第七章

第一节

向量及其线性运算

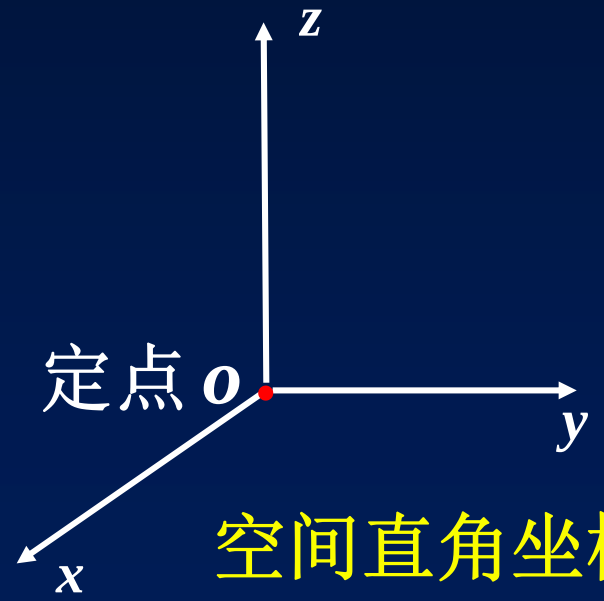
- 一、空间直角坐标系
- 二、向量的概念与线性运算
- 三、向量的坐标

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点O，由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指，从从x轴正向以 $\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时，大拇指的指向就是 z轴的正向.



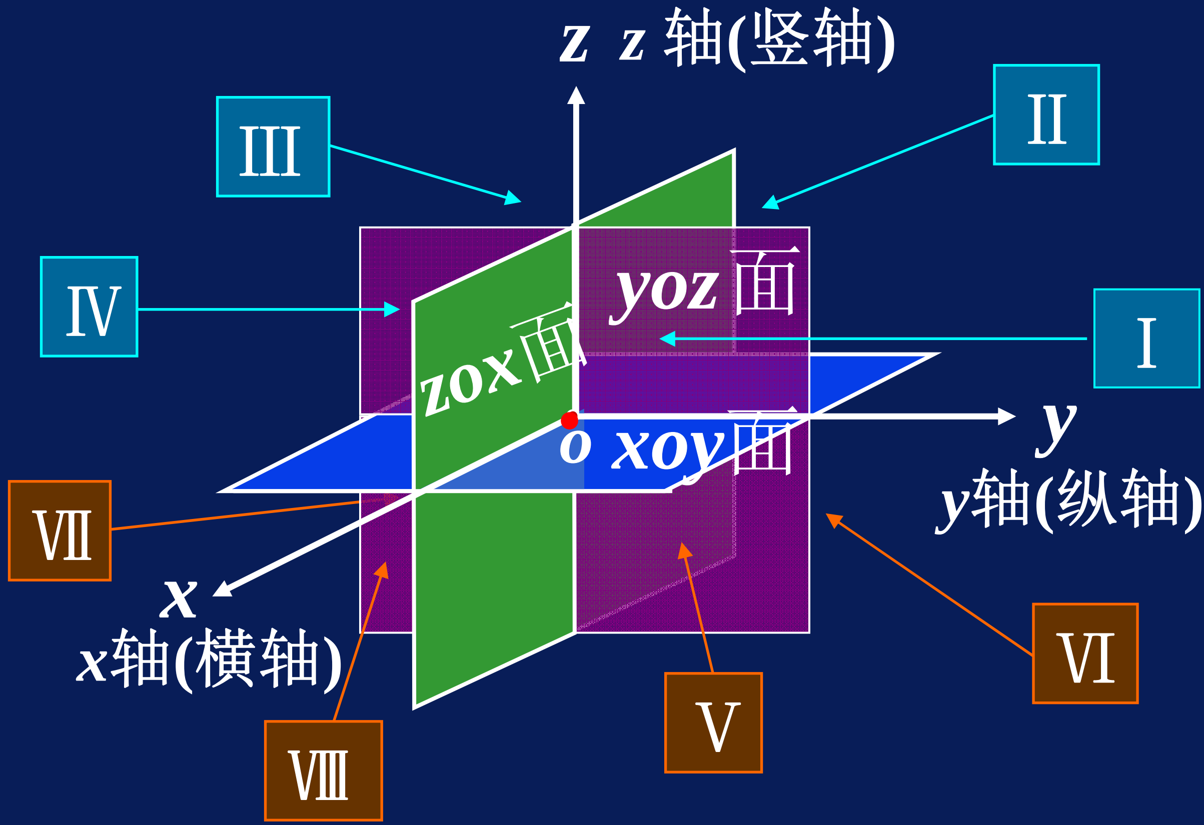
空间直角坐标系

• 坐标原点

• 坐标轴

• 坐标面(三个)

• 卦限(八个)



在直角坐标系下

点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 (x, y, z)

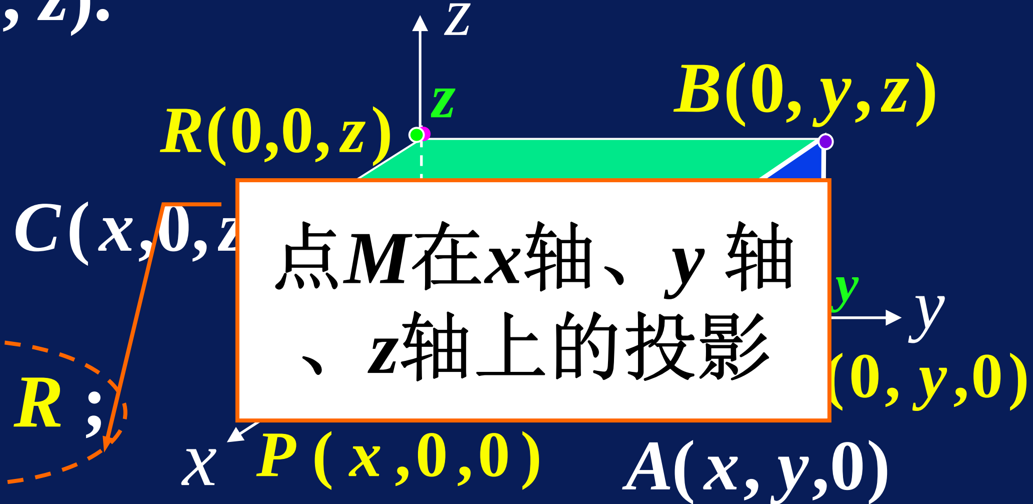
有序数 x、y、 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，记为 $M(x, y, z)$.

特殊点的坐标 ：

原点 $O(0,0,0)$;

坐标轴上的点 P, Q, R ;

坐标面上的点 A, B, C .



点M在x轴、y 轴、z轴上的投影

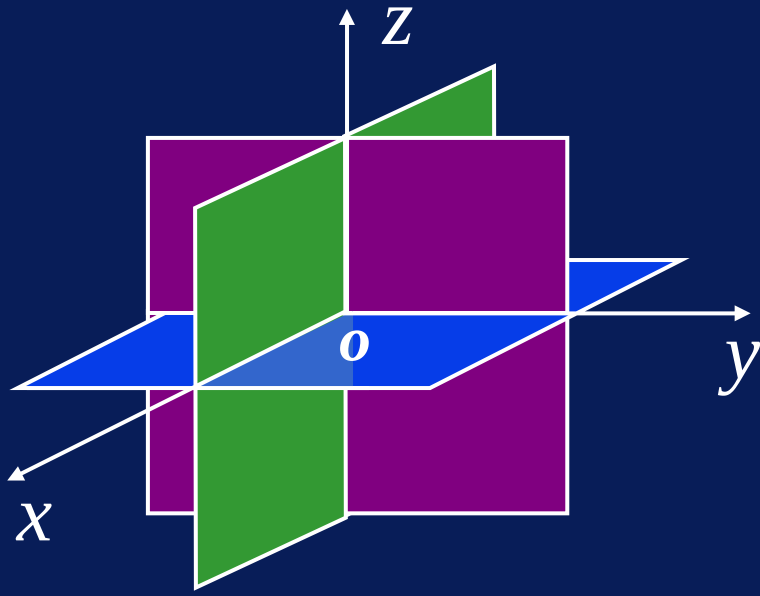
目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

坐标面：

xoy面 $\leftrightarrow z=0$

yoz面 $\leftrightarrow x=0$

zox面 $\leftrightarrow y=0$



坐标轴：

x轴 $\leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

y轴 $\leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$

z轴 $\leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

三元有序数组 (x,y,z) 的全体所构成的集合：

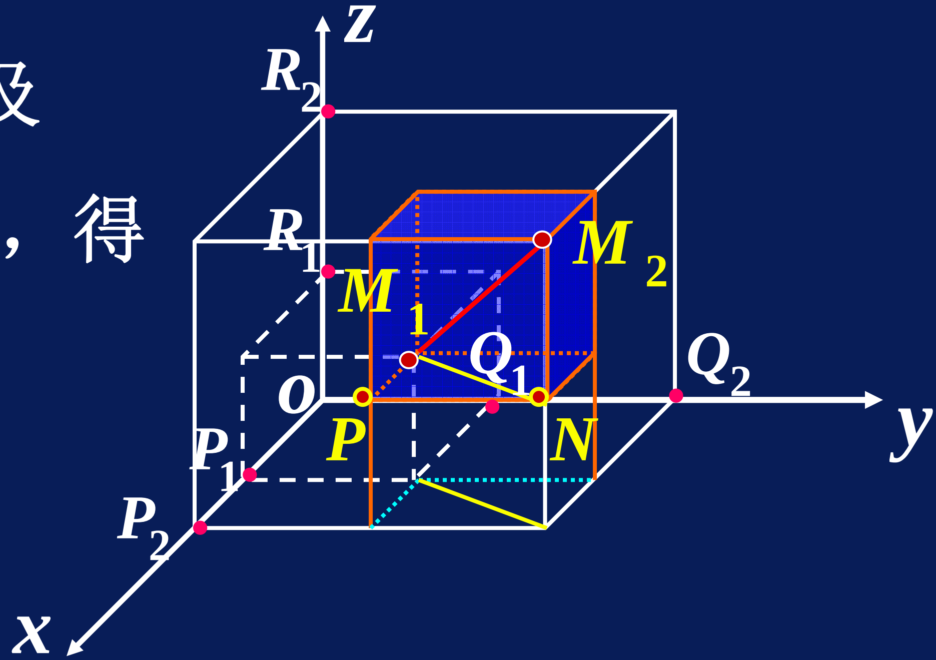
$$R^3=\{(x,y,z)\,|\,x\in R, y\in R, z\in R\}$$

称为三维欧氏空间.

2. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，

$$d=\left|M_1M_2\right|=?$$



在直角三角形ΔM_1NM_2 及

ΔM_1PN 中，用勾股定理，得

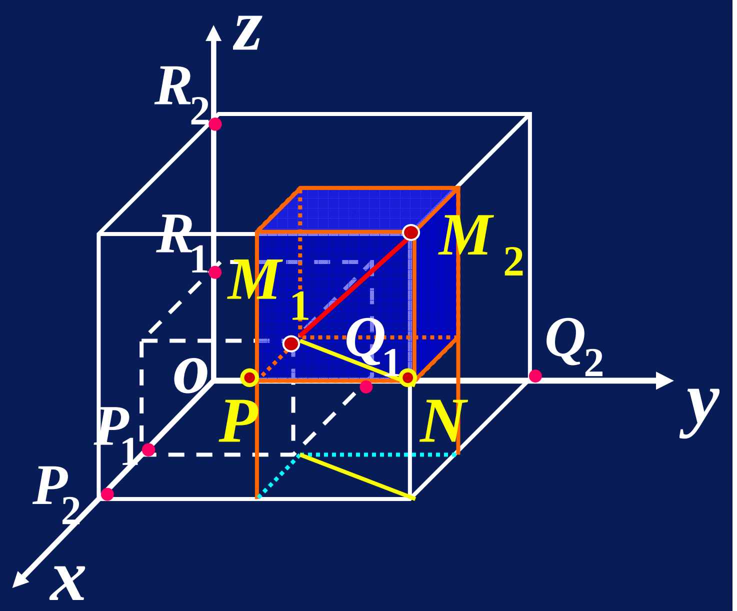
$$d^2=\left|M_1N\right|^2+\left|NM_2\right|^2$$

$$d^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$

$$=(|M_1P|^2+|PN|^2)+|NM_2|^2$$

$$=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$



$$\therefore\quad d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

空间两点间距离公式

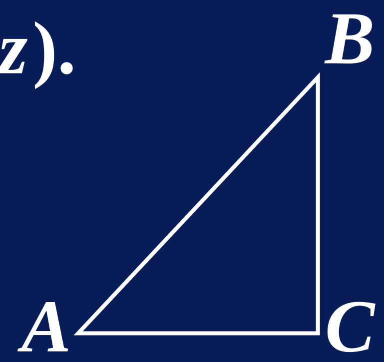
特殊地：若两点分别为 $M(x,y,z)$,$O(0,0,0)$

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例1 已知点 $A(7,-1,12)$、$B(1,7,-12)$, 在z轴上求一点 C，使 $\angle ACB$ 为直角.

解 $\because$ 点C在z轴上，$\therefore$ 可设$C(0,0,z)$.



依题意，有 $AB^2 = AC^2 + BC^2$

即 $(1-7)^2+(7+1)^2+(-12-12)^2$

$$=(0-7)^2+(0+1)^2+(z-12)^2$$

$$+(0-1)^2+(0-7)^2+(z+12)^2$$

解得 $z=\pm12$，故所求点为 $C(0,0,\pm12)$.

目录 上页 下页 例题 结束

二、向量的概念与线性运算

1. 向量的概念

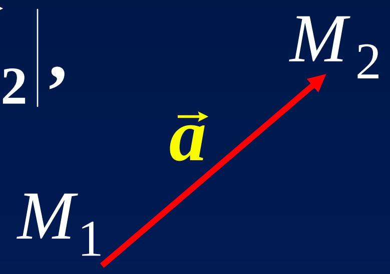
向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量(又称矢量).

向量表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 或 $\vec{a}$,

以 M_1 为起点， M_2 为终点的有向线段.

向量的模 : 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$,

或 $|\vec{a}|$.

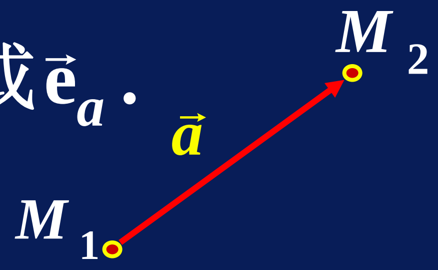


向径 (矢径): 起点为原点的向量.

目录 上页 下页 返回 结束

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量. 与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记为 $\vec{a}^{\circ}$，$\overrightarrow{M_1M_2}^{\circ}$，或 $\mathbf{e}_a$.



零向量: 模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$.

相等向量: 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$；

负向量: 大小相等但方向相反的向量，记作 $-\vec{a}$.

平行向量： 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反,

则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记作 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$；

规定： 零向量与任何向量平行；

注： 因为平行向量可平移到同一直线上,

故两向量平行又称两向量共线 .

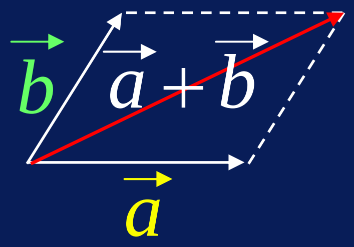
向量共面： 若 n ($\geqslant 3$)个向量经平移可移到

同一平面上，则称此 n 个向量共面 .

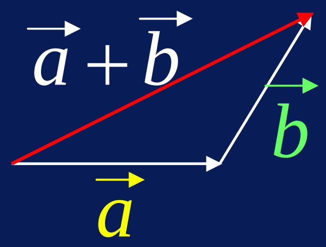
2. 向量的线性运算

(1) 向量的加法

平行四边形法则：

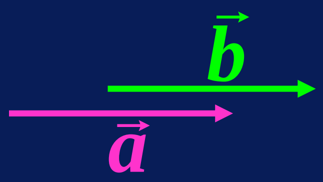


三角形法则：



特殊地：若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

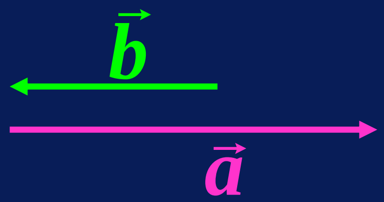
同向：



$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

反向：



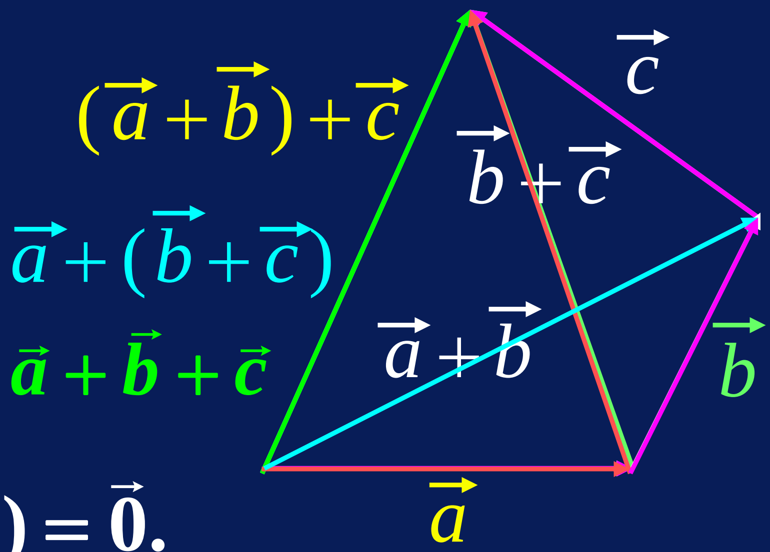
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

$|\vec{c}|=\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

向量的加法符合下列运算规律：

① 交换律：　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

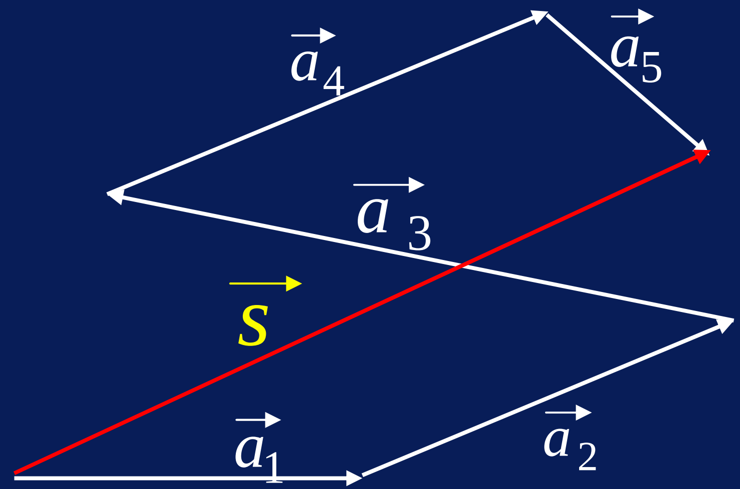
② 结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$



③ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

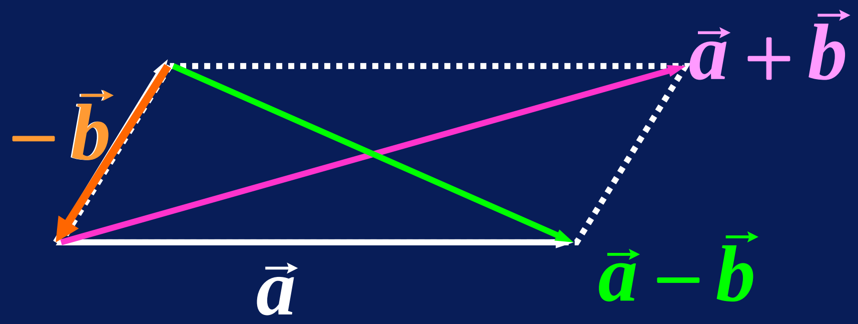
三角形法则可推广到多个向量相加.

$$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$$



(2) 向量的减法

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



3. 向量与数的乘法

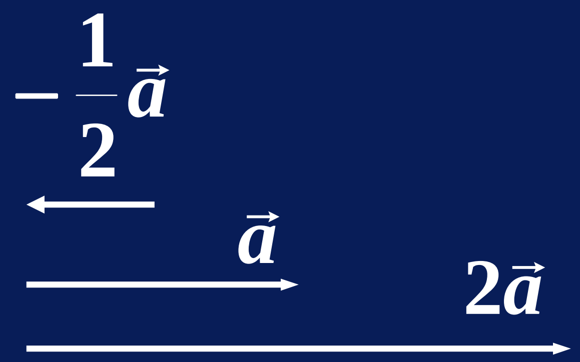
(1) 定义7.1 设λ 是一个数，λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记作 $\lambda\vec{a}$.

规定: $\lambda > 0$时， $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向， $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

$\lambda < 0$时， $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向， $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda = 0$时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ 　　如:



(2) 运算规律

结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

例2 设$\vec{e}_a$表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，

则 $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$ 或 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}_a$.

证 令 $\vec{b} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$

$\because$ $\vec{e}_a$ 与 $\vec{a}$同方向，而 $|\vec{a}| > 0$

$\therefore$ $\vec{b}$与$\vec{e}_a$同方向，从而与 $\vec{a}$同方向.

又 $\because$ $\quad |\vec{b}| = \left| |\vec{a}| \vec{e}_a \right| = |\vec{a}| |\vec{e}_a| = |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|$

$\therefore \quad \vec{a} = \vec{b} = |\vec{a}| \vec{e}_a$

即 $\quad \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}_a \quad (\vec{a} \neq 0)$

按照向量与数的乘积的规定，

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是

一个与原向量同方向 的单位向量.

例3 化简 $\vec{a}-\vec{b}+5(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5})$

解

$$\vec{a}-\vec{b}+5(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5})$$

$$=(1-3)\vec{a}+(-1-\frac{5}{2}+1)\,\vec{b}$$

$$=-2\vec{a}-\frac{5}{2}\vec{b}.$$

4. 两个向量的平行关系

定理7.1 设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$，那么向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充分必要条件是：存在 唯一的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

证（充分性）由数与向量的乘法定义，知 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$

（必要性） 设 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$

$$\text{令 } \lambda = \begin{cases} \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{当 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 同方向时；} \\ -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{当 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 反方向时，} \end{cases}$$

则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，

且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|.$

$\therefore \quad \vec{b} = \lambda\vec{a}.$

再证数 λ 的唯一性：

设又有 $\vec{b} = \mu\vec{a}$， 则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$， 故 $|\lambda - \mu| = 0$， 即 $\lambda = \mu$.

推论7.1 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 不全为零的的两个数 α、β，使 $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$.

(此时，称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 线性相关)

定理7.2 设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行(不共线)，则三个向量

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$ $\exists$唯一的一对数 λ和μ，使

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

(此时，称向量$\vec{c}$可用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$线性表示)

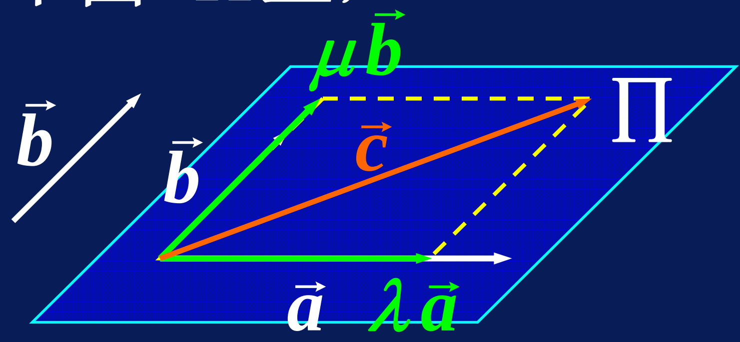
证 充分性($\Leftarrow$):

将$\vec{a}$与$\vec{b}$平行移动，使它们的起 点重合，则

$\lambda\vec{a}$与$\mu\vec{b}$必在$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的平面 Π上，

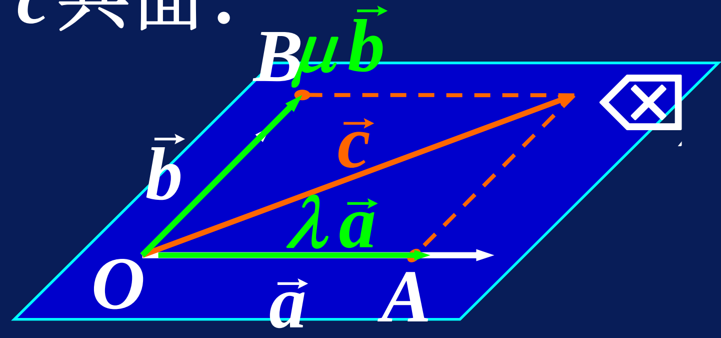
而$\vec{c}$是以$\lambda\vec{a}$、$\mu\vec{b}$为邻边的

平行四边形的对角线向 量，



$\therefore$ $\vec{c}$在平面 Π 上，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面.

必要性($\Rightarrow$):



若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，将 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$平行移动，使它们的起点重合，设为 O. 再过$\vec{c}$的终点分别作 $\vec{a},\vec{b}$的平行线，与 $\vec{a},\vec{b}$所在直线 的交点依次为A，B.

$\because$ $\overrightarrow{OA} \,//\, \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} \,//\, \vec{b}$

$\therefore$ 由定理7.1，知 $\exists$唯一的一对数 λ，μ，使

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mu\vec{b}$$

故 $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

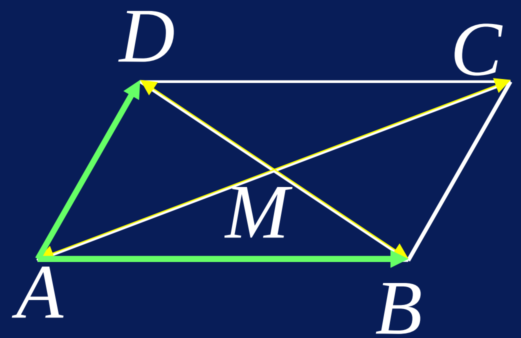
推论7.2 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$

$\exists$ 三个不全为零的数 α、β、γ，使

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}.$$

(此时，称三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$线性相关)

例4 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



证 依题设，有

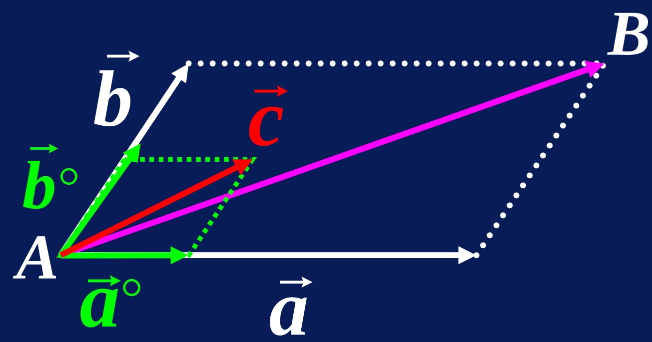
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD},$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$$

即 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且相等，结论得证.

例5 已知不共线的非零向量 $\vec{a}$和$\vec{b}$, 求它们夹角平分线上的单位向量$\vec{c}^\circ$.

分析 $|\vec{a}|$不一定等于$|\vec{b}|$, 所以对角线 AB 不一定是夹角平分线 .



解 $\vec{a}^\circ = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{b}^\circ = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$|\vec{a}^\circ| = 1 = |\vec{b}^\circ|$, 因此以$\vec{a}^\circ$, $\vec{b}^\circ$为边的平行四边形的对角线恰好是$\vec{a}^\circ$, $\vec{b}^\circ$夹角平分线.

令$\vec{c}=\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ$,则$\vec{c}$在$\vec{a},\vec{b}$的夹角平分线上

$$\therefore\quad \vec{c}^\circ=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ}{|\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ|}$$

$$=\frac{\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}{\left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{\left||\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}\right|}.$$

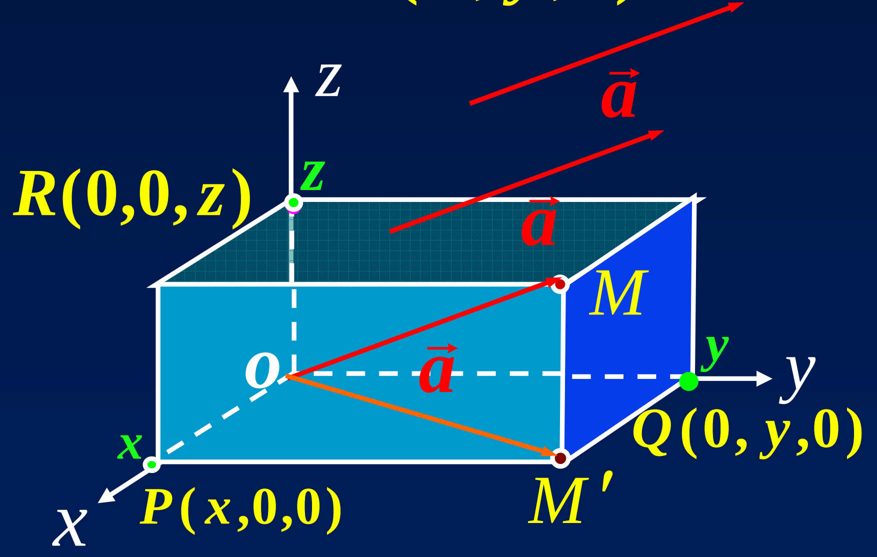
三、向量的坐标

1. 向量的坐标表示

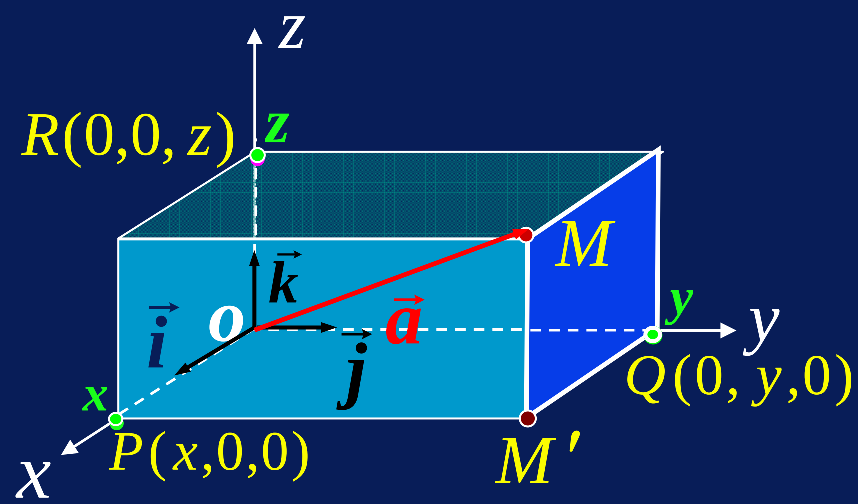
设 $\vec{a}$ 为任一向量，在空间直角坐标系下，将 $\vec{a}$ 平行移动，使其起点与坐标原点O重合，则 $\vec{a}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示，其终点 $M(x,y,z)$ 由 $\vec{a}$ 唯一确定.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$



设 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴正方向上的单位向量，称为**基本单位向量**，则



$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = x\vec{i} \\ \overrightarrow{OQ} = y\vec{j} \\ \overrightarrow{OR} = z\vec{k} \end{cases}$$

向量 $\vec{a}$ 沿三个坐标轴方向的分向量

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

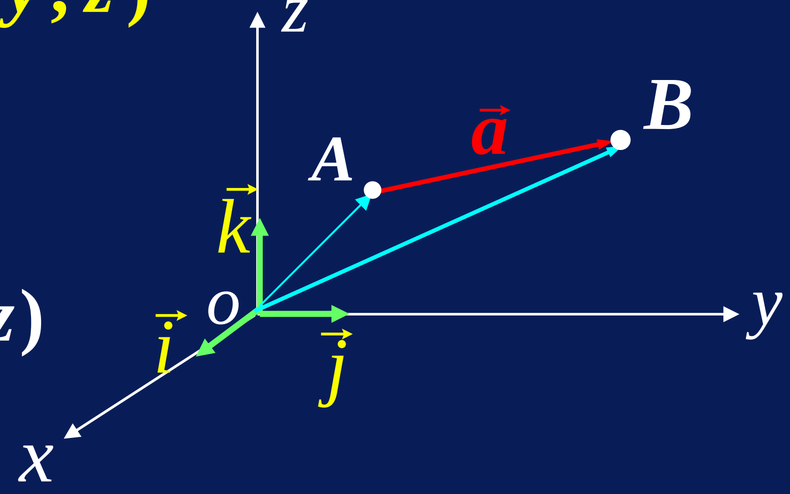
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$ ——向量 $\vec{a}$ 的 坐标分解式

$\vec{a} \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 (x, y, z)

称有序数 x、y、z为

向量 $\vec{a}$ 的坐标，记为

$$\vec{a} = \{x, y, z\} \text{ 或 } \vec{a} = (x, y, z)$$



当 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 时，

若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

恰好为$\vec{a}$的终点坐标与起点坐标之差

令 $\begin{cases} a_x = x_2 - x_1 \\ a_y = y_2 - y_1 \\ a_z = z_2 - z_1 \end{cases}$ ——向量$\vec{a}$ 的坐标

则 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ——向量$\vec{a}$ 的坐标分解式

$= (a_x,\ a_y,\ a_z)$ ——向量$\vec{a}$ 的坐标表达式

$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

注 1° 将 $\vec{a}$ 平行移动，使其起点与坐标原点O重合，则$\vec{a}$的终点的坐标为 (a_x, a_y, a_z).

注 2° 由于向量和它的坐标 1 – 1 对应，所以对于

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)\ ,\ \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$

若 $\vec{a}=\vec{b}$，则必有 $\begin{cases} a_x=b_x \\ a_y=b_y \\ a_z=b_z \end{cases}$

2. 向量线性运算的坐标表达式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\lambda$ 为实数，

则 (1) $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

$$=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k};$$

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

(2) $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$

$$=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}.$$

(3) 平行向量对应坐标成比例:

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时, $\vec{b}/\!/\vec{a} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_x=\lambda a_x \\ b_y=\lambda a_y \\ b_z=\lambda a_z \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

对应坐标成比例

注 若$a_x=0,\ a_y\neq 0, a_z\neq 0,$ 则上式 理解为:

$$b_x=0,\quad \frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

例6 设向量 $\vec{a}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=-2\vec{j}+\mu\vec{k}$，问实数 λ、μ 取何值时，$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，并求与它们平行的单位向量.

解 $\because \quad \vec{a}\,//\,\vec{b}$

$\therefore$ 它们对应坐标成比例，即 $\dfrac{\lambda}{0}=\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-1}{\mu}$

$\therefore \quad \lambda=0, \quad \mu=1.$

与$\vec{a}$平行的单位向量为

$$\vec{\mathrm{e}}=\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm(0,\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$$

例7 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,1,-2)$.

解 2×① −3×②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

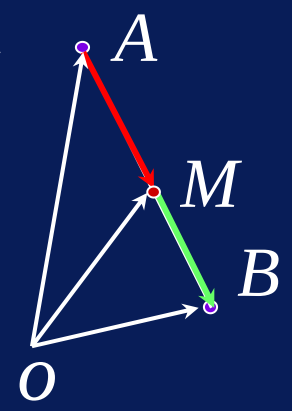
代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})$$

$$=(11, -2, 16)$$

例8 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$, 在AB直线上求一点 M, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

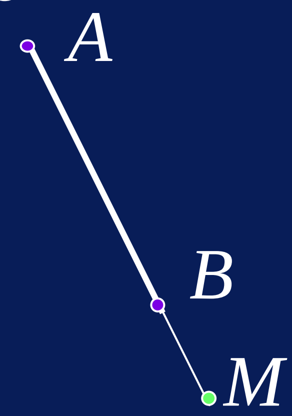
解 设 M 的坐标为 (x,y,z), 如图所示



$\because$ $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$

而 $\overrightarrow{AM} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$

$\lambda \overrightarrow{MB} = \lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$



$$\therefore \begin{cases} x-x_1 = \lambda(x_2-x) \\ y-y_1 = \lambda(y_2-y) \\ z-z_1 = \lambda(z_2-z) \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

解得 $$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z = \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$ —— 定比分点公式

当 $\lambda = 1$ 时，点 M 为 AB 的中点，于是得

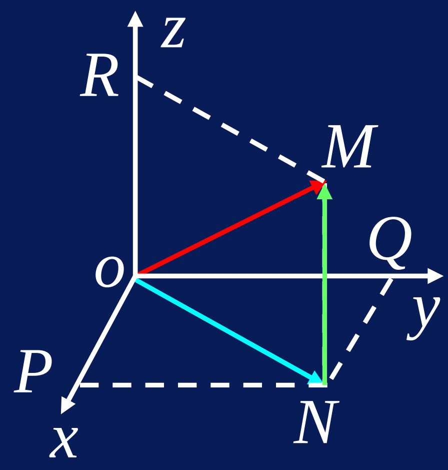
中点公式：$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$，$z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

3. 向量的模与方向余弦的坐标表达式

(1) 向量的模

设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$



由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|$$

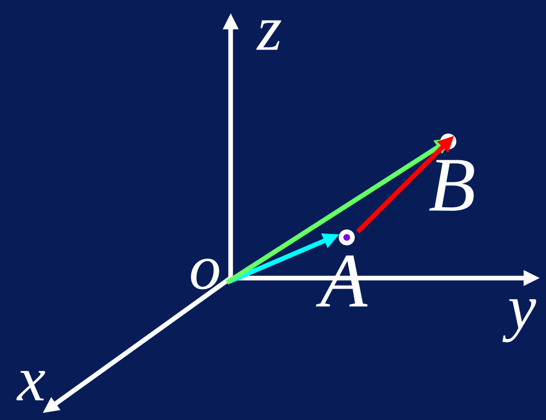
$$=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$，因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

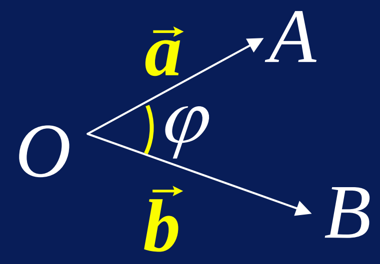
(2) 方向角与方向余弦

两非零向量的夹角：

设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$, 任取空间一点 O ,

作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，称

$$\varphi=\angle AOB \ (0\leqslant \varphi\leqslant \pi)$$



为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角. 记作

$$(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\varphi \text{ 或 } (\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a})=\varphi$$

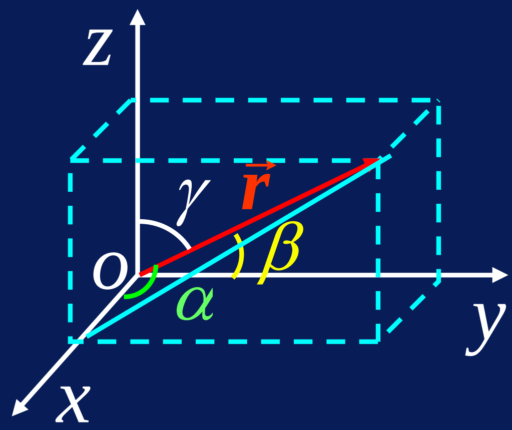
类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

方向角：给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$,

称 $\vec{r}$ 与三坐标轴正向的夹角 α, β, γ 为其方向角.

方向角的余弦称为其方向余弦.

向量方向余弦的坐标表示式:



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{r}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{r}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{r}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

方向余弦的性质:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

方向余弦通常用来表示向量的方向.

向量 $\vec{r}$ 的单位向量 :

$$\vec{r}^{\circ}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{1}{|\vec{r}|}(x,y,z)$$

$$=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

例9 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，

计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例10 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 A 的坐标 .

解 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$，　则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限，故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\,\overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3,\ 3\sqrt{2},\ 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

内容小结

1. 空间直角坐标系　（轴、面、卦限）

（注意它与平面直角坐标系的区别）

2. 空间两点间距离公式

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3. 向量的概念　（注意与标量的区别）

4. 向量的加减法　（平行四边形法则）

5. 向量与数的乘法　（注意数乘后的方向）

6. 向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标.

（注意分向量与向量的坐标的区别）

7. 向量的模与方向余弦的坐标表示式.

8. 向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{r}|}(x, y, z)$$

$$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

思考题

设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x轴和y轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1的坐标为(1,0,3)，求P_2的坐标.

解 设P_2的坐标为(x, y, z)，则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1, y, z-3)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}^{\circ}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}=\left(\frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|},\frac{y}{|\overrightarrow{P_1P_2}|},\frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}\right)$$

设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为 α、β、γ

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\therefore\quad \cos\gamma=\pm\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}^{\circ}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}=\left(\frac{x-1}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|},\frac{y}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|},\frac{z-3}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}\right)$$

$$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow z = 4,\ \ z = 2,$$

P_2的坐标为 $(2,\sqrt{2},4)$, $(2,\sqrt{2},2)$.

备用题

例1-1 求点 $M(4,3,-2)$ 到 y 轴的距离.

解 过点 M 作 y 轴的垂面，则垂足点为 $P(0,3,0)$.

故点 M 到 y 轴的距离为:

$$|PM| = \sqrt{(4-0)^2 + (3-3)^2 + (-2-0)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

例1-2 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$,

$$\left|PP_1\right| = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

$$\left|PP_2\right| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$\because \quad \left|PP_1\right| = 2\left|PP_2\right|, \quad \therefore \quad \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$

解得 $x = \pm 1$，所求点为 $(1,0,0)$，$(-1,0,0)$.

例1-3 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 $$\left|M_1M_2\right|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$\left|M_2M_3\right|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$\left|M_3M_1\right|^2 = (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

$\therefore \quad \left|M_2M_3\right| = \left|M_3M_1\right|,$ 原结论成立.

例9-1

解　所求向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个反向

$$\because \quad |\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11,$$

$$\therefore \quad \vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{6}{11}\vec{i} + \frac{7}{11}\vec{j} - \frac{6}{11}\vec{k},$$

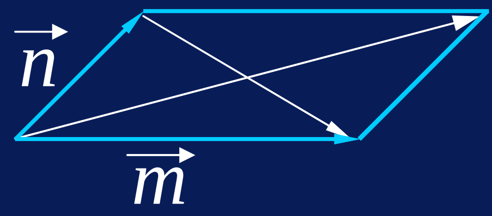
或 $$-\vec{a}^\circ = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{6}{11}\vec{i} - \frac{7}{11}\vec{j} + \frac{6}{11}\vec{k}.$$

例9-2 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m},\vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度.

解 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|,\ |\vec{m}-\vec{n}|$

$$\because\quad \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$$



$$\therefore\quad |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$$

$$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$$

该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$