第八章　　多元函数微分法及其应用

第一节　　多元函数的极限与连续

1. 填空

（1）设 $f\left(x,y\right)=3x+2y$，则 $f\left(xy,f\left(x,y\right)\right)=\underline{3xy+6x+4y}$.

（2）设 $f\left(y,\dfrac{x+y}{x}\right)=x+y^2$，则 $f\left(x,y\right)=\underline{x^2+\dfrac{x}{y-1}\left(x\neq 0\right)}$.

（3）设 $z=\sqrt{y}+f\left(\sqrt{x}-1\right)$，若当 $y=1$ 时 $z=x$，则函数 $f\left(x\right)=\underline{x^2+2x}$，$z=\underline{\sqrt{y}+x-1}$.

（4）函数 $u=\arccos\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geq 0,x^2+y^2\neq 0\}}$.

（5）函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1,x\geq\dfrac{y^2}{4}\}}$，此定义域可用平面图形表示为（图 8.1）

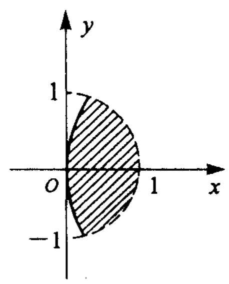


图　8.1

（6）函数 $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$ 在 $\underline{x^2+y^2=1}$ 是间断的.

解　（1）$f(xy,f(x,y))=3(xy)+2f(x,y)$
$=3xy+2(3x+2y)=3xy+6x+4y$.

（2）　令 $y=u,\dfrac{x+y}{x}=v$，可解得 $x=\dfrac{u}{v-1},y=u$，于是

$$f(u,v)=\frac{u}{v-1}+u^2,\quad f(x,y)=x^2+\frac{x}{y-1}.$$

（3）于式　$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ 中令 $y=1$ 得 $x=1+f(\sqrt{x}-1)$.
再令　$\sqrt{x}-1=t$，即 $x=(t+1)^2$，于是

$$f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$$

故　　$$f(x)=x^2+2x\ .$$

从而　　$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)=\sqrt{y}+x-1.$$

（4）、（5）的解略去.

（6）函数的间断点是函数的定义域的聚点中那些函数不连续的点，而函数 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域是开区域 $x^2+y^2<1$，因此其间断点为 $x^2+y^2=1$，而不是 $x^2+y^2\geq 1$.

2. 求极限

（1）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{e^{x^2y^2}(x^2+y^2)}$；　　（2）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 （1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{e^{x^2y^2}(x^2+y^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}$

$$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\frac{x^2+y^2}{2}.\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=0\times 1=0.$$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}[(1+\dfrac{1}{x})^x]^{\frac{x}{x+y}}$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\dfrac{x}{x+y}=1$，故原极限$=e$.

3. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

证 $0\le\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2})$, 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2})=0$,

故原极限$=0$.

4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

证 由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$,

而 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^4}{4x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}=0$.

故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

5. 讨论函数 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\ne0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

解 因为

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}}\frac{xy}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k^2}{1+k^2}.$$

此值随 k 值不同而不同, 故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}z$ 不存在, 从而函数 z 在（0, 0）点不连续.

在除（0, 0）点外的区域上, 函数 $z=\dfrac{xy}{x^4+y^2}$ 是初等函数, 故在其定义区域上连续.

注意 常犯的错误一是只讨论了函数在（0, 0）点的连续性, 没讨论函数在定义域内其它点处的连续性; 二是求（0, 0）点的极限时, 出现了如下:

$$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^4+y^2}\qquad\text{（错误的式子）}$$

事实上, 记号"$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$"表示点$(x,y)$以任意的方式无限接近（0, 0）点, 而记号

“$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}$”表示点$(x,y)$只能沿直线$y=kx$无限接近点（0, 0）点, 这两者意义显然是不同的.

第二节　　多元函数的偏导数

1. 填空

（1） $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}}$.

（2） $z=(1+xy)^y$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{y^2(1+xy)^{y-1}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}]}$.

（3） $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$, 则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\underline{\dfrac{1}{yz}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\underline{-\dfrac{1}{yz}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\underline{-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{x}{y}}$.

（4） $u=x^{y^z}$, 则$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\underline{y^z x^{y^z}\ln x\ln y}$.

（5） $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\underline{2\ln 2+1}$.

（6）设 $f(x,t)=\int_{x-at}^{x+at}\varphi(u)du$, （$\varphi$是连续函数）, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\underline{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)},\ \frac{\partial f}{\partial t}=\underline{a[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]}.$$

（7）设$u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{\frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}},\ u_y(0,\frac{\pi}{4},0)=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

解 （1） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}.$$

（2） 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时, 应当用幂函数的导数公式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}.$$

求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时, 把 x 暂时看做常数, 这时, z 是关于 y 的幂指函数, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}]=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]$$

$$=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

（3） $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{yz}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{y^2z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{yz}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot(-\frac{1}{z^2})=-\frac{1}{z^2}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}.$$

（4） $$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[x^{y^z}]=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=y^zx^{y^z}\ln x\ln y.$$

注意 常见的错误是遗漏了步骤：$\frac{\partial}{\partial z}(y^z)$, 而得到错误结果：$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x$.

（5） **法 1** 因为 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则 $\ln z=x\ln(x+\mathrm{e}^y)$,

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=\ln(x+\mathrm{e}^y)+x\cdot\frac{1}{x+\mathrm{e}^y},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=(x+\mathrm{e}^y)^x\,[\ln(x+\mathrm{e}^y)+\frac{x}{x+\mathrm{e}^y}].$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=2\ln 2+1$$

法 2 因为 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 所以 $z(x,0)=(x+\mathrm{e}^0)^x=(x+1)^x$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=[(x+1)^x]'=[\mathrm{e}^{\ln(x+1)^x}]'=[\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}]'=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}]$$

$$=(x+1)^x[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}],$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=2\ln 2+1.$$

（6）求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时, 暂时将 t 看做常量, 因而 f 是积分上限、下限的函数, 由公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

可得 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi(x+at)-\varphi(x-at)$$

同理 $$\frac{\partial f}{\partial t}=\varphi(x+at)\cdot a-\varphi(x-at)\cdot(-a)$$

$$=a[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

（7） 求解过程略.

2. 证明函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在（0, 0）处连续, $f_y(0,0)=0$, 而 $f_x(0,0)$ 不存在.

证 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}=\mathrm{e}^0=1,$$

而 $f(0,0)=\mathrm{e}^0=1$, 故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在（0, 0）处连续.

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0.$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x},$$

而 $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

所以 $f_x(0,0)$ 不存在.

3. 设 $z=\mathrm{e}^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$, 求证: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{z}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{z}{y^2},$$

所以 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{z}{x^2}+y^2\cdot\frac{z}{y^2}=2z.$$

4. 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（1） $z=x^4+y^3-4x^2y$； （2） $z=\arctan\frac{y}{x}$.

解（1） $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-8x$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-4x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$.

（2） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

第三节　多元函数的全微分

1. 填空

（1）设 $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $dz=\underline{\frac{-xy dx+x^2 dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$，$dz\big|_{(1,0)}=\underline{dy}$.

（2）设 $u=\frac{s+t}{s-t}$，则 $du=\underline{\frac{-2t ds+2s dt}{(s-t)^2}}$.

（3）设 $u=(xy)^z$，则 $du=\underline{yz(xy)^{z-1}dx+xz(xy)^{z-1}dy+(xy)^z\ln(xy)dz}$.

解 （1） $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

故 $\mathrm{d}z=\frac{-xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$， $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=\mathrm{d}y$.

（2） $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{(s-t)-(s+t)}{(s-t)^2}=\frac{-2t}{(s-t)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{(s-t)-(s+t)\cdot(-1)}{(s-t)^2}=\frac{2s}{(s-t)^2},$$

故 $\mathrm{d}u=\frac{-2t\mathrm{d}s+2s\mathrm{d}t}{(s-t)^2}$.

（3） $\frac{\partial u}{\partial x}=z(xy)^{z-1}\cdot y=yz(xy)^{z-1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z(xy)^{z-1}\cdot x=xz(xy)^{z-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy),$$

故 $\mathrm{d}u=yz(xy)^{z-1}\mathrm{d}x+xz(xy)^{z-1}\mathrm{d}y+(xy)^z\ln(xy)\mathrm{d}z$.

2. 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 全增量 $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{x(x+\Delta x)}$,

全微分 $\mathrm{d}z=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})\Delta y=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$,

当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z=\frac{-0.4-0.1}{2\times2.1}=-\frac{5}{42}\approx-0.119.$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125.$$

3. 求$u(x,y,z)=x^y y^z$的全微分.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}y^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=y^z x^y\ln x+zx^y y^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x^y y^z\ln y$,

故 $$\mathrm{d}u=yx^{y-1}y^z\mathrm{d}x+(y^z x^y\ln x+zx^y y^{z-1})\mathrm{d}y+x^y y^z\ln y\mathrm{d}z$$

$$=x^y y^z[\frac{y}{x}\mathrm{d}x+(\frac{z}{y}+\ln x)\mathrm{d}y+\ln y\mathrm{d}z].$$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问在$(0,0)$点处：

（1）偏导数是否存在？（2）偏导数是否连续？（3）是否可微？均说明理由.

解 （1） $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处偏导数存在.

（2） $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}$与$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}$不存在, 故偏导数在$(0,0)$处不连续.

（3） $\Delta z=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,

从而 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=0,$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微，且$dz=0$.

此题说明二元函数的偏导数在一点不连续时，函数在该点仍可能可微，偏导数连续是可微的充分条件，而非充分必要条件.

第四节　多元复合函数的求导法则

1. $z=f(x^y,y^x)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}f_1'+y^x\ln yf_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln xf_1'+xy^{x-1}f_2'$.

2. 设$z=u^2+v^2$，而$u=2x+y$，$v=3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 2+2v\cdot 3=4u+6v=26x-8y$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot(-2)=2u-4v=10y-8x$.

3. 设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中$f(u)$为可导函数，验证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-yf'(x^2-y^2)\cdot 2x}{f^2(x^2-y^2)}=-\frac{2xyf'}{f^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)-yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)}{f^2(x^2-y^2)}=\frac{f+2y^2f'}{f^2}$,

故

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'}{f^2}+\frac{f+2y^2f'}{yf^2}=\frac{-2y^2f'+f+2y^2f'}{yf^2}=\frac{1}{yf}$$

$$=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{f}=\frac{z}{y^2}.$$

注意 求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$时, 常常会丢掉因子 $f'(x^2-y^2)$, 而得到错误结果：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{f^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f+2y^2}{f^2}.$$

4. 设$u=x^y$, 而$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都是可微函数, 求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t)$

$$=\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}\varphi'(t)+\varphi(t)^{\psi'(t)}\ln\varphi(t)\psi'(t)$$

$$=\varphi'(t)\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}+\psi'(t)\varphi(t)^{\psi(t)}\ln\varphi(t).$$

注意 常见错误是遗漏了复合步骤, 因而丢失了$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$与$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\psi'(t)$, 得到 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}+\varphi(t)^{\psi(t)}\ln\varphi(t)$.

5. 设$z=xy+xF(u)$, 而$u=\frac{y}{x}$, $F(u)$为可导函数, 证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)\cdot(-\frac{y}{x^2})=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\frac{1}{x}=x+F'(u).$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF(u)-yF'(u)+xy+yF'(u)$$

$$=xy+xF(u)+xy=z+xy.$$

6. 设$z=f(\sin x,\cos y,\mathrm{e}^{x+y})$, 其中$f$具有二阶连续偏导数, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cos x+f_3'\mathrm{e}^{x+y}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{11}''\cos x+f_{13}''\mathrm{e}^{x+y})\cos x-f_1'\sin x+(f_{31}''\cos x+f_{33}''\mathrm{e}^{x+y})e^{x+y}+f_3'\mathrm{e}^{x+y}$$

$$=e^{x+y}f_3'-f_1'\sin x+f_{11}''\cos^2 x+2e^{x+y}f_{13}''\cos x+e^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x(f_{12}''(-\sin y)+f_{13}''e^{x+y})+e^{x+y}(f_{32}''(-\sin y)+f_{33}''e^{x+y})+f_3'e^{x+y}$$

$$=e^{x+y}f_3'-f_{12}''\cos x\sin y+f_{13}''e^{x+y}\cos x-e^{x+y}f_{32}''\sin y+e^{2(x+y)}f_{33}''.$$

7. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $g(\frac{y}{x})$为由一个中间变量构成的二元复合函数，对中间变量所求的应是导数，而不是偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}'')-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\frac{1}{x}$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$

8. 设$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot(-\frac{x}{y^2})+f_2'\cdot\frac{1}{z}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}f_2'.$$

9. 如果$F(x,y)=y\int_y^x e^{-t^2}dt$，求$F_{xy},F_{yy}$.

解 $F_x=ye^{-x^2}$，$F_{xy}=e^{-x^2}$.

$$F_y=\int_y^x e^{-t^2}dt-y\cdot e^{-y^2},\ F_{yy}=-e^{-y^2}-e^{-y^2}-ye^{-y^2}\cdot(-2y)=2(y^2-1)e^{-y^2}$$

第五节　隐函数的微分法

1. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　方程两端同时关于 x 求偏导数,

$$\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$. 方程两端同时关于 y 求偏导数得

$$-\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

2. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$.（1）用隐函数求导公式求 $\frac{\partial z}{\partial x}$；（2）用复合函数求偏导数的方法求 $\frac{\partial z}{\partial x}$（3）利用全微分形式不变性求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　（1）令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$.

$$F_x=-yz,\ F_z=\mathrm{e}^z-xy,$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

（2）　方程 $\mathrm{e}^z-xyz=0$ 两端同时关于 x 求偏导数, 此时, 将 z 看做 x,y 的函数：$z=z(x,y)$, 于是

$$\mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

（3）先将 x,y,z 均看作自变量, 方程 $\mathrm{e}^z-xyz=0$ 两端同时取全微分得

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-xyz)=0,\text{即}\ \mathrm{d}\mathrm{e}^z-\mathrm{d}(xyz)=0,$$

$$\mathrm{e}^z\mathrm{d}z - yz\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z = 0 .$$

这时, 再将 z 看作 x, y 的函数, 解出 z 的全微分 $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z = \frac{yz}{\mathrm{e}^z - xy}\mathrm{d}x + \frac{xz}{\mathrm{e}^z - xy}\mathrm{d}y ,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{\mathrm{e}^z - xy} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{\mathrm{e}^z - xy} .$$

3. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx-az, cy-bz)$ =0 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证 $\Phi_x = \Phi_u \cdot c = c\Phi_u$, $\Phi_y = c\Phi_v$,

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot (-a) + \Phi_v \cdot (-b) = -a\Phi_u - b\Phi_v ,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} ,$$

从而

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u + bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c .$$

4. 设 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

解 对每一个方程的两端分别对 z 求导, 注意变量 x 与 y 均为 z 的函数, 移项后得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -1, \\ x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -z, \end{cases}$$

用克莱姆法则解得 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -z & y \end{vmatrix}}{y - x} = \frac{-y + z}{y - x} = \frac{z - y}{y - x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & -z\end{vmatrix}}{y-x}=\frac{-z+x}{y-x}=\frac{x-z}{y-x}$$

5. 设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$, 求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$

解 这里变量x与y是自变量, 而变量u与v均为x与y的函数, 对每一个方程的两端分别对x求偏导数, 移项得：

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}=1,\\ (\mathrm{e}^u-\cos v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & u\cos v\\ \mathrm{e}^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}=u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & u\cos v\\ 0 & u\sin v\end{vmatrix}}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & 1\\ \mathrm{e}^u-\cos v & 0\end{vmatrix}}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

6. 设$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$, 求$\mathrm{d}z$.

解 用全微分形式不变性求dz, 方程两端同时取全微分, 得

$$F_1'\cdot\mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot\mathrm{d}(\frac{y}{z})=0,$$

$$F_1'\cdot(\frac{1}{z}\mathrm{d}x-\frac{x}{z^2}\mathrm{d}z)+F_2'(\frac{1}{z}\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\mathrm{d}z)=0,$$

从而解出$\mathrm{d}z$, 即得

$$\mathrm{d}z=z\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{xF_1'+yF_2'}.$$

第六节　多元函数微分学的应用

1. 求螺旋线 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

解　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -a\sin\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\cos\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = b$, 与点 $(a,0,0)$ 对应的参数 θ=0, 故曲线上 $(a,0,0)$ 点的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \{0, a, b\}.$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}, \text{ 即} \begin{cases} x = a, \\ by - az = 0. \end{cases}$$

法平面方程为　　$ay + bz = 0$.

2. 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　因为 $(1,-2,1)$ 是曲线上的点, 将 $x=1, y=-2$ 代入方程 $y^2 = 2mx$ 可得 $m = 2$, 所给曲线为 $y^2 = 4x, z^2 = 2 - x$. 求点 $(1,-2,1)$ 处的切向量有两种方法:

法 1　每一个方程两端均关于 x 求导数, 得

$$\begin{cases} 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4, \\ 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1. \end{cases}$$

在点 $(1,-2,1)$ 处, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$=−1, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2}$, 故切向量为

$$\boldsymbol{T} = \{1, -1, -\frac{1}{2}\},$$

法 2　曲面 $y^2 = 4x$, 即 $4x - y^2 = 0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1 = \{4, -2y, 0\}\Big|_{(1,-2,1)} = \{4, 4, 0\},$$

同理, 曲面 $z^2 = 2 - x$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (1,0,2)$. 于是曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\boldsymbol{T}=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}=8\{1,-1,-\frac{1}{2}\}$$

于是所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}},\quad 即\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为 $(x-1)-(y+2)-\frac{1}{2}(z-1)=0$, 即 $2x-2y-z-5=0$.

注意 常见错误是没有利用已知条件将 m 的值确定出来.

3. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 法 1 把 x 看作参数, 则 y 和 z 是由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 所确定的 x 的函数, 曲线的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\}$.

方程组对 x 求导得

$$\begin{cases}2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0\\ 2-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

将点 $(1,1,1)$ 代入得

$$\begin{cases}2+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0\\ 2-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{9}{16}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{16}$, 于是曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16}\}=\frac{1}{16}\{16,9,-1\},$$

所求切线与法平面分别为

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1},$$

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0, \text{即} \quad 16x+9y-z-24=0.$$

法 2 构成曲线的曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 与 $2x-3y+5z-4=0$ 上点 $(1,1,1)$ 处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\Big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\boldsymbol{n}_2=\{2,-3,5\},$$

曲线上点 $(1,1,1)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{16,9,-1\}$. 下面解法同法 1.

4. 在椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 上求一点, 使该点处的法线与三条坐标轴正方向成等角.

解 依题意法线发现与三条坐标轴正向成等角, 故有所求点处法向量的三个坐标应相等, 又点在椭球面上, 应满足椭球面方程, 上述条件联立, 即可得所求点, 令

$$F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}-1$$

设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则在点 M 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}_M=\left\{2x_0,\frac{y_0}{2},\frac{z_0}{2}\right\}$$

因为法线与三条坐标轴正向成等角, 故有

$$2x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{2} \qquad (1)$$

又点 M 在椭球面上, 满足

$$x_0{}^2+\frac{y_0{}^2}{4}+\frac{z_0{}^2}{4}=1 \qquad (2)$$

将方程（1），（2）联立, 得两组解为：$(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 及 $(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$

上述两点处的法线与三条坐标轴正向成等角.

5. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出该法线方程.

解 设点 (x,y,z) 为曲面 $z=xy$ 上任一点, 该点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{y,x,-1\right\}$. 平面

$x+3y+z+9=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,3,1\}$. 欲使法线垂直于平面, 应有 $\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_1$,

故
$$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1} \quad ,$$

由此可得 $x=-3, y=-1$, 将 $x=-3, y=-1$ 代入曲面方程 $z=xy$, 可得 $z=3$, 故所求点为 $(-3,-1,3)$.

6. 证明：曲面 $z=xe^{\frac{y}{x}}$ 上任一点处的切平面均过坐标原点.

证 欲证一平面过原点, 只须证该平面的一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的 $D=0$ 即可. 令 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-z$, 则

$$F_x=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},\ F_y=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},\ F_z=-1,$$

曲面上任一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})(x-x_0)+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad ,$$

化为一般式为

$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})x+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}y-z+[-x_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}+y_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-y_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}+z_0]=0 \quad ,$$

即
$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})x+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}y-z=0.$$

所以曲面上任一点处的切平面均过坐标原点.

7. 证明曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=4$ 上任一点处的切平面在各坐标轴上的截距的平方和为一常数.

证 设点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任一点, 则 $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}=4$

该点处的法向量为
$$\boldsymbol{n}=\left\{x_0^{-\frac{1}{3}},y_0^{-\frac{1}{3}},z_0^{-\frac{1}{3}}\right\},$$

该点处的切平面方程为

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0$$

$$x_0^{-\frac{1}{3}}x+y_0^{-\frac{1}{3}}y+z_0^{-\frac{1}{3}}z=x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}=4$$

截距式方程为

$$\frac{x}{4\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y}{4\sqrt[3]{y_0}}+\frac{z}{4\sqrt[3]{z_0}}=1$$

截距的平方和为

$$16x_0^{\frac{2}{3}}+16y_0^{\frac{2}{3}}+16z_0^{\frac{2}{3}}=16(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=64.$$

第七节　　方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向导数.

解　函数 $u=xyz$ 在平面上处处可微, 故

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos a+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{yz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

在点 $(5,1,2)$ 处, $\frac{\partial u}{\partial x}=2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=10$, $\frac{\partial u}{\partial z}=5$.

又 $\boldsymbol{l}=\{9-5,4-1,14-2\}=\{4,3,12\}$, $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$,

故　$$\cos\alpha=\frac{4}{13},\ \cos\beta=\frac{3}{13},\ \cos\gamma=\frac{12}{13},$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=2\times\frac{4}{13}+10\times\frac{3}{13}+5\times\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

2. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $M_0(1,1,1)$ 处沿球面在这点的外法线方向的方向导数.

解　令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$, 则 $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$. 在点 $(1,1,1)$ 处, 法线方向为

$$\boldsymbol{n}=\{2,2,2\}.$$

对于封闭曲面来讲, 其法线方向有内外之分, 由里指向外的方向叫外法线方向。点 M_0 为

第一卦限的点, 由图 8.2 可知, 该点处的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与三个坐标轴的夹角均为锐角, 故 $\boldsymbol{n}$ 的三个方向数均应为正数：$\boldsymbol{n}=\{2,2,2\}$. 于是

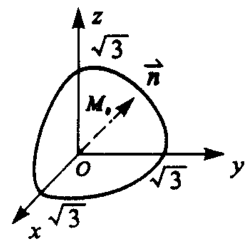


图 8.2

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial n}=1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

3. 设 x 轴正向到方向 L 的转角为 φ, 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1, 1）沿方向 L 的方向导数, 并分别确定转角 φ, 使该导数有：（1）最大值；（2）最小值；（3）等于 0.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x$, 在点（1, 1）处, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1$. 又函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1, 1）处可微,

$$\frac{\partial f}{\partial L}=1\times\cos\varphi+1\times\sin\varphi=\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}),$$

于是, 当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数有最大值 $\sqrt{2}$；当 $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数有最小值 $-\sqrt{2}$；当 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\varphi=\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数等于 0.

4. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^2$ 上点（1, 1, 1）处, 沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$, 在点（1, 1, 1）处, $\frac{\partial u}{\partial x}=2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2$.

曲线上点（1, 1, 1）对应的参数值为 $t=1$, 该点的切线正方向为

$$\boldsymbol{l}=\{1,2t,3t^2\}\big|_{t=1}=\{1,2,3\},$$

于是 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$, 所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

5. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$，并求函数在 $(0,0,0)$ 点处的方向导数的最大值.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3$，$\frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2$，$\frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$，在点 $(0,0,0)$ 处,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-6,$$

故 $\mathbf{grad}f(0,0,0)=\{3,-2,-6\}$，在点 $(1,1,1)$ 处

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

故
$$\mathbf{grad}f(1,1,1)=\{6,3,0\}$$

又函数在某点的方向导数的最大值, 等于函数在该点的梯度的模, 故函数在 $(0,0,0)$ 点处的方向导数的最大值为

$$\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7.$$

第八节　　多元函数的极值与最优化问题

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，证明：

（1）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点;（2）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

证　（1）先复习一个结论:“如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分, 则这函数在该点必定连续.”本题中已知 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，它说明 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分, 从而在点 $(0,0)$ 也可微分, 所以 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 必连续, 也就是点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点.

（2）　因为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=y$，

从而
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

在点 $(0,0)$ 处：$A=1, B=0, C=1$，$\Delta=AC-B^2=1>0$，又 $A>0$，所以点 $(0,0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

2. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}(y+1)=0 \end{cases}$,

可得驻点 $(\frac{1}{2},-1)$.

$$f_{xx}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1). \quad f_{xy}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(y+1).$$

$$f_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}.$$

在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处，$AC-B^2=2\mathrm{e}\cdot 2\mathrm{e}-0=4\mathrm{e}^2>0$，又 $A=2\mathrm{e}>0$，故函数在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处取得极小值

$$f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

3. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 1 设 (x,y,z) 为交线上任意一点, 则它到 xOy 平面的距离为 $d=|z|$. 为运算简单起见, 我们转化为求 $D=d^2=z^2$ 的最小值. 显然, 约束条件有两个：$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$. 故令

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令 $$\begin{cases} \frac{\lambda}{3}+2\mu x=0 \\ \frac{\lambda}{4}+2\mu y=0 \\ \frac{\lambda}{5}+2z=0 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

由前两式推得 $y=\frac{3}{4}x$, 代入 $x^2+y^2=1$ 得 $x=\pm\frac{4}{5}$.

因平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 在三坐标轴上的截距分别为 3, 4, 5, 所以在第一卦限内的点 P 到 xOy 平面的距离较短, 故取 $x=\frac{4}{5}$，于是 $y=\frac{3}{4}x=\frac{3}{5}$, 再代入第三个式子可得 $z=\frac{35}{12}$，所以

交线上与 xOy 面距离最短的点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

解 2　设 (x,y,z) 为交线上任意一点, 则它到 xOy 平面的距离为 $d=|z|$. 由于点在平面上 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$, 故 $z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})$, 于是 $d=5\left|1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right|$, 为运算简单起见, 我们转化为求 $D=(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题, 令

$$F(x,y)=(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

令 $$\begin{cases} -\frac{2}{3}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+2\lambda x=0 \\ -\frac{1}{2}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

由前两式得 $y=\frac{3}{4}x$, 代入最后一式得到 $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$, 于是 $z=\frac{35}{12}$, 交线上到 xOy 面距离最短的点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

4. 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 位于第一卦限的部分求一点 P, 使该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

解　设 $P(x,y,z)$ $(x>0,y>0,z>0)$ 为球面上第一卦限内的一点, 则该点处的法向量为 $n=2\{x,y,z\}$, 该点处的切平面为

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

即 $$xX+yY+zZ=x^2+y^2+z^2$$

由点 $P(x,y,z)$ 为球面上的点, 故 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 切平面方程可化间为

$$xX+yY+zZ=R^2, \text{即} \quad \frac{X}{\frac{R^2}{x}}+\frac{Y}{\frac{R^2}{y}}+\frac{Z}{\frac{R^2}{z}}=1.$$

切平面在三个坐标轴上截距的平方和为

$$D=R^4(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}).$$

问题是求函数 $D=R^4(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 下的最小值, 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)\ (x>0,y>0,z>0)$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{x^3}+2\lambda x=0 \\ -\frac{2}{y^3}+2\lambda y=0 \\ -\frac{2}{z^3}+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$$

由前三式可推得 $x^2=y^2=z^2$, 代入最后一式可得 $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{R}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由问题的实际意义知点 $P(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}})$ 即为所求.

注意 常出现的问题是有的同学没有利用 P 点在球面上这一条件将切平面方程化简, 再写出截距的平方和, 从而导致目标函数表达式过于复杂, 给后边的计算带来困难.

5. 在上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0,z\geq 0)$ 及 $z=0$ 所围成的封闭曲面内作一底面平行于 xOy 面的体积最大的内接长方体, 问这长方体的长、宽、高的尺寸怎样?

解 显然长方体的底面应当在 xOy 面上, 设它的一个位于第一卦限的顶点为 $P(x,y,z)\ (x>0,y>0,z>0)$, 于是长方体的体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot z=4xyz$$

所求问题为求函数 $V=4xyz(x>0,y>0,z>0)$ 在约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值. 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)\ (x>0,y>0,z>0).$$

$$\begin{cases} yz+\dfrac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ xz+\dfrac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ xy+\dfrac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

进一步可得到

$$\begin{cases} xyz+2\lambda\cdot\dfrac{x^2}{a^2}=0 \\ xyz+2\lambda\cdot\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ xyz+2\lambda\cdot\dfrac{z^2}{c^2}=0 \end{cases}$$

由此可得 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, 代入椭球面方程可得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

由实际问题的性质可知, 最大的内接长方体的长为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, 宽为 $\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$, 高为 $\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

第八章　多元函数微分法及其应用（总习题）

1. 设 $\omega=f(x-y,y-z,t-z)$, 求 $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial z}+\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$, 其中 f 具有一阶连续偏导数.

解　$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=f_1'$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'=-f_1'+f_2'$,

$\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=f_2'\cdot(-1)+f_3'\cdot(-1)=-f_2'-f_3'$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=f_3'$,

故　$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial z}+\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=f_1'-f_1'+f_2'-f_2'-f_3'+f_3'=0$.

2. 设 $u=\ln(x^xy^yz^z)$, 求 $du\big|_{(1,1,1)}$.

解　本题可利用对数性质先将函数 u 化简, 否则会很烦

$$u=\ln(x^xy^yz^z)=x\ln x+y\ln y+z\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+\ln x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1+\ln y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=1+\ln z$$

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=(1+\ln x)\mathrm{d}x+(1+\ln y)\mathrm{d}y+(1+\ln z)\mathrm{d}z,$$

从而 $$\mathrm{d}u\Big|_{(1,1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z.$$

3. 设 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+y}$，又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，求常数 a，使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+y}+u\cdot\mathrm{e}^{ax+y}\cdot a=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+y}+u\cdot\mathrm{e}^{ax+y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial y}+u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au)+\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial y})$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$=0, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au+a\frac{\partial u}{\partial y})$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, z 的表达式代入式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$ 可得

$$\mathrm{e}^{ax+y}[\frac{\partial u}{\partial x}+au+a\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}-au-\frac{\partial u}{\partial y}-u+u]=0$$

由 $\mathrm{e}^{ax+y}>0$，可得

$$(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

故当 $a=1$ 时, 等式成立.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$,

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

故
$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

注意 常见的错误是没用偏导数的定义求函数 $f(x,y)$ 在分段点 $(0,0)$ 的偏导数.

5. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 问:(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续, 为什么?(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 是否存在?(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微, 为什么?

解 (1) $0\le\sqrt{|xy|}\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$,

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=0$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$

函数在点 $(0,0)$ 连续.

(2) 考虑极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}, \quad (8.24)$$

由于沿直线 $y=x$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

故前式极限不等于 0, 从而函数在 $(0,0)$ 点不可微.

注意 常见错误之一是：

因为, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|kx^2|}=0$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

关于这种错误, 前边已讲过, 记号“$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$”表示点 (x,y) 以任意的方式趋于 $(0,0)$. 而记号“$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}$”表示点 (x,y) 以一种特殊的方式：沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$. 显然若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在为 a, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)$ 存在也为 a ;但反之未必成立.

常见错误之二是有人将讨论函数在点 $(0,0)$ 是否可微的式子写成

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\mathrm{d}z(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

式中出现了 $dz(0,0)$ 是不对的, 因为我们正在讨论函数在 $(0,0)$ 点是否可微, 即 $\mathrm{d}z(0,0)$ 是否存在.

6. 设 $u=\varphi(\mathrm{e}^x,xy)+xf(\dfrac{y}{x})$, 其中 φ 有二阶偏导数, f 二阶可导, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1'\cdot \mathrm{e}^x+\varphi_2'\cdot y+f(\dfrac{y}{x})+xf'(\dfrac{y}{x})\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$

$=\mathrm{e}^x\varphi_1'+y\varphi_2'+f-\dfrac{y}{x}f'$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\varphi_1'+\mathrm{e}^x[\varphi_{11}''\cdot \mathrm{e}^x+\varphi_{12}''.y]+y[\varphi_{21}''\cdot \mathrm{e}^x+\varphi_{22}''.y]+f'(-\frac{y}{x^2})+\frac{y}{x^2}f'-\frac{y}{x}f''\cdot(-\frac{y}{x^2})$$

$$=\mathrm{e}^x\varphi_1'+\mathrm{e}^{2x}\varphi_{11}''+y\mathrm{e}^x(\varphi_{12}''+\varphi_{21}'')+y^2\varphi_{22}''+\frac{y^2}{x^3}f''.$$

注意 易发生的错误是将结果中 $y\mathrm{e}^x(\varphi_{12}''+\varphi_{21}'')$ 合并为 $2y\mathrm{e}^x\varphi_{12}''$.

由于题目中仅告知 φ 有二阶偏导数, 并未告知 φ 的二阶偏导数连续, 故未必有 $\varphi_{12}''=\varphi_{21}''$, 因此不能将 $\varphi_{12}''+\varphi_{21}''$ 合并为 $2\varphi_{12}''$.

7. 设 $z=(\frac{y}{x})^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}$.

解 $\quad \ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}=\frac{x}{y}(\ln y-\ln x)$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}(-\frac{1}{x})=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{z}{y},$$

当 $x=1,y=2$ 时, $z=(2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1).$$

8. 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\quad z$ 为 x^3 与 f 的乘积, 而 f 为由两个中间变量构成的二元复合函数,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'x+f_2'\frac{1}{x})=x^4 f_1'+x^2 f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+xf_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1'+x^2 f_2')$$

$$=4x^3 f_1'+x^4(yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}'')+2xf_2'+x^2(yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}'')$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''$$

应注意充分利用条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 在求出 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的基础上进而求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 即得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 不必先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 这就增加了工作量.

9. 设 $z=f(xz,z-y)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 利用全微分形式不变性求隐函数

$z = z(x, y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$，并由此求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 方程 $z = f(xz, z-y)$ 两端同时求全微分得

$$\mathrm{d}z = f_1'\mathrm{d}(xz) + f_2'\mathrm{d}(z-y),$$

即

$$\mathrm{d}z = f_1'(z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z) + f_2'(\mathrm{d}z - \mathrm{d}y).$$

从中解出 $\mathrm{d}z$，得

$$\mathrm{d}z = \frac{zf_1'\mathrm{d}x - f_2'\mathrm{d}y}{1 - xf_1' - f_2'},$$

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zf_1'}{1 - xf_1' - f_2'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_2'}{1 - xf_1' - f_2'}.$$

10. 求曲线 $\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 上点 $M_0(1, -2, 1)$ 处的法平面与直线 $\begin{cases} 9x - 7y - 21z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ 间的夹角.

解 只须求出曲线上 M_0 点的切向量，即可求出法平面与已知直线的夹角.

由一般式给出的曲线求切向量有两种方法.

法 1 将 x 看做参数，由方程组 $\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 求出 y', z'，则切向量 $\boldsymbol{T} = \{1, y', z'\}$，

$$\begin{cases} 2x - z' = 0 \\ 3 + 2y' = 0 \end{cases}$$

在点 $M_0(1, -2, 1)$ 处，$\begin{cases} 2 - z' = 0 \\ 3 + 2y' = 0 \end{cases}$ 解得，$y' = -\dfrac{3}{2}, z' = 2$.

故切向量 $\boldsymbol{T} = \{1, -\dfrac{3}{2}, 2\} = \dfrac{1}{2}\{2, -3, 4\}$.

法 2 求出构成曲线的两个曲面 $x^2 - z = 0$ 和 $3x + 2y + 1 = 0$ 在点 M_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 及 $\boldsymbol{n}_2$，曲线在点 M_0 的切向量 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$.

$$\boldsymbol{n}_1\Big|_{M_0} = \{2x, 0, -1\}\Big|_{M_0} = \{2, 0, -1\}, \quad \boldsymbol{n}_2\Big|_{M_0} = \{3, 2, 0\}.$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

而直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 9 & -7 & -21\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-14\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

故法平面与直线的夹角

$$\theta=\arcsin\frac{|\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{s}|}=\arcsin 0=0.$$

11. 过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面, 求此切平面方程.

分析 要写切平面方程, 一要求切点, 二要求法向量. 首先, 切点应在曲面上, 在切平面上其次, 曲面上切点处的法向量应当与切平面的法向量平行.

解 设切点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面上点M_0处的法向量为$\boldsymbol{n}=\{6x_0,2y_0,-2z_0\}$.

设过直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

即
$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0,$$

其法向量为$\boldsymbol{n}_1=(10+\lambda,2+\lambda,-(2+\lambda))$. 由$\boldsymbol{n}\,//\,\boldsymbol{n}_1$可得

$$\frac{10+\lambda}{6x_0}=\frac{2+\lambda}{2y_0}=\frac{-(2+\lambda)}{-2z_0},$$

又由切点M_0既在曲面上, 又在切平面上可得

$$3x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2=27,\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0.$$

解此关于x_0,y_0,z_0,λ的方程组可得切点$(3,1,1)$及$(-3,-17,-17)$, 于是法向量为$\{18,2,-2\}$及$\{-18,-34,34\}$, 所求切平面为

$$18(x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0,\quad 9x+y-z-27=0$$

及
$$-18(x+3)-34(y+17)+34(z+17)=0,\ 9x+17y-17z+27=0,$$

易知平面 $x+y-z=0$ 不满足条件.

12. 求函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度.

解 因为 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 所以

$$f_x=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad f_y=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

从而 $$\mathbf{grad}f(0,1)=\{f_x,f_y\}_{\substack{x=0\\y=1}}=\{\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\}_{\substack{x=0\\y=1}}=\{1,0\}.$$

13. 在球面 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点 C 使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 C 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向的方向导数具有最大值.

解 方向 $\boldsymbol{l}=\overline{AB}=(1,-1,0)$, 故 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma=0$

设点 $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点, 在该点

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

又函数 $f(x,y,z)$ 处处可微, 故 M 点的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y)$$

问题实质是求函数 $\sqrt{2}(x-y)$ 在约束条件 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 下的最大值问题, 作函数

$$F(x,y,z)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+2z^2-1)$$

求解 $$\begin{cases}1+4\lambda x=0\\-1+4\lambda y=0\\4\lambda z=0\\2x^2+2y^2+2z^2=1\end{cases},$$

得到 $x=\pm\dfrac{1}{2},y=\mp\dfrac{1}{2},z=0$, 在点 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$ 处, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}$, 在点 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{2}$, 故点 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$ 即为所求.

14. 已知曲线 L：$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 L 距离 xoy 面最远的点和最近的点.

解　令 (x,y,z) 为曲线 L 上任一点, 它在 xoy 面上的投影点为 $(x,y,0)$ 则 $d^2=z^2$ ， 令

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda_1(x^2+y^2-2z^2)+\lambda_2(x+y+3z-5)$$

$$\begin{cases} F_x=2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ F_y=2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ F_z=2z-4\lambda_1 z+3\lambda_2=0, \\ x^2+y^2=2z^2 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$$

由前两式得 $x=y$, 代入第四个式子推出 $x=\pm z$, 代入第五个式子推出　$2x+3z=5$.

当 $x=z$ 时, 解得 $x=1$; 当 $x=-z$ 时, 解得 $x=-5$.

点（1, 1, 1）时, d_1=1; 点（-5, -5, 5）时, $d_2=5$ ，从而 $(1,1,1)$ 为最近点, $(-5,-5,5)$ 为最远点.

第九章　重积分

第一节　重积分的概念与性质

1. 选择

设 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,

（1）若 D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 围成, 则在 D 上 $\underline{B}$.

A. $(x+y)^2\le(x+y)^3$；　B. $(x+y)^2\le(x+y)^3$；

由二重积分的性质可知, $\underline{A}$.

A. $I_1\ge I_2$；　B. $I_1\le I_2$；　C. $I_1=I_2$；

（2）若 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 围成, 则 $\underline{B}$.

A. $I_1\ge I_2$；　B. $I_1\le I_2$；　C. $I_1=I_2$；

2. 填空

设 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

（1）若 $f(x,y)=x+y+1$, 域 D 为 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, 则在 D 上, $f(x,y)$ 的最小值为 $\underline{1}$, 最大值为 $\underline{4}$；由二重积分的性质可知, $\underline{2}\le I\le\underline{8}$；

（2）若 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$, 域 D 为 $x^2+y^2\le 4$, 则在 D 上, $f(x,y)$ 的最小值为 $\underline{9}$, 最大值为 $\underline{25}$, 因此 $\underline{36\pi}\le I\le\underline{100\pi}$.

3. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 D_1 是矩形闭区域：$-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$；$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 D_2 是矩形闭区域：$0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$, 则积分 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是在矩形域 D_1 上以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体体积. 由于域 D_1 关于 $x=0$（即 y 轴）对称, 而函数 $f(x,y)$ 是 x 的偶函数（即曲面 $z=f(x,y)$ 关于 yOz 面对称）, 因此

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\quad,$$

其中域 D^* 为 $0 \le x \le 1$, $|y| \le 2$. 同理, D^* 关于 $y=0$ 对称, $f(x,y)$ 是 y 的偶函数, 因此,

$$\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

于是 $\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即 $I_1 = 4I_2$.

第二节　　二重积分的计算

1. 填空

（1）改变积分次序

$$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{e^y}^4 f(x,y)\mathrm{d}x}.$$

（2）改变积分次序

$$I = \int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \underline{\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}.$$

若 $f(x,y) = xy$, 则 $I = \underline{\frac{10}{3}}$.

（3）设 D：$1 \le y \le 5$, $y \le x \le 5$, 则应把二重积分 $I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y\ln x}$ 化为先对 y 后对 x 的二次积分

$$I = \int_1^5\mathrm{d}x\int_1^x \frac{1}{y\ln x}\mathrm{d}y = 4.$$

（4）二重积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y = \underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)r\mathrm{d}r}.$

（5）二重积分

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} \frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}-1.$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分.

（1）$\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是闭区域 $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

解 原式$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(x^2\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3})\mathrm{d}x$

$$=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2x\sin x\Big|_0^{\pi}+2\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x]_0^{\pi}=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

（2）$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$x=-1$，$y=1$ 所围成的闭区域.

解 将 D 视为 $X-$ 型区域，则 D： $x\le y\le 1$，$-1\le x\le 1$.

原式$=\int_1^{-1}\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}y$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_x^1\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

（3）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由不等式 $|x|+|y|\le 1$，$x\ge 0$ 所确定的闭区域.

解 原式$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-x+1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{x+y}\Big|_{y=x-1}^{y=-x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2x-1})\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}}{2}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

易犯的错误是：认为积分区域 D 是关于 x 轴对称的，因此原积分等于在域 D 内第一象限部分域上积分的 2 倍，即

$$\text{原式}=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma\ ,\quad D_1=\begin{cases}0\le x\le 1,\\0\le y\le 1-x.\end{cases}$$

此解错在没有被积函数的奇偶性，只有积分区域的对称性，就乱用对称性简化计算.

（4）$\iint\limits_D\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=0$，$y=x$ 和 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 围成的闭区域.

解 $\iint\limits_D\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

3. 计算积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值.

解 由于函数 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，故需交换积分次序，积分区域 D 为由 $x=0, y=2, y=x$ 所围成的区域，故

原式$=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$.

4. 设 D 为以点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形，D_1 为 D 在第一象限部分，试将 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为 D_1 上的积分.

解 如图 9.1 所示，将积分区域分为 D_1' 与 D_2' 两部分，其中 D_1' 为三角形 AOB，D_2' 为三

角形 BOC .

显然 D_1' 关于 y 轴对称, D_2' 关于 x 轴对称, 又因为函数 xy 关于 x , y 均为奇函数, 所以

$$\iint\limits_{D_1'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \quad \iint\limits_{D_2'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

故
$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

又函数 $\cos x \sin y$ 关于 x 为偶函数, 关于 y 为奇函数，所以

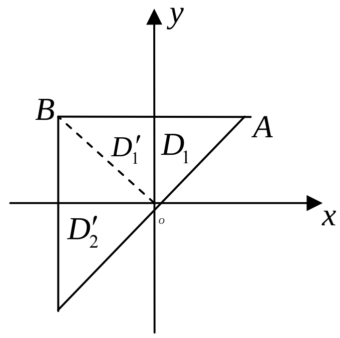


图 9.1

$$\iint\limits_{D_1'} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \iint\limits_{D_2'} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

综上所述,

$$\iint\limits_{D} (xy + \cos x \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

5. 证明：$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$.

分析 因为欲证等式的左端为累次积分, 等式右端为定积分, 因此, 应从左端出发证明，作一次积分, 化为定积分, 使之与右端定积分相等. 但原累次积分的被积函数含有抽象函数, 无法关于 x 先积分, 故考虑改变积分次序.

解 $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$.

6. 求下列空间域 Ω 的体积.

（1）由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体.

解 曲顶柱体以 $D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 为底, 以 $z=6-2x-3y$ 为顶面, 故所求立体体积

$$V = \iint\limits_{D} (6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (6-2x-3y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (6-2x-\frac{3}{2})\mathrm{d}x = 6-1-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

（2）由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 围成的立体.

解 两曲面的交线满足方程组

$$\begin{cases} z = x^2+2y^2 \\ z = 6-2x^2-y^2 \end{cases}$$

消去 z , 得 $x^2+y^2=2$. 所求立体的体积

$$V=\iint_D (z_2-z_1)\mathrm{d}\sigma=\iint_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=3\iint_D(2-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=6\pi\cdot(\rho^2-\frac{\rho^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{2}}=6\pi.$$

7. 画出积分区域, 并且把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

（1） $0\le y\le x^2,\qquad 0\le x\le 1$;

解 积分区域如图 9.2(a)所示, 其边界曲线 $y=x^2$ 及 $x=1$ 在极坐标下的方程分别为 $\rho=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 及 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

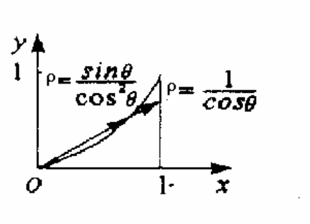


图 9.2（a）

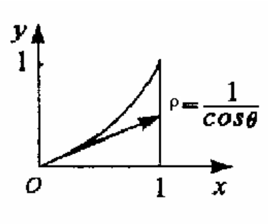


图 9.2（b）

易犯的错误是：积分区域如图 9.2(b)所示.

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

此错误是由作图不准确造成的.

（2）由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{ax-x^2}$ 及 $y=-x$ 围成的闭区域（$a>0$）.

解 积分区域如图 9.3 所示, 曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 在极坐标下的方程分别为 $r=a$ 及 $r=a\cos\theta$.

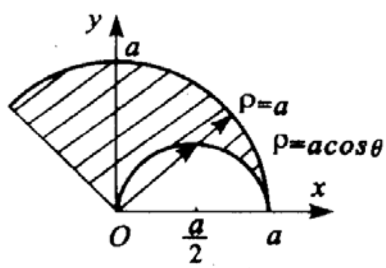


图 9.3

原积分=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

易犯的错误是：原积分=$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

8. 计算 $I=\iint\limits_D(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D： $x^2+y^2\le 4$.

解 积分区域关于 x 轴, y 轴均对称, 被积函数 $|x|+|y|$ 关于 x，y 均为偶函数, 故

I =4$\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （D_1 为 D 位于第一象限的部分）

=4$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\cos\theta+\sin\theta)\rho^2\mathrm{d}\rho=\dfrac{64}{3}$.

9. 选择适当的坐标计算下列各题.

（1）$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是圆环形闭区域： $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

解 原式=$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi}^{2\pi}\sin\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi[-\rho\cos\rho+\sin\rho]_{\pi}^{2\pi}=-6\pi^2$.

（2）$\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

解 $\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{3}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}}xe^{-y^2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\dfrac{y}{4}-\dfrac{y}{9})e^{-y^2}\mathrm{d}y\quad=\dfrac{5}{72}\int_0^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{5}{144}$.

（3）$\iint\limits_D\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$, 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限内的区域.

解 $\iint\limits_D\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{3}{64}\pi^2$.

（4） $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域.

解 原式=$\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_a^{3a}\mathrm{d}y[\dfrac{x^2}{3}+y^2x]_{y-a}^{a}$

$$=\int_a^{3a}[\frac{y^2}{3}-\frac{1}{3}(y-a)^3+y^2a]\mathrm{d}y$$

$$=[\frac{y^4}{12}-\frac{(y-a)^4}{12}+\frac{a}{3}y^3]_a^{3a}\ =14a^4.$$

易犯的错误时：认为积分区域如图 9. 4 所示.

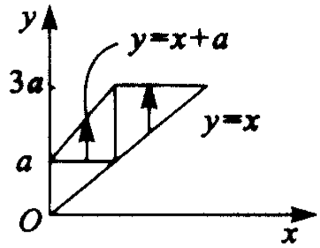


图 9.4

原式$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_a^{x+a}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$+\int_a^{3a}\mathrm{d}x\int_x^{3a}(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

此错误是由画图不准确造成的.

（5） $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解 1 区域 D 及 D_1 如图 9. 5 所示, 有

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D^1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ =\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=4-\frac{\pi}{2}.$$

解 2 如图 9. 5 所示,

$D=\{(x,y)\,|-2\le x\le-\sqrt{2y-y^2},0\le y\le 2\}$,

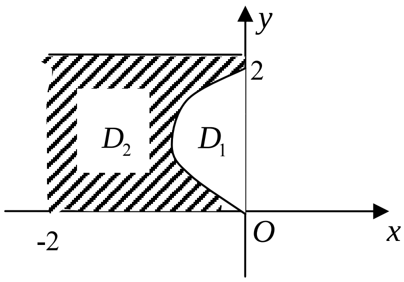


图 9.5

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{令y-1=\sin t}}\ 4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=4-\frac{\pi}{2}.$$

10. 求由圆 $\rho=2$ 和心形线 $\rho=2(1+\cos\theta)$ 所围图形（在圆外部分）的面积.

解 由$\begin{cases}\rho=2(1+\cos\theta)\\ \rho=2\end{cases}$得交点：$\theta_0=\pm\frac{\pi}{2}$，$\rho_0=2$. 面积

$$A=\iint_D \rho d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}\rho d\rho$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2\theta+2\cos\theta]d\theta=4[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2]=8+\pi.$$

11. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求此薄片的质量.

解 质量 $M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}\rho^3 d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\theta^4 d\theta=\frac{\pi^5}{40}$.

第三节　三重积分的计算

1. 化 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是：

（1）由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$，$z=0$ 所围成的闭区域.

（2）由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1$，$z=0$ 所围成的闭区域.

解 （1）由 $\begin{cases} z=xy \\ z=0 \end{cases}$ 消去 z , 得 $xy=0$, 即 $x=0$ 或 $y=0$. 因此空间域是以 $z=0$ 为下曲面, $z=xy$ 为上曲面, 侧面是柱面 $x=0$，$y=0$，$x+y-1=0$. 因此

原式 $=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$.

（2）积分区域 Ω 可表示为

$$0\le z\le x^2+y^2，x^2\le y\le 1，-1\le x\le 1$$

所以

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$$

2. 计算 $\iiint_\Omega y\cos(x+z)dxdydz$, 其中 Ω 由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 和 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域.

解 将积分区域 Ω 向 xOy 平面投影得 D_{xy} ： $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\sqrt{x}$, 则 Ω 可表示成 $0\le z\le\frac{\pi}{2}-x$, $(x,y)\in D_{xy}$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} y(1-\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解 1 积分区域 Ω 如图 9.6 所示, 用竖坐标为 z 的平面截域 Ω, 得圆域

$$D(z): x^2+y^2 \le \frac{R^2z^2}{h^2},$$

其面积为 $\pi\frac{R^2z^2}{h^2}$, 采用“先二后一法”计算.

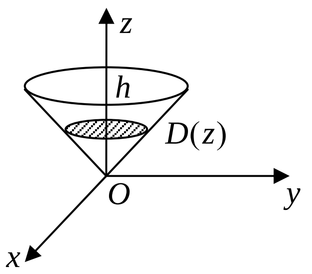


图 9.6

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}\mathrm{d}\sigma = \int_0^h z\cdot\pi\frac{R^2z^2}{h^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{z^4}{4}\Big|_0^h = \frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

解 2 积分域 Ω 的边界曲面在柱面坐标下的方程分别为 $z=h$ 及 $z=\frac{h}{R}\rho$.

利用柱面坐标计算.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{h}{R}\rho}^{h} z\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^R\rho\frac{1}{2}[h^2-\frac{h^2}{R^2}\rho^2]\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi[\frac{h^2}{2}\rho^2-\frac{h^2}{R^2}\cdot\frac{\rho^4}{4}]_0^R = \frac{R^2}{4}h^2\pi.$$

易犯的错误是：

（1）在柱面坐标下, 原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{h}{R}\rho} z\mathrm{d}z$. 关于 z 的积分上、下限错误.

（2）采用“先二后一法”.

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi R^2\int_0^h z\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2h^2}{2}.$$

关于 x, y 积分的积分域错误, 积分域应为 $x^2+y^2\le\frac{R^2z^2}{h^2}$.

特别注意, 将被积函数 z 用表达式 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 代入也是错误的.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 1 按先 z 再 x 后 y 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x\int_0^{y} z\mathrm{d}z=0$$

其中 $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xdx$ 为奇函数再对称区间上的积分，其值为 0.

解 2 按先 x 再 y 后 z 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_z^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$$

其中 $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$.

解 3 按先 x 再 z 后 y 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y} z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$$

5 填空题.

设 Ω 由球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成，则三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在三种坐标系下分别可化为三次积分如下：

直角坐标系下：

$$I=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \underline{f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}\mathrm{d}z$$

柱面坐标系下：

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} \underline{f(\sqrt{\rho^2+z^2})\rho}\mathrm{d}z$$

球面坐标系下：

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} \underline{f(\sqrt{r})r^2\sin\varphi}\mathrm{d}r.$$

6. 利用柱面坐标计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $x^2+y^2\le 1$，$0\le z\le 1$ 所确定.

解 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_0^1 e^{-\rho^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 \rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho^2$

$$=-\pi \mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_0^1=-\pi(\mathrm{e}^{-1}-1)=\pi(1-\frac{1}{\mathrm{e}}).$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为由曲面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$及$x^2+y^2=3z$所围成的闭区域.

解 由$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$消去$z$，得$x^2+y^2=3$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv=\iiint\limits_{\Omega} zr\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\cdot\frac{1}{2}(4-\rho^2-\frac{r^4}{9})\mathrm{d}\rho=\frac{13}{4}\pi.$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$\Omega$为由曲面$y=\sqrt{2x-x^2}$，$z=0$，$z=a$ $(a>0)$，$y=0$所围成的闭区域.

解 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$.

7. 利用球面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的闭区域.

解 球面$x^2+y^2+z^2=z$在球面坐标下的方程为$r=\cos\varphi$.

原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{\pi}{10}\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}$.

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由不等式：$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$x^2+y^2\le z^2(a>0)$所确定.

解 曲面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$及$x^2+y^2=z^2(a>0)$在球面坐标下的方程分别为$r=2a\cos\varphi$及$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\cos\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=-8\pi\cdot\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

8. 选择适当的坐标计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$x^2=z^2+y^2$，$x=2$，$x=4$所围成的闭区域.

解 采用“先二后一法”计算.

$$\iiint_{\Omega}(1+x^2)\mathrm{d}v=\int_2^4\mathrm{d}x\iint_{Dx}(1+x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^4(1+x^2)\mathrm{d}x\iint_{Dx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_2^4(1+x^2)(\pi x^2)\mathrm{d}x=\frac{3256}{15}\pi.$$

（2）$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由不等式：$x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$所确定.

解 1 曲面$x^2+y^2+z^2=1$及$z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$在球面坐标下的方程分别为$r=1$及$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \mathrm{r}\cos\varphi\cdot\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}^2\mathrm{d}\mathrm{r}=2\pi\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{20}.$$

解 2 曲面$x^2+y^2+z^2=1$及$z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$在柱面坐标下的方程为$z=\sqrt{1-\mathrm{r}^2}$及$z=\sqrt{3}\mathrm{r}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\int_{\sqrt{3-\mathrm{r}}}^{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} z\sqrt{\mathrm{r}^2+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{r}}{2}\cdot\frac{(\mathrm{r}^2+z^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{\sqrt{3-\mathrm{r}}}^{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}}\mathrm{d}\mathrm{r}=\frac{\pi}{20}.$$

（3）$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是$x^2+y^2+z^2\le R^2$和$x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分.

解 1 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$及$x^2+y^2+z^2=2Rz$在球面坐标下的方程分别为$r=R$及$r=2R\cos\varphi$. 由$\begin{cases} r=2R\cos\varphi \\ r=R\end{cases}$解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2\pi}{5}R^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\cos\varphi-\frac{32}{5}R^5\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\mathrm{d}\cos\varphi$$

$$=\frac{7\pi}{60}R^5+\frac{\pi R^5}{160}=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

解 2 采用“先二后一法”计算.

$$原式=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2Rz-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

第四节　重积分的应用

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解　由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 消去 z，得 D 的边界：$x^2+y^2=2x$. 所求曲面面积

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\pi.$$

2. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围成立体的表面积.

解 1　所求曲面在第一卦限内的图形如图 9.7 所示. 面积为

$$S=16S_1=16\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=16\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=16R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2}}=16R^2.$$

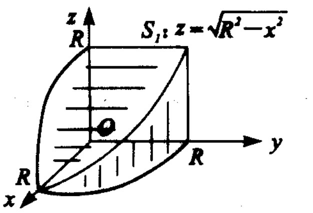


图　9.7

解 2　由 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$ 消去 x，得 $z=\pm y$. 对于曲面 $x=\sqrt{R^2-y^2}$，$x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}$，$x_z=0$，所求曲面的面积为

$$S=8S^*=8\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iint_{Dyz} \sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=8R\int_0^R \mathrm{d}y\int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}z=8R\int_0^R \frac{2y}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y=-8R\cdot 2(R^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R=16R^2.$$

3. 设平面薄片所占的闭区域 D 由曲线 $y=x^2$，$x+y=2$ 围成, 求该均匀薄片的重心.

解　$\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}$，$\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}$.

$$M=\rho_0\iint_D \mathrm{d}\sigma=\rho_0\int_{-2}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}\mathrm{d}y=\rho_0\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\rho_0,$$

$$M_y = \rho_0 \iint\limits_D x \mathrm{d}\sigma = \rho_0 \int_{-2}^{1} x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x} \mathrm{d}y = \rho_0 \int_{-2}^{1} x(2-x-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{9}{4}\rho_0 ,$$

$$M_x = \rho_0 \int_{-2}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x} y\mathrm{d}y = \frac{\rho_0}{2} \int_{-2}^{1} [(2-x)^2 - x^4]\mathrm{d}x = \frac{36}{5}\rho_0 ,$$

因此，$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = -\frac{1}{2}$，$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}$，故重心坐标为 $(\overline{x}, \overline{y}) = (-\frac{1}{2}, \frac{8}{5})$.

4. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$，$y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\rho(x,y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

解 质量为 $M = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} (x^2+y^2)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \{\frac{1}{3}[(2-y)^3 - y^3] + y^2(2-2y)\}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (\frac{8}{3} - 4y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3)\mathrm{d}y = [\frac{8}{3}y - 2y^2 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^4]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

5. 利用三重积分计算.

(1) 由曲面 $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2 = 4z$ 所围成的立体体段.

解 采用柱面坐标计算

$$V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho(\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4})\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^2 \frac{-1}{2}\sqrt{5-\rho^2}\mathrm{d}(5-\rho^2) - \frac{\pi}{2}\int_0^2 \rho^3 \mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2}{3}\pi(5-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{\pi}{8}\rho^4\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

(2) 由曲面 $z = \sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(A > a > 0)$，$z = 0$ 所围匀质物体的重心.

解 匀质物体的重心即形心, 且形心在对称轴−z 轴上, 因此 $\overline{x} = 0$，$\overline{y} = 0$，$\overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v}$.

其中 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3)$.

$$\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_a^A r^3 \mathrm{d}r = 2\pi \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{A^4 - a^4}{4} = \frac{\pi}{4}(A^4 - a^4).$$

于是 $\overline{z}=\frac{3}{8}\frac{(A^4-a^4)}{(A^3-a^3)}$. 重心坐标为（$0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}$）.

6. 求半径为 R、高为 h 的均匀圆柱体绕过中心而垂直于母线的轴的转动惯量（设密度 $\rho=1$）.

解 建立坐标系, 使圆柱体的对称轴在 z 轴上, 且原点在其中心. 则所求转动惯量为

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\rho^2\cos^2\theta+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho(\rho^2\cos^2\theta\cdot h-\frac{h^3}{12})\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}[\frac{hR^4}{4}\cos^2\theta+\frac{h^3R^2}{24}]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi h}{4}R^4+\frac{\pi h^3}{12}R^2$$

$$=\frac{M}{4}(R^2+\frac{h^2}{3})\quad\text{（其中 }M=\pi R^2h\text{ 为圆柱体质量）}$$

第九章　重积分（总习题）

1. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D:x^2+y^2\le a^2,x^2+y^2\ge ay$.

解 1 $I=(\iint\limits_{D_上}+\iint\limits_{D_下})\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a\sin\theta}^{a}\rho^2\mathrm{d}\rho+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{a^3}{3}\pi=\frac{2}{3}a^3\pi+\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3(\pi-\frac{2}{3}).$$

解 2 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{x^2+y^2\le ay}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2}{3}a^3\pi-\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3(\pi-\frac{2}{3}).$$

2. 计算 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=x^2$, $y=4x^2$ 及 $y=1$ 围成.

解 1 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}(x+y)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(\frac{3}{8}y+\frac{y^{3/2}}{2})\mathrm{d}y+\int_0^1(\frac{y^{3/2}}{2}-\frac{3}{8}y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 y^{3/2}\mathrm{d}y=\frac{2}{5}.$$

解 2 $I=(\iint\limits_{D_{大}}-\iint\limits_{D_{小}})(x+y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(x+y)\mathrm{d}y-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{4x^2}^1(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1[x(1-x^2)+\frac{1-x^4}{2}]\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[x(1-4x^2)+\frac{1-16x^2}{2}]\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$$

3. 计算 $I=\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 1}}\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

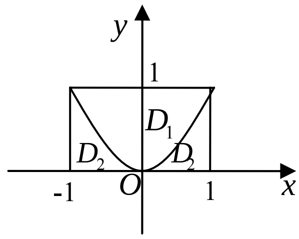


图 9.8

解 1 $I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}\sigma$ （图 9. 8）

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1[\frac{1-x^4}{2}-x^2(1-x^2)]\mathrm{d}x+\int_{-1}^1[x^4-\frac{x^4}{2}]\mathrm{d}x=\frac{11}{15}.$$

亦可利用对称性简化计算. 由于 D_1、D_2 均关于 $x=0$（即 y 轴）对称, 又 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数（即 $f(-x,y)=f(x,y)$）, 因此

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y-x^2)\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y.$$

4. 计算 $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是闭区域 $x^2+y^2\le R^2$.

解 原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho[\rho^2\sin^2\theta+3\rho\cos\theta-6\rho\sin\theta]\mathrm{d}\rho+9\pi R^2$

$$=9\pi R^2+\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+0+0=9\pi R^2+\frac{R^4}{4}\pi.$$

亦可利用对称性简化计算. 由于积分 $\iint\limits_D xd\sigma$ 及 $\iint\limits_D yd\sigma$ 均为零, 故原积分

$$I=\iint\limits_D y^2d\sigma+0+0+9\pi R^2$$

再利用极坐标计算.

5. 计算 $\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 Ω 在 yOz 面投影域 D_{yz} 为： $y^2+z^2\le 10$, 所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3(5-\frac{\rho^2}{2})\mathrm{d}\rho=2\pi[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{\rho^6}{12}]_0^{\sqrt{10}}$$

$$=2\pi[\frac{5}{4}\times100-\frac{1}{12}\times1000]=2\pi\frac{1500-1000}{12}=\frac{250}{3}\pi.$$

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $x^2+y^2+z^2\le1$，$z\ge2\sqrt{x^2+y^2}-1$ 所确定.

解　投影区域 D： $x^2+y^2\le(\frac{4}{5})^2$，用柱面坐标得

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{4}{5}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{2r-1}^{\sqrt{1-r^2}}\frac{2z}{\rho}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{4}{5}}[1-\rho^2-(2\rho-1)^2]\mathrm{d}\rho=\frac{64}{75}\pi.$$

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解　$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$（因为被积函数是 x 的奇函数, 积分区域 Ω 关于 $x=0$ 对称），所以有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

又由于 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的被积函数只是 z 的函数, 用平面 $z=z$ 去截 Ω 所得闭区域 $D(z)$ 的面积很容易求, 因此可选用“先二后一”方法求解.

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_1(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_2(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\pi z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}z\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}.$$

8. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$，$z=2$，$z=8$ 围成的闭区域.

解 1　$I=(\iiint\limits_{\Omega_{柱}}+\iiint\limits_{\Omega_{外}})(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_2^8\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\mathrm{d}z$

$$=6\cdot2\pi\cdot4+2\pi\int_2^4\rho^3(8-\frac{\rho^2}{2})\mathrm{d}\rho=48\pi+288\pi=336\pi.$$

解 2 $I=(\iiint\limits_{\Omega_{大}}-\iiint\limits_{\Omega_{小}})(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho^2\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^4(8\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)\mathrm{d}\rho-2\pi\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)\mathrm{d}\rho=336\pi.$$

解 3 采用“先二后一法”计算.

$$I=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

易犯的错误是：将 $x^2+y^2=2z$ 代入被积表达式, 得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}v\overset{先二后一}{=\!=\!=}2\int_2^8 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_2^8 z\cdot\pi\cdot 2z\mathrm{d}z=4\pi\frac{z^3}{3}\Big|_2^8=672\pi.$$

9. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 4$.

解 被积函数含有绝对值 $\left|x^2+y^2+z^2-1\right|$, 用曲面 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 将 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2, 其中

$$\Omega_1：x^2+y^2+z^2\le 1\ ,\ \Omega_2：1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2-1)\mathrm{d}v$$

采用球面坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega_1}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2-1)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2(r^2-1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{232}{15}\pi,$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}v=\frac{8}{15}\pi+\frac{232}{15}\pi=16\pi.$$

10. 半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 被两个圆柱面 $x^2+y^2-Ry=0$, $x^2+y^2+Ry=0(R>0)$ 割出两个窗口, 求在这半球面上剩下部分的面积.

解 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$$S = 4\iint_{D_1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{R\sin\theta}^{R} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$= -4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\Big|_{R\sin\theta}^{R} \mathrm{d}\theta = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta \mathrm{d}\theta = 4R^2.$$

11. 在底半径为 R, 高为 H 的圆柱体上面, 拼加一个同半径的半球体, 使整个立体的重心位于球心处, 求 R 和 H 的关系（设体密度 $\mu=1$）.

解　建立坐标系如图 9. 9 所示, 由题意知, 物体重心的竖坐标 $Z = \dfrac{\iiint_\Omega z\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega \mathrm{d}v} = 0$,

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\int_{-H}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\int_0^R \frac{\rho}{2}(R^2-\rho^2-H^2)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}R^2(R^2-2H^2) = 0.$$

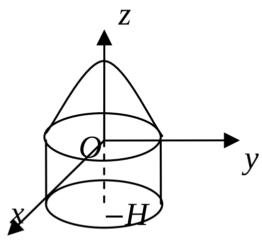


图　9.9

$R = \sqrt{2}H$.

12. 设一个上、下底半径各为 b、a, 高为 H 的圆锥台, 其体密度 $\mu=1$, 试求其关于中心轴的转动惯量（$b<a$）.

解 1　建立坐标系下如图 9. 10

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v = (\iiint_{\Omega_1} + \iiint_{\Omega_2})(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b \rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^H \mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_b^a \rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{H(a-\rho)}{a-b}}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\cdot\frac{b^4}{4}\cdot H + 2\pi\frac{H}{a-b}\int_b^a \rho^3(a-\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{\pi H(a^5-b^5)}{10(a-b)}.$$

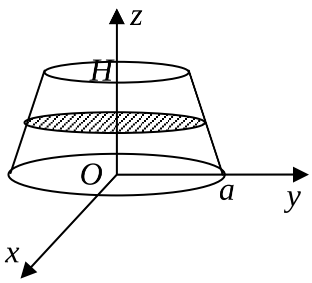


图　9.10

解 2　采用“先二后一法”. 用竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω, 得到圆域 $D(z)$, 设其半径为 $\rho(z)$, 则

$$\frac{\rho(z)-b}{a-b} = \frac{H-z}{H},\ \rho(z) = a - \frac{a-b}{H}z.$$

$$\text{原式} = \int_0^H \mathrm{d}z\iint_{D(z)} (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^H \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a-\frac{a-b}{H}z} \rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^H \frac{1}{H^4}[aH-(a-b)z]^4\mathrm{d}z = \frac{\pi H}{10(a-b)}(a^5-b^5).$$

第十章　曲线积分与曲面积分

第一节　第一类曲线积分

1.设 xOy 平面内有一分布着质量的曲线弧 L ,在点 (x,y) 处它的线密度为 $\rho(x,y)$,用对弧长的曲线积分表示：

（1）这曲线弧 L 的长度 $S=$ ________ ;

（2）这曲线弧 L 的质量 $M=$ ________ ;

（3）这曲线弧 L 的重心坐标：$\overline{x}=$ ___ ; $\overline{y}=$ ___ ;

（4）这曲线弧 L 对 x 轴, y 轴及原点的转动惯量 $I_x=$ _____ ; $I_y=$ _____ ; $I_0=$ _____ .

解　（1） $S=\int_L \mathrm{d}s$;

（2） $M=\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$;

（3） $\overline{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}$,　　$\overline{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}$,

（4） $I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s$, $I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s$, $I_0=\int_L (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}s$

2.（1）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长为 a ,求 $\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$.

（2）设 L 为圆周 $x^2+y^2=64$,求 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$.

解　（1） L ： $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,即 $3x^2+4y^2=12$,

从而 $\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a$.

（2） L ： $x^2+y^2=64$,

从而 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\oint_L 8\mathrm{d}s=8\oint_L \mathrm{d}s=8\cdot 2\pi\cdot 8=128\pi$.

3.计算 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 L 是以 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形.

解　如图 10.1 所示,

L_1 ： $y=0$, x 从 $0\to 2$,

L_2 ： $x=0$, y 从 $0\to 1$,

L_3 ： $x=2-2y$, y 从 $0\to 1$,

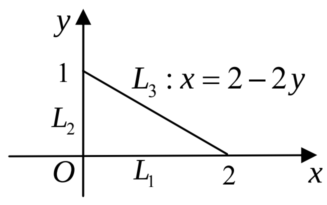


图　10.1

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2}\mathrm{d}y=\sqrt{5}\mathrm{d}y.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s&=\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{L_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}s\\&=\int_0^2x^2\mathrm{d}x+\int_0^1y^2\mathrm{d}y+\sqrt{5}\int_0^1[(2-2y^2)+y^2]\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+\sqrt{5}\int_0^1(4-8y+5y^2)\mathrm{d}y=3+\frac{5}{3}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

4.计算$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$,其中$L$为曲线$x^2+y^2=2x$.

解 1 L的参数方程为 L：$\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}$ $0\le\theta\le2\pi$. 计算出$\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta$,于是

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$$

$$\underline{\underline{\frac{\theta}{2}=u}}\ 4\int_0^{\pi}|\cos u|\mathrm{d}u=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=8.$$

解 2 在极坐标系下,$L:r=2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.计算出$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$,于是$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2|\cos\theta|\cdot2\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=8.$

5.求空间曲线$x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z=\mathrm{e}^{-t}(0<t<+\infty)$的弧长.

解 $$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(-\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而 $$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}.$$

6.有一铁丝成半圆形$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le\pi$,其上每一点处的密度等于该点的纵坐标,求铁丝的质量.

解 $$\mathrm{d}s=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t.$$

$$m=\int_L\rho\mathrm{d}s=\int_Ly\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}a\sin t\cdot a\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2a^2.$$

7.计算$\int_L(x^2+y^2-z)\mathrm{d}s$,其中$L$为球面$x^2+y^2+z=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线.

解 由于 $x^2+y^2+z=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 对 x, y, z 都具有轮换对称性,故

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s.$$

于是

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(\int_L x^2\mathrm{d}s+\int_L y^2\mathrm{d}s+\int_L z^2\mathrm{d}s)$$

$$=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

其中 $\int_L\mathrm{d}s$ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的周长,显然平面 $x+y+z=0$ 过球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

的球心 $O(0,0,0)$,所以 L 为该球面上的大圆,即半径为 a,故周长为 $2\pi a$.又因为

$$\int_L(y-z)\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s-\int_L z\mathrm{d}s=0,$$

所以

$$\int_L(x^2+y^2-z)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

第二节　第二类曲线积分

1.计算 $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）.

解 $L: x=a\cos t, y=a\sin t$, t 由 0 到 2π,

从而

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

2.计算 $\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

解 $I=\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x=-\frac{56}{15}.$

3.计算 $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧（图 10.2）.

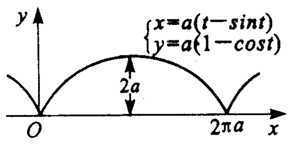


图　10.2

解 $I=\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}\mathrm{d}t$

$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t=-2\pi a^2$.

4.计算$\int_L[1+(xy+y^2)\sin x]\mathrm{d}x+[(x^2+xy)\sin y]\mathrm{d}y$,其中$L$为上半椭圆

$$x^2+xy+y^2=1(y\geq 0),$$

从点$(-1,0)$到点$(1,0)$的一段弧.

解 由$x^2+xy+y^2=1$可得$xy+y^2=1-x^2$, $x^2+xy=1-y^2$,代入积分式,得

$\int_L[1+(xy+y^2)\sin x]\mathrm{d}x+[(x^2+xy)\sin y]\mathrm{d}y$

$=\int_L[1+(1-x^2)\sin x]\mathrm{d}x+(1-y^2)\sin y\mathrm{d}y$

$=\int_{-1}^1[1+(1-x^2)\sin x]\mathrm{d}x+\int_0^0(1-y^2)\sin y\mathrm{d}y=2.$

5.计算$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的直线段.

解 Γ的点向式方程为:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$,从而$\Gamma$得参数方程为

$x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, t由0到1.

$I=\int_0^1[(1+t)^2+2(1+2t)^2+3(1+3t)^2]\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{3}(1+t)^3\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1+2t)^3\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1+3t)^3\Big|_0^1=32.$

6.计算$\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$为有向闭折线$ABCA$,这里的$A$, B, C依次为点$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

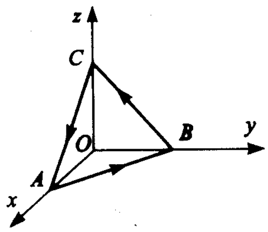


图 10.3

解 如图10.3, $AB: x=1-y$, $z=0$, y由0到1.

$\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1-2\mathrm{d}y=-2$;

$BC: y=1-z$, $x=0$, z由0到1;

$\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1(2-z)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}$;

$CA: z=1-x$, $y=0$, x由0到1;

$\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x=1$,

故 $$I=(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA})\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

7.有一质量为 m 的质点,除受重力的作用外,还受到一个大小等于该质点到原点的距离,方向指向原点的力 $\mathbf{f}$ 的作用,设该质点沿螺旋线 $L: x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ 从点 $A(0,1,\frac{\pi}{2})$ 移动到点 $B(1,0,0)$ 移动到点,求重力与力 $\mathbf{f}$ 的合力所作的功.

解 依据题意,力 $\mathbf{f}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,故质点所受的合力

$$\mathbf{F}=\mathbf{f}-mg\mathbf{k}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-(z+mg)\mathbf{k}$$

在螺旋线 L 上,起点 A 对应于 $t=\frac{\pi}{2}$,终点 B 对应于 $t=0$,即 $t:\frac{\pi}{2}\to 0$.

因此,力 $\mathbf{F}$ 所作的功

$$\begin{aligned}W&=\int_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y-(z+mg)\mathrm{d}z\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[-\cos t(-\sin t)-\sin t\cos t-(t+mg)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+mg)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}mg.\end{aligned}$$

第三节 格林公式

1.设 xOy 平面上闭曲线 L 所围成的闭区域为 D ,将给定的二重积分与其相应的曲线积分用线连接起来.

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (a) $\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

(2) $2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (b) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$

(3) $-\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (c) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

2.利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

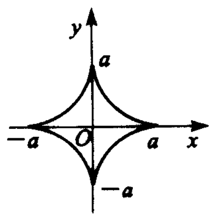


图 10.4

解 如图 10.4，因为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\x=a\sin^3 t\end{cases}$ t 由 0 到 2π .

从而

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

3.证明$\int_L(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$只与$L$的起始点有关,而与所取路径无关,并计算积分$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$.

解　$P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以积分与路径无关,故

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y=[12x^2-8x]_1^3+[27y^2-3y^3]_2^4$$

$$=80+156=236.$$

或者

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y)-(y^3\mathrm{d}x+3xy^2\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{(1,2)}^{(3,4)}\mathrm{d}(3x^2y^2-xy^3)=[3x^2y^2-xy^3]_{(1,2)}^{(3,4)}=236.$$

4.计算$I=\int_L\mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$,

其中L为从$O(0,0)$到$A(\pi,0)$的正弦曲线$y=\sin x$.

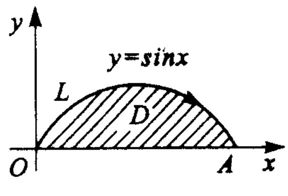


图 10.5

解　如图10.5所示,由格林公式

$$I=\int_L\mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$$

$$=(\oint_{L+\overline{AO}}-\oint_{\overline{AO}})\mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(-y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\pi}-1)-\frac{1}{20}(\mathrm{e}^{\pi}-1)=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-1).$$

其中

$$\int_0^{\pi} e^x\cos 2x dx=\int_0^{\pi}\cos 2x de^x=e^x\cos 2x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x d\cos 2x$$

$$=e^{\pi}-1+2\int_0^{\pi}e^x\sin 2x dx=e^{\pi}-1+2\int_0^{\pi}\sin 2x de^x$$

$$=e^{\pi}-1+2e^x\sin 2x|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}e^x d\sin 2x$$

$$=e^{\pi}-1-4\int_0^{\pi}e^x\cos 2x dx.$$

移项解之,得 $\int_0^{\pi}e^x\cos 2x dx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$.

注意 本题易犯两个错误:

（1）$I=(\oint_{L+\overline{AO}}-\oint_{\overline{AO}})e^x(1-\cos y)dx+e^x(\sin y-y)dy=\iint_D(-ye^x)dxdy$.

产生错误的原因是,没有注意格林公式使用时的条件:

$$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy,$$

其中C是D的取正向的边界曲线.而本题的闭曲线$L+\overline{AO}$是D的取负向的边界曲线,所以二重积分$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$前面必须添加负号.

（2）计算定积分$\int_0^{\pi}e^x\cos 2x dx$是连续两次使用部分积分法后移项解出来的.对此积分有些同学束手无策,有些则在连续使用分布积分法$\int udv=uv-\int vdu$时,每次选取函数$u(x)$,不注意必须是同类函数（如选三角函数作为$u(x)$就一直选三角函数,如选e^x作为$u(x)$就一直选e^x）,结果就出现了恒等式$\int udv=\int udv$,即前进一步又倒退一步,致使积不出来.

5. 已知$\varphi'(x)$连续,且$\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $A(0,0)$, $B(1,1)$,计算

$$I=\int_{\overline{AMB}}[\varphi(y)e^x-y]dx+[\varphi'(y)e^x-1]dy$$

其中$\overline{AMB}$是以$\overline{AB}$线段为直径的上半圆周.

解 如图 10.6 所示

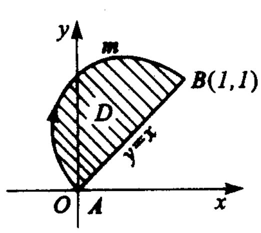


图 10.6

$$I=\int_{\overline{AMB}}[\varphi(y)e^x-y]dx+[\varphi'(y)e^x-1]dy$$

$$=[\oint_{\overline{AMB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}][\varphi(y)e^x-y]dx+[\varphi'(y)e^x-1]dy$$

$$=-\iint_D dxdy+\int_{\overline{AB}}[\varphi(y)e^x-y]dx+[\varphi'(y)e^x-1]dy$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1[(\varphi(x)+\varphi'(x))\mathrm{e}^x-(x+1)]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,\varphi(x)-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\varphi(x)\big|_0^1-\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}=-(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}).$$

本题需注意两点：

（1）同上题一样,使用格林公式时要注意边界曲线的方向,本题因是负向,故二重积分前必须添上负号;

（2）因$\varphi(x)$是抽象函数,不可能直接将$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$积出来,请不要先急于积分,先用分布积分法将$\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$表示为$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}\varphi(x)=\mathrm{e}^x\varphi(x)\big|_0^1-\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,则两项抽象函数的定积分就抵消了,问题就可得到解决,因此在解题过程中一定要善于思考,从中发现解题技巧.

6.证明$\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在右半平面$(x>0)$内为某一函数$u(x,y)$的全微分,并求出一个这样的函数$u(x,y)$.

解 $P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$,$Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,所以

$$\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

为某一函数$u(x,y)$的全微分.取定点$M_0(1,0)$,对于右半平面上任一点$M(x,y)$,令

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{x-0}{x^2+0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\ln|x|+\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\ln|x|$$

$$=\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

7.已知曲线积分$\oint\limits_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(9x-x^3)\mathrm{d}y$,其中$L$为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$,取逆时针方向,求$a$的值,使得对应曲线积分的值最大.

解 显然$P=1+y^3$,$Q=9x-x^3$在区域$D:(x-a)^2+y^2\le a^2$内有一阶连续的偏导数,由格林公式

$$I(a)=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(9-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=9\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-3\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\pi a^2-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=9\pi a^2-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=9\pi a^2-24a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=9\pi a^2-24a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=9\pi a^2-\frac{9}{2}\pi a^4.$$

$I'(a)=18\pi a(1-a^2)$,令$I'(a)=0$,解得$a=1$(依题意设$a>0$,故将$a=0$和$a=-1$舍去),因为$a=1$是$I(a)$在$(0,+\infty)$内唯一的驻点,且

$$I''(a)=18\pi-54\pi=-36\pi<0,$$

故$I(a)$在$a=1$处取得最大值,因此$a=1$,即当积分路径为$(x-1)^2+y^2=1$时,对应曲线积分的值最大.

8.求$\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$,其中

(1)L为圆周$x^2+y^2-2y=0$的正向;(2)L为椭圆$4x^2+y^2-8x=0$的正向.

解 令$P(x,y)=\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$,$Q(x,y)=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$,则当$(x-1)^2+y^2\ne 0$时,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

记L所围成的闭区域为D,

(1)$L:x^2+y^2-2y=0$,即$x^2+(y-1)^2=1$,此时$(1,0)\notin D$,(如图 10.7(a)所示).

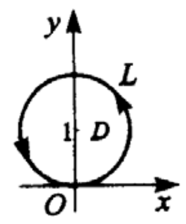


图 10.7(a)

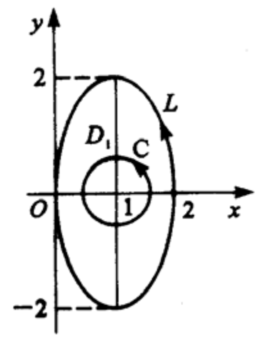


图 10.7(b)

由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,由格林公式, $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0$.

（2） $L:4x^2+y^2-8x=0$,即 $(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$,此时 $(1,0)\in D$,以 $(1,0)$ 为圆心,以充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径作圆周 $C:\begin{cases}x-1=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$, θ 由 0 到 2π,取逆时针方向（如图 10.7(b)所示）.

记 L 和 C 所围成的闭区域为 D_1,对复连通区域 D_1 应用格林公式,得

$$\oint_{L+C^-}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0,$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)-\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}-\mathrm{d}\theta=-2\pi.\end{aligned}$$

注意 （2）中由于点 $(1,0)$ 位于 L 所围成的闭区域 D 内,需用复连通域上的格林公式,以避开 $(1,0)$ 点,考虑到被积函数的分母为 $(x-1)^2+y^2$,故取圆周 $C:\begin{cases}x-1=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$,有同学不考虑“洞”,即点 $(1,0)$,直接用格林公式,得到 $\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0$ 是错误的.

9.求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a 、 b 为正常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1,则

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L+L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y-\oint_{L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y\\&=\iint_D[(\mathrm{e}^x\cos y-a)-(\mathrm{e}^x\cos y-b)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^{2a}-bx\mathrm{d}x\\&=\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\int_0^{2a}\mathrm{d}x=(b-a)\frac{\pi}{2}a^2+\frac{b}{2}(2a)^2\\&=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

第四节　第一类曲面积分

1.设有一分布着质量的曲面Σ,在点(x,y,z)处它的面密度为$\rho(x,y,z)$.用曲面积分表示：

（1）这曲面Σ的面积$A=$______；

（2）这曲面Σ的质量$M=$______；

（3）这曲面Σ的重心坐标为$\overline{x}=$______，$\overline{y}=$______，$\overline{z}=$______；

（4）这曲面Σ对于x轴,y轴,z轴及原点的转动惯量

$$I_x=\_\_\_,I_y=\_\_\_,I_z=\_\_\_\_\_\_,I_0=\_\_\_\_\_\_.$$

解　（1）$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

（2）$M=\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$.

（3）$\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S},\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}y\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S},\overline{z}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}z\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}$.

（4）$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$，　$I_y=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$，

$I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$，　$I_0=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2.计算$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限中的部分.

解　如图10.8所示，$\Sigma:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\frac{\partial z}{\partial x}=-2,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在积分曲面上,被积函数$z+2x+\frac{4}{3}y=4(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4})=4$,

$$D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 3-\frac{3}{2}x\\0\le x\le 2\end{cases},$$

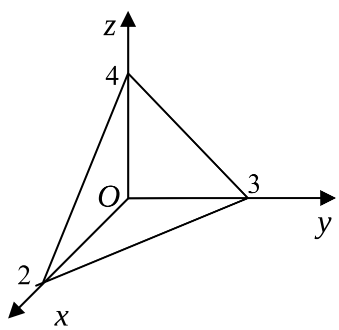


图 10.8

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\sqrt{61}\cdot 3=4\sqrt{61}.$$

3.计算$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面.

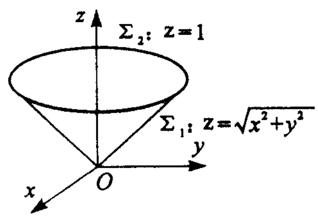


图 10.9

解 如图 10.9 所示,

$$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D_{xy}: x^2+y^2\le 1.$$

$$\Sigma_2: z=1, \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D_{xy}: x^2+y^2\le 1,$$

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\pi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

4.计算$I=\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截成的部分$(a>0)$.

解 因为积分曲面Σ关于zOx坐标面（即$y=0$平面）对称,$xy+yz=y(x+z)$是关于y的奇函数,所以

$$I=\iint_{\Sigma}y(x+z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=0+\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S$$

此外,在Σ上,$z=\sqrt{x^2+y^2}$,$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,且$\Sigma$在$xOy$面上的投影为

$$D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax,$$

因此

$$I=\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\mathrm{d}r=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

5.计算$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为抛物面$z=2-(x^2+y^2)$在$xOy$面上方的部分.

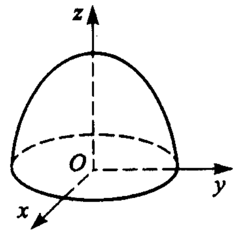


图 10.10

解 如图 10.10 所示,

$$z=2-(x^2+y^2),\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y,$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$D_{xy}:x^2+y^2\le 2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1+4\rho^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+4\rho^2)\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

6.计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z\ge h(0<h<a)$的部分.

解 Σ在xOy面上的投影为圆域：$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2-h^2$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由积分区域的对称性可得：$\iint\limits_{D_{xy}}x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D_{xy}}y\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

又积分区域D_{xy}的面积为$\pi(a^2-h^2)$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2).$$

7.求柱面$x^2+y^2-ax=0$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$内部的部分的表面积$(a>0)$.

解 由对称性,所求面积A为其位于第一卦限部分面积的 4 倍,即$A=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$,其中曲面$\Sigma$为$y=\sqrt{ax-x^2}$,求得面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,,$$

由$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$,消去 y ,得 $z=\sqrt{a^2-ax}$,由此得$\sum$在 zOx 坐标面上的投影为:

$$D_{xz}:0\le z\le\sqrt{a^2-ax}\,,\ \ 0\le x\le a\,,$$

因此,曲面$\sum$的面积

$$A=4\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\iint_{D_{xz}}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=2a\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{ax-x^2}}=2a\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2a\int_0^a\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4a^2\,.$$

8.设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,π 为 S 在点 P 处的切平面, $f(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $\iint_S\frac{z}{f(x,y,z)}\mathrm{d}S$

解 设 (X,Y,Z) 为 π 上任意一点,则π的方程为 $\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$,从而知

$$f(x,y,z)=(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

由 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$,有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

从而

$$\iint_S\frac{z}{f(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{3}{2}\pi\,.$$

第五节　第二类曲面积分

1.当$\sum$是xOy面内的一个闭区域D时,$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$与二重积分的关系为

（1）$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}$_____$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,（2）$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}$_____$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　（1）$f(x,y,0)$,　（2）$\pm R(x,y,0)$.

注意　因第一类曲面积分与所给曲面的侧无关,所以(1)中应填$f(x,y,0)$;而第二类曲面积分与曲面的侧有关,所以(2)中应填$\pm R(x,y,0)$,有个别同学常疏忽这一点,只填$R(x,y,0)$,这是不对的.

2.计算$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\sum$为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

解　记$\sum_1: x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$,取前侧,$\sum_2: x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2}$取后侧,$\sum_1$与$\sum_2$在$yoz$面的投影区域相同,记为$D_{yz}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

同理　$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$,

而　$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi a^4}{2}$.

从而

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+\frac{\pi a^4}{2}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

注意　常见的错误是:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或　$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{D_{zx}}(a^2-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

产生错误的原因是忽视了将第二类曲面积分化为二重积分时,应根据积分曲面的侧选

择二重积分前的正、负号.

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} g[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} R[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

将第二类曲面积分化为二重积分时,究竟什么时候二重积分前面写正号,什么时候写负号,这与所给曲面的侧有关.切记:

上侧取正,下侧取负;

前侧取正,后侧取负;

右侧取正,左侧取负;

3.计算 $\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 如图 10.11 所示,$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$,其中 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 各自对应于四面体的一个表面,可表示为

$\Sigma_1: z=0$ 下侧; $\Sigma_2: y=0$ 左侧;

$\Sigma_3: x=0$ 后侧; $\Sigma_4: x+y+z=1$ 上侧.

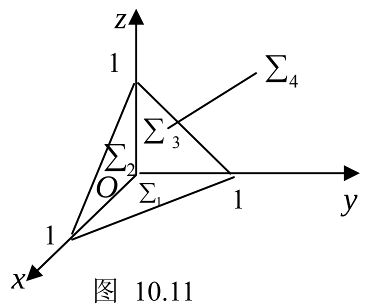


图 10.11

由于 Σ_1 在 $z=0$ 平面上,故在 Σ_1 上的曲面积分为 0;同理,在 Σ_2, Σ_3 上的曲面积分也都为 0,所以,所求积分

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由 Σ_4 得方程得 $z=1-x-y$, Σ_4 在 xoy 面上的投影域为

$$D_{xy}: 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1,$$

于是

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{24}.$$

4.计算 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解 由题设,Σ 的单位法向量

$$\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}(2x,2y,2z)=\frac{1}{R}(x,y,z).$$

由两类曲面积分的关系,可得

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}R^2\mathrm{d}S$$

$$=R\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S \underline{\underline{\text{几何意义}}} R\cdot 4\pi R^2=4\pi R^3.$$

5.计算 $I=\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 f,g,h 为连续函数,Σ 为平行六面体$\Omega: 0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$表面的外侧.

解 $\oiint_{\Sigma} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab[h(c)-h(0)]$,

$\oiint_{\Sigma} g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xz}} g(b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{D_{xz}} g(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=ac[g(b)-g(0)]$,

$\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}} f(a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}} f(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=bc[f(a)-f(0)]$,

从而
$$I=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

注意 本题易犯的错误是利用高斯公式来解,题目中仅告诉我们, f,g,h 为连续函数,又如何对 f,g,h 求导呢?

6.计算 $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数,Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解 平面 $x-y+z=1$ 的法线向量为 $\mathbf{n}=\{1,-1,1\}$,方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

则

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)(-\frac{1}{\sqrt{3}})+(f+z)\frac{1}{\sqrt{3}}]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(-1)^2+1^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

第六节　高斯公式　通量与散度

1.设计 $\oiint_{\Sigma}(x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面

$$x=0\,,\,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$$

所围成的立体的表面的外侧.

解　由高斯公式,

$$I=\oiint_{\Sigma}(x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

设该正方体的形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$,则 $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}=\frac{a}{2}$,

而　$$\overline{x}=\frac{\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v}{v},\overline{y}=\frac{\iiint_{\Omega}y\mathrm{d}v}{v},\overline{z}=\frac{\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v}{v},$$

所以　$$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=\overline{x}v,\ \iiint_{\Omega}y\mathrm{d}v=\overline{y}v,\ \iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\overline{z}v,.$$

从而　$$I=2(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})v=2(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a)a^3=3a^4.$$

本题巧妙地利用了重心坐标公式,将利用高斯公式后得到的三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$ 的计算转化为计算 $(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})v$,从而使问题得到解决.

2.计算 $\iint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧的上半部分 $(a>0)$.

解　补充平面 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 取下侧,

$$I=(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(4z-2y+2y)\mathrm{d}v-0$$

$$=4\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}z\mathrm{d}z=8\pi\int_{\rho}^{a}\rho\cdot\frac{a^2-\rho^2}{2}\mathrm{d}\rho=\pi a^4.$$

注意　易犯的错误是

（1）$I=\iint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+2y)\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\cdots$

产生错误的原因是,没有注意到Σ仅是球面的上半部分,Σ并非封闭曲面,不能直接用高斯公式.尽管本题中沿曲面Σ_1的积分：$\iint\limits_{\Sigma_1}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,致使题目答案未受任何影响,但对不封闭的曲面直接用高斯公式,显然是不对的.

（2）有同学在补充平面$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$时,不写取什么侧,这也不妥.

3.计算$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$f(u)$具有一阶连续导数,$\Sigma$为柱面$(x-a)^2+(y-a)^2=(\frac{a}{2})^2$及平面$z=0, z=1(a>0)$所围成立体的表面外侧.

解　利用高斯公式,有

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})+1]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=\pi\cdot(\frac{a}{2})^2\cdot 1=\frac{\pi}{4}a^2.$$

4.计算$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解　$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\rho^4\mathrm{d}\rho=-\frac{12}{5}\pi a^5.$$

注意　易犯的错误是

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}a^2\mathrm{d}v=3a^2\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^5.$$

这里有两个错误：

(1) 不注意高斯公式使用的条件：Σ应是空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧. 本题所给的闭曲面是球面的内侧. 因此在将闭曲面上的曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成三重积分$3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$时,前面必须写上负号.

(2) 将曲面积分与三重积分的计算法混为一谈. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$时,因为$\Omega$为球体：$x^2+y^2+z^2\le a^2$,因此不能将三重积分中的被积函数$x^2+y^2+z^2$用$a^2$代入,这种做法是常犯的错误. 只有计算曲面积分时,才能将曲面方程代入被积函数.

5.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分曲面$\Sigma$为抛物面

$$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$$

的上侧.

解 令$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$,取下侧,则$\Sigma+\Sigma_1$构成封闭曲面,取内侧. 于是

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{1}r^2\mathrm{d}z=-6\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}.$$

由于Σ_1在平面$z=1$上,Σ_1在zOx, yOz坐标面上的投影为直线段,故$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, Σ_1在xOy坐标面上的投影域为$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$,于是

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cdot\rho^2\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{3\pi}{4}.$$

所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\pi}{2}-(-\frac{3\pi}{4})=\frac{\pi}{4}.$$

6.计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是由$x^2+y^2=z^2$及$z=h$ $(h>0)$所围成的闭曲面的外侧,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是此曲面的外法线的方向余弦.

解 Σ在xOy平面上的投影区域为：$x^2+y^2\le h^2$.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}v$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}\mathrm{d}z+2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(x+y)(h-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_{D_{xy}}\frac{h^2-(x^2+y^2)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^h(h-\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h(h^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=0+2\pi\int_0^h(h^2\rho-\rho^3)\mathrm{d}\rho=2\pi[\frac{h^4}{2}-\frac{h^4}{4}]=\frac{\pi}{2}h^4.$$

7.已知向量场 $\boldsymbol{A}=xz\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+y^2z\mathbf{k}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的散度以及 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\sum$ 流向 $\sum$ 指定侧的通量,其中 $\sum$ 为 $z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$ 以及三个坐标面在第一卦限所围立体全表面的外侧.

解 令 $P=xz, Q=x^2y, R=y^2z$,则 $\boldsymbol{A}$ 的散度

$$\mathrm{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=z+x^2+y^2.$$

通量

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}A\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}z\quad(D_{xy}:x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{3}{2}r^4\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{8}.$$

第七节　斯托克斯公式　环量与旋度

1.利用斯托克斯公式计算 $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,这里 Γ 为曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$$

从 x 轴正向看去,Γ 为逆时针方向.

解 平面 $x+y+z=0$ 的上侧法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

设$\sum$为平面$x+y+z=0$上由圆周Γ所围成的面域,取上侧,相应的单位法向量

$$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

于是

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

2.求向量场$\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$的旋度.

解 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z+\sin y & -z+x\cos y & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

3.求平面向量场$\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$沿闭曲线$L$的环流量,其中$L$是

$$x=0,x=a,y=0,y=b$$

所围成的正向回路.

解 环向量 $\oint_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=4\iint_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y\mathrm{d}y=2ab^2$.

4.利用斯托克斯公式计算$\oint_L xyz\mathrm{d}z$,其中Γ是用平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得的截痕,若逆z轴正向看去,取逆时针的方向.

解 由斯托克斯公式

$$\oint_L xyz\mathrm{d}z=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & xyz\end{vmatrix}=\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中$\sum$是平面$y=z$上以圆Γ为边界的平面,其侧与Γ的正向符合右手规则.显然,$\sum$在yoz坐标面上的投影为一线段,所以$\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

$\sum$ 在 xoz 坐标面上的投影为一椭圆域 $D: x^2+2z^2 \le 1$,且 $\sum$ 的法向量与 y 轴成钝角,从而

$$-\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{D} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2\mathrm{d}z \int_{-\sqrt{1-2z^2}}^{\sqrt{1-2z^2}} \mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2\sqrt{1-2z^2}\mathrm{d}z \underline{\underline{令\sqrt{2}z=\sin t}} \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)\mathrm{d}t = \sqrt{2}(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi .$$

第十章　曲线积分与曲面积分（总习题）

1.填空.

（1）设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 的值是 $\underline{\pi}$;

（2）向量场 $\mathbf{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{u}=\underline{2}$.

（3）设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{-18\pi}$.

解　（1）$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1 = \pi$.

（2）$\mathrm{div}\mathbf{u} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = y^2+\mathrm{e}^Z+x\cdot\frac{2z}{1+z^2}$,

从而　　$\mathrm{div}\mathbf{u}|_P = y^2+\mathrm{e}^z+\frac{2xz}{1+z^2}|_{(1,1,0)} = 2$.

（3）$\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D (2x-4-2x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\cdot\pi\cdot 3^2 = -18\pi .$$

2.计算 $\oint_{ABCDA} \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ 是以点 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$ 位顶点的正方形正向边界.

解　法 1　$I = \oint_{ABCDA} \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = \oint_{ABCDA} \mathrm{d}x+\mathrm{d}y = \iint\limits_D (0-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

此法是先将正方形的边界 $|x|+|y|=1$ 代入被积函数后,再用格林公式求解.

法 2　因　$AB: x+y=1,\quad BC: y-x=1,$

$$CD: -x-y=1,\ DA: x-y=1 .$$

从而

$$I=(\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}})\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$$

$$=(\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}})\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1}^{0}(1-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{-1}(1+1)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}(1-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1+1)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{-1}\mathrm{d}x+2\int_{0}^{1}\mathrm{d}x=0.$$

法 2 是分段分别计算,比较一下还是法 1 简便.但切记不可直接对 $\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$ 用格林公式.请同学们动脑筋想一下,这是为什么?

3.计算 $I=\int_{\overline{AB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$, $\overline{AB}$ 为螺线

$$x=\cos\varphi\,,\ y=\sin\varphi\,,\ z=\varphi$$

由点 $(1,0,0)$ 到点 $(1,0,2\pi)$ 的弧段.

解 $I=\int_{\overline{AB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$

$$=\int_{0}^{2\pi}[(\cos^2\varphi-\varphi\sin\varphi)(-\sin\varphi)+(\sin^2\varphi-\varphi\cos\varphi)\cos\varphi+(\varphi^2-\sin\varphi\cos\varphi)]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\cos\varphi-\int_0^{2\pi}\varphi\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\sin\varphi+\int_0^{2\pi}\varphi^2\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\sin\varphi$$

$$=\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}-0+\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}+\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}-\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=0-0+0+\frac{1}{3}(2\pi)^3-0=\frac{8}{3}\pi^3.$$

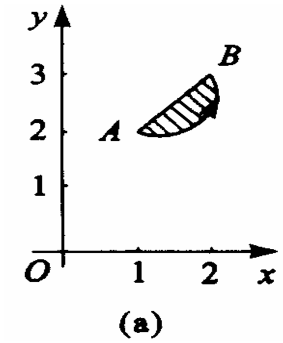
4.设 $\widehat{AB}$ 为连接点 $A(1,2)$ 与 $B(2,3)$ 的某曲线弧,又设 $\widehat{AB}$ 与直线段 $\overline{AB}$ 所包围图形的面积等于 k ,计算曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$.(直线段 $\overline{AB}$ 与曲线弧 $\widehat{AB}$ 除点 A,B 外无其它交点,曲线弧 $\widehat{AB}$ 不与 y 轴相交,且自身不相交).

解 $P(x,y)=\frac{y}{x^2}$, $Q(x,y)=x-\frac{1}{x}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}=1,$$

直线段 $\overline{BA}: y=x+1$, x 由 2 到 1,记 $\widehat{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 所围成的闭区域为 D ,由于要用到格林公式,所以要分两种情况讨论:

（1） $\widehat{AB}$ 取逆时针方向（如图 10.12(a)）



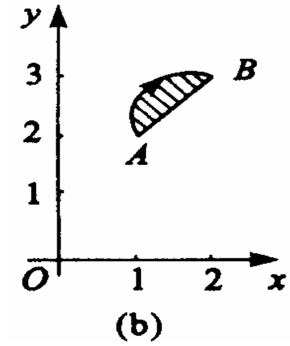


图 10.12

$$I=\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=(\oint_{\widehat{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}})\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=k-\int_2^1(\frac{x+1}{x^2}+x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

$$=k-\int_2^1(x+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=k+2\,.$$

（2） $\widehat{AB}$ 取顺时针方向（如图 10.12（b）所示）.

$$I=\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=(\oint_{\widehat{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}})\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=-k-\int_2^1(x+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=-k+2\,.$$

注意 常见错误是不讨论 $\widehat{AB}$ 是取逆时针方向,还是取顺时针方向,就直接利用了格林公式,这是不对的.

5.计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

（1） L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的正向;

（2） L 是曲线 $|x|+|y|=1$ 的正向.

解 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

记曲线 L 所围成的闭区域为 D.

（1） 如图 10.13（a）所示,此时 $(0,0)\notin D, P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 所围成的闭区域 D 内有一阶连续偏导数,由格林公式：

$$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,.$$

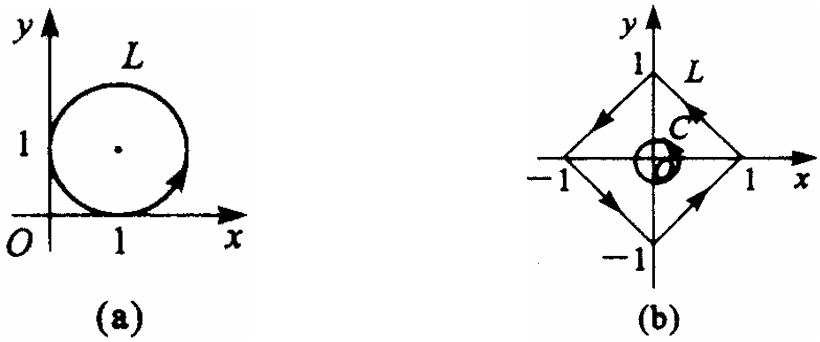


图 10.13

（2）如图 10.13（b）所示,此时 $(0,0)\in D, P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 所围成的闭区域 D 上有不连续点 $(0,0)$,以 $(0,0)$ 为圆心,以充分小 $\varepsilon>0$ 的为半径作圆周

$$C: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi\,,$$

C 取逆时针方向,记 L 和 C 所围成的闭区域为 D_1 ,对复连通域 D_1 应用格林公式,有

$$\oint_{L+C^-}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$$

从而

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)+\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\,.$$

6.计算曲线积分 $\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 C 是 $(1,0)$ 以为中心, $R(R\ne 1)$ 为半径的圆周,逆时针方向.

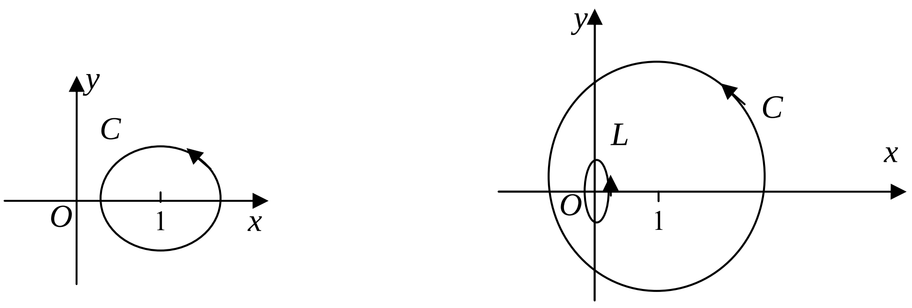
解 $P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$,

当 $4x^2+y^2\ne 0$ 时, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{4x^2+y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, C 所围成的闭区域记为 D , $(0,0)$ 究竟在不在以为 $(1,0)$ 中心, R 为半径的圆内,要分两种情况讨论：

（1） $R<1$ 时, $(0,0)\notin D$（图 10-14(a)）,则 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0$;

（2） $R>1$ 时, $(0,0)\in D$,作足够小的椭圆 $L:\begin{cases}x=\varepsilon\cos\theta\\ y=2\varepsilon\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta\le 2\pi$,

L 取逆时针方向（图 10.14(b)）



（a） $R<1$　　　　（b） $R>1$

图　10.14

于是由格林公式,有

$$\oint_{C+L^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0,$$

从而 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\cos\theta 2\varepsilon\cos\theta)-2\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)}{4\varepsilon^2\cos^2\theta+4\varepsilon^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

注意　易犯错误是不分 $R<1, R>1$ 两种情况讨论,未注意闭曲线 L 所围成的闭区域 D 内有无“洞”,即 D 是否为“单连通域”？

7.设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$,计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解　$P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x)$,因曲线积分与路径无关, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

$$2xy=y\varphi'(x), \varphi'(x)=2x, \varphi(x)=x^2+C,$$

由 $\varphi(0)=0$,则 $C=0$,从而 $\varphi(x)=x^2$.

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

8.质点 P 沿着以 AB 为直径的圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用, $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角

小于$\dfrac{\pi}{2}$,求变力$\boldsymbol{F}$对质点P所做的功.

解 圆弧AB的方程为$(x-2)^2+(y-3)^2=2$,其参数方程为

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{2}\cos t \\ y=3+\sqrt{2}\sin t \end{cases},\ (-\frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{\pi}{4})$$

$\boldsymbol{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$，所以

$$W=\int_L(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin t)\sin t+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=2(\pi-1).$$

9.计算$\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$对x,y,z具有轮换对称性,所以

$$\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S,$$

于是

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}a^2\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S \underline{\underline{\text{几何意义}}}\frac{2a^2}{3}\cdot 4\pi a^2=\frac{8}{3}a^4.$$

10.计算$I=\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(yz)+y^3]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[-zf(yz)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$f$有一阶连续导数,而$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=2Rz$的内侧($(R>0)$.

解 令$P=x^3,Q=yf(yz)+y^3,R=-zf(yz)+z^3$,则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=f(yz)+yzf'(yz)+3y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=-f(yz)-yzf'(yz)+3z^2.$$

注意到Σ取内侧,运用高斯公式,得

$$I=-\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}v=-\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{6}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot 32R^5\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{6\pi}{5}\cdot 32R^5\cdot\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{32}{5}\pi R^5.$$

11.计算$I=\displaystyle\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是圆柱面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=2$所截出部分的外侧.

解　法 1　设 S, S_1, S_2, Ω, D_1 如图 10.15 所示，

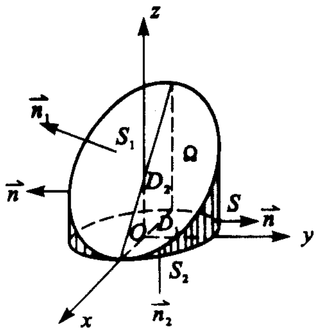


图 10.15

$$S_1 : x+z=2; \qquad S_2 : z=0$$

$$I=\iint\limits_{S} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=[\oiint\limits_{S+S_1+S_2} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2}]-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(-1+1)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{S_1}(z+1)dxdy-\iint\limits_{S_2}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{S_2}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0-\iint\limits_{S_1}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1}(2-x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi\cdot 2^2+0=-8\pi .$$

法 2　设 S, D_2 如上图所示，则

$$I=\iint\limits_{S}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0$$

$$=\iint\limits_{D_2}-2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_{-2}^{2}(2-x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-8\pi .$$

12.计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解　补充 S 为平面 $z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\oiint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S})(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^4\mathrm{d}r+a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^3\mathrm{d}r$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^5}{5}+a\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{a^4}{4}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{29}{20}\pi a^5 .$$

13.设函数 $u = x^2 z + \frac{1}{2} y^2 z - \frac{1}{3} z^3$

（1）求梯度 $\mathbf{grad}u$；

（2）求向量场 $A = \mathbf{grad}u$ 的散度 $\mathrm{div}A$；

（3）计算向量场 $A = \mathbf{grad}u$ 穿过曲面 $\sum$ 流向外侧的通量,其中 $\sum$ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体 Ω 的表面.

解 （1） $A = \mathbf{grad}u = 2xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + (x^2 + \frac{1}{2} y^2 - z^2)\boldsymbol{k}$,

（2） $\mathrm{div}A = 2z + z + (-2z) = z$,

（3）通量 $\oiint\limits_{\Sigma} A \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}A \mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} z \mathrm{d}v$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} z \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

14.求 $\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)$,其中 L 为 xOy 面上任一分段光滑的闭曲线, f 为 xOy 面上具有连续导数的函数.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yf(xy)) = f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(xf(xy)) = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

在 xOy 面上成立,故曲线积分 $\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)$ 与路径无关,也即沿 xOy 面上任一封闭曲线上的积分为零,故

$$\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) = 0.$$

注意 被积函数中含有未知函数 f ,并且积分曲线 L 的方程没有给出,所以不能化为定积分计算,只能用格林公式,或平面上曲线积分与路径无关的条件计算.

15.具有质量的曲面 $\sum$ 是半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在圆锥 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 里面的部分,如 $\sum$ 上每点的密度等于该点到 xOy 平面的距离的倒数,试求 $\sum$ 的质量.

解 $\sum$ 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \le \frac{a^2}{2}$, $\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mu = \frac{1}{z}$.

$$m = \iint\limits_{\Sigma} \mu \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} \mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi a(-\frac{1}{2})\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\pi a\ln 2.$$

16.设$\sum$是有界闭区域Ω的光滑边界曲面,函数u在Ω上有二阶连续偏导数,记

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

试证明：$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ （$\mathbf{n}$是的外法线方向向量).

证 应用两种曲面积分的关系和高斯公式,得

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

第十一章　无穷级数

第一节　常数项级数的基本概念和性质

1.如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则（ 1 ）级数$100+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ <u>收敛</u>；（ 2 ）级数$\sum_{n=1}^{\infty}100u_n$ <u>收敛</u>；（ 3 ）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+100)$ <u>发散</u>.

2.已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$的和是$\underline{2S-u_1}$.

解　因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}=S+\sum_{n=2}^{\infty}u_n=S+S-u_1=2S-u_1.$$

3.已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和$S_n=\dfrac{3n}{n+2}$，则$u_n=\underline{\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和是$\underline{3}$.

解　$u_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3n}{n+2}-\dfrac{3(n-1)}{n+1}=\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$，设$\sum_{n=1}^{\infty}U_n=S$，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=3.$$

4.级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$是<u>发散</u>，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$收敛于$\underline{\dfrac{3}{4}}$. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{9^n}$的和是$\underline{\dfrac{5}{8}}$.

解　（ 1 ）因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$收敛，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$$

则根据收敛级数的性质，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}$必定收敛，但已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}$发散，矛盾. 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$发散.

（ 2 ）因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}$都收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}$$

（ 3 ）因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9^n}$都收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{5}{8}.$$

5.级数 $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\cdots$ 的通项是 $\underline{(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$，其和 S = $\underline{\frac{2}{5}}$.

解　通项 $u_n=\frac{(-1)^{n+1}2^n}{3^n}=(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}.$$

6.根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

解　（1）$U_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 收敛.

（2）$S_n=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1$

$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 从而级数发散.

第二节　正项级数及其审敛法

1.用比较审敛法及其极限形式判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

解　当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\theta\le\theta$，所以 $\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\frac{10}{3}}{n^2-2n}$

解　当 $n\ge3$ 时，原级数为正项级数，且 $\frac{n+\frac{10}{3}}{n^2-2n}>\frac{1}{n-2}$，因前有限项不影响级数的敛散性. 又级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}$ 发散，所以原级数发散.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

解 利用比较判别法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}}=2$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$收敛.

注意 P级数是一类重要的级数，利用比较判别法时P级数常作为比较的级数．当通项比较复杂时，应选取P等于多少呢？可以选取P等于分子与分母的最高次幂之差.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$

解 因为$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，当$a>1$，时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$当$a>1$时敛.

当$a=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散.

当$0<a<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$，即级数的一般项不趋于零。

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

注意 常见错误是：不讨论a的取值范围，认为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以经常采用以下做法

（i）$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

（ii）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{10^n}(0\le p_i\le 9, i=0,1,2,3,\cdots)$

解 $\frac{p_n}{10^n}\le\frac{9}{10^n}$，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{10^n}$收敛.

注意 常见错误为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p_n}{10^n}}{\frac{1}{10^n}}=p_n, p_n\le 9$，所以原级数收敛.

错在极限求错：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p_n}{10^n}}{\frac{1}{10^n}}=p_n$，极限值应当是常数，与$n$无关.

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$

解 因为$u_n=\frac{\ln n}{2n^3-1}<\frac{n}{2n^3-1}=v_n$

利用比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^3-1}\cdot\frac{n^2}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3-1}=\frac{1}{2}>0$$

知级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$有相同的敛散性，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛．从而$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，故由比较审敛法知原级数收敛．

2.用比值审敛法判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\tan\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n+\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，所以原级数收敛．

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}\Big/\frac{3^n}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$，所以原级数收敛．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{\mathrm{e}}>1$，所以原级数发散．

注意 常见错误为有的学生忘记重要极限：$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，而认为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\to 1(n\to\infty).$$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{2}<1$，所以原级数收敛．

注意 用比值法判别时，有的同学根本不求$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$的具体值，认为只要$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，从而级数收敛．这是不对的，事实上，有时即使$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，仍有$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$或

者$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在.

3.用根值审敛法判别下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{4n^2}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{4n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}<1$，所以原级数收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^n}{\sqrt[n]{n}}=\infty$，所以原级数发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^{2n-1}}\cdot\dfrac{3^{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}}=0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}$收敛.

4.判别下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$

解 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}$均收敛，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$$

收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

解 因为$\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，即原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$同敛散．又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以原级数发散.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a^n}\right)^n$，其中 $\lim_{n\to\infty}a_n=a, a_n>0, a>0, b>0$ 且 $a\neq b$

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$．所以当 $a>b$ 时级数收敛．当 $a<b$ 时级数发散．

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$

解 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$，$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)-1]!!}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{3^n n!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1$$

所以原级数收敛．

第三节　任意项级数的审敛法

1. 判别下列级数是否收敛，如果收敛是绝对收敛还是条件收敛

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{na^n}\quad(0<a<1)$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}\cdot\frac{na^n}{1}=\frac{1}{a}>1$

又因为 $|u_1|=\frac{1}{a}>1$，所以 $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq0$，因此 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{na^n}\ (0<a<1)$ 发散．

注意　一般项级数不绝对收敛时，不能保证原级数也不收敛，但用比值判别法判断出其绝对值级数发散，则原级数一定发散．

（2）$\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}-\cdots$

解 原级数的一般项 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n}, n=2,3,\cdots$

$$|u_n|=\frac{1}{\pi^n}\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|<\frac{1}{\pi^{n-1}n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{n-1}n}{\pi^n(n+1)}=\frac{1}{\pi}<1,$$

故原级数的绝对值级数收敛，从而原级数绝对收敛．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$

解 设 $u_n=\ln\frac{n+1}{n}, u_{n+1}=\ln\frac{n+2}{n+1}$，

$$u_{n+1}-u_n=\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，因此交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$收敛.

再判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$的敛散性

$$S_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)\to\infty,(n\to\infty)$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$发散．从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$条件收敛.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_n$存在，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_n$存在，所以数列$\{n^2u_n\}$有界，即存在数M，使$|n^2u_n|<M$．故

$$|u_n|=|n^2u_n|\frac{1}{n^2}<\frac{M}{n^2},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$收敛，所以原级数绝对收敛.

第四节　幂级数

1．求下列幂级数的收敛区间

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{3^{n-1}\sqrt{n}}{(-1)^n}\right|=\dfrac{1}{3}$，所以$R=3$.

当$x=-3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}}$发散;

当$x=3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n3}{\sqrt{n}}$收敛．所以原级数的收敛区间为$(-3,3]$.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x-3)^n}{2n-1}$

解　设$2x-3=t$，现在讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2n-1}$的收敛区间.

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{2n-1}{2n+1}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，故$R=1$.

当$t=-1$时，级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{2n-1}$，发散.

当$t=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$收敛.

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2n-1}$的收敛区间为$(-1,1]$，从而原级数的收敛区间为$(1,2]$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}x^{2n+1}$

解 此级数缺少 x 的偶次幂项，必须直接用比值审敛法求收敛半径．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cdot 3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n+3)\cdot(-1)^n x^{2n+1}}\right|=\frac{|x|^2}{3},$$

令 $\frac{|x|^2}{3}<1$，得 $|x|<\sqrt{3}$，故收敛半径 $R=\sqrt{3}$．

当 $x=\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n+1}$ 收敛；

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{3}}{2n+1}$ 收敛；故收敛区间为 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$．

2．已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot x^n}{(n-1)!}$，问 $x=1,x=\frac{1}{3}$ 是否为此幂级数的收敛点．

解 $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+2)^{n+1}}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n+1)^n}\right|$$

$$=\left|\frac{n+2}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right|=\frac{n+2}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\mathrm{e},R=\frac{1}{\mathrm{e}}$．

$x=1\overline{\in}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 $x=1$ 不是此级数的收敛点；$x=\frac{1}{3}\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 $x=\frac{1}{3}$ 是此级数的收敛点．

3．求下列幂级数的收敛区间与和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=|x|^2<1$，即 $|x|<1$，故 $R=1$，

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$ 收敛；

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ 收敛．所以级数收敛区间为 $[-1,1]$．

当 $x\in[-1,1]$ 时，和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$，所以 $R = 1$.

当 $x = -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n$ 发散；

当 $x = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散．所以级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x \in (-1,1)$ 时，设和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ，

$$S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} x^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ ， $R = 2.$

当 $x = -2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$ 收敛；

当 $x = 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散．所以原级数的收敛区间为 $[-2,2)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n} x^{n-1}$ ，则 $xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

$$\left(xS(x)\right)' = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x},$$

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x = -\ln(2-x) + \ln 2$$

当 $x \neq 0$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\left[\ln(2-x) - \ln 2\right] = -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),$

当 $x = 0$ 时，$S(0) = \frac{1}{2}$.

所以 $S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), -2 \le x < 0, 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2} \quad , \qquad x = 0 \end{cases}$

4．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$ 收敛，并求其和．

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ 收敛．而 $\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{3n} = \frac{1}{3} < 1$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3^n}$ 收敛．

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x\right]'\Big|_{x=\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=5\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=\frac{19}{4}.$$

注意　这道题难点在于有些同学想不到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}$.

第五节　函数展开成幂级数

1．已知$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，则

$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}\cdot x^n\quad x\in(-\infty,+\infty)}(a>0,x\neq 1)$

$\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\underline{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,x\in(-\infty,+\infty)}$.

2．将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间.

（1）$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$

解　$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right)$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^{n-1},\quad x\in(-2,2)$$

$$\frac{-1}{1+x}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1},\quad x\in(-1,1)$$

所以$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n-1}}\right]x^{n-1},\quad x\in(-1,1)$.

（2）$f(x)=\ln(1-x^2)$

解　$f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\qquad x\in[-1,1]$$

（3） $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

解 $f'(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\ ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

或 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

注意 级数展开时，一定要注意角标问题.

（4） $\ln(a+x)\quad(a>0)$

解 $\ln(a+x)=\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)+\ln a=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n}{n}$

$$=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n\ ,\quad -a<x\le a.$$

或 $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\ ,\quad -a<x\le a.$

（5） $f(x)=\cos^2 x$

解 法一

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\ ,\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

解 法二 $\left(\cos^2 x\right)'=-2\cos x\cdot\sin x=-\sin 2x$

利用 $\sin x$ 的展开式可得

$$\left(\cos^2 x\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

对上式两端分别以 0 到 x 积分得

$$\int_0^x\left(\cos^2 x\right)'\mathrm{d}x=\cos^2 x\Big|_0^x=\cos^2 x-1$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\quad,(-\infty<x<+\infty)$$

所以$\cos^2 x=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $x+4$ 的幂级数，并求展开式成立的区间.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

由$\left|\frac{x+4}{3}\right|<1$及$\left|\frac{x+4}{2}\right|<1$得$-6<x<-2$.

4. 将函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ 展开成$(x-2)$的幂级数，并求展开式成立的区间.

解 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}(x-2)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]^{2n}$$

或 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}(x-2)^{2n-2}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数，并写出展开式成立的区间.

解 因 $f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$, $(|x|<1)$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

而 $f(0)=0$，故 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$, $(|x|<1)$.

第六节　傅里叶级数

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在$(-\pi,\pi]$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2,-\pi<x\le 0\\ x,0<x\le\pi\end{cases}$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于何值？

解 根据狄里克雷收敛定理的结论，求级数在$(-\pi,\pi]$内某点处的收敛值很方便，作 $f(x)$ 的简图 11. 1.

$$S(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+)+f(\pi^-)\right]=\frac{2+\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}$$

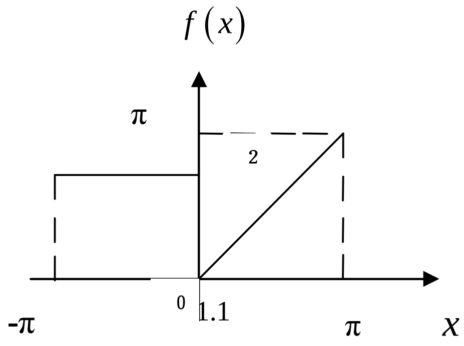


图 11. 1

2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 为奇函数，故 $a_n=0$ ，$(n=0,1,2,\cdots)$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[0+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}(-1)^{n+1}\right]$$

从而

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}\right]\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin nx,$$

$x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x\ne(2n+1)\pi$ ，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

3 . 设函数 $f(x)=x^2$ ，$0\le x\le1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ ，$-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ ，$(n=1,2,3,\cdots)$，求 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$.

解 由系数 $b_n=2\int_0^1 f\left(x\right)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 为正弦级数，且为 $f\left(x\right)=x^2$，$0\le x\le 1$进行奇延拓后所展成的级数.

延拓后的奇函数为$g\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ -x^2, & -1\le x<0\end{cases}$，此函数在$x=-\frac{1}{2}$处连续，故由狄里克雷收敛定理有

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

4. 若$\varphi\left(x\right),\psi\left(x\right)$满足狄氏条件，且$\varphi\left(-x\right)=-\psi\left(x\right)$，问$\varphi\left(x\right)$与$\psi\left(x\right)$的傅里叶系数$a_n,b_n$与$\alpha_n,\beta_n$之间有何条件.

解 $\varphi\left(x\right),\psi\left(x\right)$的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x \quad 和 \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x \quad 和 \quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

于是，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}\varphi\left(-x\right)\cos nx\mathrm{d}\left(-x\right)+\int_{0}^{-\pi}\varphi\left(-x\right)\cos nx\mathrm{d}\left(-x\right)\right]\\&=-\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}-\psi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{-\pi}-\psi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x=-\alpha_n,\left(n=0,1,2,\cdots\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}\varphi\left(-x\right)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{-\pi}\varphi\left(-x\right)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}-\psi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x=\beta_n,\left(n=1,2,3,\cdots\right)\end{aligned}$$

5. 设周期函数$f\left(x\right)$的周期为2π，证明：如果$f\left(x-\pi\right)=-f\left(x\right)$，则$f\left(x\right)$的傅里叶系数$a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0.$

证 $$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}-f\left(x-\pi\right)\cos nx\mathrm{d}x\underline{\underline{令y=x-\pi}}$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cos n(y+\pi)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot(-1)^n\cdot\cos ny\mathrm{d}y=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

从而 $$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\left[1+(-1)^{n+1}\right]\mathrm{d}x\right],$$

于是 $$a_0=0,a_{2k}=0,(k=1,2,\cdots).$$

同理

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right],$$

其中

$$\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\sin nx\mathrm{d}x\underline{\underline{\text{令}y=x-\pi}}$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\sin n(y+\pi)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot(-1)^n\cdot\sin ny\mathrm{d}y$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot\sin y\mathrm{d}y$$

于是 $$b_{2k}=0,(k=1,2,\cdots).$$

第七节　一般周期函数的傅里叶级数

1. 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，在 $(0,2l)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}A\ , & 0<x\le l\\ 0\ , & l<x<2l\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{l}A\mathrm{d}x\right]=A$,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}A\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{A}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\cdot\frac{l}{n\pi}=0.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}A\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{A}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\cdot\frac{l}{n\pi}=-\frac{A}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)$$

$$=-\frac{A}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{A}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2A}{n\pi}\ , & n\text{为奇数}\\ 0\ , & n\text{为偶数}\end{cases}$$

从而

$$f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l},(-\infty<x<+\infty,x\ne kl,k=0,\pm1,\cdots).$$

2．将函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+\dfrac{2x}{\pi},-\pi\le x<0\\ 1-\dfrac{2x}{\pi},0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解 对 $f\left(x\right)$ 进行周期延拓.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi+2}\left(1-\cos nx\right)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & ,n=1,3,5\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\mathrm{d}x=0$$

从而

$$f\left(x\right)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}\quad,\quad x\in\left[-\pi,\pi\right].$$

3．将函数 $f\left(x\right)=x$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 展成余弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$ 的和.

解 对 $f\left(x\right)$ 进行偶延拓，$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\left(-1\right)^n-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

从而 $f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}\quad,\quad 0\le x\le\pi.$

当 $x=0$ 时，$f\left(0\right)=0$，故 $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

4．将函数 $f\left(x\right)=\cos x,x\in\left(0,\pi\right)$ 展成正弦级数.

解 将 $f\left(x\right)$ 作奇延拓

$a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{n+1}+\frac{1+(-1)^n}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4n}{\pi\left(n^2-1\right)}, & n=2,4,\cdots\\ 0, & n=3,5,\cdots\end{cases}$$

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x=0$$

故 $\cos x=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{2m}{4m^2-1}\right)\sin 2mx\quad,\quad(0<x<\pi).$

5．将函数 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 $l=2$，将 $f(x)$ 作偶延拓.

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$$

故 $$f(x)=\frac{-8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad,\quad x\in[0,2]$$

或者 $$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad,\quad x\in[0,2].$$

第十一章　无穷级数（总习题）

1．判别下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+30}{4n^2+10}\right)^n$；

解 用根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+30}{4n^2+10}=\frac{1}{2}<1,$$

所以原级数收敛.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$；

解 由 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, 得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

注意 利用等价无穷小或同阶无穷小选择比较级数是很重要的方法，再例如 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n},(n\to\infty)$，所以在判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性时，可以选级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作为比较级数.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

解 $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\frac{n\cdot n!}{(2n)!}<\frac{(n+1)!}{(2n)!}<\frac{1}{2n(2n-1)}$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$ 收敛.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\quad(a>0)$

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}\begin{cases}a<\mathrm{e}\text{时收敛，}\\ a>\mathrm{e}\text{时发散，}\\ a=\mathrm{e}\text{时发散，}\end{cases}$$

因为当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$，比值法失效．又 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，但由于数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增加趋于 e，所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，从而 $\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$，故级数发散.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

解 $$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故由比较审敛法知，原级数发散.

（6）$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\lambda}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$（$\lambda$ 为常数）

解　利用比较审敛法的极限形式，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lambda}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}=1$，所以原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ 同敛散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\lambda}}$，

当 $\frac{1}{2}-\lambda>1$ 时，即 $\lambda<-\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛，

当 $\frac{1}{2}-\lambda\le 1$ 时，即 $\lambda\ge-\frac{1}{2}$ 时，原级数发散.

2．利用级数收敛的必要条件，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

证　构造正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$，根据级数收敛的必要条件，只有证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛即可.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{\left[(n+1)!\right]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

3．讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解　考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+1)}=2>1$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 即原级数的绝对值级数发散，又原级数为交错级数，因

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0$$

且 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{2n+1}=\frac{n(2n+3)}{(n+2)(2n+1)}=\frac{2n^2+3n}{2n^2+5n+2}<1,$$

即 $u_{n+1}<u_n$，故原级数收敛，且为条件收敛.

4．设正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，并说明反之不成立；又证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

证明　因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，即对于 $\varepsilon=1$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $\left|a_n-0\right|=0$，即 $0\le a_n<1$.

于是，$0 \le a_n^2 < a_n$，而级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

但反之不成立，如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

注意 常见错误是由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$，得出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 收敛，但我们不能保证$a_n \ne 0$.

又$\left|\frac{a_n}{n}\right| < \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$均收敛，故绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right|$收敛，所以原级数绝对收敛.

5．求下列幂级数的收敛区间.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$；　　　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(x-1)^{2n}$；

解 （1）由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{3}$ ，得$R = 3$.

当$x = -3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$发散；

当$x = 3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\sqrt{n}}$为收敛的交错级数．故原级数的收敛区间为$(-3,3]$.

（2）此级数为$(x-1)$的幂级数，且缺少奇次幂项，故直接用比值法求收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{4^{n+1}}(x-1)^{2(n+1)}}{\frac{1}{4^n}(x-1)^{2n}}\right| = \frac{1}{4}|x-1|^2 = \frac{1}{4}(x-1)^2,$$

当$\frac{1}{4}(x-1)^2 < 1$时，$-2 < x-1 < 2$即$-1 < x < 3$时，级数收敛；

当$x = -1$或$x = 3$时，级数均为$\sum_{n=1}^{\infty} 1$，发散．故原级数的收敛区间为$(-1,3)$.

6．求下列幂级数的收敛区间与和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}$的收敛区间为$-1 < y < 1$，即$-1 < x-1 < 1$，从而，$0 < x < 2$.

求和函数. 法 1　令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$.

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x},$$

所以

$$S(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}, \quad x \in (0,2).$$

法 2　　$S_n(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + n(x-1)^{n-1}$，　　（1）

$$\left(x-1\right)S_n\left(x\right)=x-1+2\left(x-1\right)^2+3\left(x-1\right)^3+\cdots+n\left(x-1\right)^n \quad （2）$$

（1）－（2）得，$S_n\left(x\right)=\dfrac{1}{2-x}\left[1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)^2+\cdots+\left(x-1\right)^{n-1}+n\left(x-1\right)^n\right]$

$$=\frac{1}{2-x}\left[\frac{1}{2-x}-n\left(x-1\right)^n\right],$$

$S\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}$.

（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n$;

解 原式$\displaystyle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n-1\right)+1}{\left(n-1\right)!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n-2\right)!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-1\right)!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x}{3}\right)^2e^{\frac{x}{3}}+\frac{x}{3}e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{3}}=\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+1\right)e^{\frac{x}{3}}\quad,\quad\left(-\infty,+\infty\right)$$

注意 求幂级数的和时，要注意下标. 下标不同，求出的表达式不同.

7. 求下列级数的和

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

解 法1 令 $\displaystyle S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2\left(n-1\right)}$ ， $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$$\int_0^x S\left(x\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},$$

所以

$$S\left(x\right)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S\left(1\right)=3.$$

解 法2 定义法 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$ （1）

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}} \quad （2）$$

（1）－（2）得，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

所以

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$$

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n^2-1\right)}$

解 原式$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, 设

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}\quad,\quad |x|<1$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n+1}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}\mathrm{d}x=-x^2\ln(1-x)$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^n\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n^2-1\right)}=S_1\left(\frac{1}{2}\right)-S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

8. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}\right]$

解 原式$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$.其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n}\Big|_{x=1}.$$

令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n},$$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\frac{x}{3-x},$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)'=\frac{(3-x)-x(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3}{(3-x)^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=S(1)=\frac{3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}.$$

9. 将函数 $f(x)=x\cdot\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数，并写出收敛区间.

解 $\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-t\right)^2\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n}(-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}.$$

$$f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n-1)},$$
收敛域为$[-1,1]$.

10. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展为$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$的幂级数，并写出收敛区间，（提示令$\frac{x-1}{x+1}=t$）

解 $f(x)=\ln x=\ln\dfrac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=\ln\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)-\ln\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

令

$$\begin{cases}1+\dfrac{x-1}{x+1}>0,\\ 1-\dfrac{x-1}{x+1}>0,\end{cases}$$

解得$x>0$，即收敛区间为$(0,+\infty)$. .

11．证明 $f(x)=x^2$在$[-\pi,\pi]$上能展成傅里叶级数：

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

并由此结果求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解 将$f(x)=x^2$作周期为2π的周期延拓，在$(-\pi,\pi)$内为偶函数，故$f(x)$的傅里叶级数为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\left[2x\cos nx+\frac{1}{n}\left(n^2x^2-2\right)\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

所以

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

（1）当 $x=0$ 时，有

$$4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{3}=0\text{，即}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\text{，}$$

（2）当 $x=\pi$ 时，有

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}(-1)^n\text{，即}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

第十二章　微分方程

第一节　微分方程的基本概念

1. 将下列方程与其名称用线连接起来

（1） $y''+3y'+2y=0$	（a） 1阶微分方程
（2） $\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$	（b） 2阶微分方程
（3） $\left(y'''\right)^3+5\left(y'\right)^5-y^5+x^7=0$	（c）代数方程
（4） $x^2+y^2=2x$	（d）偏微分方程
（5） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$	（e） 3阶微分方程

2. 设微分方程为 $y'=y$

（1）验证 $y=C\mathrm{e}^x$（C 为任意常数）是方程的通解；

（2）由通解求满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解；

（3）说明上述通解和特解的几何意义.

解　（1）因为 $y'=Ce^x$，所以 $y'=y$，故 $y=C\mathrm{e}^x$ 是微分方程的解. 又因为含有一个任意常数，故 $y=C\mathrm{e}^x$ 是方程的通解.

（2）将 $y(0)=1$ 代入 $y=C\mathrm{e}^x$ 中，得 $C=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

（3）通解是满足方程（1）的一簇曲线，特解是满足初始条件的一条曲线.

注意　易犯的错误是

在（1）中只验证了 $y=C\mathrm{e}^x$ 是方程的解，而没有强调此解中包含一个任意常数 C. 产生错误的原因是对通解的定义理解不清楚. 一般的，n 阶微分方程的通解中应包含 n 个相互独立的任意常数.

3. 设一阶微分方程的通解为 $\left(x+C\right)^2+y^2=1$，其中 C 为任意常数，求此微分方程.

解　将方程 $\left(x+C\right)^2+y^2=1$ 两边对 x 求导得 $2\left(x+C\right)+2yy'=0$，即 $x+C=-yy'$，将其代入 $\left(x+C\right)^2+y^2=1$ 得

$$(yy')^2+y^2=1 \qquad 即 \qquad (y'^2+1)y^2=1.$$

注意　易犯错误是

$$y=\sqrt{1-(x+C)^2} \quad , \quad y'=\frac{-(x+C)}{\sqrt{1-(x+C)^2}}.$$

产生错误的原因，一是丢失了函数 $y=-\sqrt{1-(x+C)^2}$ ，二是微分方程中没有消去常数 C .

第二节　可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程

1．求下列微分方程的通解.

（1） $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$

解　将方程分离变量得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

两边积分得：$\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln|C|$.

故所求通解为　$\frac{x^2-1}{y^2+1}=C$　或　$\frac{y^2+1}{x^2-1}=C$.

（2） $y'=\sin^2(x-y+1)$

解　令 $u=x-y+1$，则

$$u'=1-y'$$

故　$1-u'=\sin^2 u$. 即　$\sec^2 u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. 解得　$\tan u=x+C$. 所求通解：

$$\tan(x-y+1)=x+C .$$

（3） $x\mathrm{d}y-y(1-x)\mathrm{d}x=0$

解　分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得：$\ln|y|=\ln|x|-x+\ln|C|$，故所求通解为　$y=Cx\mathrm{e}^{-x}$.

（4） $3\mathrm{e}^x\tan y\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$

解　分离变量得$-\dfrac{3\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y$

积分得　$\ln\left|\left(1-\mathrm{e}^x\right)^3\right|=\ln|\tan y|+\ln|C|$，即所求通解为　$\left(1-\mathrm{e}^x\right)^3=C\tan y$．

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解．

（1）$y'\cot x+y=2$　，　$y(0)=1$

解　分离变量得　$\dfrac{1}{2-y}\mathrm{d}y=\tan x\mathrm{d}y$，两边积分得　$-\ln|2-y|=-\ln|\cos x|-\ln|C|$

通解为　$2-y=C\cos x$，将$x=0,y=1$代入得：$C=1$．故所求特解为　$y=2-\cos x$．

（2）$y'=\mathrm{e}^{2x-y}$　，　$y(0)=0$

解　分离变量再积分$\int\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$，$\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$，因为$x=0$时，$y=0$，所以$C=-\dfrac{1}{2}$．则$\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}$为所求特解．

（3）$\left(x+xy^2\right)\mathrm{d}x-\left(x^2y+y\right)\mathrm{d}y=0$　，　$y(0)=1$

解　分离变量得　$\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$，两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)+\frac{1}{2}\ln|C|$$

通解为$1+x^2=C\left(1+y^2\right)$将$x=0,y=1$代入得$C=\dfrac{1}{2}$，所求特解为

$$1+x^2=\frac{1}{2}\left(1+y^2\right),\quad y^2=2x^2+1.$$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r$　，　$r(0)=2$

解　分离变量得　$\dfrac{\mathrm{d}r}{r}=\mathrm{d}\theta$，两边积分得

$$\ln|r|=\theta+\ln|C|\qquad\text{即}\qquad r=C\mathrm{e}^{\theta}$$

将$\theta=0,r=2$代入得　$C=2$，所求特解为

$$r=2\mathrm{e}^{\theta}.$$

3．已知曲线$y=f(x)$过点$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任意一点处的切线斜率为$x\ln\left(1+x^2\right)$，求曲线方程．

解　由题意得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\ln\left(1+x^2\right)$$

故　$y=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right]+C$．又 $y=f\left(x\right)$ 过点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，故 $C=0$，即所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right].$$

4．若以曲线 $y=f\left(t\right)\left(f\left(t\right)\geq 0\right)$ 为曲边，以 $\left[0,x\right]$ 为底的曲边梯形的面积与纵坐标 y 的 $n+1$ 次幂成正比，且已知 $f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1$，求此曲线的方程.

解　曲线所满足的积分方程是

$$\begin{cases}\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=ky^{n+1},\\ y\left(0\right)=0,\\ y\left(1\right)=1.\end{cases}$$

将积分方程两边分别对 x 求导，得曲线 $y=f\left(x\right)$ 所满足的微分方程为

$$f\left(x\right)=k\left(n+1\right)y^n\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}，\text{即}\quad k\left(n+1\right)y^{n-1}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x，$$

两边积分得　$k\frac{n+1}{n}y^n=x+C$．

将 $f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1$ 代入上式，解得 $C=0,k=\frac{n}{n+1}$，

所求曲线方程为　$x=y^n$．

注意　易犯错误是 $ky^{n+1}=\int_0^x y\mathrm{d}t=yx+C$．产生错误的原因是把函数 $y=y\left(t\right)$ 看作与 t 无关的量，由

$$\int_0^x y\mathrm{d}t=y\int_0^x\mathrm{d}t=yx+C.$$

实际上，函数 y 是 t 的函数，由于还没有求出其具体表达式，不能直接积分.

5．求下列微分方程的通解.

（1）$\left(1-x\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$

解　（1）方程变形为　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{1-x}y=\frac{x}{1-x}$，由公式法

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x}{1-x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\ln(1-x)}\left[\int\frac{x}{1-x}\mathrm{e}^{-\ln(1-x)}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(1-x)\left[\int\frac{x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x+C\right]=(1-x)\left[\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}+C\right]$$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{n}{x}y=\mathrm{e}^x x^n$（$n$ 为常数）

解 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^x x^n\mathrm{e}^{\int-\frac{n}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{n\ln x}\left[\int\mathrm{e}^x x^n\mathrm{e}^{-n\ln x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x^n\left[\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right]=x^n\left[\mathrm{e}^x+C\right].$$

（3）$\left(x^2-1\right)\mathrm{d}y+\left(2xy-\cos x\right)\mathrm{d}x=0$

解 方程变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$，由公式法

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$$

（4）$xy\mathrm{d}x+\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y=0$

解 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1}=C$.

6．求下列微分方程满足所给初始条件的特解．

（1）$y^2\mathrm{d}x-\left(y^2+2xy-x\right)\mathrm{d}y=0, y(0)=1$

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2}{y}\right)x=1$，

$$x = \mathrm{e}^{-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(\int \mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{y}+2\ln y}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{y}-2\ln y}\mathrm{d}y + C\right] = y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{y}\right)+C\right]$$

$$= y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}+C\right)$$

代入 $y(0)=1$，得 $C=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，所求特解为

$$x = y^2 - \frac{1}{\mathrm{e}}y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}.$$

（2） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sin x, y(\pi)=1$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$，

$$y = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot x\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x}\left[-\cos x + C\right]$$

将 $y(\pi)=1$ 代入，得 $C=\pi-1$，所求特解为

$$y=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1).$$

（3） $\left(y^3+xy\right)y'=1, y(0)=0$

解 法1 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-yx=y^3$，由公式

$$x = \mathrm{e}^{-\int -y\mathrm{d}y}\left[\int y^3\mathrm{e}^{-\int y\mathrm{d}y}+C\right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}y^2}\left[\int y^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\left[-\int y^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}+C\right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\left[-y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}+C\right]$$

即 $x=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}-y^2-2$ 代入 $y(0)=0$ 得 $C=0$，所求特解为

$$x = 20\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}-y^2-2.$$

解 法2 $y'=\frac{1}{y\left(x+y^2\right)}$，设 $u=y^2+x$， $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right]$，

代入方程得分离变量得 $\frac{u}{u+2}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，积分得 $u-2\ln(2+u)=x+C$.

将 $x=0,y=0,u=0$ 代入得 $C=-2\ln 2$，所求特解为

$$x+y^2+2=2\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}.$$

（4） $y=\mathrm{e}^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$

解 方程两端对 x 求导得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x+y$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\mathrm{e}^x$，由公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int-\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x(x+C)$$

由方程 $y=\mathrm{e}^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$ 得初值条件 $x=0,y=1$，代入得 $C=1$.

所求特解为 $y=\mathrm{e}^x(x+1)$.

7. 设 $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解 把 $y=\mathrm{e}^x$ 代入方程得 $p(x)=x(\mathrm{e}^{-x}-1)$，故方程可化为

$$y'+(\mathrm{e}^{-x}-1)y=1$$

故
$$y=\mathrm{e}^{\int(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int(e^{-x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}}$$

由 $y|_{x=\ln 2}=0$ 得 $C=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

8. 已知 $\int_l\left[\varphi(x)-\frac{x^2}{2}\right]y\mathrm{d}y+\frac{3}{2}y^2\varphi(x)\mathrm{d}x$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有一阶连续导数，并且 L 是起点为 $(0,0)$ 终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时，该曲线积分值等于 $\frac{1}{4}$，试求函数 $\varphi(x)$.

解 由于积分与路径无关，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即

$$(\varphi'(x)-x)y=3y\varphi(x),\varphi'(x)-3\varphi(x)=x,$$

所以

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\int -3\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}x} x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{3x}\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+C\right]=C\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

由 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[\varphi(x)-\frac{x^2}{2}\right]y\mathrm{d}y+\frac{3}{2}y^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，得

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1\left[C\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]y\mathrm{d}y=\left(C\mathrm{e}^3-\frac{17}{18}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

所以 $C=\frac{13}{9}\mathrm{e}^{-3}$，则 $\varphi(x)=\frac{13}{9}\mathrm{e}^{3(x-1)}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

第三节　可利用变量代换法求解的一阶微分方程

1．求下列齐次方程的通解.

（1） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

积分得 $\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$

所以 $u=\mathrm{e}^{Cx+1}$.

所求通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$.

（2） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}$，令 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=2\sqrt{u}\ ,$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$，积分得：$-\ln\left|1-\sqrt{u}\right|=\ln|x|+\ln|C|$，所以 $\frac{1}{1-\sqrt{u}}=Cx$，

将$u=\dfrac{y}{x}$代入得所求通解为

$$C=x-\sqrt{xy}\ .$$

（3） $x^2y'+xy=y^2$

解 令$z=y^{-1}$，则方程变为：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$$

故
$$y^{-1}=z=x\left(\frac{x^{-2}}{2}+C_1\right).$$

所以通解为
$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2\ .$$

（4） $\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$

解 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$．令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$u+xu'=2u-u^2$$

分离变量$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|，\text{即}\quad \frac{x(u-1)}{u}=C\ .$$

代入原变量得通解 $x\left(y-x\right)=Cy\ .$

2．求下列齐次方程满足所给初始条件的特解．

（1） $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0, y\left(1\right)=0$

解 方程两边同时除以x得

$$\left(1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)-\cos\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，代入得

$$\left(1+u\cos u\right)-\cos u\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

分离变量得$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$，积分得

$$\ln|x|+\ln|C|=\sin u,$$

将$u=\frac{y}{x}$代回得$\ln|Cx|=\sin\frac{y}{x}$，由于$y(1)=0$，所以$C=1$.

所求特解为　$x=\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}$.

（2）$xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right),y(1)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解　$y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$，令$u=\frac{y}{x}$，代入得$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u)$，化简得

$$\frac{1}{u\ln u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得　$\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|$，所以$\ln u=Cx$，

$$u=\mathrm{e}^{Cx}，即\quad \frac{y}{x}=\mathrm{e}^{Cx}$$

将初始条件　$x=1,y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$代入得　$C=-\frac{1}{2}$.

所求特解为　$y=x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

3. 用适当变量替换，求解下列方程.

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$

解　令$x+y=u$，则　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+1$，分离变量得　$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x$.

积分得　$\arctan u=x+C$，$u=\tan(x+C)$.

将　$u=x+y$回代得　$y=\tan(x+C)-x$.

（2）$xy'-y[\ln(xy)-1]=0$

解　令$xy=u$，则　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入方程得

$$x\left(\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-y}{x}\right)-y[\ln u-1]=0,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+y(\ln u-1)=\frac{u}{x}(\ln u)$$

分离变量得　$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，方程两边积分得

$$\ln(\ln u)=\ln x+\ln C=\ln Cx\text{，故}\quad \ln u=Cx.$$

则 $u=\mathrm{e}^{Cx}$，即 $xy=\mathrm{e}^{Cx}$ 为所求通解.

4. 求下列伯努利方程的通解.

（1）$xy'+y=y^2\ln x$

解 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x}\ln x\cdot y^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程. 令 $z=\dfrac{1}{y}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x}\ln x,$$

所以 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int-\dfrac{1}{x}\ln x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\int-\dfrac{1}{x^2}\ln x\mathrm{d}x+C\right]=\ln x+1+Cx$.

所求通解为 $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$.

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$

解 令 $z=y^{-1}$，则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x.$$

其通解 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]$.

故原方程通解为 $yx\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$.

（3）$xy'=4y+x^2\sqrt{y}$

解 方程变形为 $y'-\dfrac{4}{x}y=xy^{\frac{1}{2}}$，令 $z=y^{\frac{1}{2}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{2}x$. 故

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right)$$

所以原方程通解为 $y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x+C\right)^2$.

第四节　全微分方程

1．验证下列各方程为全微分方程，并求出方程的通解．

（1）$\left(\cos x+\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

解 $P(x,y)=\cos x+\dfrac{1}{y},Q(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}$，由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以方程为全微分方程．

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x(\cos x+1)\mathrm{d}x+\int_1^y\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\&=\sin x+x+\left[\ln y+\frac{x}{y}\right]_1^y=\sin x+\ln y+\frac{x}{y},\end{aligned}$$

所求通解为 $\sin x+\ln y+\dfrac{x}{y}=C$．

注意 常犯错误是

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y,$$

产生错误的原因是忽视了$P(x,y)$与$Q(x,y)$在$y=0$处无定义，积分下限不能取$y=0$，即不能在x轴上取起点．

（2）$(x-3y)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y^2}-3x\right)\mathrm{d}y=0$

解 $P(x,y)=x-3y,Q(x,y)=\dfrac{1}{y^2}-3x$，由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-3=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故方程为全微分方程．

方程可变形为 $x\mathrm{d}x+\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y-3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$．

即 $$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-y^{-1}-3xy\right)=0.$$

故通解为 $$\frac{1}{2}x^2-y^{-1}-3xy=C.$$

（3）$\left(\ln y-\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y=0$

解 $P(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x}, Q(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x$，由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故方程为全微分方程.

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(1,1,)}^{(x,y)}\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)dy\\
&=\int_1^x\left(-\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)dy\\
&=-\ln x+x\ln y-\ln x(y-1)\\
&=x\ln y-y\ln x,
\end{aligned}
$$

故通解为 $x\ln y-y\ln x=C$.

2. 已知 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，试确定 $f(x)$，使 $\left[e^x+f(x)\right]ydx+f(x)dy=0$ 为全微分方程，并求出全微分方程的解.

解 $P(x,y)=\left[e^x+f(x)\right]y$，$Q(x,y)=f(x)$，令 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，有

$$e^x+f(x)=f'(x)$$

即 $$f'(x)-f(x)=e^x, f(x)=e^{-\int -1dx}\left[\int e^x\cdot e^{\int -dx}dx+C\right]=e^x(x+C),$$

又因为 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $C=\dfrac{1}{2}$. 故 $f(x)=e^x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. 由于

$$u(x,y)=\int_{(0,0,)}^{(x,y)}\left(e^x+f(x)\right)ydx+f(x)dy=0+\int_0^y e^x\left(x+\frac{1}{2}\right)dy=ye^x\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

故全微分方程的通解为 $ye^x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=C$.

3. 利用观察法求下列方程的积分因子，并求其通解.

（1） $y\left(2xy+e^x\right)dx-e^xdy=0$

解 **法** 1 方程两边同时除以 y^2 得 $\left(2x+\dfrac{e^x}{y}\right)dx-\dfrac{e^x}{y^2}dy=0$，

即 $2xdx+\dfrac{yde^x-e^xdy}{y^2}=d\left(x^2+\dfrac{e^x}{y}\right)=0$，

通解为　$x^2+\frac{e^x}{y}=C$，积分因子为　$\mu=\frac{1}{y^2}$．

解　法2　用$\mu=\frac{1}{y^2}$同时乘以方程两边得，

$$\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx-\frac{e^x}{y^2}dy=0,$$

由于　$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{e^x}{y^2}$，方程为全微分方程．由于$P(x,y)$，$Q(x,y)$在$y=0$处无定义，所以

$$u(x,y)=\int_1^y\left(-\frac{1}{y^2}dy\right)+\int_0^x\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx=x^2+\frac{e^x}{y}-1$$

通解为$x^2+\frac{e^x}{y}-1=C_1$，即　$x^2+\frac{e^x}{y}=C(C=C_1+1)$

注意　易犯错误是

$$u(x,y)=\int_0^y\left(-\frac{1}{y^2}dy\right)+\int_0^x\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx.$$

产生错误的原因是(x_0,y_0)不能在x轴上取，因为$P(x,y)$与$Q(x,y)$在$y=0$处无定义．

（2）$xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$

解　取$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$，则有　$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=dx$，即

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=x+\ln C,$$

通解为　$x^2+y^2=Ce^{2x}$．

第五节　可降阶的高阶微分方程

1．求下列微分方程的通解．

（1）$y'''+x=0$

解 $y'' = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}_1$， $y' = -\frac{1}{6}x^3 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$， $y = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{\tilde{C}_1}{2}x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3$

即 $y = -\frac{1}{24}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

（2） $yy'' = (y')^2$

解 令 $y' = P$，则 $y'' = P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，原方程变为 $yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = P^2$. 即 $\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$，所以

$P = y' = \tilde{C}_1 y$. 故 $y = \mathrm{e}^{C_1 x + C_2}$.

（3） $xy'' = xy' + y'$

解 $y' = P$ ， $y'' = P'$，所以 $x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = (x+1)P$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}P}{P} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$，积分得 $\ln P = x + \ln x + \ln C_1$，所以 $P_1 = C_1 x\mathrm{e}^x$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 x\mathrm{e}^x$，

$$y = \int C_1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^x(x-1) + C_2,$$

所求通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x(x-1) + C_2$.

（4） $\frac{\mathrm{d}^5 x}{\mathrm{d}t^5} - \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = 0$

解 令 $\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = u$ ， $\frac{\mathrm{d}^5 x}{\mathrm{d}t^5} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，微分方程变形为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{t}u = 0$，分离变量积分得 $u = C_1 t$，

即 $\frac{\mathrm{d}^{(4)}x}{\mathrm{d}t^4} = \tilde{C}_1 t$，直接积分得 $x^{(3)} = \frac{\tilde{C}_1}{2}t^2 + \tilde{C}_2$ ， $x'' = \frac{\tilde{C}_1}{6}t^3 + \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3$，

$$x' = \frac{\tilde{C}_1}{18}t^4 + \frac{\tilde{C}_2}{2}t^2 + \tilde{C}_3 t + C_4,\ x = \frac{\tilde{C}_1}{72}t^5 + \frac{\tilde{C}_2}{6}t^3 + \frac{\tilde{C}_3}{2}t^2 + C_4 t + C_5,$$

所求通解为

$x = C_1 t^5 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5$（其中 $C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{72}, C_2 = \frac{\tilde{C}_2}{6}, C_3 = \frac{\tilde{C}_3}{2}$）.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

（1） $(1-x^2)y'' - xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

解 令 $P = y', y'' = P'$，即 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{1-x^2}P$，分离变量积分得

$$\ln P=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)+\ln C,$$

所以 $y'=P=\dfrac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$，代入初值 $y'(0)=1$，得 $C_1=1$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，积分得 $y=\arcsin x+C_2$，代入初值 $y(0)=0$，得 $C_2=0$．所求特解为 $y=\arcsin x$．

（2）$y^3y''+2y'=0$ ，$y(0)=y'(0)=1$

解 令 $P=y'$，则 $y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，即 $\mathrm{d}P=-\dfrac{2}{y^3}\mathrm{d}y$，

积分得 $P=y^{-2}+C_1$，代入 $y'(0)=1$ 得 $C_1=0$．所以 $y'=y^{-2}$，积分得 $\dfrac{y^3}{3}=x+C_2$．

代入 $y(0)=1$ 得，$y=\sqrt[3]{3x+1}$．

（3）$2yy''=y'^2+y^2$ ，$y(0)=1$ ，$y'(0)=-1$

解 法1 令 $P=y'$，$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，有 $2yP\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=P^2+y^2$，即 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{2y}P=\dfrac{y}{2}P^{-1}$，

这是 $n=-1$ 的伯努利方程，令 $z=P^2$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}P}-\dfrac{1}{y}z=y$，

$$z=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int y\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}+C_1\right]=y\left(y+C_1\right),$$

即 $z=y\left(y+C_1\right)$，由初值条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$，有 $z(0)=1$，求得 $C_1=0$，则 $P^2=z=y^2$，$P=\pm y$ 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm y$，由初值条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$，只取 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-y$，再分离变量积分得 $y=C_2\mathrm{e}^{-x}$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}$．

解 法2 令 $P'=y$，$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，方程变形为 $2\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\dfrac{P}{y}+\dfrac{y}{P}$，令 $P=uy$，则

$$2\left(u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=u+\frac{1}{u},$$

分离变量得 $\displaystyle\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y=\int\frac{u}{1-u^2}\mathrm{d}u$，积分得 $\ln y+\ln C_1=-\ln\left(1-u^2\right)$ 即 $\dfrac{1}{1-u^2}=C_1y$，亦即

$P^2=y^2-C_1y$，代入

$$y(0)=1, P(0)=y'(0)=-1,$$

得$C_1=0$，所以$P^2=y^2, P=\pm y$，又因为$y'(0)=-y(0)=-1$，所以$P=y'=-y$，分离变量积分得

$$\ln y=-x+\ln C_2, y=C_2\,\mathrm{e}^{-x},$$

由$y(0)=1$得$C_2=1$，所求特解为$y=\mathrm{e}^{-x}$.

注意 易犯的错误是

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\pm y$，分离变量积分得$y=C_1\mathrm{e}^{\pm x}$，由$y(0)=1$得$C_1=1$，所求特解为$y=\mathrm{e}^{\pm x}$.

产生错误的原因是没有考虑$y'(0)=-1$这个条件．当$y=\mathrm{e}^{x}$时，$y'=\mathrm{e}^{x}, y(0)=1$，不满足初值条件，故应将其舍掉，得特解为$y=\mathrm{e}^{-x}$.

对于可降阶的微分方程求特解，边求解边确定任意常数，会给后面的计算带来方便．若求出通解后再定义常数，不仅在积分过程中计算繁琐，而且确定常数时容易出错．

3．设一物体质量为M，以初速度V_0从斜面上推下，若斜面的倾角为α，摩擦系数为μ，试求物体在斜面上移动的距离与时间的函数关系．

解 重力沿斜面的分力大小为$f_1=mg\sin\alpha$，沿斜面法线方向的分力为$f_2=mg\cos\alpha$，故摩擦阻力$R=\mu f_2=\mu mg\cos\alpha$．设位移函数$s=s(t)$，则有

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha) \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=V_0 \\ s(0)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t+C_1,$$

代入初值$s'(0)=V_0$，得$C_1=V_0$，$s=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2+V_0t+C_2$，代入$s(0)=0$得$C_2=0$，所以位移函数为

$$s(t)=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2+V_0t.$$

第六节　线性微分方程通解的结构

1．已知方程 $y''-4xy'+\left(4x^2-2\right)y=0$ 的两个特解为 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}, y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$，试求该方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解.

解　由于 $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{1}{x}$，所以 y_1, y_2 是二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解，因此方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x^2}+C_2x\mathrm{e}^{x^2}=C_2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)$，将 $y(0)=0$ 代入得 $C_1=0$，而

$$y'=2xC_1\mathrm{e}^{x^2}+C_2\mathrm{e}^{x^2}+2C_2x^2\mathrm{e}^{x^2},$$

将 $y'(0)=2$ 代入得 $C_2=2$，所求特解为 $y=2x\mathrm{e}^{x^2}$.

注意　易犯的错误是没有判别 y_1 与 y_2 的线性无关性． y_1 与 y_2 线性相关，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 就不是通解，也无法定出特解.

2. 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，证明函数 $y=y_1(x)-y_2(x)$ 必为对应齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

证　由于 $y_1(x), y_2(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，所以

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=f(x)\quad, \quad (1)$$
$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=f(x)\quad, \quad (2)$$

(1)-(2)并整理得　$\left(y_1-y_2\right)''+P(x)\left(y_1-y_2\right)'=Q(x)\left(y_1-y_2\right)=0$，

即 $y=y_1(x)-y_2(x)$ 必为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

3. 已知函数 x 和 x^2 是二阶线性非齐次微分方程所对应的齐次方程的两个特解，而该非齐次线性微分方程本身的一个特解为 e^x，求此二阶线性非齐次微分方程的通解，并写出这个方程.

解　法1　由解的结构定理知非齐次微分方程的通解为 $y=C_1x+C_2x^2+\mathrm{e}^x$，设微分方程为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，则有

$$\begin{cases}\mathrm{e}^x+P(x)\mathrm{e}^x+Q(x)\mathrm{e}^x=f(x)\\ 0+P(x)+Q(x)x=0\\ 2+2xP(x)+Q(x)x^2=0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} P(x) = -\dfrac{2}{x} \\ Q(x) = \dfrac{2}{x^2} \\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\left(x^2 - 2x + 2\right) \end{cases}$$

故有
$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

解　法 2　通解为　$y = C_1x + C_2x^2 + \mathrm{e}^x \cdots (1)$

$y' = C_1 + 2C_2x + \mathrm{e}^x \cdots (2)$，$y'' = 2C_2 + \mathrm{e}^x \cdots (3)$

$(1) - (2)x$ 得　$y - xy' = -C_2x^2 + (2 - x)\mathrm{e}^x, C_2 = \dfrac{1}{x^2}\left[(1 - x)\mathrm{e}^x + xy' - y\right]$，

将 C_2 代入(3)，整理得所求微分方程为　$y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

注意　易犯的错误是无法消去通解中的任意常数 C_1, C_2，此时要通过 y', y'' 的表达式消元.

第七节　二阶常系数齐次线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'' + 2y' - 4y = 0$

解　特征方程为　$r^2 + 2r - 4 = 0$，

特征根为　$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$，

通解为　$y = C_1\mathrm{e}^{\left(-1+\sqrt{5}x\right)} + C_2\mathrm{e}^{\left(-1-\sqrt{5}x\right)}$.

(2) $y'' + y' + 6y = 0$

解　特征方程为　$r^2 + r + 6 = 0$，

特征根为　$r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{23}i}{2}$，

通解为 $$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{23}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{23}}{2}x\right).$$

(3) $y''+y=0$

解 特征方程为 $r^2+1=0$，

特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

(4) $y''-4y'+4y=0$

解 特征方程为 $r^2-4r+4=0$，

特征根为 $r_{1,2}=2$，

通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(5) $y^{(4)}+y'''+y'+y=0$

解 特征方程为 $r^4+r^3+r+1=0$ ，$\left(r^3+1\right)\left(r+1\right)=0$，

特征根为 $r_{1,2}=-1$ ，$r_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，

通解为 $$y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2. 求以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 为通解的微分方程(其中 C_1,C_2 为任意常数).

解 法1 $y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}, y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}$，消去常数 C_1,C_2，得所求微分方程为

$$y''-3y'+2y=0.$$

解 法 2 因为特征值 $r_1=1,r_2=2$，特征方程为 $\left(r-1\right)\left(r-2\right)=0,r^2-3r+2=0$，因此所求微分方程为 $y''-3y'+2y=0$.

3. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-8\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0,x\left(0\right)=1,x'\left(0\right)=4$

解 特征方程 $r^2-8r+25=0$ ，$r=4\pm3i$，

$$x=\mathrm{e}^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right),$$

由 $x(0)=1$ 得 $C_1=1$, 又

$$x^{'}=4\mathrm{e}^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)+\mathrm{e}^{4t}\left(-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t\right),$$

由 $x'(0)=4$ 得 $C_2=0$, 所求特解为 $x=\mathrm{e}^{4t}\cos 3t$.

(2) $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$

解 特征方程 $r^2+4r+29=0$,

特征根 $r_{1,2}=-2\pm 5i$,

故通解为 $y=\mathrm{e}^{-2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$

由 $y(0)=0$, $y'(0)=15$ 得 $C_1=0,C_2=3$

故所求通解为 $y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$.

4. 若函数 $f(x),g(x)$ 满足条件 $f'(x)=g(x), f(x)=-g'(x), f(0)=0, g(x)\neq 0$,

求由曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 $y=0, x=\dfrac{1}{4}$ 所围成图形的面积.

解 由题设对 $f(x)=-g'(x)$ 两边求导, 得 $f^{'}(x)=-g''(x)$, 则有 $g(x)=-g''(x)$, 即

$$g''(x)+g(x)=0,$$

特征方程为 $r^2+1=0, r=\pm i, g(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$, 由 $g'(0)=f(0)=0$ 得 $C_2=0$,

所以 $g(x)=C_1\cos x, f(x)=-g'(x)=-C_1\sin x$, 从而

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{\sin x}{\cos x},$$

故 $$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|-\frac{\sin x}{\cos x}\right|\mathrm{d}x=\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程

1. 设 $y''-5y'+6y=f(x)$, 当 $f(x)$ 为下列情形时, 写出非齐次方程特解的形式(不具

体计算).

$f(x)=(2x+3)e^{2x}$ $\qquad$ $y^*=\underline{x(ax+b)e^{2x}}$

$f(x)=3e^{x}$ $\qquad$ $y^*=\underline{be^{x}}$

$f(x)=x\sin x$ $\qquad$ $y^*=\underline{(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x}$

$f(x)=5e^{3x}+\sin 2x+\cos 3x$ $\qquad$ $y^*=\underline{axe^{3x}+a_1\cos 2x+a_2\sin 2x+b_1\cos 3x+b_2\sin 3x}$

$y''-5y'+6y=0$ 的特征方程为 $r^2-5r+6=0$, 特征根 $r_1=2,r_2=3$

(1) 当 $f(x)=(2x+3)e^{2x}$ 时, 由于 $r=2$ 为单特征根, 故设特解 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$.

(2) 当 $f(x)=3e^{x}$ 时, 由于 $r=1$ 不是特征根, 故设特解 $y^*=be^{x}$.

(3) 当 $f(x)=x\sin x$ 时, 由于 $r=\pm i$ 不是特征根, 而 x 为一次多项式, 故设特解

$$y^*=(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x$$

(4) 当 $f(x)=5e^{3x}+\sin 2x+\cos 3x$ 时, $f(x)$ 为三项组合, 由于 $r=3$ 为单特征根, $r=2i,r=3i$ 均不是特征根, 所以设特解

$$y^*=axe^{3x}+a_1\cos 2x+a_2\sin 2x+b_1\cos 3x+b_2\sin 3x.$$

注意 易犯错误是

(1) 设 $y^*=(ax+b)e^{2x}$, 错误原因是忘记了 $r=2$ 是单特征根.

(3) 设 $y^*=ax\cos x+bx\sin x$, 或者设 $y^*=(ax+b)\sin x$, 错误的原因是对特解的结构不清楚. 由于 $P(x)=x$ 是一次多项式, 虽然 $P(x)$ 中不含常数项, 也要设

$$\varphi_1(x)=a_1+a_2x,\varphi_2(x)=b_1+b_2x;$$

虽然 $f(x)$ 中的三角函数只出现一项 $x\sin x$, 也必须设

$$y^*=(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x,$$

否则会出现错误.

(4) 设 $y^*=axe^{3x}$, 或 $y^*=axe^{3x}+b\sin 2x+C\cos 3x$, 第二种错误的原因类似于(3), 而设 $y^*=axe^{3x}$, 丢了两项.

2. 求下列微分方程的通解

（1） $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{x}$

解 由$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$，得齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$，设$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{x}$，将$y^{*\prime},y^{*\prime\prime},y^*$代入方程，由待定系数法得$a=-\dfrac{1}{2},b=-1,$所以

$$y^*=-x\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{x},$$

所求通解为 $$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-x\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{x}.$$

（2） $y''-3y'+2y=\cos x$

解 由特征方程为$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$得$r_1=1,r_2=2$，齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$，设$y^*=a\cos x+b\sin x$代入原方程解得$a=\dfrac{1}{10},b=-\dfrac{3}{10}$，所以

$$y^*=\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x,$$

所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{3}{10}\sin x$.

3．求微分方程$2f''(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{x}+2$，满足条件$f(0)=1,f'(0)=\dfrac{1}{2}$的特解.

解 特征方程 $2r^2+r=0$，特征根 $r_1=0,r_2=-\dfrac{1}{2}$，故设特解 $y^*=a\mathrm{e}^{x}+bx$，代入方程得 $a=\dfrac{1}{3},b=2$.

故方程通解为 $$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}+2x.$$

由$f(0)=1,f'(0)=\dfrac{1}{2}$得特解为

$$y=-3+\frac{11}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}+2x$$

4．试求函数$f(x)$，使曲线积分 $\int_P^Q\left[f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$与积分路径无关.

解 由题设有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$得 $f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}=f''(x)$即

$$f''(x)-f'(x)-6f(x)=\mathrm{e}^{-2x}.$$

由特征方程$r^2-r-6=0$得，$r_1=-2,r_2=3$，所以$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$，设$y^*=ax\mathrm{e}^{-2x}$．代入原方程求得$a=-\dfrac{1}{5}$，所以$f^*(x)=-\dfrac{1}{5}ax\mathrm{e}^{-2x}$，所求

$$f(x)=-\frac{x}{5}\mathrm{e}^{-2x}+C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

注意　将积分问题转换为微分方程是常用的一种技巧，否则此题无法求解．

5．设$f(x)$连续，且$f(x)=(x-1)^2+\int_0^{x-1}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求$f(x)$．

解　令$x-t=u$，则$\int_0^{x-1}tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_1^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u$．

故
$$f(x)=(x-1)^2+\int_1^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u\ ,\quad f(1)=0.$$

两边对x求导得
$$f'(x)=2(x-1)+\int_1^x f(u)\mathrm{d}u\ ,\quad f'(1)=0.$$

再对x求导得
$$f''(x)=2+f(x).$$

即
$$f''(x)-f(x)=2.$$

特征方程　$r^2-1=0$，特征根　$r_{1,2}=\pm1$．所以齐次方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设非齐次方程的一个特解为　$y^*=a$，代入方程得　$a=-2$．

故方程通解为　$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-2$．

由$f(1)=0,f'(1)=0,$得$C_1=\mathrm{e}^{-1},C_2=\mathrm{e}$．

故
$$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}-2.$$

6*．求微分方程$x^2y''-xy'+y=x\ln x$满足初始条件$y(1)=1,y'(1)=1$的解．

解　令$x=\mathrm{e}^t$，则原方程变形为$D(D-1)y-Dy+y=t\mathrm{e}^t$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t\mathrm{e}^t,$$

由特征方程$r^2-2r+1=0$得$r_{1,2}=1$，齐次方程的通解为$\bar{y}=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t$，设

$$y^*=t^2(at+b)\mathrm{e}^t,$$

由待定系数法得$a=\dfrac{1}{6},b=0$，所以$y^*=\dfrac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$，通解为

$$y=\left(C_1+C_2t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t,$$

将$t=\ln x$代入得所求通解为$y=\left(C_1+C_2\ln x\right)x+\frac{x}{6}\cdot\ln^3 x$，将初值$y\left(1\right)=1,y'\left(1\right)=1$代入得$C_1=1,C_2=0$，所求特解为$y=x+\frac{1}{6}x\left(\ln x\right)^3$.

注意　易犯错误是

将初值条件$y\left(1\right)=1,y'\left(1\right)=1$代入$y=\left(C_1+C_2t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$去求$C_1,C_2$.

产生错误的原因是把初值$y\left(1\right)=1,y'\left(1\right)=1$误认为是$t=1$时$y=1,y'=1$．事实上初值条件是$x=1$时$y=1,y'=1$，应该代入$y=\left(C_1+C_2\ln x\right)x+\frac{x}{6}\cdot\ln^3 x$来确定$C_1,C_2$，或者转换成$t=0$时，$y=1,y'=1$而代入$y=\left(C_1+C_2t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$确定$C_1,C_2$.

7*．设$\varphi\left(x\right)$二次可微，且对任意封闭曲线C有$\oint_C 2y\varphi(x)\mathrm{d}x+x^2\varphi'(x)\mathrm{d}y=0$，又$\varphi\left(1\right)=2,\varphi'\left(1\right)=1$，求$\varphi\left(x\right)$.

解　由题设有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$得$2x\varphi'\left(x\right)+x^2\varphi''\left(x\right)=2\varphi\left(x\right)$，即

$$x^2\varphi''\left(x\right)+2x\varphi'\left(x\right)=2\varphi\left(x\right).$$

令$x=\mathrm{e}^t$得$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-2\varphi=0$，由$r^2+r-2=0$得$r_1=-2,r_2=1$，齐次方程的通解为

$$\Phi=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-2t}=C_1x+\frac{C_2}{x^2},$$

将初值$\varphi\left(1\right)=2,\varphi'\left(1\right)=1$代入得$C_1=\frac{5}{3},C_2=\frac{1}{3}$，所求

$$\varphi\left(x\right)=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3x^2}.$$

第十二章　微分方程（总习题）

1．将下列所给方程的类型及求解方法用线连接起来.

（1）$y'=xy\mathrm{e}^{x^2}\ln y$　　　　（a）伯努利方程，作代换$z=y^{-2}$.

（2）$\left(x+y\right)\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$　　　　（b）可分离变量的微分方程，分离变

量，两边积分.

（3）$y'=\dfrac{3x^6-2xy^3}{3x^2y^2}$ （c）以变量 x 为函数，一阶线性非齐次微分方程，常数变易法.

（4）$\left(\ln y-\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y=0$ （d）齐次微分方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$.

（5）$\left(x-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ （e）全微分方程，代公式.

解 （1）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，与（b）连线.

（2）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$，与（c）连线.

（3）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{3x}y=x^4y^{-2}$，与（a）连线.

（4）$P(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x},Q(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x$，因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，与（e）连线.

（5）方程变形为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}\right)\arctan\dfrac{y}{x}=1$，与（d）连线.

2．设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解，讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 是否存在？

解 将 $y(0)=y'(0)=0$ 代入微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 有 $y''(0)=1$.

使用两次洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{y'(x)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{y''(x)}=2.$$

3．求 $y'+xy=(1+x)\mathrm{e}^{-x}y^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解 令 $z=y^{-1}$，方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-xz=-(1+x)\mathrm{e}^{-x}$，故

$$z=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-x}+C\right)$$

所以$\dfrac{1}{y}=\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，代入$y(0)=1$，得$C=0$.

故所求特解为 $$y=\mathrm{e}^{x}.$$

4．设可导函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$，求$\varphi(x)$.

解 方程两边分别对x求导得

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x+2\varphi(x)\sin x=1$$

即 $$\varphi'(x)+\tan x\cdot\varphi(x)=\frac{1}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left[\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x\end{aligned}$$

由题设，当$x=0$时，有$\varphi(0)=1$，代入$\varphi(x)=\sin x+C\cos x$，得$C=1$，所以

$$\varphi(x)=\sin x+\cos x.$$

注意 易犯的错误是 $\varphi(x)=\sin x+C\cos x$.

错误原因是不会寻求初值条件$\varphi(0)=1$．事实上积分方程

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$$

中隐含着初值条件，只要将$x=0$代入该方程，即可求得$\varphi(0)=1$，进而求得$C=1$，得出特解 $\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

5．求微分方程$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0$的通解.

解 $P(x,y)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right),Q(x,y)=-\sqrt{x^2-y}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故为全微分方程.

$$u=\int_{(1,0)}^{(x,y)}2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^x 2x(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^y -\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y$$
$$=x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{3}$$

所以通解为 $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=C$.

6 . 设曲线积分 $\int_L\left[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=0,$ $f'(0)=1$，试计算积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$.

解 积分与路径无关，故 $f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x=f''(x)$，

即
$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x,$$

特征方程 $r^2-r-2=0$ ，特征根 $r_1=2,r_2=-1$，

所以齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

设特解 $y^*=a\mathrm{e}^x$，代入方程得 $a=-\frac{1}{2}$. 所以通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$，

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=-\frac{1}{6},C_2=\frac{2}{3}$，所以
$$f(x)=y=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

所以积分
$$I=\int_0^1 f'(1)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\mathrm{e}^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

7 . 一曲线过点 $(0,0)$，且位于第一象限内，在其上任取一点，过该点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线所围成图形与另一条平行线与 y 轴和曲线所围成的图形绕 x 轴旋转所成立体体积相等，求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=y(x),(x,y)$ 为曲线上任意一点，由题设得
$$\int_0^x \pi y^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi y^2x \quad ,$$

方程两边求导得 $\pi y^2(x)=\pi yxy'+\frac{1}{2}\pi y^2$，整理得 $2\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得
$$2\ln y=\ln x+\ln C_1.$$

所求曲线为
$$y=C\sqrt{x}.$$

8. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$G(x)$ 是 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的一个原函数，$F(x)G(x)=-1$, $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 由 $F(x)G(x)=-1$，得 $G(x)=\dfrac{-1}{F(x)}$，所以 $G'(x)=\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}$，由题设有

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{F'(x)}{F^2(x)}=\frac{f(x)}{F^2(x)},$$

则 $F^2(x)=f^2(x)$. 即 $F(x)=\pm f(x)=\pm F'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=\pm\mathrm{d}x$，积分得

$\ln(F(x))=\pm x+\ln C$，$F(x)=C\mathrm{e}^{\pm x}$，由 $f(0)=1$ 得 C＝1，所以 $f(x)=\mathrm{e}^{\pm x}$.

9. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=r\mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

解 法 1 由特解知原方程的特征根为 1 和 2. 因此特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，$r^2-3r+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$，为确定 γ，将 $y_1=x\mathrm{e}^x$ 代入原方程

$$(x+2)\mathrm{e}^x-3(x+1)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=r\mathrm{e}^x,$$

得 $r=-1$.

原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$.

解 法 2 将 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 代入原方程得

$$(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+(3+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^x+(1+\alpha+\beta)x\mathrm{e}^x=r\mathrm{e}^x,$$

比较同类项系数得

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

解得 $$\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1.$$

故原方程为 $$y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x.$$

易求得对应齐次方程通解 $y=\bar{C}_1\mathrm{e}^x+\bar{C}_2\mathrm{e}^{2x}$，又已知一个特解，故原方程的通解为

$$y=\bar{C}_1\mathrm{e}^x+\bar{C}_2\mathrm{e}^{2x}+\left[\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x\right]$$

即 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$，其中 $C_1=\bar{C}_1+1, C_2=\bar{C}_2+1$.

10. 已知 y_1,y_2,y_3 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，求该方程的通解；又若 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}, y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$，写出微分方程.

解 由于 y_1,y_2,y_3 是方程的三个线性无关的解，则 y_2-y_1, y_3-y_1 为对应齐次微分方程的两个线性无关的解，则该方程的通解为

$$y=y_1+C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)$$

令 $z_1=y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{2x}, z_2=y_3-y_1=\mathrm{e}^{-x}$，则 z_1,z_2 线性无关，所以 $r=-1, r=2$ 为对应齐次微分方程的特征根，故 $(r+1)(r-2)=0$，即 $r^2-r-2=0$，故微分方程为

$$y''-y'-2y=f(x),$$

由于 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$ 是其解，将 y_1,y_1',y_1'' 代入求得 $f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x$，得微分方程

$$y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x.$$

11. 火车沿水平轨道运动，火车的重量为 P，机车的牵引力为 F，运动的阻力为 $W=a+bv$（a,b 为正常数），v 是火车的速度，假定 $t=0$ 时，$s=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，求火车的运动规律.

解 由题意知 $F-a-b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，即 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{bg}{P}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{g(F-a)}{P}$，

特征方程 $r^2+\frac{bg}{P}r=0$，特征根 $r_1=0$，$r_2=-\frac{bg}{P}$，

所以齐次方程通解为 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}$.

设特解 $y^*=ct$，代入方程得 $c=\frac{F-a}{b}$. 所以方程通解 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}+\frac{F-a}{b}t$.

由 $s(0)=0$，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=0$，得 $C_1=-\frac{(F-a)P}{b^2g}=-C_2$，

故
$$s=\frac{P(F-a)}{b^2g}\left(\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}-1\right)+\frac{F-a}{b}t.$$