通路、回路与图的连通性

通路与回路

定义8.10 给定无向标定图G，G中顶点与边的交替序列

$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，其中$v_{i-1}, v_i$是$e_i$的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路. l 为长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

(3) 基本(初级)通路与基本(初级)回路：Γ中所有顶点各异，所有边也各异，则称Γ为基本(初级)通路(路径)，又若$v_0=v_l$，则称Γ为基本(初级)回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

有向图中, 通路、回路及分类的定义与无向图相似, 只要注意有向边方向的一致性.

几点说明

环（长为1的圈）的长度为1，无向图中两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

不同的圈（以长度≥3的为例）

① 定义意义下

无向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为$2l$个

有向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为l个

② 同构意义下：长度相同的圈均为1个

通路与回路的长度

定理8.3 在n 阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$的基本通路（路径）.

定理8.4 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的简单回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n 的基本回路.

图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=\langle V,E\rangle$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② 规定: $\forall v \in V$, $v \sim v$

③ ~是V上的等价关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V$且$u \sim v\}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v \in V$，$u \sim v$，则称G连通

② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ （$k \geq 1$）；$k=1$，G连通

有向图的连通性

定义8.11 $D=\langle V,E\rangle$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i可达v_j）——v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i与v_j相互可达）

性质

$\to$具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$具有自反性、对称性、传递性

有向图的连通性及分类

定义8.12 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j \vee v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

判别法

定理8.5 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理8.6 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

THE END