§1.2 排列及其逆序数

一、全排列及其逆序数

问题　把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义1.1 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）．

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

例如　$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

同理　$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为**标准排列**（**自然排列**）.

定义1.2 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

定义　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.记做 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例如　排列32514 中，

0　　0　　1

3　2　5　1　4

1　　逆序数为3

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

记做　$\tau(32\,514)=5$

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，在123组成的全排列中，有3个偶排列123，231，312；有三个奇排列132，213，321

- 一般说来，n 个数的全排列中，奇偶排列各占一半。

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码之和，即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数，这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.(从“1”开始法)

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即从排列中第一个元素开始，依次算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.（从“头”开始法）

例1　求排列32514的逆序数.

解　在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

3 2 5 1 4

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

于是排列32514的逆序数为

$$\tau = \mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{3} + \mathbf{1} = 5.$$ （从头开始法）

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解 2 1 7 9 8 6 3 5 4 （从“1”开始）

$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$

0 1 0 0 1 3 4 4 5

$$\tau = 1 + 0 + 4 + 4 + 5 + 4 + 3 + 0 + 1$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

$(2)\quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解

$$\overbrace{n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 321}_{(n-2)}}^{n-1}$$

$$\tau=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列;

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

$$(3)\quad 1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2$$

（从“头”开始

解 $$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & \cdots & (2n-1) & (2n) & (2n-2) & (2n-4) & \cdots & 4\ 2 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 \end{array}$$

$$\tau = 0+\cdots+0+2+4+\cdots+2(n-1)$$

$$= n(n-1)$$

此排列为偶排列。