第三节

多元函数的全微分

- 一、全微分的概念
- 二、可微的条件

一、全微分的概念

1. 问题的提出

一元函数 $y=f(x)$ 的增量：

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

（当一元函数 $y=f(x)$ 可导时）

函数的微分

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$$

二元函数 $z=f(x,y)$：

$$\Delta_x z = \underline{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}$$

对 x 的偏增量

（当二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数存在时）

$$= \underline{f_x(x,y)\Delta x} + o(\Delta x)$$

对 x 的偏微分

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

对y的偏增量

（当二元函数 $z = f(x, y)$ 对y的偏导数存在时）

$$= \underline{f_y(x, y)\Delta y} + o(\Delta y)$$

对y的偏微分

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

在点(x,y)的全增量

问题 可否用自变量的增量Δx、Δy 的线性函数来近似代替函数的全增量？

2. 全微分的定义

定义8.7 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示成

$$\Delta z = \boxed{A\Delta x + B\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 Δx, Δy, 仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 将 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分, 记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

注 1° 若函数在域 D 内各点都可微, 则称此函数在D 内可微.

2° 由定义可知, $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 可微的充要条件是:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$$

$$=\boxed{\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}=0.}$$

二、可微的条件

1. 可微与连续、可偏导的关系

定理8.2 (多元函数可微的必要条件)

若函数 $z = f(x, y)$ 在点(x, y) 可微 ,则

(1) 函数 $z = f(x, y)$ 在点(x, y) 连续;

(2) 函数$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 的两个偏导数 $f_x(x, y)$,

$f_y(x, y)$ 存在, 且有 $A = f_x(x, y)$,$B = f_y(x, y)$

从而 $\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y.$

证 若$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 可微 , 则

$$\Delta z = (A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)$$

(1) $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = \lim\limits_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$

从而 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$

即 $z = f(x,y)$在点(x,y)处连续.

(2) 由可微定义，有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

令 $\Delta y = 0$，得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \quad f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right) = A$$

同样可证 $f_y(x,y) = B$,

注 1° 习惯上把自变量的增量用自变量的微分表示,

因此有 $\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y.$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

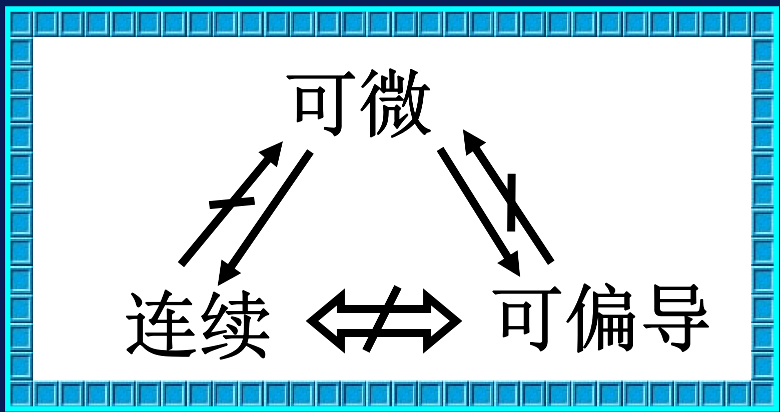
全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

叠加原理也适用于二元以上函数的情况.

2° 可微与连续、可偏导的关系

对于多元函数,



3° 如何判断多元函数的可微性

①若不连续，则不可微；

②若偏导数不存在，则不可微；

③连续且偏导数存在时,用可微的充要条件判断:

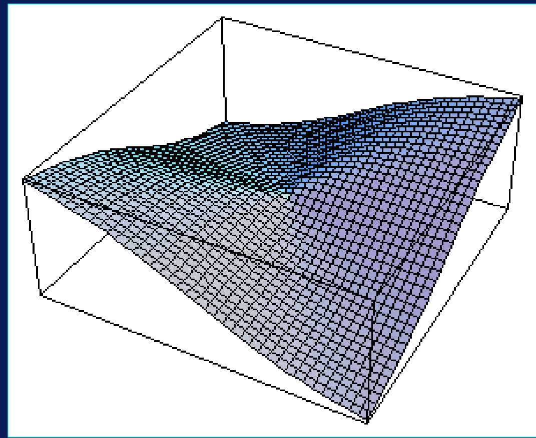
用此式判断
函数在一点
是否可微

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\rho} \qquad \boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - (f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y)}{\rho} \overset{?}{=} 0.$$

例1 讨论

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$



在点 (0,0)处，是否

(1) 连续；(2) 偏导数存在；(3) 可微.

解 (1) $\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho\cdot(\cos\theta\sin\theta)=0=f(0,0)$$

$\therefore \quad f(x,y)$在$(0,0)$处连续

$$(2)\quad f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x\cdot 0}{\sqrt{x^2+0}}-0}{x}=0$$

同理 $f_y(0,0)=0$

$\therefore \quad f(x,y)$在$(0,0)$处偏导数存在.

(3) 令 $\omega = \underline{f(x,y) - f(0,0)} \; \underline{-[f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y]}$

$$= \underline{\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad \underline{-0} \quad = \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

如果考虑点$P'(x,y)$沿着直线$y=x$趋近于$(0,0)$，

则 $$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(y=x)}} \frac{\omega}{\rho} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\(y=x)}} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\(y=x)}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\because \quad \lim_{\substack{\rho\to 0\\(y=x)}} \frac{\omega}{\rho} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad \lim_{\rho\to 0} \frac{\omega}{\rho} \neq 0$$

$$\therefore \quad \omega \neq o(\rho) \qquad (\rho \to 0)$$

即 $\Delta z - [f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y] \neq o(\rho),$

$\therefore$ $f(x, y)$ 在点(0,0)处不可微.

2. 可微与偏导数连续的关系

定理8.3 (多元函数可微的充分条件)

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 连续,则函数 $f(x,y)$ 在该点可微.

证 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

由有限增量公式

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2 \Delta y)\Delta y$$

$$(0<\theta_1, \theta_2<1)$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= \underline{f_x(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y)}\Delta x + \underline{f_y(x,\, y+\theta_2\Delta y)}\Delta y$$

$$\boxed{(0<\theta_1\,,\theta_2<1)}$$

$$= [\,f_x(x, y) + \alpha\,]\Delta x + [\,f_y(x, y) + \beta\,]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0,\quad \lim_{\Delta y\to 0} \beta = 0 \right)$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \underbrace{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}$$

只须证这一部分是比 ρ 高阶的无穷小

注意到

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| \le \left|\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\rho}\right|+\left|\beta\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\right| \qquad (\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$\le |\alpha|+|\beta|$$

故有 $\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$

即函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微.

偏导数连续 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 可微

目录 上页 下页 返回 结束

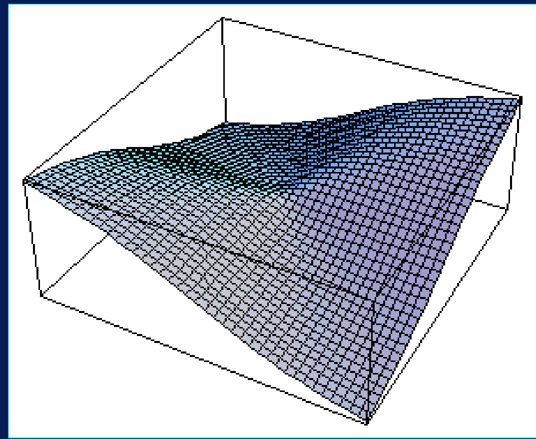
例2 试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ 在点

(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在点(0,0)不连续，而 $f(x,y)$在点(0,0)可微.

分析 对于偏导数,需就$(x,y)\neq(0,0)$，$(x,y)=(0,0)$两种情形讨论其连续性.

证　令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$



则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\frac{1}{\rho}=0=f(0,0),$$

故函数在点 (0, 0) 处连续；

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

同理 $f_y(0,0)=0.$

目录　上页　下页　返回　结束

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当点$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right)$$

不存在. 所以$f_x(x,y)$在$(0,0)$不连续.

同理可证$f_y(x,y)$在$(0,0)$不连续.

下面证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微 .

令 $\rho=\sqrt{(x)^2+(y)^2}$, 则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}\right|$$

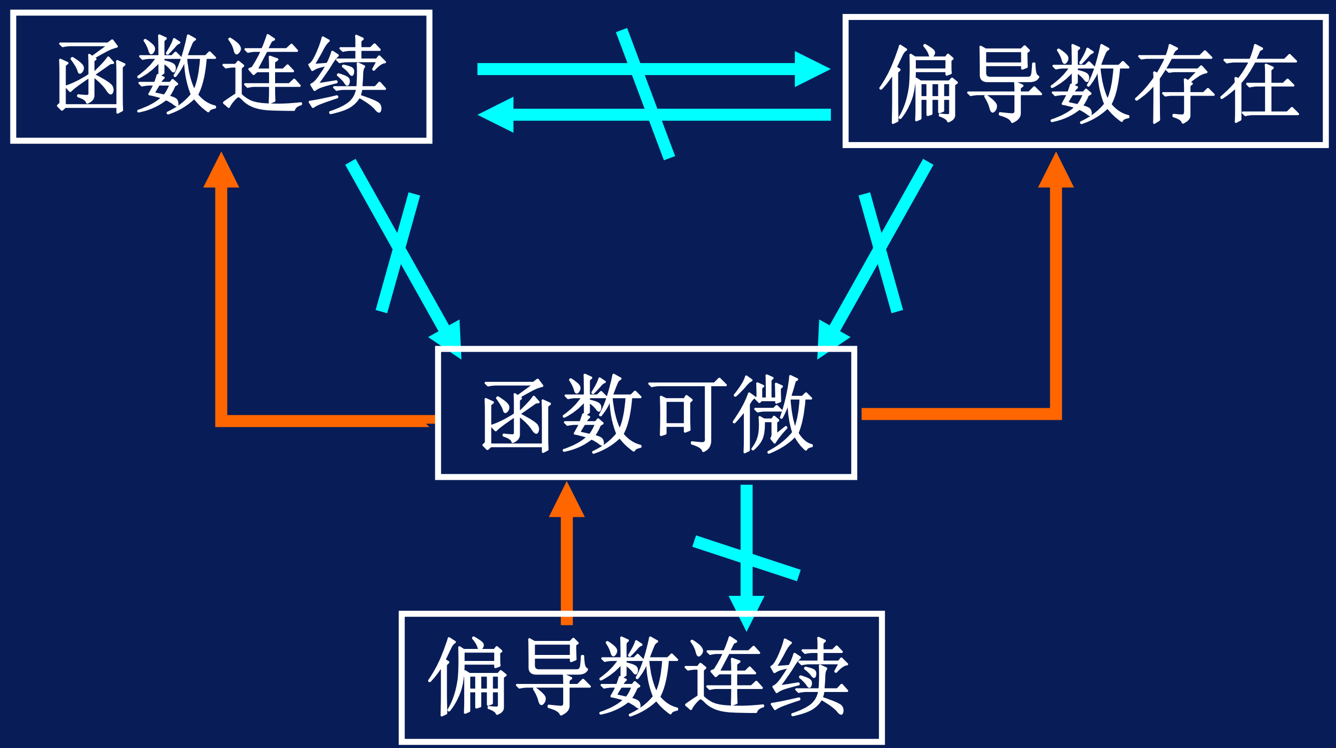
$$=\left|\frac{x\cdot y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|x|\xrightarrow{\rho\to 0}0$$

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微 ,且 $\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}=0.$

注 此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.

而非必要条件.

多元函数连续、偏导数、可微的关系



例3 求函数 $z = \sin(x^2 + y^2)$的全微分 .

解 因为

$$z_x = 2x\cos(x^2 + y^2),$$

$$z_y = 2y\cos(x^2 + y^2),$$

所以 $\mathrm{d}z = 2x\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x + 2y\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$= 2\cos(x^2 + y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y).$$

例4 计算函数$z = e^{xy}$ 在点 (2,1) 处的全微分.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore \quad \left. \mathrm{d} z \right|_{(2,1)} = e^2 \mathrm{d} x + 2e^2 \mathrm{d} y = e^2 (\mathrm{d} x + 2\mathrm{d} y)$$

例5 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,$ $\Delta y=-0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z\Big|_{\substack{x=2,\,\Delta x=0.01\\ y=1,\,\Delta y=-0.03}}$

$$=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\right]\Big|_{\substack{x=2,\,\Delta x=0.01\\ y=1,\,\Delta y=-0.03}}$$

$$=\frac{2.01\times0.97}{2.01^2-0.97^2}-\frac{2\times1}{2^2-1^2}\approx0.6291-0.6667=-0.0376;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x^2-y^2)-xy\cdot2x}{(x^2-y^2)^2}=-\frac{y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x^2-y^2)+xy\cdot 2y}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

当 $x=2$, $y=1$, $\triangle x=0.01$, $\triangle y=-0.03$ 时

$$\frac{\partial z}{\partial x}\approx -0.5556, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\approx 1.1111,$$

从而 $\mathrm{d}\,z\Big|_{\substack{x=2,\,\Delta x=0.01\\ y=1,\,\Delta y=-0.03}}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{\substack{x=2,\,\Delta x=0.01\\ y=1,\,\Delta y=-0.03}}$

$$\approx -0.5556\times 0.01+1.1111\times(-0.03)$$

$$=-0.0389.$$

内容小结

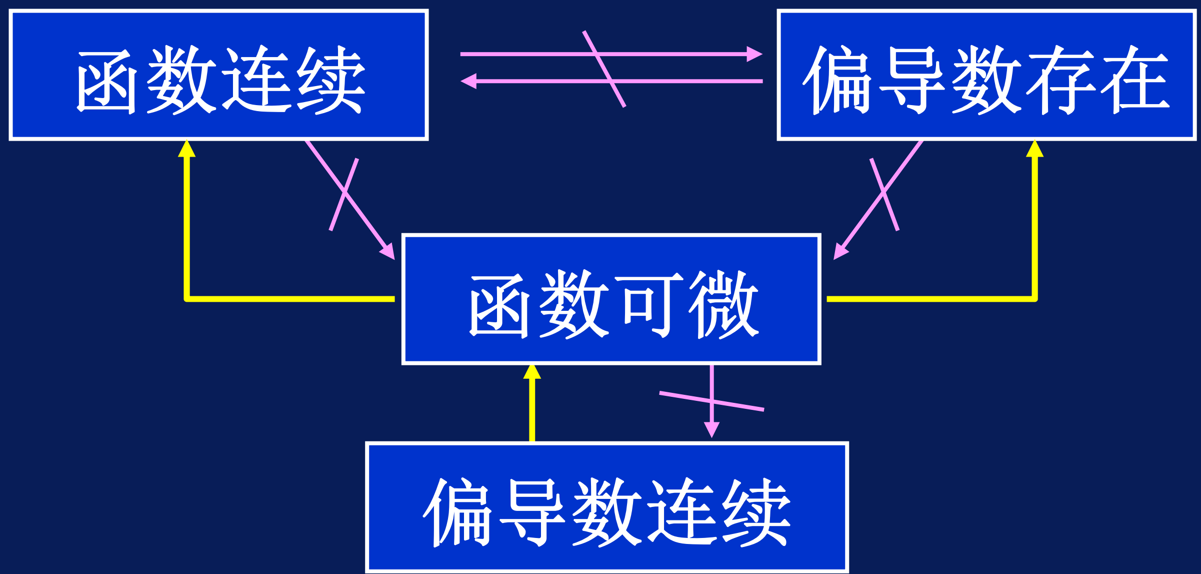
1. 微分定义: ($z = f(x, y)$)

$$\Delta z = \underline{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



3. 讨论函数在（0，0）点是否可微的步骤

(1) 讨论函数在(0,0)点是否连续,若不连续, 则不可微;

(2) 讨论函数在(0,0)点的偏导数是否存在,若不存在, 则不可微;

(3) 当函数在(0,0)点连续，且偏导数存在时，用下式讨论函数在(0,0)点是否可微

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

目录　上页　下页　返回　结束

思考题

函数 $z = f(x, y)$在 (x_0, y_0) 可微的充分条件是(D)

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续;

(B) $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$在 (x_0, y_0)的某邻域内存在;

(C) $\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量;

(D) $\dfrac{\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量.

备用题

例1-1 考察函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？偏导数是否存在？是否可微？

解 $$0\le\sqrt{|xy|}\le\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\to 0\quad((x,y)\to(0,0))$$

$f(0,0)=0$, 故函数在点 $(0,0)$ 处连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x\cdot 0|}-0}{x}=0,$$

$\therefore\ f_x(0,0)=0.$ 同理, $f_y(0,0)=0.$

目录 上页 下页 返回 结束

下面讨论函数在 (0,0)点是否可微．即考察极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

若等于零，则函数可微；否则函数不可微．

事实上，沿直线 $y=x$, 有

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xx|}}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

故函数在 (0, 0)点不可微．

例1-2 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在(0,0)点是否可微？偏导数是否连续？

解 易知此函数在 (0,0)点连续，偏导数存在 .

现讨论它在 (0,0)点是否可微 .

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

故函数在 $(0,0)$点可微 .

已知 $f_x(0,0) = 0$, 又当$(x, y) \neq (0,0)$时

$$f_x(x, y)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)}$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

故$f_x(x,y)=$

$$\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$

不存在

故$f_x(x,y)$在$(0,0)$点不连续，即函数 $z=f(x,y)$

在点$(0,0)$可微，但偏导数不连续

例3-1 求函数 $z = xy + \frac{y}{x}$ 的全微分 .

解 函数在 $x \neq 0$ 的所有点处有连续偏导 数，

从而可微

$$\mathrm{d}z = \left(y - \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y .$$

例3-2 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 $\mathrm{d}u = 1\cdot \mathrm{d}x + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz})\mathrm{d}y$

$+ ye^{yz}\mathrm{d}z$

$$= \mathrm{d}x + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz})\mathrm{d}y + ye^{yz}\mathrm{d}z$$

例4-1 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$当$x=1$, $y=2$时的全微分 .

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y.$

例4-2 设 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$,

求 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}$.

注意: x, y, z 具有轮换对称性

解 $\because\ f(x,0,0)=\dfrac{x}{3+\cos x}$

$$\therefore\ f_x(0,0,0)=\left(\frac{x}{3+\cos x}\right)'\bigg|_{x=0}=\frac{1}{4}$$

利用轮换对称性, 可得

$$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}=f_x(0,0,0)\,\mathrm{d}x+f_y(0,0,0)\,\mathrm{d}y+f_z(0,0,0)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

例5-1 求函数 $z=\ln\frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1,$ $\Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分 .

解 全增量 $\Delta z=f(2+0.1,1-0.2)-f(2,1)$

$$=\ln\frac{0.8}{2.1}-\ln\frac{1}{2}\approx -0.2719$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.-\frac{1}{x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=-\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.\frac{1}{y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=1,$$

$$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2,y=1\\ \Delta x=0.1,\Delta y=-0.2}} = -\frac{1}{2}\times 0.1 + 1\times(-0.2)$$

$$= -0.25 .$$