离散答案 A 卷

一、简答题（每小题 5 分，共 20 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	C	B	B	D	A	D

二、简答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 参考答案：

根据 R 可以看到满足自反性，对称性，传递性，因此 R 是等价关系。

等价类为[1]、[2]。

划分为{[1]，[2]}

2. 参考答案：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N},\quad f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

可以得到此函数为双射函数，因此 Z≈N.

3. 参考答案：

根据拉格朗日定理，一个有限群的任意子群的阶数整除群的阶数。现群的阶数为素数，它的因子只有 1 和这个素数，因此只有平凡子群。

4. 参考答案：

设<S, ≼>是偏序集, 如果 S 的任意子集均有上确界(最小上界)和下确界(最大下界)，则称 S 关于偏序≼作成一个偏序格. 图不是格，因为 b∨d 的值不确定。

三、数理逻辑部分（共 18 分）

1. 判断题（3 分）参考答案：

第 4 步应用全称推广规则有问题，不满足它的使用条件：在步骤 2 中使用 US 而引入的变元 c 是自由的，在后继的步骤 3 中用 ES 引入的变元 d 在公式中自由出现了，所以不能用 UG。

2. 演算题（5 分）参考答案：

(b) $P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

所以主析取范式为：

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

主合取范式为：

$P \vee Q \vee R$

3. 证明题（10 分）参考答案：

(c) 用反证法证:

1	$\neg\forall x(\forall y(H(y)\wedge N(x,y))\rightarrow\exists y(A(y)\wedge N(x,y)))$	P 假设前提
2	$\exists x(\forall y(H(y)\wedge N(x,y))\wedge\forall y\neg(A(y)\wedge N(x,y)))$	T, 1, Q_3, E_{10}
3	$\exists x\forall y(H(y)\wedge N(x,y)\wedge(\neg A(y)\vee\neg N(x,y)))$	T, 2, Q_{10}
4	$H(b)\wedge N(a,b)\wedge(\neg A(b)\vee\neg N(a,b))$	T, 3, ES, US
5	$H(b)\wedge N(a,b)\wedge\neg A(b)$	T, 4, E_8, E_{18}
6	$H(b)\wedge\neg A(b)$	T, 5, I_2
7	$\forall x(H(x)\rightarrow A(x))$	P

8	$H(b)\rightarrow A(b)$	T, 7, US
9	$H(b)$	T, 6, I_2
10	$A(b)$	T, 8, 9, I_3
11	$\neg A(b)$	T, 6, I_2
12	$A(b)\wedge\neg A(b)$	T, 10, 11, 矛盾

四、集合论部分（共 12 分）

1. 计算题（2 小题，每题 3 分，共 6 分）参考答案：

（1）① $f(1)=1$ $f(2)=2$ $f(3)=2$

② $f(1)=2$ $f(2)=2$ $f(3)=3$

③ $f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x=1,\\ 2 & \text{otherwise.}\end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases}2 & \text{if } x=2,\\ 3 & \text{otherwise.}\end{cases}$

⑤ $f(x)=\begin{cases}3 & \text{if } x=3,\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases}$

（2）有。例如，f: N→N, $f(x)=x+1$, N 为自然数集。

2. 证明题（6 分）参考答案：

(1) 证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

先用数学归纳法证明对任一 $n>0$ 有 $R^n \subseteq t(R)$.

由传递闭包的定义可知 $R \subseteq t(R)$.假设 $R^n \subseteq t(R)$，$n \geqslant 1$.令 $(a,b) \in R^{n+1}$，因为 $R^{n+1}=R^n \circ R$，故至少存在一个 $c \in X$，使 $(a,c) \in R^n$，$(c,b) \in R$.由归纳假设，$R^n \subseteq t(R)$，$R \subseteq t(R)$，故有 $(a,c) \in t(R)$，$(c,b) \in t(R)$.因为 $t(R)$ 是传递的，故 $(a,b) \in t(R)$.由此证得 $R^{n+1} \subseteq t(R)$.

由于对每个 n 均有 $R^n \subseteq t(R)$，故有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

(2) 证明 $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

先证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的.令 (a,b)，(b,c) 是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 中的任意两个元素，则必存在 $s \geqslant 1$，$t \geqslant 1$，使 $(a,b) \in R^s$，$(b,c) \in R^t$，从而 $(a,c) \in R^s \circ R^t$.因为 $R^s \circ R^t = R^{s+t}$，所以 $(a,c) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，由此可见 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的.

由传递闭包的定义可知

$$t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

由此定理得证.

五、代数系统部分（共 18 分）

（1）（10 分）参考答案：

（本题有多种证明方法，只要逻辑清楚，结论正确即可）

答案示例一：

证明：显然$e \in H$, 故 H 非空。

对任意$x, y \in H, <x, e> \in R, <y, e> \in R$, 由 R 是 G 上的等价关系，由对称性得到$<e, y> \in R$，然后由传递性得$<x, y> \in R$

上式可改写为$<x * e,\ x * x^{-1} * y> \in R$

由题设条件可得$<e,\ x^{-1} * y> \in R$

上式等价于$<x^{-1} * y * (x^{-1} * y)^{-1},\ x^{-1} * y * e> \in R$

再次运用题设条件，可得$<(x^{-1} * y)^{-1}, e> \in R$

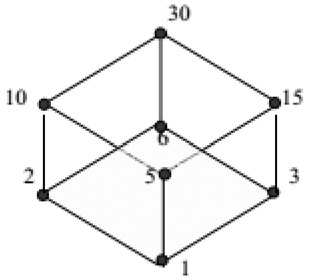
即$<x * y^{-1}, e> \in R$

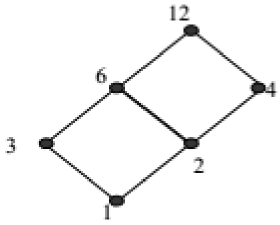
因而有 $x * y^{-1} \in H$

所以 H 是 G 的子群。

（2）（8 分）参考答案：

由题意知，$<S_{30},\ |>$和$<S_{12},\ |>$均是偏序集，其哈斯图分别如下图所示：





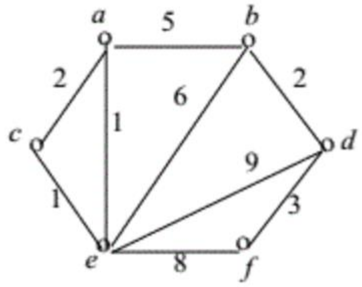
由布尔代数定义可知，$< S_{30}, | >$每对元素均存在最大下界和最小上界，故是格，又因为满足分配律，且每个元素都有补元，故是布尔代数。
而在$< S_{12}, | >$中，元素 2 没有补元（或者指出 6 没有补元），所以肯定不是布尔代数。

六、图论部分（共 12 分）

（1）（6 分）参考答案：

参考答案：

(1)



(2)图 $G=<V,E>$，$V=\{a,b,c,d,e,f\}$，$E=\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,d),(b,e),(c,e),(d,e),(d,f),(e,f)\}$，则邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{6\times 6}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{和}v_j\text{相邻}\\ 0 & v_i\text{和}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$

则邻接矩阵

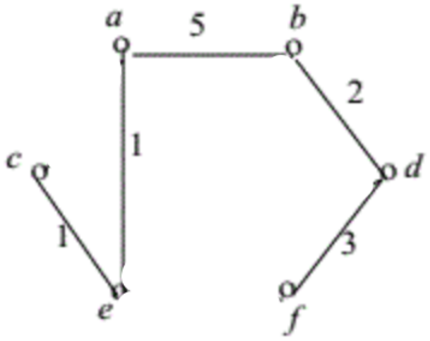
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

(1) 权值从小到大排列是 1,1,2,2,3,5,6,8,9。

第一步：选择(a,e)，添加(c,e)。或者选择(c,e)添加(a,e)。

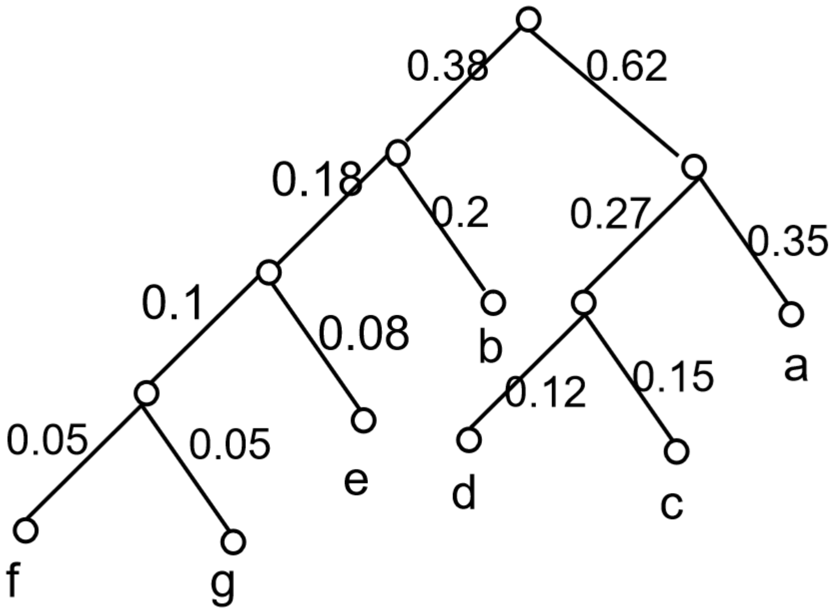
第二步：添加(b,d)，放弃(a,c).

第三步：依次添加(d,f)，(a,b)。生成最小生成树。



最小生成树的权值 W(T)=1+1+2+3+5=12。

（2）（6 分）参考答案：



a---11　b---01　c---101　d---100　e---001　f---0000　g----0001

(2)(2*0.35+2*0.2+3*0.15+3*0.12+3*0.08+4*0.05+4*0.05)*100=255