

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

问题提出：

刚体绕**定轴转动**时作用力和运动之间的联系？

- 1. 刚体的转动定律
- 2. 力矩
- 3. 转动惯量及其计算

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

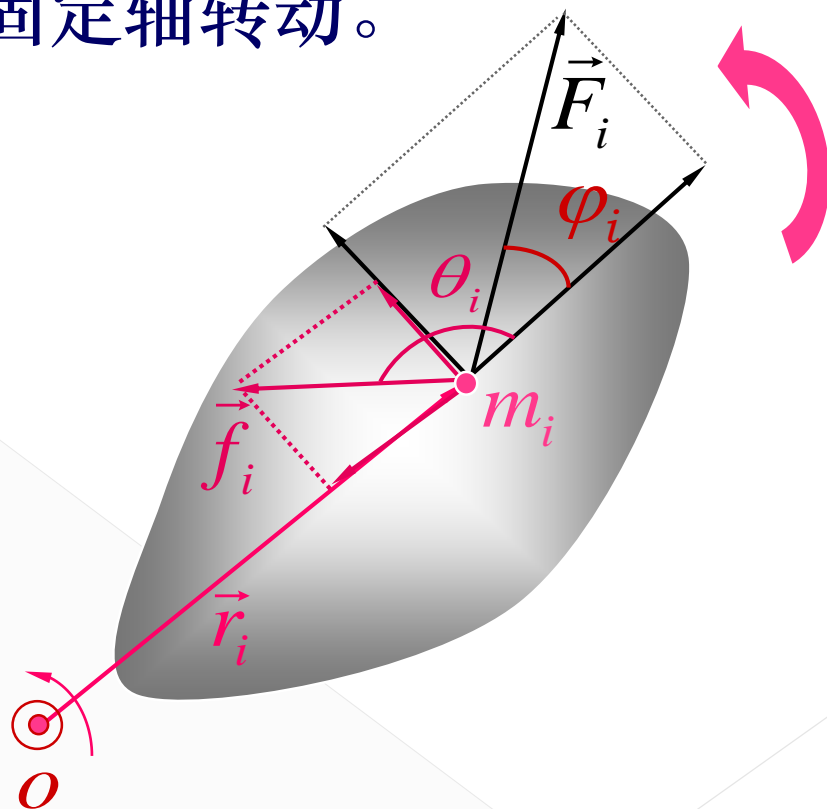
### 1. 转动定律

刚体绕过  $O$  点与图面垂直的固定轴转动。

$m_i$  : 刚体中任一质量元;

$\vec{F}_i$  : 该质量元所受合外力;

$\vec{f}_i$  : 该质量元所受合内力;



仅考虑受力处于与轴垂直的平面?

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

由牛顿第二定律：
$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

写成分量形式：

$$\begin{cases} f_i \cos \theta_i + F_i \cos \varphi_i = m_i a_{in} = m_i r_i \omega^2 \cdots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_i \sin \theta_i + F_i \sin \varphi_i = m_i a_{it} = m_i r_i \beta \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

对 (2) 式乘以  $r_i$ ：

$$f_i r_i \sin \theta_i + F_i r_i \sin \varphi_i = m_i a_{it} = m_i r_i^2 \beta$$

对  $i$  求和：

$$\sum_i f_i r_i \sin \theta_i + \sum_i F_i r_i \sin \varphi_i = \sum_i m_i r_i^2 \beta$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

$$\sum_i f_i r_i \sin \theta_i + \sum_i F_i r_i \sin \varphi_i = \sum_i m_i r_i^2 \beta$$

由内力的特性知：

$$\sum_i f_i r_i \sin \theta_i = 0$$

故有：

$$\sum_i F_i r_i \sin \varphi_i = \beta \sum_i m_i r_i^2$$

令：  $M_i = F_i r_i \sin \varphi_i$  称为外力  $F_i$  对转轴的力矩；

$I = \sum_i m_i r_i^2$  称为刚体对转轴的转动惯量；

$$\sum_i M_i = I\beta$$

### § 5.3 刚体绕定轴的转动

$$\sum_i M_i = I\beta$$

以  $M = \sum_i M_i$  表示合外力矩则有：

$$M = I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

定轴转动定律：刚体绕定轴转动时，作用在刚体上对与该轴的合外力矩等于刚体对与该轴的转动惯量和角加速度的乘积。

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

以矢量形式表示：

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

其中合力矩：

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

转动惯量：

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

### ➤ 讨论

$$M = J\beta$$

- 刚体定轴转动定律中的 $M$ 是作用在刚体上的合外力矩；
- 刚体定轴转动定律是力矩的瞬时作用规律，也可以写成矢量关系式，即  $\vec{M} = J\vec{\beta}$
- 刚体定轴转动定律中的 $M$ 、转动惯量  $J$ 和角加速度 $\beta$ 三个物理量都是相对于同一转轴而言的；
- 刚体定轴转动定律是刚体定轴转动动力学的基本方程，如同质点力学中的  $\vec{F} = m\vec{\ddot{a}}$

力矩是使刚体改变转动状态的原因，是使刚体转动产生角加速度的原因。

- 刚体定轴转动定律仅适用于惯性系。

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

### 2. 力矩

**定义：**力相对于某转轴的力矩，等于力的作用点相对于轴的矢径和作用力的叉乘。

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

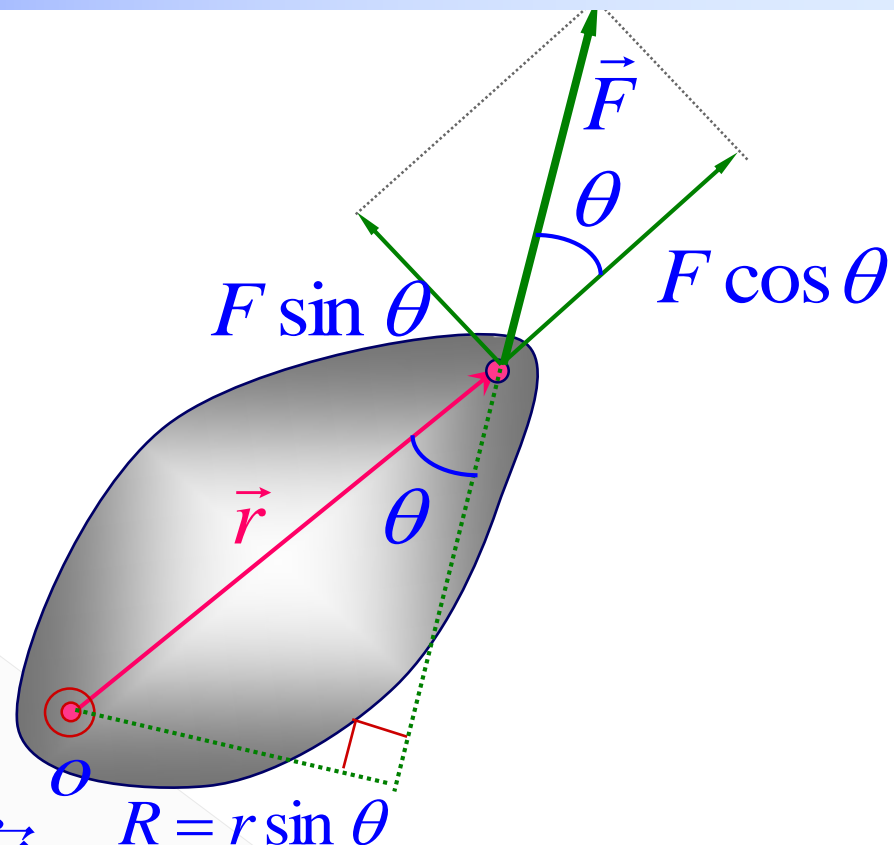
大小： $M = rF \sin \theta = FR$

方向：由 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 用右手螺旋确定。

单位： $\text{N} \cdot \text{m}$

量纲： $[M] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$

**特性：**力矩是矢量。力矩的和  
不等于合力的力矩。每个力的  
力矩和力的作用点有关。





## § 5.3 刚体绕定轴的转动

力的**大小**、力的**方向**和力的**作用线**相对于转轴的位置是决定刚体转动效果的重要因素。

◆ 若刚体所受力  $\vec{F}$  在转动平面内

力臂:  $d = r \sin \varphi$

力  $\vec{F}$  对转轴  $z$  的力矩:  $M_z = \pm Fd = \pm Fr \sin \varphi$

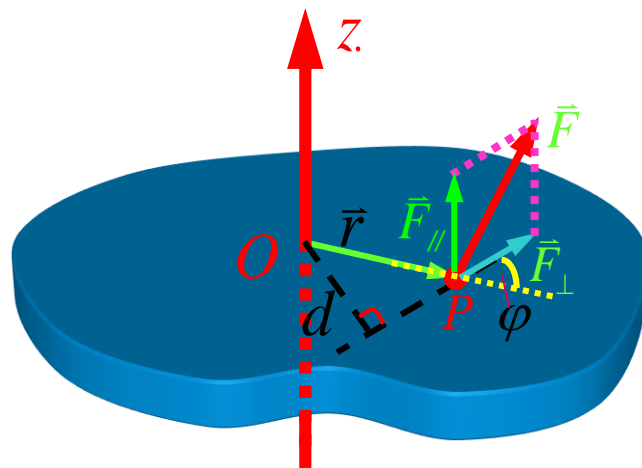
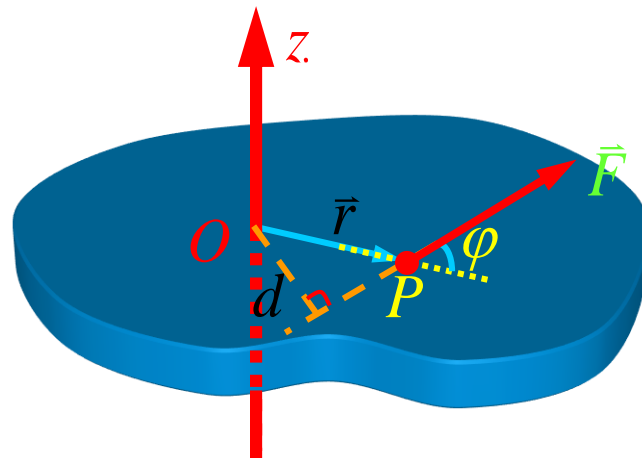
◆ 若刚体所受力  $\vec{F}$  不在转动平面内

平行于转轴  $\vec{F}_{\parallel}$  分量不能使刚体发生转动

在定轴转动中, 只有  $\vec{F}_{\perp}$  起作用

力  $\vec{F}_{\perp}$  对转轴  $z$  的力矩

$$M_z = \pm F_{\perp} d = \pm F_{\perp} r \sin \varphi$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

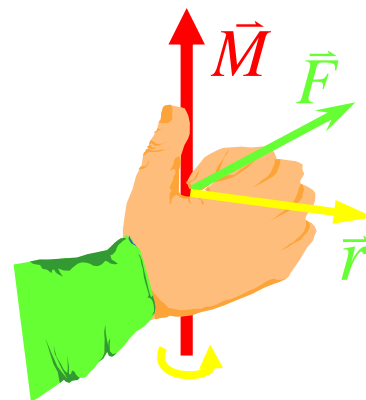
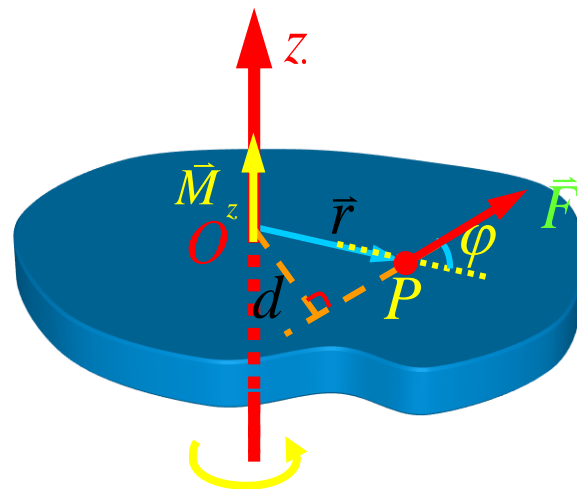
- 对于刚体的定轴转动，力矩 $M_z$ 可看成是**代数量**。力矩的正负由右手螺旋法则确定。

从 $z$ 轴正端向负端看，若力 $F$ 使刚体沿逆时针方向转动，则力矩 $M_z$ 为正，反之为 $M_z$ 为负。

- 几个作用力同时作用在一个绕固定轴转动的刚体上时，合力矩等于这几个力各自的**力矩的代数和**。

- 对于刚体的定轴转动，力矩 $M_z$ 也可认为是**矢量**。即  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

**方向：**满足右手螺旋法则。



### 3. 转动惯量及其计算

定义：

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

单位： $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

量纲： $[M] = \text{ML}^2$

特性：

- (1) 转动惯量是标量，它是反映刚体转动惯性的物理量。
- (2) 它是相对于某一特定的转轴而言的，转轴不同转动惯量不同。
- (3) 它与刚体的质量和质量的分布有关。

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

### 转动惯量的计算

(1) 垂直细棒通过质心轴的转动惯量。棒长 $l$ ，总质量 $m$ 。

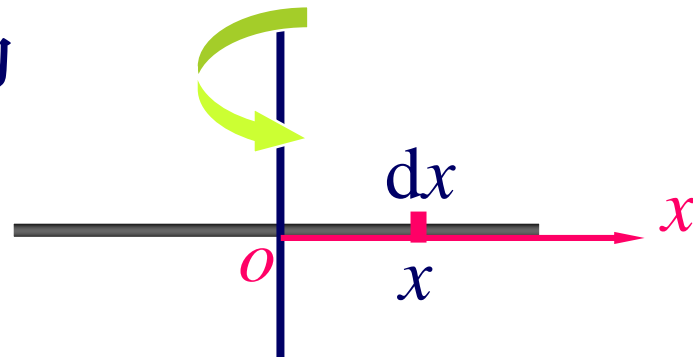
设棒的线密度为： $\eta = \frac{m}{l}$

$$I = \int x^2 dm$$

$$\text{则有： } I = \int x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \eta dx$$

$$= 2\eta \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{12} \eta l^3 = \frac{1}{12} ml^2$$



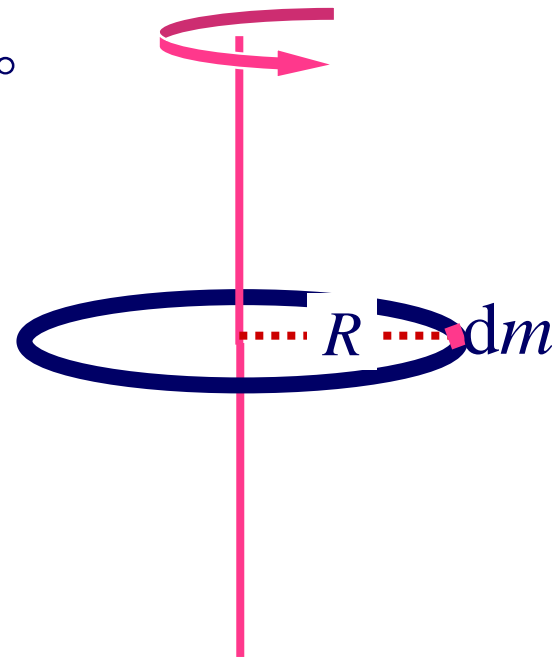
## § 5.4 刚体绕定轴的转动

(2) 均匀薄圆环绕中心垂直转轴  
轴的转动惯量。半径 $R$ ，总质量 $m$ 。

$$I = \int r^2 dm$$

$$= \int R^2 dm = R^2 \oint dm$$

$$= R^2 m$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

(3) 绕中心垂直转轴的空心圆柱体的转动惯量。

内径 $R_1$ , 外径 $R_2$ , 高 $l$ , 总质量 $m$ 。

设其质量密度为:

$$\rho = \frac{m}{\pi l (R_2^2 - R_1^2)}$$

取半径为 $r$ 处,

厚度为 $dr$ 薄壳为质量元:

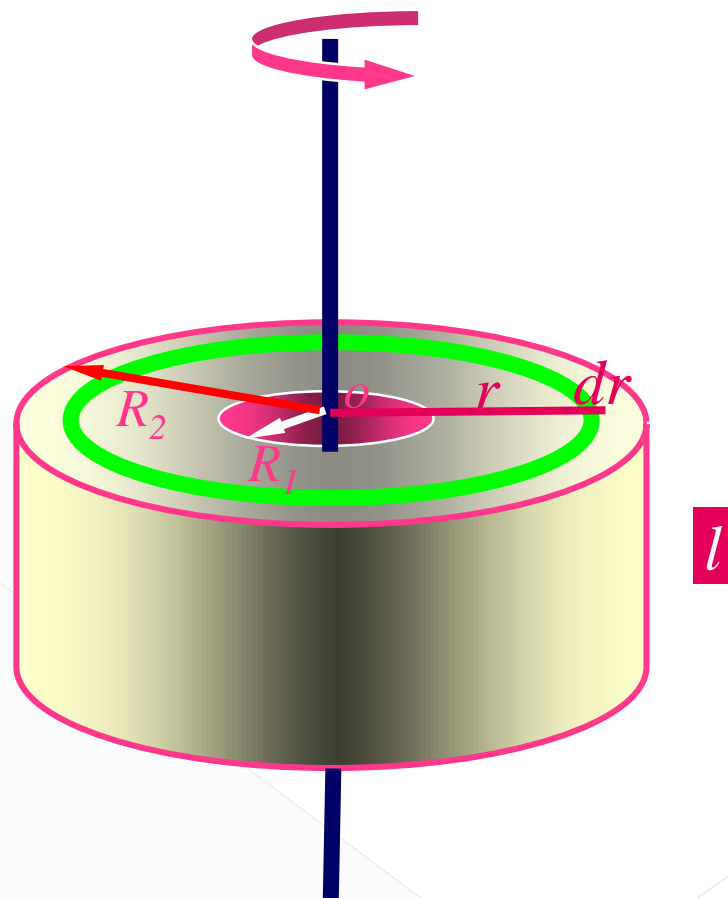
$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r l dr$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$= 2\pi l \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi l \rho}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

该式同样适用于薄圆盘



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

(4) 绕通过质心转轴的均匀球体的转动惯量。半径为 $R$ ，总质量 $m$ 。

方法1： 设其质量密度为： $\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$

取距球心为 $x$ 处，厚度为 $dx$ 半径为 $r$ 的薄圆盘为质量元：

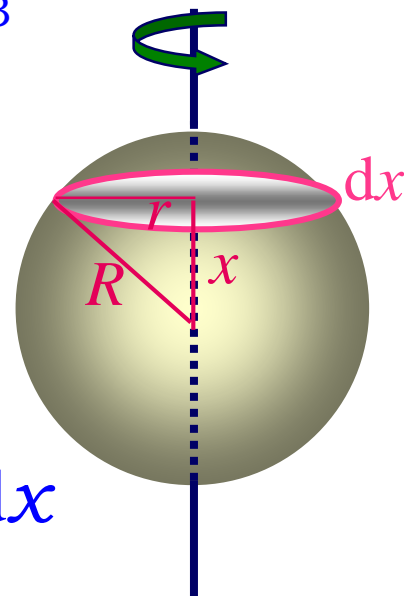
圆盘半径： $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

体积元： $dV = \pi r^2 dx = \pi (R^2 - x^2) dx$

质量元： $dm = \rho dV$

圆盘的转动惯量：

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 - x^2)^2 dx$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

圆盘的转动惯量:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 - x^2)^2 dx$$

故球的转动惯量为:

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_{-R}^R \frac{\pi \rho}{2} dx \\ &= \pi \rho \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{8\pi \rho}{15} R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

### 方法2:

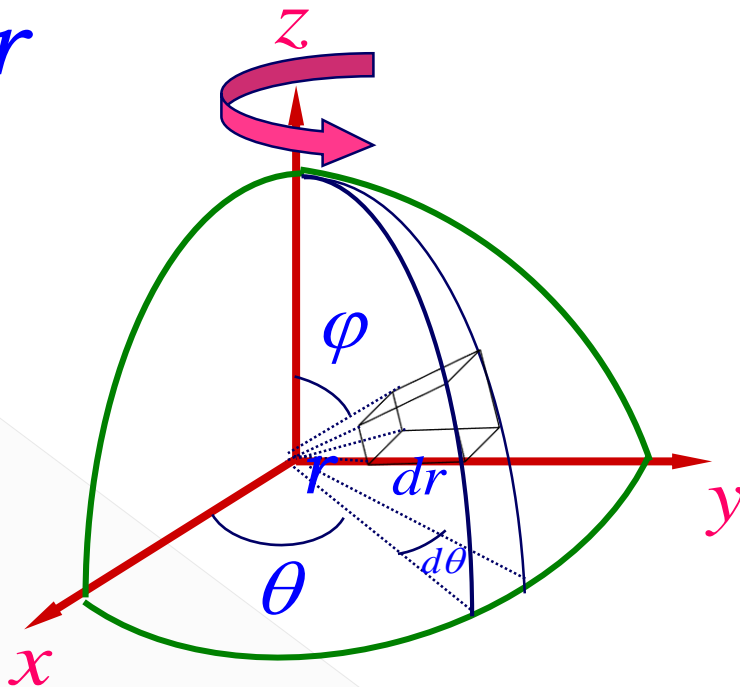
在球极坐标中取 $d\theta$ ,  $d\varphi$ ,  $dr$ 确定的六面体体积元:

$$dV = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$\text{质量元: } dm = \rho dV$$

故球的转动惯量为:

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 \sin^2 \varphi dm \\ &= \iiint \rho r^4 \sin^3 \varphi d\varphi d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= \frac{8\pi\rho}{15} R^5 = \frac{2}{5} mR^2 \end{aligned}$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

一般计算步骤：

质量密度为：  $\rho = \frac{m}{V}$

取体积元：  $dV$

则质量元：  $dm = \rho dV$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

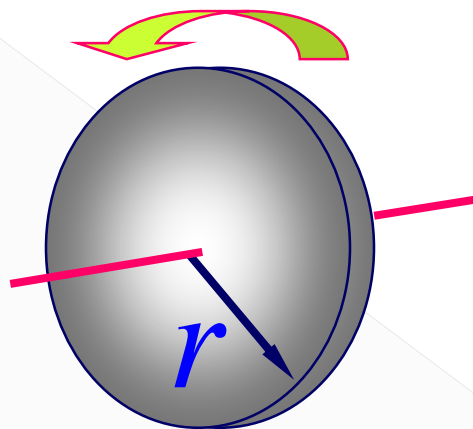
直角坐标系：  $I = \rho \iiint_V r^2(x, y, z) dx dy dz$

球极坐标系：  $I = \rho \iiint_V r^4 \sin^3 \varphi d\varphi d\theta dr$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

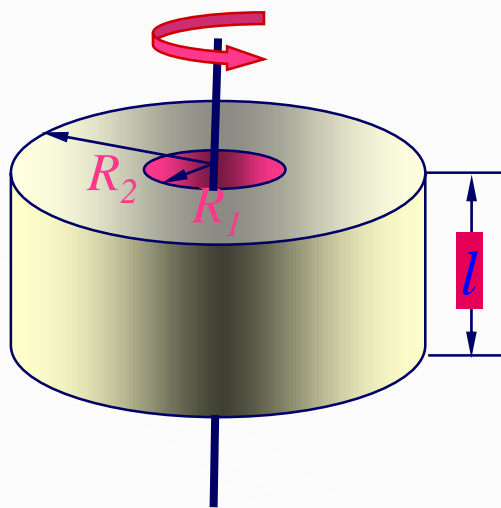
### 常见刚体的转动惯量

薄圆盘



$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

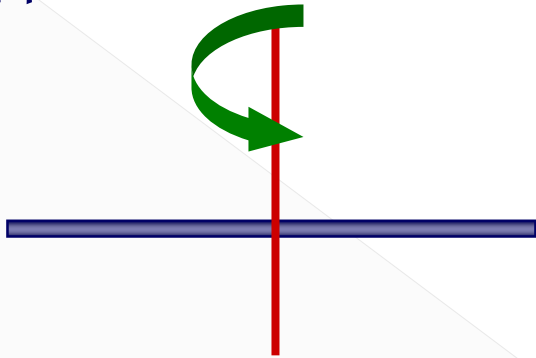
圆柱



$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

细棒



$$I = \frac{1}{12} ml^2$$

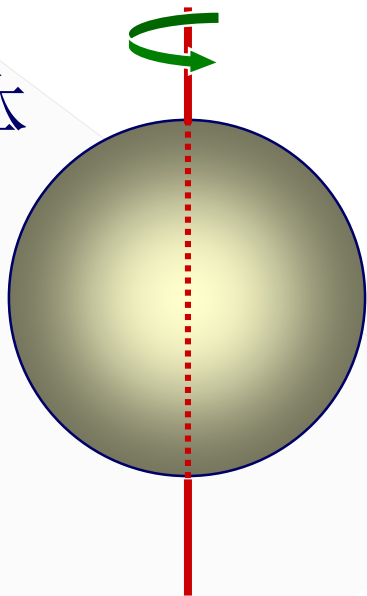
细棒



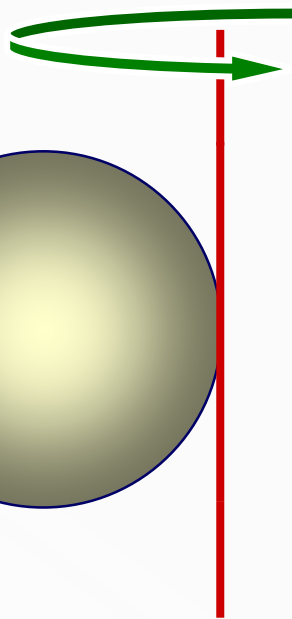
$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

球体



$$I = \frac{2}{5}mR^2$$



$$I = \frac{7}{5}mR^2$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

**例1.**求半径为 $R$ 质量为 $m$ 的均匀圆环,对于沿直径转轴的转动惯量

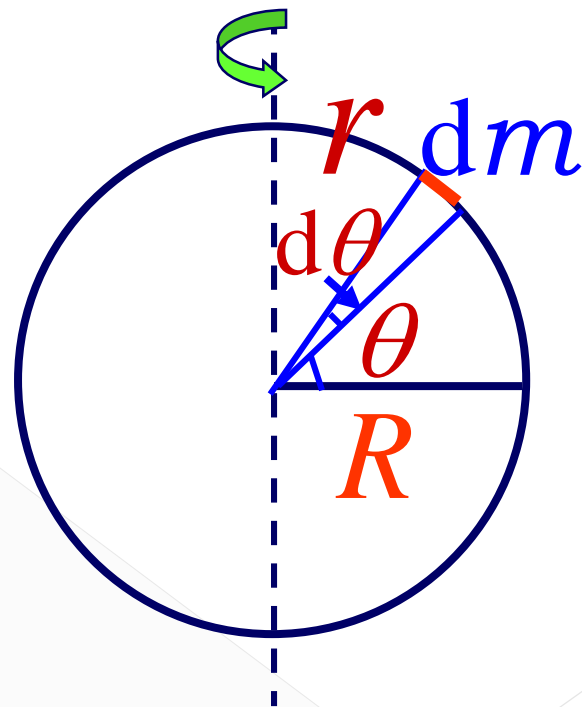
**解:** 圆环的质量密度为

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

在环上取长度元 $dS$ , 质量元 $dm$ ,  
 $dm$ 距转轴 $r$

$$dm = \lambda dS = \lambda R d\theta$$

$$r = R \cos \theta$$

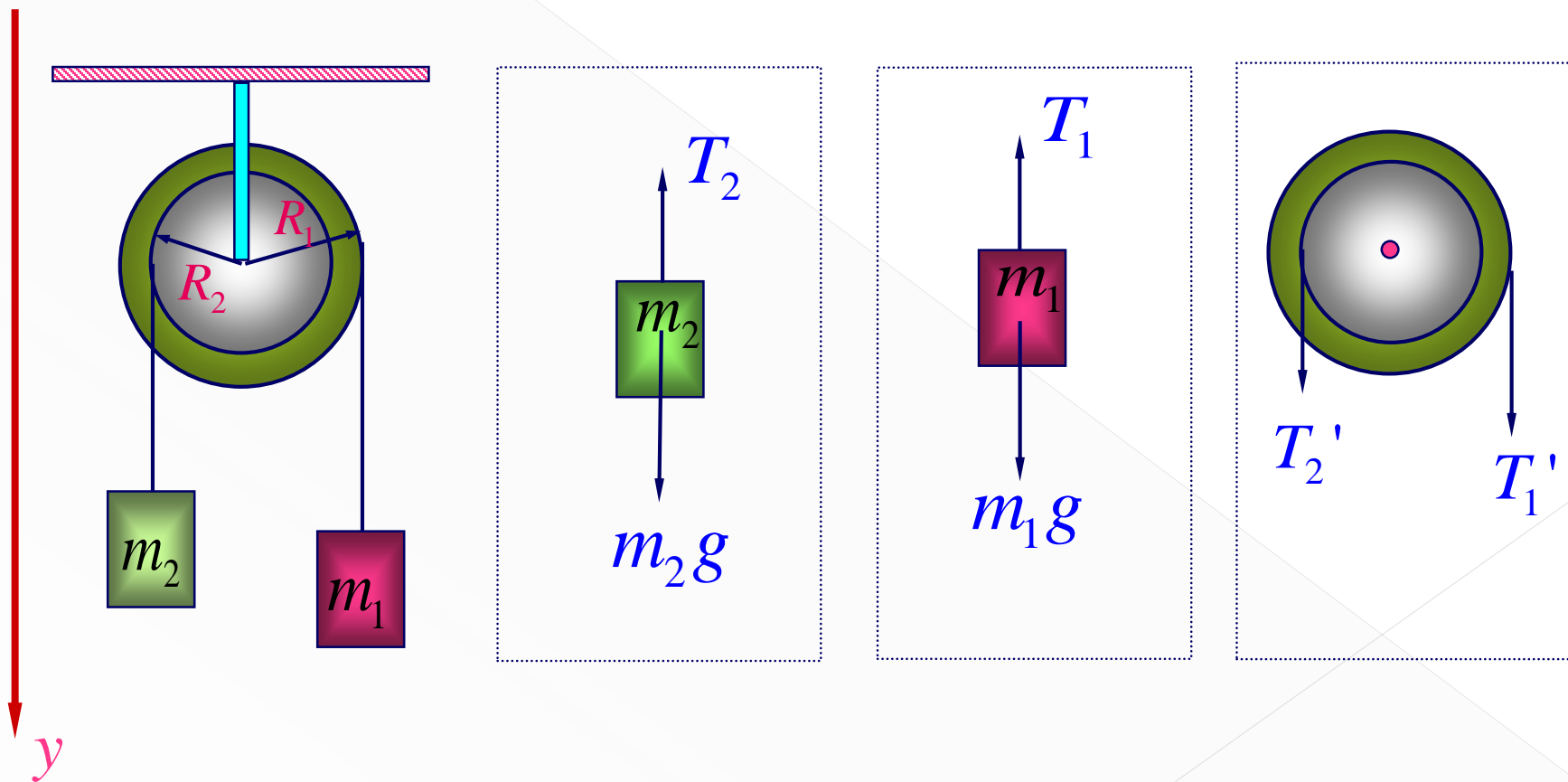


## § 5.3 刚体绕定轴的转动

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 \theta \cdot \lambda R d\theta \\ &= \lambda R^3 \pi = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

**例4.** 在半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的阶梯形滑轮上反向绕有两根轻绳，各挂质量为 $m_1$ 、 $m_2$ 的物体。如滑轮与轴间的摩擦不计，滑轮的转动惯量为 $I$ 。求滑轮的角加速度 $\beta$ 及各绳中的张力 $T_1$ 、 $T_2$ 。





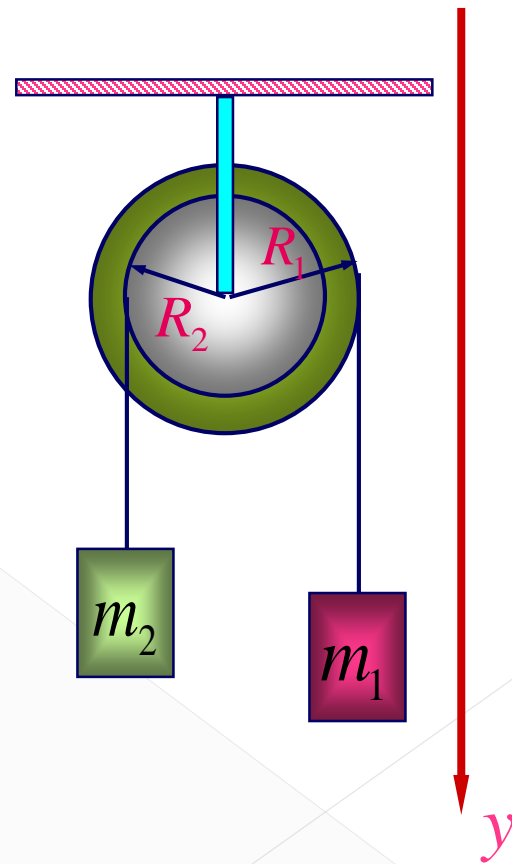
## § 5.3 刚体绕定轴的转动

**解：**取向向下为直线运动的正方向，顺时针为旋转的正方向。隔离物体分别分析受力，由牛顿定律和转动定律列出动力学方程：

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ T_1 R_1 - T_2 R_2 = I \beta \end{cases}$$

又由运动之间的联系可得：

$$\begin{cases} a_1 = R_1 \beta \\ a_2 = -R_2 \beta \end{cases}$$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

联立解得：

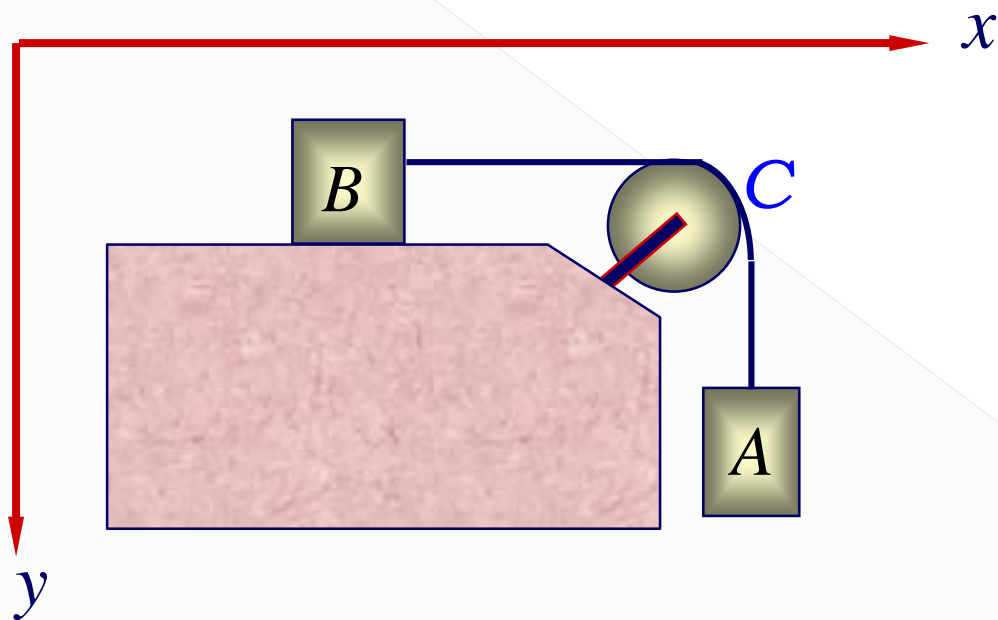
$$\beta = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g$$

$$T_1 = \frac{I + m_2 R_2^2 + m_2 R_1 R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} m_1 g$$

$$T_2 = \frac{I + m_1 R_1^2 + m_1 R_1 R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} m_2 g$$

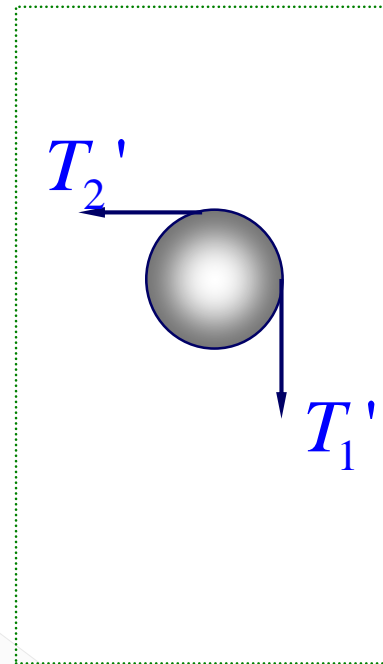
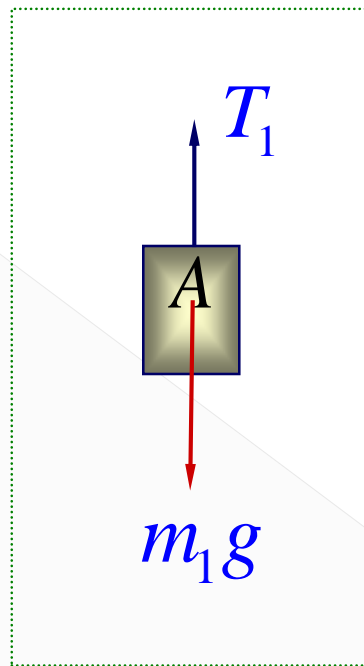
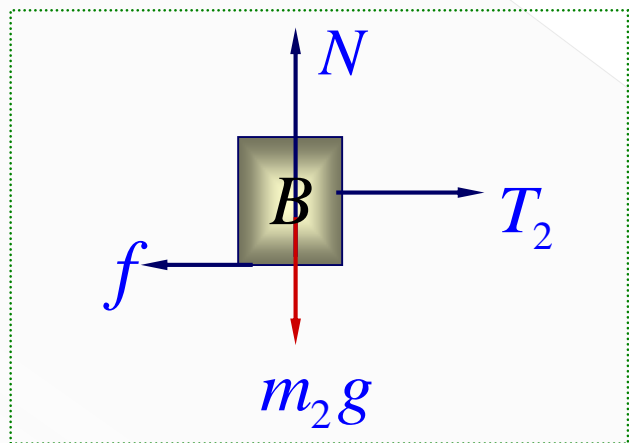
## § 5.3 刚体绕定轴的转动

**例5.** 物体A、B的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ ，用一轻绳相连，绳子跨过质量为 $M$ ，半径为 $R$ 的匀质定滑轮C。如A下降，B与水平桌面间的滑动摩擦系数为 $\mu$ ，绳与滑轮之间无相对滑动，求系统的加速度及绳中的张力 $T_1$ 和 $T_2$ 。 $(I = \frac{1}{2}MR^2)$



## § 5.3 刚体绕定轴的转动

**解：** 建立如图坐标系，并取顺时针为旋转的正方向。  
隔离物体分别分析受力，由牛顿定律和转动定律列出动力学方程：



$$\begin{cases} T_2 - f = m_2 a_2 \\ m_2 g - N = 0 \\ f = \mu N \end{cases} \quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad \begin{cases} T_1 R - T_2 R = I \beta \\ I = \frac{1}{2} M R^2 \end{cases}$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

整理以上方程有：

$$\begin{cases} T_2 - m_2 g \mu = m_2 a_2 \\ m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} M R^2 \beta \end{cases}$$

又由运动之间的联系可得：

$$a_1 = a_2 = a = R\beta$$

联立解得：

$$a = \frac{2(m_1 - \mu m_2)}{2(m_1 + m_2) + M} g$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

$$T_1 = \frac{2(\mu + 1)m_2 + M}{2(m_1 + m_2) + M} m_1 g$$

$$T_2 = \frac{2(\mu + 1)m_1 + M\mu}{2(m_1 + m_2) + M} m_2 g$$

## § 5.3 刚体绕定轴的转动

### ◆ 刚体动力学的两类问题

1. 已知转动运动方程  $\theta = \theta(t)$ ，求刚体所受合外力矩  $M$ ;
2. 已知刚体所受合外力矩  $M$  及初始条件，求刚体的角加速度  $\beta$ 、角速度  $\omega$  和转动运动方程。

### ◆ 应用定轴转动定律求解刚体动力学的一般思路

- 要注意正确选取角速度、角加速度和力矩的正负;
- 除了受力分析，还要进行力矩分析。在进行受力、力矩分析时，对刚体要找准力的作用点，以便求力矩;
- 对平动的刚体列出牛顿第二定律方程，对定轴转动的刚体列出定轴转动定律方程;
- 注意利用角量与线量的关系。

# § 5.4 角动量定理与 角动量守恒定律

问题提出：

刚体绕定轴转动时作用力在时间上的累积和运动之间的联系？

➤ 1. 角动量定理

➤ 2. 角动量守恒定律



## § 5.4角动量定理与角动量守恒定律

### 1.角动量定理

由转动定律有：

$$M = I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

令：  $L = I\omega$

刚体对于该转轴的角动量或动量矩

矢量形式为：

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

## § 5.4角动量定理与角动量守恒定律

则有：  $M = \frac{dL}{dt}$

一般为：  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$Mdt = dL$       积分： $\int_0^t Mdt = \int_{L_0}^L dL$

$\int_0^t Mdt$  称为力对转轴的冲量矩。

$$\int_0^t Mdt = L - L_0$$

角动量定理：刚体在定轴转动时，角动量的增量等于作用在刚体上的冲量矩。

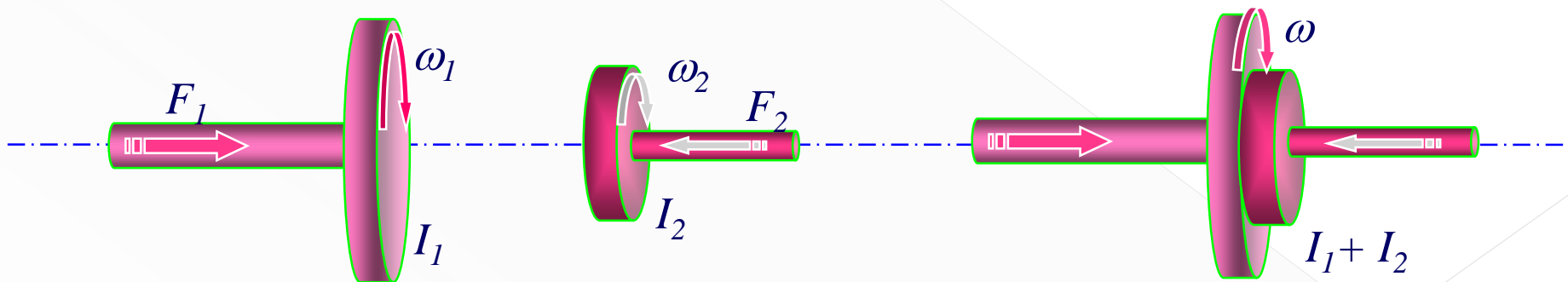
## § 5.4 角动量定理与角动量守恒定律

### 2. 角动量守恒定律

由角动量定理： $\int_0^t M dt = L - L_0$

有： $M = 0$ ,  $L = L_0 = \text{恒量}$

角动量守恒定律：刚体在定轴转动时，刚体合外力矩为零时，其角动量始终保持不变。

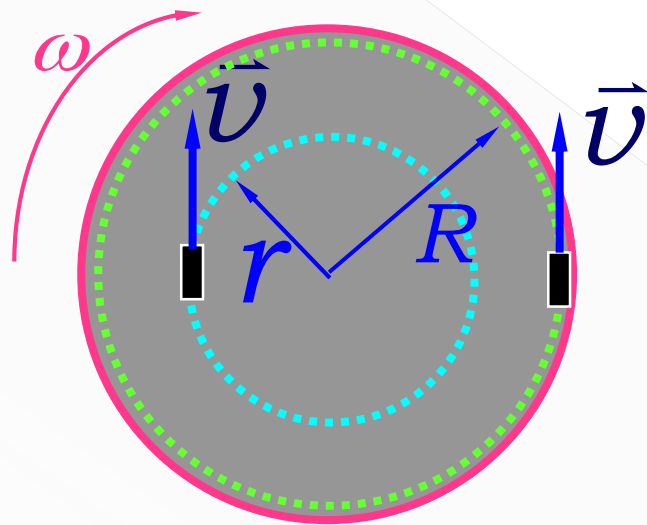


作用前角动量  $\xrightarrow{M=0}$  作用后角动量

$$I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = (I_1 + I_2) \omega$$

## § 5.4角动量定理与角动量守恒定律

**例8.** 质量为 $M$ 、半径为 $R$ 的水平放置、圆盘转台上，两质量均为 $m$ 的电动汽车模型可分别沿半径为 $R$ 和 $r$  ( $R > r$ ) 两轨道运行。最初小车和转台都不动，令外轨道小车作反时针转动，内轨道小车顺时针转动，相对于转台的速率均为 $v$ 。求转台对地面的角速度。



## § 5.4角动量定理与角动量守恒定律

解： 设顺时针方向为**正方向**，转台对地面的**角速度为 $\omega$** ，运动过程中无外力作用所以系统**角动量守恒**：

A相对于地面的角速度：
$$\omega_A = \omega - \frac{v}{R}$$

B相对于地面的角速度：
$$\omega_B = \omega + \frac{v}{r}$$

由角动量守恒：
$$I_A \omega_A + I_B \omega_B + I \omega = 0$$

其中：
$$I_A = mR^2 \quad I_B = mr^2 \quad I = \frac{MR^2}{2}$$

## § 5.4 角动量定理与角动量守恒定律

代入可得：

$$mR^2\omega - mRv + mr^2\omega + mrv + \frac{MR^2}{2}\omega = 0$$

$$\omega = \frac{2mv(R - r)}{2m(R^2 + r^2) + MR^2}$$

转台顺时针旋转

## § 5.5 定轴转动的动能定理 与机械能守恒定律

问题提出：刚体绕定轴转动时作用力在空间上的累积和运动之间的联系？

- 1. 刚体的总机械能
- 2. 刚体转动时力矩做的功
- 3. 刚体定轴转动的动能定理
- 4. 刚体机械能守恒定律

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

### 1. 刚体的总机械能

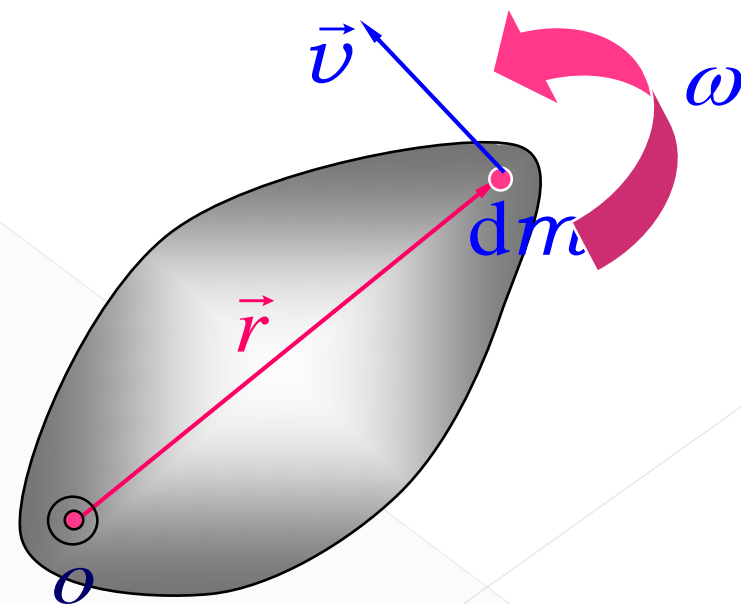
#### 刚体的转动动能

刚体定轴转动时，距轴为  $r$  的质量元  $dm$  线速度为  $v$  其动能为：

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

刚体定轴转动时总动能：

$$\begin{aligned} E_k &= \int dE_k = \int \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$





## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

刚体的重力势能

$$E_p = mg \frac{\int h dm}{m} \\ = mgh_c$$

刚体的平动动能

$$E'_k = \frac{1}{2}mv^2$$

刚体的总机械能

$$E = E_k + E'_k + E_p \\ = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh_c$$

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

### 2. 刚体转动时力矩做的功

刚体定轴转动时，有一微小角位移 $d\varphi$ 力做的功：

力 $F_i$ 元功：

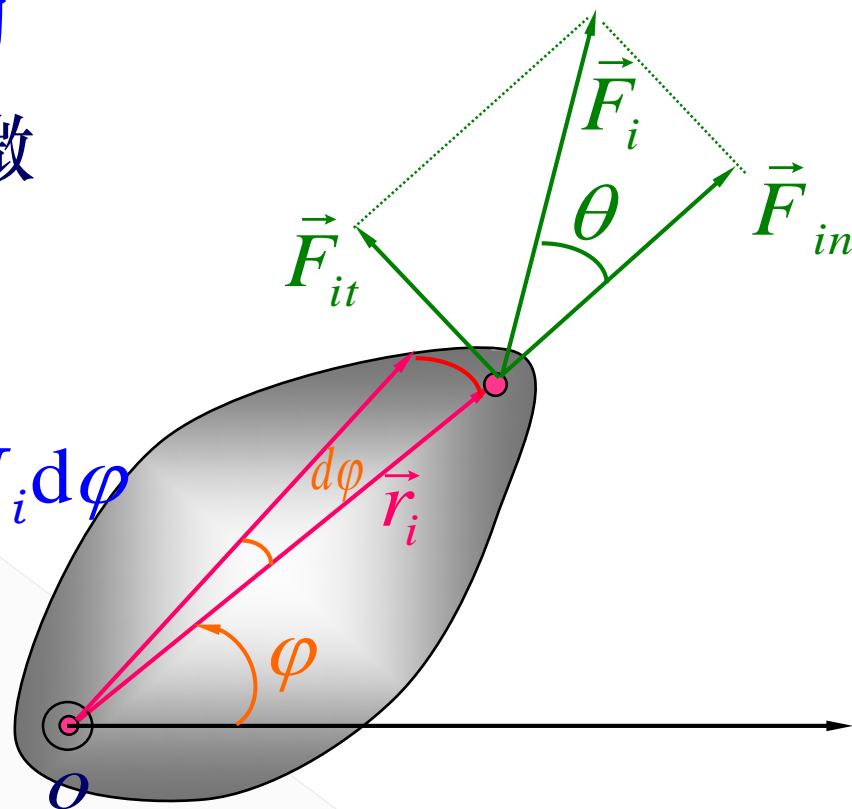
$$dA_i = F_{it} ds = F_{it} r_i d\varphi = M_i d\varphi$$

所有力的总元功：

$$dA = \sum_i dA_i = \sum_i M_i d\varphi$$

刚体从 $\varphi_1$ 到 $\varphi_2$ 力做的总功：

$$A = \int dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_i M_i d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi$$



## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \quad \text{刚体从 } \varphi_1 \text{ 到 } \varphi_2 \text{ 合力矩做的功。}$$

### 3. 刚体定轴转动的动能定理

由转动定律有：

$$M = I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

$$M d\varphi = I\omega d\omega$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

$$= \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \Delta E_k$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \Delta E_k$$

动能定理：刚体在定轴转动时，合外力矩所做的功等于其转动动能的增量。

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

### 4. 刚体机械能守恒定律

由定轴转动的动能定理有：

当  $M = 0$  时：

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \Delta E_k = 0$$

$$E_k = E_{K0} = \text{恒量}$$

在有重力时：

当  $M = 0$  时：

$$E_k + E_p = E_{K0} + E_{p0} = \text{恒量}$$

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

在一般情况下：

当  $M = 0, F = 0$  时：

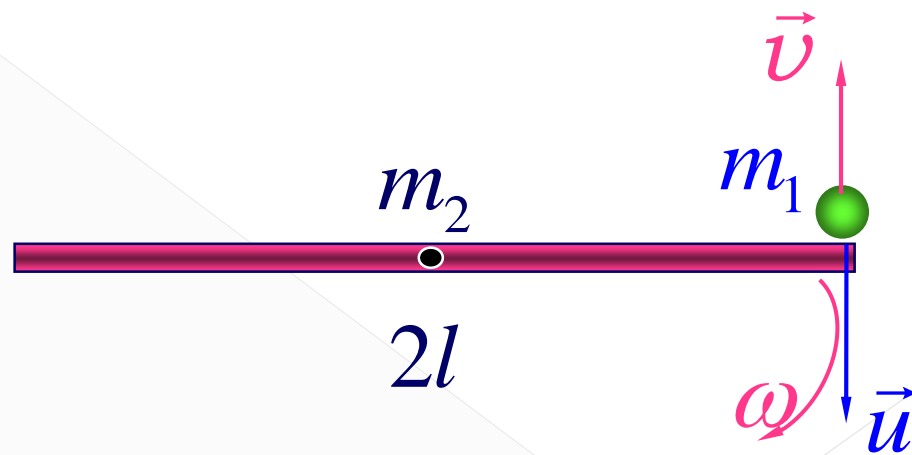
$$E_k + E_p + E'_k = E_{K0} + E_{p0} + E'_{k0} = \text{恒量}$$

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

**例1.** 质量为  $m_1$  的小球与质量为  $m_2$  长为  $2l$  的棒作完全弹性碰撞，棒可绕通过中心的轴转动(如图)。求球的反弹速度和棒的角速度。

**解：** 小球的重力与冲击力相比可忽略，顺时针旋转为正方向。

设小球反弹速度为  $v$ ，棒的角速度为  $\omega$ ，碰撞前后系统角动量守恒：



$$m_1 l^2 \frac{u}{l} = I\omega - m_1 l^2 \frac{v}{l}$$

## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

其中 
$$I = \frac{1}{12} m_2 (2l)^2 = \frac{1}{3} m_2 l^2$$

又弹性碰撞机械能守恒：

$$\frac{1}{2} m_1 u^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

解得

$$v = \frac{(m_2 - 3m_1)u}{m_2 + 3m_1}$$

$$\omega = \frac{6m_1 u}{(m_2 + 3m_1)l}$$



## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

**例2.** 长为 $l$ ，质量为 $m$ 的均匀细杆OA，绕通过其一端点O的水平轴在铅垂面内自由转动。已知另一端A过最低点时的速率为 $v_0$ 。求杆摆动时A点升高的最大高度(不计空气阻力和轴的摩擦力)

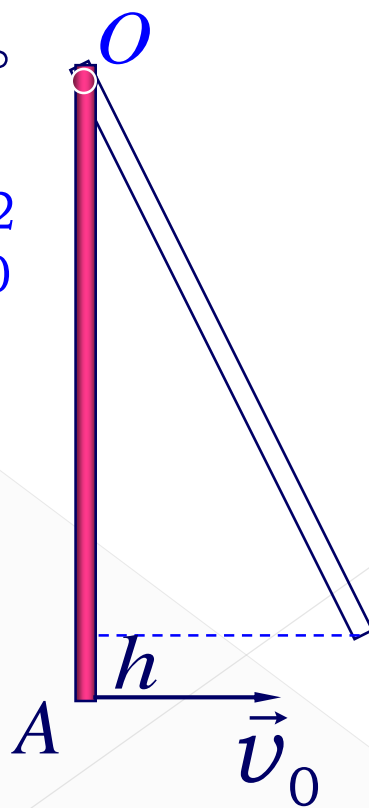
**解：**除重力外合力矩为0，故机械能守恒。

最低点处动能  $E_{k0} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{6} m v_0^2$

势能  $E_{p0} = 0$

最高点处动能  $E_k = 0$

势能  $E_p = \frac{1}{2}mgh$



## § 5.4 定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

由：

$$E_{k0} + E_{p0} = E_k + E_p$$

有：

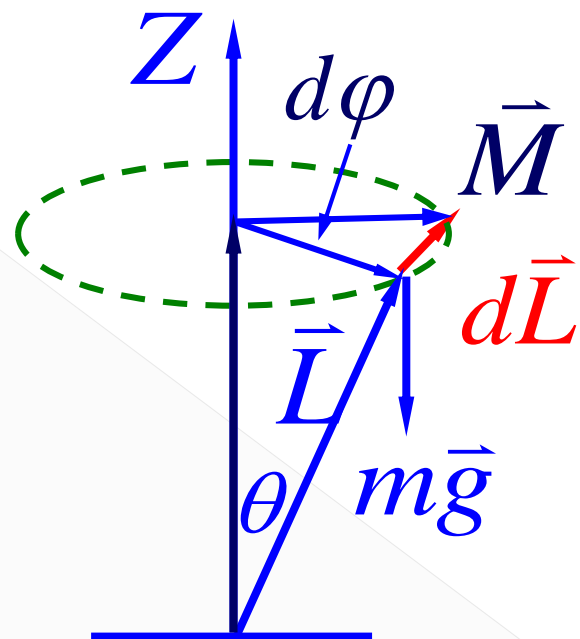
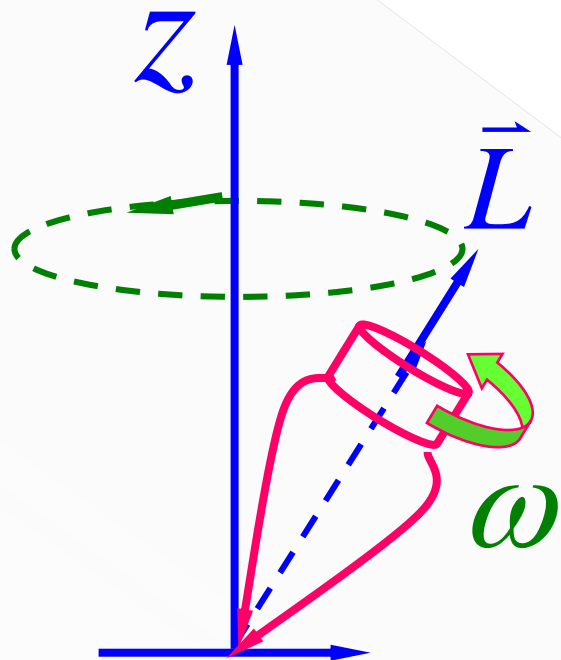
$$\frac{1}{6}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgh$$

可求得

$$h = \frac{v_0^2}{3g}$$

# 进 动

视频



由：  $\vec{M} = d\vec{L}/dt$

有：  $\vec{M}dt = d\vec{L}$

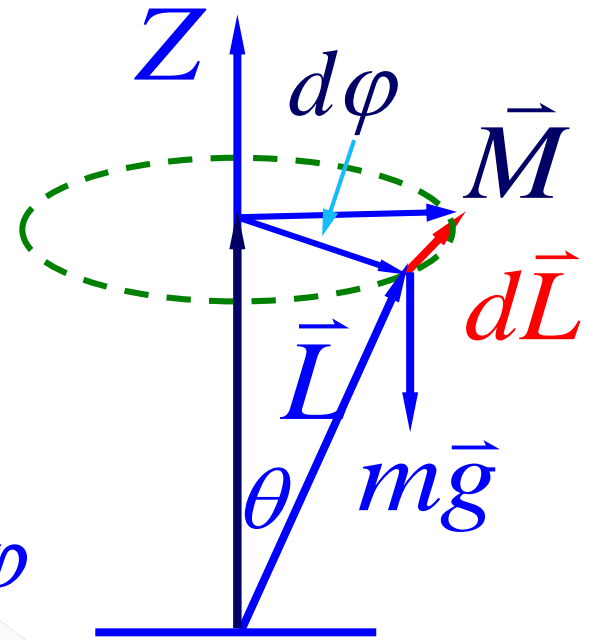
$$d\vec{L} = L \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$= I\omega \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

又由：  $Mdt = I\omega \sin \theta d\varphi$

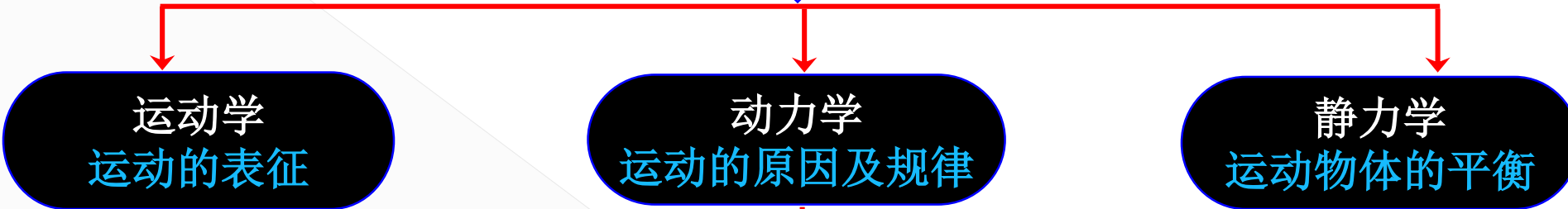
可得进动角速度：

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{I\omega \sin \theta}$$



力学

研究机械运动，即物体的空间位置随时间变化的规律的学科



质点 刚体

平动  
位置矢量  
速度  
加速度  
相对运动

转动  
角位置  
角速度  
角加速度  
相互关系

平动

力是产生加速度的原
瞬时规律：因 牛顿定律
时间累积：动量定理
动量守恒定律
空间累积：动能定理
机械能守恒定律

定轴转动

力矩是产生角加速度的原
瞬时规律：转动定律
时间累积：角动量定理
角动量守恒定律
空间累积：转动动能定理
机械能守恒定律