第四节

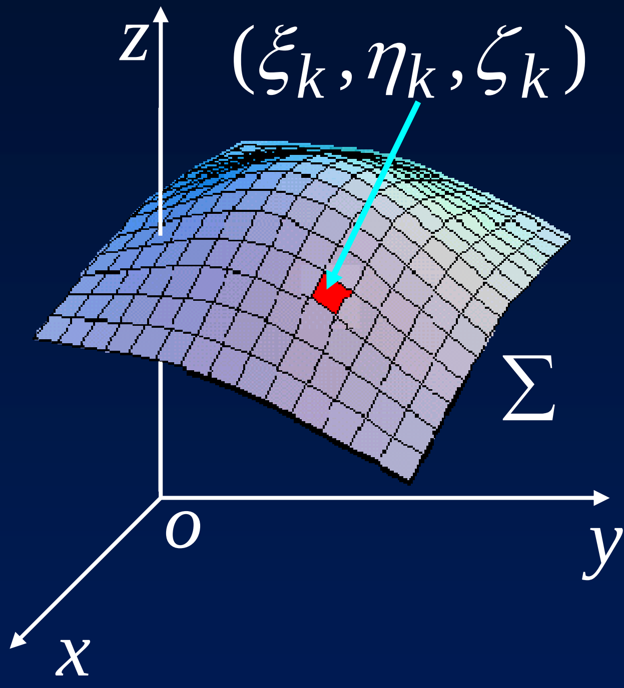
第一类曲面积分

- 一、第一类曲面积分的概念与性质
- 二、第一类曲面积分的计算法
- 三、五类积分的统一表述及其共性

一、第一类曲面积分的概念与性质

1. 问题引入 非均匀曲面形构件的质量

采用 “分割, 近似, 求和, 取极限”的方法，可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中$\rho(x,y,z)$表示连续的面密度，

λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

目录 上页 下页 返回 结束

2. 定义 10.3 设函数 $f(x, y, z)$ 在分片光滑的曲面 $\sum$ 上有界. 将$\sum$ 任意分成 n 小块 $\Delta\Sigma_i$， 记第i小块的面积为ΔS_i，

在第i小块曲面$\Delta\Sigma_i$上 任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot \Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

并作黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$.

如果当各小块曲面直径的最大值$\lambda\to 0$时，和的极限总存在, 即极限值和曲面$\sum$的分法及点

M_i的取法无关，则称该极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面Σ上的第一类曲面积分或对面积的曲面积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$， 即

被积函数

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i}.$$

积分曲面

被积表达式

面积元素

积分和式

注　1° 当函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上连续时,

曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在.

2° 曲面形构件的质量可以表示为

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu(x,y,z)\mathrm{d}S$$

3° 曲面形构件的质心坐标可以表示为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} x\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} y\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} z\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

4° 当被积函数为常数 1 时, 曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \text{曲面}\Sigma\text{的面积}$$

5° 当积分曲面为封闭曲面时, 曲面积分可表示为

$$\oiint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$$

3. 性质

(1) 线性性质：$\forall \alpha,\ \beta \in R^1$

$$\iint_{\Sigma} [\alpha f(x,y,z) \pm \beta g(x,y,z)] \mathrm{d}S$$

$$= \alpha \iint_{\Sigma} f(x,y,z) \mathrm{d}S \pm \beta \iint_{\Sigma} g(x,y,z) \mathrm{d}S$$

(2) 可加性：曲面Σ由Σ_1和Σ_2组成

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z) \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z) \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z) \mathrm{d}S$$

(3) 对称性：

对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$,

对称性的利用类似于三 重积分.

如：若 $f(x,y,z)$在Σ上连续， Σ关于 yoz 面对称，

则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

$\Sigma_1:\Sigma$在$x\geq 0$的部分.

二、第一类曲面积分的计算法

基本思路: 求曲面积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算二重积分

定理10.6 设 $f(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面 Σ 上的连续函数. $\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$, 函数 $z = z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的偏导数, 则有下面的计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^{\,2}(x,y) + z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

补：重积分的几何应用

设光滑曲面$\boldsymbol{S: z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}}$,

曲面的面积元素

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma,$$

故有曲面面积公式

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma,$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$，且$F_z \neq 0$，

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},(x,y)\in D_{xy},$$

因此

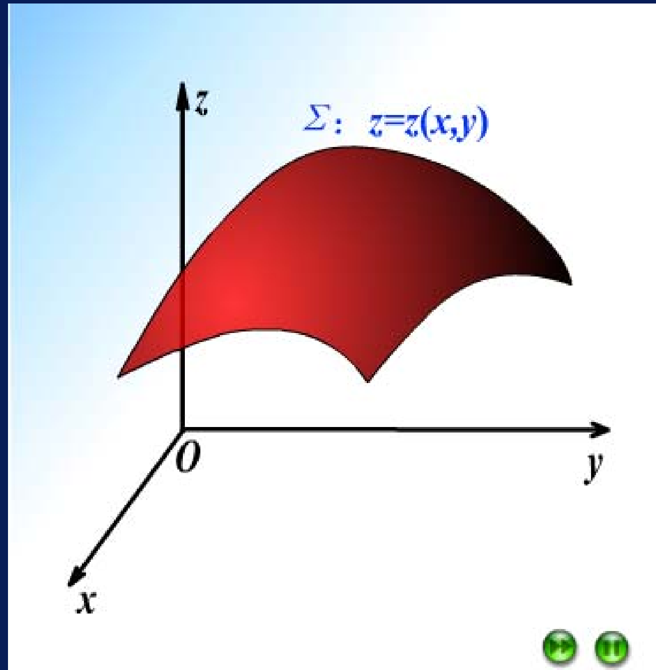
$$A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2}}{|F_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 如图所示

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$(\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i))$$



$$\Delta S_i = \iint_{(\Delta D_i)_{xy}} \sqrt{1 + z_x^{\,2}(x,y) + z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1 + z_x^{\,2}(\xi_i',\eta_i') + z_y^{\,2}(\xi_i',\eta_i')}\cdot(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$\because \quad f(x,y,z)$在Σ上连续

$\therefore \quad \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在

故可取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')$, $(\ \zeta_i'=z(\xi_i',\eta_i')\ )$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi_i',\eta_i',\zeta_i'})$$

$$\cdot\sqrt{1+z_x{}^2(\underline{\xi_i',\eta_i'})+z_y{}^2(\underline{\xi_i',\eta_i'})}\cdot(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注 1° 若曲面 Σ： $x = x(y,z) \quad (y,z) \in D_{yz}$， 则

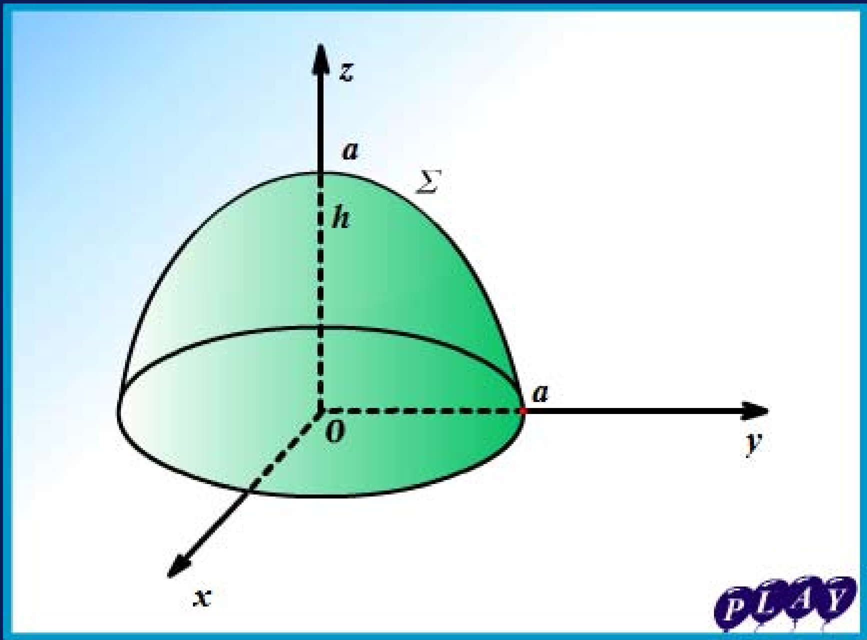
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z) \cdot \sqrt{1 + x_y^{\,2}(y,z) + x_z^{\,2}(y,z)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2° 若曲面 Σ： $y = y(x,z) \quad (x,z) \in D_{xz}$， 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1 + y_x^{\,2} + y_z^{\,2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.



解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

目录 上页 下页 例题 继续

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$= a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{a^2 - \rho^2}$$

$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2 - \rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$= 2\pi a \ln\frac{a}{h}.$$

$$\Sigma : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

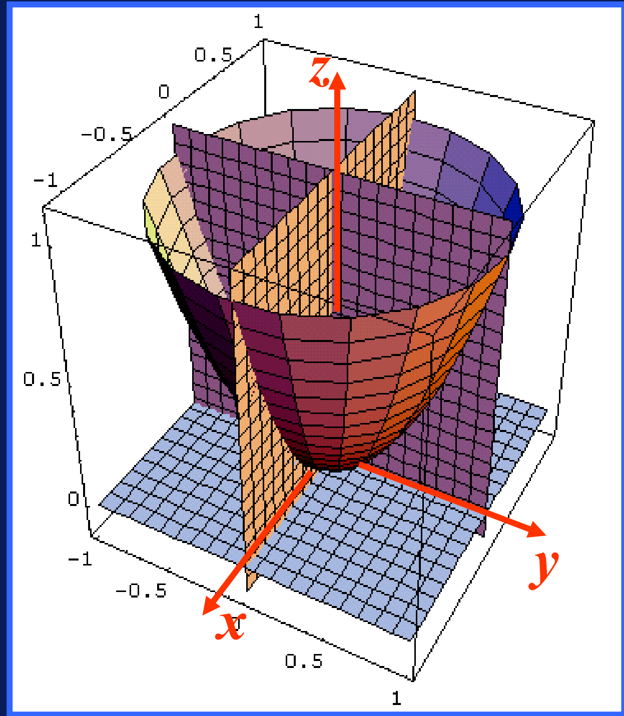
$$D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2 - h^2$$

$$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2 计算$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为抛物面

$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$.



解 依对称性知：

抛物面$z=x^2+y^2$关于z轴对称，

$|xyz|$关于变量x和y为偶函数，

$$\therefore \quad \iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}|xyz|\mathrm{d}S,$$

(其中Σ_1为第一卦限部分曲面)

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma:\quad z=x^2+y^2$

$$=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}|xyz|\,\mathrm{d}S\quad=4\iint_{\Sigma_1}xyz\,\mathrm{d}S$$

$$=4\iint_{D_1}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$$\iint_{\Sigma} |xyz| \mathrm{d}S = 4\iint_{D_1} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho$$

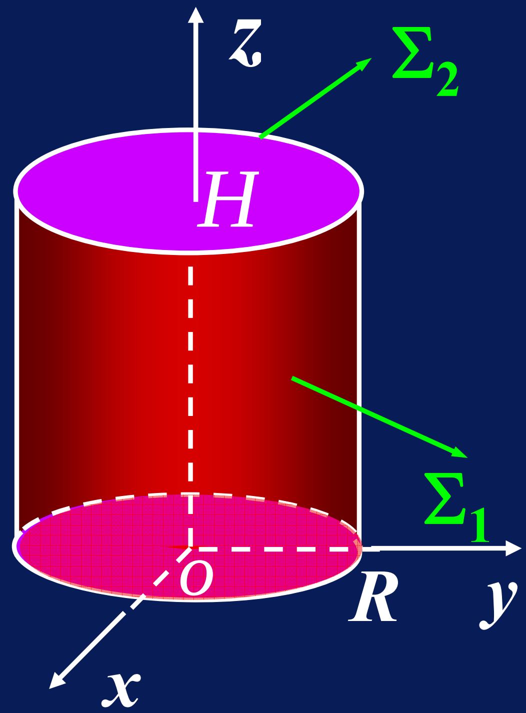
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^5 \sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

令$u = 1+4\rho^2$

$$= \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2 \mathrm{d}u = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

例3 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ是介于平面 $z=0,\ z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$



$\Sigma_1:\ x=\sqrt{R^2-y^2},\qquad (y,z)\in D_{yz}$

$\Sigma_2:\ x=-\sqrt{R^2-y^2},\qquad (y,z)\in D_{yz}$

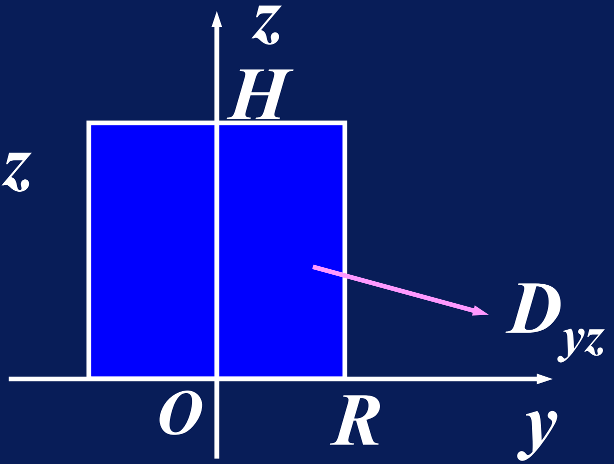
$D_{yz}=\{(y,z)\,\big|\,|y|\le R,\ 0\le z\le H\}.$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}=2\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}\right)^2 + 0}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



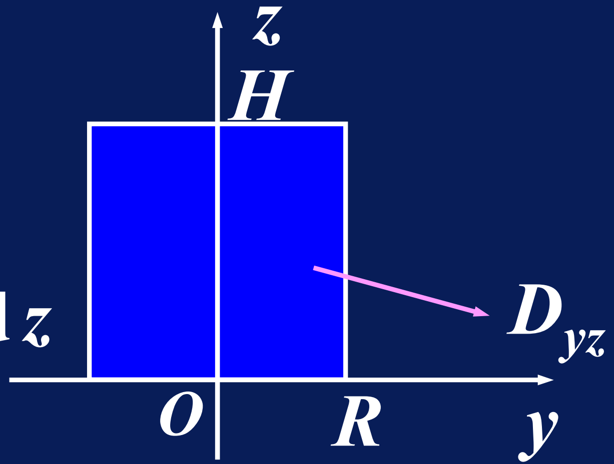
Σ_1 : $x = \sqrt{R^2 - y^2}$,

$(y, z) \in D_{yz}$

$$\therefore \quad I = 2\iint_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}S}{R^2 + z^2}$$

$$= 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 + z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

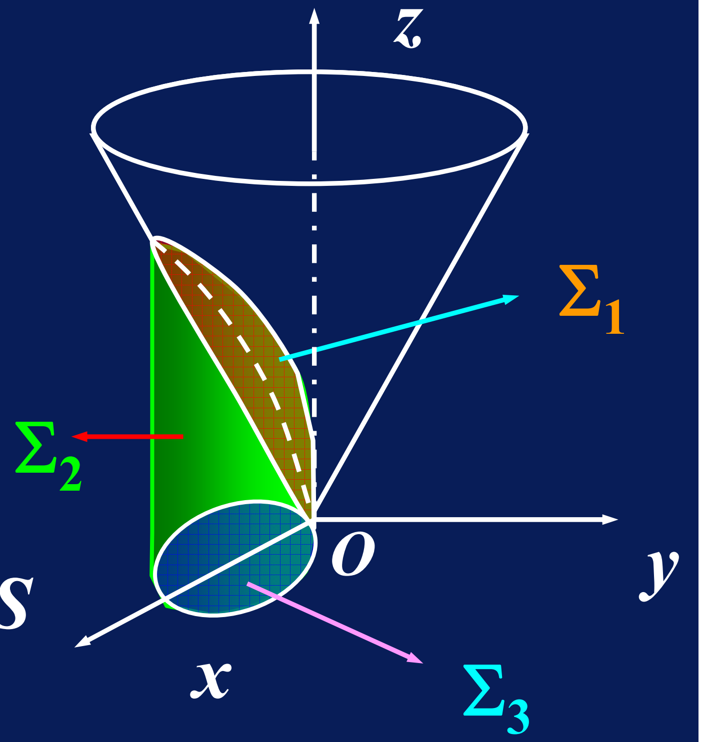


$$= 2\cdot 2\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\int_0^H \frac{1}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}z$$

$$= 4R\arcsin\frac{y}{R}\bigg|_0^R\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\bigg|_0^H$$

$$= 2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

例4 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(xyz+1)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$及xOy面所围空间立体的整个表面.



解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$

$$I=\underline{\oiint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S}+\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

关于y 奇函数

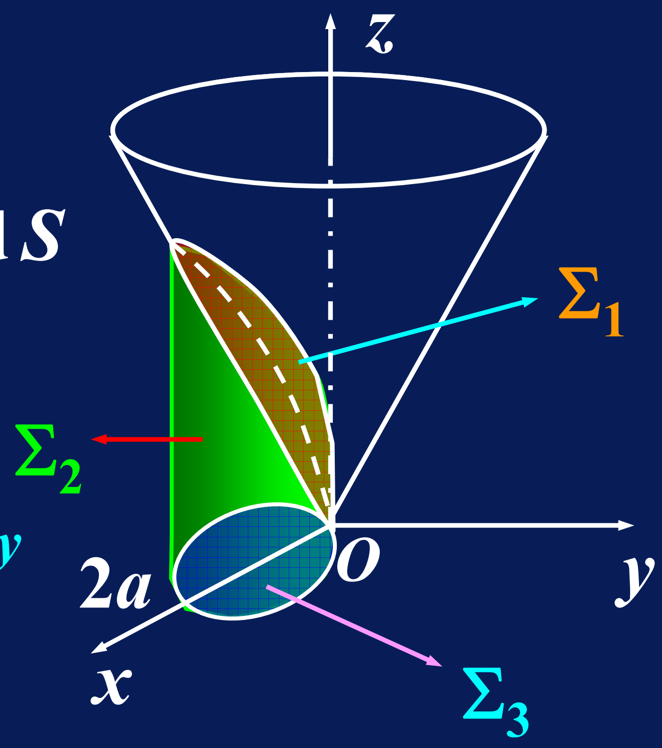
$$\oiint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\boxed{\Sigma_1+\Sigma_2}} xyz\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S$$

关于 zOx 面对称

目录 上页 下页 例题 继续

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = 0 + \iint_{\Sigma_3} xy\cdot 0\,\mathrm{d}S = 0.$$

$$I = \oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3}\mathrm{d}S$$

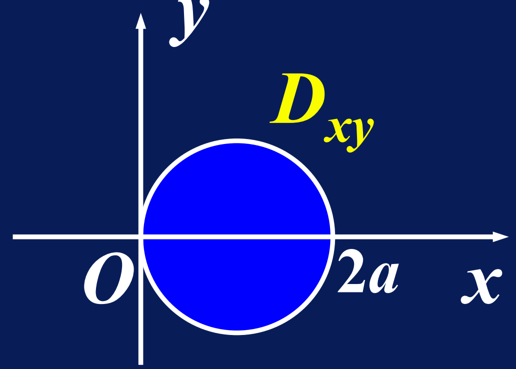


(1) Σ_1 : $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad (x,y)\in D_{xy}$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi a^2$$



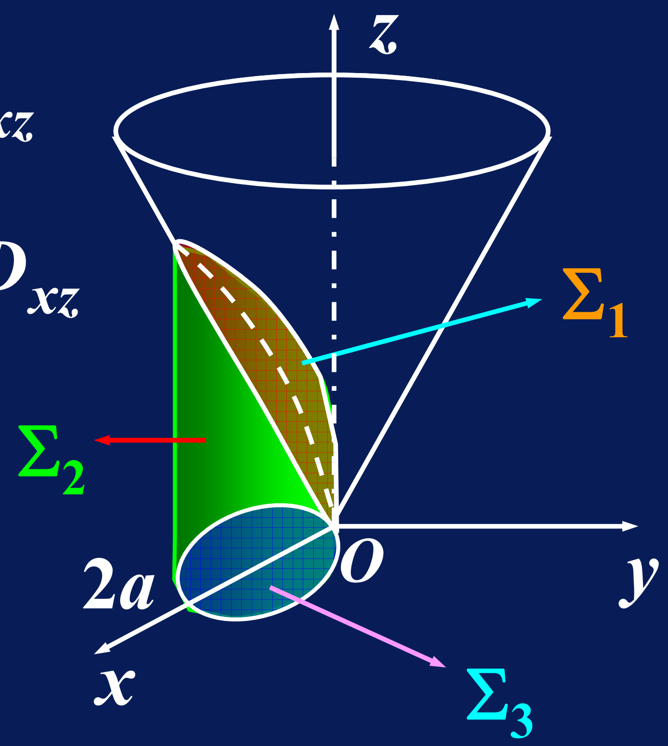
(2) $\Sigma_2 = \Sigma_2' + \Sigma_2''$,

Σ_2' : $y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad (x,z) \in D_{xz}$

Σ_2'' : $y = -\sqrt{2ax - x^2}, \quad (x,z) \in D_{xz}$

(方法1) 由对称性，得

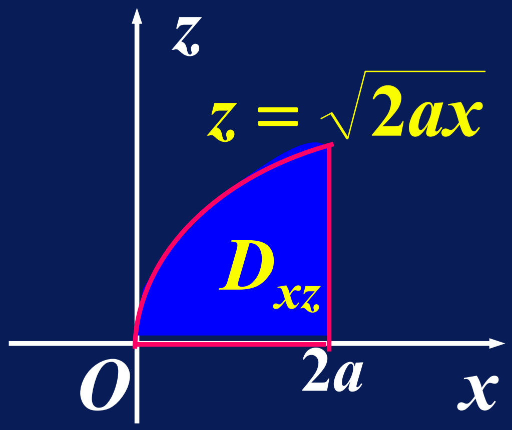
$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = 2\iint_{\Sigma_2'} \mathrm{d}S$$



$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2ax \end{cases}$$

消去y

$$\Longleftrightarrow \quad z^2=2ax \quad (z\ge 0)$$

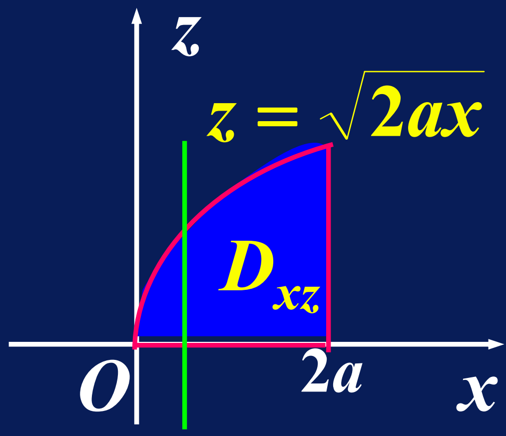


$$\Sigma_2' : \; y=\sqrt{2ax-x^2}, \quad (x,z)\in D_{xz}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\therefore \iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_2'}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xz}}\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}\,S = 2\iint_{D_{xz}} \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$$



$$= 2\int_0^{2a}\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\,\mathrm{d}\,z$$

$$= 2a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}}\,\mathrm{d}\,x = (2a)^2\int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2a}\right)$$

$$= 4a^2 \cdot \left(-2\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}\,\Bigg|_0^{2a}\right) = 8a^2$$

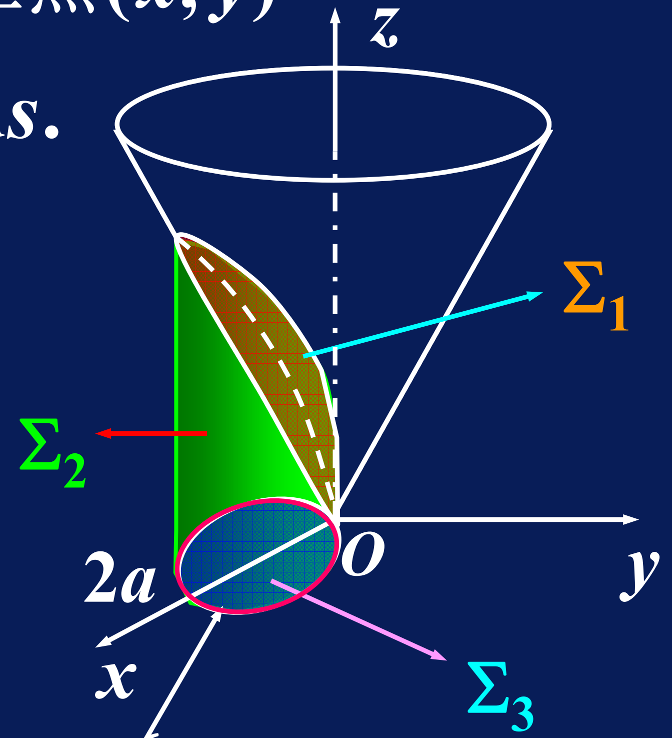
(方法2) 由第一类曲线积分的几何意义，知

当$f(x,y)$表示立于L上的柱面在点(x,y)处的高时，$S_{柱面面积} = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a}\sqrt{1+\cos\theta}\cdot a\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 8a^2$$



$L:\begin{cases} x-a = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases},$

$$\therefore I = \iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3}\mathrm{d}S = \sqrt{2}\pi a^2 + 8a^2 + \pi a^2.$$

三、五类积分的统一表述及其共性

有共同的物理意义

定积分:	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	量
二重积分:	$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$	平面薄板质量
三重积分:	$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$	空间物体质量
第一类曲线积分:	$\int\limits_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$	曲线构件质量
第一类曲面积分:	$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$	曲面构件质量

当被积函数非负时

这五类积分的共性：

（1）对数量值函数的积分；

（2）数量值函数均定义在有界的几何形体上；

（3）定义积分步骤相同：
分割、近似、求和、取极限；

（4）均为黎曼和的极限.

因此可以给出上述五种积分定义的统一表述式.

定义10.4 设 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界的几何形体(直线段、平面闭区域、空间闭区域、曲线段或曲面)，$f(x)$ 是在在 I 上有定义并且有界的数量值函数。将 I 任意划分为 n 个"子块"：$\Delta I_1,\Delta I_2,\cdots,\Delta I_n$，并将 ΔI_i 的度量(长度,面积,体积)记作 Δv_i（$i=1,2,\cdots,\ n$），记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta I_i$ 的直径$\}$。几何形体的直径可统一定义为该几何形体中两点之间距离的最大值). 在每个 ΔI_i 上任取一点 x_i，作乘积 $f(x_i)\cdot\Delta v_i$（$i=1,2,\cdots,\ n$），并作黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta v_i$$

如果当$\lambda \to 0$时，黎曼和的极限总存在，即极限值与I的划分方法及点x_i的取法无关，则称此极限为函数$f(x)$在几何形体I上的积分，记作$\int_I f(x)\mathrm{d}v$，即

被积函数

$$\int_I \underbrace{\underline{f(x)}\mathrm{d}v}_{\text{被积表达式}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta v_i$$

积分区域

被积表达式

当被积函数为密度函数时，五种积分表示几何形体I的质量.

目录 上页 下页 返回 结束

I是闭区间$[a, b]$ → $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ → $[a, b]$的长度

I是平面闭区域D → $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ → D的面积

I是空间闭区域Ω → $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v$ → Ω的体积

I是曲线 Γ → $\int\limits_\Gamma f(x, y, z)\mathrm{d}s$ → Γ的弧长

I是曲线 Σ → $\iint\limits_\Sigma f(x, y, z)\mathrm{d}S$ → Σ的面积

被积函数为常数 1 时的几何含义

内容小结

1. 定义: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

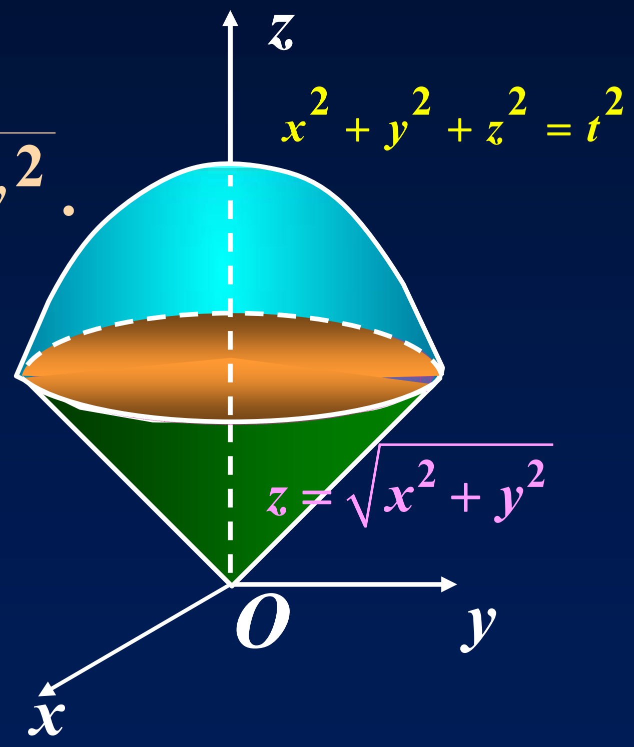
2. 计算: $\Sigma : z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注意：利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

思考题 求$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\ge\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$



解 将$x^2+y^2+z^2=t^2$分成

$\Sigma_1: z\ge\sqrt{x^2+y^2}$和

$\Sigma_2: z<\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0.$$

Σ_1在xOy面上的投影区域D为$x^2+y^2\le\frac{t^2}{2}$;

$$z=\sqrt{t^2-x^2-y^2},\quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

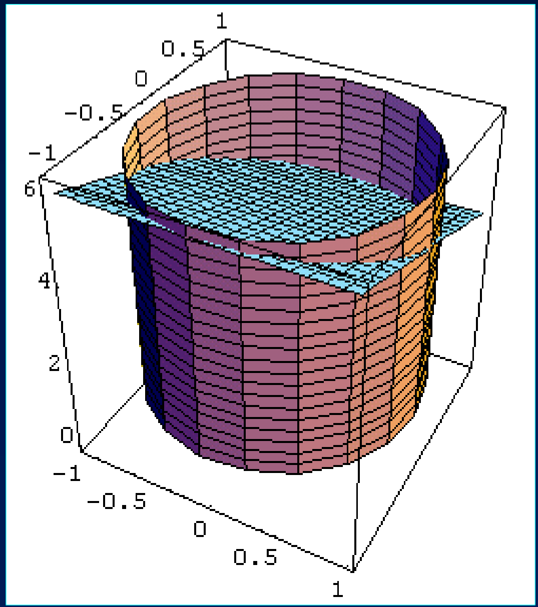
因此 $F(t)=\iint\limits_D(x^2+y^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=t\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{\rho^3}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\left(\frac{4}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)\pi t^4.$$

备用题

例1-1 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分.

解 积分曲面Σ: $z=5-y$,



投影域: $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$

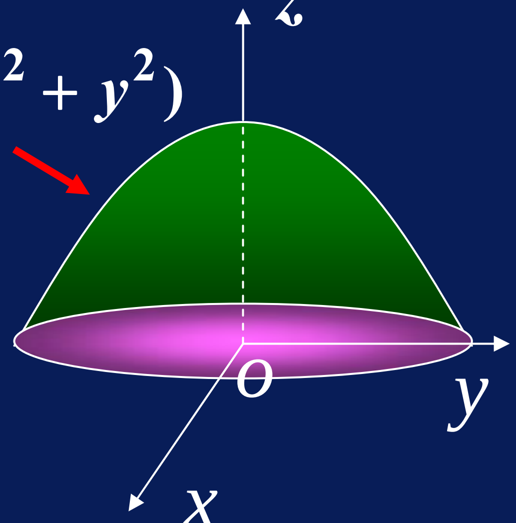
$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+5-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(5+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5(5+\rho\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=125\sqrt{2}\pi.$$

例1-2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$，$\Sigma$是曲面 $z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在xOy面上方部分.



解 Σ在xOy面上投影是

圆域$D: x^2+y^2\le 2$;

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{D}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left[1-\frac{1}{2}\rho^2\right]\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^3)\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{5}(3\sqrt{3}-2)\pi.$$

例1-3 设一半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,其上一点的面密度与该点到Oz轴的距离平方成正比. 求其质心和绕Oz轴的转动惯量.

解 设比例常数为k，则$\mu=k(x^2+y^2)$.

$$m=k\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=ka\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi ka^4.$$

由对称性知， $\bar{x}=\bar{y}=0.$

对xOy面的静矩

$$M_{xy}=k\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=ka\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\tfrac{1}{2}\pi ka^5,$$

故 $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\pi ka^5}{\frac{4}{3}\cdot\pi ka^4}=\dfrac{3}{8}a,$ 质心为$(0,0,\dfrac{3}{8}a)$.

转动惯量:

$$I_z=k\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}S=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^5}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi ka^6\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}\pi ka^6.$$

例2-1 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ为内接于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

解 被积函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 关于坐标面和原点均对称，积分曲面 Σ 也具有对称性，

故原积分 $\oiint\limits_{\Sigma}=8\iint\limits_{\Sigma_1}$，(其中$\Sigma_1$表示第一卦限部分曲面)

Σ_1: $x+y+z=a$, 即$z=a-x-y$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=8\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=8\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\sqrt{3}a^4.$$

例2-2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)\,\mathrm{d}S$,

其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 由对称性知: $\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$,

故 $$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)\,\mathrm{d}S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\frac{4}{3}\pi a^4=\frac{7}{3}\pi a^4$$

例3-1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$,

Σ是柱面$x^2+y^2=4$介于$0\le z\le 6$的部分.

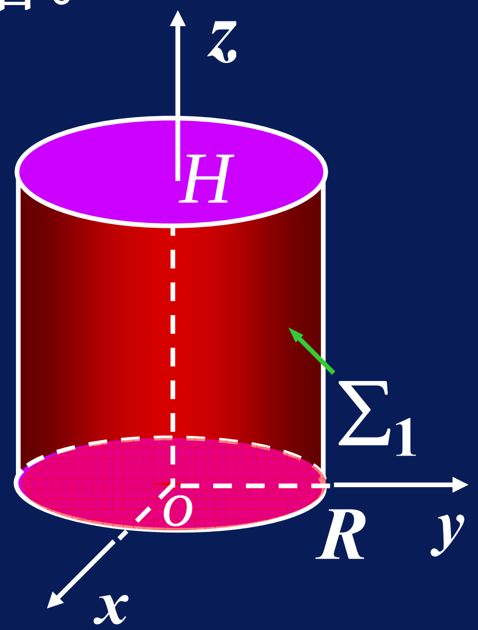
解 应当将柱面Σ投影到yOz或xOz平面上。由对称性，只需算柱面在第一卦限 部分Σ_1的4倍。

Σ_1在yOz面上的投影

$$D: 0\le y\le 2, 0\le z\le 6.$$

Σ_1方程$x=\sqrt{4-y^2}$,

则$x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$，$x_x=0$得



$$x_y = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}, \quad x_x = 0$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{4-y^2}},$$

故 $$\iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}S = 4\iint_{D} \frac{2z^2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 8\int_0^6 z^2 \mathrm{d}z \int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4-y^2}}$$

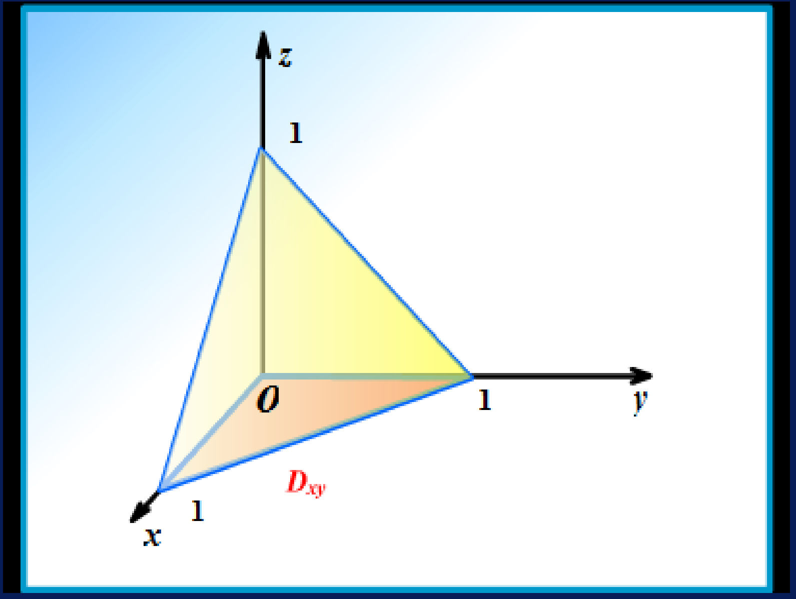
$$= 288\pi.$$

例4-1 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面

$$x+y+z=1$$

与坐标面所围成的四面体的表面.

解 设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$



分别表示Σ在平面

$x=0, y=0, z=0,$

$x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} \right) xyz\,\mathrm{d}S$$

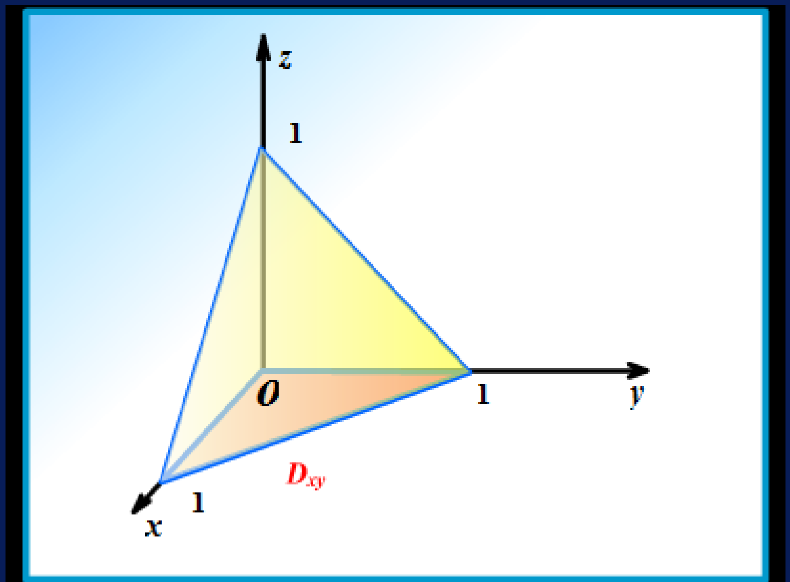
$$\Sigma_4 : z = 1 - x - y,$$

$$D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

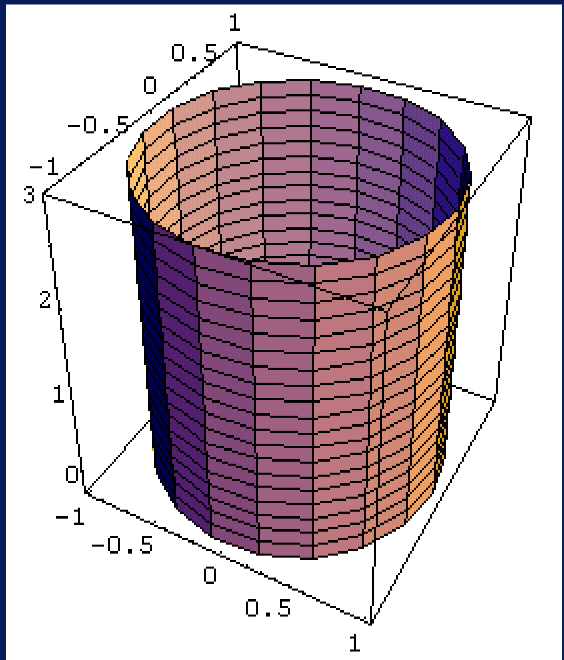
$$= \sqrt{3} \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1 - x - y)\,\mathrm{d}y$$

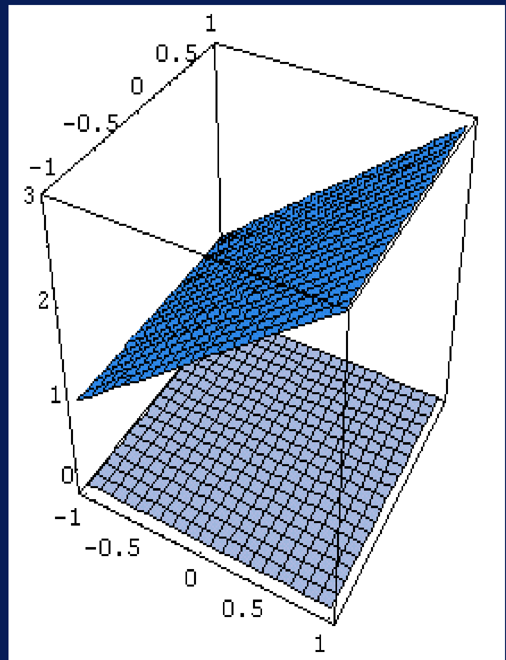
$$= \sqrt{3} \Big/ 120$$

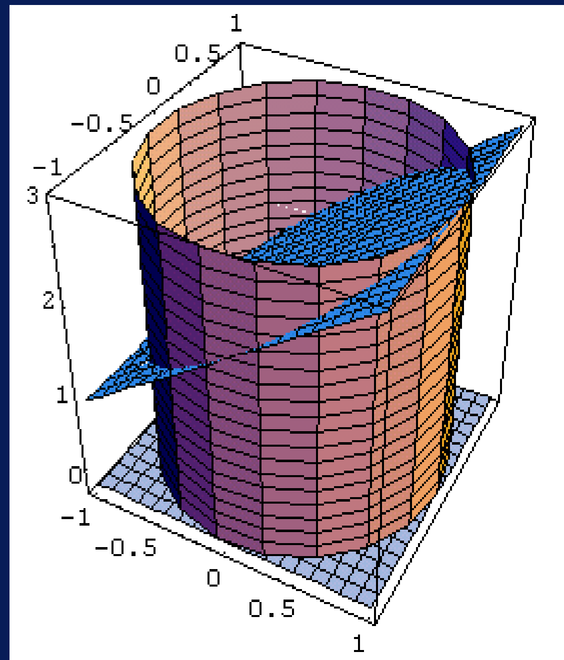


例4-2 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$， 其中 Σ是圆柱面 $x^2+y^2=1$

平面 $z=x+2$及 $z=0$所围成的空间立体的表面.







解 $\displaystyle \oiint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3}$

目录 上页 下页 返回 结束

其中Σ_1：$z=0$, Σ_2：$z=x+2$, Σ_3：$x^2+y^2=1$.

投影域D_1：$x^2+y^2\le 1$

显然 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

$\iint\limits_{\Sigma_2} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_1} x\sqrt{1+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

将Σ_3投影域选在xoz面上.

（注意：$y=\pm\sqrt{1-x^2}$分为左、右两片）

$$\iint\limits_{\Sigma_3} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_{31}} x\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_{32}} x\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma_3} x\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_{31}} x\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_{32}} x\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{D_{xz}} x\sqrt{1 + {y'_x}^2 + {y'_z}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint_{D_{xz}} x\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\int_0^{x+2}\mathrm{d}z$$

$$= \pi,$$

$$\therefore \quad \oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 0 + 0 + \pi = \pi.$$

例4-3 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$,

Σ是曲面$z^2=x^2+y^2$介于$-1\le z\le 2$的部分.

解 设Σ位于xOy平面下面部分为Σ_1, 即$-1\le z\le 0$。

Σ_1在xOy面上投影是圆域D_1

$$D_1:\ x^2+y^2\le 1,\ z=-\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

位于xOy平面上面部分为Σ_2, 即 $0\le z\le 2$.

Σ_2 在xOy面上投影是圆域D_2

D_2 : $\quad x^2+y^2 \le 4,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_1}2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1} 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{4}\quad+4\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 16$$

$$=17\pi.$$