无向树及其性质

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

无向树及其性质

定义9.1

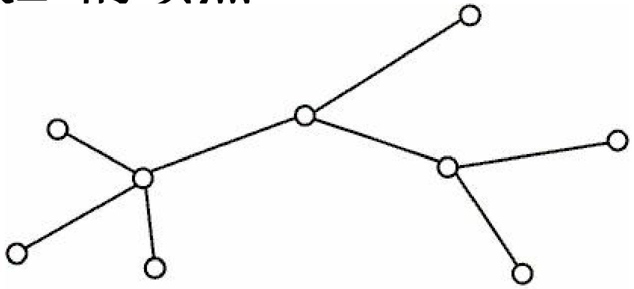
(1) 无向树——无回路的连通无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理9.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且删除 G 中任何边使得G 变得不连通.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈.

证明思路

树：连通、无回路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不唯一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不唯一.

对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时正确，证$n=k+1$时也对: 取G中任意边e, $G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2(为什么?), 它们的顶点满足$n_i\le k$, 由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是 $m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

证明思路

(4)⇒(5). 只需证明命题

"G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$".

命题的证明: 对n归纳.

所以，$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通.

(5)⇒(6). 由(5)易知G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v \in V$ $(u \neq v)$，u到v有唯一路径，加新边(u,v)得唯一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且删除 G 中任何边使得G 变得不连通.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

无向树的性质

定理9.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证 设T有x片树叶，由握手定理及定理9.1可知，

$$2(n-1)=2m=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

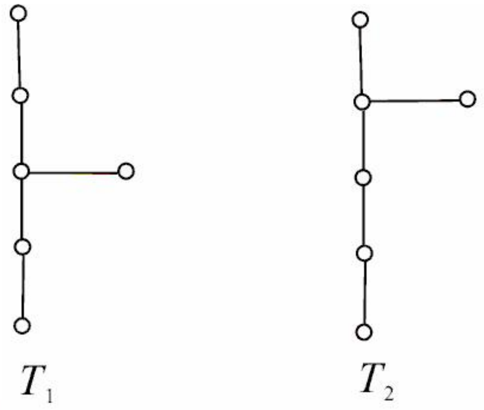
设有x片树叶，于是

$$n = 1+2+x = 3+x,\quad 2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，

易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

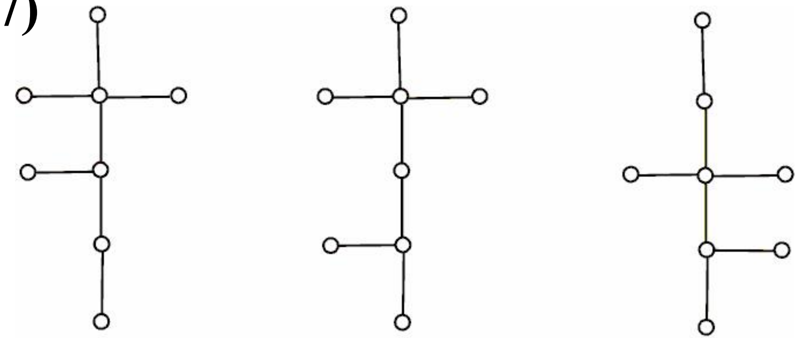
解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

T的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有3棵非同构的无向树，如图所示.



T_1 T_2 T_3

THE END