

离散数学



西北工业大学

2022年5月13日 星期五

代数系统

由于数学和其他科学的发展，人们对若干不是数的事物，用类似普通计算的方法进行相似的计算。如矩阵、向量等。研究代数系统的学科称为“近世代数”或“抽象代数”。

代数主要研究的是运算规则。一门代数，其实都是从某种具体的运算体系中抽象出一些基本规则，建立一个公理体系，然后在此基础上进行研究。一个集合再加上一套运算规则，就构成一个代数结构。

代数系统内容



Lect 11 代数系统

1

代数系统与子代数

2

运算性质与特殊元

3

同态与同构

11.1 本章学习要求



代数运算

- 称自然数集合 N 上的加法“+”为运算，这是因为给定两个自然数 a, b ，由加法“+”，可以得到唯一的自然数 $c = a + b$ 。
- 加法“+”是映射吗？
- N 上的加法运算“+”本质上是一个 $N \times N \rightarrow N$ 的映射

定义11.2.1: 设 A, B, C 是非空集合，从 $A \times B$ 到 C 的一个映射（或函数） $\circ : A \times B \rightarrow C$ 称为一个 $A \times B$ 到 C 的二元代数运算，简称**二元运算**。

代数运算

一个二元运算就是一个特殊的映射，该映射能够对 $a \in A$ 和 $b \in B$ 进行运算，得到 C 中的一个元 c ，即 $\circ(a, b) = c$

中缀方法表示为

$$a \circ b = c$$

例11.2.1

判别下面的映射或表是否是二元运算：

(1) 设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\text{奇}, \text{偶}\}$, 定义映射 $*$:
 $A \times B \rightarrow C$, 其中

$$* (0, 1) = \text{奇}, \quad * (0, 2) = \text{偶},$$

$$* (1, 1) = \text{偶}, \quad * (1, 2) = \text{奇}.$$

分析 “ $*$ ” 是一个 $A \times B$ 到 C 的映射, 因此, 按定义11.2.1, 则 “ $*$ ” 是一个 $A \times B$ 到 C 的运算。

例11.2.1 (续)

(2) 一架自动售货机，能接受五角和一元硬币，而所对应的商品是纯净水、矿泉水、橘子水，当人们投入上述硬币中的任何两枚时，自动售货机供应出相应的商品(右表)。

表		
*	五角	一元
五角	纯净水	矿泉水
一元	矿泉水	橘子水

分析： 设集合 $A = \{\text{五角}, \text{一元}\}$ ，集合 $C = \{\text{纯净水}, \text{矿泉水}, \text{橘子水}\}$ ，则表11.2.1实质上是 $A \times A \rightarrow C$ 的映射，也就是 $A \times A$ 到 C 的一个运算“*”。

解 (1)、(2)中定义的映射是二元运算。

运算表

- 当集合A和B有限时，一个 $A \times B$ 到C的代数运算，可以借用一个表，称为**运算表（乘法表）**来说明。
- 设“*”是 $A \times B \rightarrow C$ 的运算， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，则运算“*”可用下表说明。

运算表

*	b_1	b_2	...	b_m
a_1	$a_1 * b_1$	$a_1 * b_2$...	$a_1 * b_m$
a_2	$a_2 * b_1$	$a_2 * b_2$...	$a_2 * b_m$
...
a_n	$a_n * b_1$	$a_n * b_2$...	$a_n * b_m$

定义11.2.2

设 A_1, A_2, \dots, A_n, A 是非空集合, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 A 的一个映射(或函数) $*$: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A$ 称为一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 A 的 n 元代数运算, 简称 n 元运算。当 $n = 1$ 时, 称为一元运算。

代数运算：封闭性

定义11.2.3 如果“*”是 $A \times A$ 到 A 的二元运算，则称运算“*”对集合 A 是**封闭**的，或者称“*”是 **A 上的二元运算**。

定义11.2.4：设“*”是一个 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 到 A 的 n 元代数运算，如果 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ ，则称代数运算“*”对集合 A 是**封闭**的，或者称是 **A 上的 n 元代数运算**。

说明

一般通常用大写的英文字母表示集合，用符号“+”、“-”、“*”、“/”、“ \cap ”、“ \cup ”、“ \wedge ”、“ \vee ”、“ \neg ”、“★”、“☆”、“ \circ ”、“ \oplus ”、“+”、“ \times ”、“ \div ”等抽象的符号来表示一个抽象的运算。

定义11.2.5

设 A 是非空集合， $*_1, *_2, \dots, *_m$ 分别是定义在 A 上 k_1, k_2, \dots, k_m 元封闭运算， k_i 是正整数， $i = 1, 2, \dots, m$ 。称集合 A 和 $*_1, *_2, \dots, *_m$ 所组成的系统称为**代数系统**，简称**代数**，记为 $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 。

当 A 是有限集合时，该代数系统称为**有限代数系统**，否则称为**无限代数系统**。

注意：判断集合 A 和其上的代数运算是否是代数系统，关键是判断两点：一是集合 **A 非空**，二是这些运算关于 A 是否满足**封闭性**。

例子

(1) R 上的“+”、“ \times ”运算；

解：构成一个代数系统 $\langle R, +, \times \rangle$ ；

(2) $p(S)$ 上的“ \cap ”、“ \cup ”、“ $-$ ”运算；

解：构成代数系统 $\langle p(S), \cap, \cup, - \rangle$ ，称**集合代数**；

(3) 含有 n 个命题变元的命题集合 A 与 A 上的“ \wedge ”、“ \vee ”、“ \neg ”运算；

解：构成代数系统 $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ ，称之为**命题代数**。

同类型代数系统

定义11.2.6 设 $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_{\mathbf{m}} \rangle$ 和 $\langle B, o_1, o_2, \dots, o_{\mathbf{m}} \rangle$ 是两个代数系统，若“ o_i ”和“ $*_i$ ”都是 k_i 元运算， $i = 1, 2, \dots, m$ ，则称这两个代数同类型。

如：代数系统 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ ， $\langle \mathbf{Z}, \times \rangle$ ， $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ ， $\langle p(S), \cap \rangle$ ， $\langle p(S), \cup \rangle$ 都是同类型的代数系统。

代数系统 $\langle \mathbf{I}, +, \times \rangle$ 、 $\langle \mathbf{R}, +, \times \rangle$ 、 $\langle p(S), \cap, \cup \rangle$ 都是同类型的代数系统。

子代数

定义11.2.7 设 $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 是代数系统，如果：

(1) $B \subseteq A$ 并且 $B \neq \emptyset$;

(2) $*_1, *_2, \dots, *_m$ 都是 B 上的封闭运算。

则 $\langle B, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 也是一个代数系统，称之为 $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 的**子代数系统**，简称**子代数**。又若 $B \subset A$ ，则称 $\langle B, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 是 $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 的**真子代数**。

子代数

子代数是抽象代数学中一个非常重要的概念，通过研究子代数的结构和性质，可以得到原代数系统的某些重要性质。

如在群论中，通过研究子群可得群的某些性质。

注意：在后面章节中，将会学习半群、群、格、布尔代数等典型的代数系统。将子代数的概念应用到这些典型的代数系统，就会得到子半群、子群、子格、子布尔代数。因此，若没有必要，后面不再赘述某些典型代数系统中子代数的定义。

例11.2.4

在代数系统 $\langle Z, + \rangle$ 中, 令

$$Q = \{5z \mid z \in Z\},$$

证明 $\langle Q, + \rangle$ 是 $\langle Z, + \rangle$ 的子代数。

分析 根据定义, 只需证明两点:

(1) Q 是非空子集; (2) “+”对集合 Q 封闭。

显然, 集合 Q 非空。对任意的 $5z_1, 5z_2 \in Q$, 有

$$5z_1 + 5z_2 = 5(z_1 + z_2) \in Q,$$

因此 “+” 对集合 Q 封闭。

证明 略。

11.3.1 二元运算律

例11.3.1 设“+”是定义在自然数集合 N 上的普通加法运算，试回忆 N 上的加法运算“+”满足哪些运算性质？

分析 对 $\forall a, b, c \in N$ ，有

$(a + b) + c = a + (b + c)$ ，即**结合律**成立；

$a + b = b + a$ ，即**交换律**成立；

$\forall a, x, y \in N$ ，如果 $a + x = a + y$ ，则 $x = y$ ，即**消去律**成立；

$0 \in N$ ， $0 + 0 = 0$ ，即0是幂等元，但其他自然数不是幂等元，即不满足**幂等律**。

结合律与交换律

定义11.3.1 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统，如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，都有

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

则称“ $*$ ”在 A 上是**可结合的**，或称满足**结合律**。

定义11.3.2 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统，如果对任意的 $a, b \in A$ ，都有

$$a * b = b * a$$

则称“ $*$ ”在 A 上是**可交换的**，或称满足**交换律**。

消去律

定义11.3.3 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统，元素 $a \in A$ ，

(1) 对任意 $x, y \in A$ ，都有

如果 $a * x = a * y$ ，那么 $x = y$ ，

则称 a 在 A 中关于“ $*$ ”是**左可消去元**；

(2) 对任意 $x, y \in A$ ，都有

如果 $x * a = y * a$ ，那么 $x = y$ ，

则称 a 在 A 中关于“ $*$ ”是**右可消去元**；

消去律（续）

(3) 如果 a 既是 A 左可消去元又是右可消去元，则称 a 是 A 的**可消去元**；

(4) 若 A 中所有元素都是可消去元，则称“ $*$ ”在 A 上可消去，或称“ $*$ ”满足**消去律**。

幂等律

定义11.3.4 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统，若元素 $a \in A$ ，满足

$$a * a = a,$$

则称 a 是 A 中关于“ $*$ ”的一个**幂等元**，简称 a 为**幂等元**。若 A 中的每一个元素都是幂等元，则称“ $*$ ”在 A 中是**幂等的**，或称“ $*$ ”满足**幂等律**。

幂等律

设“*”是集合A上的二元运算， $a \in A$ ，则 $a*a \in A$ ， $a*a*a \in A$ ， \dots ，由此，可以归纳定义a的正整数**幂方**：

$$a^1 = a, a^2 = a*a, a^3 = a^2*a, \dots a^n = a^{n-1}*a, \dots$$

对任意的正整数n, m, 有以下等式：

$$a^n * a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

分配律

定义11.3.5：设“*”、“ \circ ”是集合S上的二元运算， $\langle A, *, \circ \rangle$ 是一个代数系统，对 $\forall a, b, c \in S$ ，有

$$(1) \quad a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

则称运算“ \circ ”对“*”在S上满足**左分配律**（或第一分配律）；

$$(2) \quad (b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a),$$

则称运算“ \circ ”对“*”在S上满足**右分配律**（或第二分配律）；

(3) 如果“ \circ ”对“*”既满足左分配律又满足右分配律，则称“ \circ ”对“*”在S上满足**分配律**。

吸收律

定义11.3.6 设“*”、“ \circ ”是集合A上的二元运算， $\langle A, *, \circ \rangle$ 是一个代数系统，如果对任意的 $x, y \in A$ ，都有

$$x * (x \circ y) = x,$$

$$x \circ (x * y) = x,$$

则称“*”和“ \circ ”满足**吸收律**

特殊元

在代数系统中，有些元素有特殊性质，叫**特殊元**。

例如在代数系统 $\langle N, + \rangle$ ，其中 N 是自然数，“+”是普通加法， $0 \in N$ ，并且对任意的自然数 $x \in N$ ，有

$$x + 0 = x + 0 = x$$

幺元（单位元）

定义11.3.7 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统,

(1) 若存在 $e \in A$, 对任意 $a \in A$, 都有

$$a * e = e * a = a,$$

则称 e 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**幺元（单位元）**

(2) 若存在 $e_l \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有

$$e_l * a = a,$$

则称 e_l 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**左幺元（左单位元）**

(3) 若存在 $e_r \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有

$$a * e_r = a,$$

称 e_r 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**右幺元（右单位元）**

例11.3.5

下列代数系统是否存在幺元(左幺元或右幺元)，如果存在计算之。

- (1) $\langle R, + \rangle$, R 是实数集, “+”是加法运算;
- (2) $\langle R^+, + \rangle$, R^+ 是正实数集, “+”是加法运算;
- (3) $\langle P(A \times A), \circ \rangle$, 其中 $P(A \times A)$ 表示集合 A 上的所有二元关系集合, 运算“ \circ ”表示关系的复合;

例11.3.5（续）

(4) $\langle A, *, o, \wedge \rangle$, 其中 $A = \{a, b, c\}$, 二元运算 “ $*$ ”, “ o ”, “ \wedge ” 如表所示

表 12.3.2

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	b	c

表 12.3.3

o	a	b	c
a	b	a	a
b	b	b	b
c	a	c	c

表 12.3.4

\wedge	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	c

结论

(1) 计算么元可根据定义直接进行，即**首先**假设么元存在，并根据定义计算，**然后**进行验证。

(2) 可以直接从运算表中看出运算是否有左么元或右么元。具体方法是：

① 如果元素 x 所在的行上的元素与行表头完全相同，则 x 是一个左么元；

② 如果元素 x 所在的列上的元素与列表头完全相同，则 x 是一个右么元；

③同时满足①和②。

零元

定义11.3.8 设 $\langle A, * \rangle$ 是一个二元代数系统,

(1) 若存在 $\theta \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有

$$a * \theta = \theta * a = \theta,$$

则称 θ 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**零元**;

(2) 若存在 $\theta_l \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有

$$\theta_l * a = \theta_l,$$

则称 θ_l 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**左零元**;

(3) 若存在 $\theta_r \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有

$$a * \theta_r = \theta_r,$$

则称 θ_r 是 A 中关于运算“ $*$ ”的一个**右零元**。

逆元

定义11.3.9 设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统, e 是么元,
 $a \in A$, 若存在一个元素 $b \in A$,

(1) 使得: $a * b = b * a = e$,

则称 a 可逆, 并称 b 是 a 的一个**逆元**, 记为 a^{-1} ;

(2) 使得: $b * a = e$,

则称 a 左可逆, 并称 b 是 a 的一个**左逆元**, 记为 a_l^{-1} ;

(3) 使得: $a * b = e$,

则称 a 右可逆, 并称 b 是 a 的一个**右逆元**, 记为 a_r^{-1} 。

定理11.3.1

设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, “ $*$ ” 满足结合律, $a \in A$, a 可逆, 则 a 是可消去元。

证明 记幺元为 e , a 的逆元为 a^{-1} , 设 x 、 y 是 A 中的任意元素, 假设

$$a * x = a * y。$$

由 $a * x = a * y$, 有

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y),$$

又结合律成立, 所以有

$$(a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y,$$

即 $e * x = e * y$, 可得

$$x = y$$

定理11.3.2

设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统,

- (1) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在幺元, 则幺元唯一;
- (2) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在幺元, 则该幺元一定是左、右幺元;
- (3) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在左、右幺元, 则左、右幺元相等, 即是幺元。

定理11.3.3

设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统,

- (1) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在零元, 则零元唯一;
- (2) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在零元, 则该零元一定是左、右零元;
- (3) 如果 $\langle A, * \rangle$ 存在左、右零元, 且该左、右零元相等, 则是零元。

分析 该定理的证明方法与定理11.3.2证明相似。

证明 略。

定理11.3.4

设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统，“ $*$ ”满足结合律且设 e 是么元，则对任意的 $a \in A$,

- (1) 如果 a 存在逆元，则逆元唯一；
- (2) 如果 a 存在逆元，则该逆元一定是左、右逆元；
- (3) 如果 a 存在左、右逆元，且该左、右逆元相等，则是逆元。

分析 该定理的证明方法与定理11.3.2证明相似

推论11.3.1

设 $\langle A, * \rangle$ 是二元代数系统, “ $*$ ” 满足结合律, $a, b \in A$,

(1) 如果 a, b 分别有逆元 a^{-1}, b^{-1} , 则 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$;

(2) 如果 a 是左(右)可逆的元素, 则 a 是左(右)可消去的元素;

(3) 如果 a 是可逆的元素, 则 a 是可消去的元素。

例11.3.7

设 $G = \{f_{a,b}(x) = ax+b \mid a \neq 0, a, b \in R\}$ ，其中 R 是实数，“ \circ ”是 G 上关于函数的复合运算。

- (1) 验证 $\langle G, \circ \rangle$ 是代数系统；
- (2) 如有幺元计算之；
- (3) 如有零元计算之；
- (4) 如有幂等元，计算出这些幂等元；
- (5) 说明 G 中的那些元有逆元，并计算这些元的逆元。

例11.3.7（续）：封闭性

分析 (1) 要说明 $\langle G, \circ \rangle$ 是代数系统，只需要说明“ \circ ”对 G 封闭，即说明对任意 $f_{a, b}, f_{c, d} \in G$,

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} \in G,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (f_{a, b} \circ f_{c, d})(x) &= f_{c, d}(f_{a, b}(x)) \\ &= f_{c, d}(ax+b) = c(ax+b)+d \\ &= cax+bc+d = f_{ca, bc+d}(x), \text{ 即} \end{aligned}$$

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} = f_{ca, bc+d},$$

显然 $ca \neq 0$, 故

$$f_{ca, bc+d} \in G,$$

所以“ \circ ”对 G 是封闭的，即 $\langle G, \circ \rangle$ 是代数系统。

例11.3.7 (续) : 么元

(2) 不妨假设么元是 $f_{c,d} \in G$, 则对 $\forall f_{a,b} \in G$, 有

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a,b}, \text{ 又}$$

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ca, bc+d}, \text{ 则}$$

$$f_{a,b} = f_{ca, bc+d},$$

因此, $\forall x \in R$, 有

$$f_{a,b}(x) = ax+b = f_{ca, bc+d}(x) = cax+bc+d,$$

特别取 $x = 0, x = 1$, 可得

$$bc+d = b, \quad ca = a.$$

由于 $f_{a,b}$ 是 G 中的任意元, 取 $a = 1, b = 2$, 可得

$$c = 1, \quad d = 0.$$

例11.3.7（续）：幺元

上面的分析说明，如果 $\langle G, \circ \rangle$ 有幺元，则此幺元必是 $f_{1,0}$ ，所以需进一步验证 $f_{1,0}$ 就是幺元。

即对任意的 $f_{a,b} \in G$ ，验证等式

$$f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$$

显然此等式成立，所以 $f_{1,0}$ 是幺元。

例11.3.7 (续) : 零元

(3) 按同样的思路, 不妨假设零元是 $f_{c, d} \in G$, 由零元的定义, $\forall f_{a, b} \in G$, 有

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} = f_{c, d},$$

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} (x) = cax + bc + d = f_{c, d} (x) = cx + d,$$

取 $x = 0$, 有 $bc = 0$,

又 $f_{a, b}$ 是任意的, 取 $b = 1$, 可得

$$c = 0,$$

又 $f_{c, d} \in G$, 则 $c \neq 0$, 矛盾, 故 $f_{c, d}$ 是零元不成立, 故代数系统 $\langle G, \circ \rangle$ 没有零元。

例11.3.7（续）：幂等元

(4) 不妨假设幂等元是 $f_{c, d} \in G$, 有

$$f_{c, d} \circ f_{c, d} = f_{c, d},$$

$$f_{c, d} \circ f_{c, d}(x) = c^2x + cd + d = f_{c, d}(x) = cx + d,$$

取 $x = 0$, 有 $cd = 0$, 又 $c \neq 0$, 则

$$d = 0,$$

取 $x = 1$, 有 $c^2 + cd + d = c + d$, 又 $d = 0$, $c \neq 0$, 则

$$c = 1. \text{ 因此,}$$

$$f_{c, d} = f_{1, 0}, \text{ 又}$$

$f_{1, 0} \circ f_{1, 0} = f_{1, 0}$, 所以 $f_{1, 0}$ 是唯一幂等元。

例11.3.7 (续) : 逆元

(5) 对 $\forall f_{a, b} \in G$, 不妨假设它的逆元为 $f_{c, d}$, 当然 $f_{c, d} \in G$, 有

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} = f_{1, 0},$$

$$f_{a, b} \circ f_{c, d} (x) = cax + bc + d = f_{1, 0}(x) = x,$$

特别取 $x = 0, x = 1$, 可得

$$bc + d = 0, \quad ca = 1,$$

因为 $a \neq 0$, 显然 $c = 1/a, d = -b/a$, 故

$$f_{c, d} = f_{1/a, -b/a},$$

例11.3.7（续）：逆元

同理，上面分析说明，如果 $f_{a, b}$ 有逆元，则此逆元是 $f_{1/a, -b/a}$ ，因此还需验证 $f_{1/a, -b/a}$ 是 $f_{a, b}$ 逆元，即验证等式

$$f_{a, b} \circ f_{1/a, -b/a} = f_{1/a, -b/a} \circ f_{a, b} = f_{1, 0},$$

显然此等式成立，所以 $f_{1/a, -b/a}$ 是 $f_{a, b}$ 的逆元。

由 $f_{a, b}$ 的任意性，可得 G 中的任何一个元都有逆元。

结论

- (1) $\langle G, \circ \rangle$ 是代数系统;
- (2) 幺元是 $f_{1, 0}$;
- (3) $\langle G, \circ \rangle$ 中没有零元;
- (4) $\langle G, \circ \rangle$ 中唯一幂等元是 $f_{1, 0}$;

- (5) \langle 计算幺元、零元、幂等元、逆元等特殊元时, 首先可以假设这些元存在, 然后根据定义直接得到方程, 解这个方程就可以计算出这些元, 如果方程无解, 则特殊元不存在, 如果方程存在解, 则根据特殊元的定义还需要进一步验证所求解是否是对应的特殊元。

11.4 同态与同构

在现实社会中，存在着很多代数系统，但仔细分析这些众多的代数系统发现，有些代数系统，他们之间表面上似乎不相同，但他们实际上“相同”。如有两个代数系统 $\langle \{\text{奇}, \text{偶}\}, * \rangle$ 和 $\langle \{\text{正}, \text{负}\}, \circ \rangle$ ，其运算“*”和“ \circ ”分别定义如下表

表 12.4.1

*	奇	偶
奇	奇	偶
偶	偶	偶

表 12.4.2

\circ	正	负
正	正	负
负	负	负

定义11.4.1

设 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 为两个二元代数系统， ψ 是A到B的映射。对任意 $x, y \in A$ ，都有

$$\psi(x * y) = \psi(x) \circ \psi(y), \quad (1)$$

则称 ψ 是从 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的**同态映射**，称 $\psi(A)$ 为**同态象**，其中 $\psi(A) = \{\psi(x) \mid x \in A\}$ 。

如果存在一个从 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的同态映射，则称 $\langle A, * \rangle$ 与 $\langle B, \circ \rangle$ **同态**，记为 $\langle A, * \rangle \sim \langle B, \circ \rangle$ 。

当 $A = B$ 时，称其同态为**自同态**。

定义11.4.1 (续)

当同态映射 ψ 分别是单射、满射、双射时，分别称 ψ 是**单一同态映射**、**满同态映射**、**同构映射**。

如果存在一个从 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的同构映射（单一同态映射、满同态映射），则称代数系统 $\langle A, * \rangle$ 与 $\langle B, \circ \rangle$ **同构**（**单一同态**、**满同态**）。

用 $\langle A, * \rangle \cong \langle B, \circ \rangle$ 表示 $\langle A, * \rangle$ 与 $\langle B, \circ \rangle$ **同构**。

同态与同构

同态与同构是代数系统中一个非常重要的概念，它体现了两个代数系统之间的某种联系，后面章节将会学习半群、群、格、布尔代数等典型的代数系统，那么将同态与同构的概念应用到这些典型的代数系

■**注意**，后面章节中半群、群、格、布尔代数的同态与同态本质上就是把半群、群、格、布尔代数看作一般代数系统的同态与同构，即定义11.4.1。因此，后面不再赘述半群、群、格、布尔代数中同态与同构的定义。

例11.4.1

设代数系统 $\langle Z, + \rangle$ 和 $\langle E, + \rangle$ 中， Z 、 E 分别是整数集和偶数集，“+”是加法，证明 $\langle Z, + \rangle \cong \langle E, + \rangle$ 。

分析 证明两个代数系统同构，关键是找出同构映射。假设 f 是 $\langle Z, + \rangle$ 到 $\langle E, + \rangle$ 的同构映射，根据同构映射的定义，有

$$\forall x, y \in Z, f(x + y) = f(x) + f(y),$$

特别取 $x = 0, y = 0$ ，有

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0), \text{ 可得 } f(0) = 0.$$

例11.4.1 (续)

$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(n-1 + 1) = f(n-1) + f(1),$
可得递推公式如下:

$$f(n) = f(n-1) + f(1),$$

如果 $f(1) > 0$, 则 $f(n)$ 是递增函数,

$$0 = f(0) < f(1) < f(2),$$

而 f 又是 \mathbb{Z} 到 \mathbb{E} 的双射, 因此此时必有

$$f(1) = 2,$$

同理, 如果 $f(1) < 0$, 可得 $f(1) = -2$ 。

根据以上分析可知,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 2n \text{ 或 } f(n) = -2n,$$

例11.4.1 (续)

以上说明, 如果 f 是同构映射, 则

$$f(n) = 2n \text{ 或 } f(n) = -2n,$$

因此需进一步验证 $f(n) = 2n$ 或 $f(n) = -2n$ 是否是同构映射。

证明 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 令 $f(n) = 2n$, 则显然 f 是 \mathbb{Z} 到 E 的双射, 又对 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, 有

■ **结论** 证明两个代数系统的同态与同构关键是构造出同态与同构映射, 构造同态与同构映射没有一个通用的方法, 但一般思路如下: 首先可以假设 f 就是同态或同构映射, 然后利用同态与同构的定义, 导出 f 的一些性质, 并利用这些性质来构造同态与同构映射。

定理11.4.1

设 ψ 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的同态映射, 那么 $\langle \psi(A), \circ \rangle$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的子代数。

分析 需证 $\psi(A)$ 非空, 且运算 “ \circ ” 对 $\psi(A)$ 封闭。

证明 由于 A 非空, 所以显然 $\psi(A)$ 为 B 的非空子集。

对任意 $x, y \in \psi(A)$, 存在 $a, b \in A$, 使得

$$\psi(a) = x, \psi(b) = y, \text{ 有}$$

$$x \circ y = \psi(a) \circ \psi(b) = \psi(a * b),$$

因为 $a * b \in A$, 所以 $\psi(a * b) \in \psi(A)$, 即

$$x \circ y \in \psi(A),$$

故 “ \circ ” 对 $\psi(A)$ 封闭, 得证。

定理11.4.2

设 ψ 是二元代数系统 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态, 则:

- (1) 若 “ $*$ ” 可交换, 则 “ \circ ” 也可交换;
- (2) 若 “ $*$ ” 可结合, 则 “ \circ ” 也可结合;
- (3) 若 e 是 $\langle A, * \rangle$ 的幺元, 则 $\psi(e)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的幺元;
- (4) 若 θ 是 $\langle A, * \rangle$ 的零元, 则 $\psi(\theta)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的零元;

定理11.4.2 (续)

- (5) 若 a 是 $\langle A, * \rangle$ 的幂等元, 则 $\psi(a)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的幂等元;
- (6) 若 x^{-1} 是 x 在 $\langle A, * \rangle$ 中的逆元, 则 $\psi(x^{-1})$ 是 $\psi(x)$ 在 $\langle B, \circ \rangle$ 中的逆元;
- (7) 若 a 是 $\langle A, * \rangle$ 的(左、右)可消去元, 则 $\psi(a)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的(左、右)可消去元。

同构关系

令 $P = \{x \mid x \text{ 是代数系统}\}$, $\cong = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in P, \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 同构}\}$, 则很容易证明 \cong 是 P 上等价关系, 由该等价关系可以得到等价类, 在同一个等价类的两个代数系统同构, 它们在同构的意义下可以看作是相同的代数系统, 具有完成相同的代数性质。称 “ \cong ” 为同构关系。