第十一

第十一章　无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 幂级数
- 傅氏级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第一节

常数项级数的基本概念和性质

- 一、常数项级数的概念
- 二、收敛级数的性质

一、常数项级数的概念

1. 引例

无穷级数的思想蕴涵在
无限循环小数概念之中

引例1 数 $\frac{1}{3}$ 化为小数．

$$\frac{1}{3}=0.33\cdots=0.\dot{3},\quad \text{且}\ 0.3=\frac{3}{10}$$

$$0.33=0.3+0.03=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}$$

$$0.333=0.3+0.03+0.003=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}$$

一般地， $0.\underbrace{33\cdots3}_{n个} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n}$

于是 $\frac{1}{3} = 0.33\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$

将 $\frac{1}{3}$ 表示成无穷多项之和

引例2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n)$ $(|a|<1)$，

相当于求 无穷多项的和 $1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$.

引例3 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

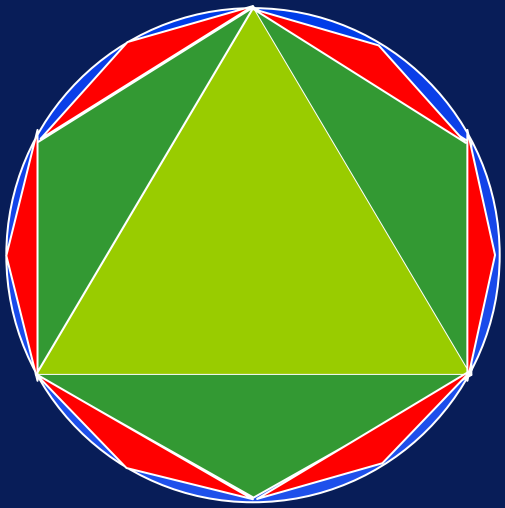
依次作圆内接正 $3\times 2^n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 边形,

设 a_0 表示 内接正三角形面积,

a_k 表示边数 增加时增加的面积,

则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$



$n\to\infty$时, 这个和逼近于圆的面积 :

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

2. 定义 给定数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

无穷级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$, 一般项: u_n

部分和: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

无穷级数收敛: 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 记作 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

级数的和

无穷级数发散: 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在,

级数的余项: $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

级数收敛时, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

例1 证明等比级数 (几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (\text{常数 } a \neq 0)$$

当 $|q| < 1$ 时收敛, 当 $|q| \geq 1$时发散 .

证 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当$|q| < 1$时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$

故级数收敛 , 其和为$\dfrac{a}{1-q}$;

当$|q| > 1$时,由 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, 故级数发散 .

2) 若 $|q|=1$，则

当 $q=1$ 时，$S_n=na\to\infty$, 级数发散；

当 $q=-1$ 时, 级数为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$

$$S_n=\begin{cases} a, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，因此级数发散.

结论: 等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n \begin{cases} |q|<1 \text{ 时收敛}, \\ |q|\ge 1 \text{ 时发散}. \end{cases}$

目录 上页 下页 返回 结束

例2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解 部分和

拆项相消

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\underline{\ln 1})+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+\big(\ln(n+1)-\cancel{\ln n}\big)$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数发散.

例3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$ 发散.

证(方法1) $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

由 $x>\ln(1+x)\qquad(x>0)$

$$S_n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(1+n)=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

$\Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

(方法2) $u_n = \frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 当 $n \le x \le n+1$ 时，有 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{n} \ge \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln x \Big|_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\ge (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$= \ln(n+1) \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \therefore \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 .

目录 上页 下页 返回 结束

(方法3) 用反证法

假设：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，其部分和为 S_n.

则 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

于是 $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$

但另一方面，

$$S_{2n}-S_n$$
$$=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$S_{2n}-S_n$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\neq 0$, 矛盾！

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

(方法4) 见后面.

目录 上页 下页 返回 结束

二、收敛级数的性质

性质1 若 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S.$

证 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}c\,u_k=c\,S_n$，

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=c\,S$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S.$

$\sigma_n=cS_n$

推论1 若 $c\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 敛散性相同．

性质2 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

注 1° 收敛级数可逐项相加(减).

2° $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的敛散性规律:

收收为收, 收发为发, 发发不一定发.

例如, 取 $u_n=(-1)^{2n}$, $v_n=(-1)^{2n+1}$, 而 $u_n+v_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛.

性质3 级数前面加上（去掉、或修改）**有限项**，不影响级数的敛散性.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 k 项，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分

和为 $\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$

令 $n \to \infty$ 时，σ_n 与 S_{k+n} 同敛散，

有限项不影响级数的敛散性

故新旧级数敛散性相同. 收敛时，其和 $\sigma = S - S_k$.

性质4 收敛级数**加括弧**后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证 设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，任意加括弧,

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

令 $v_k=u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}\quad(k=1,2,\cdots)$

则其前 k 项部分和：

$$\sigma_k=v_1+v_2+\cdots+v_k=S_{n_k}$$

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k = S_{n_k}$$

$\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n$ 存在

设 $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S \in R)$

$\because \quad \{\sigma_k\} = \{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的子数列

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

即加括号后的级数收敛，且其和为S.

推论2 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

用反证法

注 加括号后的级数收敛

$\not\Rightarrow$ 去掉括号后的级数收敛

收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 收敛

但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散

例3 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解(方法4) 加括号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})$$

$$+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{1+2^{n-1}}+\frac{1}{2+2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n})+\cdots$$

$$v_1=1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},\quad v_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\cdots$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$v_3 = \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$v_4 = \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^4} > \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3 = 8\text{项}} = \frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

$$v_n = \frac{1}{1+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{项}} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = v_1 + \cdots + v_n > \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \to \infty, \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

从而加括号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例4　判断级数的敛散性

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}+\cdots$$

解　加括号级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(1+1)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n})+\cdots$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

故加括号级数发散，从而原级数发散.

目录　上页　下页　例4-1　结束

性质5（级数收敛的必要条件）

设 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

证 $u_n=S_n-S_{n-1}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$

注 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 不是级数收敛的充分条件.

例如，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散，

但 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

推论3 若 $u_n \nrightarrow 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散 .

例5 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}+\cdots$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$，故原级数发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1} \nrightarrow 0$,

故所给级数发散.

$$\text{小结:}\begin{cases} u_n \to 0 \quad \overset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{收敛} \\ \\ u_n \not\to 0 \quad \overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{发散} \end{cases}$$

例6 判断敛散性, 若收敛求其和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$.

解 令 $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 = e$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 故级数发散.

单增数列

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < e$$

例7 判断级数的敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

则 $\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\to\frac{3}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$, 原级数收敛, 其和为 3 .

内容小结

1. 无穷级数概念：

级数收敛、发散，部分和，余项

2. 两个常见级数的敛散性：

(1) 等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \begin{cases} \text{收敛，和为} \dfrac{1}{1-q}, & \text{当} |q| < 1 \text{时}; \\ \text{发散，} & \text{当} |q| \geq 1 \text{时}. \end{cases}$$

(2) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

3. 级数性质：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 敛散性相同（$c \neq 0$）；

(2) 收敛级数可以逐项相加，

(3) 级数加（去或改）有限项，不影响其敛散性.

(4) 收敛级数加括弧后仍收敛于原级数的和.

(5) 级数收敛的必要条件：一般项的极限为零

备用题

例2-1 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 $S_n=\underline{\dfrac{1}{1\cdot 2}}+\underline{\dfrac{1}{2\cdot 3}}+\underline{\dfrac{1}{3\cdot 4}}+\cdots+\underline{\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}}$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

“拆项相消” 求和

所以级数收敛, 其和为 1 .

例2-2 判断敛散性, 若收敛求其和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$.

解 $\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\to\frac{1}{4},$$

拆项相消

原级数收敛， 其和为 $\dfrac{1}{4}$.

例3-1 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性．

解 $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=[\ln 3+\ln 1-2\ln 2]$$

$$+[\ln 4+\ln 2-2\ln 3]+[\ln 5+\ln 3-2\ln 4]$$

$$+\cdots+[\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n]$$

$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2\to-\ln 2,$$

故原级数收敛，其和为 $-\ln 2$.

例4-1 判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解 加括号级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

一般项 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}=\dfrac{2}{n-1}$

因加括号级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数发散．