第三章

2. 1) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&0&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 所以 $r(A)=3$

2). $B=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&-3\\0&-7&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&5&-3&1\\0&-7&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3-5r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-4&8\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 所以 $r(B)=3$

3.1). 增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&2&1&1&-3&-2\\0&1&2&2&6&23\\5&4&3&3&-1&12\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-1&-2&-2&-6&-23\\0&1&2&2&6&23\\0&-1&-2&-2&-6&-23\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\end{cases}$

移项: $\begin{cases}x_1=-16+x_3+x_4+5x_5\\x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$ 令 $\begin{cases}x_3=k_1\\x_4=k_2\\x_5=k_3\end{cases}$, $k_1\ k_2\ k_3$ 为任意常数

则通解为 $\begin{cases}x_1=-16+k_1+k_2+5k_3\\x_2=23-2k_1-2k_2-6k_3\\x_3=k_1\\x_4=k_2\\x_5=k_3\end{cases}$

2). 增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

得增广矩阵的秩与系数矩阵的秩不相同，所以无解

3). 增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

得增广矩阵的秩与系数矩阵的秩均为 3，所以方程组有唯一解.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = 1 \\ -7x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7} \\ x_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

4. 可以将 A 先通过初等行变换变为 E，即 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$. 再将这些初等矩阵求逆，且在上式两端同时乘这些逆矩阵，即 $A = P_1^{-1} \cdots P_{s-1}^{-1} P_s^{-1} E$ 便满足题干的要求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

上述过程即 $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} A$

所以 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

5. 1) $\begin{pmatrix}8&-4&1&0\\-5&3&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&0\\-5&3&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{5}{8}&1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{5}{8}&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}&1\\0&1&\frac{5}{4}&2\end{pmatrix}$ 所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&1\\\frac{5}{4}&2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&3&3&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-5&-2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&0&-5&-5&1&3\\0&1&0&-1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&3&0&-2\\0&0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&0&-1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

所以 $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\-1&0&1\\1&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

3) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 3 & -6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 所以 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. 由 $AX = 2X + A$，得 $(A-2E)X = A$

而 $A-2E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是可逆的，所以 $X = (A-2E)^{-1}A$

设 $A-2E=B$. 要求 $B^{-1}A$ 相当于对 $(B \vdots A)$ 作初等行变换

将左边化为单位矩阵E后，右边即为 $B^{-1}A$，即 $(E \vdots B^{-1}A)$

7. 由 $A^2-AB=E$，有 $A(A-B)=E$ 所以 A 可逆，且 $A^{-1}=A-B$.

则 $B=A-A^{-1}$. 又有 $BA=(A-A^{-1})A=A^2-E=AB$

所以 $AB-BA+A=A$，则 $r(AB-BA+A)=r(A)=n$.

8. $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & -1 & 10-\lambda & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & 0 & -3(\lambda-3) & \lambda-3 \end{pmatrix}$$ 所以当 $\lambda=3$ 时，秩最小

9. $$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda-3 & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & \frac{\lambda}{2}(5-\lambda)+\lambda-3 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & \frac{\lambda}{2}(5-\lambda)+\lambda-3 & 2-2\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & \frac{\lambda}{2}(5-\lambda)+\lambda-3-2+2\lambda & 0 & 3\lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & (-\lambda+1)(\lambda-10) & 0 & 6\lambda-6 \end{pmatrix}$$

所以当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，方程组有唯一解

当 $\lambda=10$ 时，方程组无解

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解

通解为 $\begin{cases} x_1=1-2k_1+2k_2 \\ x_2=k_1 \\ x_3=k_2 \end{cases}$ (k_1,k_2 为任意常数

10. $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ 所以对于每个线性方程组均有唯一解.

只需对此矩阵作初等行变换将左边化为单位矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & -24 & 40 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

所以解分别为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

11. 1) D : $AP_1 = B$, $P_2 B = E$ 所以 $A = P_2^{-1} P_1^{-1} E = P_2 P_1^{-1}$ (行变换左乘, 列变换右乘)

2) 举例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B

3) D (PPT 3-3)

4) 正确 原因: 秩为m, 所以A行满秩矩阵, 所以A经过初等变换

必可化为形如 $\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ & & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$ 的矩阵.

5). $A_{(m\times n)}X=0$，且 $m<n$，~~齐~~则只用考虑系数矩阵的秩，必有非零解）

附加赛：

1. 1) 由题意可知A和B的秩相等，~~分别~~对A、B作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a-2&0\end{pmatrix}$$ 所以 $a=2$

2) $AP=B$ 相当于 $A(P_1\ P_2\ P_3)=(B_1\ B_2\ B_3)$

所以可以把它变为求解三个线性方程组的解

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&3&-6&-3&-3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}P_{11}+2P_{21}+2P_{31}=1\\P_{21}-2P_{31}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_{11}=3-6k_1\\P_{21}=-1+2k_1\\P_{31}=k_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_{12}+2P_{22}+2P_{32}=2\\P_{22}-2P_{32}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_{12}=4-6k_2\\P_{22}=-1+2k_2\\P_{32}=k_2\end{cases}$$

所以 $P=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$

$(k_2\neq k_3)$

$$\begin{cases}P_{13}+2P_{23}+2P_{33}=2\\P_{23}-2P_{32}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_{13}=4-6k_3\\P_{23}=-1+2k_3\\P_{33}=k_3\end{cases}$$

2. 增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$

方程 $AX=B$ 若有唯一解，系数矩阵必为满秩矩阵，所以 $a-1\neq0$ 并且要求 $a+2\neq0$，否则会出现矛盾，所以当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时方程有唯一解；

当 $a=1$ 时，$AX=B$ 有无穷解；

当 $a=-2$ 时，$AX=B$ 无解。

3. 证明：

必要性：设三条直线交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \\ cx+2ay=-3b \end{cases}$$

有唯一解，故系数矩阵与增广矩阵的秩均为2，

于是 $\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=0$ 而 $\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 2(a+b+c) & -3(a+b+c) \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & \overset{0}{\cancel{2(a+b+c)}} & 0 \\ b & 2c-2b & -3a+3b \\ c & 2a-2c & -3b+3c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\left[6(c-b)^2-6(a-c)(b-a)\right]$$

而 $6(c-b)^2-6(a-c)(b-a) = 6a^2+6b^2+6c^2-6ab-6bc-6ac = 3\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

上式不等于0，所以 $a+b+c=0$

充分性：由 $a+b+c=0$，可知 $\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=0$ 所以 $r<3$

又由于 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2ac-2b^2 = 2(ac-b^2) = -2\left[a(a+b)+b^2\right] = -2\left[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2\right] \neq 0$

所以 $\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$ 的秩为2，且 $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$ 秩也为2，故方程组有唯一解

即三条直线交于一点，