第七节

一般周期函数的傅里叶级数

- 一、周期为$2l$ 的函数展开成傅里叶级数
- 二、定义在$[-l, l]$和$[0, l]$区间上的函数展开成傅里叶级数

一、周期 $T=2l$ 的函数展开成傅里叶级数

思路：$T=2l$ 　$f(x)$，$x\in[-l,l]$ $\xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t}$ $T=2\pi$ 　$f(\frac{l}{\pi}t)=\varphi(t)$，$t\in[-\pi,\pi]$ 　展开

$$f(x)=\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad\left(t=\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\overset{t=\frac{\pi x}{l}}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\frac{\pi}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

定理11.16 (展开定理)

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数处处收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的连续点时；} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的间断点时，} \end{cases}$$

其中系数 a_n, b_n 为

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

结论 (1) 若以 $2l$ 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上为奇函数，则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \text{(连续点处)}$$

其中 $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2) 若以$2l$为周期的周期函数 $f(x)$ 在$(-l, l)$上为偶函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$ (连续点处)

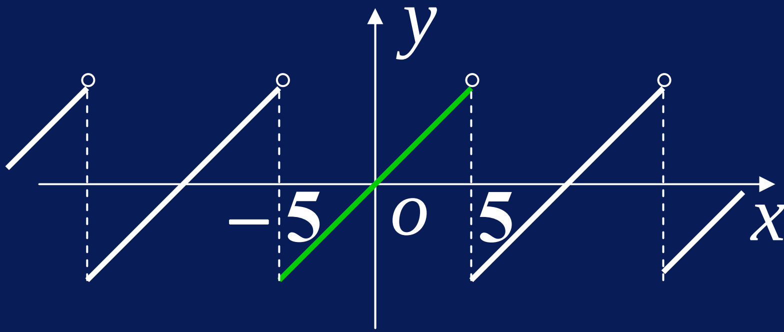
其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

注　傅里叶级数总收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

(在 $f(x)$ 的间断点 x 处)

例1 设 $f(x)$ 的周期 $T=10$，且当 $-5\le x<5$ 时，$f(x)=x$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数 .

解 $l=5$, $f(x)$:奇函数,



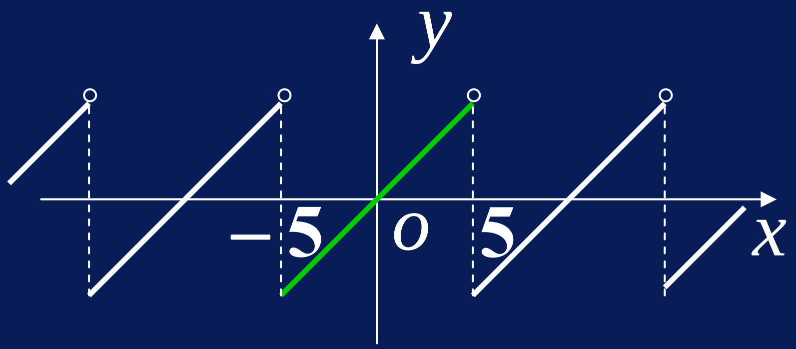
$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{5}-\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n = 0,\ b_n = (-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}$$



因 $f(x)$满足狄利克雷条件， 故有傅里叶展开式：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{5} = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 10k+5, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

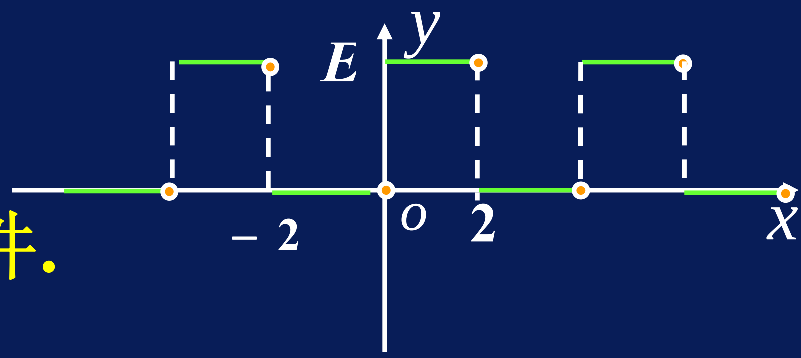
当 $x = 10k+5$时，傅里叶级数收敛到

$$S(10k+5) = \frac{5+(-5)}{2} = 0.$$

例2 设 $f(x)$ 周期 $T=4$，$[-2,2)$ 上表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ E, & 0\le x<2\ (E\ne 0,\text{为常数})\end{cases}$$

试将$f(x)$展成傅里叶级数．



解 1° $f(x)$满足收敛定理条件.

$f(x)$的间断点： $x_m=2m\ \ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

傅里叶级数的和函数：

$$S(x_m)=\frac{f(x_m^-)+f(x_m^+)}{2}=\frac{E}{2}.$$

目 录 上 页 下 页 例 题 继 续

$l = 2$,

当$x \neq x_m$时，$f(x)$连续

$$f(x) = S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$(x \neq 2m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

2° 确定傅里叶系数：a_n, b_n

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ E, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} E\,\mathrm{d}x\right] = E$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} E\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right]$$

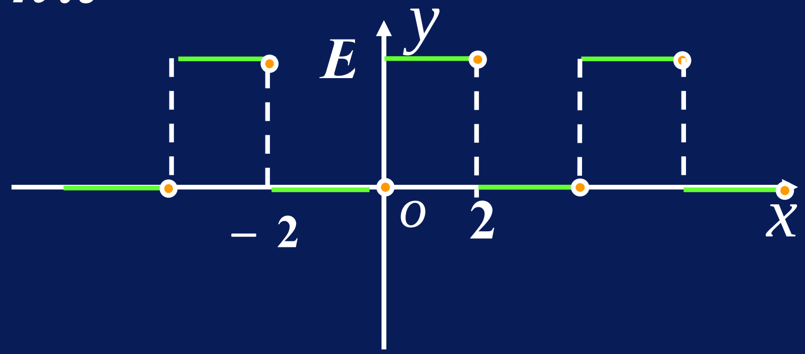
$$= \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{0}^{2} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0 \\ E, & 0 \le x < 2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} E\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 E\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{E}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2,4,\cdots \\ \dfrac{2E}{n\pi}, & n = 1,3,\cdots \end{cases}$$



3° 所求函数的傅里叶展开式为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x$$

$(x \in R,\ \ x \neq 2m,\ \ m = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

$a_0 = E,$

$a_n = 0$

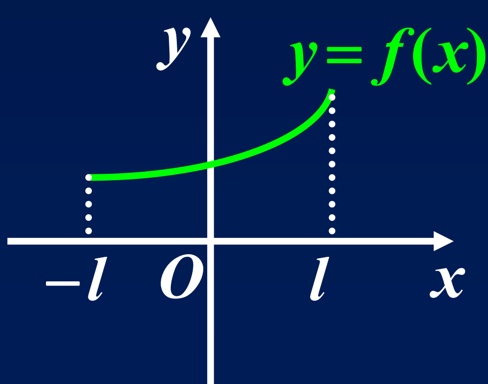
$(n = 1,2,\cdots)$

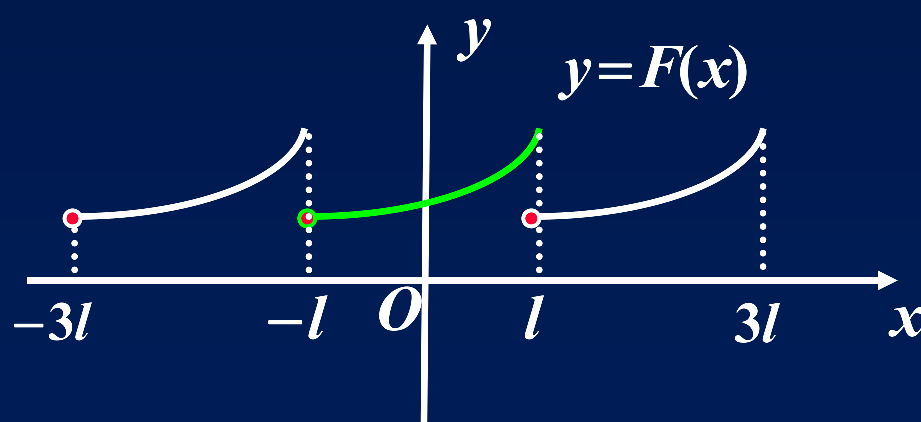
二、定义在 $[-l, l]$和$[0, l]$区间上的函数展成傅里叶级数

1. 将$[-l, l]$上的函数展成傅里叶级数

思想

$$\underset{x\in[-l,l]}{f(x)} \xRightarrow{\text{周期延拓}} \underset{T=2l}{F(x)} \xRightarrow{\text{傅里叶展开}}$$

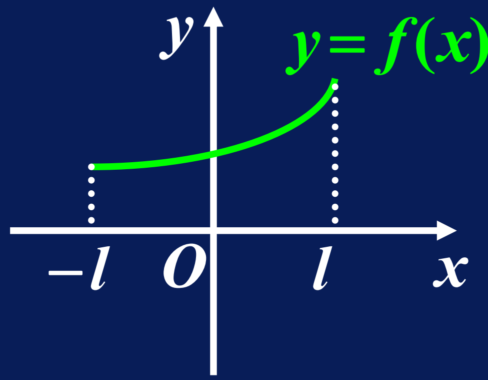




1° 对 $f(x)$ 进行周期延拓：

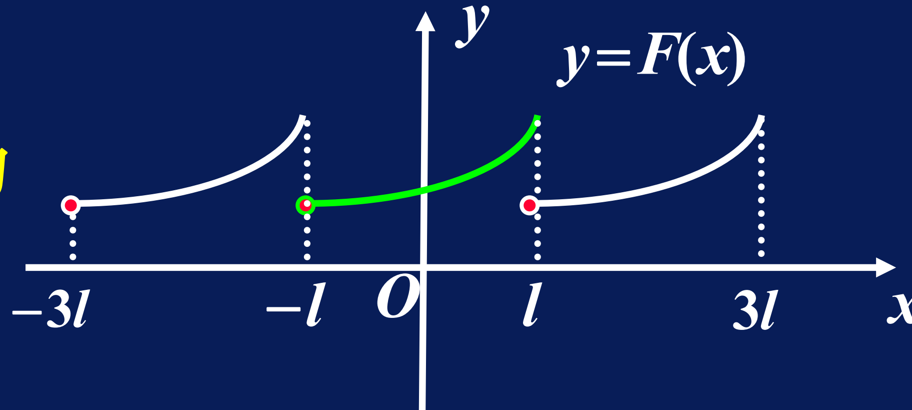
考虑 $y = F(x)$ $(T = 2l)$

满足：$F(x) = f(x),\ x \in (-l, l]$



且 $F(x+2l) = F(x)$

2° 将 $F(x)$ 展开成周期为 $2l$ 的傅里叶级数



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x \in (-\infty, +\infty)$，x 为 $F(x)$ 的连续点)

3° 限制 $x \in [-l, l]$,

$\because \quad F(x) = f(x),\ x \in (-l, l]$

$\therefore$ 当 $x \in (-l, l)$, 且 x 为 $f(x)$ 的连续点时,

$$f(x) = F(x) = S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

当 $x_0 \in (-l, l)$, 且 x_0 为 $f(x)$ 的间断点时,

$$S(x_0) = \frac{F(x_0^-) + F(x_0^+)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

当 $x_0 = \pm l$ 时, $S(x_0) = \dfrac{F(l^-) + F(-l^+)}{2} = \dfrac{f(l^-) + f(-l^+)}{2}$

其中傅里叶系数

$$
\begin{cases}
a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} F(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\
\quad = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \\
\\
b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} F(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 1,2,\cdots) \\
\quad = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.
\end{cases}
$$

例3 将 $f(x)=e^x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数

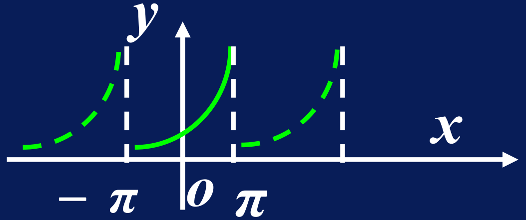
解 (周期延拓 $\Longrightarrow$ 傅里叶展开 $\Longrightarrow$ 限制)

$f(x)$在（$-\pi$，π）上连续,周期延拓后的函数的傅里叶级数在（$-\pi$，π）内收敛到$f(x)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}-e^{-\pi}],$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(n\sin nx+\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi(1+n^2)},$$



目录 上页 下页 例题 继续

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right).$$

傅里叶展式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}]\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

$$(-\pi < x < \pi)$$

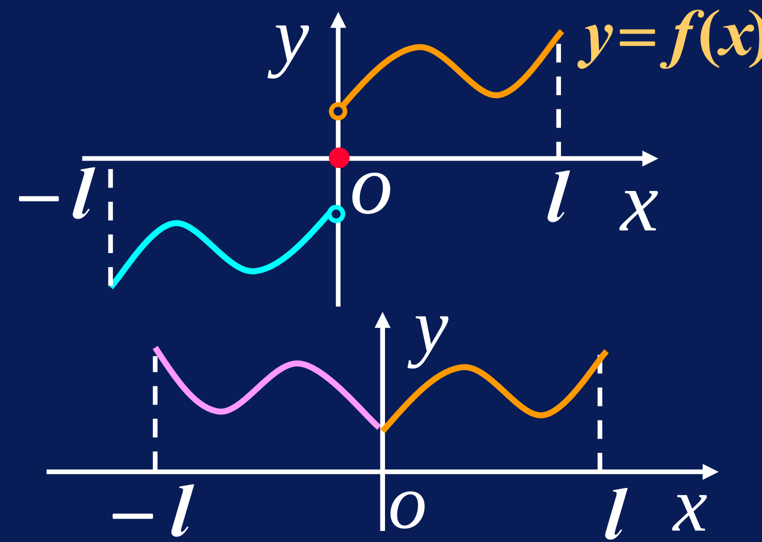
注 在 $x = \pm\pi$ 处, 傅立叶级数收敛到

$$\frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)] = \frac{1}{2}[e^{-\pi} + e^{\pi}].$$

2. 将$[0,l]$上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x)$

$x \in [0, l]$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{奇延拓} \\ \\ \text{偶延拓} \end{cases}$



周期延拓

$\Longrightarrow$ $F(x)$ (展开)

限制

$\Longrightarrow$ $f(x)$展成正弦级数

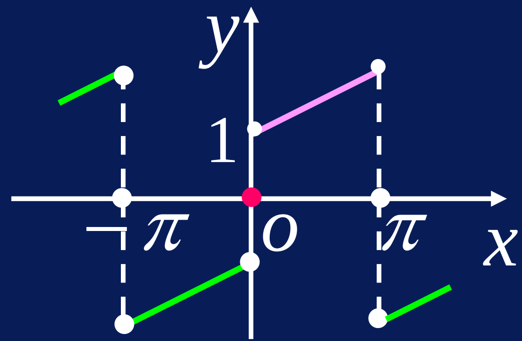
$x \in [0,l]$ (余)

例4 将函数$f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$分别展成正弦级数与余弦级数.

解 (1)展成正弦级数. 将 $f(x)$ 作奇延拓及周期延拓.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi$$



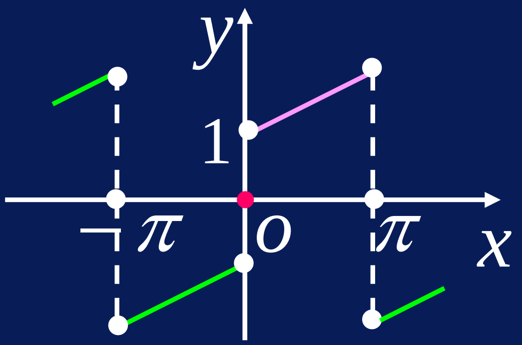
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

故

$$x + 1 = \frac{2}{\pi}\Big[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\Big] \qquad (0 < x < \pi)$$



注 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 .

（与 $f(x) = x + 1$ 的对应值不同）

(2)展成余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓.

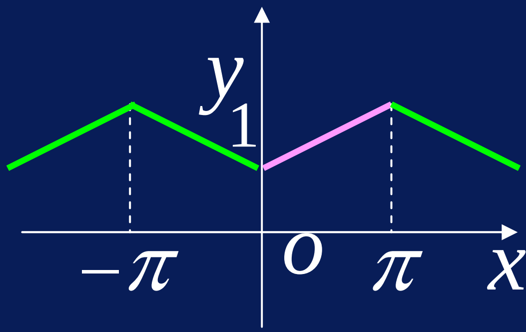
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^\pi = \pi + 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



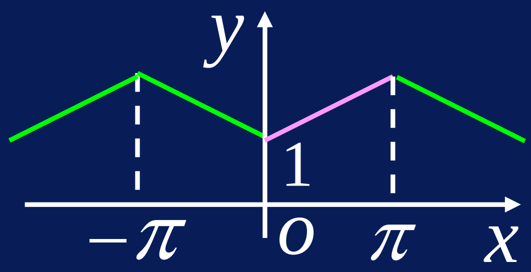
$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$(0\le x\le\pi)$

注 令 $x=0$ 可得

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$



即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

内容小结

1. $f(x)$(周期:$2l$)的傅里叶展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\qquad (x:\text{连续点})$$

$$\text{其中}\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

($f(x)$为奇(偶) 函数时，为正弦 (余弦) 级数)

2. [$-l$, l]或[0, l]上函数的傅里叶展开

延拓 $\Longrightarrow$ 展开 $\Longrightarrow$ 限制

几点注记

关于函数的傅里叶级数展开

1. 注意画图形.

(便于发现奇偶性及间断点,写收敛域)

2. 计算傅里叶系数时, a_0 要单独算;

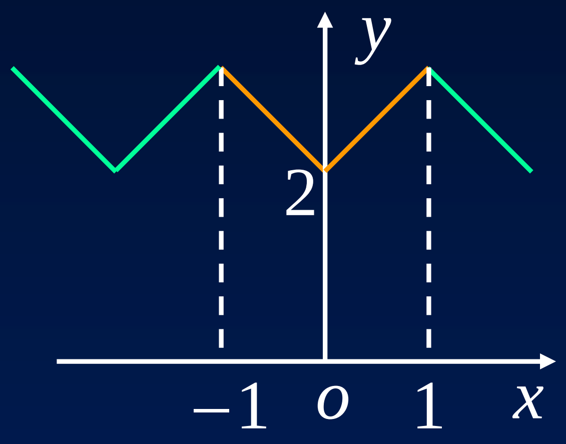
3. $[\,0\,,\,l\,]$ 上函数的傅里叶展式不唯一.

(延拓方式不同级数也不同)

备用题

例1-1 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展成周期为2的傅立叶级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和. (91 考研)

解 $f(x)$为偶函数, $b_n=0$



$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x \qquad x\in[-1,1]$$

注 (1) 令 $x=0$, 得 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例2-1 若 $\varphi(x)$、$\psi(x)$满足狄氏条件， 且 $\varphi(-x)=\psi(x)$,求 $\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数 a_n, b_n,及 a'_n, b'_n 的关系 .

解 (1)先证 $\varphi(x),\psi(x)$周期相同 .

设 $\varphi(x)$周期为 $2l \Rightarrow \varphi(x+2l)=\varphi(x) \quad (*)$

$$\psi(x+2l)=\varphi(-x-2l)\overset{(*)}{=}\varphi(-x)=\psi(x)$$

$\Rightarrow \psi(x)$周期为 $2l$.

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 取基本周期 $[-l, l]$，$\varphi(x)$ 的傅里叶系数：

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=-t}}\ \frac{1}{l}\int_{l}^{-l}\varphi(-t)\cos\frac{n\pi t}{l}(-\mathrm{d}t)$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\psi(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,\mathrm{d}t = a_n'$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=-t}}\ \frac{1}{l}\int_{l}^{-l}\varphi(-t)\left(-\sin\frac{n\pi t}{l}\right)(-\mathrm{d}t)$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\psi(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,\mathrm{d}t = -b_n'$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_n' \\ b_n &= -b_n' \end{aligned}}$$