§3.4 初等方阵

一、初等方阵和初等变换

定义3.6 单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

➢ 初等方阵的分类：与初等变换对应，可分为三类

(1) 两行(列)互换

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ E= \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && 0 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 0 && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

例

$$E_3(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

(2) 第i行(列)乘以非零数k

$$E=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_i\times k]{r_i\times k}E(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

例

$$E_3(2(2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xleftarrow{r_2\times 2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

(3) 第j行的k倍加到第i行或者第i列的k倍加到第j列

$$
\boldsymbol{E}=\begin{array}{c}
\\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow[c_j+kc_i]{r_i+kr_j}
\boldsymbol{E}(i,j(k))=
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & k & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

- 初等方阵的性质

  (1) 行列式

$$\det \boldsymbol{E}(i,j)=-1 \qquad \det \boldsymbol{E}(i(k))=k\neq 0$$

$$\det \boldsymbol{E}(i,j(k))=1$$

(2) 关于逆矩阵：初等方阵都可逆，且

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j) \qquad E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$$

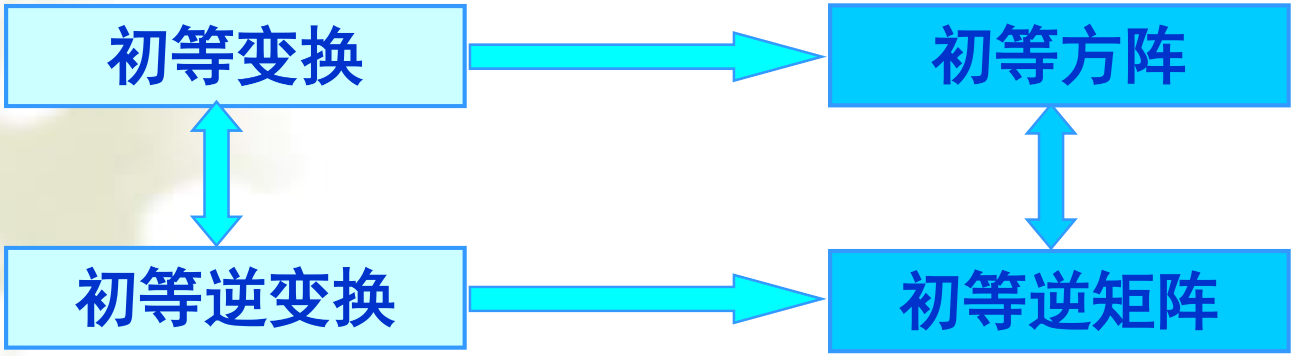
$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$$

例

$$E_3(1,3)\,E_3(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3(2(k))\,E_3(2(\frac{1}{k}))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/k&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3(1,3(k))\,E_3(1,3(-k))=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$



二、矩阵的初等变换与初等矩阵

定理3.6 对 $A_{m\times n}$

(1) 施行一次初等行变换，等于A左乘相应的m阶初等方阵；

(2) 施行一次初等列变换，等于A右乘相应的n阶初等方阵；

例 $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

例 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \times k} \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \\ a_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$$

例 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \\ a_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + kr_3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+kc_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}+ka_{31}&a_{22}+ka_{32}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}+ka_{12}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}+ka_{22}\end{pmatrix}$$

练习：2004 数一 4分 课后题第10题

设A是3阶方阵，将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C, 则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为__D__

(A)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, (B)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, (C)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, (D)$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

三、n阶方阵A可逆的充要条件

定理3.7

n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A能表示为若干个初等方阵的乘积.

证明 "$\Rightarrow$" 设A可逆，则A是满秩矩阵，则有

$$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}_n$$

即A可经过有限次初等行变换(设s次)和有限次初等列变换(设t次)变为E，即存在n阶初等方阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$(行变换)和 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$(列变换)，使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{E}_n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1} \boldsymbol{Q}_t^{-1} \boldsymbol{Q}_{t-1}^{-1} \cdots \boldsymbol{Q}_1^{-1}$$

又因为$\boldsymbol{P}_i^{-1}, \boldsymbol{Q}_j^{-1} (i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,t)$都是初等方阵，所以结论成立.

"$\Leftarrow$" 设有初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_m$$

两边取行列式

$$\det A = (\det P_1)(\det P_2)\cdots(\det P_m) \neq 0$$

所以A可逆.

- 用初等行变换求方阵A的逆阵.

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s E$$

$$\Rightarrow \quad P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E \text{ 及 } P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$$

两式合之，有

$$P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} \left(A \,\vdots\, E \right) = \left(E \,\vdots\, A^{-1} \right)$$

$$P_s^{-1}P_{s-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \vdots E)=(E \vdots A^{-1})$$

意即，对矩阵$(A\vdots E)$，同时对A, E依次作相同的初等变换$P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$，设法把$A$化为$E$时，E同时化为$A^{-1}$.

$$即(A\vdots E)\xrightarrow{\text{若干次初等行变换}}(E\vdots B)\Rightarrow B=A^{-1}.$$

[说明]: (1) 当A可变为E时，则A可逆，且得$A^{-1}=B$.

(2) 当A只能变为不满秩的行最简形时，则A不可逆.

即，用这种方法求逆阵时，不用事先判断是否可逆.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

注意：1.必须始终是初等行变换，不能夹杂列变换；

2.若出现全行为0，则矩阵不可逆；

3.用初等行变换求逆矩阵的方法，可用于求$A^{-1}B$

$\because \quad A^{-1}(A \vdots B) = (E \vdots A^{-1}B)$

即

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \quad \boxed{A^{-1}B})$$

例2 求矩阵 X,使 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解法一　由例1知A可逆，直接求$A^{-1}B$.

解法二

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

如果要求$Y=CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \boxed{CA^{-1}} \end{pmatrix},$$ 即可得$Y=CA^{-1}$.

也可改为对(A^T,C^T)作初等行变换,

$$(A^T, C^T) \xrightarrow{\text{列变换}} (E, \boxed{(A^T)^{-1}C^T}),$$

即可得$Y^T=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}=(A^T)^{-1}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}$,

即可求得Y.

四、两同型矩阵等价的充要条件

定理3.3之推论2: $A_{m\times n}\cong B_{m\times n}\Leftrightarrow rankA=rankB$

进一步讨论A与B的互相表示

定理3.8 $m\times n$阶矩阵 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$存在$m$阶可逆方阵$P$和$n$阶可逆方阵$Q$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

证 “$\Rightarrow$” 设$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, 则有$m$阶初等方阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$和$n$阶初等方阵$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$, $\therefore\ \boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 均可逆,且 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

“$\Leftarrow$” 设 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$为可逆方阵

由定理3.7，存在m阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和n阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使得

$$P = P_s \cdots P_2 P_1 \qquad Q = Q_t \cdots Q_2 Q_1$$

$$\therefore P_1 P_2 \cdots P_s A Q_t \cdots Q_2 Q_1 = B \iff A \simeq B$$

例4 设A是n阶可逆方阵，将A的第i行与第j行对换后得到的矩阵记为B

(1) 证明B可逆；　　(2) 求 AB^{-1}.

(1) 证明 $B = E(i, j)A$

两边取行列式 $\det B = [\det E(i, j)](\det A)$

因为 $\det A \neq 0, \det E(i, j) = -1 \neq 0$

所以 $\det B \neq 0$，所以B可逆.

(2) **解** 因为$\boldsymbol{B}$可逆，将式

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}(i, j)\boldsymbol{A}$$

两端右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}^{-1}(i, j)$$

$$= \boldsymbol{E}(i, j)$$

- 下周四六点之前交第三章作业。