诚信保证

班级：

学号：

姓名：

装 订 线

编号：____________

西北工业大学期中考试试题答案

2016－2017 学年第二学期

开课学院：理学院　　课程：高等数学　　学时：96

考试日期：2017 年 5 月　　考试时间：2 小时　　考试形式(闭 卷)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题(每小题 3 分，满分 18 分)

1. 1；

2. z 或 $xf(\frac{y}{x})$；

3. 1；

4. $dx-\sqrt{2}dy$；

5. 2；

6. $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$；

7. $(\frac{1}{2},2,1)$；

8. $\mathrm{x}+2\mathrm{y}-z-4=0$；

9. $\int_0^a dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x,y)dx$ ；

10. $\frac{1}{2}(e-1)$

11. $\dfrac{1}{35}$；

12. $f(2)$；

13. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$；

14. $\dfrac{1}{6}\pi$；

15. $-\dfrac{79}{5}$；

16. π；

17. π.

二、（8 分）已知二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续；(2) 计算 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$；(3) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

解 (1) 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\cos^2\theta\sin\theta=0=f(0,0)$$ 3 分

所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续.

(2) 因为 $f(x,0)=0,\ f(0,y)=0$，所以 $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$.

5 分

(3) 因为

$$\left|\frac{\Delta z-dz}{\rho}\right|=\left|\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right||\Delta x|=\frac{1}{2}|\Delta x|\to 0(\rho\to 0)$$

故而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。 8 分

解法二，

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

$$\left|\frac{\Delta z}{\rho}\right|\leq\frac{(\Delta x)^2|\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\leq\frac{1}{2}\left|\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right||\Delta x|=\frac{1}{2}|\Delta x|\to 0(\rho\to 0),$$

$$\Delta z=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho),$$ 4 分

从而，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，在 $(0,0)$ 处的连续，$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$. 8 分

三、（6 分）设 $z = g(\frac{y}{x}) + f(xy, \frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{x}} g' + \mathrm{x} f_1' - \frac{x}{y^2} f_2'$ … ……….2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} g''(\frac{y}{x}) + x^2 f_{11}'' - 2\frac{x^2}{y^2} f_{12}'' + \frac{x^2}{y^4} f_{22}'' + \frac{2x}{y^3} f_2'$ …………..6 分

班级：

学号：

姓名：

四、（8 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+z)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截得的有限部分。

解：$dS=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$ …………..2 分

$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS$， …………..4 分

$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$ …………..5 分

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$ …………..6 分

$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{8}{3}a^3\cos^3\theta d\theta$ …………7 分

$=\dfrac{32\sqrt{2}a^3}{9}$ …………..8 分

五、**(10 分)**求向量场 $\vec{A}=\{xz,2yz,3xy\}$ 穿过曲面 Σ： $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 上侧的通量。

解：通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$ ------------------------2 分

利用高斯公式补充平面 $\Sigma_1: x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1, z=0$ 取下侧，-----------------4 分

$$\Phi=\iiint\limits_{\Omega} 3zdV-\iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy \text{ -------- ----------6 分}$$

$$I_1=\int_0^1 3zdz \iint\limits_{D_z:x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z} dxdy=\int_0^1 6\pi z(1-z)dz=\pi \text{ -------------------8 分}$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=\iint\limits_{\Sigma_1} 3xydxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}:x^2+\frac{y^2}{4}\le 1} 3xydxdy=0 \text{ -----------------10 分}$$

则 $\Phi=I_1-I_2=\pi$