离 散 数 学

西北工业大学

2022年4月29日星期五

Lecture9 Trees

第9章 树

树是图论中的一个非常重要的概念，而在计算机科学中有着非常广泛的应用，例如现代计算机操作系统均采用树形结构来组织文件和文件夹，本章介绍树的基本知识和应用。

在本章中，所谈到的图都假定是简单图；所谈到的回路均指简单回路或基本回路。并且同一个图形表示的回路(简单的或基本的)，可能有不同的交替序列表示方法，但我们规定它们表示的是同一条回路。

9.0 内容提要

1. 与树相关的概念： 树、森林、根树、根、叶、分支点、生成树、最小生成树、k元树、k元完全树子树、有序树、祖先与后代、父亲与儿子、最优树等；
2. 树的基本性质：$m = n-1$等；
3. 树的算法：求生成树与最小生成树的算法、求最优树的算法、二元树遍历的算法、根树与二元树相互转化的算法等；
4. 树的应用。

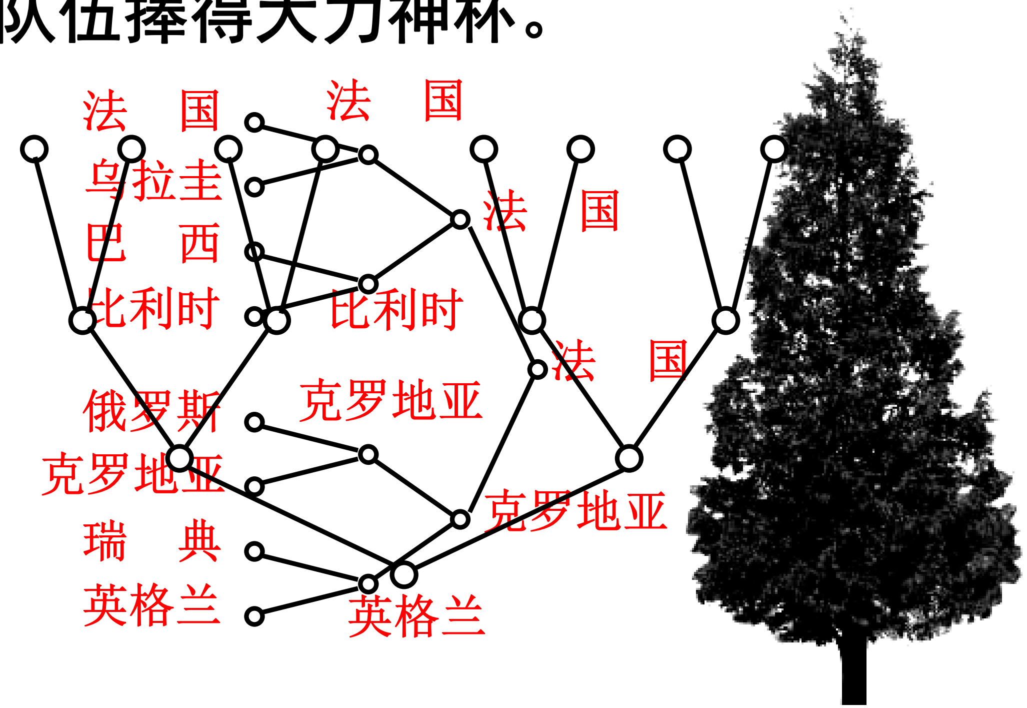
9.1 本章学习要求

重点掌握	一般掌握	了解
1	2	3
1 与树相关基本概念 2 树的性质 3 树的基本算法	树的算法	1 树的同构 2 树的应用

9.2 树

9.2.1 树的定义与性质

例9.2.1 2018年俄罗斯世界杯8强的比赛结果图，最后获胜的队伍捧得大力神杯。



定义9.2.1

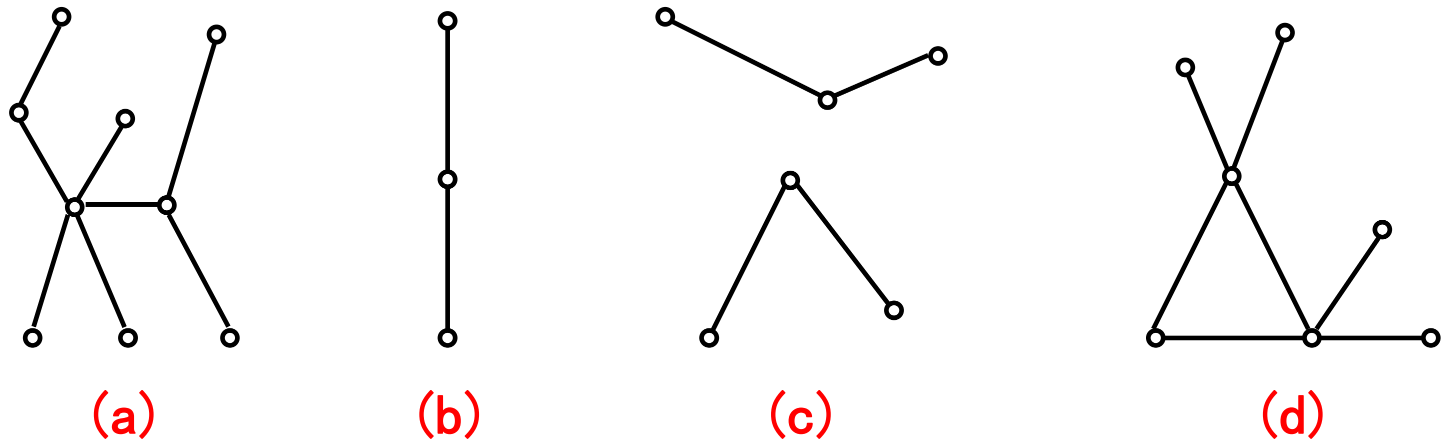
- 连通而不含回路的无向图称为无向树(Undirected Tree)，简称树(Tree)，常用T表示树。
- 树中度数为1的结点称为叶(Leaf)；度数大于1的结点称为分支点(Branch Point)或内部结点(Interior Point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(Forest)。
- 平凡图称为平凡树(Trivial Tree)。

➢ 树中没有环和平行边，因此一定是简单图

➢ 在任何非平凡树中，都无度数为0的结点。

例9.2.2

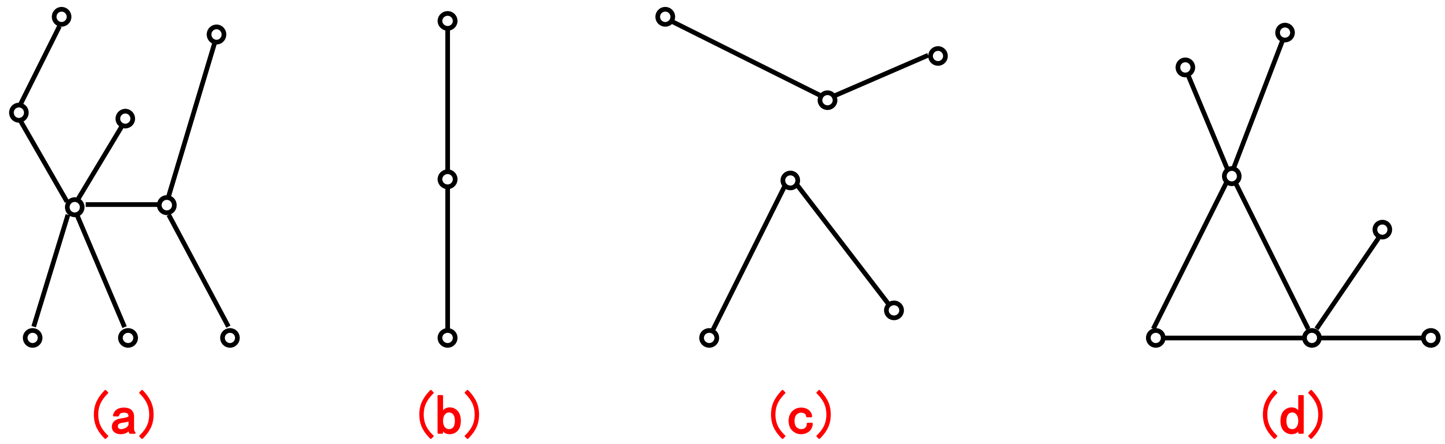
判断下图中的图哪些是树？为什么？



分析 判断无向图是否是树，根据定义9.2.1，首先看它是否连通，然后看它是否有回路。

例9.2.2

判断下图中的图哪些是树？为什么？



解 图(a)、(b)都是连通，并且不含回路，因此是树；图(c)不连通，因此不是树，但由于它不含回路，因此是森林；图(d)虽然连通，但存在回路，因此不是树。

树的性质

定理9.2.1 设无向图G = <V,E>，|V| = n，|E| = m，下列各命题是等价的：

① G连通而不含回路(即G是树)；

② G中无回路，且m = n-1；

③ G是连通的，且m = n-1；

④ G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路；

⑤ G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通；(n≥2)

⑥ G中每一对结点之间有惟一一条基本通路。(n≥2)

分析

直接证明这6个命题两两等价工作量太大，一般采用循环论证的方法，即证明

$$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(1)$$

然后利用传递性，得到结论。

证明 (1) (2)：⟹

① G连通而不含回路（即G是树）

② G中无回路，且m = n-1；

对n作归纳。n = 1时，m = 0，显然有m = n-1。假设n = k时命题成立，现证n = k+1时也成立。

由于G连通而无回路，所以G中至少有一个度数为1的结点v_0，在G中删去v_0及其关联的边，便得到k个结点的连通而无回路的图，由归纳假设知它有k-1条边。再将结点v_0及其关联的边加回得到原图G，所以G中含有k+1个结点和k条边，符合公式m = n-1。

所以，G中无回路，且m = n-1。

(2) (3)：⇒

② G中无回路，且m = n-1；
③ G是连通的，且m = n-1；

证明只有一个连通分支。

设G有k个连通分支G_1，G_2，…，G_k，其结点数分别为n_1，n_2，…，n_k，边数分别为m_1，m_2，…，m_k，且 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$， $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$。

由于G中无回路，所以每个G_i(i = 1, 2, …, k)均为树，因此$m_i = n_i-1$(i = 1, 2, …, k)，于是

$$m=\sum_{i=1}^{k} m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k=n-1$$

故k = 1，所以G是连通的，且m = n-1。

③ G是连通的，且$m = n-1$；

④ G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路；

(3) ⇒ (4)：

首先证明G中无回路。对n作归纳。

$n = 1$时，$m = n-1 = 0$，显然无回路。

假设结点数$n = k-1$时无回路，下面考虑结点数$n = k$的情况。因G连通，故G中每一个结点的度数均大于等于1。可以证明至少有一个结点v_0，使得$\deg(v_0) = 1$，因若k个结点的度数都大于等于2，则$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2k$，从而$m \geq k$，即至少有k条边，但这与$m = n-1$矛盾。

在G中删去v0及其关联的边，得到新图G’，根据归纳假设知G’无回路，由于$deg(v_0) = 1$，所以再将结点v_0及其关联的边加回得到原图G，则G也无回路。

其次证明在G中任二结点v_i，v_j之间增加一条边(v_i, v_j)，得到一条且仅一条基本回路。

由于G是连通的，从v_i到v_j有一条通路L，再在L中增加一条边(v_i, v_j)，就构成一条回路。若此回路不是惟一和基本的，则删去此新边，G中必有回路，得出矛盾。

(4) (5)：⇒

④ G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路；

⑤ G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通；(n≥2)

若G不连通，则存在两结点v_i和v_j，在v_i和v_j之间无通路，此时增加边(v_i, v_j)，不会产生回路，但这与题设矛盾。

由于G无回路，所以删去任一边，图便不连通。

(5) (6)：⇒

⑤ G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通；(n≥2)

⑥ G中每一对结点之间有惟一一条基本通路。(n≥2)

由于G是连通的，因此G中任二结点之间都有通路，于是有一条基本通路。若此基本通路不惟一，则G中含有回路，删去回路上的一条边，G仍连通，这与题设不符。所以此基本通路是惟一的。

(6) (1)：⇒

⑥ G中每一对结点之间有惟一一条基本通路。(n≥2)

① G连通而不含回路(即G是树)；

显然G是连通的。若G中含回路，则回路上任二结点之间有两条基本通路，这与题设矛盾。因此，G连通且不含回路。

树的特点

由定理9.2.1(4)

由定理9.2.1(5)

在结点给定的无向图中，

树是边数最多的无回路图

树是边数最少的连通图

由此可知，在无向图G = (n, m)中，

若m＜n-1，则G是不连通的

若m＞n-1，则G必含回路

定理9.2.2

任意非平凡树T =（n, m）都至少有两片叶。

分析　利用握手定理和m = n-1即可。

证明　因树T是连通的，从而T中各结点的度数均大于等于1。设T中有k个度数为1的结点(即k片叶)，其余的结点度数均大于等于2。于是由握手定理

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq k + 2(n - k) = 2n - k$$

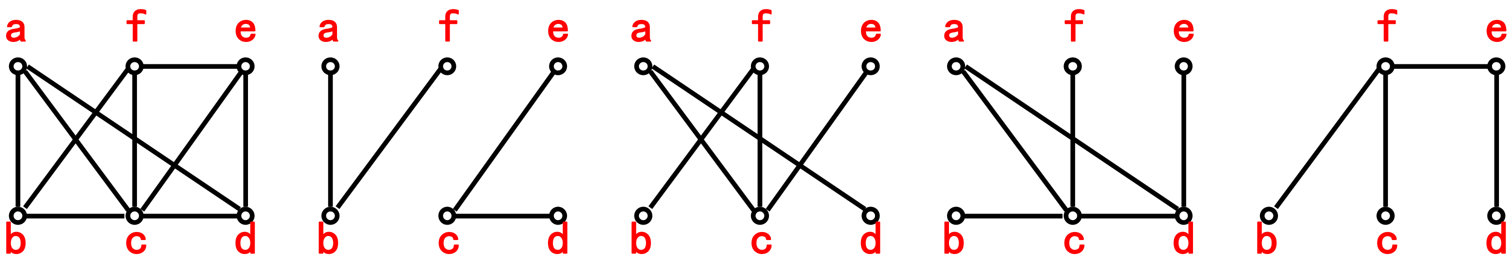
由于树中有m = n-1，于是2(n-1)≥2n-k，因此可得k≥2，这说明T中至少有两片叶。

9.2.2 生成树

定义9.2.2 给定图G = <V, E>，若G的某个生成子图是树，则称之为G的生成树(Spanning Tree)，记为T_G。生成树T_G中的边称为树枝(Branch)；G中不在T_G中的边称为弦(Chord)；T_G的所有弦的集合称为生成树的补(Complement)。

例9.2.3

判断下图中的图(b)、(c)、(d)、(e)是否是图(a)的生成树。

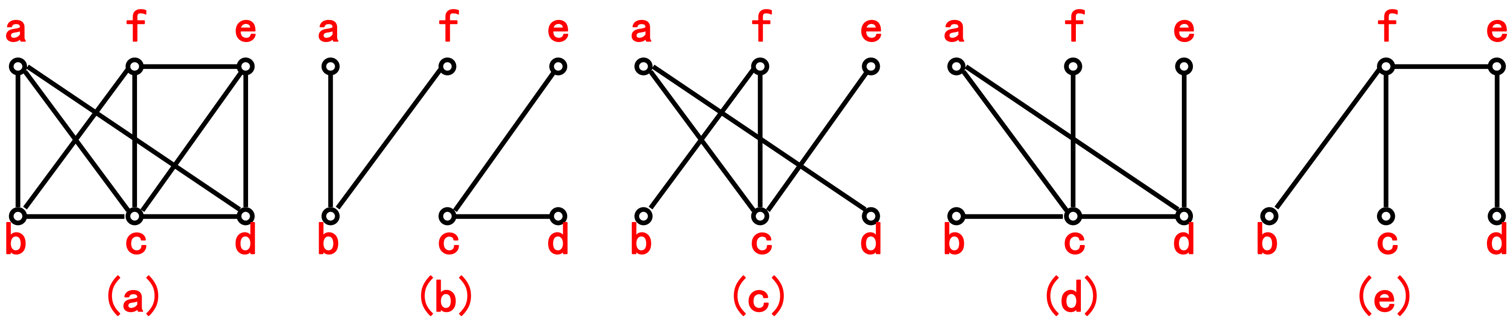


(a) (b) (c) (d) (e)

分析 判断是否是生成树，根据定义9.2.2，首先看它是否是树，然后再看它是否是生成子图。由于图(b)和(d)不是树，图(e)不是生成子图，因此它们都不是图(a)的生成树，而图(c)既是树，又是生成子图，因此是生成树。

例9.2.3

判断下图中的图(b)、(c)、(d)、(e)是否是图(a)的生成树。



解 图(b)、(d)和(e)不是图(a)的生成树，图(c)是图(a)的生成树，其中边(a, c)、(a, d)、(b, f)、(c, f)、(c, e)是树枝，而(a, b)、(b, c)、(c, d)、(d, e)、(e, f)是弦。

定理9.2.3

一个图G = <V, E>存在生成树T_G = <V_T, E_T>的充分必要条件是G是连通的。

分析　必要性由树的定义即得，充分性利用构造性方法，具体找出一颗生成树即可

定理9.2.3

一个图G = <V, E>存在生成树T_G = <V_T, E_T>的充分必要条件是G是连通的。

证明 必要性：假设T_G = <V_T, E_T>是G = <V, E>的生成树，由定义9.2.1，T_G是连通的，于是G也是连通的。

充分性：假设G = <V, E>是连通的。如果G中无回路，G本身就是生成树。如果G中存在回路C_1，可删除C_1中一条边得到图G1，它仍连通且与G有相同的结点集。如果G_1中无回路，G_1就是生成树。如果G_1仍存在回路C_2，可删除C_2中一条边，如此继续，直到得到一个无回路的连通图H为止。因此，H是G的生成树。

破圈法与避圈法

- **算法9.2.1** 求连通图G = <V, E>的生成树的破圈法：

  每次删除回路中的一条边，其删除的边的总数为m-n+1。

- **算法9.2.2** 求连通图G = <V, E>的生成树的避圈法：

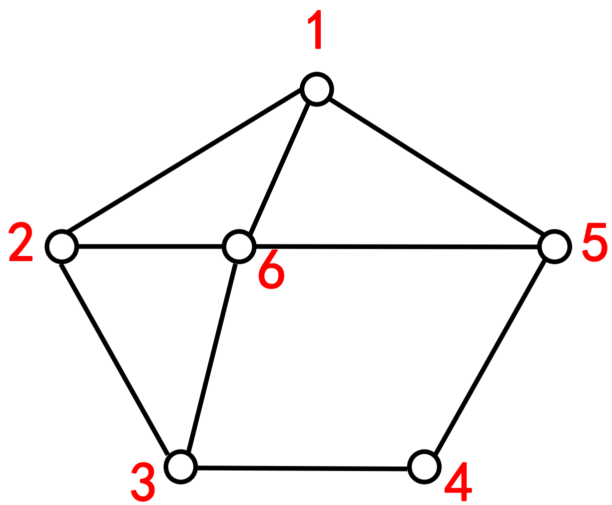
  每次选取G中一条与已选取的边不构成回路的边，选取的边的总数为n-1。

由于删除回路上的边和选择不构成任何回路的边有多种选法，所以产生的生成树不是惟一的。

例9.2.4

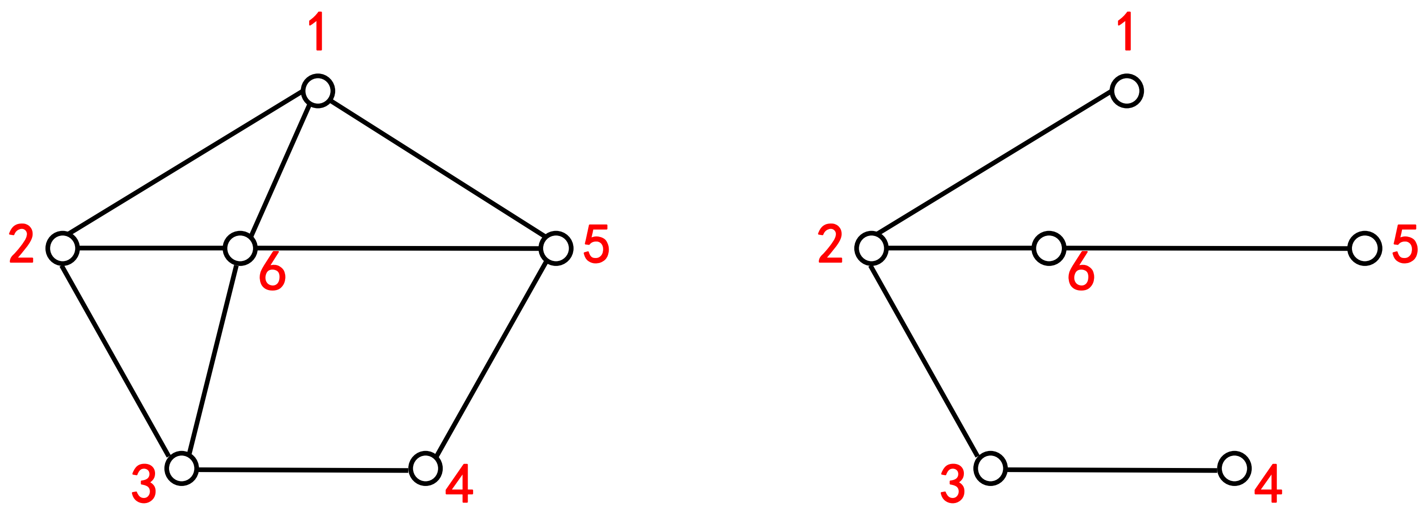
分别用破圈法和避圈法求下图的生成树。

破圈法



分析　分别用破圈法和避圈法依次进行即可。用破圈法时，由于n = 6，m = 9，所以m-n+1 = 4，故要删除的边数为4，因此只需4步即可。用避圈法时，由于n = 6，所以n-1 = 5，故要选取5条边，因此需5步即可。

避圈法



- 由于生成树的形式不惟一，故上述两棵生成树都是所求的。
- 破圈法和避圈法的计算量较大，主要是需要找出回路或验证不存在回路。

算法9.2.3

求连通图G = <V, E>的生成树的广度优先搜索算法：

（1）任选s∈V，将s标记为0，令L = {s}，V = V-{s}，k = 0；

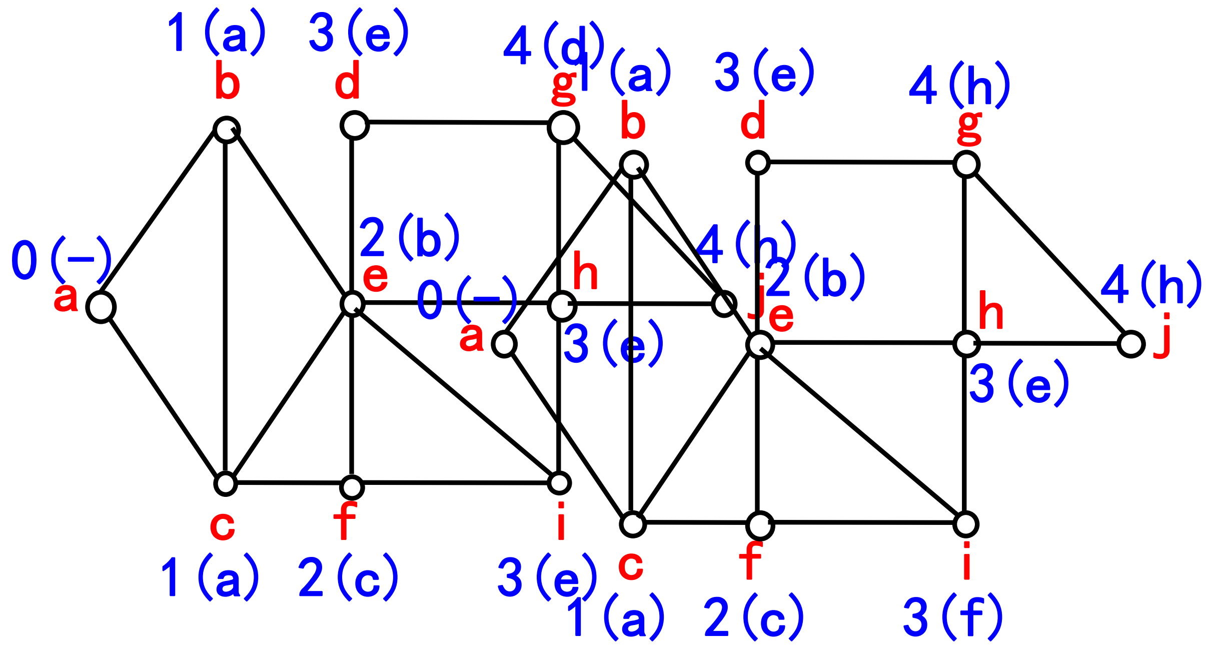
（2）如果V = Φ，则转(4)，否则令k = k+1；

（3）依次对L中所有标记为k-1的结点v，如果它与V中的结点w相邻接，则将w标记为k，指定v为w的前驱，令L = L∪{w}，V = V-{w}，转(2)；

（4）E_G = {(v, w)|w∈L-{s}，v为w的前驱}，结束。

例9.2.5

利用广度优先搜索算法求下图的生成树。



9.2.3 最小生成树

定义9.2.3 设G = <V, E>是连通的赋权图，T是G的一棵生成树，T的每个树枝所赋权值之和称为T的权(Weight)，记为w(T)。G中具有最小权的生成树称为G的最小生成树(Minimal Spanning Tree)。

一个无向图的生成树不是惟一的，同样地，一个赋权图的最小生成树也不一定是惟一的。

算法9.2.3 Kruskal算法

（1）在G中选取最小权边e_1，置i = 1。

（2）当i = n-1时，结束，否则转(3)。

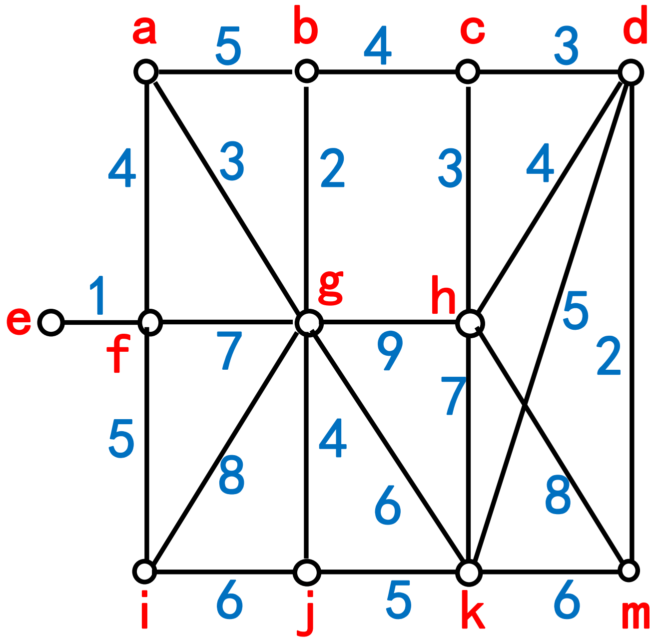
（3）设已选取的边为e_1，e_2，…，e_i，在G中选取不同于e_1，e_2，…，e_i的边e_{i+1}，使{e_1，e_2，…，e_i，e_{i+1}}中无回路且e_{i+1}是满足此条件的最小权边。

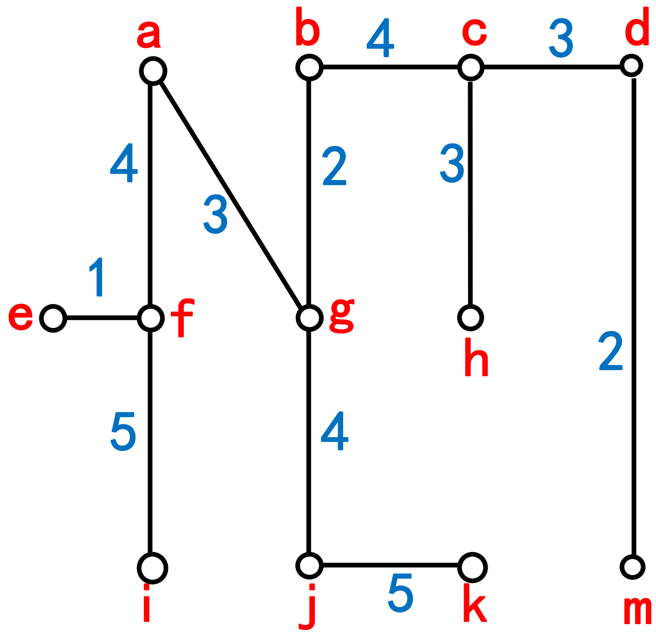
（4）置i = i+1，转(2)。

在Kruskal算法的步骤1和3中，若满足条件的最小权边不止一条，则可从中任选一条，这样就会产生不同的最小生成树。

例9.2.6

用Kruskal算法求图中赋权图的最小生成树。





解 n=12，按算法要执行n-1=11次，w(T) = 36。

算法9.2.5 Prim算法

（1）在G中任意选取一个结点v_1，置$V_T = \{v_1\}$，$E_T = \Phi$，$k = 1$；

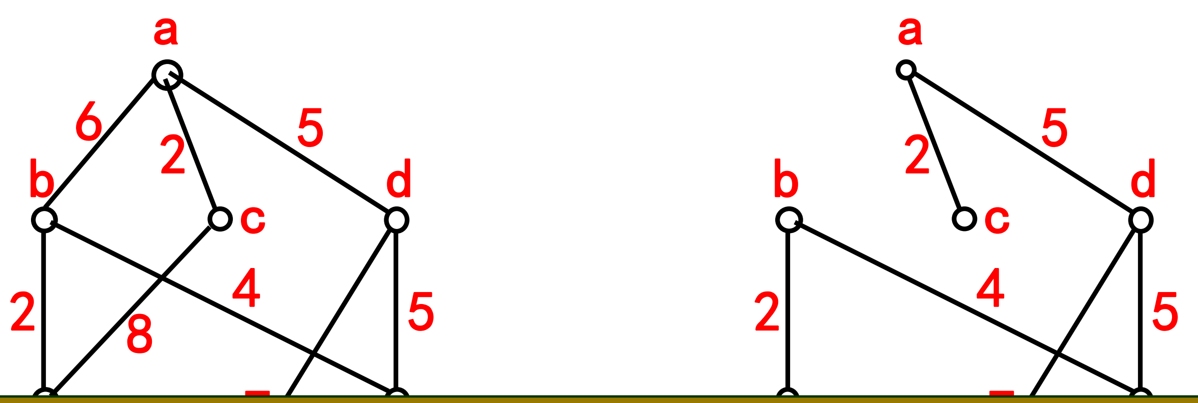
（2）在$V-V_T$中选取与某个$v_i \in V_T$邻接的结点vj，使得边(v_i, v_j)的权最小，置$V_T = V_T \cup \{v_j\}$，$E_T = E_T \cup \{(v_i, v_j)\}$，$k = k+1$；

（3）重复步骤2，直到$k = |V|$。

在Prim算法的步骤2中，若满足条件的最小权边不止一条，则可从中任选一条，这样就会产生不同的最小生成树。

例9.2.7

用Prim算法求图中赋权图的最小生成树。



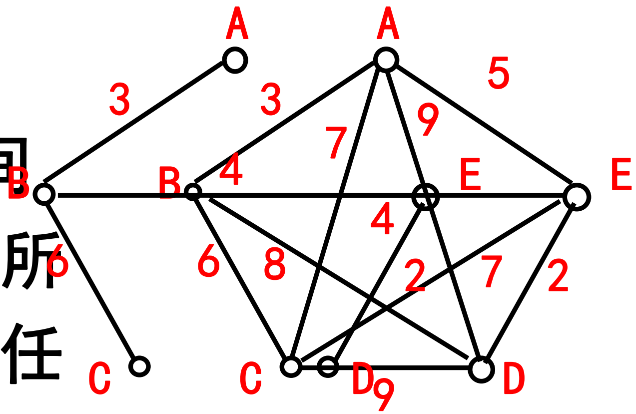
由Prim算法可以看出，每一步得到的图一定是树，故不需要验证是否有回路，因此它的计算工作量较Kruskal算法要小。

解 n = 7，按算法要执行n-1 = 6次，w(T) = 25。

9.2.4 无向树的难点

1. 树是不含回路的连通图。注意把握树的性质，特别是树中叶结点的数目及边数与结点数的关系：$m = n-1$；
2. 生成树是无向连通图，是满足“树的定义”的生成子图。注意把握所有连通图都有生成树，知道生成树的树枝与弦及其数目，会使用避圈法、破圈法和广度优先搜索算法求生成树；
3. 最小生成树是赋权连通图的权值之和最小的生成树。会使用Kruskal算法和Prim算法求最小生成树。

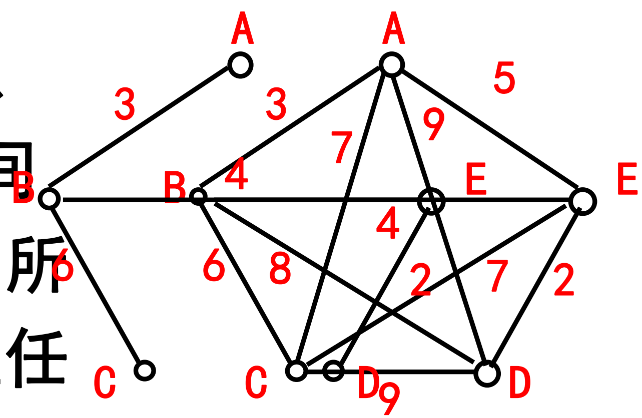
9.2.5 无向树的应用



例9.2.8 假设有5个信息中心A、B、C、D、E，它们之间的距离(以百公里为单位)如图所示。要交换数据，我们可以在任意两个信息中心之间通过光纤连接，但是费用的限制要求铺设尽可能少的光纤线路。重要的是每个信息中心能和其它中心通信，但并不需要在任意两个中心之间都铺设线路，可以通过其它中心转发。

分析 这实际上就是求赋权连通图的最小生成树问题，可用Prim算法或Kruskal算法求解。

9.2.5 无向树的应用



例9.2.8 假设有5个信息中心A、B、C、D、E，它们之间的距离(以百公里为单位)如图所示。要交换数据，我们可以在任意两个信息中心之间通过光纤连接，但是费用的限制要求铺设尽可能少的光纤线路。重要的是每个信息中心能和其它中心通信，但并不需要在任意两个中心之间都铺设线路，可以通过其它中心转发。

解 求得图的最小生成树如图所示，w(T) = 1500公里。即按图的图铺设，使得铺设的线路最短。

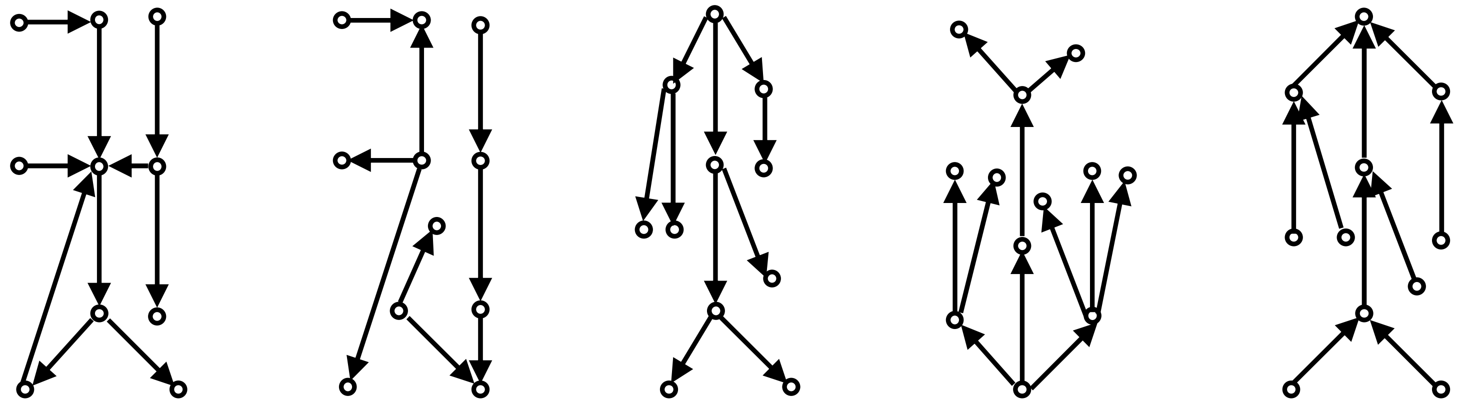
9.3 根树

9.3.1 根树的定义与分类

定义9.3.1 一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为有向树(Directed Tree)。

例9.3.1

判断下图中的图哪些是树？为什么？



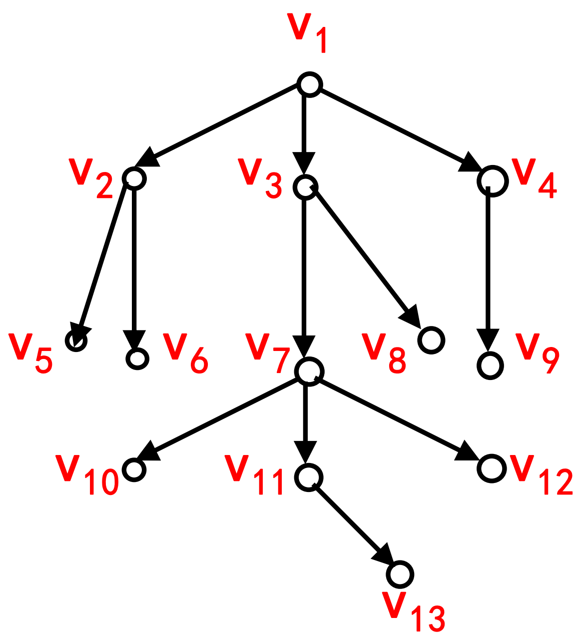
(a) (b) (c) (d) (e)

定义9.3.2

一棵非平凡的有向树，如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1，则称之为根树(Root Tree)或外向树(Outward Tree)。入度为0的结点称为根(Root)；出度为0的结点称为叶(Leaf)；入度为1，出度大于0的结点称为内点(Interior Point)；又将内点和根统称为分支点(Branch Point)。在根树中，从根到任一结点v的通路长度，称为该结点的层数(Layer Number)；称层数相同的结点在同一层上；所有结点的层数中最大的称为根树的高(Height)。

例9.3.2

判断下图所示的图是否是根树？若是根树，给出其根、叶和内点，计算所有结点所在的层数和高。



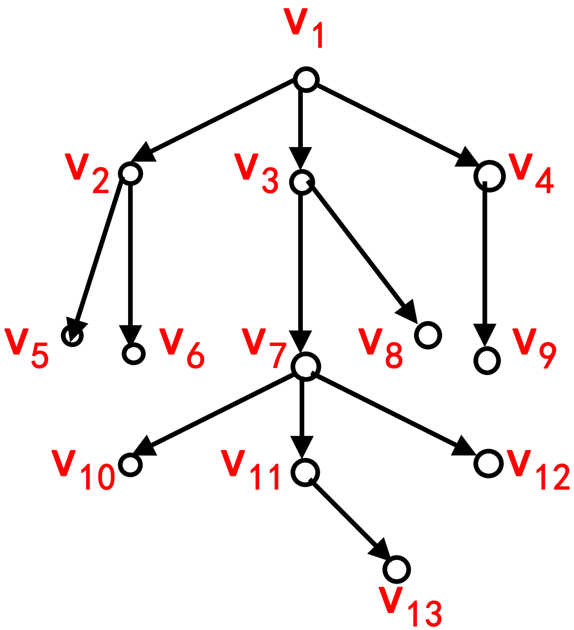
解 是一棵根树，其中v_1为根，$v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}$为叶，$v_2, v_3, v_4, v_7, v_{11}$为内点。

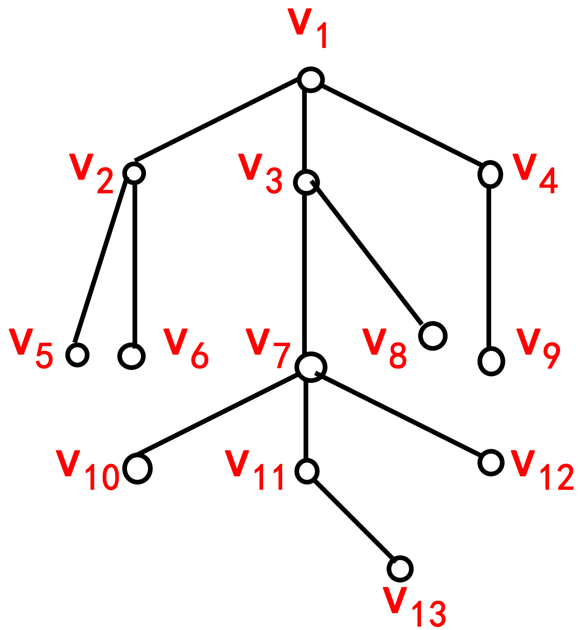
v_1处在第零层，层数为0；v_2, v_3, v_4同处在第一层，层数为1；v_5, v_6, v_7, v_8, v_9同处在第二层，层数为2；v_{10}, v_{11}, v_{12}同处在第三层，层数为3；v_{13}处在第四层，层数为4；这棵树的高为4。

例9.3.2

判断下图所示的图是否是根树？若是根树，给出其根、叶和内点，计算所有结点所在的层数和高。

倒置法





家族关系

定义9.3.3 在根树中，若从结点v_i到v_j可达，则称v_i是v_j的祖先(Ancestor)，v_j是v_i的后代(Descendant)；又若$\langle v_i, v_j \rangle$是根树中的有向边，则称v_i是v_j的父亲(Father)，v_j是v_i的儿子(Son)；如果两个结点是同一个结点的儿子，则称这两个结点是兄弟(Brother)。

定义9.3.4 如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树(Ordered Tree)。

一般地，在有序树中同一层中结点的次序为从左至右。有时也可以用边的次序来代替结点的次序。

定义9.3.5

在根树T中，

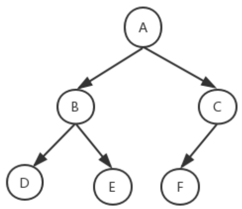
- 若每个分支点至多有k个儿子，则称T为k元树(k-ary Tree)；
- 若每个分支点都恰有k个儿子，则称T为k元完全树/k元正则树；
- 若k元树T是有序的，则称T为k元有序树(k-ary Ordered Tree)；
- 若k元完全树T是有序的，则称T为k元有序完全树(k-ary Ordered Complete Tree)。

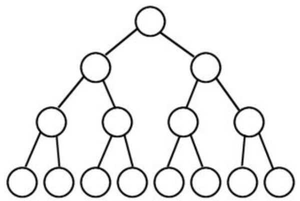
注意！！！！！！

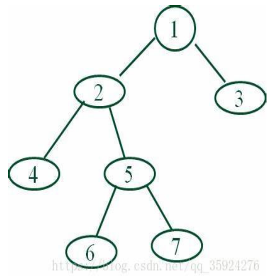
在数据结构中中完全二叉树(Complete binary Tree)的定义为：

如果一棵具有n个结点的深度为k的二叉树，它的每一个结点都与深度为k的满二叉树中编号为1到n的结点一一对应，这棵二叉树称为完全二叉树。

满二叉树（完美二叉树），是高度为h，由2^h-1个节点构成的二叉树称为满二叉树（完美二叉树）







子树

在根树T中，任一结点v及其所有后代导出的子图T’称为T的以v为根的子树(Subtree)。

当然，T’也可以有自己的子树。

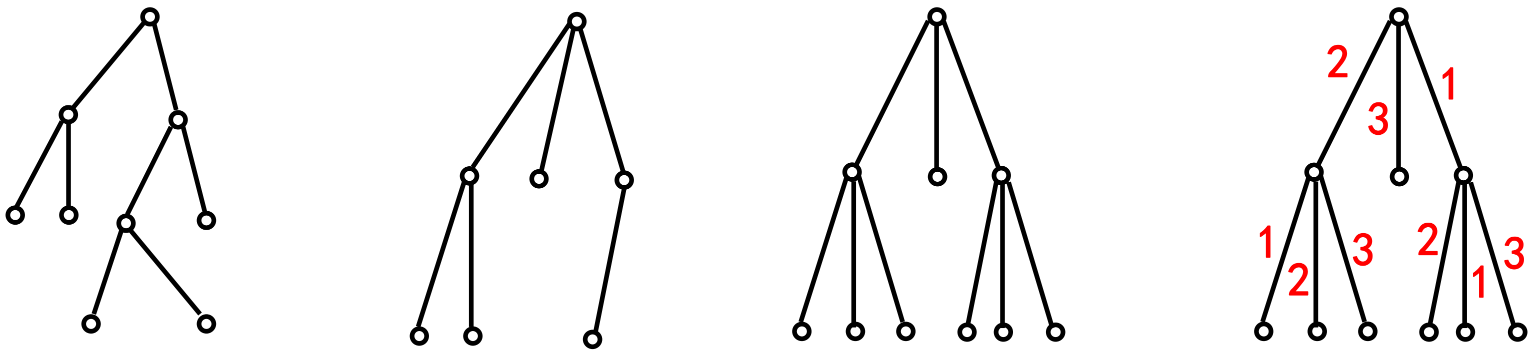
二元有序树的每个结点v至多有两个儿子，分别称为v的左儿子(Left Son)和右儿子(Right Son)。

二元有序树的每个结点v至多有两棵子树，分别称为v的左子树(Left Subtree)和右子树(Right Subtree)。

注意区分以v为根的子树和v的左(右)子树，v为根的子树包含v，而v的左(右)子树不包含v。

例9.3.3

判断下图所示的几棵根树是什么树？



(a) 2元完全树

(b) 3元树

(c) 3元完全树

(d) 3元有序完全树

k元完全树中分支点与叶结点数目之间的关系

定理9.3.1 在k元完全树中，若叶数为t，分支点数为i，则下式成立：

$$(k-1)\times i = t-1$$

证明 由假设知，该树有i+t个结点。由定理9.2.1知，该树的边数为i+t-1。由握手定理知，所有结点的出度之和等于边数。而根据k元完全树的定义知，所有分支点的出度为k×i。因此有

$$k\times i = i+t-1$$

即

$$(k-1)\times i = t-1$$

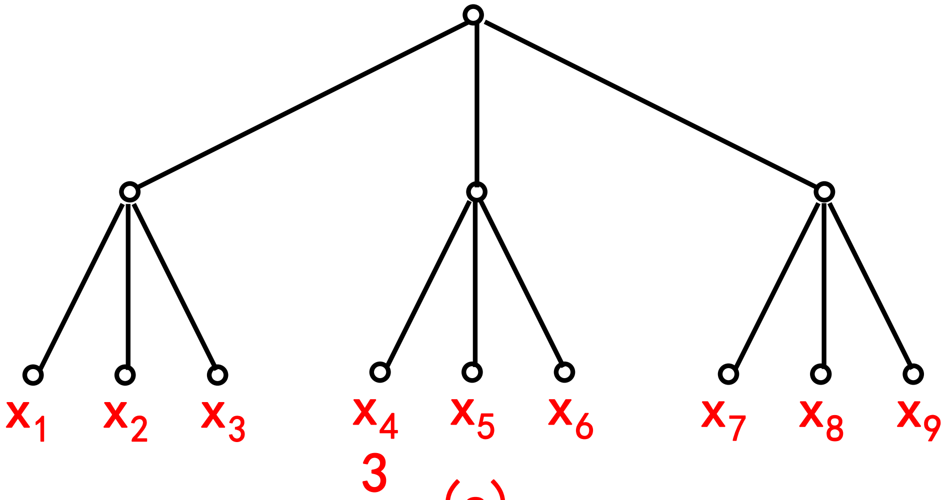
例9.3.4

假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算3个数的和。如果要求9个数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9之和，问至少要执行几次加法指令？

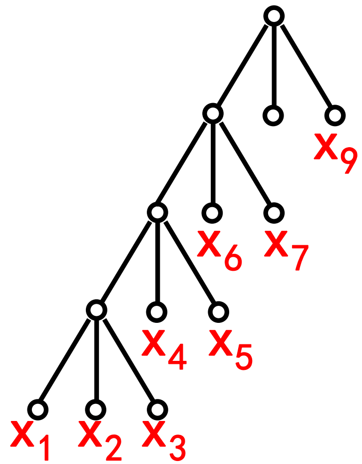
解 用3个结点表示3个数，将表示3个数之和的结点作为它们的父结点。这样本问题可理解为求一个三元完全树的分支点问题。把9个数看成叶。由定理9.9知，有$(3-1)i = 9-1$，得$i = 4$。所以至少要执行4次加法指令。

例9.3.4

假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算3个数的和。如果要求9个数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9之和，问至少要执行几次加法指令?



(a)



(b)

一个多种解法的例子

例9.3.5 设T为任意一棵二元完全树，m为边数，t为叶数，试证明：$m = 2t-2$。这里$t \geq 2$。

证明 **方法一：** 设T中的结点数为n，分支点数为i。根据二元完全树的定义，容易知道下面等式均成立：

$$n = i+t,\ m = 2i,\ m = n-1$$

解关于m，n，i的三元一次方程组得

$$m = 2t-2。$$

方法二:

在二元完全树中,除树叶外,每个结点的出度均为2;除根结点外,每个结点的入度均为1。设T中的结点数为n,由握手定理可知

$$2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^{+}(v_i) + \sum_{i=1}^{n} \deg^{-}(v_i)$$

$$= 2(n-t)+n-1 = 3n-2t-1 = 3(m+1)-2t-1$$

故

$$m = 2t-2。$$

9.3.2 根树的遍历

对于根树，一个十分重要的问题是要找到一些方法，能系统地访问树的结点，使得每个结点恰好访问一次，这就是根树的遍历(Ergode)问题。

k元树中，应用最广泛的是二元树。由于二元树在计算机中最易处理，下面先介绍二元树的3种常用的遍历方法，然后再介绍将任意根树转化为二元树。

算法9.3.1

二元树的先根次序遍历算法：

1. 访问根；
2. 按先根次序遍历根的左子树；
3. 按先根次序遍历根的右子树。

算法9.3.2

二元树的中根次序遍历算法：

1. 按中根次序遍历根的左子树；
2. 访问根；
3. 按中根次序遍历根的右子树。

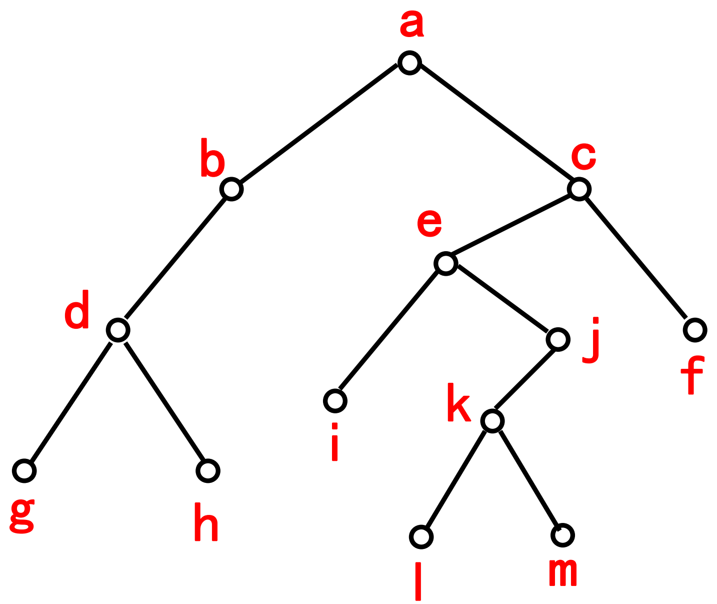
算法9.3.3

二元树的**后根次序遍历**算法：

1. 按后根次序遍历根的左子树；
2. 按后根次序遍历根的右子树；
3. 访问根。

例9.3.6

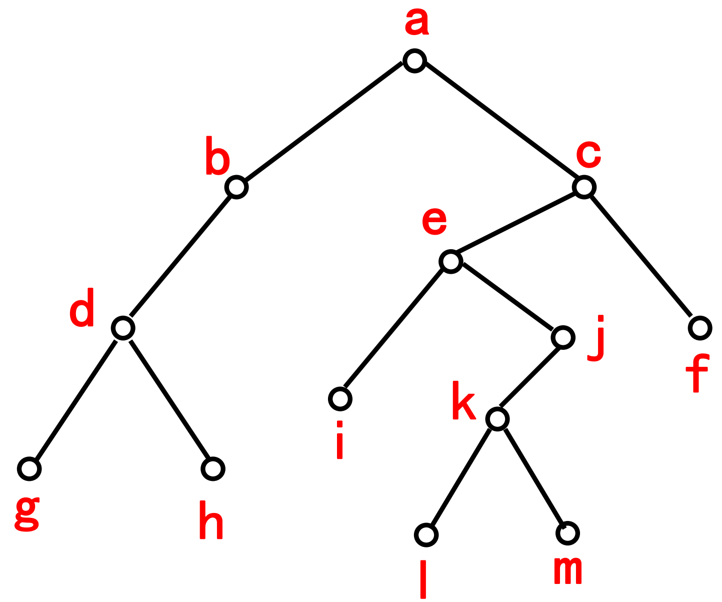
写出对图中二元树的3种遍历方法得到的结果。



分析　按遍历方法容易写出，只要先将该树分解为根、左子树、右子树三部分，然后再对子树作分解，直到叶为止。

例9.3.6

写出对图中二元树的3种遍历方法得到的结果。



解　先根遍历次序为abdghceijklmf;

中根遍历次序为gdhbaielkmjcf;

后根遍历次序为ghdbilmkjefca。

算法9.3.4

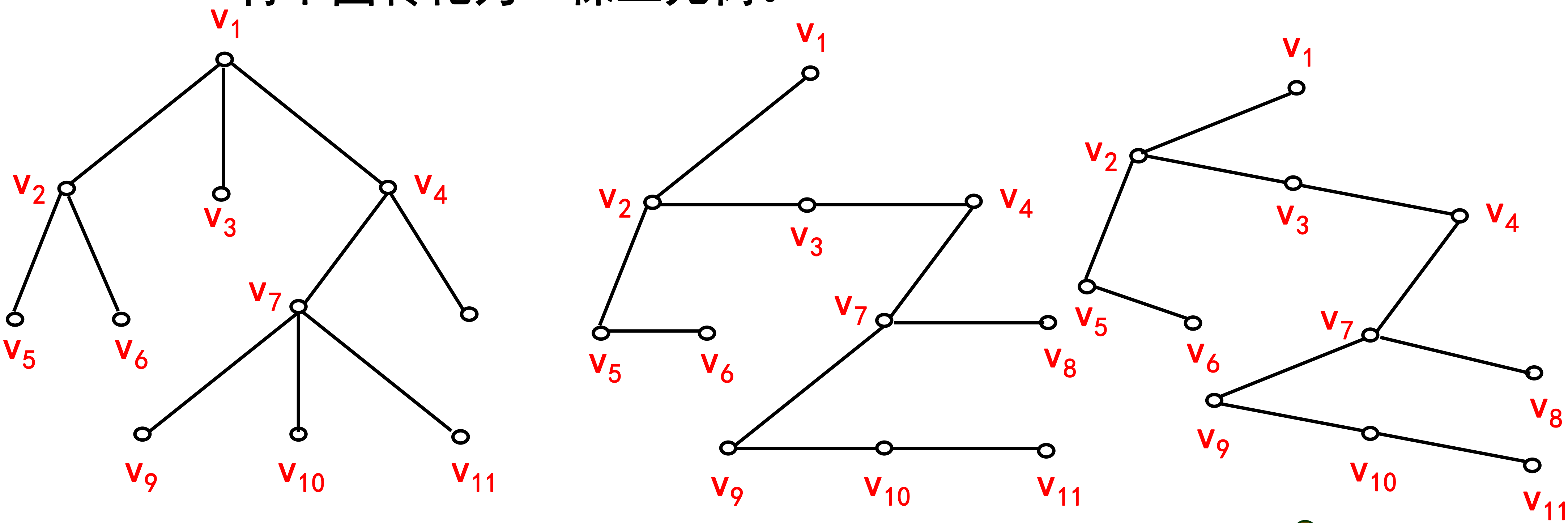
根树转化为二元树算法：

1. 从根开始，保留每个父亲同其最左边儿子的连线，撤销与别的儿子的连线。
2. 兄弟间用从左向右的有向边连接。
3. 按如下方法确定二元树中结点的左儿子和右儿子：直接位于给定结点下面的结点，作为左儿子，对于同一水平线上与给定结点右邻的结点，作为右儿子，依此类推。

转化的要点：弟弟变右儿子

例9.3.7

将下图转化为一棵二元树。



反过来，也可以还原。要点：右儿子变弟弟

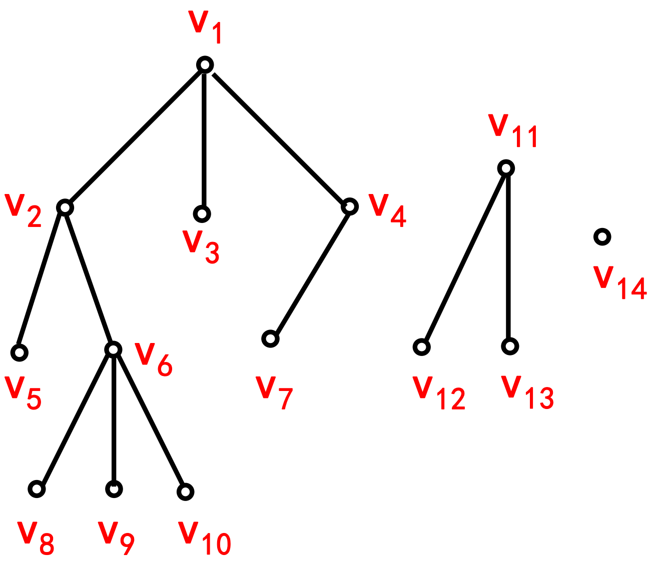
有序森林转换成二元树

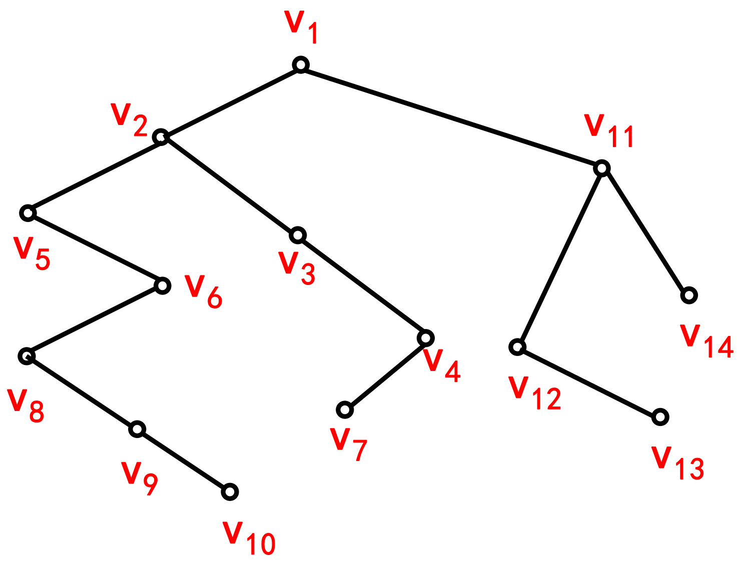
算法9.3.5 森林转化为二元树算法：

1. 先把森林中的每一棵树都表示成二元树；
2. 除第一棵二元树外，依次将剩下的每棵二元树作为左边二元树的根的右子树，直到所有的二元树都连成一棵二元树为止。

例9.3.8

将图所示的森林转化成一棵二元树。





将二元树转化为森林，要点是“先将根的右子树变为新二元树，再将这些二元树还原为根树”。

最优树

定义9.3.7　设有一棵二元树，若对其所有的t片树叶赋以权值w_1、w_2、…、w_t，则称之为赋权二元树；若权为w_i的树叶的层数为$L(w_i)$，则称

$$W(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i \times L(w_i)$$

为该赋权二元树的权；而在所有赋权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的二元树中，$W(T)$最小的二元树称为最优树。

最优树的应用

最优树问题源于计算机科学、生产管理等领域。

举一个简单的例子，用机器分辨一些币值为1元、5角、1角的硬币，假设各种硬币出现的概率分别为0.5、0.4、0.1。问如何设计一个分辨硬币的算法，使所需的时间最少（假设每作一次判别所用的时间相同，以此为一个时间单位）？

这个问题就是构造一个有3片树叶的最优树问题。

哈夫曼算法

假设$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_t$。1952年哈夫曼给出了求最优树的方法。该方法的关键是：从带权为w_1+w_2、w_3、…、w_t的最优树T'中得到带权为w_1、w_2、…、w_t.最优树.

算法的具体步骤如下：

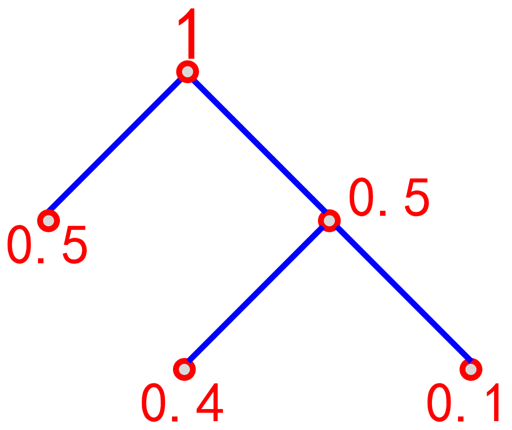
1) 初始：令S＝{$W_1, W_2, \ldots, W_t$}；
2) 从S中取出两个最小的权W_i和W_j，画结点v_i，带权W_i，画结点v_j，带权W_j。画v_i和v_j的父亲v，连接v_i和v，v_j和v，令v带权W_i+W_j；
3) 令S＝(S-{W_i, W_j})∪{W_i+W_j}；
4) 判断S是否只含一个元素？若是，则停止，否则转2）。

分辨硬币的算法

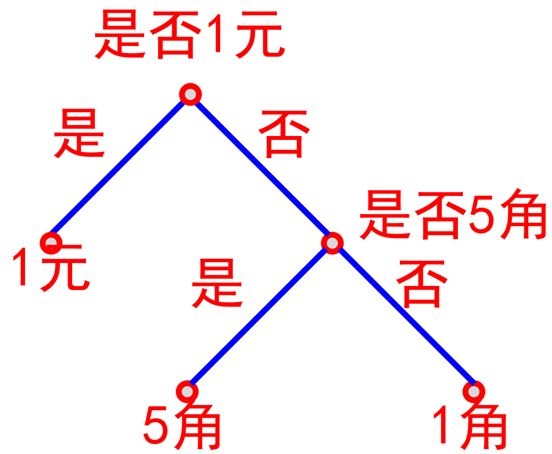
实际上该问题归结为求带权0.1、0.4、0.5的最优树问题；

利用哈夫曼算法，答案的图示见图a或图b。所需时间为

$$2\times 0.1+2\times 0.4+1\times 0.5=1.5$$



(a)



(b)

Thank You！