§ 4.5 线性方程组解的结构

已知线性方程组 $\begin{matrix} A_{m\times n}x=b \\ A_{m\times n}x=0 \end{matrix}$ 解的结论

(1) 若$(A\vdots b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(B\vdots d)$，则$Ax=b$与$Bx=d$同解；

(2) $Ax=0$有非零解（只有零解）$\Leftrightarrow rankA<n(rankA=n)$；

(3) $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow rankA=rank\left(A\vdots b\right)$；

无解 $\Leftrightarrow rankA\neq rank\left(A\vdots b\right)$；

(4) $Ax=b$有唯一解 $\Leftrightarrow rankA=rank\hat{A}=n$；

(5) $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow rankA=rank\hat{A}<n$；

称 x 为解向量···列向量表示。

一、齐次线性方程组$Ax = 0$

1. 解空间

命题 解向量集合$S=\{x \mid Ax=0, x\in R^n\}$是向量空间。

证 1° $0\in S \Rightarrow S$ 非空;

2° $\forall x, y\in S \Rightarrow A(x+y)=Ax+Ay=0 \Rightarrow x+y\in S$

3° $\forall x\in S, k\in R \Rightarrow A(kx)=kAx=0 \Rightarrow kx\in S$

$\therefore S$ 是向量空间. **证毕**

$\Rightarrow$齐次线性方程组的若干个解向量的任意线性组合仍是此线性方程组的解向量。

定义 称解向量集 S 是 $Ax = 0$ 的**解空间**;
称 S 的基 是 $Ax = 0$ **基础解系**。

2. 解空间的维数 dim$S$

(1)当$rankA=r=n$时,只有零解，$S=\{0\}$, 所以dim $S=0$;

(2)当$rank\ A=r<n$ 时，不妨设

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E_r & B_{r,n-r} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = H$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \cdots & x_n \end{array} \\
H = & \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1,n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{r,n} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (r) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

…行最简形

$rankA=r$

通解为:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}k_1 - b_{1,r+2}k_2 - \cdots - b_{1,n}k_{n-r} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}k_1 - b_{r,r+2}k_2 - \cdots - b_{r,n}k_{n-r} \\ x_{r+1} = 1k_1 + 0\cdot k_2 + \cdots + 0\cdot k_{n-r} \\ x_{r+2} = 0k_1 + 1\cdot k_2 + \cdots + 0\cdot k_{n-r} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = 0k_1 + 0\cdot k_2 + \cdots + 1\cdot k_{n-r} \end{cases}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{n-r})^{\mathrm{T}}$依次取如下的$n-r$个向量值:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\ \vdots\\ -b_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\ \vdots\\ -b_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots\cdots,\quad \xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n}\\ \vdots\\ -b_{r,n}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$线性无关

$\Rightarrow$ 通解的向量表示：$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 有性质：

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

(2) $\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}$，即任一解向量 $\boldsymbol{x}$，可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示。

命题： 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ r=rank\boldsymbol{A}$, 则

（1） $\dim \boldsymbol{S}=n-r$(=未知数个数−$\boldsymbol{A}$秩);

（2） $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是解空间$S$的一个基，即为基础解系；

（3） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$,

$(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数）.

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -2 & 6 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rank\boldsymbol{A}=2,\qquad \dim \boldsymbol{S}=4-2=2$$

同解方程组 $\begin{cases}x_1=-x_3-x_4\\ x_2=x_3-2x_4\end{cases}$

分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，求得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为： $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

写出通解的方法

$$\begin{cases} x_1 = -k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 - 2k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = \qquad k_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + k_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

(k_1, k_2为任意常数)

二. 非齐次线性方程组

$Ax = b\ (b \neq 0)$，对应齐次方程组$Ax = 0$。

设$Ax = b$有解($\Leftrightarrow rankA = rank(A\vdots b) = r$)

设η^*是非齐次方程组的某个解向量(特解)，η 是任一解向量

$$\Rightarrow A(\eta - \eta^*) = A\eta - A\eta^* = b - b = 0$$

$\therefore \eta - \eta^*$是 $Ax = 0$ 的解向量.

设 $Ax=0$的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$,则$\exists k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,

使 $$\eta-\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$\Leftrightarrow$ $$\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

反之，考察形如 $\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 的向量，

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数，

$$\because A(\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})$$

$$=A\eta^*+A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})=b+0=b.$$

$\therefore \eta \triangleq \eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是解向量

$\therefore Ax=b$ 的通解可表为:

$$\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\quad k_j\in R(j=1,2,\cdots,n-r)$$

=非齐次特解+齐次通解

注：

(1) 非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

设 ξ 是齐次解, η 是非齐次解,则 $\xi+\eta$ 是非齐次解. ……(对)

(2) 设 η_1,η_2 都是非齐次解,则 $\eta_1-\eta_2$ 是齐次解. ……………(对)

(3) 设 η_1,η_2 都是非齐次解,则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 是非齐次解. ……(错)

(4) 设 η_1,η_2 都是非齐次解,则当且仅当 $k_1+k_2=1$ 时,

$k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 是非齐次解. ……………………………………(对)

(5) 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_\lambda$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 的解,

则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_\lambda\eta_\lambda$ 是非齐次解. ……………………(错)

(6) 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_\lambda$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 的解,

则当且仅当 $k_1+k_2+\cdots+k_\lambda=1$ 时,

$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_\lambda\eta_\lambda$ 是非齐次解. ……………………(对)

(7) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解向量集是向量空间. ………………(错)

例2 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\1&-1&2&-1\\4&-2&6&0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, 求$Ax=b$的通解.

解

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&3&-1\\1&-1&2&-1&1\\4&-2&6&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&1&0\\0&1&-1&2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow rankA=rank\hat{A}=2<4, \therefore \dim S=2.$$

同解方程组 $\begin{cases}x_1=0-x_3-x_4\\x_2=-1+x_3-2x_4\end{cases}$

所以它的一个特解为$\eta^*=(0\ -1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$

又由例1知对应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$非齐次方程组的通解为

$$\eta=\eta^{*}+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(\forall k_1,k_2\in\boldsymbol{R})$

例3 已知四元非齐次线性方程组系数矩阵秩为3，又

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的三个解向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix}$.求该方程组的通解.

解法步骤:

(1)求齐次方程基础解系;

(2)求非齐次特解;

(3)写出通解.

解（1）$\because$ 未知数个数 $n=4$, rank$A=3$, $\therefore \boldsymbol{A}x=\mathbf{0}$ 解空间 dim $\boldsymbol{S}=4-3=1$, 基础解系只含一个非零齐次解向量.

$$\because \quad \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)]=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{是} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{的基础解系}$$

（2） 又 $\because \quad \boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}\right)=\dfrac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}}{2}=\boldsymbol{b}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\eta}^*=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{是} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{的一个特解}$$

(3) 于是可得$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^{*}+k\xi=\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\right)^{\mathrm{T}}+k\left(0\ 1\ -1\ -1\right)^{\mathrm{T}}\quad (k\in\boldsymbol{R})$$

例4 设A是$m\times n$矩阵，$rankA=n-2$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$的解向量, η_0,η_1,η_2线性无关，证明：$\eta_1-\eta_0$，$\eta_2-\eta_0$ 是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系。

证明 (1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数

$$\dim \boldsymbol{S}=n-(n-2)=2,$$

$\therefore$基础解系由二个线性无关的解向量组成.

(2) $\because\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是非齐解，$\therefore\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0$ 是齐次解;

(3) 设 $k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0)=\boldsymbol{0}$

$$\Leftrightarrow -\left(k_1+k_2\right)\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 线性无关 $\Rightarrow$ $k_1=k_2=0$

$\therefore \boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关;

$\therefore \boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

练习 **(2002 数一 九 6分)**

已知四阶方阵$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\right)$,$\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4$均为四维列向量, 其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

- 下周二下午六点之前交第四章第二次作业。