第九章

第一节

重积分的概念与性质

- 一、 问题的提出
- 二、重积分的概念
- 三、重积分的性质

曲边梯形的面积

由曲线 $y = f(x) \quad (\geq 0)$, x轴, 及直线

$x = a, x = b$ 围成， 求其面积 A .

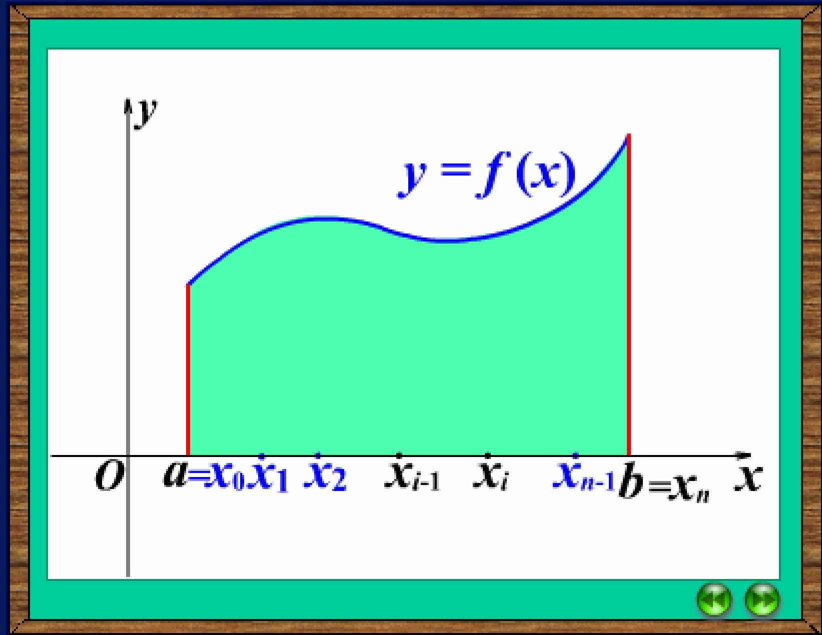
困难 曲边梯形高度变化,

不能使用矩形面积公式.

解决的步骤

1° 分割:

$[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点:



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$，将曲边梯形分成

n 个小曲边梯形;

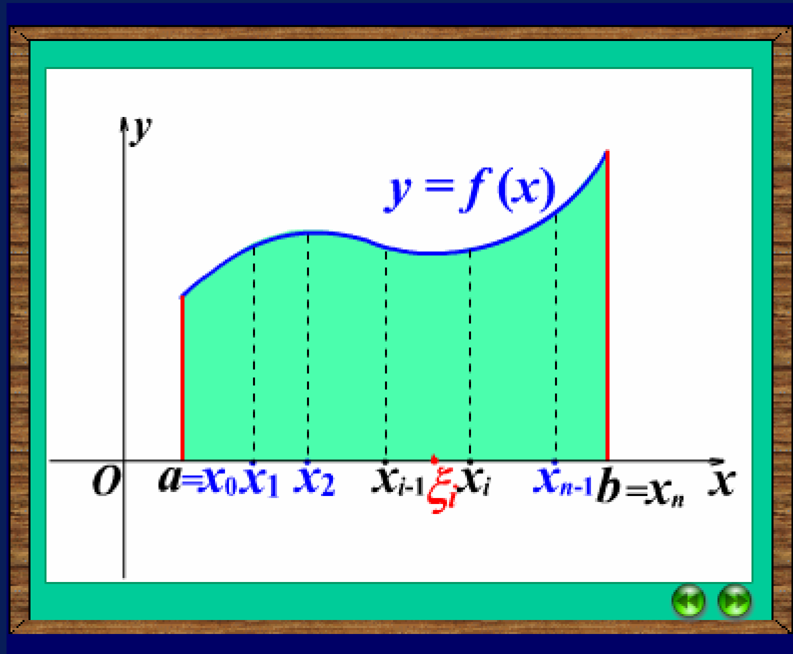
目录 上页 下页 返回 结束

2° 取近似：任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，第i个窄曲边梯形面积

$$\Delta A_i \approx \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}}\underbrace{\Delta x_i}_{\text{底}} \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

3° 求和：

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



4° 取极限：令 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，

则曲边梯形面积

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

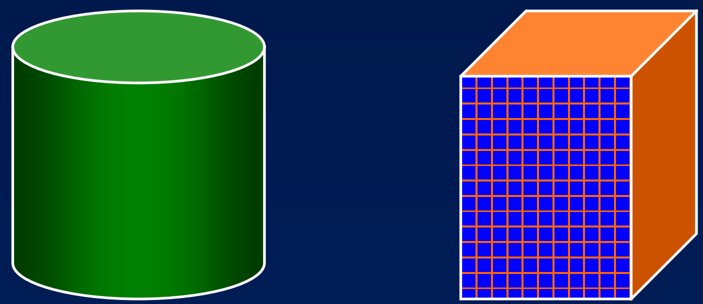
一、问题的提出

1. 曲顶柱体的体积

回顾　平顶柱体体积的计算公式:

柱体体积 = 底面积×高.

特点：平顶.

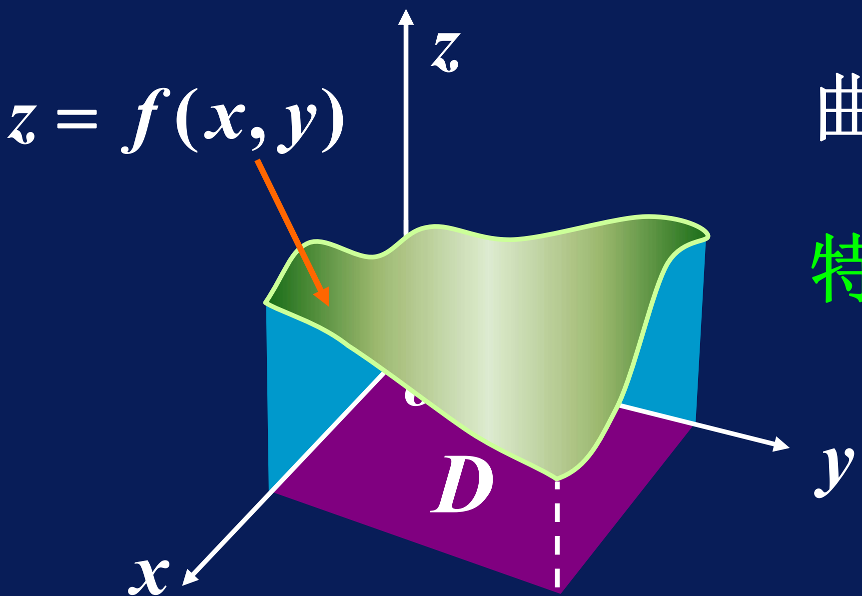


曲顶柱体:

底为 xOy 面上的闭区域 D ,

曲顶为 连续曲面$z = f(x, y) \geq 0$,

侧面为以D的边界为准线, 母线平行于z轴的柱面.

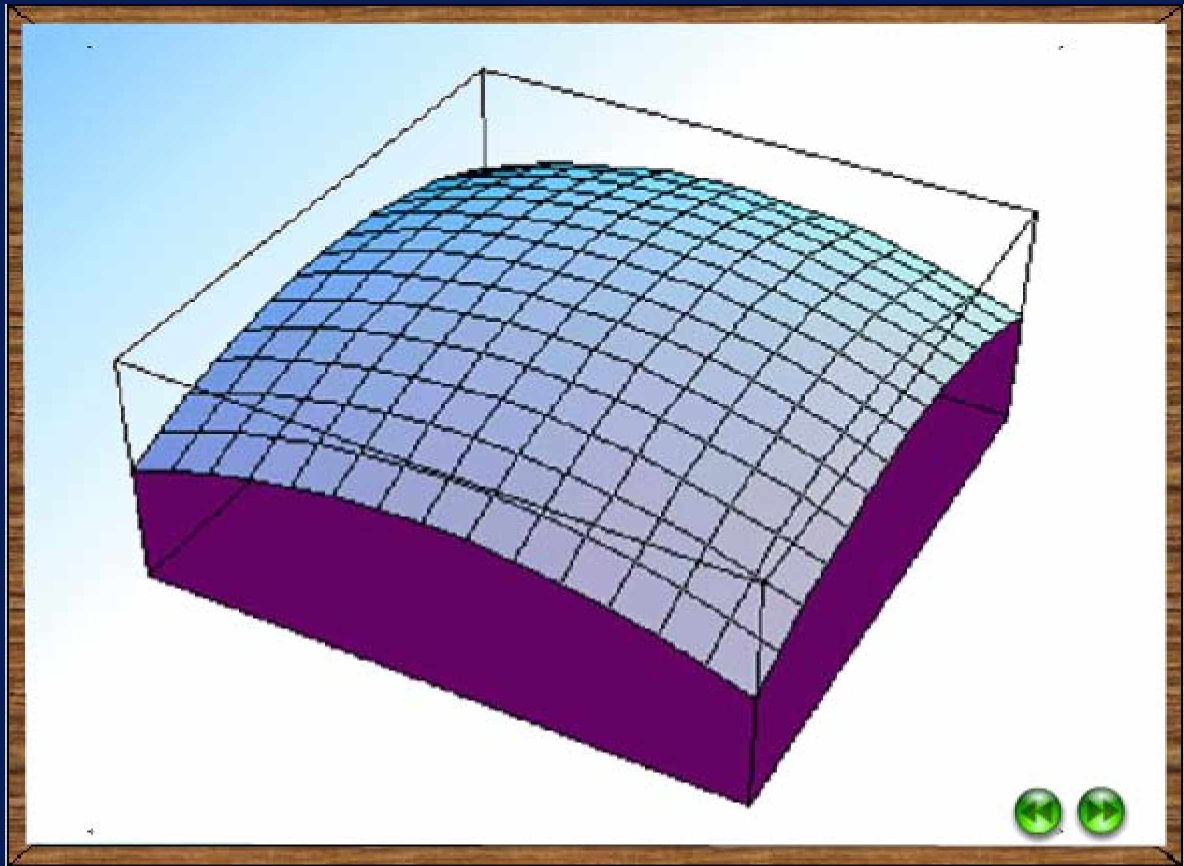


曲顶柱体的体积 = ?

特点: 曲顶 ⟶ 变高

解决方法: 类似于定积分解决问题的思想

“划分，近似，求和，取极限”.



目录 上页 下页 返回 结束

步骤如下：

1° 划分

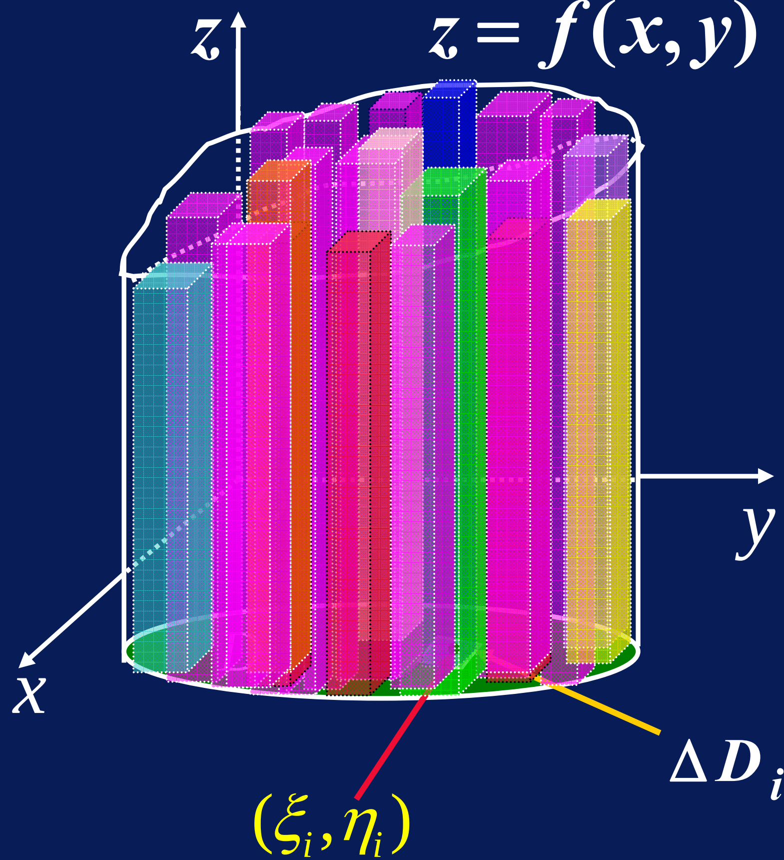
划分D为 n 个小区域:

$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n,$

以它们为底把曲顶柱体

分为 n 个小曲顶柱体,

$\Delta V_i, i=1,\cdots,n.$



2° 近似

$\forall\ (\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i,\ \ \Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

3° 求和

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

4° 取极限

定义 ΔD_i 的直径为

$$d_i=\max\{|P_1P_2|\;|\;P_1,P_2\in\Delta D_i\},$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, 则有

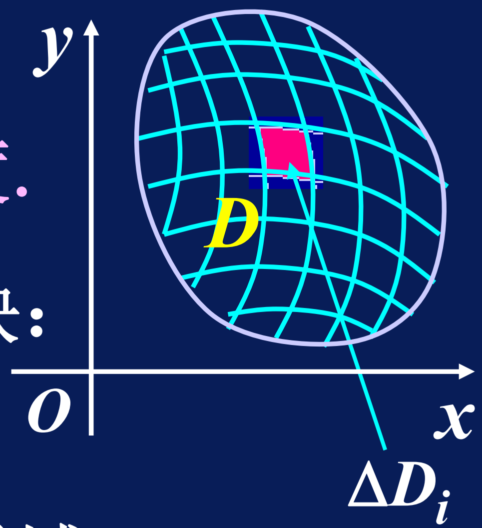
$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

2. 平面薄板的质量

设有一质量分布不均匀的平面薄板, 其面密度为非负连续函数 $\mu(x,y)$, 计算该薄片的质量 M .

回顾　若 $\mu(x,y)=$ 常数， 则

薄板的质量 = 薄板的面积×面密度.



现在 $\mu(x,y)\neq$ 常数, 采用类似方法解决:

1^o 划分

设平面薄板在 xOy 平面上占有区域 D ,

将 D 任意划分成 n 个小区域 $\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$,

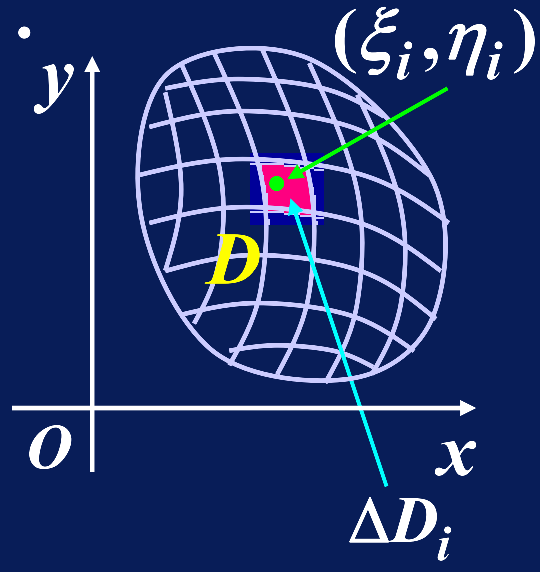
2° 近似

在每个ΔD_i 中任取一点(ξ_i,η_i), 则第 i 小块的质量

$$\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

3° 求和

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$



4° 取极限

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, 则有

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 常代变, 近似和, 取极限".

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \ ;$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \ .$$

二、重积分的概念

1. 二重积分的有关概念

定义9.1 设 $f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数，将闭区域D 任意 分成 n个小闭区域 ΔD_1，ΔD_2，…，ΔD_n，设$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域ΔD_i的面积，在每个ΔD_i 上任取一点

$$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i,$$

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

注　1° 各小闭区域的直径中的最大值λ是指:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n}\{d_i\},$$

$$d_i = \max_{P,Q \in D} \rho(P,Q),$$ 其中ρ是欧氏距离.

2°　在二重积分的定义中, 对闭区域的划分是任意的.

3°　二重积分存在性定理:

命题1　若函数$f(x,y)$在有界闭区域 D上连续, 则

$f(x,y)$在 D上可积.

命题2 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

4° 二重积分的几何意义

若 $f(x,y)\ge 0,\quad (x,y)\in D$, 则

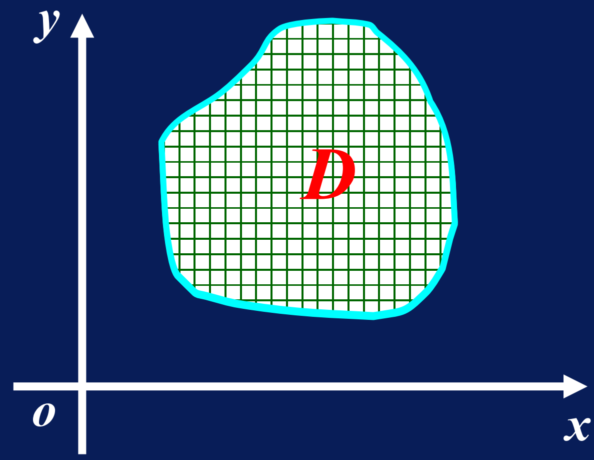
$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$： 以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,以 D 为底的曲顶柱体的体积 .

一般地, $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$: 曲顶柱体体积的代数和 .

特例 当$f(x,y)\equiv 1,(x,y)\in D$, 则

$$\sigma=\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i \quad D\text{的面积}$$

在直角坐标系下用平行坐标轴的直线来划分区域 D，则面积元素为



$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2. 三重积分的定义

定义9.2 设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界闭区域 Ω 上的有界函数，将区域 Ω 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\Omega_i \ (i=1,2,\cdots,n),$$

用 Δv_i 表示第 i 个小闭域 $\Delta\Omega_i$ 的体积，并用 λ 表示各小闭域直径的最大者．任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Omega_i$，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \ (i=1,2,\cdots,n)$.

若存在一个常数 I, 使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

则称函数 $f(x,y,z)$在闭区域 Ω上可积, 并称 I 为 $f(x,y,z)$在 Ω上的三重积分. 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

即 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

x, y, z 称为积分变量, $f(x, y, z)$ 称为被积函数,

$\mathrm{d}v$ 称为体积元素, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

注 定积分，二重积及三重积分可推广为多重积分:

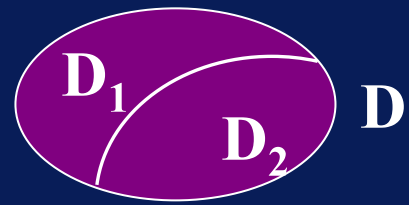
$$\underset{I}{\int\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 I 表示积分区域, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示定义在

I 上的有界 n 元函数， n 可取 $1,2,3,\cdots$.

三、重积分的性质 (以二重积分为例)

性质1（线性性质）



$$\iint_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\mathrm{d}\sigma$$

$$=\alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$ 其中α,β为常数.

性质2（关于积分区域的可加性）

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=D_1\cup D_2$, D_1, D_2 无公共内点.

性质3（保序性）

若在 D 上 $f(x,y)\geq 0$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq 0$

推论1 若在 D 上 $f(x,y)\geq g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论2 特别地, 由于 $-\left|f(x,y)\right|\leq f(x,y)\leq\left|f(x,y)\right|$

$$\therefore\quad\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right|\leq\iint\limits_D\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma.$$

例1 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma, \quad \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2.$

解 $D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2.$

$$\because \quad (x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1) \le 2,$$

$$(x-1)^2+y^2-2(x+y-1) \le 0,$$

$$2(x+y-1) \ge (x-1)^2+y^2 \ge 0$$

$$\therefore \quad x+y \ge 1$$

目 录 上 页 下 页 例1-1 继 续

$\therefore$ 当$(x, y) \in D$时， 有 $(x+y)^3 \geq (x+y)^2$

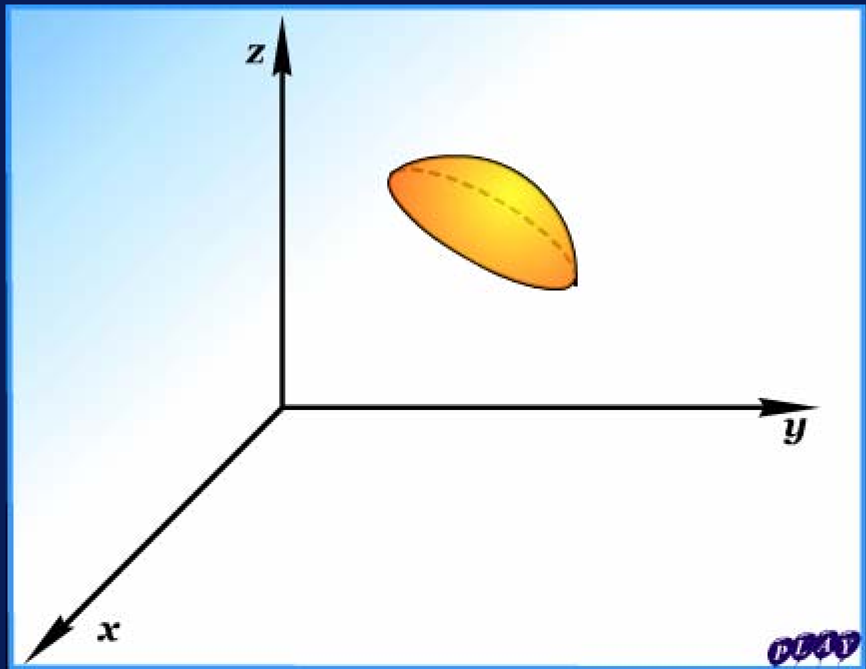
$$\therefore \quad \iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma.$$

性质4（估值性质）

设$M = \max_{D} f(x,y)$, $m = \min_{D} f(x,y)$, D 的面积为σ,

则有 $$m\sigma \le \iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$$

二重积分估值不等式的几何意义:



性质5（中值性质）

设函数 $f(x,y)$在闭区域 D上连续, σ为D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

证　由性质4 可知,

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M.$$

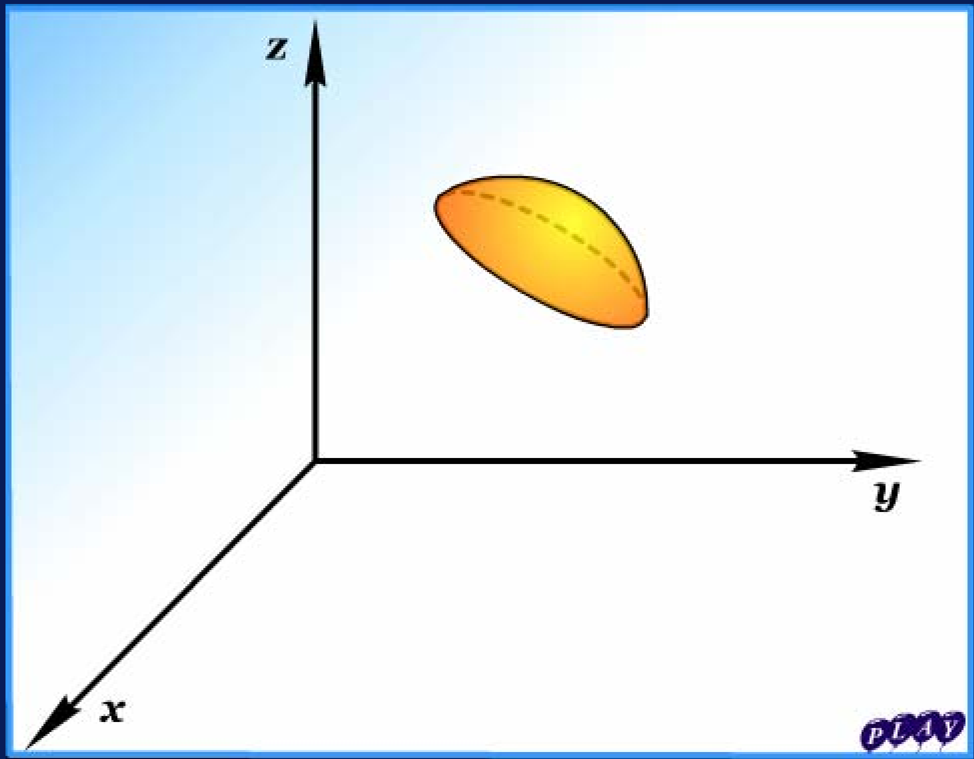
由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

从而命题成立.

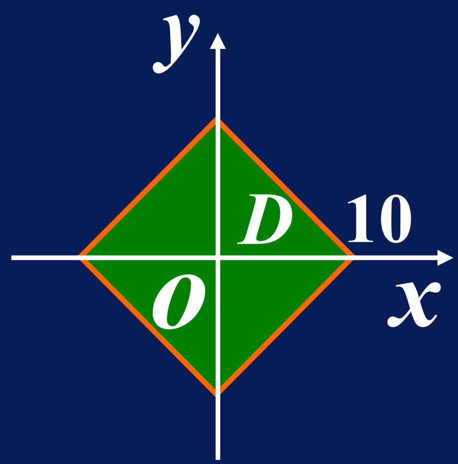
二重积分中值定理的几何意义

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$



例3 估计下列积分之值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}, \qquad D: |x|+|y|\le 10.$$



解 D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100},$$

$\Big\downarrow$ 积分性质4

$$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}, \quad \text{即} \quad 1.96\le I\le 2.$$

目录 上页 下页 例题 结束

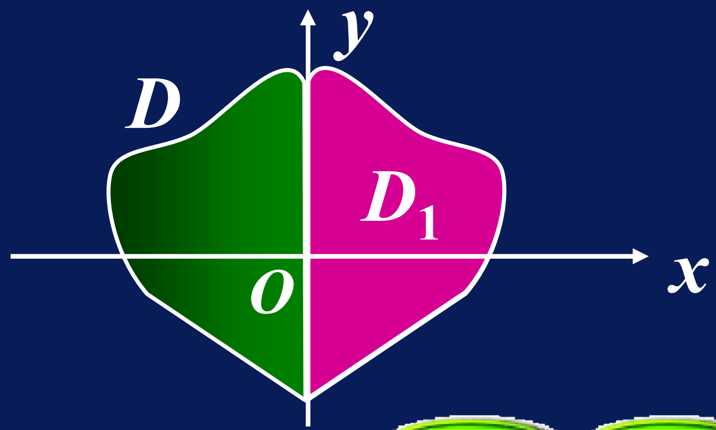
性质6（对称性）

设函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D上连续，

(1) 若 D关于 y 轴$(x=0)$对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, x\geq 0\}$.

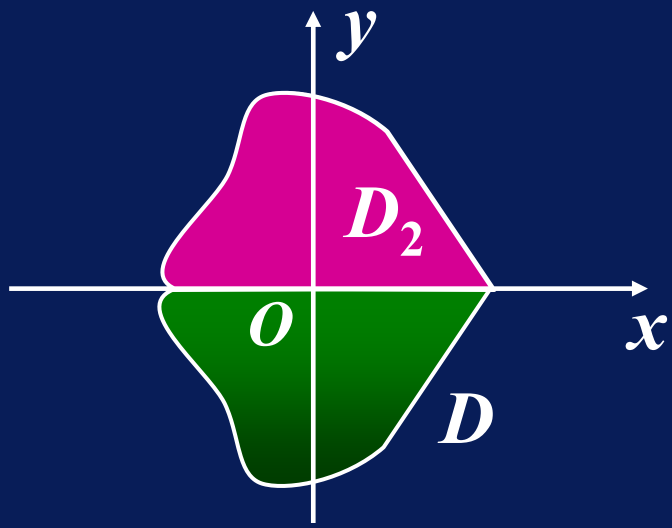


目录 上页 下页 返回 结束

(2) 若 D关于x轴($y=0$)对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

其中 $D_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, y \geq 0\}$.

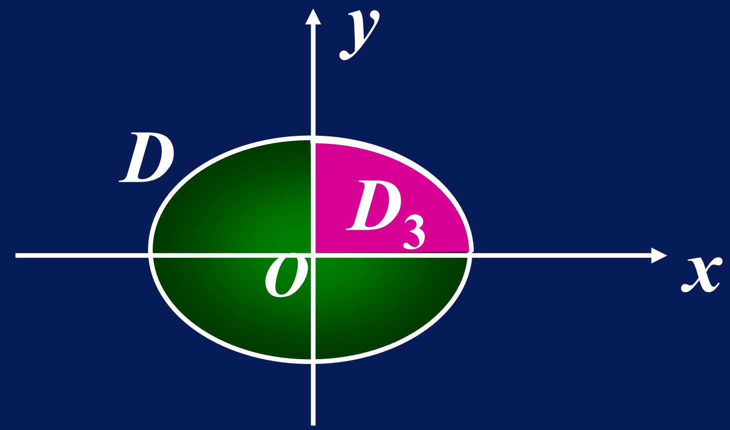


目录 上页 下页 返回 结束

(3) 若 D关于 x 轴$(y=0)$和 y 轴$(x=0)$对称，则

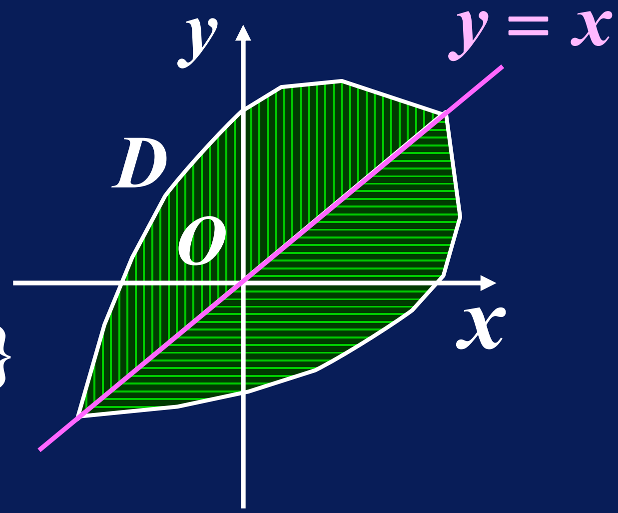
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y) \\ & \text{或} f(x,-y)=-f(x,y) \\ 4\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y) \\ & \text{且} f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 $D_3=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, x\geq 0, y\geq 0\}$.



(4) 若 D 关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$$



如：$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint\limits_D (1-x)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (1-y)\,\mathrm{d}\sigma$$

例4 计算 $I=\iint\limits_D (3x-6y+9)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2\le R^2$.

D的面积

解 $I=3\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-6\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+9\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

关于x=0对称

关于x为奇函数

关于y=0对称

关于y为奇函数

$=0-0+9\cdot\pi R^2=9\pi R^2.$

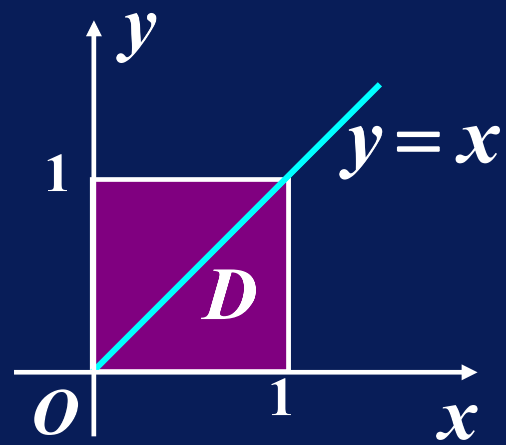
目录 上页 下页 链接 结束

例5 利用二重积分的性质估计二重积分

$$I=\iint\limits_{D}(\cos y^2+\sin x^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

的值,其中D是正方形区域：$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$

解 因为积分区域 D关于直线 $y=x$对称，故有



$$\iint\limits_{D}\cos y^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\cos x^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

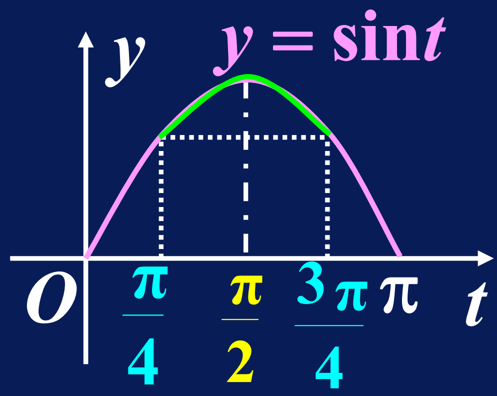
从而 $$\iint\limits_{D}(\cos y^2+\sin x^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(\cos x^2+\sin x^2)\,\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $\cos x^2+\sin x^2=\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})$,

而 $0\le x^2\le 1$，故

$$\frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},$$

从而 $1\le\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$



而正方形的面积为 1，所以

$$1\le\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}\sigma\le\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}.$$

内容小结

(1) 重积分的有关概念

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

若 $f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$, 则

$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$： 以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶,以 D

为底的曲顶柱体的体积 .

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

(2) 重积分的性质

线性性质

关于积分区域的可加性

保序性

估值性质

中值性质

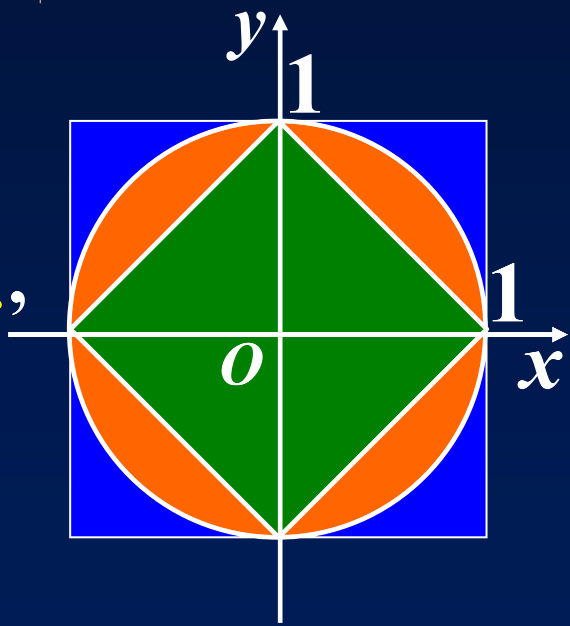
对称性

思考题

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



解 I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负, 由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3.$$

2. 设D 是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$，则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint_D y^{\frac{1}{2}}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (**D**).

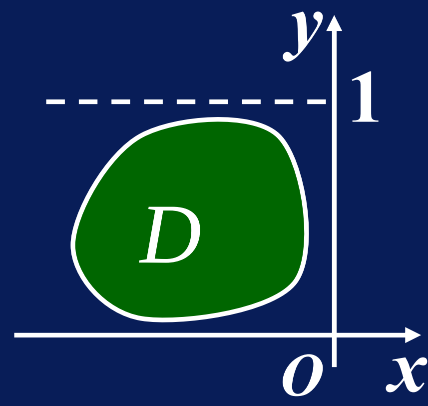
(A) $I_1\le I_2\le I_3$　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$

(C) $I_3\le I_2\le I_1$　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$

提示　因 $0<y<1$，故 $y^2\le y\le y^{\frac{1}{2}}$；

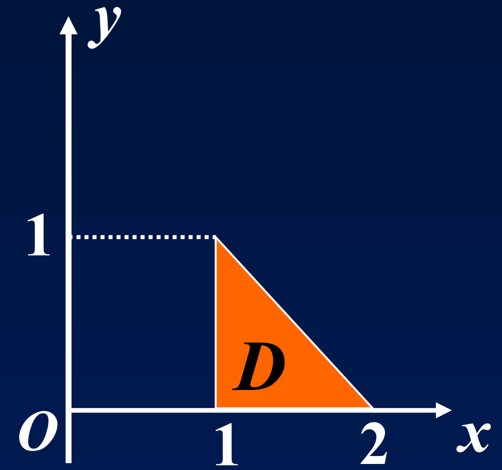
又因 $x^3<0$，故在D上有

$$y^{\frac{1}{2}}x^3\le yx^3\le y^2x^3.$$



备用题

例1-1 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为 (1,0),(1,1), (2,0).



解 三角形斜边方程：$x+y=2$

在 D 内, 有 $1 \le x+y \le 2 < \mathrm{e}$,

故 $0 < \ln(x+y) < 1$,

于是 $\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此 $$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma .$$

例3-1 不作计算，估计 $I=\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$ 的值，

其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\ \ (0<b<a)$.

解 区域 D 的面积 $\sigma = ab\pi$

在 D 上，$\because\ \ 0\le x^2+y^2\le a^2$,

$$\therefore\ \ 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2}$,

$$ab\pi\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

例3-2 估计 $I=\iint\limits_{D}\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值，其中 D: $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$

解 $\because f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$， 区域面积 $\sigma=2,$

在 D 上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=\frac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$ 的最小值 $\quad m=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}\quad (x=1,y=2)$

故 $\quad \frac{2}{5}\le I\le\frac{2}{4}$， 即 $\quad 0.4\le I\le 0.5.$