第二节

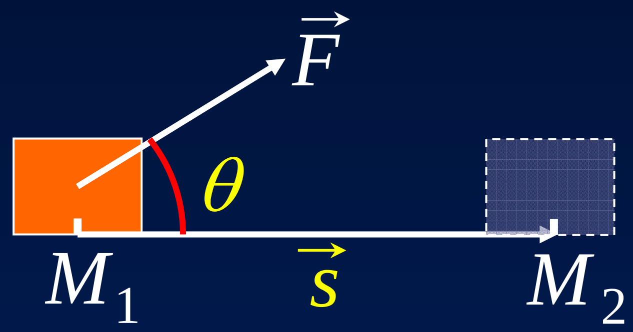
数量积 向量积 *混合积

- 一、两向量的数量积
- 二、两向量的向量积
- ★ 三、向量的混合积

一、两向量的数量积

引例 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，则力 $\vec{F}$ 所作的功为

$$W=|\vec{F}|\cos\theta\cdot|\vec{s}|$$
$$=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$



1. 定义7.2 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

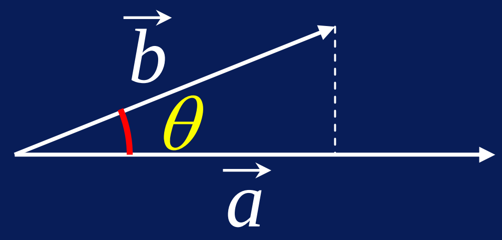
$$\boxed{W=\vec{F}\cdot\vec{s}}$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的 **数量积** (点积或内积) .

目录 上页 下页 返回 结束

当$\vec{a} \neq \vec{0}$时，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为：

$$\left|\vec{b}\right| \cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \mathbf{Prj}_{\vec{a}}\, \vec{b}$$



故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, \mathbf{Prj}_{\vec{a}}\, \vec{b}$

同理，当$\vec{b} \neq \vec{0}$时，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\, \mathbf{Prj}_{\vec{b}}\, \vec{a}$

2. 性质

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}, \vec{b}$为两个非零向量，则有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 0$

$$\theta = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$

目录 上页 下页 返回 结束

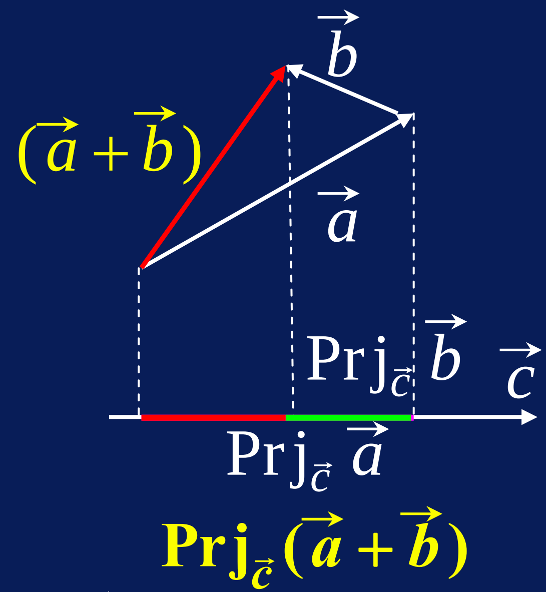
3. 运算律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 (λ,μ为实数)

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\left(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b})\right)=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$



(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

事实上, 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立 ; 当$\vec{c}\neq\vec{0}$时

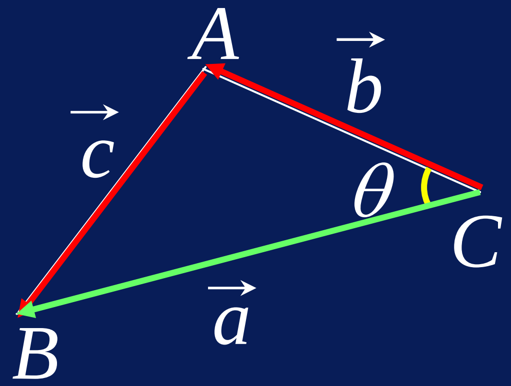
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\left(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)$$

$$=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

例1 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

证 如图 . 设



$$\overrightarrow{CB} = \vec{a},\quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},\quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b}|,\ c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

目录 上页 下页 返回 结束

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because\ \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},\quad \therefore\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\because\ |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,$$

$$\therefore\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

(2) 两向量的夹角公式

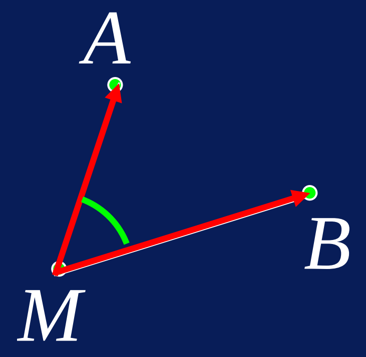
当 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量时,

由于 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ，得

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

例2 已知三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$, 求$\angle AMB$.



解 $\overrightarrow{MA}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{MB}=(1,\ 0,\ 1)$

则
$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1+0+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故
$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

例3 $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$， 求 $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{i}}\vec{a}$、$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{j}}\vec{a}$ 及 $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{k}}\vec{a}$.

解 $\because\ \vec{i} = (1, 0, 0),\quad \vec{j} = (0, 1, 0),\quad \vec{k} = (0, 0, 1)$

设 α、β、γ 分别为向量 $\vec{a}$ 的三个方向角，则有

$$\mathrm{Prj}_{\vec{i}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha = \vec{a}\cdot\vec{i} = a_x$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{j}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta = \vec{a}\cdot\vec{j} = a_y$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{k}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma = \vec{a}\cdot\vec{k} = a_z$$

这表明： 向量 $\vec{a}$ 的坐标 a_x, a_y, a_z，正是向量 $\vec{a}$ 分别在 x, y, z 轴上的投影.

例4 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$,

$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, 求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 因 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x=13$

在 y 轴上的分向量为 $a_y\vec{j}=7\vec{j}$

例5 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证 $[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c})]$$

$$=(\vec{b}\cdot\vec{c})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]=0$$

$$\therefore\quad [(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

注 一般地，$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\neq\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b})$

例6 已知 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3$， 设 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,

$|\vec{s}|=4$， 求： (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$;

(2) 数 λ， 使 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}-\lambda\vec{b})$.

解 (1) $\because$ $|\vec{s}|^2=\vec{s}\cdot\vec{s}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

而 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, |\vec{s}|=4$,

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}[|\vec{s}|^2-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)]=1$$

(2) $\because \quad (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b})$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \cancel{\lambda(\vec{b}\cdot\vec{a})} - \cancel{\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})} - \lambda^2(\vec{b}\cdot\vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 - \lambda^2|\vec{b}|^2$$

$\therefore$ 由 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b}) = 0$, 得

$$|\vec{a}|^2 - \lambda^2|\vec{b}|^2 = 0$$

即 $\lambda^2 = \dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{4}$, $\quad \therefore \quad \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$.

例7 设 $\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,1,z)$, 问：

(1) z为何值时，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$最小？

(2) 此时，$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=?$

解 (1) 设 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\theta$, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot z}{3\sqrt{2+z^2}}=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$$

$\because$ $0\le\theta\le\pi$, $\cos\theta$ 在$[0,\ \pi]$上单调减少

$\therefore$ θ最小$\Leftrightarrow\cos\theta$最大

令 $f(z)=\cos\theta=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$

则 $f'(z)=\left(\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}\right)'$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\cdot\sqrt{2+z^2}-(1-2z)\cdot\dfrac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{4+z}{(2+z^2)^{3/2}}$$

令 $f'(z)=0$，得唯一驻点：$z=-4$

$\because$ 当$z<-4$时，$f'(z)>0$； 当$z>-4$时，$f'(z)<0$，

$\therefore\quad \cos\theta = f(z)$在$z=-4$处取得极大值，从而取得最大值.

$\therefore\quad$ 当$z=-4$时，θ取得最小值 $\theta_{\min}$：

$$\cos\theta_{\min} = \frac{1-2\cdot(-4)}{3\sqrt{2+(-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \theta_{\min} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 当$z=-4$时，$\vec{b}=(1,1,-4)$

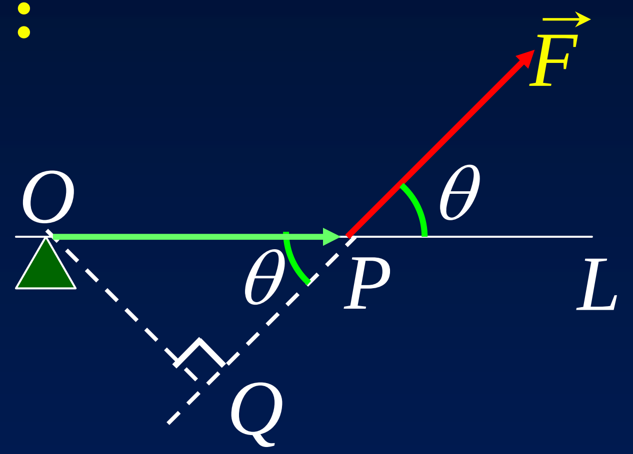
$$\therefore\quad \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{2-1+8}{3} = 3.$$

二、两向量的向量积

引例 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$：

其模：$|\vec{M}| = |\overline{OQ}||\vec{F}|$

$$= |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

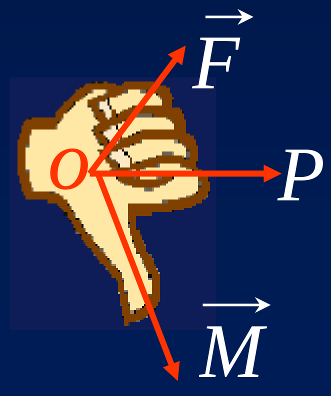


$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

其方向符合右手规则：

$$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$$

$$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}, \quad \vec{M} \perp \vec{F}$$



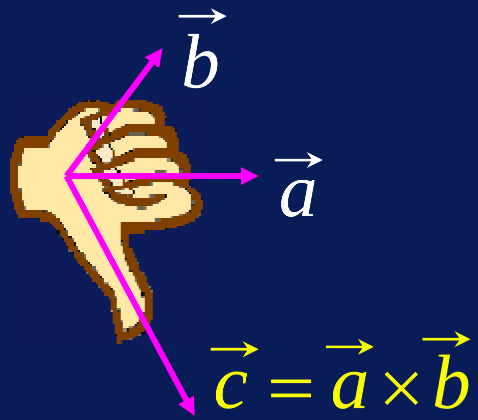
1. 定义7.3

设 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为θ，定义

$$\text{向量 } \vec{c} \begin{cases} \text{方向}: \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模}: |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记作

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \quad \text{(叉积)}$$



引例中的力矩

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP}\times\vec{F}$$

2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

证明 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0 \Longleftrightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0,\text{即 } \theta=0 \text{ 或 } \pi \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

3. 运算律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

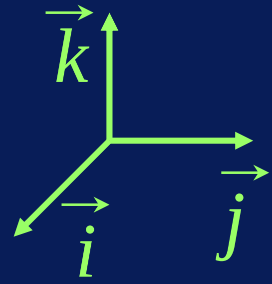
(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(证明略)

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$



$$= \overset{\vec{0}}{\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}} + a_xb_y\vec{k} + a_xb_z(-\vec{j})$$

$$+ a_yb_x(-\vec{k}) + \overset{\vec{0}}{\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}} + a_yb_z\vec{i}$$

$$+ a_zb_x\vec{j} + a_zb_y(-\vec{i}) + \overset{\vec{0}}{\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}}$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

目 录 上 页 下 页 返 回 结 束

5. 向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}$$
$$+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

(行列式计算见书 p.401～p.404)

注 (1) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}.$

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$

如: $(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j}=\vec{0}\times\vec{j}=\vec{0},\ \vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

$\underline{(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j}}=\vec{0}\neq\underline{\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})}=-\vec{j}$

(3) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{0}$

$\neq\vec{a}\times\vec{a}-2(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{b}\times\vec{b}$

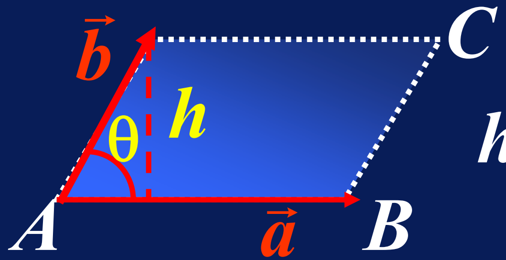
(4) 设 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\ \not\Rightarrow\ \vec{b}=\vec{c}$

事实上, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\,//\,(\vec{b}-\vec{c})$

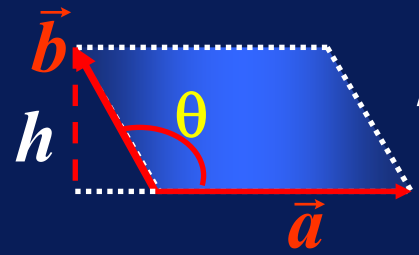
6. 几何意义

$\vec{a}\times\vec{b}$的模：

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$
$$= |\vec{a}|\cdot h$$
$$= S_{\square}$$
$$= 2S_{\Delta ABC}$$

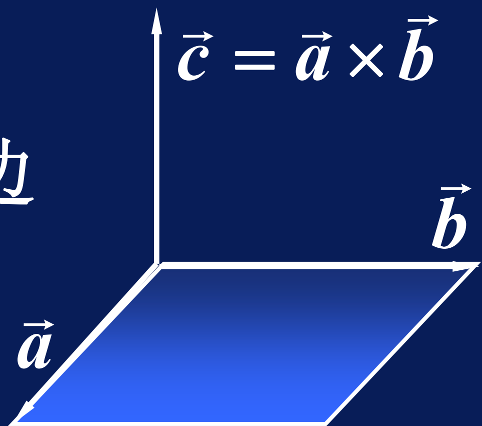


$$h = |\vec{b}|\sin\theta$$



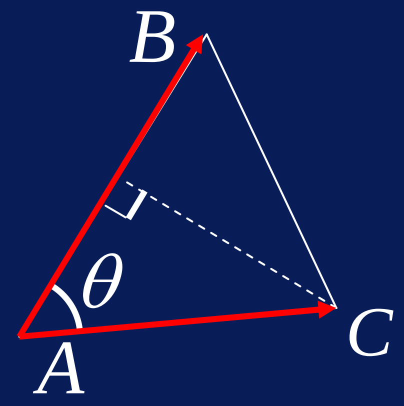
$$h = |\vec{b}|\sin(\pi-\theta)$$
$$= |\vec{b}|\sin\theta$$

即 $|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以 $\vec{a}$和 $\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.



例8 已知三点 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$,

求三角形 ΔABC 的面积.



解 如图所示,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(4, -6, 2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

目录 上页 下页 例8-1 结束

例9 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because\ |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore\quad \vec{\mathrm{e}}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例10 设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且$|\vec{m}| = 4$，$|\vec{n}| = 2$，$|\vec{p}| = 3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解 $$|\vec{m}\times\vec{n}| = |\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = |\vec{m}||\vec{n}|\sin 90^\circ$$

$$= 4\times 2\times 1 = 8,$$

依题意知$\vec{m}\times\vec{n}$与$\vec{p}$同向，

$$\therefore\quad \theta = (\vec{m}\times\vec{n}\,\hat{,}\,\vec{p}) = 0$$

$$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p} = |\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta = 8\cdot 3 = 24.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例11 求证：$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$.

证 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$$

$$=\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}=2(\vec{a}\times\vec{b})$$

$\because\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$

$\therefore\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

例12 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2,\ |\vec{a}|=1,$ 求

$$I=(2\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b})\cdot(-\vec{a}).$$

解 $I=-2(\vec{a}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+3(\vec{b}\cdot\vec{a})$

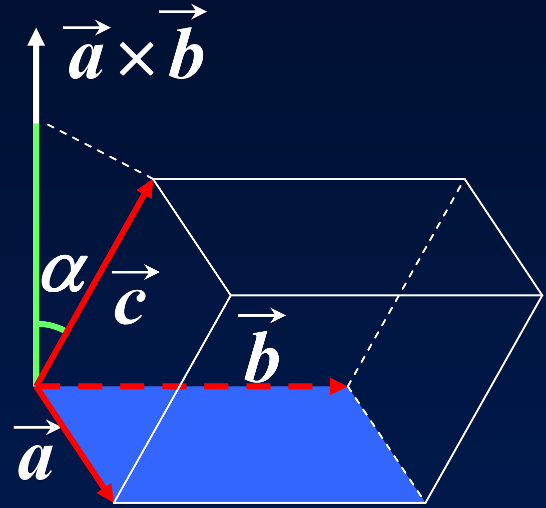
$$=-2|\vec{a}|^2-0+3(\vec{a}\cdot\vec{b})=-2\times1+3\times2=4$$

★ 三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积 .



2. 几何意义

以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h=|\vec{c}|\,|\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\alpha|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]|$$

3. 混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

4. 性质

(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

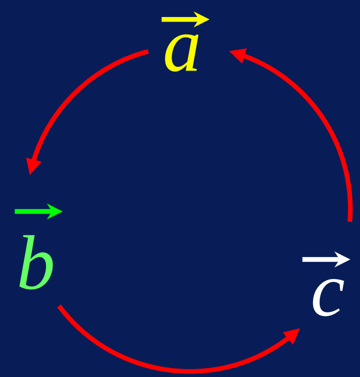
证 当 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ 时，命题成立；

当 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 时，$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所确定的平面 π.

$\therefore$ $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面 $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$

(2) 轮换对称性：

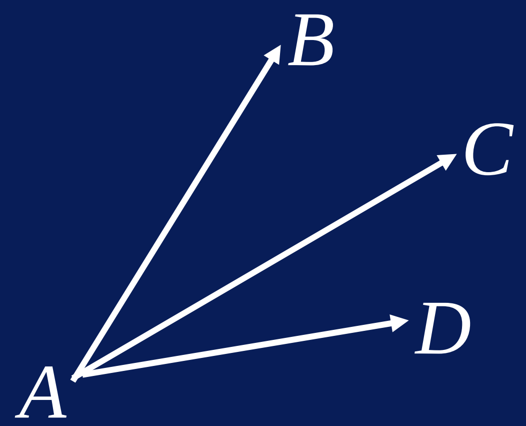
$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$



(可用三阶行列式推出)

目录 上页 下页 返回 结束

例13 证明四点 $A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$ 共面 .



解 因 $[\,\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\,]$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 A , B , C , D 四点共面 .

例14 已知 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$，

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

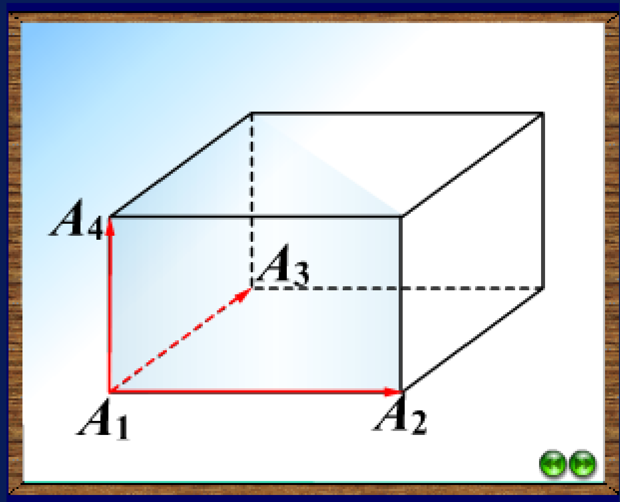
$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

例15 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$，求该四面体体积 .

解 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$，故



$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

内容小结

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

混合积: $$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

2. 向量关系:

设 $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$, 则

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

特例: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

特例: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{共面} \Longleftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

思考题

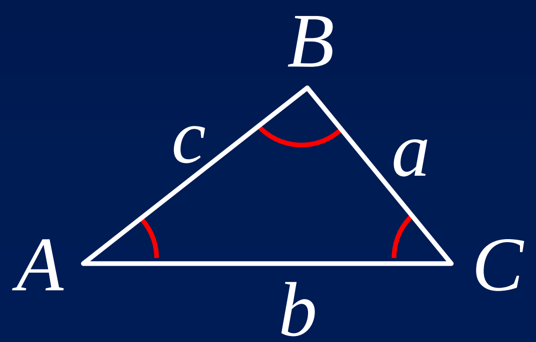
1. 设$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$,并求 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角θ的正弦与余弦 .

答案: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\qquad \vec{a}\times\vec{b}=(1,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证 由三角形面积公式

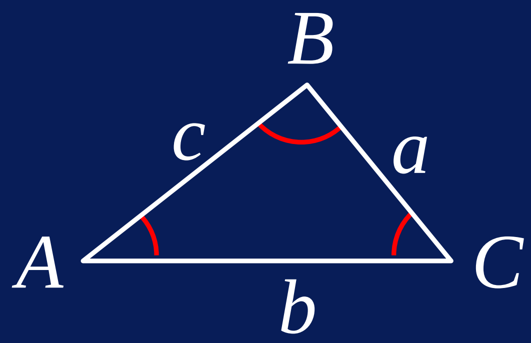
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|$$

因 $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=b\cdot c\cdot\sin A$

$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=c\cdot a\cdot\sin B$

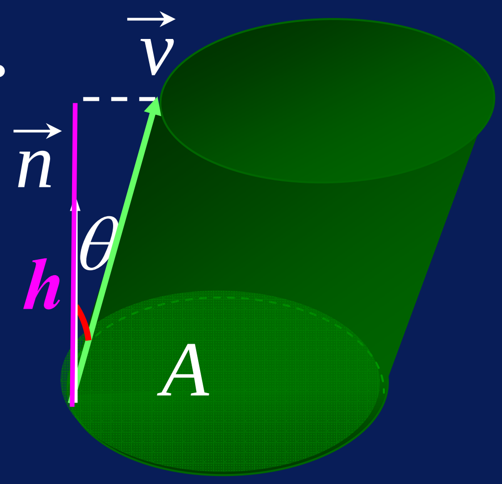
$|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|=a\cdot b\cdot\sin C$



所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

目录 上页 下页 返回 结束

3. 设均匀流速为 $\vec{v}$ 的流体流过一个面积为 A 的平面域，且 $\vec{v}$ 与该平面域的单位垂直向量 $\vec{n}$ 的夹角为 θ，求单位时间内流过该平面域的流体的质量 P (流体密度为 ρ)．



解 $P = \rho A |\vec{v}| \cos\theta$

$\vec{n}$ 为单位向量

$= \rho A \vec{v} \cdot \vec{n}$

单位时间内流过的体积

$A |\vec{v}| \cos\theta$

备用题

例5-1 设 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$，证明：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

证 $$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

例6-1 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$， 且 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

解 $\because |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta + |\vec{b}|^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + 3^2 = 17$$

$\therefore \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$

例7-1 已知$\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；(2) $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；

(3) $\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

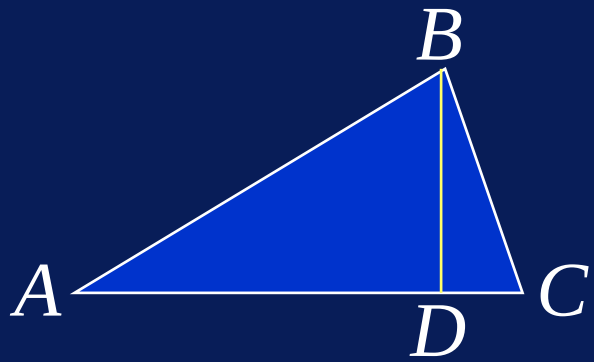
解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \therefore\ \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}$ $\quad\therefore \mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

例8-1 在顶点为 $A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD .



解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|\quad\therefore\quad |BD|=\frac{2}{5}$