第四部分 数理逻辑

10.6 范式

基本概念

(1) 文字——命题变元及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

p, $\neg q$, $p\vee\neg q$, $p\vee q\vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

p, $\neg q$, $p\wedge\neg q$, $p\wedge q\wedge r$, …

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

p, $\neg p\wedge q$, $p\vee\neg q$, $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

p, $p\vee\neg q$, $\neg p\wedge q$, $(p\vee q)\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

范式概念

说明：

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 形如 $p\wedge\neg q\wedge r$，$\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

范式的性质

定理10.1

(1) 一个简单析取式是重言式

当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式

当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.

定理10.2

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

命题公式的范式

定理10.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式

求公式A的范式的步骤：

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$深入命题变元前或消去

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

命题公式的范式

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　　求析取范式

求公式的范式

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\to\neg q)\to r$

解 (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，

又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式)

求公式的范式

(2) $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律） 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

注意：$(p\wedge q)\vee r = (p\wedge q)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg q)$

公式范式的不足——不唯一

最（极）小项

定义1：在含有n个命题变元的简单合取式中，

若每个命题变元和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，

而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），

称这样的简单合取式为最/极小项.

几点说明：

- n个命题变元有2^n个最小项，

  例如 3 个变元*P*、*Q*、*R*可构造 8 个极小项。

- 我们把命题变元看成 1，命题变元的否定看成 0，那么每一极小项对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数。

  对应情况如下:

最（极）小项

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \text{ ——} 0\ 0\ 0 \text{——} 0$$

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge R \text{ ——} 0\ 0\ 1 \text{——} 1$$

$$\neg P \wedge Q \wedge \neg R \text{ ——} 0\ 1\ 0 \text{——} 2$$

$$\neg P \wedge Q \wedge R \text{ ——} 0\ 1\ 1 \text{——} 3$$

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \text{ ——} 1\ 0\ 0 \text{——} 4$$

$$P \wedge \neg Q \wedge R \text{ ——} 1\ 0\ 1 \text{——} 5$$

$$P \wedge Q \wedge \neg R \text{ ——} 1\ 1\ 0 \text{——} 6$$

$$P \wedge Q \wedge R \text{ ——} 1\ 1\ 1 \text{——} 7$$

最（极）小项

我们把对应的十进制数当作足标，用m_i表示这一项，即

$$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

$$m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

$$m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

$$m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$$

$$m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$$

- m_i称为最小项的名称.
- 每个最小项m_i有且只有一个成真赋值 (即，i对应的二进制数)

最（极）小项

定义1： 在含有n个命题变元的简单合取式中，

若每个命题变元和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，

而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\leq i\leq n$），

称这样的简单合取式为最/极小项.

几点说明（续）：

- 2^n个最小项均互不等值

最（极）大项

定义2：在含有n个命题变元的简单析取式中，

若每个命题变元和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，

而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），

称这样的简单析取式最/极大项.

求由三个命题变元 p, q, r 形成的最大项？

最（极）大项

- n个命题变元有2^n个最大项，

类似于(但不同于)极小项的记法，它们是:（这里是将命题变元对应于 0，命题变元的否定对应于 1，恰与极小项记法相反)

$$M_0 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$$

$$M_1 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n$$

$$M_2 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee \neg P_{n-1} \vee P_n$$

$$\vdots$$

$$M_{2^n-1} \Leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n$$

最（极）大项

几点说明（续）：

- 2^n个最大项均互不等值；
- 每个最大项都有且只有一个成假赋值；
- 用M_i表示第i个最大项，其中i是该最大项成假赋值的十进制表示. M_i称为最大项的名称.

实例

由三个命题变元 p, q, r 形成的最小项与最大项.

最小项			最大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

极小项和极大项性质

（1）$m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$，$(i \neq j)$

（2）$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T$，$(i \neq j)$

（3）$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow T$

（4）$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow F$

（5）$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$

（6）$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由最小项构成的析取范式

主合取范式——由最大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变元为 p, q, r 时，

① $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$——主析取范式

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3$

② $(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$——主合取范式

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_7$

主析取范式与主合取范式

公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

定理10.4 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的。

用真值表确定主范式

定理10.3 一个公式的真值表中，使其为 T 的赋值所对应的最小项全体组成的析取式恰好为该公式的主析取范式。

证明：设该公式为A。

按题目要求构成的析取式为B，且B具有主析取范式的形式。

下面证明A=B即可。

首先，对A为T的赋值，其对应的最小项出现在B中，

所以该赋值使得B为真。

其次，对A为假的赋值，其对应的最小项不出现在B中，

故该赋值也使得B为假。

综上可知A=B。

用真值表确定主范式

例. 求 $P \wedge Q \vee R$ 的主析取范式

P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

用真值表确定主范式

定理10.4 一个公式的真值表中，使其为F的赋值所对应的最大项全体组成的合取式恰好为该公式的主合取范式。

故，公式主合取范式的构成有两种方法：

1. 利用基本等式由公式推出；
2. 由公式的真值表得出。

注：若将公式主合取范式的命题变元的个数及出现的次序固定，则此公式的主合取范式是唯一确定的。

用真值表确定主范式

例. 求 $P \wedge Q \vee R$ 的主合取范式

P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

练习：求 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$ 的主析取与主合取范式

求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变元$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的项和矛盾式

(4) 将最小项按下标从小到大排列

用等式验算求求 $\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的主析取范式

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变元$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的项和永真式

(4) 将最大项按下标从小到大排列

实例

例 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变元, A的主析取范式有s个最小项, 则A有s个成真赋值, 它们是最小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值。

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为

001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为

000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变元.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个最小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何最大项, 记为1.

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个最大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何最小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式（偶然式）

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部最小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部最大项.

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

4. 解实际问题

例 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\rightarrow r$, (2) $q\rightarrow\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$

$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee$

$((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去,

方案2 派B去

主范式的应用

5. 由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变元, 且已知$A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求$A$的主合取范式.

解　A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的最小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的最大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

6. 由主合取范式确定主析取范式

练习

2.25. 对任一指派，为什么m_i和m_j不能同时为真? 为什么M_i和M_j不能同时为假? 这里$i \neq j$。

2.26 用等值演算法求下列公式的主析取范式，并求成真赋值.

(1) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$.

(2) $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$.

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$.

2.27 求题 2.26 中各小题的主合取范式，并求成假赋值.

2.28 通过求主析取范式，求下列公式的主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$.

(2) $(p \to q) \wedge (q \to r)$.

2.29 用真值表求下列公式的主析取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$.

(2) $(p \to q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$.

练习

2.31 某公司要从赵、钱、孙、李、周5名新毕业的大学生中选派一些人出国学习.选派必须满足以下条件：

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中必有一人去.

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也同去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

THE END