第四章（二）

1. 1) 对于 $\alpha_1=(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1)\in V_1$ 和 $\alpha_2=(a_2,b_2,c_2,d_2,e_2)\in V_2$

有 $a_1+b_1+c_1=0$, $a_2+b_2+c_2=0$

且 $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2,\ d_1+d_2,\ e_1+e_2)$

对 $\forall\lambda\in R$, $\lambda\alpha_1=(\lambda a_1,\ \lambda b_1,\ \lambda c_1,\ \lambda d_1,\ \lambda e_1)$

因为 $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0$, $\lambda a_1+\lambda b_1+\lambda c_1=0$

所以 $\alpha_1+\alpha_2\in V_1$, $\lambda\alpha_1\in V_1$, 即 V_1 是向量空间.

由题中所给 $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1=-x_2-x_3$. 所以在 V_1 中向量的一般形式为

$(-x_2-x_3,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$, 所以 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是一组基, 维数为4.

2) 对于 $\alpha_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_2$ 和 $\alpha_2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V_2$

$\alpha_1+\alpha_2=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)$

且 $x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=2$ 所以 $\alpha_1+\alpha_2\notin V_2$ 即 V_2 不构成向量空间.

3). 对于 $\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\in V_3$ 和 $\beta_2=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$

$\beta_1+\beta_2=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+(k_3+l_3)\alpha_3$

$\forall\lambda\in R$, $\lambda\beta_1=k_1\lambda\alpha_1+k_2\lambda\alpha_2+k_3\lambda\alpha_3$.

因为 k_1+l_1, k_2+l_2, k_3+l_3, λk_1, λk_2, λk_3 均是实数, 所以 V_3 是向量空间.

又因为 V_3 中的向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示, 所以 V_3 的基即是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组, 所以 $\alpha_1,\alpha_2/\alpha_2,\alpha_3/\alpha_1,\alpha_3$ 均可为基, 且 $\dim V_3=2$

2. 证明 α_1,α_2 和 β_1,β_2 等价即可

$$\begin{array}{c}\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2\\ \begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\end{array}\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

这时可看出 α_1,α_2 和 β_1,β_2 可以互相线性表出.

3. $\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

标准化：

$$\beta_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$\beta_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\beta_3=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

4. $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=E\cdot A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=E\cdot B$$

因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}=E$，所以 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

所以过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

(2). $$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

5. 1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}-3&2&5&5\\5&-3&-8&-8\\-13&-13&-5&8\\-5&-5&-2&3\end{pmatrix}=EA$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}2&3&0&0\\-3&-5&0&0\\0&0&8&5\\0&0&3&2\end{pmatrix}=EB$

$E=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)B^{-1}$ 所以 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)B^{-1}A$

对 $\begin{pmatrix}2&3&0&0&-3&2&5&5\\-3&-5&0&0&5&-3&-8&-8\\0&0&8&5&-13&-13&-5&8\\0&0&3&2&-5&-5&-2&3\end{pmatrix}$ 作初等行变换，得 $B^{-1}A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$

2). 设 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4$

可得 $\begin{cases}-4=2k_1+3k_2\\7=-3k_1-5k_2\\4=8k_3+3k_4\\1=5k_3+2k_4\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1\\k_2=-2\\k_3=3\\k_4=-4\end{cases}$ 所以坐标为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}$

3). 设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4$

则 $\begin{cases}-3k_1+2k_2+5k_3+5k_4=2k_1+3k_2\\5k_1-3k_2-8k_3-8k_4=-3k_1-5k_2\\-13k_1-13k_2-5k_3+8k_4=8k_3+5k_4\\-5k_1-5k_2-2k_3+3k_4=3k_3+2k_4\end{cases}$

该方程组系数矩阵行列式不为0，所以坐标为 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

而这样的坐标对应的向量为零向量，

所以不存在

6.(1) $\beta_2=\alpha_4-\beta_3=\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2$

$\beta_1=\alpha_3-\beta_2=\alpha_3-\alpha_4+\alpha_1+\alpha_2$

所以 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&-1&1&1\\1&0&0&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}$

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&-1&1&1\\1&0&0&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1&0&0&0\\1&-1&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0\\-1&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1&1&0\\0&1&0&0&1&-1&1&1\\0&0&1&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

所以坐标为 $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&-1&1&1\\1&0&0&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\5\\1\end{pmatrix}$

7.(1) $\begin{pmatrix}2&-1&1&-2\\-1&1&2&1\\1&-1&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&5&0\\-1&1&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

所以 $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\x_2+5x_3=0\\3x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=-5x_3\\x_4=0\end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\\0\end{pmatrix}$ 通解为 $x=k\xi$

(2) 系数矩阵秩为2. 所以基础解系只有1个向量. 且解得 $x_1=x_2=0$

所以基础解系为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 2&2&1&1&-3\\ 0&1&2&2&6\\ 3&4&3&3&-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&-1&-2&-2&-6\\ 0&1&2&2&6\\ 0&-1&-2&-2&-6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&-1&-2&-2&-6\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

所以基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

(4) $\begin{pmatrix} 1&2&5\\ 1&3&-2\\ 3&7&8\\ 1&4&-8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&5\\ 0&1&-7\\ 0&1&-7\\ 0&2&-13 \end{pmatrix}$ 解为 $x=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，无基础解系.

8. 证明：若 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_r$ 线性相关，则 η^* 可被 ξ_i $(i=1,\cdots,r)$ 线性表出

而 ξ_i 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，所以 η^* 也是一个解，则与题中条件

矛盾，所以 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_r$ 线性无关.

9. 证明：由题意，$A\eta_0=b$，$A\eta_1=b$，所以 $A(\eta_1-\eta_0)=0$，即 $\eta_1-\eta_0$ 是 $AX=0$ 的解. 同理，$\eta_2-\eta_0, \cdots, \eta_{n-r}-\eta_0$ 均为 $AX=0$ 的解.

又由 A 为秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，所以 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个向量.

再设 $k_1(\eta_1-\eta_0)+k_2(\eta_2-\eta_0)+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_0)=0$，可解得 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$

所以 $\eta_1-\eta_0, \cdots, \eta_{n-r}-\eta_0$ 线性无关，所以是 $AX=0$ 的一个基础解系.

10. 先求基础解系：四元非齐次线性方程组系数矩阵秩为3，所以基础解系只含有1个向量. 而 $A(\eta_2-\eta_3)=0$，所以 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ 正好是一个基础解系.

再求特解：由 $A\eta_1=b$ 和 $A\eta_2=b$，有 $A(\eta_1+\eta_2)=2b$

所以 $\frac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为一个解. 所以解的通解为 $x=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}+k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$k$任意.

11. 由于 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以可知 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\beta$ 的一个解. 再求基础解系即可.

又由于A的秩为3，所以其基础解系只有1个向量，且满足 $Ax=0$，设为 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}$

即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=0 \Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

$\Rightarrow 2k_1\alpha_2-k_1\alpha_3+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0 \Rightarrow \begin{cases}2k_1+k_2=0\\k_3-k_1=0\\k_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_1=1\\k_2=-2\\k_3=1\\k_4=0\end{cases}$

所以通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$k$任意

12. B的列是 $Ax=0$ 的解. 答案不唯一

$\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}18&-18&9&27\\18&-10&4&16\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\0&8&-5&-11\end{pmatrix}$

$\begin{cases}2x_1-2x_2=-x_3-3x_4\\8x_2=5x_3+11x_4\end{cases}$ $\begin{pmatrix}1&-1&0\\5&11&16\\8&0&8\\0&8&8\end{pmatrix}$

13. (1). (I) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 秩为2，所以基础解系有2个向量

由 $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$，得 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 所以通解为 $x = k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为2，所以基础解系有2个向量

由 $\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$ 得 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 所以通解为 $x = k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$ => 基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 公共解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. 1) (0,1,0) 和 (0,0,1)，错

2) 相当于 $Ax=b$ 的两个解 x_1, x_2 之和还是解，错

3) $(\alpha_1, \cdots \alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n个} = 0$，对

4) 2维空间，错

5). 最多4个线性无关的向量，对

6). 错

15. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ 的秩为2，初等变换后 $a=6$

(2) 过渡矩阵可逆，所以 $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{vmatrix}\neq 0$

所以 $(a-1)(-2-a)(-1+a)\neq 0$　所以 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$.

基础解系含1个向量，说明 $r(A)=2$，此时 $a=-2$

(3). 由题意 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0$ $i=1,2,\cdots n$，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $AX=0$ 的一个解，所以通解为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$ 有 $\alpha_1=\alpha_3$，所以选 C

(5). $AX=0$ 基础解系有1个线性无关解向量，所以 $r(A)=3$

又由 $A^*A=|A|E=0$，所以 $r(A)+r(A^*)\leq 4$.

所以 $r(A^*)\leq 1$.

而 $r(A)=3$. 所以至少有1个3阶子式不为零，这说明 $r(A^*)\neq 0$.

所以 $r(A^*)\geq 1$，所以 $r(A^*)=1$. 所以有3个解向量.

附加题

1. $\cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ ①

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) B$

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) A$

所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) A^{-1}B$. ②

把②代入①. $A^{-1}B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

而由题意: $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 5x_2 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 \\ y_3 = 2x_3 - 3x_4 \\ y_4 = -5x_3 + 8x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

所以过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \beta_1 = (0,1,1,1)$ $\beta_2 = (1,0,1,1)$ $\beta_3 = (1,1,0,1)$

$\beta_4 = (1,1,1,0)$

2. $Ax=0$ 基础解系只含有1个向量, 所以 $r(A)=3$. 所以 $r(A^*)=1$,

所以 $A^*x=0$ 基础解系含有3个向量.

又由 $A^*A = |A|E = 0$ 且 $r(A)=3$. 所以 A 的列向量组中含有 $A^*x=0$ 的基础解系

由 $(0,1,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的解 得 $\alpha_2 = -\alpha_3$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ / $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

为基础解系.

3、三个平面不互相平行且都过一条直线

都~~平~~过一条直线说明方程组有无穷解

此时 $r(A)=r(\hat{A})=1$ 或 2.

而当 ~~r(A)=~~ $r(A)=r(\hat{A})=1$ 时，三个平面应是重合的，所以 $r(A)=r(\hat{A})=2$.

4. (1) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&a\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}b+c+1=1\\2b+3c+a=1\\b+2c+3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=2\\c=-2\end{cases}$

(2) $(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

所以过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$