线性代数

第 四 章

向量组的线性相关性

向量是线性代数的重点内容之一，也是难点，对逻辑推理有较高的要求.

本章从研究向量的线性关系(线性组合，线性相关、无关)出发，然后讨论向量组含最多的线性无关的向量的个数，即引出向量组的秩和极大无关组，进而扩展到向量空间的基、维数、坐标等. 最后，应用向量空间的理论研究线性方程组解的结构.

本章特点：概念多，定理多，结论多，证明多

§ 4.1　向量及其运算

一、三维几何向量的坐标表示

设三个坐标轴上的基本单位向量为

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

则任一三维向量可表示为

$$\vec{a} = \underbrace{(a_x, a_y, a_z)}_{\text{坐标}} = \underbrace{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}_{\text{用基本向量表示}}$$

运算: (1) 加法: $(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

(2) 数乘: $k(a_x, a_y, a_z) = (ka_x, ka_y, ka_z)$

(3) 数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ ---------- 向量内积及与模,夹角关系

$$= (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$ ---------- 矩阵乘积表示

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$ -------- 可用作内积定义

(4) 模： $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ -------- 模的定义

三维向量全体构成的集合,称为**三维向量空间**.记做 R_3

向　　量
$(n \le 3)$

解析几何

线性代数

既有大小又有方向的量

有次序的实数组成的数组

坐

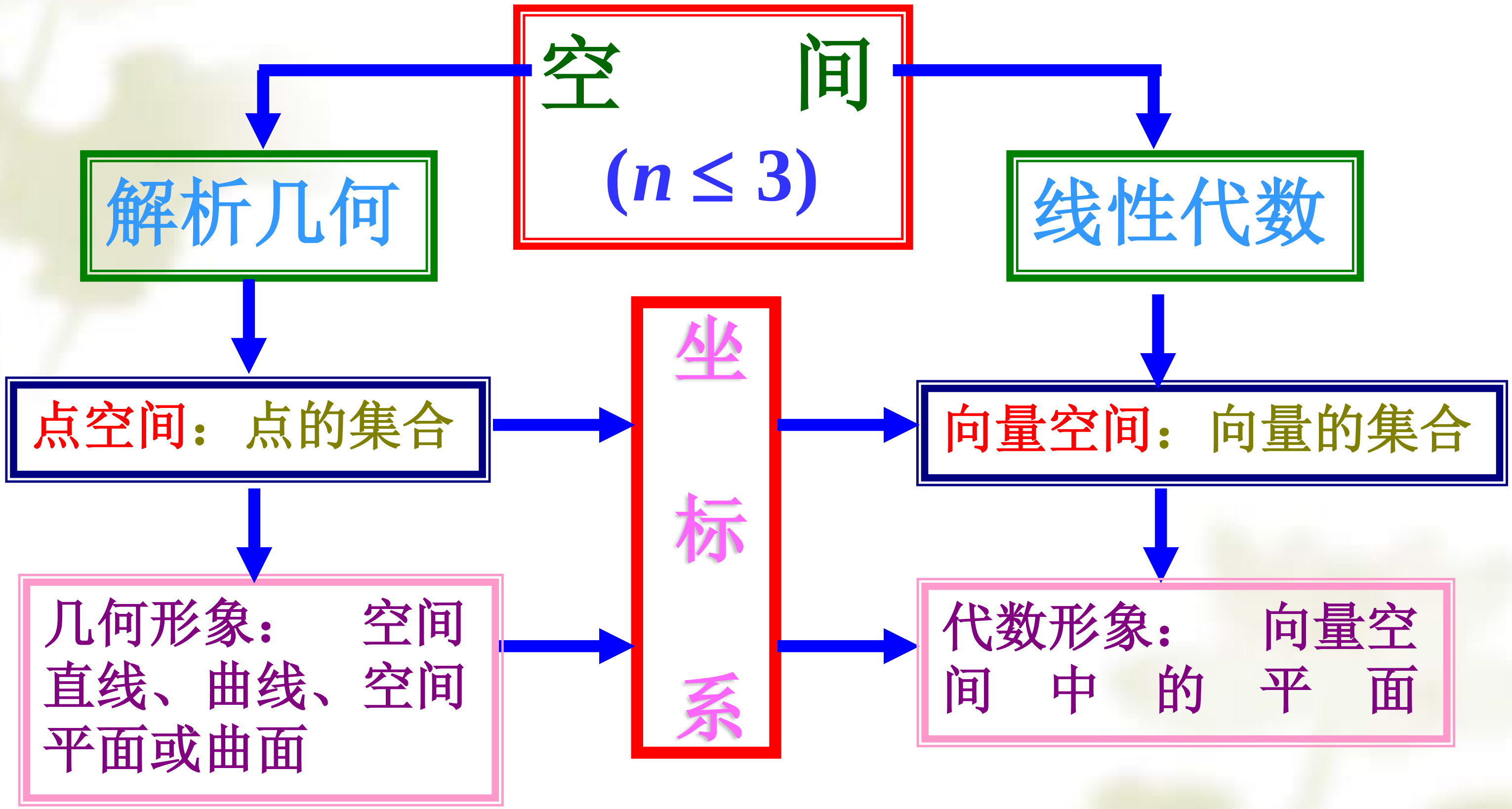
标

系

几何形象：　可随意平行移动的有向线段

代数形象：　向量的坐标表示式

$$a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$



$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=d\} \qquad \{r=(x,y,z)^T \mid ax+by+cz=d\}$$

$$P(x,y,z) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} r=(x,y,z)^T$$

二、n 维向量的定义

定义4.1 n个有顺序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为**$n$维向量.**

其中数 a_j称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的第j个分量(或坐标).向量一般用小写字母表示.

向量的分量都是实数时称为**实向量**，分量中有复数时称为**复向量.**

例如 $(1,2,3,\cdots,n)$ $\longrightarrow$ n维实向量

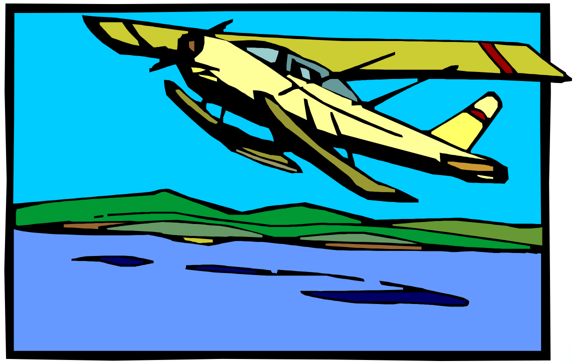
$(1+2i, 2+3i, \cdots, n+(n+1)i)$ $\longrightarrow$ n维复向量

第1个分量

第2个分量

第n个分量

n 维向量的实际意义



确定飞机的状态，需要以下6个参数：

机身的仰角 φ $\quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 ψ $\quad (-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 θ $\quad (0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数P(x,y,z)

所以，确定飞机的状态，需用6维向量

$$a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

$n > 3$时，n 维向量没有直观的几何形象.

例如 (1) $n-1$次代数多项式

$$f(t)=a_1+a_2t+\cdots+a_nt^{n-1}\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$ 系数向量

(2) 线性方程组$Ax=b$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

增广矩阵

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$$

其中

$\boldsymbol{\beta}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1)$ —— 第1个方程

$\boldsymbol{\beta}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, b_2)$ —— 第2个方程

$\vdots$

$\boldsymbol{\beta}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_m)$ —— 第***m***个方程

未知向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

右端向量

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

三、两向量相等

设向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_k) \qquad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$$

则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow k=l$ 且 $a_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$

四、零向量

分量都是0的向量称为零向量，记做 $\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0).$$

五、向量的线性运算

1. 加法 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \qquad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

同维

则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

2. 数乘 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

3. 负向量 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

4. 减法 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$

5. 向量线性运算的运算规律

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$都是**$n$**维向量，**$k,l$**为实数

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

六、行向量、列向量、转置

行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　　列向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

转置 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}$　　$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}$

注意：行、列向量在代数上表示不同的向量，在几何上表示同一个向量

七、向量内积

1. **定义**：设有n维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，称

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积.

易见 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

注意：有的书上也记做 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 或 (α,β).

2. 运算律

(1) 对称性 $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$

(2) 齐次性 $[k\alpha,\beta]=[\alpha,k\beta]=k[\alpha,\beta]$

(3) 分配性 $[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$

(4) 非负性 $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow [\alpha, \alpha] > 0 \quad \alpha = 0 \Leftrightarrow [\alpha, \alpha] = 0$

(5) 不等式 $[\alpha, \beta]^2 \leq [\alpha, \alpha] \cdot [\beta, \beta]$

证 对任意实数t，由性质(4)有

$$[\alpha + t\beta, \alpha + t\beta] = [\alpha, \alpha] + 2t[\alpha, \beta] + [\beta, \beta]t^2 \geq 0$$

则

$$\Delta = 4[\alpha, \beta]^2 - 4[\alpha, \alpha] \cdot [\beta, \beta] \leq 0$$

八、向量范数（模，长度）

1. **定义**：任意n维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的范数定义为：

$$\|\alpha\| = \sqrt{[\alpha, \alpha]} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

注：此时(5)之不等式可写为 $[\alpha, \beta]^2 \leq \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$,即

$$|[\alpha, \beta]| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

2. 性质

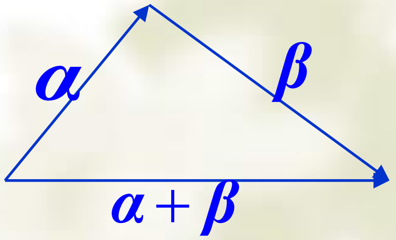
(1) 非负性 $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \|\alpha\| > 0$ 且 $\alpha = 0 \Leftrightarrow \|\alpha\| = 0$

(2) 正齐次性 $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$

(3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

证
$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2 &= [\alpha+\beta, \alpha+\beta] = [\alpha, \alpha] + 2[\alpha, \beta] + [\beta, \beta] \\ &\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| + \|\beta\|^2 \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2\end{aligned}$$

几何解释：三角形两边之和大于第三边



3. 夹角 设α与β是n维非零向量，则其夹角定义为

$$\varphi=\arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$$

$$=\arccos\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$$

$$(0\le\varphi\le\pi)$$

4. 正交

若$[\alpha,\beta]=0$，则称向量α与β正交，记做 $\alpha\perp\beta$

$$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow[\alpha,\beta]=0\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

5. α是单位向量 $\Leftrightarrow \|\alpha\| = 1$

- 非零向量单位化

设 $\alpha \neq \boldsymbol{0}$，单位化向量

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

则有 $\|\alpha'\| = 1$且 α'与 α同向.