山东农业大学学报(自然科学版),2014,45(增刊):13-15 VOL.45 S 2014
Journal of Shandong Agricultural University (Natural Science Edition) doi:10.3969/j,issn.1000-2324.2014.z.003

# 命题联结词集合{ ¬,↔ }的不完备性

金贤安 [1*],樊洪志 [2],赵娜娜 [1]
1.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005
2.厦门大学软件学院,福建 厦门 361005

**摘 要**:命题联结词集合的完备性和不完备性问题是命题逻辑中一个重要问题，本文证明了联结词集合{¬,↔}是不完备的。

**关键词**:命题联结词集;不完备性
**中图法分类号**:O141.1 **文献标识码**: A **文章编号**:1000-2324(2014)S-0013-03

# Inadequacy of Propositional Connective Set {¬,↔}

JIN Xian-an[1*], FAN Hong-zhi[2], ZHAO Na-na[1]
1.*School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*
2.*School of Software, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*

**Abstract:** The problem of completeness or incompleteness of an propositional connective set is an important problem in logic. In this paper, we prove the set of connectives {¬,↔} is incomplete.

**Key words:** Propositional connectives; incompleteness

## 1 引 言

逻辑学把“对确定的对象作出判断的陈述句”称为命题，常用 $p,q,r,s$ 等符号表示。判断结果称为命题的真值，即：真或假，通常用 1 表示真，0 表示假。我们把不含命题联结词的命题称为原子命题，而把由原子命题和联结词组成的命题称为复合命题，其中命题逻辑中 5 个重要的联结词分别为¬（否定词）、∧（合取词）、∨（析取词）、→（蕴含词）和↔（等价词）。若原子命题的真值确定，我们称此命题为命题常元，否则称为命题变元。命题常元，变元以及联结词可以形式地描述更加复杂的命题，因此下面我们给出命题公式的定义：

定义 1[1]. 命题公式是由以下 2 条递归生成的：

(1)单个命题变项, 0 和 1 都是 0 层的命题公式；

(2)设 $G$，$G_1$ 和 $G_2$ 是命题公式，$G$ 的层次是 $k$ 层，$G_1$ 和 $G_2$ 的层次的最大值为 $k$，则 $F=\neg G, F=G_1\wedge G_2, F=G_1\vee G_2, F=G_1\leftrightarrow G_2$ 是 $k+1$ 层的命题公式。

定义 2[1]. 称 $f^{\{n\}}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 为一个 $n$ 元真值函数。

在这个定义中，$f^{\{n\}}$ 的自变量为 $n$ 个命题变元，定义域 $\{0,1\}^n=\{00\cdots0,00\cdots1,\cdots,11\cdots1\}$，表示由 0 和 1 构成的所有长为 $n$ 的符号串组成的集合。

$n$ 个命题变元共可构成 $2^{2^n}$ 个不同的真值函数，记为 $f_i^{(n)}(0\le i\le 2^{2^n}-1)$。例如含命题变元 $p_1$ 的一元真值函数共有 4 个（见表 1），含两个命题变元 $p_1p_2$ 的二元真值函数共有 16 个（见表 2）。

**表 1 一元真值函数表**
**Table 1 A true value function**

| $p_1$ | $f_0^{(1)}$ | $f_1^{(1)}$ | $f_2^{(1)}$ | $f_3^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**作者简介**: 金贤安(1976-),男,山东省茌平县,教授,博士生导师.主要从事图论、纽结论及其应用领域的研究.
***通讯作者**: Author for correspondence.E-mail:xajin@xmu.edu.cn

**表 2 二元真值函数表**

**Table 2 The two true value function**

| $p_1p_2$ | $f_0^{(2)}$ | $f_1^{(2)}$ | $f_2^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_4^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_7^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $p_1p_2$ | $f_8^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_{11}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{13}^{(2)}$ | $f_{14}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

定义 3[1]．称一个由 $n$ 个命题变元 $p_1$，$p_2,\cdots$，$p_n$ 构成的命题公式 $F$ 实现某个 $n$ 元真值函数 $f_i^{(n)}$，如果对 $p_1$，$p_2,\cdots$，$p_n$ 的任一赋值，即由 0 和 1 构成的长为 $n$ 的符号串，都满足 $F$ 的值与 $f_i^{(n)}$ 在相应符号串下的取值都相同。

注 1：一个由 $p_1$，$p_2,\cdots$，$p_k(k<n)$ 构成的命题公式也可以看作由 $n$ 个命题变元 $p_1$，$p_2,\cdots$，$p_n$ 构成的命题公式，这时 $p_{k+1}$，$p_{k+2},\cdots$，$p_n$ 称为哑元。

定义 4[1]．称一个联结词集是完备的，如果对任意的 $n$ 和任意的一个 $n$ 元真值函数均能被由该联结词集中的联结词形成的有 $n$ 个命题变元的某个命题公式实现。

注 2：一个由某联结词集中的联结词形成的命题公式未必使用该联结词集中的所有联结词。

根据定义，恒取 0 值的真值函数不能用仅含联结词集{∧，∨，→，↔}中联结词的命题公式表示，因而{∧，∨，→，↔}不是联结词完备集，那么{∧，∨，→，↔}中的二元子集{∧，∨}，{∧，→}，{∧，↔}，{∨，→}，{∨，↔}，{→，↔}都不构成联结词完备集。目前大量使用的教科书，如[1-3]，中都证明了{¬，∧}、{¬，∨}和{¬，→}是联结词完备集，因此对上述五个命题联结词的二元子集而言，只剩下了{¬，↔}的完备性有待进一步分析。作为对教科书的一种补充，本文将证明{¬，↔}是不完备的。

## 2 主要结论及证明

本节我们将只考虑由联结词¬ 和↔构成的命题公式。

首先我们注意到一元真值函数 $f_0^{(1)}$，$f_1^{(1)}$，$f_2^{(1)}$ 和 $f_3^{(1)}$ 可分别由 $p_1\leftrightarrow\neg p_1$，$p_1$，$\neg p_1$ 和 $p_1\leftrightarrow p_1$ 实现（参见表 1）。对二元真值函数，我们将证明以下定理。

定理 1．由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与¬ 和↔ 两个联结词形成的命题公式实现的二元真值函数有且只有 8 个：$f_0^{(2)},f_3^{(2)},f_5^{(2)},f_6^{(2)},f_9^{(2)},f_{10}^{(2)},f_{12}^{(2)}$，$f_{15}^{(2)}$。

证明：首先我们将证明由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与¬ 和↔ 两个联结词形成的命题公式可以实现二元真值函数：$f_0^{(2)}$，$f_3^{(2)}$，$f_5^{(2)}$，$f_6^{(2)}$，$f_9^{(2)}$，$f_{10}^{(2)}$，$f_{12}^{(2)}$，$f_{15}^{(2)}$。根据表 2，我们知 $f_0^{(2)}$ 恒取 0 值，因此它可由公式 $(p_1\leftrightarrow p_2)\leftrightarrow\neg(p_1\leftrightarrow p_2)$ 实现；又由于 $f_{15}^{(2)}$ 恒取 1 值，因此可由公式 $(p_1\leftrightarrow p_2)\leftrightarrow(p_1\leftrightarrow p_2)$ 来实现；注意到 $f_3^{(2)}$ 的取值和 $p_1$ 相同，因此可由公式 $p_1\leftrightarrow 1$ 实现；相反地，$f_{12}^{(2)}$ 的取值与 $\neg p_1$ 相同，故可由公式 $p_1\leftrightarrow 0$ 来实现；类似地，$f_5^{(2)}$ 和 $f_{10}^{(2)}$ 的取值分别与 $p_2$ 和 $\neg p_2$ 相同，因此可分别由公式 $p_2\leftrightarrow 1$ 和 $p_2\leftrightarrow 0$ 来实现；最后，根据分析，$f_6^{(2)}$ 和 $f_9^{(2)}$ 可分别由公式¬（$p_1\leftrightarrow p_2$）和 $p_1\leftrightarrow p_2$ 来实现。

接下来我们用数学归纳法证明由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与¬ 和↔ 两个联结词形成的任意层的一个命题公式可实现的二元真值函数为集合 $A=\{f_0^{(2)}$，$f_3^{(2)}$，$f_5^{(2)}$，$f_6^{(2)}$，$f_9^{(2)}$，$f_{10}^{(2)}$，$f_{12}^{(2)}$，$f_{15}^{(2)}\}$

的元素。注意到由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 两个联结词形成的 0 层的命题公式只有 1，0，$p_1$ 和 $p_2$，其可实现二元真值函数 $f_0^{(2)}$，$f_{15}^{(2)}$，$f_3^{(2)}$ 和 $f_5^{(2)}$。而由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 两个联结词形成的 1 层的命题公式分别为：$\neg 1$，$\neg 0$，$\neg p_1$，$\neg p_2$，$0 \leftrightarrow 1$，$p_1 \leftrightarrow 1$，$p_1 \leftrightarrow 0$，$p_2 \leftrightarrow 1$，$p_2 \leftrightarrow 0$，$p_1 \leftrightarrow p_2$，即 1,0，$p_1$，$p_2$，$\neg p_1$，$\neg p_2$，$p_1 \leftrightarrow p_2$，根据表 2 可知，其可实现二元真值函数 $f_0^{(2)}$，$f_3^{(2)}$，$f_5^{(2)}$，$f_9^{(2)}$，$f_{10}^{(2)}$，$f_{12}^{(2)}$ 和 $f_{15}^{(2)}$。假设由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 两个联结词形成的任意一个层次小于 $k(k>0)$ 的命题公式可实现 $A$ 中某个二元真值函数。设 $F$ 是由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 两个联结词形成的任意一个层次等于 $k$ 的命题公式，故 $F=\neg G$ 或者 $F=G_1 \leftrightarrow G_2$，其中 $G$，$G_1$ 和 $G_2$ 都是层次小于 $k$ 的由 $p_1$ 和 $p_2$ 两个命题变元与 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 两个联结词形成的命题公式。根据假设我们知 $G$，$G_1$ 和 $G_2$ 分别可实现 $A$ 中的某个二元真值函数，注意到集合 $A$ 在否定和等价联结词运算下的封闭性（分别见下面的表 3 和 4），那么 $F$ 也只能实现 $A$ 中某个二元真值函数。

**表 3 否定运算**
**Table 3 Negative operation**

| $f_i^{(2)}$ | $\neg f_i^{(2)}$ |
|---|---|
| $f_0^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ |
| $f_3^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ |
| $f_5^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ |
| $f_6^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ |
| $f_9^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ |
| $f_{10}^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ |
| $f_{12}^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ |
| $f_{15}^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ |

**表 4 等价运算**
**Table 4 Equation operation**

| $\leftrightarrow$ | $f_0^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ |
| $f_3^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ |
| $f_5^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ |
| $f_6^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ |
| $f_9^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ |
| $f_{10}^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ |
| $f_{12}^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ |
| $f_{15}^{(2)}$ | $f_0^{(2)}$ | $f_3^{(2)}$ | $f_5^{(2)}$ | $f_6^{(2)}$ | $f_9^{(2)}$ | $f_{10}^{(2)}$ | $f_{12}^{(2)}$ | $f_{15}^{(2)}$ |

由上述定理和定义 4 即得

推论 1 {¬，↔}是不完备的。

## 参考文献


[1] 耿素云, 屈婉玲, 张立昂. 离散数学(修订版)[M]. 北京:高等教育出版社,2007

[2] 王元元. 离散数学教程[M]. 北京:高等教育出版社,2010

[3] 傅 彦. 离散数学及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,2013