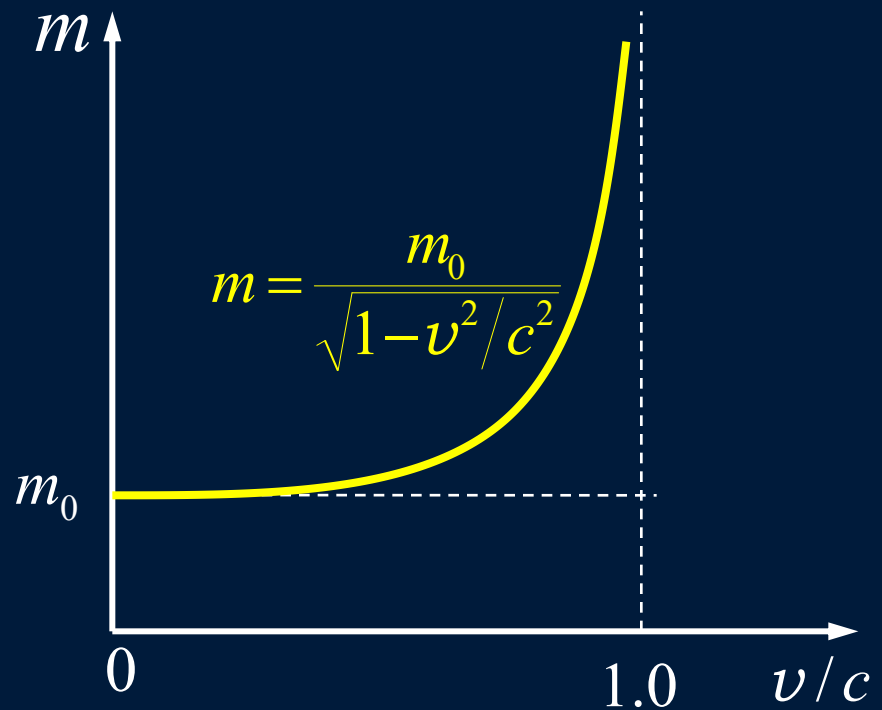
方程两边同乘  $v/u$ , 可解得

$$\frac{v}{u} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \xrightarrow{\text{取正号代入}} m(v) = \frac{m_0 u}{v - u} = \frac{m_0}{\frac{v}{u} - 1}$$

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{相对论质速关系})$$

$m(v)$ : 相对论质量;  $m_0$ : 静止质量

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



➤ 讨论:

- 当  $v \ll c$  时:  $m(v) \rightarrow m_0$
- 当  $m_0 \neq 0, v \rightarrow c$  时:  $m(v) \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow 0$

物体运动速度不能大于  $c$ , 只有  $m_0=0$  的物体才能以光速运动。

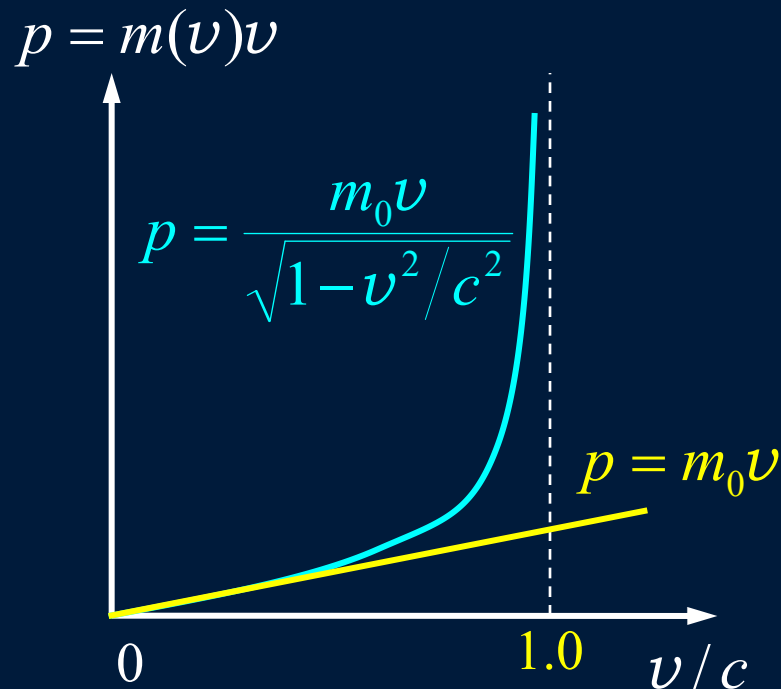
## 1.2 狭义相对论动力学基本方程

### 1. 动量

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

### 2. 动力学方程

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$



当  $v$  远小于光速时，相对论动力学方程又回到牛顿第二定律，因此牛顿第二定律是相对论动力学方程的低速近似。



## 1.3 相对论能量

### 1. 相对论动能

假定经典力学中的动能定理仍然成立。

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{v} \cdot (\vec{F} dt) = \vec{v} \cdot d(m\vec{v})$$

$$E_k = \int_0^v \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) \text{ (假设质点运动方向与受力方向相同)}$$

$$= \int_0^v v d(mv) = \int_0^v \underline{mv dv + v^2 dm}$$

将  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  改写为  $m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$

两边微分  $2mc^2 dm - m^2 2v dv - v^2 2m dm = 0$

同除以  $2m$ ，并移项有  $c^2 dm = \underline{mv dv + v^2 dm}$

于是  $E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad (\text{相对论动能公式})$$

➤ 讨论:

当  $v \ll c$  时, 可将  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  作泰勒展开, 得

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

取前两项, 代入  $E_k = mc^2 - m_0c^2$  可得

$$E_k = m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

表明经典力学的动能表达式是相对论动能表达式的低速近似。

## 2. 相对论能量

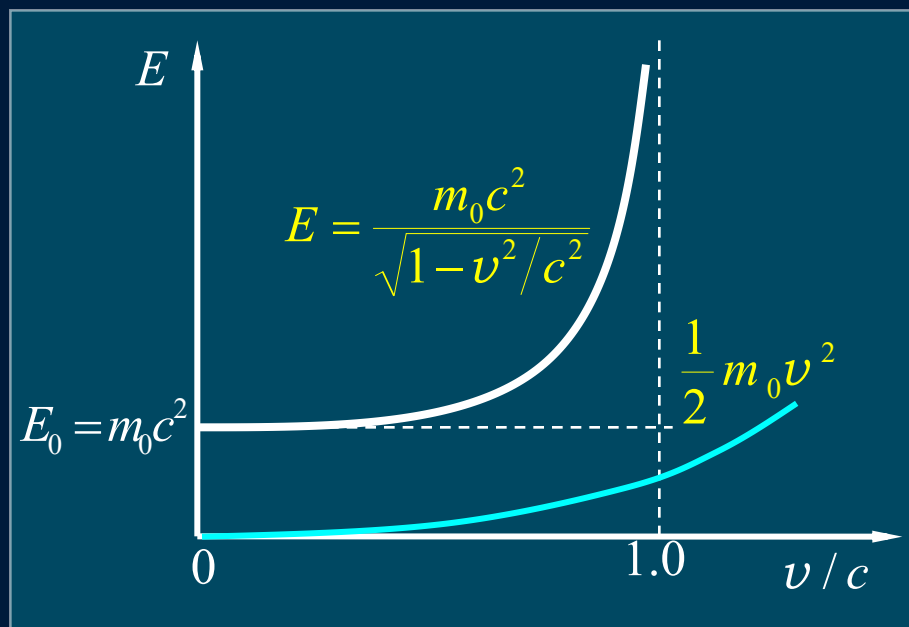
相对论动能:  $E_k = mc^2 - m_0c^2$ , 可以改写为:  $mc^2 = E_k + m_0c^2$

爱因斯坦定义:  $E_0 = m_0c^2$  物体静止时的能量 —— 静能

$E = mc^2$  物体相对论能量 —— 总能量

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(相对论质能公式)



多个粒子相互作用时

$$\sum E_i = \sum m_i c^2 = \text{常量} \quad (\text{相对论能量守恒})$$

$$\sum m_i = \text{常量} \quad (\text{相对论质量守恒})$$

在相对论中能量守恒与质量守恒两个定律统一。

由质能关系有:  $\Delta E = \Delta m c^2$

相对论的质量变化必然伴随能量的变化

——原子能(核能)利用的理论依据

**例** 试比较原子核裂变和聚变过程中所释放出的能量。

**解** 用中子轰击铀一类重原子核可分裂成两个中等质量的原子核的现象称为**原子核的裂变**，在裂变反应中放出巨大能量。例如反应



反应物和生成物静质量之差(质量亏损)，为

$$\Delta m = m_0 - m'_0$$

$$m_0 = m_{\text{n}} + m({}_{92}^{235}\text{U}) \quad (\text{反应物静止质量之和})$$

$$m'_0 \quad \text{生成物的静止质量之和}$$

$$m'_0 = m({}_{56}^{141}\text{Ba}) + m({}_{36}^{92}\text{Kr}) + 3m_{\text{n}}$$

其中中子的静止质量

$$m_n = 1.0087\text{u}$$

${}_{92}^{235}\text{U}$  的静止质量

$$m({}_{92}^{235}\text{U}) = 235.0439\text{u}$$

${}_{56}^{141}\text{Ba}$  的静止质量

$$m({}_{56}^{141}\text{Ba}) = 140.9139\text{u}$$

${}_{36}^{92}\text{Kr}$  的静止质量

$$m({}_{36}^{92}\text{Kr}) = 91.8973\text{u}$$

则反应物的静止质量之和为

$$m_0 = 1.0087\text{u} + 235.0439\text{u} = 236.0526\text{u}$$

生成物的静止质量之和为

$$\begin{aligned} m'_0 &= 140.9139\text{u} + 91.8973\text{u} + 3 \times 1.0087\text{u} \\ &= 235.8373\text{u} \end{aligned}$$

反应前后质量亏损为  $\Delta m = m_0 - m'_0$

$$= 236.0526u - 235.8373u$$
$$= 0.2153u = 0.3574 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

其中原子质量单位  $1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

释放的能量  $\Delta E = \Delta mc^2 = 0.3574 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2$

$$= 3.2166 \times 10^{-11} \text{ J}$$
$$= 2.01 \times 10^8 \text{ eV} = 201 \text{ MeV}$$

一千克铀-235全部裂变，所放出的可利用的核能相当于  
约**2500t**标准煤燃料所放出的热能。

聚变反应：轻原子核聚合成较重原子核的核反应。

例如反应  ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + \text{n}$

反应之前静止质量之和为

$$\begin{aligned} m_0 &= m(\text{D}) + m(\text{T}) \\ &= 2.014\,1\text{u} + 3.016\,0\text{u} \\ &= 5.030\,1\text{u} \end{aligned}$$

反应之后静止质量之和为

$$\begin{aligned} m'_0 &= m({}^4\text{He}) + m_{\text{n}} \\ &= 4.002\,6\text{u} + 1.008\,7\text{u} \\ &= 5.011\,3\text{u} \end{aligned}$$



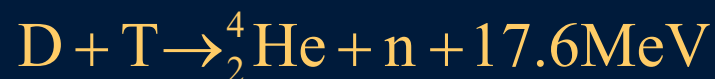
反应前后静止质量差为

$$\Delta m = m_0 - m'_0 = 0.0188\text{u} = 0.3127 \times 10^{-28} \text{kg}$$

释放出能量

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta mc^2 = 0.3127 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^8)^2 \\ &= 2.8143 \times 10^{-12} \text{J} = 17.6 \text{MeV}\end{aligned}$$

上述聚变反应可以表示为



聚变反应平均每个核子放出的能量(约 17.6MeV )要比裂变反应平均每核子所放出的能量(约 1MeV )大得多。

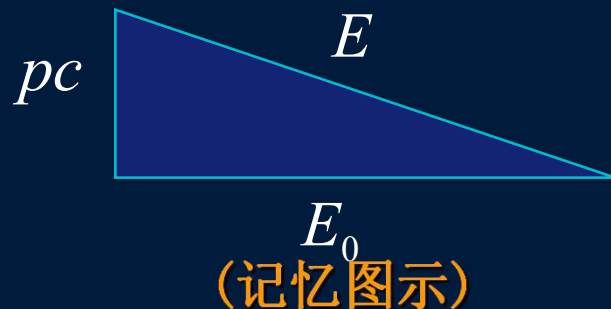
## 1.4 相对论能量和动量的关系

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

平方后消去 $v$ 可得

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (\text{相对论能量动量关系})$$



对于静止质量为零的粒子，如光子，能量和动量关系为

$$E = pc$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc$$

$$p = mc$$

对于动能是 $E_k$ 的粒子，总能量为

$$E = E_k + m_0 c^2$$

$$E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

当 $v \ll c$ 时， $E_k^2 \ll 2m_0 c^2$

上式的第一项可以忽略，即

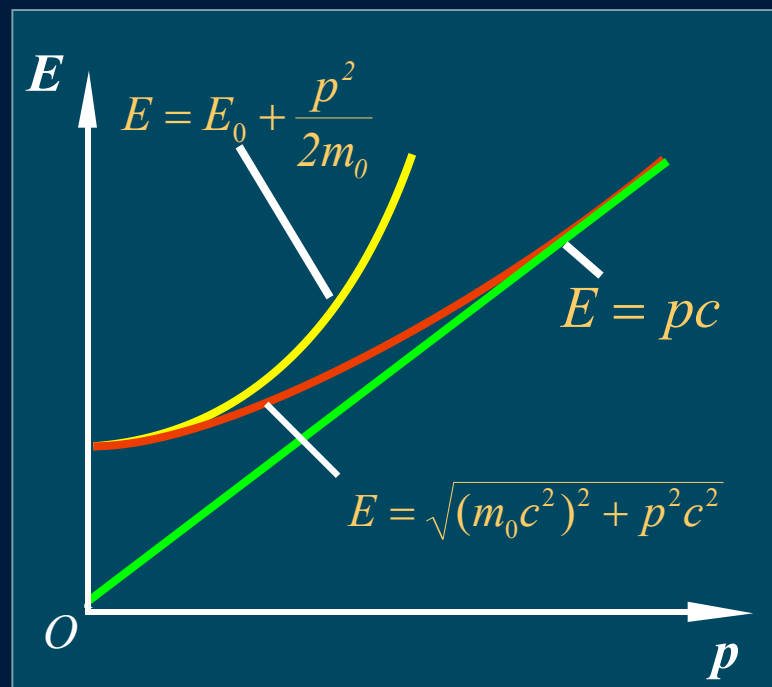
$$2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

于是有

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

$$E = E_0 + \frac{p^2}{2m_0}$$

(物体低速运动时能量动量关系)



**例** 已知激光器发生的光脉冲所具有的能量为  $E = 2 \times 10^3 \text{ J}$

**求** (1) 它所携带的动量;

(2) 如果这光脉冲是在  $1 \text{ ms}$  内被物体吸收的, 物体所受到的光压是多少?

**解** (1) 能量为  $E$  的光子所具有的动量

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 6.67 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

(2) 光具有动量, 所以光射到物体表面上时会对表面产生压力, 这个压力叫辐射压力或光压。由于光脉冲是在1毫秒内被物体吸收的, 则物体所受的壓力为

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{6.67 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} = 6.67 \times 10^{-3} \text{ N}$$

## 解题思路

实际问题中当物体作趋近于光速的高速运动时，一定要用相对论动力学的公式，求解相对论动力学问题的关键在于理解和掌握下列几个最重要的结论：

- 相对论质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 相对论动量

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 相对论能量

$$E = mc^2$$

- 相对论动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

- 相对论能量和动量的关系

$$E^2 = P^2c^2 + E_0^2$$