第六节 空间曲线及其方程

- 一、空间曲线的一般方程
- 二、空间曲线的参数方程
- 三、空间曲线在坐标面上的投影
- 四、空间立体或曲面在坐标面上的投影
- 五、一元向量值函数

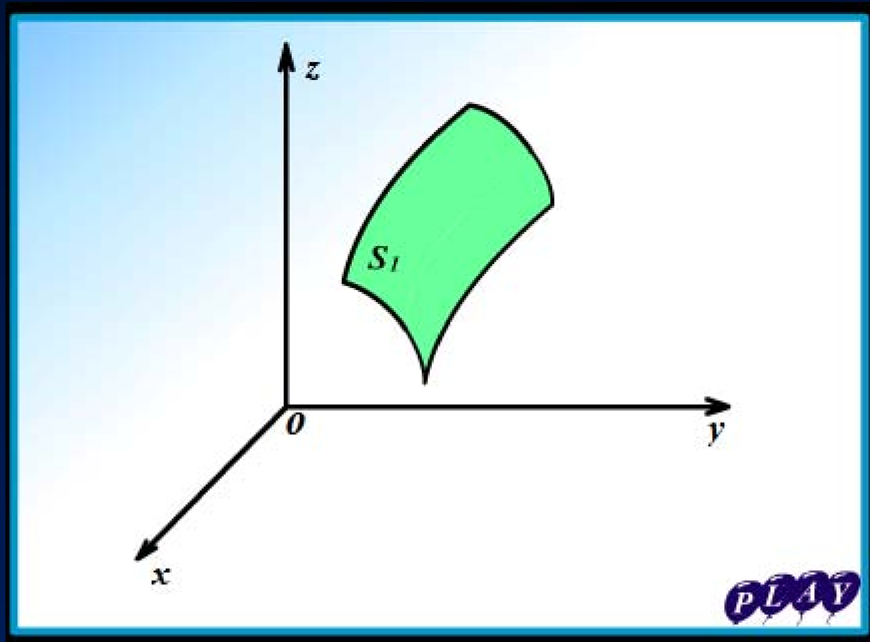
一、空间曲线的一般方程

空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程

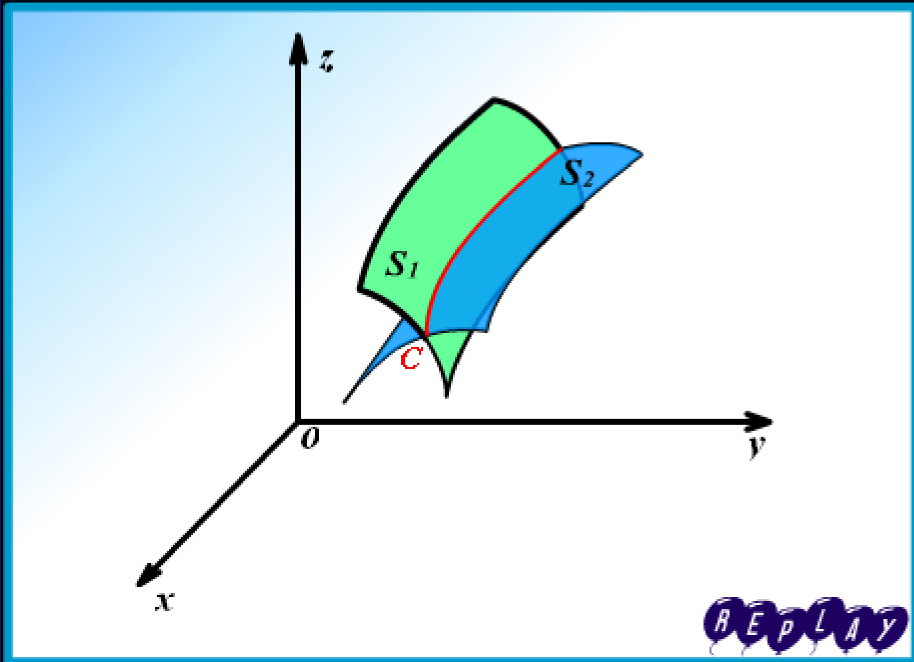
特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.



一、空间曲线的一般方程

空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



空间曲线的一般方程

特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

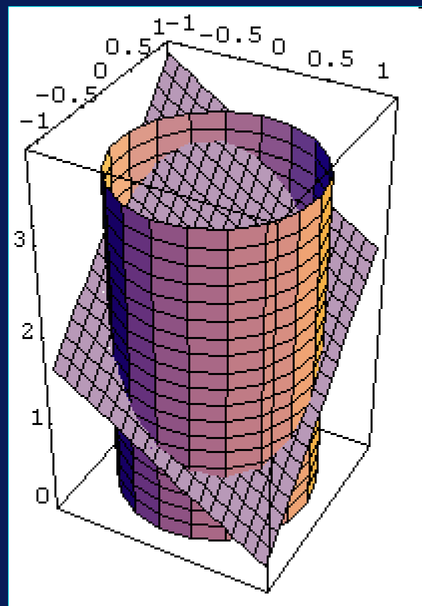
例1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面,

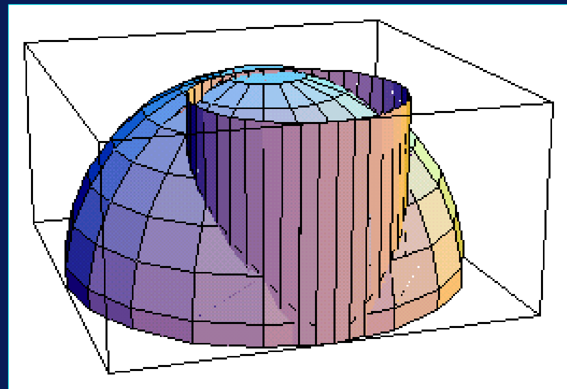
$2x+3y+3z=6$ 表示平面,

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$

交线为椭圆.



例2 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

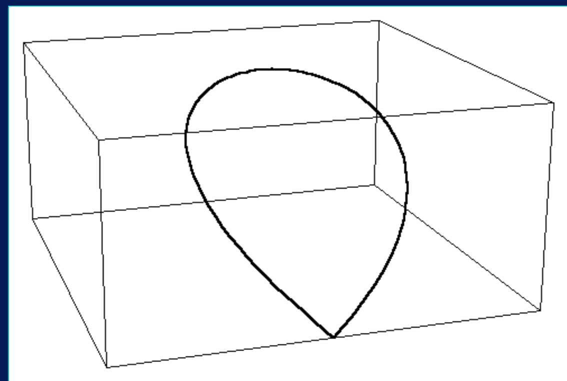


解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

上半球面,

$(x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



二、空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in I \text{—区间} \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线的参数方程

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

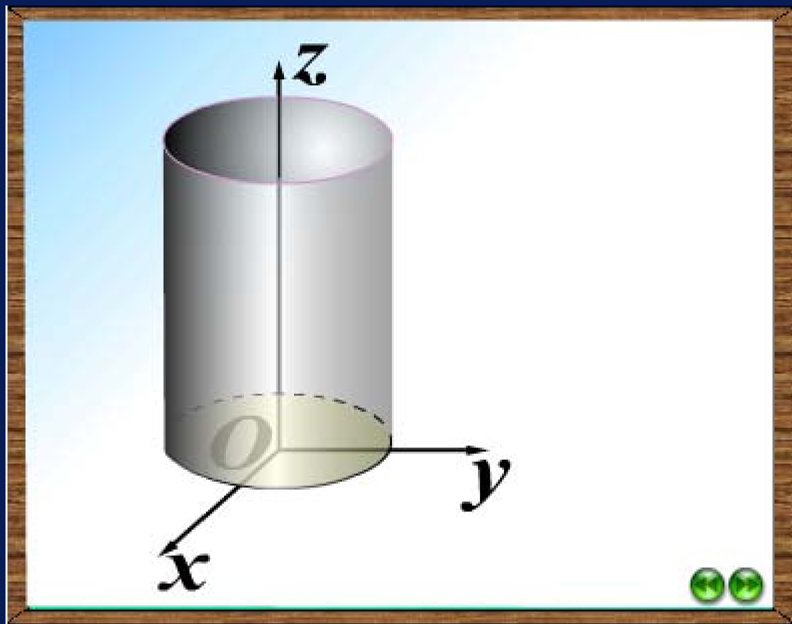
例3 如果空间一点M在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω，v都是常数)，那么点M的几何轨迹称为圆柱螺旋线，试建立其参数方程.

解 取时间t为参数，

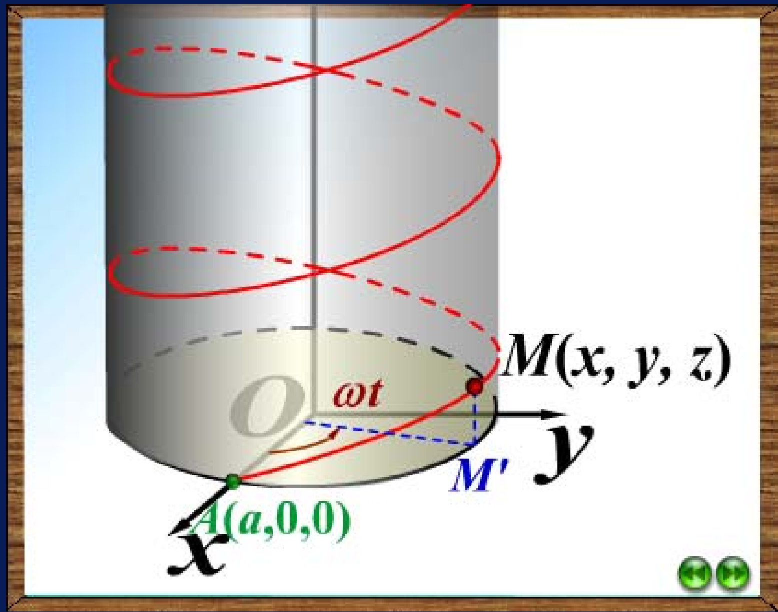
动点从A点出发，

经过t时间，运动到M点.

M在xOy面上的投影为$M'(x, y, 0)$.



例3 如果空间一点M在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω，v都是常数)，那么点M的几何轨迹称为圆柱螺旋线，试建立其参数方程.



解 取时间t为参数，

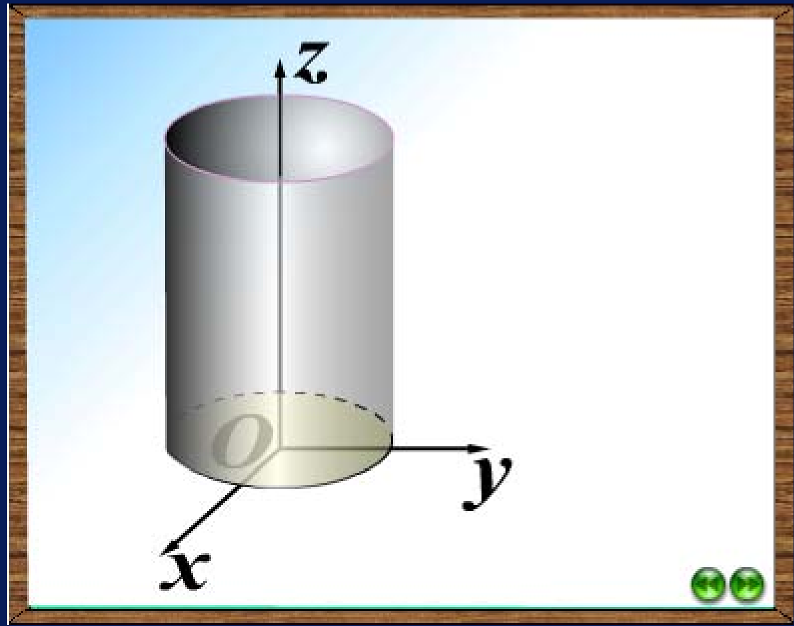
动点从A点出发，

经过t时间，运动到M点.

M在xOy面上的投影为$M'(x, y, 0)$.

螺旋线的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$



或 $$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad (\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比，即

$$\theta: \quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha, \quad z: \quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$$

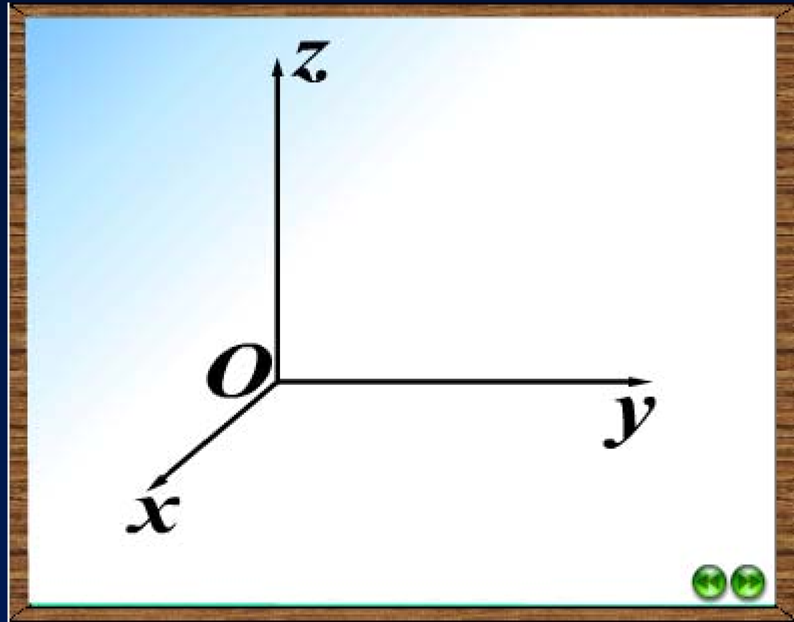
$\alpha = 2\pi$, 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

三、空间曲线在坐标面上的投影

1.定义 设空间曲线C的一般方程：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

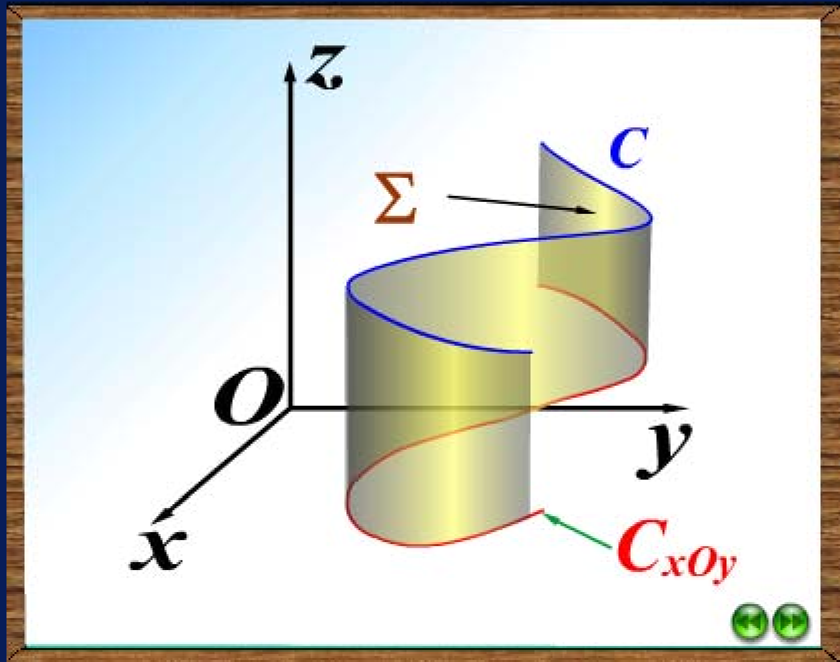


以C为准线，作母线平行于z轴的柱面Σ，则称Σ与xOy面的交线C_{xoy}为曲线C在xOy面上的投影(曲线)，且称Σ为曲线C关于xOy面的投影柱面.

三、空间曲线在坐标面上的投影

1.定义 设空间曲线C的一般方程:

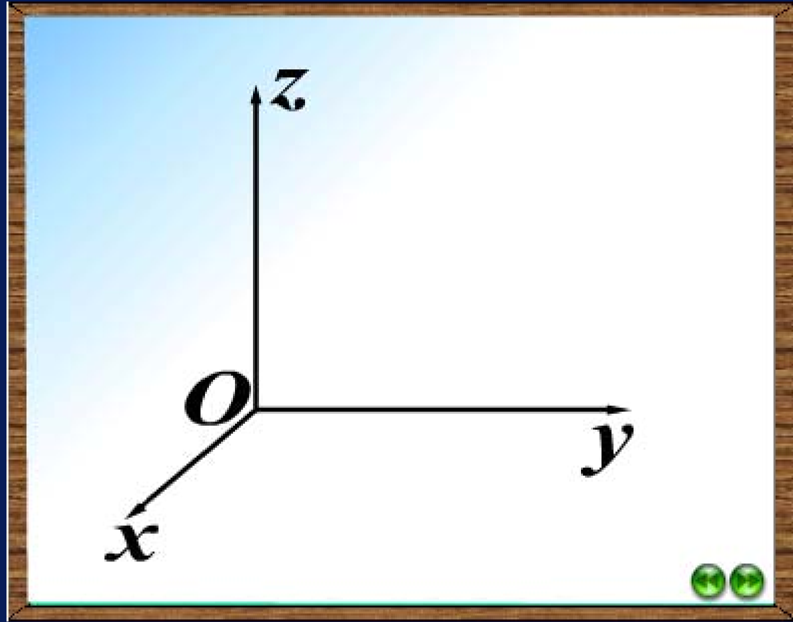
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



以C为准线，作母线平行于z轴的柱面Σ，则称Σ与xOy 面的交线C_{xoy}为曲线C在 xOy面上的投影(曲线), 且称Σ为曲线C关于xOy面的投影柱面.

2. 确定投影曲线C_{xoy}的方法

$$C: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{消去}z} \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases}$$

曲线C在曲面Σ' ：$H(x,y)=0$上，

而Σ'正是母线平行 z轴的柱面

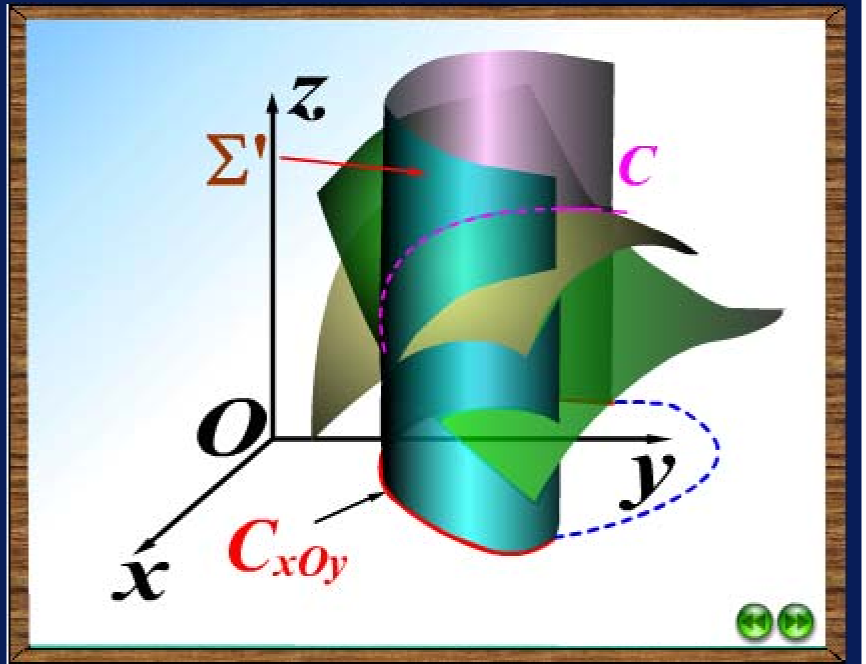
$\therefore$ 曲线C关于xOy的投影柱面 $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

目录 上页 下页 返回 结束

2. 确定投影曲线C_{xoy}的方法

$$C: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{消去}z} \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases}$$



曲线C在曲面Σ'：$H(x,y)=0$上，

而Σ'正是母线平行z轴的柱面

$\therefore$ 曲线C关于xOy的投影柱面 $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

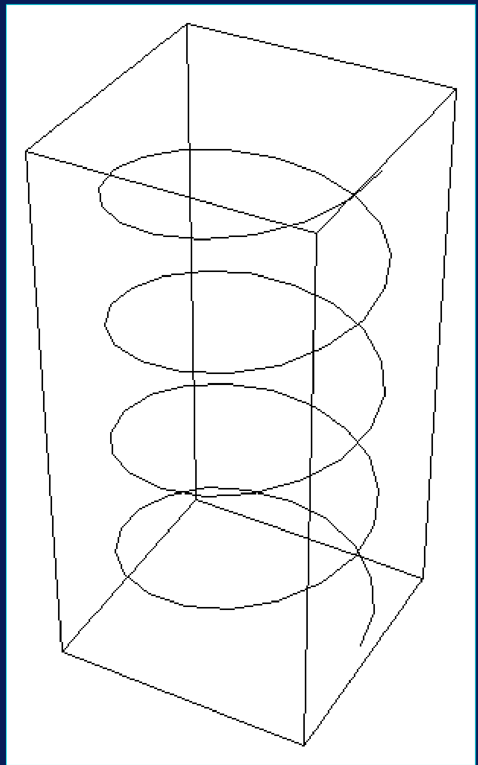
若设 $C'_{xoy}:\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

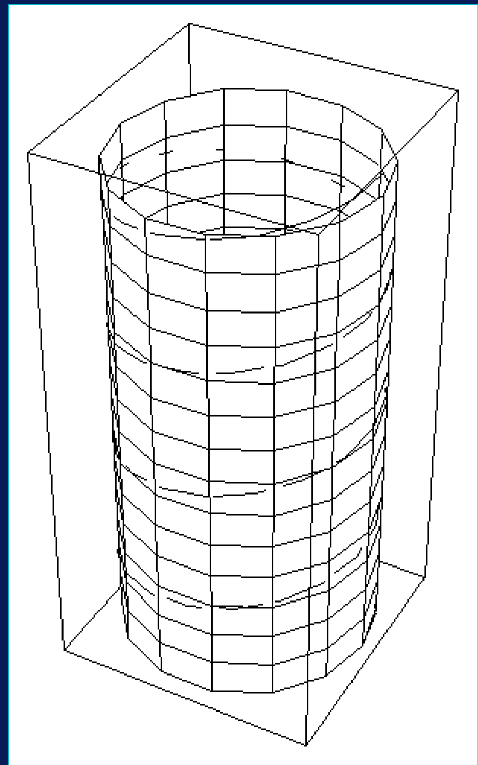
则有 $C_{xoy}\subseteq C'_{xoy}$.

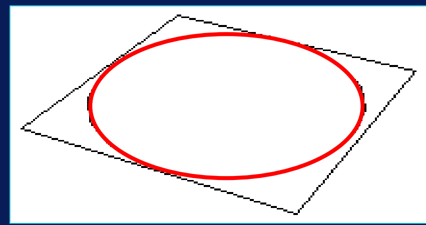
特别地，当C_{xoy}为闭曲线时，

$$C_{xoy}=C'_{xoy}.$$

如图: 投影曲线的研究过程.







空间曲线　　投影柱面　　投影曲线

类似地，可求C在yOz 面上的投影C_{yoz}:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{消去}x} \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ R(y,z)=0 \end{cases}$$

则 $C_{yoz} \subseteq C'_{yoz}$: $\begin{cases} x=0 \\ R(y,z)=0 \end{cases}$

C在zOx 面上的投影 C_{zox}:

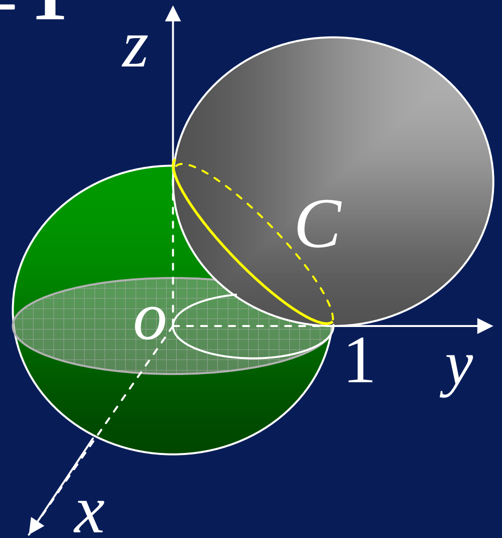
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{消去}y} \begin{cases} T(x,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

则 $C_{zox} \subseteq C'_{zox}$: $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例4 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

在 xOy 面上的投影曲线方程为

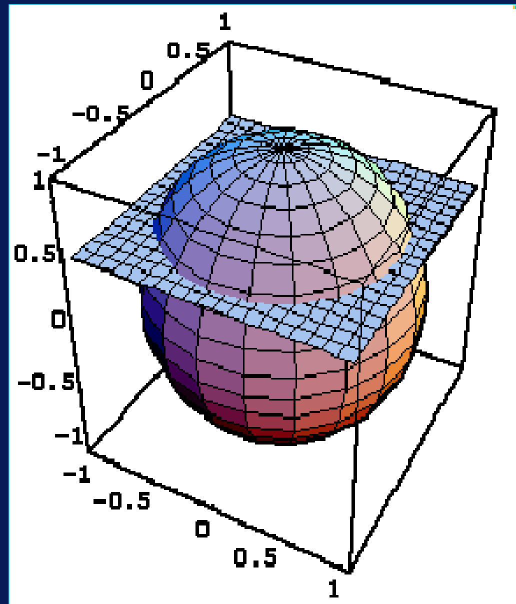
$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$



例5 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.

解（1）在xoy面，

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{消去}z} \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}$$

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

（2）在zOx面上

$\because$ 在 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \boxed{z=\dfrac{1}{2}} \end{cases}$ 中，$z=\dfrac{1}{2}$ (不含y)是母线平行于y轴的柱面

投影柱面

$$\therefore C_{zox} \subseteq C'_{zox} : \begin{cases} z=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

所以在 zOx 面上的投影C_{zox}为线段：

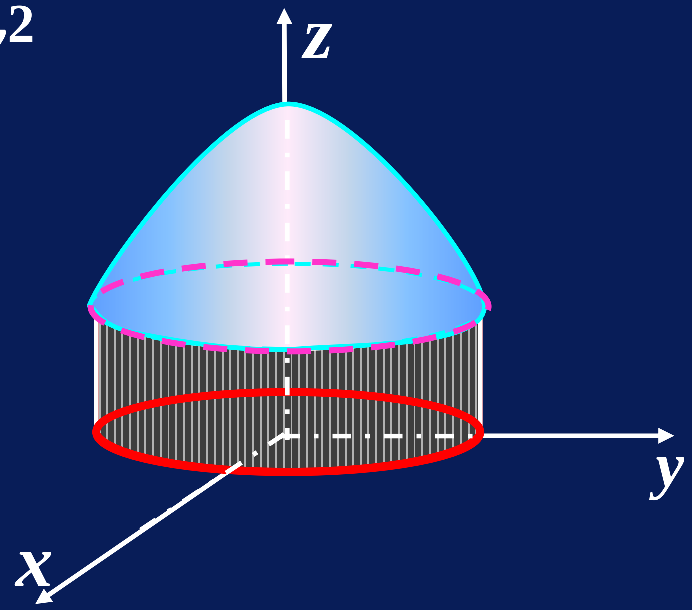
$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

（3）同理在 yOz面上的投影C_{yoz}也为线段:

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ x = 0 \end{cases} \qquad |y| \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例6 求曲线C：$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$

在各坐标面上的投影.



解（1）在xoy面，

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

消去z $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

在xOy面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

（2）在yOz面上

$$\because 在\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ \boxed{z = 1} \end{cases} 中， \quad z = 1(不含x)是母线$$

投影柱面

平行于x轴的柱面

$$\therefore C_{yoz} \subseteq C'_{yoz} : \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

所以在yOz 面上的投影C_{yoz}为线段：

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = 0, \end{cases} \quad |y| \leq 1$$

（3）同理在zOx面上的投影C_{zox}也为线段:

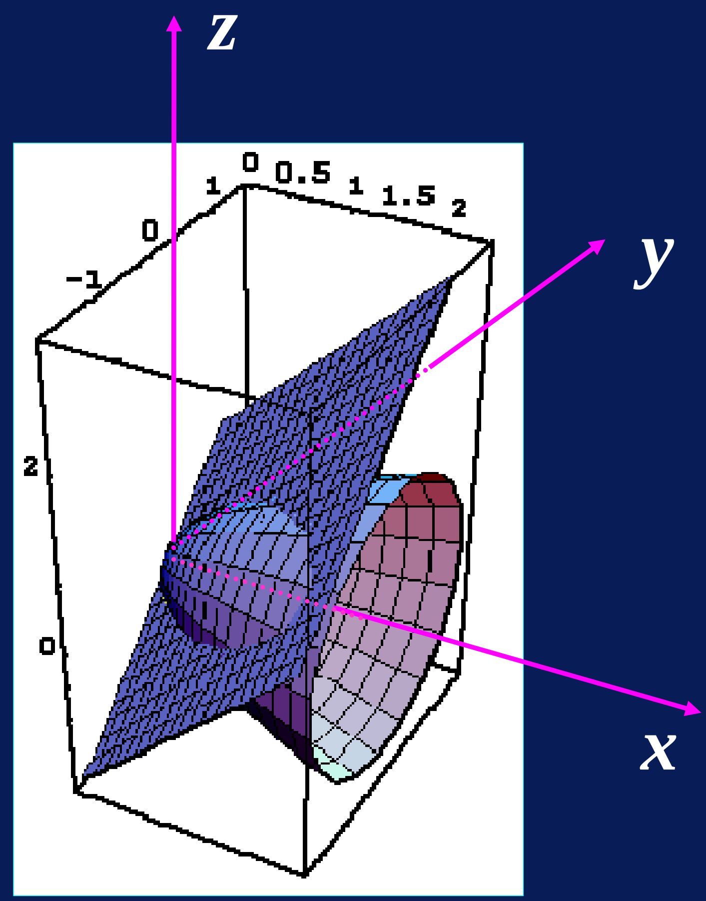
$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 0, \end{cases} \quad |x| \leq 1.$$

例7 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 截线 C 的方程为:

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

如图,



目录 上页 下页 返回 结束

（1）消去z，得 C 在 xOy 面上的投影：

$$\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases},$$

（2）消去y，得 C 在 zOx 面上的投影：

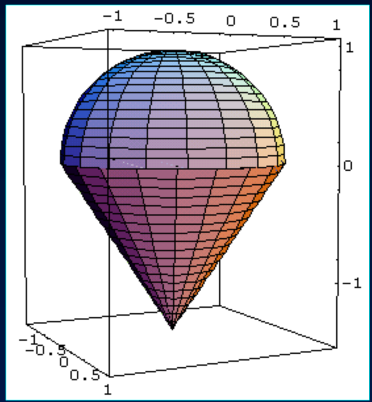
$$\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases},$$

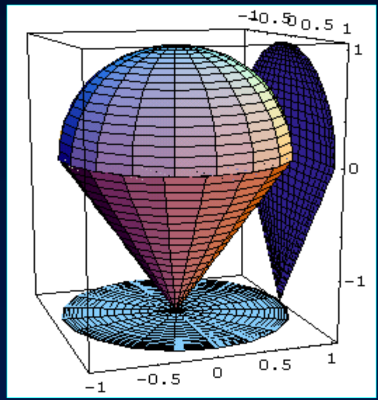
（3）消去x，得 C 在 yOz 面上的投影：

$$\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

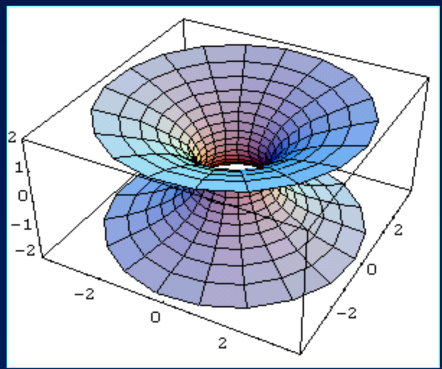
四、 空间立体或曲面在坐标面上的投影

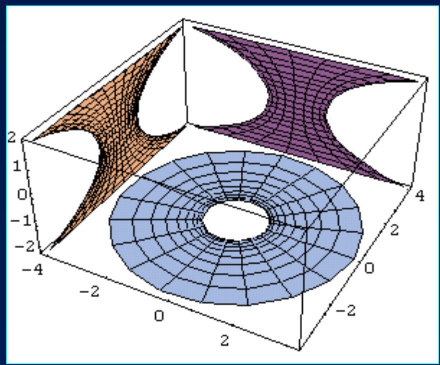
空间立体





曲面





1. 空间立体Ω (或曲面Σ) 在坐标面上

的投影(区域): Ω(或Σ)上的所有点在该坐标面上的投影点的集合.

2. 简单曲面：若过曲面Σ在xOy面上的投影区域D_{xy}内任一点，作平行于z轴的直线，该直线与Σ只有一个交点，则称曲面Σ是关于xOy 面的简单曲面.

如：曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 关于xOy面是简单曲面，

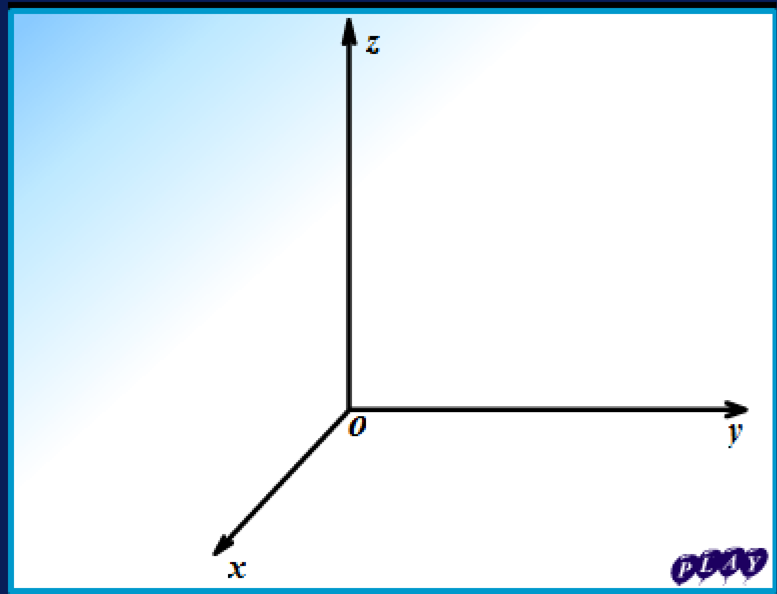
但关于yOz面，zOx 面均不是简单曲面.

3. 确定空间立体Ω在坐标面上投影区域的方法：

以*xoy* 面为例. 将Ω看成由一些关于*xOy*面的简单曲面及母线平行于*z* 轴的柱面所围成的立体，则这些简单曲面的交线在*xOy*面上的投影曲线与柱面和*xOy*面的交线所围成的区域，便是所求的投影区域D_{xy}.

例8 设一个立体，由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 锥面所围成，求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为



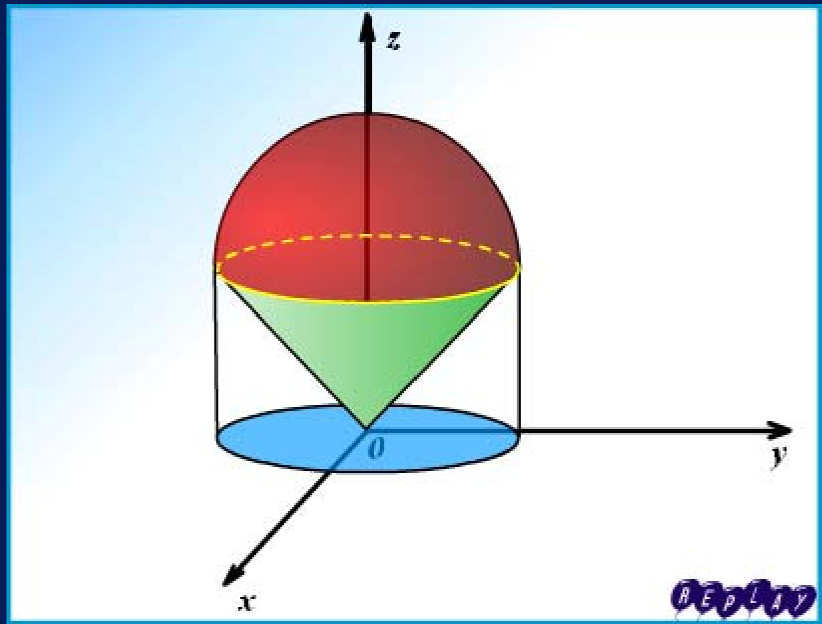
$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$,

例8 设一个立体，由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 锥面所围成，求它在 xoy 面上的投影.

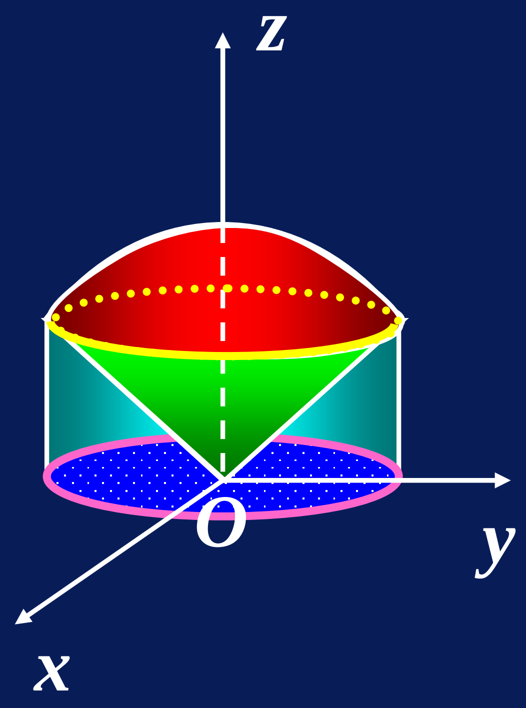
解 半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$$



消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$,

则交线 C 在 xOy 面上的投影为



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$ 一个圆,

$\therefore$ 所求立体在 xOy 面上的投影 D_{xy} 为:

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

五、一元向量值函数

1. 基本概念

(1) 一元向量值函数

$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in I$ 空间曲线的向量形式

其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$,

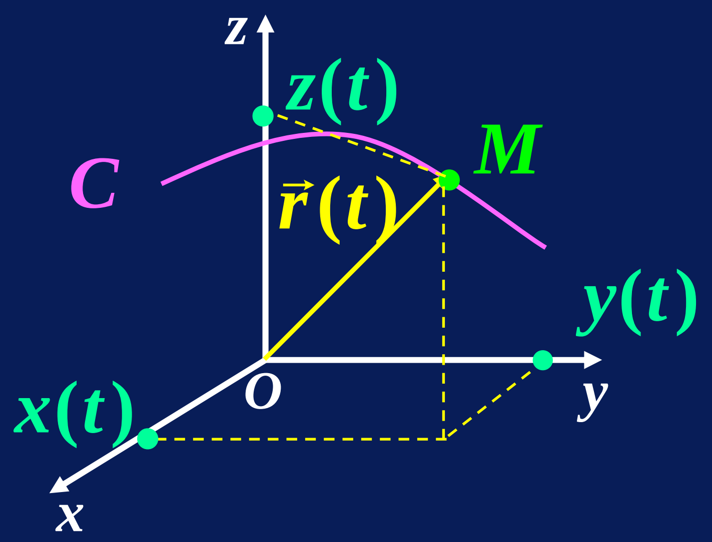
I为区间.

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in I$$

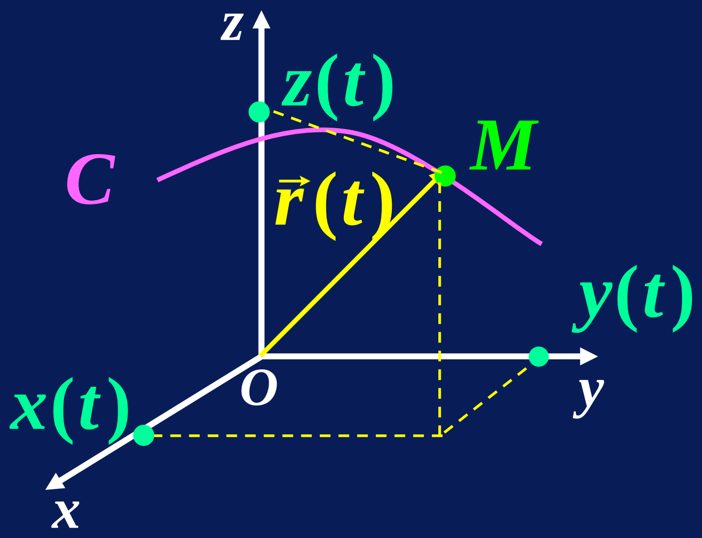
确定了从 $I \subseteq R \to R^3$

的一个映射，称此映射为

一元向量值函数.



注　1° 又称曲线 C 为向量值函数 $\vec{r}(t)$ 的**矢端曲线.**



2° 在平面坐标系中，

向量值函数

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I$$

表示一条平面曲线.

目录　上页　下页　返回　结束

(2) 向量值函数的极限

设向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在点t_0的某邻域内有定义，若存在常向量 $\vec{r}_0$，使

$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\right|=0,$$

则称当$t\to t_0$时，向量值函数 $\vec{r}(t)$的极限为$\vec{r}_0$，

记作 $$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0.$$

(3) 向量值函数在一点连续

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$，则称向量值函数 $\vec{r}(t)$在t_0连续.

(3) 向量值函数在一点可导

若 $$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称向量值函数 $\vec{r}(t)$在t_0可导，并称这个极限

为$\vec{r}(t)$在t_0的导向量，记作 $\vec{r}\,'(t_0)$，即

$$\vec{r}\,'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

2. 重要结论

设 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$,

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}.$$

则 (1) 当$t\to t_0$时，$\vec{r}(t)$的极限存在且为 $\vec{r}_0$

的充要条件是 $\begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x_0\\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y_0\\ \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z_0\end{cases}$

(2) 向量值函数 $\vec{r}(t)$在t_0连续 的充要条件是

$x(t), y(t), z(t)$均在t_0处连续.

(3) 向量值函数 $\vec{r}(t)$在t_0可导 的充要条件是

$x(t), y(t), z(t)$均在t_0处可导，且

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

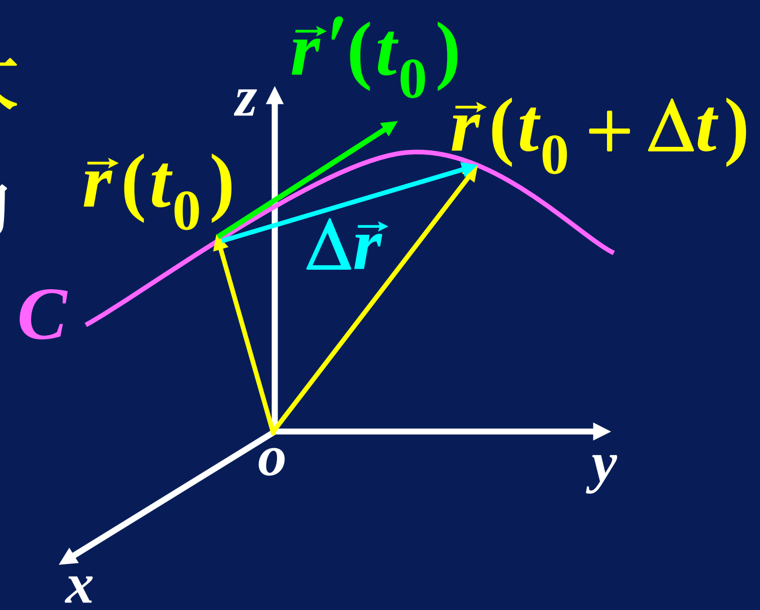
3. 导向量的几何意义

若向量值函数 $\vec{r}(t)$在t_0可导，且 $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$，则

$\vec{r}(t)$的矢端曲线 C 在$\vec{r}(t_0)$的终点处存在切线 .

$\vec{r}'(t_0)$： 曲线C在$\vec{r}(t_0)$的终点处切线的方向向 量，

其指向与参数 t 增大时曲线C上的点移动的方向一致.



4. 导向量的物理意义

设质点 M的运动方程为 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，其中 t为时间，则

$$\vec{r}'(t_0)=\vec{v}(t_0)$$

即为质点在 t_0时刻运动的速度向量 .

内容小结

空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影.

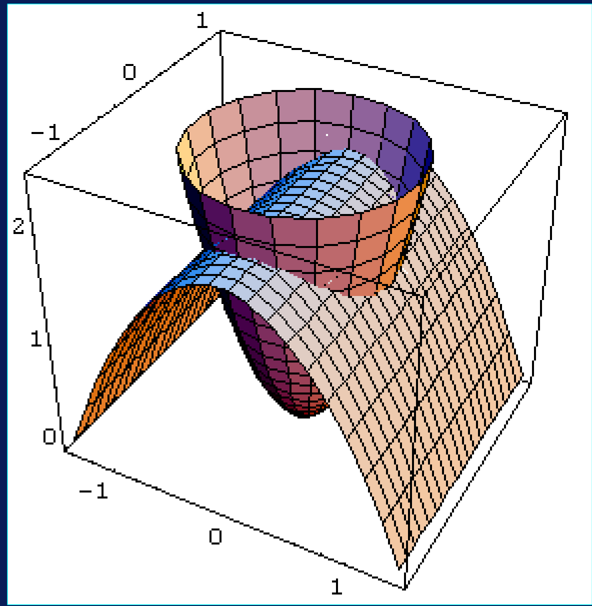
$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

思考题

求椭圆抛物面$2y^2 + x^2 = z$与抛物柱面$2 - x^2 = z$的交线关于xoy面的投影柱面和在xoy面上的投影曲线方程.

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

思考题解答



交线方程为 $\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases}$,

消去z得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

在 xoy面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.