

§ 1.2 排列及其逆序数

一、全排列及其逆序数

问题 把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义1.1 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）。

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示。

例如 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

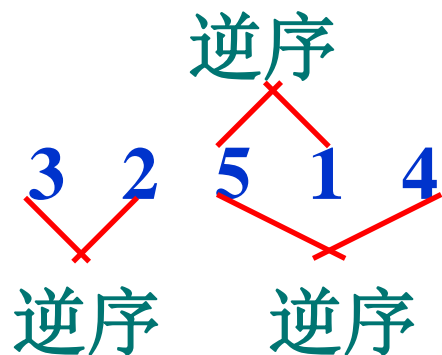
同理 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序, n 个不同的自然数, 规定由小到大为**标准排列** (自然排列) .

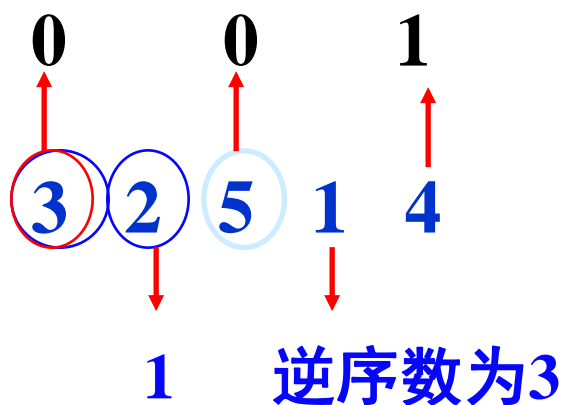
定义1.2 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中, 若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中,



定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.记做 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 。

例如 排列**32514** 中,



故此排列的逆序数为 **$3+1+0+1+0=5$** .

记做 $\tau(32514) = 5$

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如, 在123组成的全排列中, 有3个偶排列123, 231, 312; 有三个奇排列132, 213, 321

❖一般说来, n 个数的全排列中, 奇偶排列各占一半。

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1, 2, \dots, n-1, n$ 前面比它大的数码之和, 即分别算出 $1, 2, \dots, n-1, n$ 这 n 个元素的逆序数, 这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.(从“1”开始法)

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即从排列中第一个元素开始，依次算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数。（从“头”开始法）

例1 求排列32514的逆序数.

解 在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

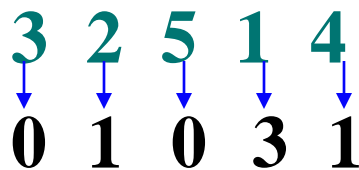
2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

3 2 5 1 4

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;



于是排列**32514**的逆序数为

$$\tau = \mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{3} + \mathbf{1} = \mathbf{5}. \quad (\text{从头开始法})$$

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解 2 1 7 9 8 6 3 5 4 (从“1”开始)

 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 0 1 0 0 1 3 4 4 5

$$\begin{aligned}\tau &= 1 + 0 + 4 + 4 + 5 + 4 + 3 + 0 + 1 \\ &= 18\end{aligned}$$

此排列为偶排列.

$$(2) \quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

解

$$\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 321}^{n-1}$$
$$(n-2)$$

$$\begin{aligned}\tau &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

当 $n = 4k, 4k + 1$ 时为偶排列;

当 $n = 4k + 2, 4k + 3$ 时为奇排列.

$$(3) \quad 1 \ 3 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 4 \ 2$$

解 $1 \ 3 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \ 2$ (从“头”开始)

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 4 \cdots 2n-2 \end{array}$$

$$\tau = 0 + \cdots + 0 + 2 + 4 + \cdots + 2(n-1)$$

$$= n(n-1)$$

此排列为偶排列。