



西北工业大学

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

子群的定义及其判定



定义6.17 设 G 是群, H 是 G 的非空子集,

(1) 如果 H 关于 G 中的运算构成群, 则称 H 是 G 的**子群**, 记作 $H \leq G$.

(2) 若 H 是 G 的子群, 且 $H \subset G$, 则称 H 是 G 的**真子群**, 记作 $H < G$.

例如 $n\mathbb{Z}$ (n 是自然数) 是整数加群 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 的子群. 当 $n \neq 1$ 时, $n\mathbb{Z}$ 是 \mathbb{Z} 的真子群.

对任何群 G 都存在子群. G 和 $\{e\}$ 都是 G 的子群, 称为 G 的**平凡子群**.





定理6.19 (判定定理一)

设 G 为群, H 是 G 的非空子集, 则 H 是 G 的子群当且仅当

(1) $\forall a, b \in H$ 有 $a \circ b \in H$

(2) $\forall a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$.

证 必要性是显然的. 为证明充分性, 只需证明 $e \in H$.

因为 H 非空, 存在 $a \in H$. 由条件(2) 知 $a^{-1} \in H$, 根据条件(1) $a \circ a^{-1} \in H$, 即 $e \in H$.





定理6.20 (判定定理二)

设 G 为群, H 是 G 的非空子集. H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有 $a \circ b^{-1} \in H$.

证 必要性: H 为群必有 $b^{-1} \in H$, 从而有 $a \circ b^{-1} \in H$.

充分性. 因为 H 非空, 必存在 $a \in H$.

根据给定条件得 $a \circ a^{-1} \in H$, 即 $e \in H$. 单位元存在性

任取 $a \in H$, 由 $e, a \in H$ 根据给定条件 $e \circ a^{-1} \in H$, 即 $a^{-1} \in H$. 逆元存在性

任取 $a, b \in H$, 由逆元存在, 知 $b^{-1} \in H$. 再利用给定条件得 $a \circ (b^{-1})^{-1} \in H$, 即 $a \circ b \in H$. 运算封闭

综合上述, 可知 H 是 G 的子群.





定理6.21 (判定定理三)

设 G 为群, H 是 G 的非空**有限**子集, 则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有 $a \circ b \in H$.

证 必要性显然. 为证充分性, 只需证明有限集 H 是一个代数系统, 并且满足结合律和消去律即可.

由于 G 满足结合律和消去律, H 是 G 的子集, 故也满足; 由 $a \circ b \in H$ 可知 H 是一个代数系统, 故得证.





例7 设 G 是群, H, K 是 G 的子群. 证明

(1) $H \cap K$ 也是 G 的子群

(2) $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$

证 (1) 由 $e \in H \cap K$ 知 $H \cap K$ 非空.

任取 $a, b \in H \cap K$, 则 $a \in H, a \in K, b \in H, b \in K$.

必有 $a \circ b^{-1} \in H$ 和 $a \circ b^{-1} \in K$, 从而 $a \circ b^{-1} \in H \cap K$. 因此 $H \cap K \leq G$.

(2) 充分性显然, 只证必要性. 用反证法.

假设 $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$, 那么存在 h 和 k 使得

$$h \in H \wedge h \notin K, \quad k \in K \wedge k \notin H$$

推出 $h \circ k \notin H$. 否则由 $h^{-1} \in H$ 得 $k = h^{-1} \circ (h \circ k) \in H$, 与假设矛盾.

同理可证 $h \circ k \notin K$. 从而得到 $h \circ k \notin H \cup K$, 与 $H \cup K$ 是子群矛盾.





THE END



西北工业大学

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY