布尔代数及其性质

布尔代数

定义7.10 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为$<B,\wedge,\vee,',0,1>$, $'$为求补运算.

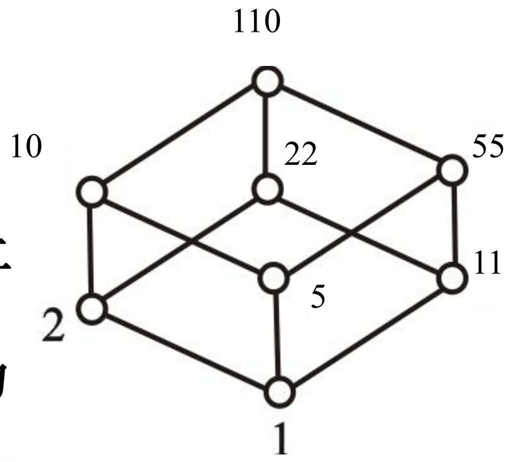
例8 设 $S_{110}=\{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$是110的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，问$<S_{110}$, gcd, lcm$>$是否构成布尔代数？为什么？

解 (1) 不难验证S_{110}关于gcd 和 lcm 运算构成格. (略)

(2) 验证分配律 $\forall x, y, z \in S_{110}$ 有

$$\gcd(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

(3) 验证它是有补格, 1作为S_{110}中的全下界, 110为全上界, 1和110互为补元, 2和55互为补元, 5和22互为补元, 10和11互为补元, 从而证明了$<S_{110}$, gcd, lcm$>$为布尔代数.



实例

例9 设B为任意集合, 证明B的幂集格$\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B\rangle$构成布尔代数, 称为集合代数.

证 (1) $P(B)$关于∩和∪构成格, 因为∩和∪运算满足交换律、结合律和吸收律.

(2) 由于∩和∪互相可分配, 因此$P(B)$是分配格.

(3) 全下界是空集$\varnothing$, 全上界是B.

(4) 根据绝对补的定义, 取全集为B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$是x的补元.

从而证明$P(B)$是有补分配格, 即布尔代数.

布尔代数的性质

定理7.8 设<$B,\wedge,\vee,',0,1$>是布尔代数, 则$\forall a\in B$, $(a')'=a$.

证 $(a')'$是a'的补元, a也是a'的补元. 由补元唯一性得$(a')'=a$.

- 布尔代数满足如下性质：

(1) 交换律、结合律、吸收律 格的定义

(2) 幂等律 格的性质

(3) 同一律、零一律 有界格定义及其性质

(4) 分配律 分配格定义

(5) 互补律(补元律) 有补格定义

(6) 双补律、德摩根律 有补分配格性质

布尔代数作为代数系统的定义

定义7.11 设$<B, *, \circ>$是代数系统, $*$ 和 $\circ$ 是二元运算. 若$*$ 和 $\circ$ 运算满足:

(1) 交换律, 即$\forall a,b\in B$有 $a*b=b*a$, $a\circ b=b\circ a$

(2) 分配律, 即$\forall a,b,c\in B$有

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c),\quad a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$$

(3) 同一律, 即存在$0,1\in B$, 使得$\forall a\in B$有$a*1=a$, $a\circ 0=a$

(4) 互补律, 即$\forall a\in B$, 存在 $a'\in B$ 使得 $a*a'=0$, $a\circ a'=1$

则称 $<B,*,\circ>$是一个布尔代数.

可以证明，布尔代数的两种定义是等价的.

THE END