第二节

可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程

- 一、可分离变量的微分方程
- 二、一阶线性微分方程

一、可分离变量的微分方程

类型1 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x)g(y)$ (1.1)

——可分离变量的微分方程.

求解法： 设函数$g(y)$和$h(x)$是连续的,

1° 当$g(y) \neq 0$时,

$$(1.1) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = h(x)\mathrm{d}x \qquad (1.2)$$ 变量分离

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int h(x)\mathrm{d}x$$

设函数$G(y)$和$H(x)$依次为$\dfrac{1}{g(y)}$和

$h(x)$的原函数，则

$$G(y)=H(x)+C \qquad (1.3)$$

(C为任意常数).

可以验证: (1.3)式为微分方程 (1.1) 的(隐式)通解.

事实上， 由以上推导可知：

(1.2)的解必满足 (1.3)； 反之，若 $y=\psi(x)$

是由(1.3)确定的隐函数，即

$$G[\psi(x)] \equiv H(x) + C$$

则由隐函数求导法，得

$$G'(y)\Big|_{y=\psi(x)} \cdot \psi'(x) \equiv H'(x)$$

$$\frac{1}{g(y)}\Bigg|_{y=\psi(x)} \cdot \psi'(x) \equiv h(x)$$

即 $$\psi'(x) \equiv h(x)\, g[\psi(x)]$$

2° 当$g(y_0) = 0$时，$y \equiv y_0$也是(1.1)的解.

注 若题目只需求通解，则不必讨论 $g(y) = 0$情形.

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\,\mathrm{d}x,$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\,\mathrm{d}x,$

$\ln|y|=x^2+C_1,\quad |y|=e^{C_1}e^{x^2},\quad y=\underbrace{\pm e^{C_1}}_{C}e^{x^2},$

$\therefore\quad y=Ce^{x^2}$ 为所求通解.

例2 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}$$ 的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0,\qquad \int\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}}=-\int\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C$$ 为所求通解.

例3 一个充满气体的气球突然破了一个孔，漏气的速率正比于气球内气体的质量，比例系数 $k>0$，设球内原有气体 100克，如果孔扎破后一分钟内还有 20克气体，问：在什么时候球内剩下 1克气体？

解 设t分钟时，球内有 W克气体，则

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-kW, \qquad W(0)=100$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{W}=-k\,\mathrm{d}t, \qquad \int\frac{\mathrm{d}W}{W}=\int-k\,\mathrm{d}t,$$

$$\boxed{\ln W=-kt+\ln C} \qquad (\because W>0)$$

目录 上页 下页 例3-1 继续

即 $W(t) = C\mathrm{e}^{-kt}$,

由 $W(0) = 100$, 得 $C = 100$ $\therefore$ $W(t) = 100\mathrm{e}^{-kt}$

又依题设, $W(1) = 20$ $\therefore$ $20 = 100\mathrm{e}^{-k}$,

$k = \ln 5$, 于是 $W(t) = 100\mathrm{e}^{-(\ln 5)t}$

将 $W = 1$ 代入上式，得

$$t = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2.86 \quad (\text{分})$$

答：2.86分钟后，球内剩下 1克气体 .

二、一阶线性微分方程

类型2 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad (2.1)$$

——— 一阶线性微分方程

当$Q(x)\equiv 0$, 方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 方程称为非齐次的.

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

求解法:

1. 常数变易法

1° 齐次线性方程: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \quad (2.2)$$

分离变量: $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|,$$

齐次线性方程的通解为: $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

2° 非齐次线性方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x).$

将 $C \xrightarrow{\text{变易}} C(x)$ (待定)

作变换 $y=\underline{C(x)e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\cdot[-P(x)]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

将 y 和 y' 代入原方程，得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$ 可分离变量方程

积分得 $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}$,

一阶非齐次线性微分方程(4.1)的通解为:

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

其中 $\tilde{C}$ 为任意常数 .

2. 常数变易公式

(2.1)的通解为:

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \quad (2.3)$$

注 1° 在常数变易公式(2.3)中，应将积分

$$\int P(x)\,\mathrm{d}\,x,\quad \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x$$

理解成被积函数的某个 原函数 .

2° 特解公式

(2.1)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为:

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+y_0\right] \quad (2.4)$$

3° (2.1)的解的结构

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \quad (2.3)$$

$$=\boxed{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}+\boxed{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

对应齐次线性方程(2.2)的通解

非齐次线性方程(2.1)的特解

例4 求方程 $y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$ 的通解.

解 $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{e^x}{x}$,

通解：$y = e^{-\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \left(\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C \right)$

$$= e^{-\ln x} \left(\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{\ln x} \mathrm{d}x + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int \frac{e^x}{x} \cdot x \mathrm{d}x + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int e^x \mathrm{d}x + C \right) = \frac{1}{x} \left(e^x + C \right).$$

例5 设 $f(x)$满足：$\int_1^x \frac{f(t)}{t+f^2(t)}\mathrm{d}t = f(x)-1$，

且 $f(x)$可导，求 $f(x)$.

解 令 $x=1$, 得 $f(1)=1$

“$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$”：$\frac{f(x)}{x+f^2(x)} = f'(x)$

关于y非线性

令 $y=f(x)$, 则 $\boxed{\frac{y}{x+y^2} = y',}$ $y(1)=1$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}\cdot x + y$$ 关于x为线性方程

目录 上页 下页 例题 继续

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}\cdot x = y$$

通解： $x = e^{-\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}[\int y e^{\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C]$

$$= e^{\ln y}[\int y e^{-\ln y}\,\mathrm{d}y + C] = y[\int y\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + C]$$

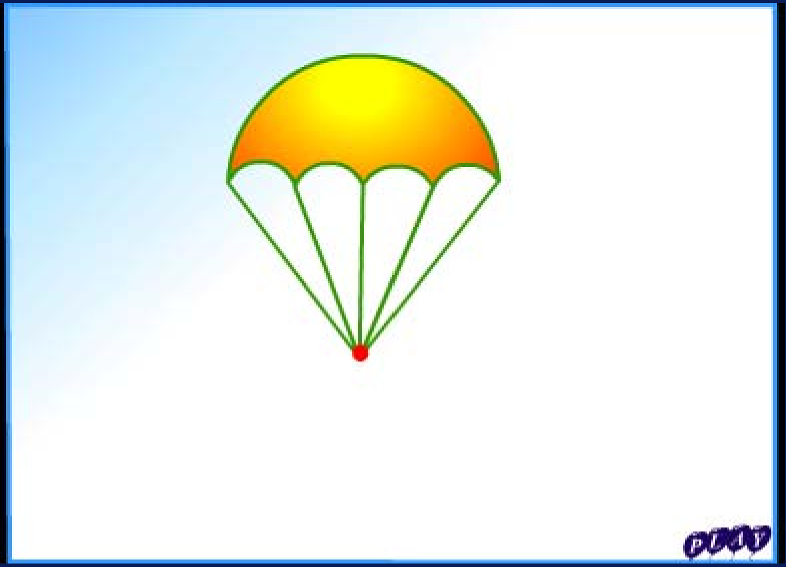
$$= y(y + C)$$

由 $y(1) = 1$，得 $C = 0$ $\quad\therefore\quad x = y^2$，即 $y = \sqrt{x}$

故所求 $f(x) = \sqrt{x}.$

例6 设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时 $(t=0)$ 速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$,



其所受力为 : $F = mg - kv$

由牛顿第二定律得：

$$F = ma$$

$$\therefore \quad m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

(方法1) 即 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v=g$ 一阶非齐次线性方程

由常数变易公式，得通解

$$v=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}[\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C]=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}[\int g\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t+C]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}[\frac{mg}{k}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}+C]=\frac{mg}{k}+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

将 $v|_{t=0}=0$代入通解得： $C=-\frac{mg}{k}$

$\therefore$ 所求特解为 $v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$

(方法2) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$ 可分离变量方程

分离变量、积分 $\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m},$

得 $-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1,$

即 $v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}$ $(C=-\frac{e^{-kC_1}}{k})$

由 $v|_{t=0}=0$ 得, $C=-\frac{mg}{k}$

$\therefore$ 所求特解为 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$

内容小结

1. 可分离变量方程的求解步骤:

   1° 分离变量;

   2° 两端积分-------隐式通解;

   3° 根据定解条件定常数 .

2. 一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次线性方程 , 再用常数变易法;

方法2　用常数变易（通解）公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

思考题

求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

思考题解答

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\cos y\sin 2y-x\sin y}{\cos y}=\sin 2y-x\tan y,$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+(\tan y)\cdot x=\sin 2y,$$

$$x=e^{\ln|\cos y|}\left[\int\sin 2y\cdot e^{-\ln|\cos y|}\,\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\cos y\left[\int\frac{2\sin y\cos y}{\cos y}\,\mathrm{d}y+C\right]=\cos y[C-2\cos y].$$

备用题

例1-1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\cos x$的通解

解 这是可分离变量方程，分离变量得

两边积分 $$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\cos x\,\mathrm{d}x$$

得 $$\ln|y|=\sin x+C_1、$$

从而 $$y=\pm e^{\sin x+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{\sin x}$$

$$=C_2e^{\sin x}$$

其中 $C_2 = \pm e^{C_1}$为任意的非零常数

由于y=0也是方程的解，因此,所给方程的通解为

$$y = Ce^{\sin x}\qquad 其中C为任意常数.$$

有时,可以简化解题过程.

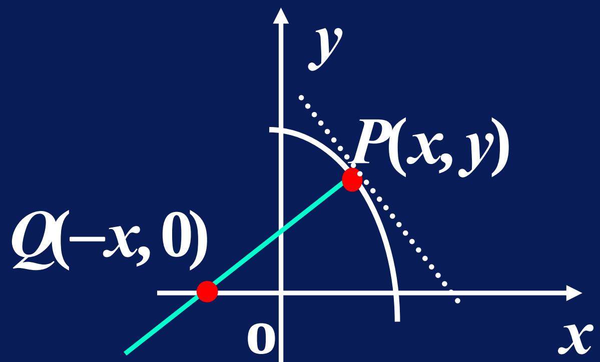
如由 $$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \int \cos x\,\mathrm{d}\,x$$

得 $$\ln|y| = \sin x + \ln|C|$$

故方程的通解为 $$y = Ce^{\sin x}$$

例4-1 一曲线过点 (2,3), 在该曲线上任一点 $P(x,y)$处的法线与 x轴的交点为 Q，且线段 PQ恰被y轴平分，求此曲线方程 .

解 线段PQ的斜率：$-\dfrac{1}{y'}$



依题设，有 $-\dfrac{1}{y'}=\dfrac{y}{2x}$

即 $y'=-\dfrac{2x}{y}$, $\int y\,\mathrm{d}y=\int -2x\,\mathrm{d}x$

通解：$\dfrac{1}{2}y^2=-x^2+C$, 由 $y(2)=3$, 得 $C=\dfrac{17}{2}$

∴ 所求曲线为： $y^2+2x^2=17.$

目录 上页 下页 返回 结束

例5-1 求方程 $\sin x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=5\sin x\cdot e^{\cos x}$ 的通解

解 将方程化为标准型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=5e^{\cos x},$$

则, $P(x)=\cot x,\qquad Q(x)=5e^{\cos x},$

利用公式 常数变易公式得通解

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$= e^{-\int \cot x \,\mathrm{d}x}\left[\int 5e^{\cos x} e^{\int \cot \mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= e^{-\ln|\sin x|}\left[5\int e^{\cos x} e^{\ln|\sin x|} \,\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \frac{1}{|\sin x|}\left[5\int e^{\cos x} \,|\sin x|\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[5\int e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[-5\cdot e^{\cos x} + C\right]$$

例6-1 求方程 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \sin y\,\mathrm{d}y$的通解

解 视x为函数，y为自变量，将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{y} = \frac{\sin y}{y}$$

这是一阶非齐次线性方 程，

$$P(y) = \frac{1}{y}, \qquad Q(y) = \frac{\sin y}{y}.$$

于是通解为

$$x = e^{-\int P(y)\,\mathrm{d}y}\left[\int Q(y) e^{\int P(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$x = e^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}\left[\int \frac{\sin y}{y}\cdot e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \frac{1}{|y|}\left[\int \frac{\sin y}{y}|y|\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \frac{1}{y}\left[\int \frac{\sin y}{y}\cdot y\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \frac{1}{y}\left[-\cos y + C\right].$$

例6-2 设函数 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

求$f(t)$.

分析 由于所给关系式是未知函数的二重积分，由二重积分的被积函数及积分域，将二重积分化为二次积分，而积分限为的 t 函数故通过求导可得出相应的微分方程.

解 由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^{2t}\rho\, f\left(\frac{\rho}{2}\right)\mathrm{d}\rho$$

所以 $f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi\int_0^{2t}\rho\, f\left(\frac{\rho}{2}\right)\mathrm{d}\rho$

两边求导得 $f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t\, f(t).$

即 $$f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi te^{4\pi t^2}$$

其通解为

$$f(t)=e^{\int 8\pi t\,\mathrm{d}t}\left[8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi t\,\mathrm{d}t}+C\right]$$

$$=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+C)$$

又题设知 $f(0)=1$,代入上式得 $C=1$, 因此

$$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}.$$

例6-3 设 $f(t)$连续，且

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V+t^3,$$

$t\ge 0$,求 $f(t)$.

解 $$f(t)=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+t^3$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

$$=12\pi\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

一阶线性方程

$$f'(t)=12\pi t^2 f(t)+3t^2,\quad f(0)=0.\qquad f(t)=?$$

$$f(t)=e^{\int_0^t 12\pi t^2\,\mathrm{d}t}\left[\int_0^t 3t^2 e^{-\int_0^t 12\pi t^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+0\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\int_0^t 3t^2 e^{-4\pi t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-4\pi t^3}\,\mathrm{d}(-4\pi t^3)\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}\Big|_0^t\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}+\frac{1}{4\pi}\right]=\frac{1}{4\pi}(e^{4\pi t^3}-1).$$

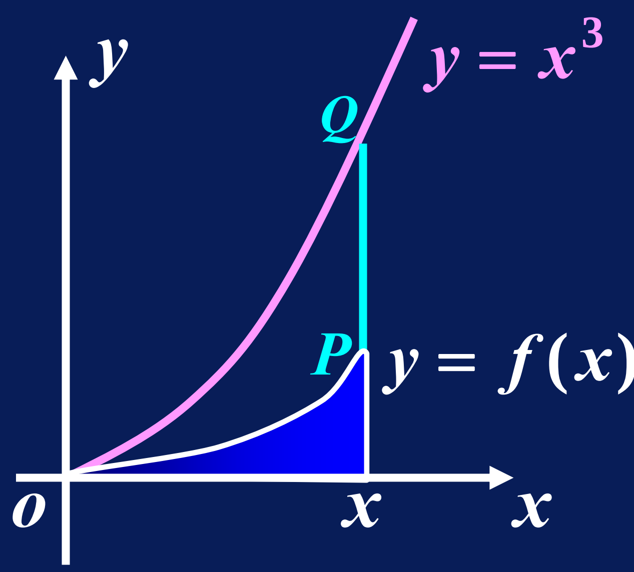
例6-4 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$

解 $\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 - f(x)$,

$\int_0^x y\,\mathrm{d}x = x^3 - y$,

两边求导得 $y' + y = 3x^2$,

解此微分方程



$$y' + y = 3x^2$$

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x}\left[C + \int 3x^2 e^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$.

例6-5 已知 $\varphi(\pi)=1$, $\varphi'(x)$连续, 试确定 $\varphi(x)$使曲线积分 $\int_L \underbrace{[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}}_{P}\mathrm{d}x+\underbrace{\varphi(x)}_{Q}\mathrm{d}y$与路径无关 .

解 依题设，知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

即 $[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{1}{x}=\varphi'(x)$

得

$$\boxed{\varphi'(x)+\frac{1}{x}\varphi(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \varphi(\pi)=1 \qquad \varphi(x)=?}$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\varphi(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

由 $\varphi(\pi)=1$, 得 $C=\pi-1$

$\therefore\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$