1. 如果想用求函数极限的方法求数列的极限，**注意先把数列的极限转化为函数的极限再求，**例如：

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{2^n+3^n})^{\frac{1}{n}}$，应该这样写：

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{2^n+3^n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2}{2^x+3^x})^{\frac{1}{x}}$

2. 参数方程求 2 阶导数，一是**注意是求 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 还是 $\frac{d^2y}{dx^2}$**，二注意代入 $\frac{dy}{dt},\frac{dx}{dt}$ 的时候不要代错，这个是大家不小心就会犯的错误，例如：

例 2 设 $\begin{cases}x=a(1-\cos t)\\ y=a\sin t\end{cases}$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$。

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{a\sin t}{a\cos t}=\tan t$（注意 $\frac{dx}{dy}$ 是 t 的函数，而 t 又是 y 的函数，因此求 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 对 y 的二阶导数时，先求 $\frac{dx}{dy}$ 对 t 的一阶导数，再求 t 对 y 的一阶导数。）

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d(\frac{dx}{dy})}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\cancel{\frac{\frac{d(\frac{dx}{dy})}{dt}}{\frac{dy}{dt}}}=\frac{\sec^2 t}{a\cos t}=\frac{1}{a}\sec^3 t$$

3. 求函数 $f(x)$ 的**微分**时，**注意后面一定要乘以 dx**，$df(x)=f'(x)dx$

4. **遇见高度可疑函数，如 $e^{\infty},a^{\infty}(a>1),\arctan(\infty)$，分段函数的分段点（分段点两侧表达式不一样时）需要考虑左右极限，**例如：$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to0}a^{\frac{1}{x}}(a>1),\lim\limits_{x\to0}\arctan^{\frac{1}{x}}$，注意分 $x\to0^+,x\to0^-$ 求极限。

例 3 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-3e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，求解如下（利用左右极限是否存在求极限）：

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-3e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-3}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=-3\quad$ (因为 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$)

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-3e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\quad$ (因为 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$)

所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-3e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在。

例 4 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

5. 考虑分段函数在分段点 x_0 处的连续性和可导性时，必须要用函数在点 x_0 连续的定义（若

$f(x)$ 在 x_0 的左右两侧的表达式不相同，则需看 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ 是否成立或若 $f(x)$ 在 x_0 的左右两侧的表达式相同，则需看下式是否成立：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$）和在点 x_0 可导的定义（$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$）。

函数在点 x_0 可导的 3 个等价定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (2)$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (3)$$

推广：

$$f'(x_0)=\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{f(x_0+\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)}\ (\varphi(x)\neq 0) \qquad (4)$$

例 5 设 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1+x^2)}{x\sin x}$

解 利用导数定义（3），（4）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1+x^2)}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)+f(1)-f(1+x^2)}{(\cos x-1)x\sin x}\cdot(\cos x-1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x^2)-f(1)}{x\sin x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}-\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x^2)-f(1)}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}f'(1)-f'(1)=-3$$

【$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\overset{t=\cos x}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$】

注：1） 分段函数导函数的计算方法：分段点处定义求，开区间上直接求导数；
2） 讨论以极限式表示的函数的连续性和可导性时，需要先求极限得到函数的解析表达式，然后再讨论，注意分清楚极限变量和自变量；

例 6 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的充要条件是 a=____,b=____.

解：此题极限变量是 n，先需要分 $|x|<1,|x|=1,|x|>1$ 三种情况（因为 $|x|<1$ 时，$x^{2n}\to 0,|x|>1$ 时，$x^{2n}\to\infty$）求出式子右端的数列极限，进而得到函数 $f(x)$ 解析表达式，然后再利用 $f(x)$ 在分段点 $|x|=1$ 的连续性讨论。

6. 判断间断点的类型，

- 注意写法：如果在间断点处的极限为无穷，就写“第二类（无穷）间断点”， 其它第二类间断点就写“第二类间断点”；对于第一类间断点，可写成“第一类（可去）间断点”，“第一类（跳跃）间断点”；
- 若分母的零点也是分子的零点，此时需要对分子分母的相同零点进行单独讨论，分子分母的相同零点间断点类型有可能和分子零点的间断点类型不一样(因为 0/0 的未定式极限有可能存在）；

例 7 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin \pi x}$，则 $f(x)$ 有几个可去间断点？

分析：此题在判断间断点的类型时注意 $f(x)$ 的间断点中包含了分子的两个零点 $x=0$ 和 $x=1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 的极限有可能存在，需要分情况讨论。

解：$f(x)$ 无定义的点：$x=k\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

$f(x)$ 分子的零点为：$x=0,1$

$x=0$时，

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sin \pi x}\overset{\text{等价无穷小代换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\pi x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{\pi}=\frac{-1}{\pi}$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

$x=1$时，

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sin \pi x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\pi\cos \pi x}=\frac{-1}{\pi}$$

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

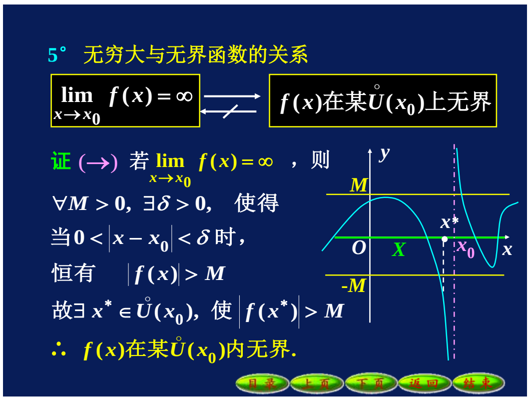
$x=k\ (k=-1,\pm 2,\cdots)$时，

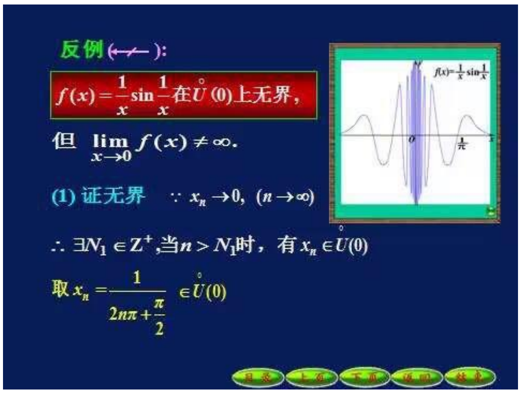
$$\because\quad \lim_{x\to k}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to k}\frac{\sin \pi x}{x^2-x}=0$$

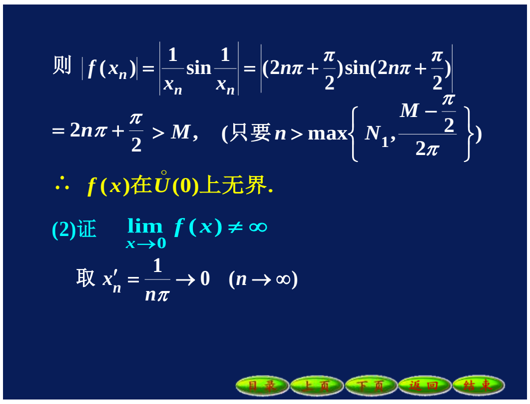
$$\therefore\quad \lim_{x\to k} f(x)=\infty$$

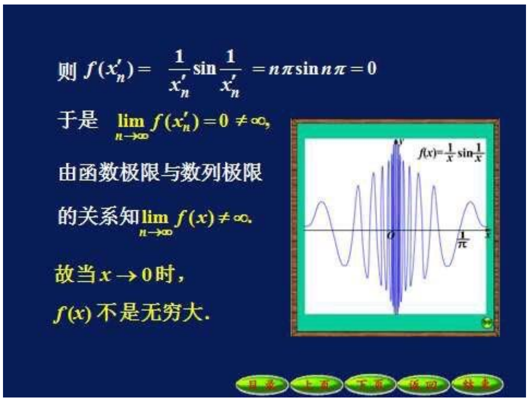
故 $x=k$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点。

7. 1）注意无穷大量和无界函数的关系：









2）怎么证明函数无界和函数不是无穷大量？

证明函数无界的方法：

1. 利用无界的定义证明；

2. 找 一 个 数 列 ， 证 明 函 数 值 数 列 的 极 限 为 ∞ （ 一 支 红 杏 出 墙 就 无 界 了 ）

（4）为证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为无界变量，只要寻找一个趋于 a（或 ∞）的数列 x_n^*，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)=\infty$.

证明函数“不是”无穷大量的方法： 找一个数列，证明函数值数列的极限不等于∞（只有所有红杏出墙才能说是无穷大量）。

（3）为证明 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时不是无穷大量，即证 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\infty$，只要寻找一个[趋]于 a 的数列 x_n^*，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)\neq\infty$.

8. **利用四则运算求导法则求导时注意看各函数是否可导，如果不可导，只能利用导数的定义求导。**

例如上课讲过的这道题目，由于 g′(x)连续，故求 f′(x)可以用积的求导法则，但是求 f′′(x)就不能用积的求导法则，求 f′′(a)只能用导数的定义。

例7 设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，求 $f''(a)$.

解 $\because g(x)$ 可导

$\therefore\ f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$，$f'(a)=0$

$\because\ g''(x)$ 不一定存在，

故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a).$$

9. 利用洛必达法则求极限时，务必：1）看一下能否用等价无穷小代换，**注意先代换再洛必达**；2）看一下有没有非零因式的极限，**注意先求非零因式的极限再洛必达**。

10. 连续使用洛必达法则时，注意判断所求的极限是否满足洛必达法则的条件。注意，**若题设条件仅告诉 $f(x)$ 二阶可导，则只能用 1 次洛必达法则，三阶可导，则只能用 2 次洛必达法则，一阶可导，不能用洛必达法则，最后的极限需要利用导数定义进行求解；** 若题设条件告诉 $f(x)$ 具有二阶“连续”的导数，则**可以用 2 次洛必达法则，** 三阶“连续”的导数，可以用 3 次洛必达法则，一阶“连续”的导数，可以用 1 次洛必达法则。

例 8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$， $f''(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$

解： 本题极限类型为 1^∞，利用第二个重要极限求解

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{f(x)}{-x})^{\frac{-x}{f(x)}}]^{\frac{f(x)}{-x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，可得 $f(0)=0$，则

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

故，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛必达}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$，需要用 $f''(0)$ 的定义求此极限

【注意：不能对此极限再用洛必达法则，因为二次利用洛必达法则后就变成了求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)\cancel{=}f''(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$ 的条件是 $f''(x)$ 连续，但题设条件只给了 $f(x)$ 二阶可导！！！】

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}$$

故原极限 $=e^{-\frac{1}{2}}$

11. **求不定积分时注意后面加任意常数 C**。

12. **利用不定积分法求函数 $f(x)$ 时，注意在题目已给条件中找一个条件把任意的常数 c 待定出来**，如：

例 9 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导、不恒为零，$f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}dt$，求 $f(x)$。

解： $f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}dt$，此式两端关于 x 求导，得到

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

对上式两端取不定积分（或两端在[0,x]上积分）即可求得 $f(x)$。注意利用不定积分法求 $f(x)$ 时需要根据已知条件得到的 $f(0)=0$ 将任意的常数 c 待定出来。

13. 求**分段函数的不定积分**的方法：开区间直接积分，分段点用连续，**注意开区间做不定积分时每段上的任意常数 c 不同，应该写成 c_1, c_2**，然后利用原函数的连续性找到 c_1 与 c_2 之间的关系。

14. 求旋转体体积、面积和弧长的**最值**时，当求出唯一的驻点后，**务必利用极值的第一或第二充分条件判断该唯一的驻点是极小值点或极大值点**，从而推出该唯一的驻点即为最小值点或最大值点；

15. 对于实际的最值问题，我们没有必要考虑区间是开区间还是闭区间，实际问题的最值步骤：1）建立目标函数；2）求目标函数在定义区间内的驻点 x0；3）若驻点 x0 唯一（一般情况都是唯一的），利用极值的第一或第二充分条件判断该唯一的驻点 x0 是极大值点还是极小值点；4）根据实际问题，x0 点的函数值即为所求的最大值（或）最小值。

16 **计算上下限为常数的积分时注意判断该积分是瑕积分还是定积分,** 若瑕点 c 在[a,b]之间，切记以 c 为分界点将[a,b]的瑕积分分为[a,c]和[c,b]两个瑕积分之和；混合性广义积分需要拆开为无穷限广义积分+瑕积分来计算；若换元后广义积分变为定积分，则按照定积分的计算方法来计算即可；**若被积函数在积分区间[a,b]上不连续，或 F(x)是 f(x)在[a,c] ∪ [c,b]上的原函数，c 为 F(x)的间断点或连续点，则必须利用推广的牛顿-莱布尼茨公式计算该积分**。

17. 变上（下）限积分函数求导数时，需要注意：

1）**若积分号里出现了与积分变量 t 无关的积分上限变量 x 时，需要先整理变形，将含 x 的项分离到积分号外，或利用变量代换将 x 分离到积分的上下限中去；**

例10 $f(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f'(x)$

解: $f(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

例11 已知$f(x)$连续，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)dt}{e^{x^2}-1}$

分析：需要先对分子的积分上限函数变形，把积分号里的 x 分离到积分的上下限中去，然后再洛必达。

解: $\int_0^x tf(x-t)dt \overset{u=x-t}{=\!=\!=\!=} -\int_x^0 (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

2）**若方程两边求导比较麻烦，注意先对原方程变形再求导；**

例12 当$x>0$时$f(x)$连续，且 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$，求$f(x)$

解: 原式可变为

$$xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$$

上式两边对 x 求导，有：

$$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$$

可得： $$f'(x)=\frac{1}{x}\ (x>0)$$

上式两边取不定积分，有

$$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$$

由题设条件（**注意由题设条件找条件定 c**）得 f(1)=1，代入上式得 c=1，故

$$f(x)=\ln x+1$$

18. 求**积分区间关于原点对称**的定积分时考虑利用定积分的**“偶倍奇零”**的性质求解；绝对值、分段函数的定积分记得分段积分；被积函数无法用初等函数表示的，利用分部积分法求解。

19. 注意由一阶导数的正负可以推出函数的单调性，不能由函数的单调性推出一阶导数的正负。

20. 熟记曲率公式、常用函数的麦克劳林公式、高阶导数公式，莱布尼茨高阶导数公式，如

1) $\boldsymbol{y=f(x)}$的曲率公式: $\boldsymbol{K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$

2）常用函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

3) 常用函数的高阶导数公式

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}, \quad \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

3. 利用已知高阶导数法

常用高阶导数公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

4）莱布尼茨高阶导数公式：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

21.求曲线的渐近线时，注意需要考察垂直、水平、斜渐近线这三种类型的渐近线，但是在同一个方向上，水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在。