



# 第四部分 数理逻辑



- 命题与命题联结词
- 命题变元与命题公式
- 重言式
- 命题逻辑的基本等式及等式推理
- 命题逻辑的基本蕴涵式及蕴涵推理
- 范式
- 命题联结词的扩充与归约



回顾前面学过的每个命题联结词的真值表

表 10.13 命题联结词定义表

$P$	$Q$	命题联结词
T	T	$U_1$
T	F	$U_2$
F	T	$U_3$
F	F	$U_4$

其中  $U_i (i=1,2,3,4)$  可取两个值 T, F, 故可得  $2^4 = 16$  张表. 由此可得结论: 命题联结词最多有 16 个.



$P$	$Q$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
		永	或	蕴	蕴	合	$P$	$Q$	等	异	恒	恒	与	蕴	析	蕴	永
		假	非	含	含	取	非	非	值	或	等	等	非	含	取	含	真
				否	否						$Q$	$P$					
				定	定												
		**	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$	*	*	*	*	$\triangle$	**	**	$\triangle$	*	*	*	**

注：表中 \* 表示已定义，\*\* 表示意义不大， $\triangle$  表示可再定义。



## 命题联结词的扩充

- (1) 异或联结词:  $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$
- (2) 谢佛联结词:  $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$       与非
- (3) 魏泊联结词:  $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$       或非
- (4) 蕴涵否定联结词:  $A \nrightarrow B = \neg(A \rightarrow B)$

与之前学习的五种联结词一起，穷尽了一切命题间的（真值函项）联结词



设 $S$ 是一个联结词集合，如果任何公式都可以由仅含 $S$ 中的联结词表示，则称 $S$ 是**联结词完备集**

**定理**  $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集

**证明** 由范式存在定理可证

**范式存在定理**——任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。



**推论** 以下都是联结词完备集

- (1)  $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
- (2)  $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (3)  $S_3 = \{\neg, \wedge\}$
- (4)  $S_4 = \{\neg, \vee\}$
- (5)  $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

**证明**

(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

$$(3) A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$(4) A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(5) A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集, 0不能用它表示

它的子集 $\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 等都不是

注意:  $\{\uparrow\}$ 、 $\{\downarrow\}$ 是完备集,  $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完备集。



**THE END**