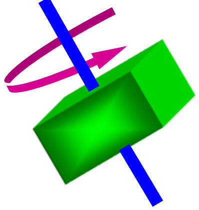


第5章 刚体力学初步

本章将研究具有一定形状和大小的物体——刚体的机械运动的规律。

- §5.1 刚体运动学
- §5.2 刚体平动动力学
- §5.3 刚体绕定轴的转动
- §5.4 角动量定理与角动量守恒定律
- §5.5 动能定理与机械能守恒定律

§5.1 刚体运动学

问题提出：如何描述刚体的运动?

刚体的运动：可分为平动和绕定轴转动。

刚体的平动：位矢、速度和加速度。

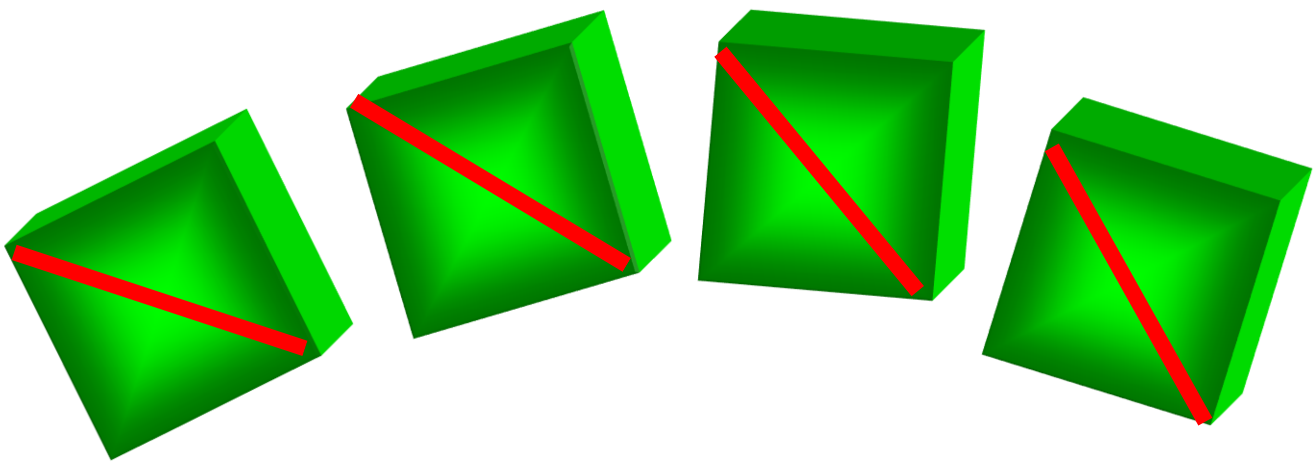
刚体的转动：角位置、角速度和角加速度。

- 1.刚体
- 2.刚体的运动
- 3.描述刚体转动的运动学量

1.刚体

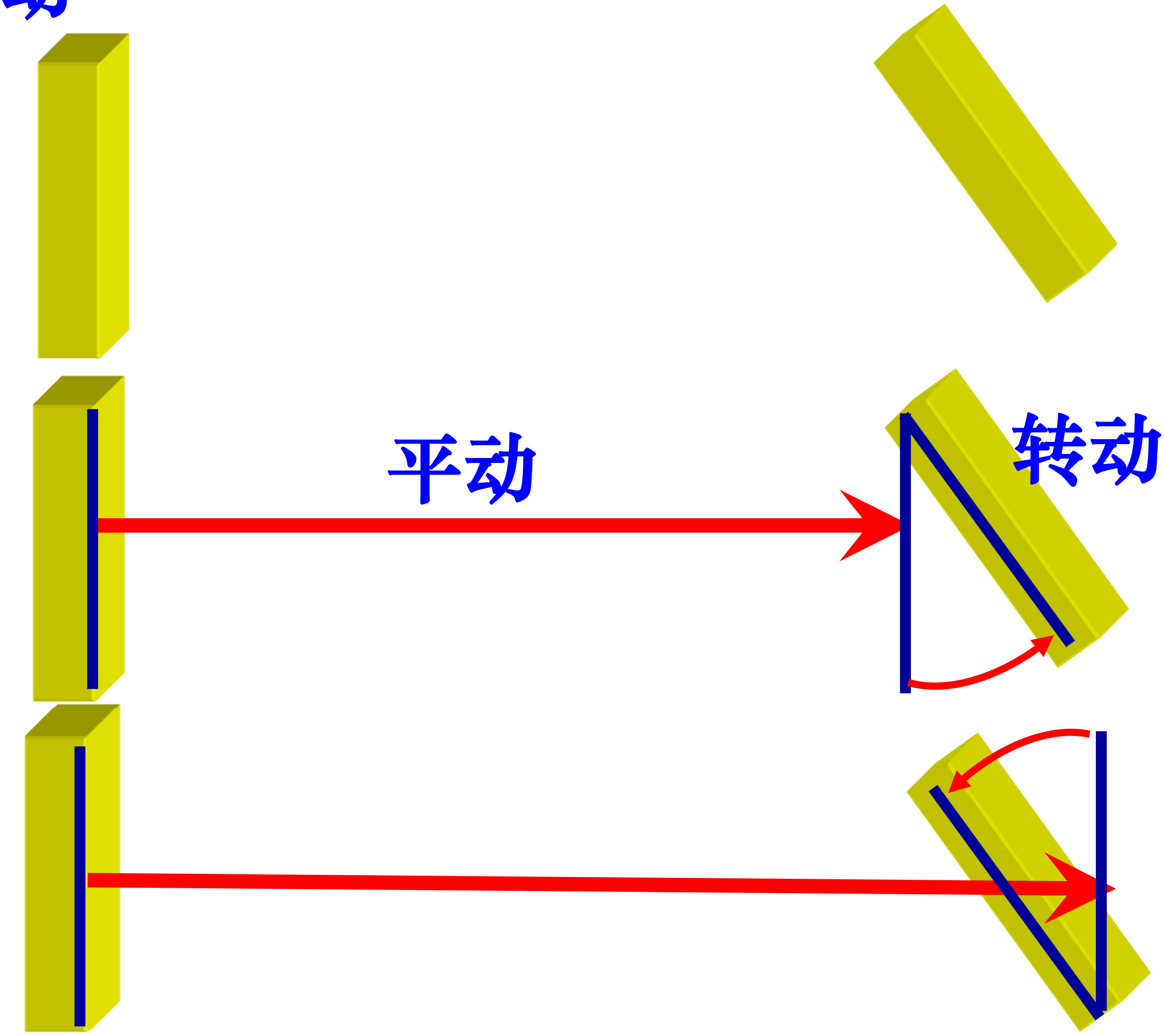
物理模型：在运动和相互作用过程中，大小和形状都不发生任何变化的物体。

推论：刚体内任意两点的距离不变。

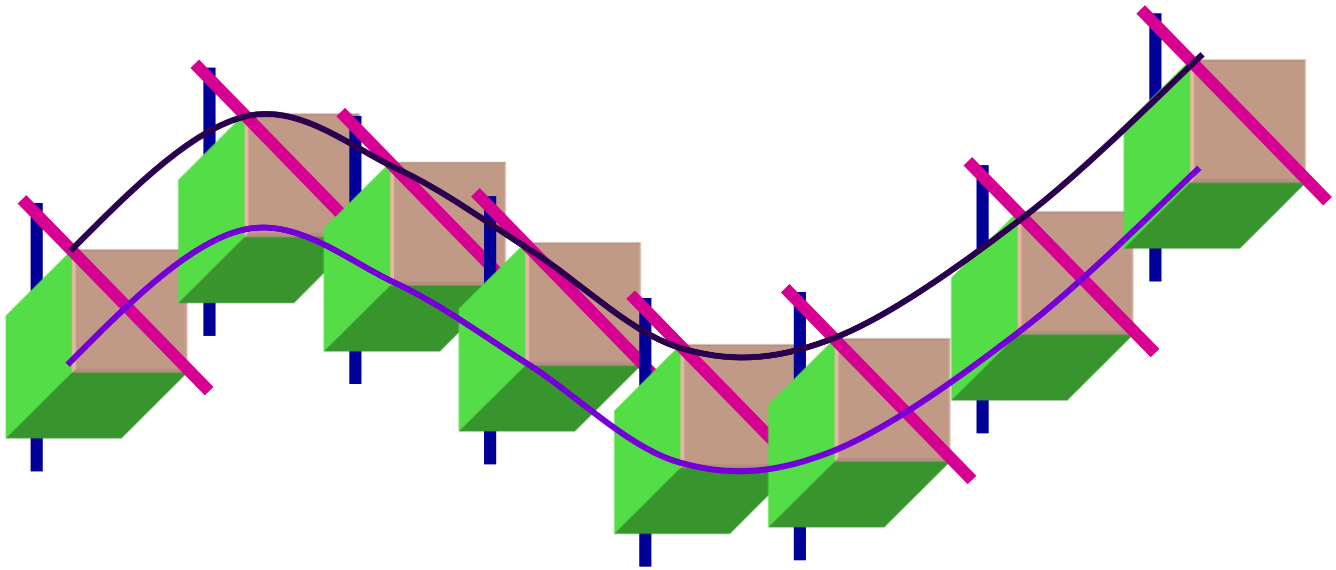


2.刚体的运动

刚体的任意运动＝平动＋转动



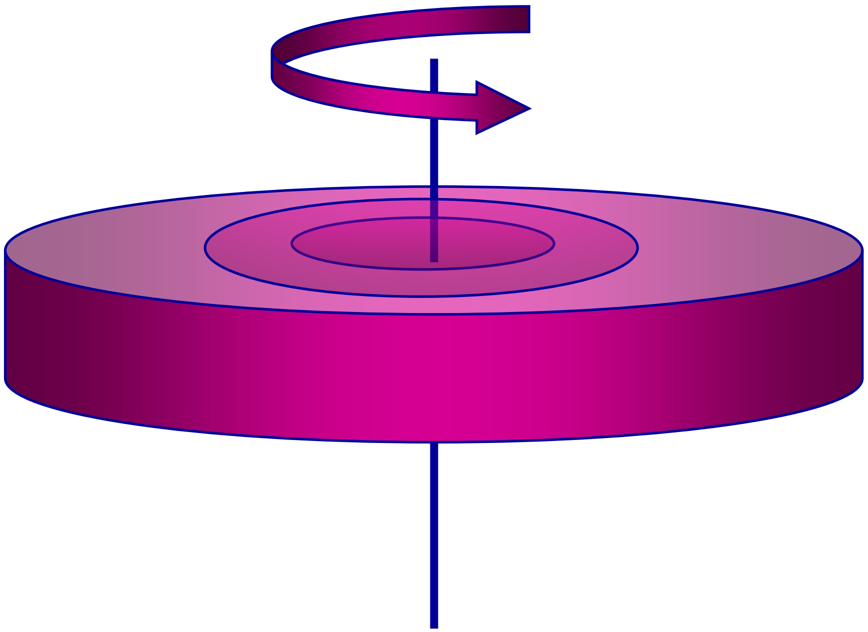
平动：刚体上任意一条直线在各个时刻的位置上始终保持彼此平行。



特点：刚体各点的运动完全相同。描述质点的物理量位移、速度和加速度均可用来描述刚体运动。

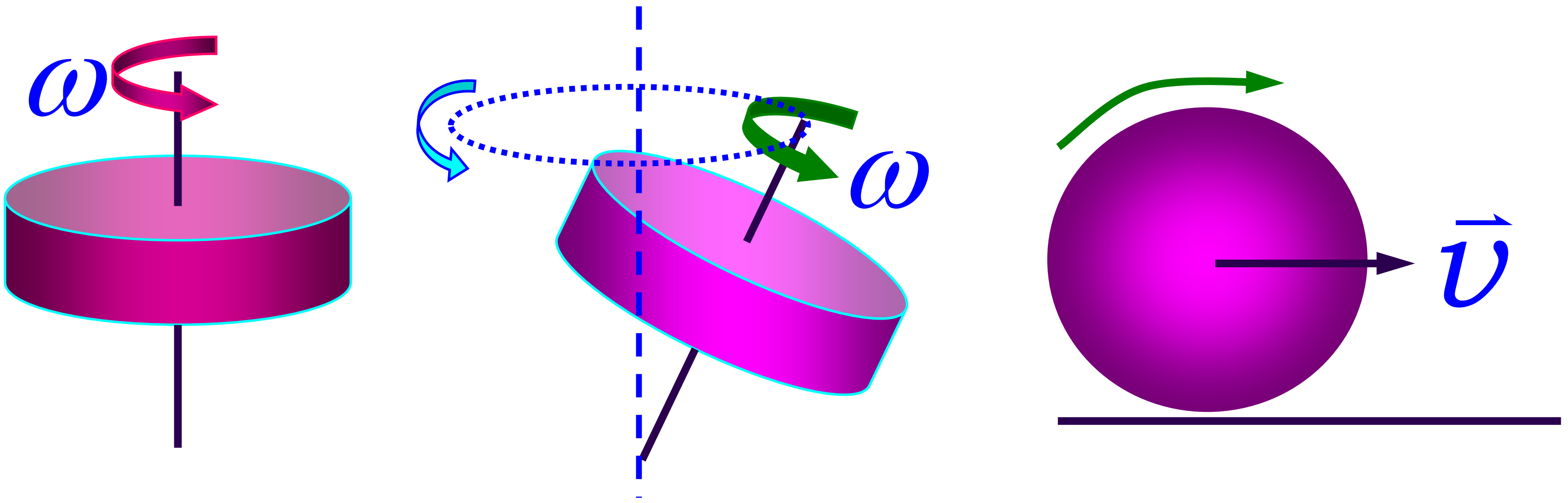
刚体内任意一点平动规律可代表整个刚体的平动规律。

转动： 各个质点都绕同一直线(转动轴)作圆周运动。



定轴转动: 转轴固定不动的转动。

质心轴： 通过质心的转动轴



定轴转动的特点：

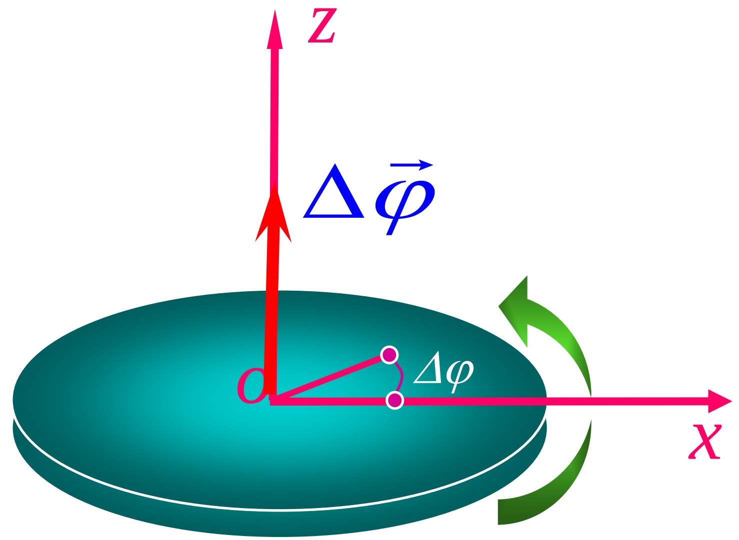
（1）轴上各点保持不动。

（2）轴外各点在同一时间间隔Δt，角位移$\Delta\varphi$完全相同。

描述定轴转动时可以引入新的物理量角位移、角速度和角加速度。

3.描述刚体转动的运动学量

角位移：在Δt，刚体上任一点相对于某一特定轴转过的角度$\Delta\varphi$。

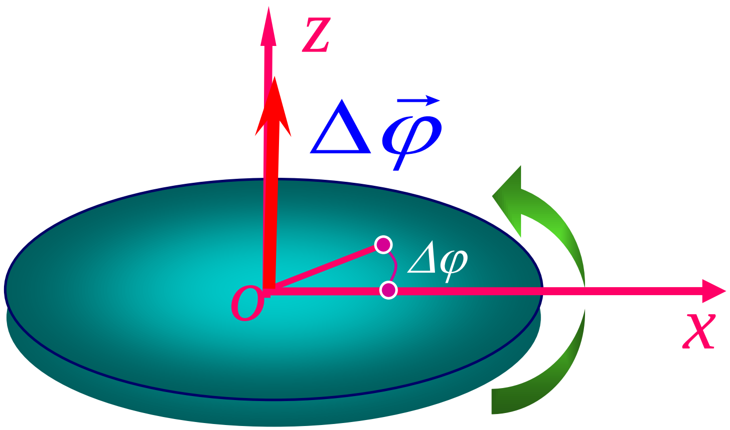


特征：

（1）角位移$\Delta\varphi$一定是相对于某一特定转轴而言。

（2）角位移既有大小，又有方向。其方向按右手螺旋确定，大小等于转角值。

角位移的特征：



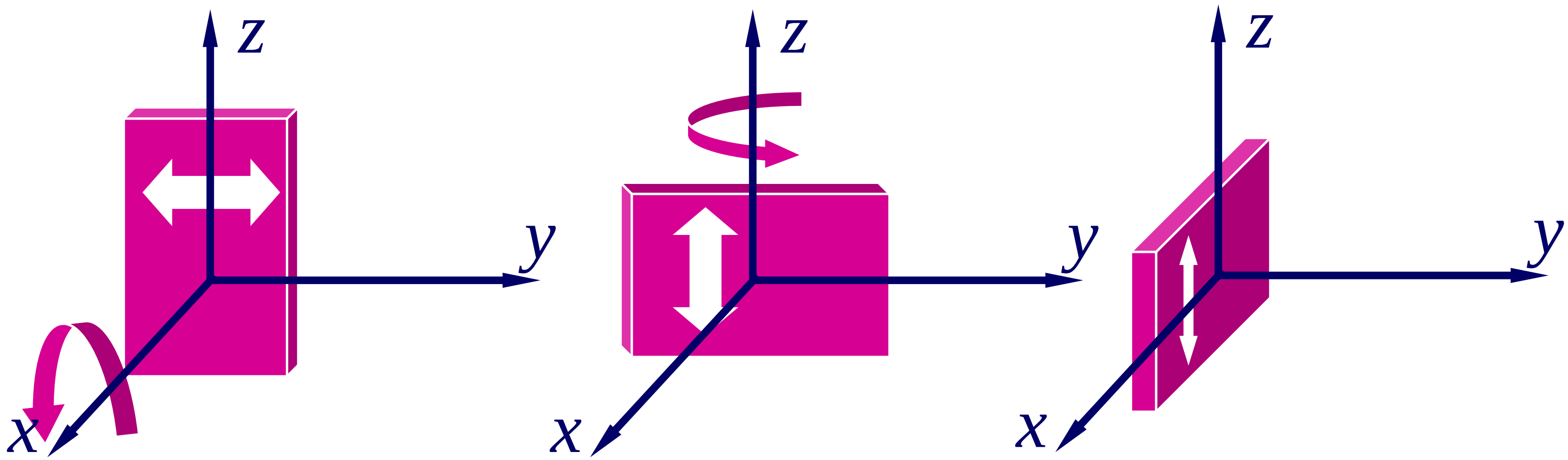
（1）角位移$\Delta\varphi$一定是相对于某一特定转轴而言。

（2）角位移既有大小，又有方向。其方向按右手螺旋确定，大小等于转角值。

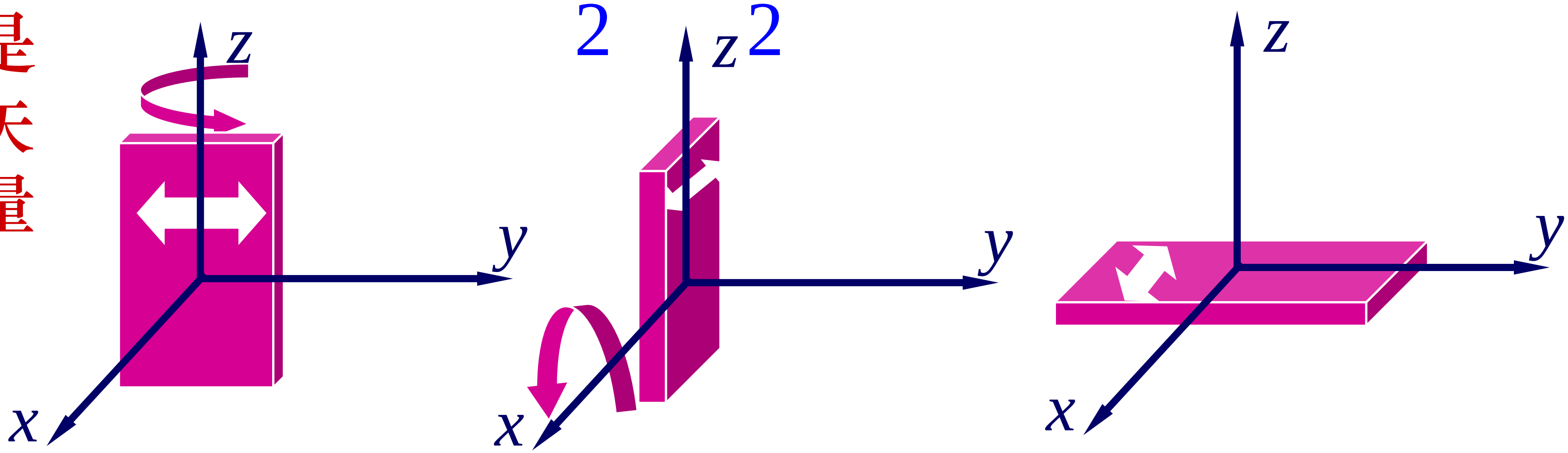
（3）角位移不是矢量，它的合成与转动的先后次序有关，不符合矢量的加法交换律。

（4）瞬时角位移dφ符合矢量运算法则，为矢量。

角位移不是矢量



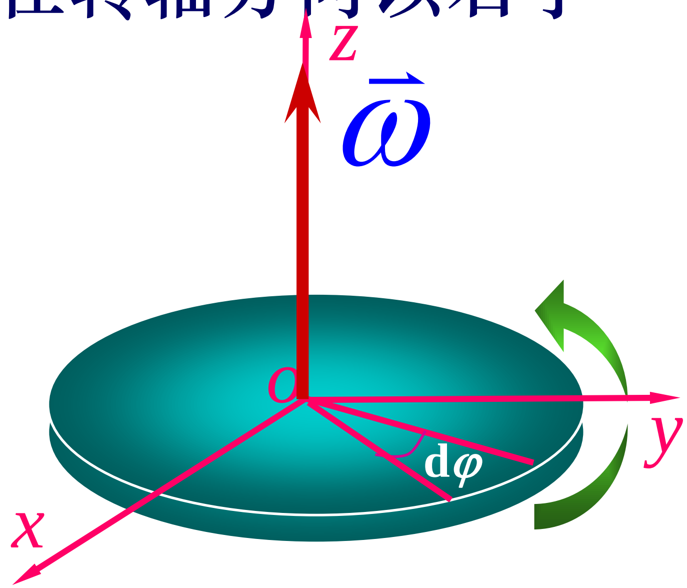
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{k} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\vec{k} + \frac{\pi}{2}\vec{i} \Rightarrow$$

角速度： 数值为在一时刻t，单位时间刚体上任一点角位移的大小；其方向在转轴方向以右手螺旋确定。

$$\vec{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$



特征：

（1）角速度是矢量，它反映了刚体瞬时角位移随时间变化的规律。

（2）定轴转动时，轴的方向已经给定角速度的方向可用正负表示，可以用标量运算法则。

角加速度： 在一时刻t，单位时间刚体上任一点角速度的变化量；其方向由矢量运算法则确定。

$$\boxed{\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}}$$

对于定轴转动有：

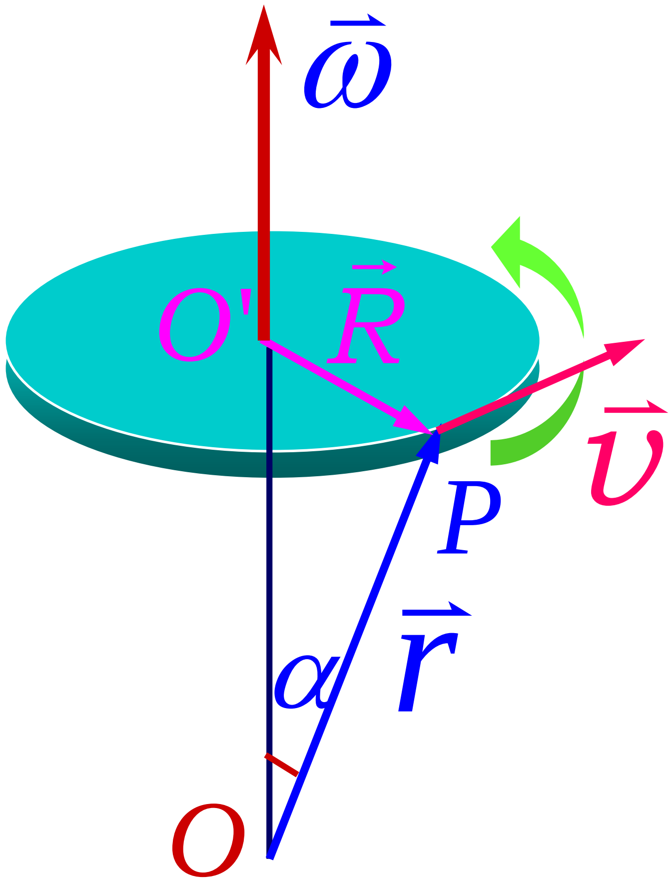
$$\boxed{\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}}$$

速度和角速度的关系:

以转轴上任一点O为参考点

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{\omega}\times\vec{R}}$$

$$\begin{aligned}v&=\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right|\\&=\omega r\sin\alpha\\&=\omega R\end{aligned}$$



加速度和角加速度、角速度的关系：

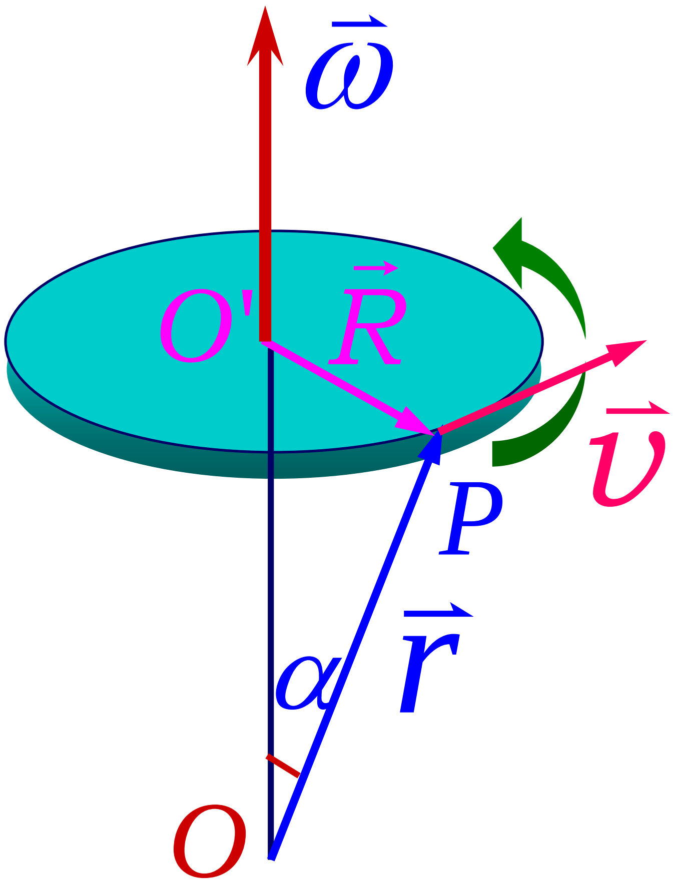
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}$$

$$=\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{\beta}\times\vec{r}$$

$$=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=R\beta\vec{e}_{\varphi}-R\omega^{2}\vec{e}_{R}$$



对于定轴转动有：

$$\begin{cases} \upsilon = \omega R \\ \omega = \dfrac{\upsilon}{R} \\ \beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\beta \\ a_n = -\dfrac{\upsilon^2}{R} = -\omega^2 R \end{cases}$$

定轴转动 $\Leftrightarrow$ 直线运动

$$\begin{cases} \text{角位移}\,\varphi \Leftrightarrow \text{位移}\,x \\ \text{角速度}\,\omega \Leftrightarrow \text{速度}\,\upsilon \\ \text{角加速度}\,\beta \Leftrightarrow \text{加速度}\,a \end{cases}$$

匀加速定轴转动 $\Leftrightarrow$ 匀加速直线运动

$$
\begin{cases}
\beta = \text{常数} \Leftrightarrow a = \text{常数} \\
\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \Leftrightarrow x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}a t^2 \\
\omega = \omega_0 + \beta t \Leftrightarrow v = v_0 + a t \\
\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\varphi \Leftrightarrow v^2 - v_0^2 = 2ax
\end{cases}
$$

§5.2 刚体动力学

问题提出：

刚体平动时作用力和运动之间的联系?

刚体一般运动时作用力和运动之间的联系?

- 1.刚体的平动运动定律
- 2.刚体的质心和质心运动定律
- 3. 刚体的重力势能

1.刚体的平动运动定律

刚体：各个质点间保持距离不变的质点组。

质量元Δm_i：刚体上取一质量元$\Delta m_i \rightarrow$视为一质点。

质量元外力F_i：刚体以外的物体施之于质量元Δm_i的作用力。

质量元内力f_i：刚体其他质量元施之于质量元Δm_i的作用力。

§ 5.2 刚体平动动力学

由牛顿定律有：$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$

对所有质元求和有：

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i$$

考虑到： $\sum_i \vec{f}_i = 0$， 且平动时有

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \cdots = \vec{a}_i = \vec{a}$$

对所有质元求和有：

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

平动运动定律：刚体平动时，其运动规律与一质量和刚体相同，受力等于刚体外力的矢量和的质点相同。

2. 刚体的质心与质心运动定律

对刚体的*任意运动*，由牛顿第二定律仍然有：

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i$$

刚体任意运动时，作用在刚体上的合外力等于各个质元的加速度与质量乘积的矢量和。

刚体*任意运动*时，每一质元的加速度都不相同，所以上式无法确定每一质元的加速度。但它可以确定刚体中一特殊点——质心的加速度。

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i$$

将上式写成直角坐标分量形式：

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = \sum_i \Delta m_i a_{ix} = \sum_i \Delta m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} \\ \sum_i F_{iy} = \sum_i \Delta m_i a_{iy} = \sum_i \Delta m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} \\ \sum_i F_{iz} = \sum_i \Delta m_i a_{iz} = \sum_i \Delta m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = m \dfrac{\mathrm{d}^2 \sum_i \dfrac{\Delta m_i x_i}{m}}{dt^2} \\ \sum_i F_{iy} = m \dfrac{\mathrm{d}^2 \sum_i \dfrac{\Delta m_i y_i}{m}}{dt^2} \\ \sum_i F_{iz} = m \dfrac{\mathrm{d}^2 \sum_i \dfrac{\Delta m_i z_i}{m}}{dt^2} \end{cases}$$

若令：

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum\limits_i \Delta m_i x_i}{m} \\ y_c = \dfrac{\sum\limits_i \Delta m_i y_i}{m} \\ z_c = \dfrac{\sum\limits_i \Delta m_i z_i}{m} \end{cases}$$

这三个值可以确刚定体上的一点

C（x_c，y_c，z_c）

刚体的质量中心

简称——质心

若为质量连续分布：$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int x\mathrm{d}m}{m} = \dfrac{\int \rho x\mathrm{d}V}{m} \\ y_c = \dfrac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \dfrac{\int \rho y\mathrm{d}V}{m} \\ z_c = \dfrac{\int z\mathrm{d}m}{m} = \dfrac{\int \rho z\mathrm{d}V}{m} \end{cases}$$

§ 5.2 刚体平动动力学

代入分量式可得：

$$
\begin{cases}
\sum\limits_i F_{ix} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\sum\limits_i \dfrac{\Delta m_i x_i}{m}}{dt^2} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x_c}{dt^2} = ma_{cx} \\
\sum\limits_i F_{iy} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\sum\limits_i \dfrac{\Delta m_i y_i}{m}}{dt^2} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y_c}{dt^2} = ma_{cy} \\
\sum\limits_i F_{iz} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\sum\limits_i \dfrac{\Delta m_i z_i}{m}}{dt^2} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 z_c}{dt^2} = ma_{cz}
\end{cases}
$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_c}$$

质心运动定律： 刚体任意运动时，作用在刚体上的合外力等于刚体的质量和质心加速度的乘积。

2. 刚体的重力势能

任一质量元：$\Delta E_{pi} = \Delta m_i g h_i$

整个刚体：

$$E_p = \sum_i \Delta E_{pi} = \sum_i \Delta m_i g h_i$$

$$= mg \frac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m}$$

$$= mgh_c$$

h_c为刚体质心的高度，刚体的重力势能取决于其质心的高度。