第三节

格林(Green)公式

- 一、格林公式
- 二、平面曲线积分与路径无关的条件
- 三、平面曲线积分基本定理

一、格林公式

1. 问题的提出

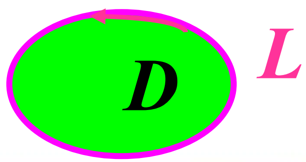
回顾： 在一元积分学中，

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

—— 牛顿-莱布尼茨公式

问题： 上述结论是否能推广到二重积分？

$$\iint_D (\ ?\ )\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_L (\ ?\ )$$



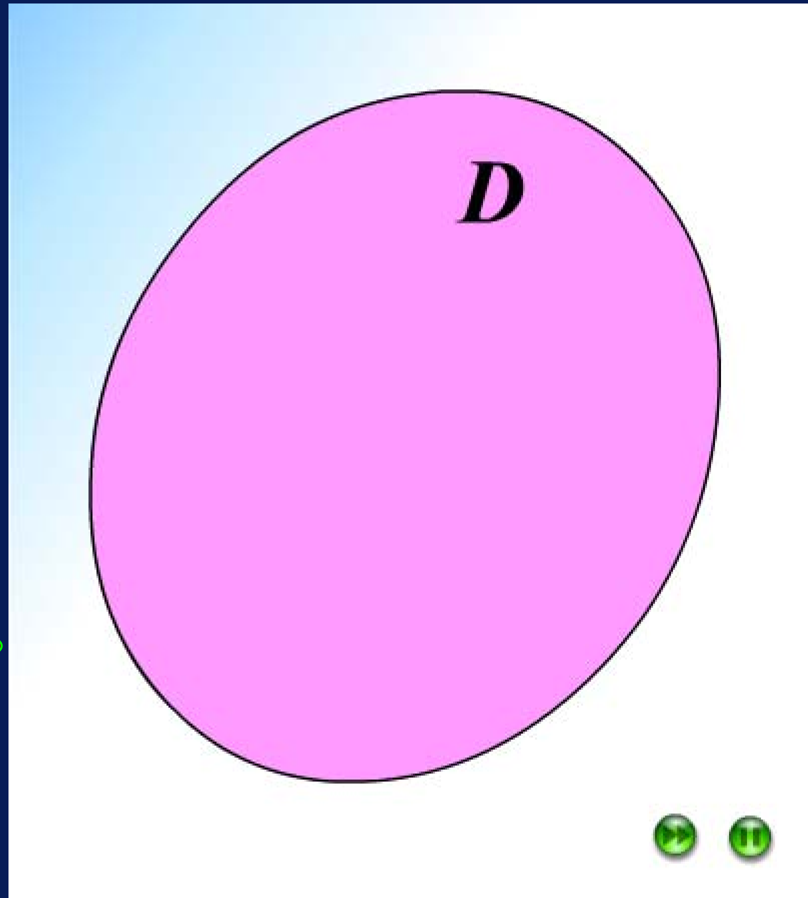
目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

2. 区域连通性分类

设D为平面区域，

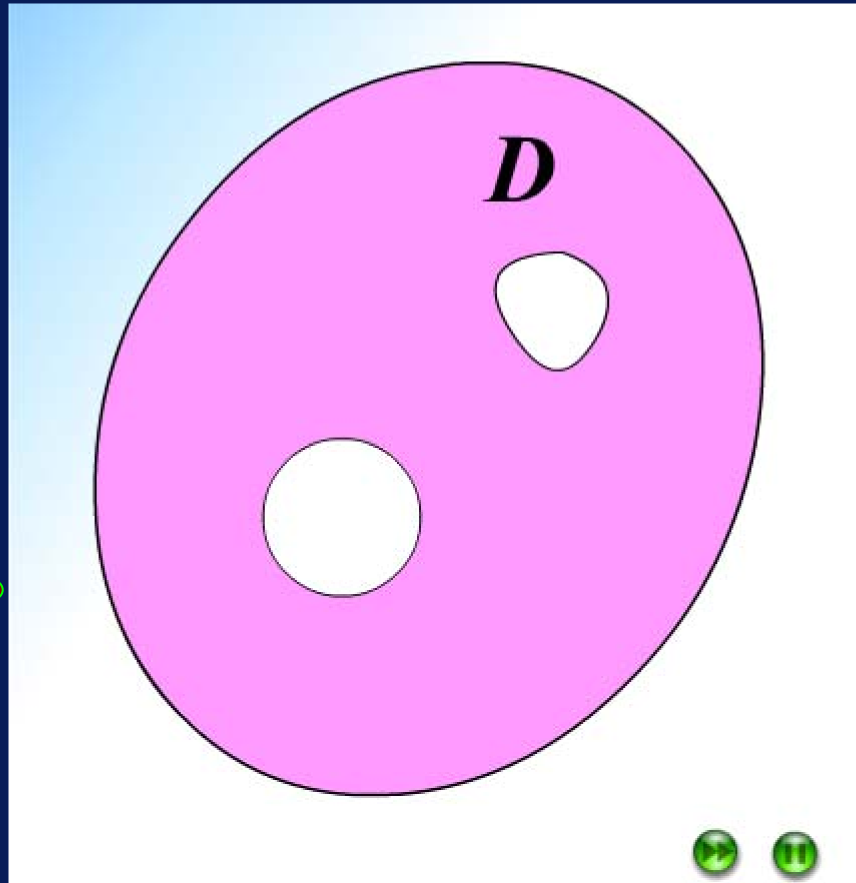
如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D，

则称D为平面**单连通区域**；



平面单连通区域就是没有“洞”的区域

否则, 如果D内存在闭曲线l，它所围成的部分不完全属于D,则称D为**复连通区域.**



平面复连通区域就是有“洞”的区域

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

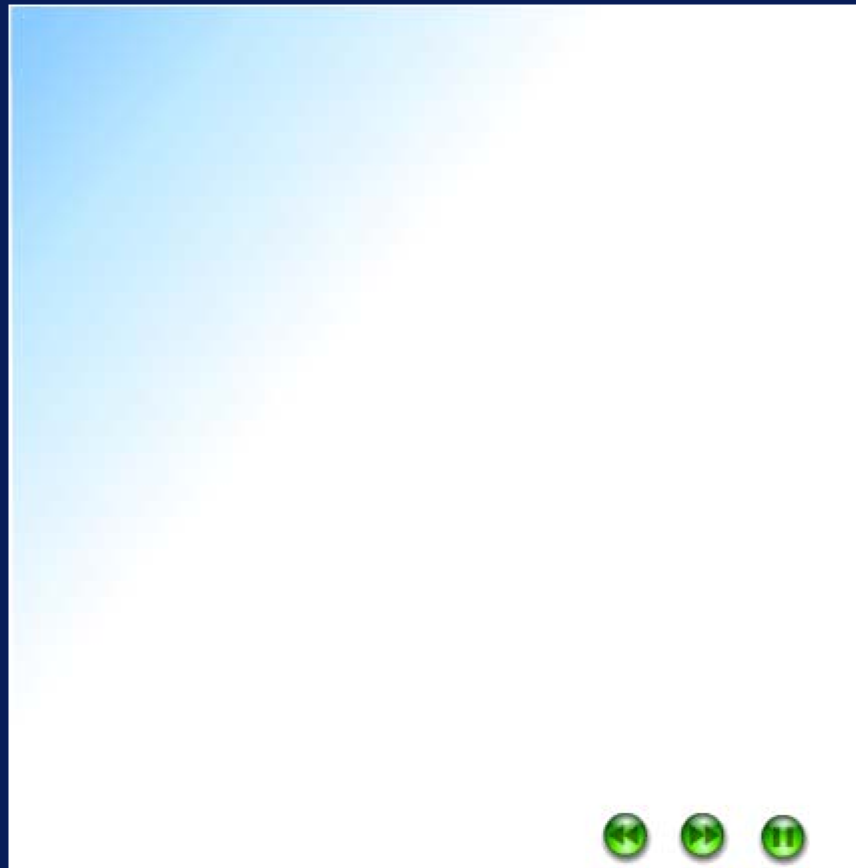
3. 边界曲线L的正向

边界曲线L的正向：

当观察者沿L的这个方向行走时，D内在他近处的部分总在他的左边.

单连通区域的边界曲线L的正向：

逆时针方向.



设复连通区域 D 的边界曲线为

$$\Gamma = L + l_1 + l_2 + \cdots + l_n \qquad (\text{如图})$$

复合
闭路

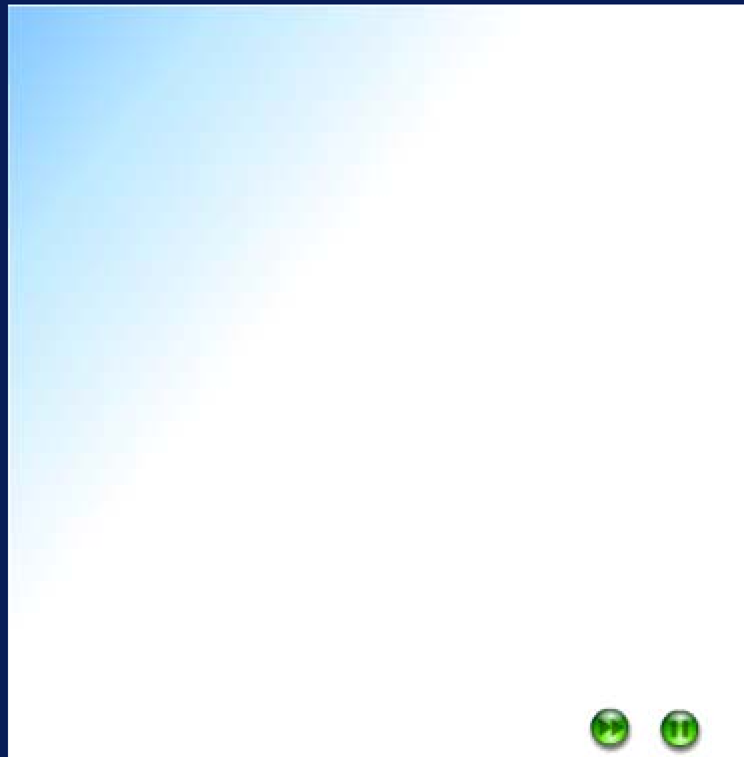
Γ 的正向：

外边界 L 为逆时针方向；

内边界

$$l_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

为顺时针方向.



4. 格林公式

定理10.3（Green公式） 设平面区域 D 是由分段光滑闭曲线围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，则

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{\partial D^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

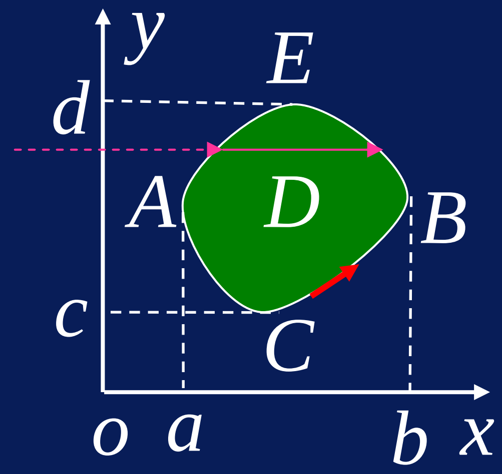
—— 格林公式

其中 ∂D^+ 是 D 的边界曲线正向.

将平面区域分为三种类型，证明分三步：

证　1° 若 D 既是 X-型区域, 又是 Y-型区域.

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$



或

$$\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

则

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d[Q(\psi_2(y),y)-Q(\psi_1(y),y)]\mathrm{d}y$$

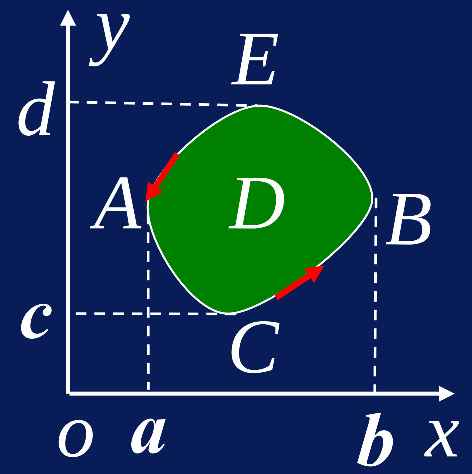
目录　上页　下页　返回　结束

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y - \int_{\overset{\frown}{CAE}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{\overset{\frown}{EAC}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$



即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} Q(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

由于 *D* 既是 *Y*-型区域，又是 *X*-型区域，

同理可证：

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P(x,y)\mathrm{d}x \qquad (2)$$

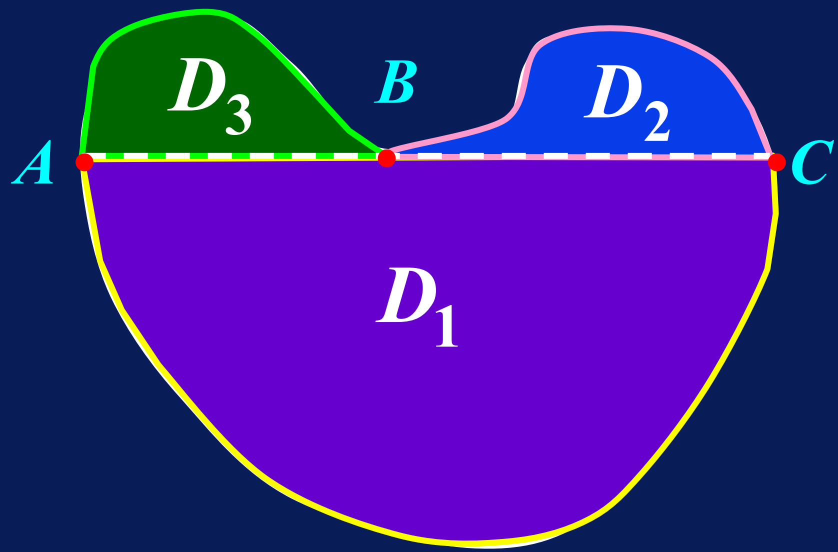
(1)+(2)，得：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2° 若D为单连通区域，　但非类型1° (如图)

可通过添加辅助线将其分割

为有限个类型1°的区域.



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

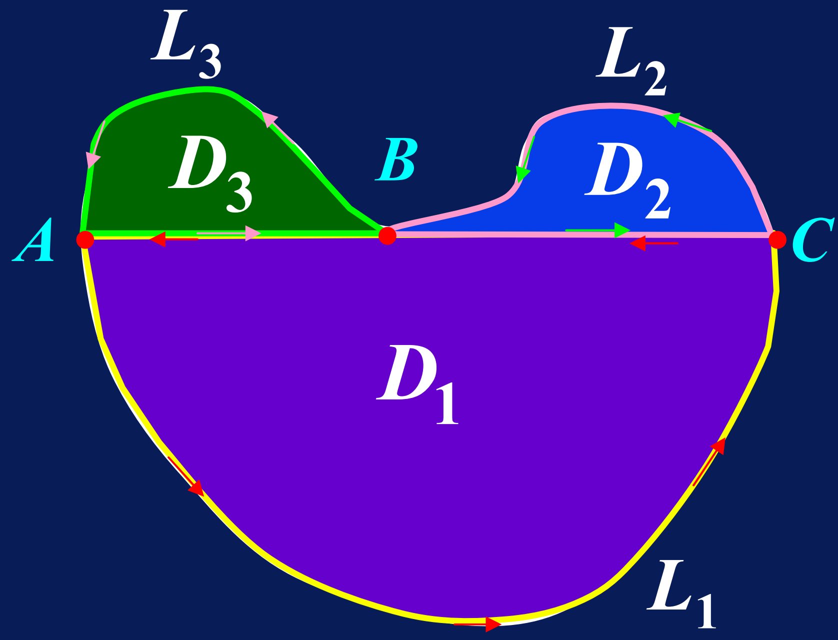
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1+D_2+D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



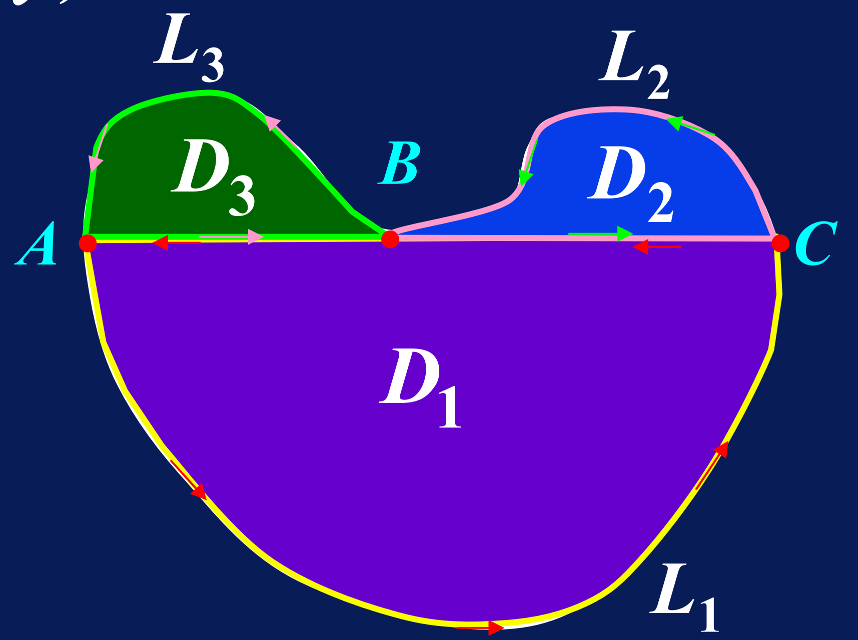
$$=\oint_{L_1+\overline{CA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_2+\overline{BC}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$+\oint_{L_3+\overline{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$
= \left(\int_{L_1} + \cancel{\int_{\overline{CB}}} + \cancel{\int_{\overline{BA}}}\right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)
$$

$$
+ \left(\int_{L_2} + \cancel{\int_{\overline{BC}}}\right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)
$$

$$
+ \left(\int_{L_3} + \cancel{\int_{\overline{AB}}}\right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)
$$



$$
= \oint_{L_1+L_2+L_3} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y
$$

3° 若积分域 D 为复连通区域（如图），

作辅助线 AB，CE，则

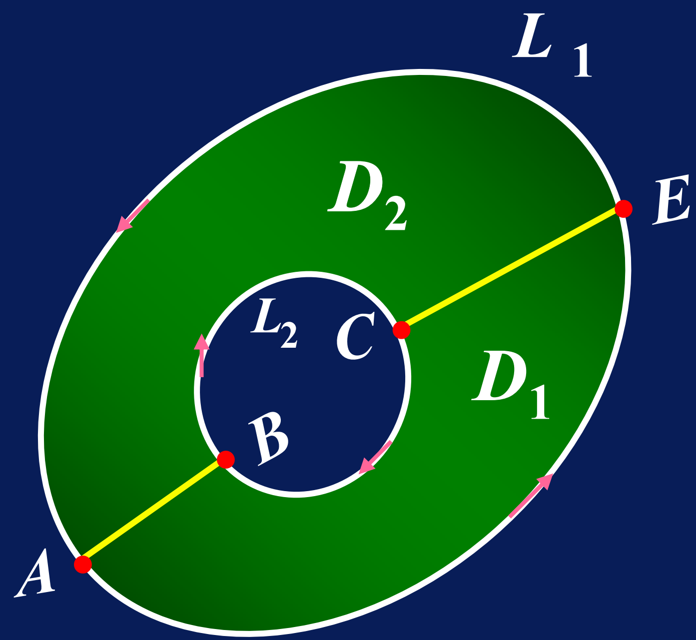
$$D = D_1 \cup D_2$$

其中D_1，D_2均为单连通区域.

由2° 知，

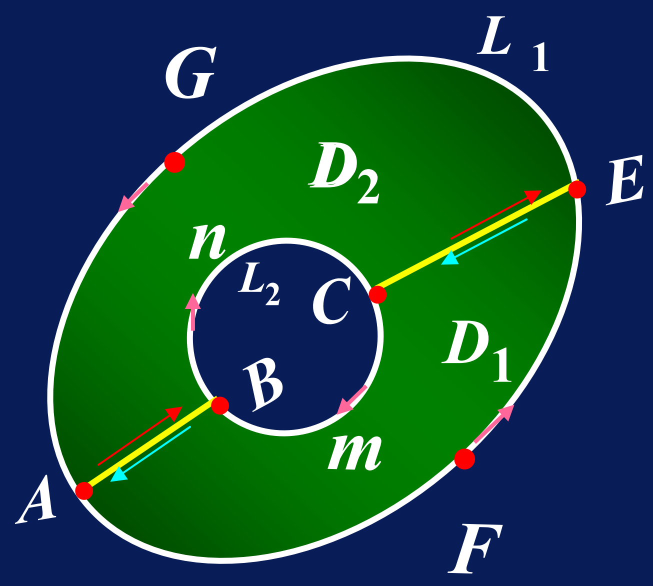
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1+D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= \left(\int_{\widehat{AFE}} + \cancel{\int_{\overline{EC}}} + \int_{\widehat{CmB}} + \cancel{\int_{\overline{BA}}} \right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$$

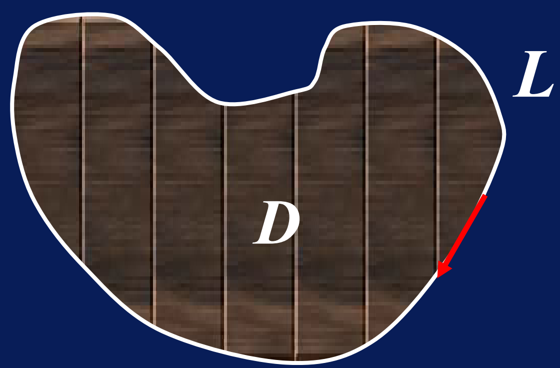
$$+ \left(\int_{\widehat{EGA}} + \cancel{\int_{\overline{AB}}} + \int_{\widehat{BnC}} + \cancel{\int_{\overline{CE}}} \right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$$

$$= \left(\oint_{L_1} + \oint_{L_2} \right)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

注 1° 格林公式的实质　沟通了沿闭曲线的曲线积分与二重积分之间的联系.

便于记忆形式:

$$\pm\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$



2° 格林公式的条件:

① L封闭，取正向;
(负)

② P，Q在L所围区域D上有一阶连续偏导数.

3° 对复连通区域 D 应用格林公式,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

公式右端的∂D^+应包括沿区域D的全部边界,

且边界的方向对 D 来说都是正向.

4° **利用曲线积分求面积的一种新方法.**

推论 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

需证：$A=\dfrac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$

证 令$P=-y,\quad Q=x,$则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1+1=2$$

由格林公式

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$$

例1 L为任意一条分段光滑的闭曲线，证明：

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$$

证 $\because \quad P = 2xy, \quad Q = x^2$

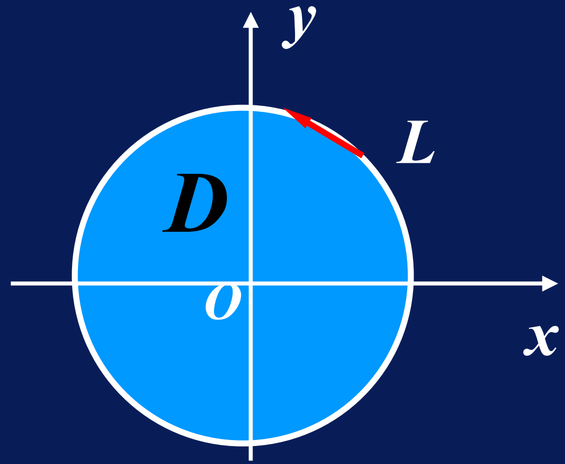
$$\therefore \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

$$\therefore \quad \oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \pm\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

将曲线积分转化为二重积分

例2 计算 $I = \oint_L y^3\,\mathrm{d}x + (3x - x^3)\,\mathrm{d}y$,

其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的正向.



解 $P = y^3, Q = 3x - x^3$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D [(3 - 3x^2) - 3y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 3\iint_D [1 - (x^2 + y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (1-\rho^2)\rho \,\mathrm{d}\rho$$

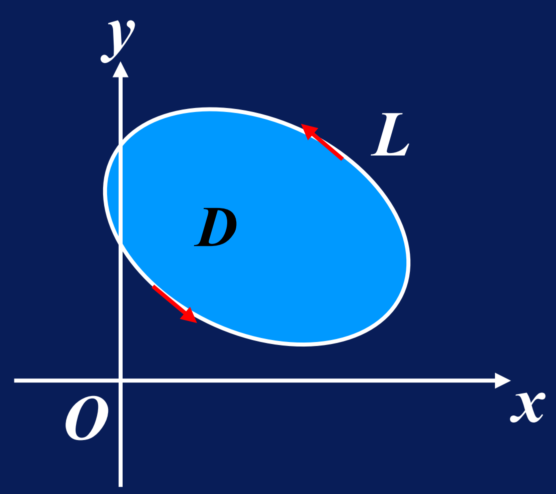
$$= \frac{3\pi}{2}(2R^2 - R^4)$$

注 $I = 3\iint\limits_D [1-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\overset{?}{\cancel{=}} 3\iint\limits_D (1-R^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例3 计算 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解 记 L 所围成的闭区域为D



令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

则当$x^2+y^2 \neq 0$时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

目录 上页 下页 返回 结束

(1) 当$(0,0) \notin D$时，由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

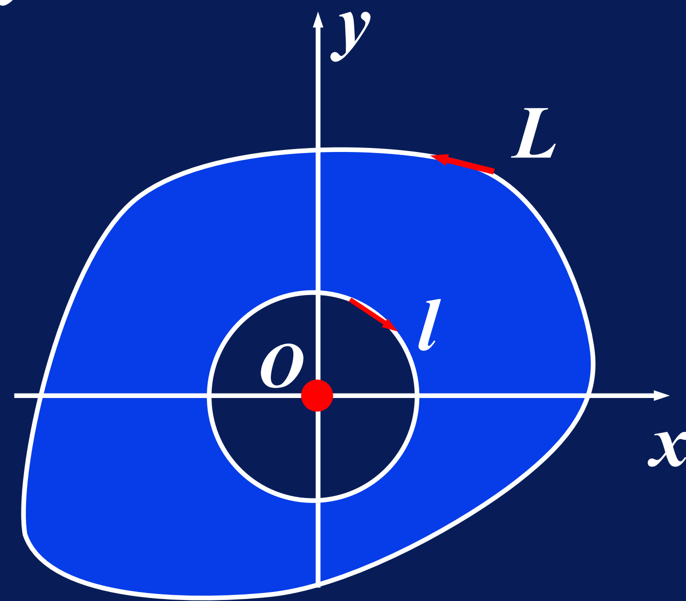
$$= \iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

(2) 当$(0,0) \in D$时，

作位于D内圆周

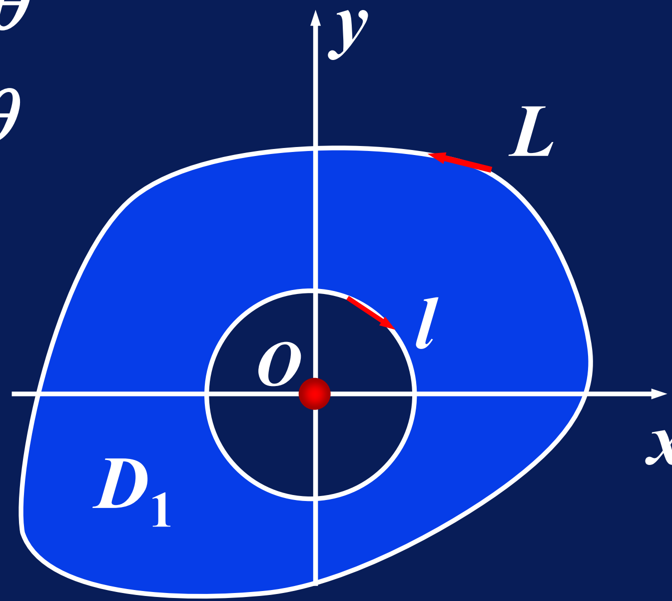
$l: x^2+y^2=r^2,$

顺时针.



l的参数方程为: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\theta : 2\pi \mapsto 0$



记D_1由L和 l所围成的区域,

$L + l$ 封闭，正向 .

应用格林公式,得

$$\oint_{L+l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

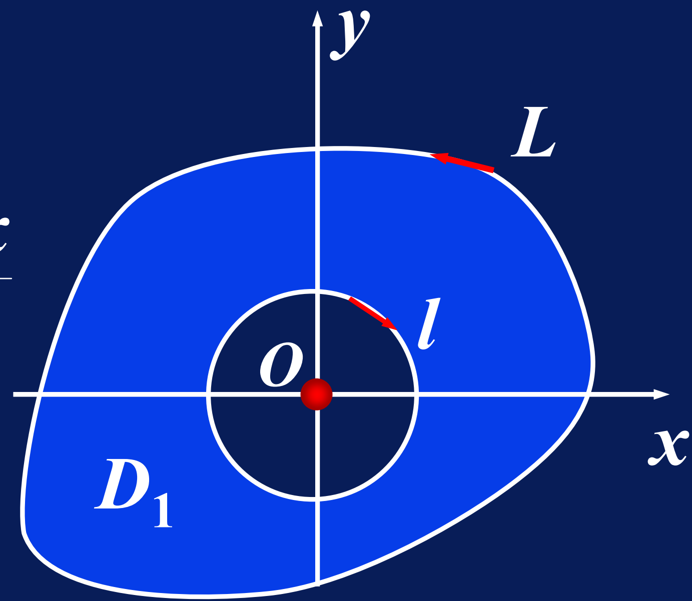
$$= \oint_{L+l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_{l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= 0 + \oint_{l^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta$$

(其中 l^- 的方向取逆时针方向)

$= 2\pi.$ (注意格林公式的条件)



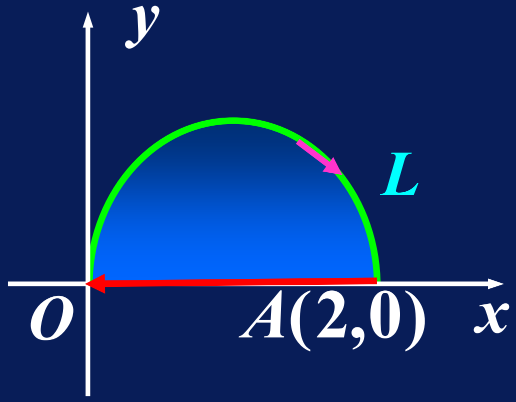
目录 上页 下页 返回 结束

例4 求一质点在力：$\vec{F}=(e^x\sin y-2y+1, e^x\cos y-x)$

的作用下，沿 $L: y=\sqrt{2x-x^2}$

从点 $O(0,0)$ 运动到 $A(2,0)$,

力所作的功.



解 需求：$W=\int_L (e^x\sin y-2y+1)\,dx+(e^x\cos y-x)\,dy$

L不封闭，引入辅助线 $\overline{AO}: y=0$

$x: 2\mapsto 0$

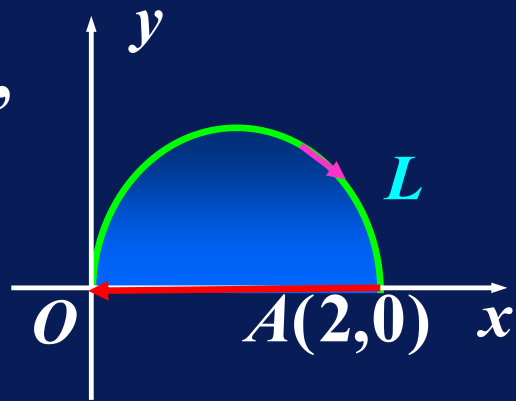
$L+\overline{AO}$ 封闭，负向

$P_y=e^x\cos y-2,\quad Q_x=e^x\cos y-1,$

目录 上页 下页 例4-1 继续

$$P_y = e^x \cos y - 2,\quad Q_x = e^x \cos y - 1,$$

$$Q_x - P_y = 1$$



应用格林公式，有

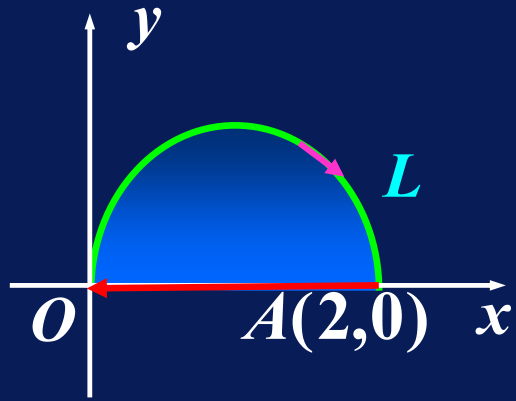
$$W = \int_L (e^x \sin y - 2y + 1)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}\right)(e^x \sin y - 2y + 1)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - x)\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left[\int_2^0 P(x,0)\,\mathrm{d}x + 0\right]$$



$$= -\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_2^0 (\mathrm{e}^x \sin 0 - 2\times 0 + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 2.$$

小结： 利用格林公式计算第二类曲线积分时，要注意定理使用的两个前提条件.

1. 当L是闭曲线时,

(1) 若P,Q在L所围区域D上有一阶连续偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \pm\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

“+”： L 取正向；“–”： L 取负向.

(2) 若P, Q在L所围区域 D上有奇点，则“挖洞”.

2. 当L不封闭时,

可添加辅助线：L_1, L_2, $\cdots$, L_n ，使

$$L+L_1+L_2+\cdots+L_n$$

封闭，且构成所围区域的正向或负向边界.

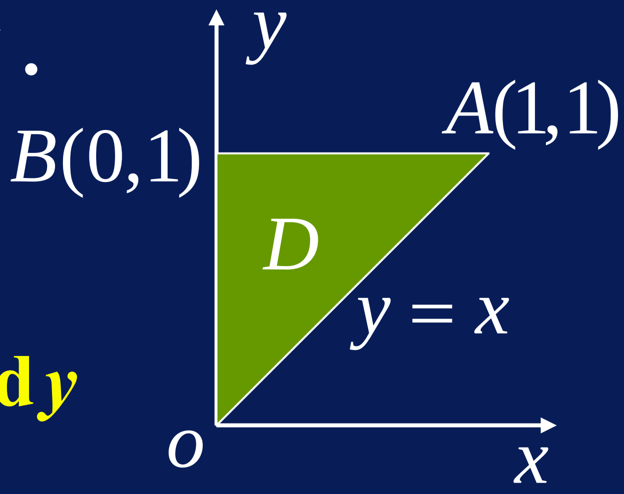
添加辅助线的原则:

(1) P, Q 在$L+L_1+L_2+\cdots+L_n$ 所围区域D上有一阶连续的偏导数;

(2) $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\int_{L_i} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 易于计算.

$(i=1,2,\cdots,n)$

例5 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以$O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .



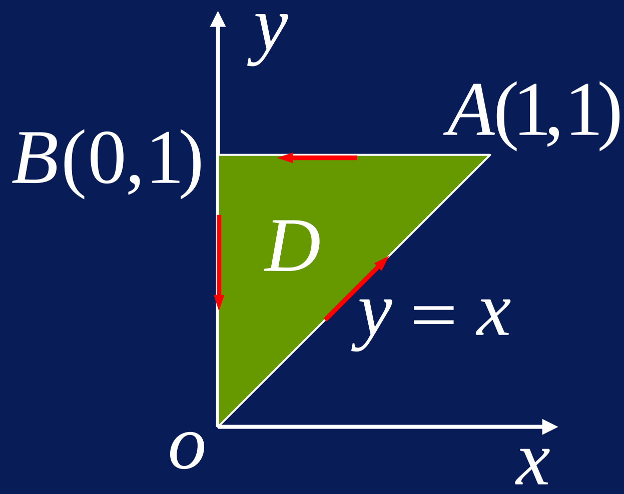
分析 利用格林公式,

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

将二重积分转化为曲线积分

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\quad P=0,\ Q=xe^{-y^2}$$

解 令 $P=0,\ Q=x\mathrm{e}^{-y^2}$



利用格林公式，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y^2}$$

$$\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{\overline{BO}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y+0+0=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

例6 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 所围成图形的面积 A.

解 $x = a\cos\theta,\quad \mathrm{d}x = -a\sin\theta\mathrm{d}\theta \qquad \theta : 0 \to 2\pi$

$y = b\sin\theta,\quad \mathrm{d}y = b\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

例7 已知平面区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\},$$

L为D的正向边界，试证：

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \ge 2\pi^2$$

证(方法1) 由格林公式，得

$$I=\oint_L \underbrace{x\mathrm{e}^{\sin y}}_{Q}\mathrm{d}y - \underbrace{y\mathrm{e}^{-\sin x}}_{P}\mathrm{d}x$$

$$=\iint_D (\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\because \quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$$

关于x, y有轮换对称性，即关于$y=x$对称

$$\therefore \quad \iint_D e^{\sin y}\,dx\,dy=\iint_D e^{\sin x}\,dx\,dy$$

故 $$I=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy$$

$$=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,dx\,dy\ge\iint_D 2\,dx\,dy=2\pi^2.$$

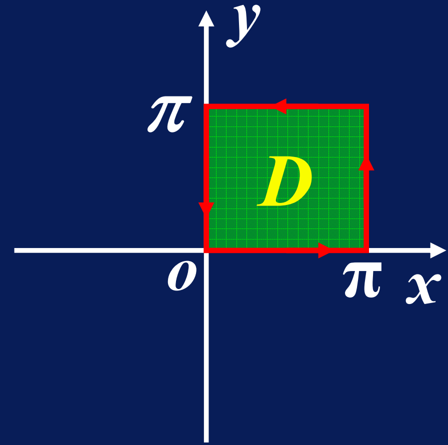
(方法2) $I=\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y} dy - \int_{\pi}^{0} \pi e^{-\sin x} dx + 0$$

$$= \int_0^{\pi} \pi e^{\sin x} dx + \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx$$

$$\geq \pi \int_0^{\pi} 2 dx = 2\pi^2 .$$



二、平面曲线积分与路径无关的条件

定理10.4 设G是单连通域, $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))\in C^{(1)}(G)$, 则以下四个命题等价:

(1) $\forall$分段光滑闭曲线 $C\subset G$, $\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$;

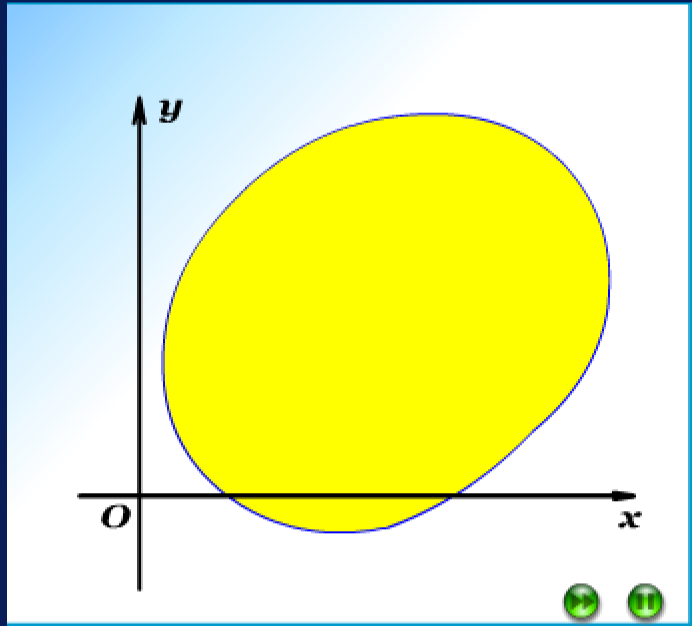
(2) $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$内与路径无关;

(3) $\exists\, u=u(x,y)$,使$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\ \ (\forall(x,y)\in G)$;

(4) 在G内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

证 (1)→(2)

$\forall A, B \in G$, L_1, L_2为G内从A到B的任意两条路径, $C = L_1^- + L_2$为G内闭曲线.



$$0 = \oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

曲线积分在G内与路径无关

(2)→(3) 当积分与路径无关时，曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

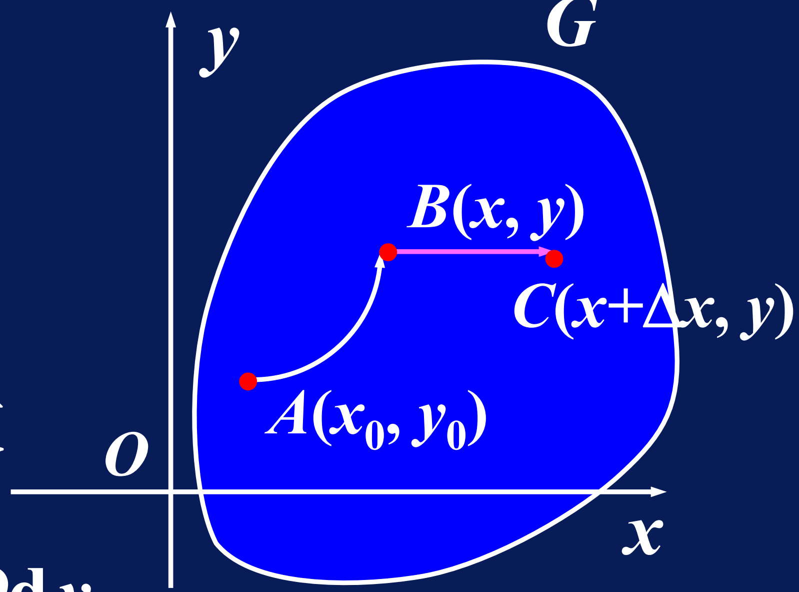
$A(x_0, y_0)$ 为 G 内给定的点，

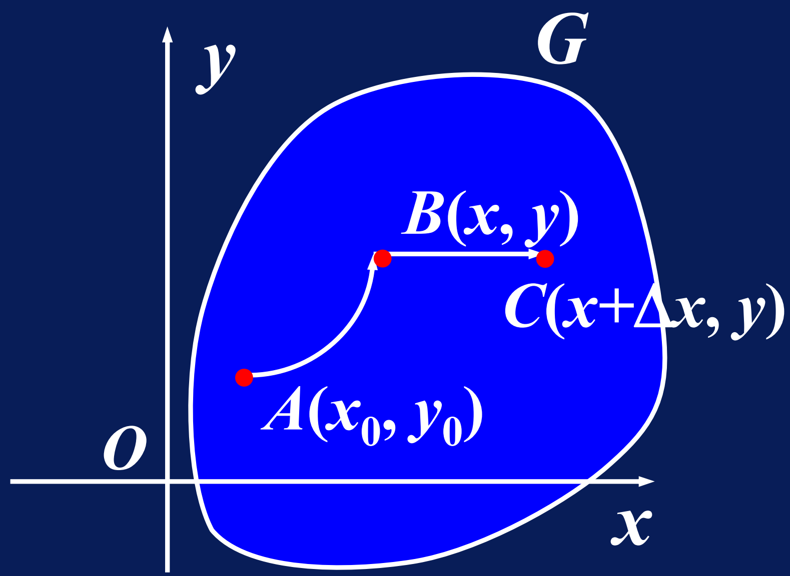
$B(x, y)$ 为 G 内任意的点，

因曲线积分与路径无关，故

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

于是 $\forall (x + \Delta x, y) \in G,$





$$u(x+\Delta x, y)$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{BC}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$= u(x,y) + \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

即 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$

$\because$ P在G内有一阶连续偏导数

$\therefore$ P在G内连续

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)\,\mathrm{d}\,x$$

积分中值定理

$$= P(x+\theta\Delta x,\ y)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

从而 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x\,,\,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$\because$ $P(x, y), Q(x, y)$均在G内连续

$\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$均在$G$内连续

从而 $u(x, y)$在G内可微，且

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$= P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \qquad (\forall (x, y) \in G)$$

即 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是函数 $u(x, y)$的全微分.

(3)→(4) $\because \exists$ 函数 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

因为P, Q 在 G 内具有连续的偏导数,

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

因此在 G内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

(4)→(1)

设L为G中任一分段光滑闭曲线.

因为G为单连通域，故L所围区域 $D' \subset G$

由(4)，有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D'$

故由格林公式得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

由此可知定理中四个条件的等价性.

注 1° 定理中关于区域的单连通性和函数P、Q的一阶偏导数的连续性两个条件缺一不可.

缺少一个，定理结论不一定成立.

反例1 $$I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi\neq 0$$

L :包围(0,0)的任一条正向闭曲线 .

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

若取 $G=R^2$, 则G是单连通域,

但 P, Q在$(0,0)$处无定义, 故在 G内不是处处具有一阶连续偏导数 .

若取 $G=\{(x,y)|x^2+y^2\neq 0\}$, 则

P,Q在G内有一阶连续偏导数 ,但 G不是单连通区域.

反例2 $\quad I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

L:包围(0,0)的任一条正向闭曲线 .

若取 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 0\}$, 则

P,Q在G内有一阶连续偏导数 ，且

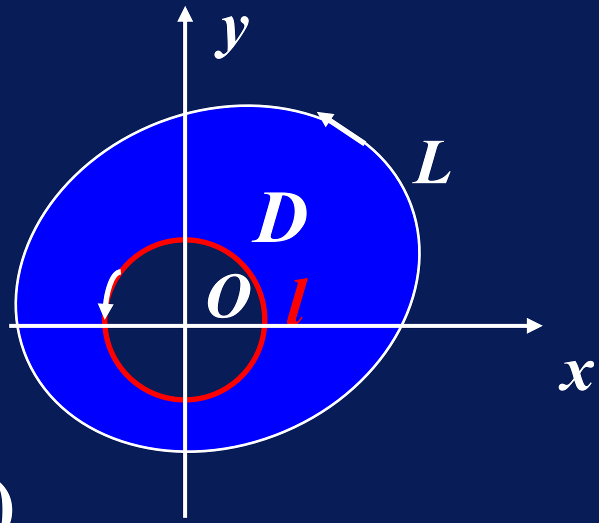
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\in G$$

虽然G不是单连通域 ，但

$$I=\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$$

目录 上页 下页 返回 结束

事实上,作 $l:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$\theta: 0 \mapsto 2\pi$

则 $I = (\oint\limits_{L+(-l)} - \oint\limits_{-l})(\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2})$

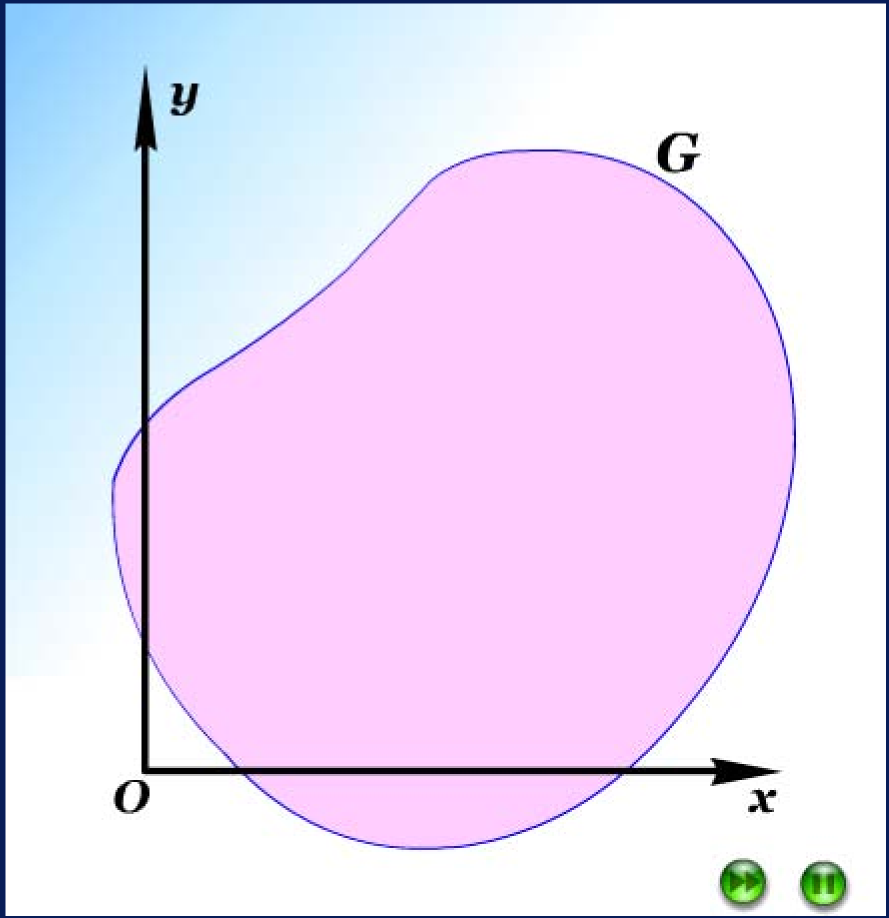
$= (\iint\limits_D (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint\limits_l \dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$= 0 + \int_0^{2\pi} \dfrac{0}{r^2}\mathrm{d}\theta = 0$

2° 当 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y)\in G$ 时， 由定理知:

计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径(但要完全位于G内),

通常选择平行于坐标轴的折线为积分路径.

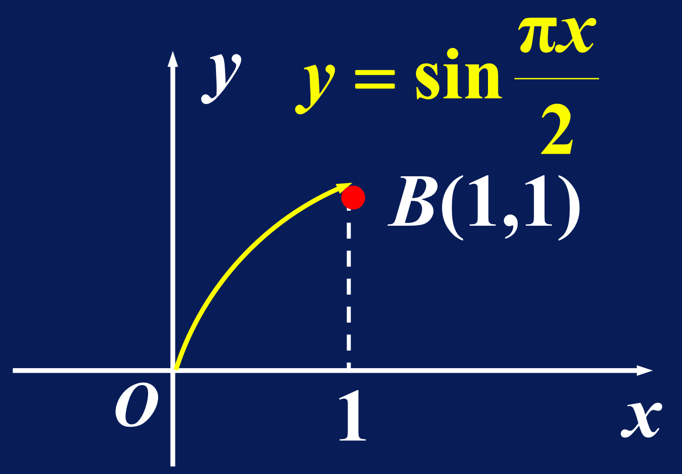


例8 计算 $\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$，其中$L$为由点 $O(0,0)$到点$B(1,1)$的曲线弧 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

解

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$$



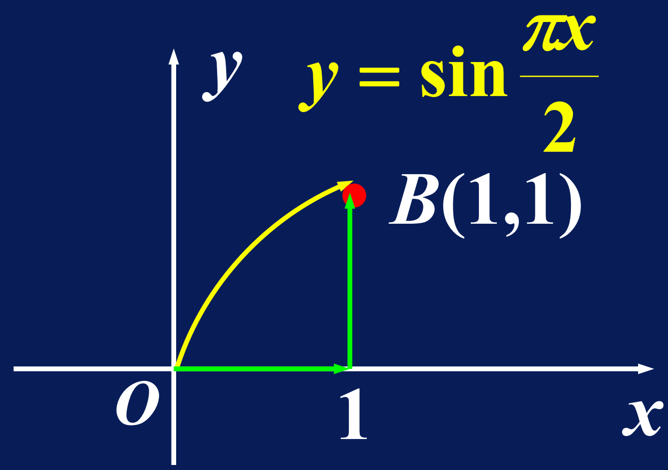
$$\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

原积分与路径无关

故 $$\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 (x^2+2x\cdot 0)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (1+y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{23}{15}.$$



例9 设曲线积分 $\int_L xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 φ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y.$$

解 $P(x, y) = xy^2, \quad Q(x, y) = y\varphi(x),$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)] = y\varphi'(x),$$

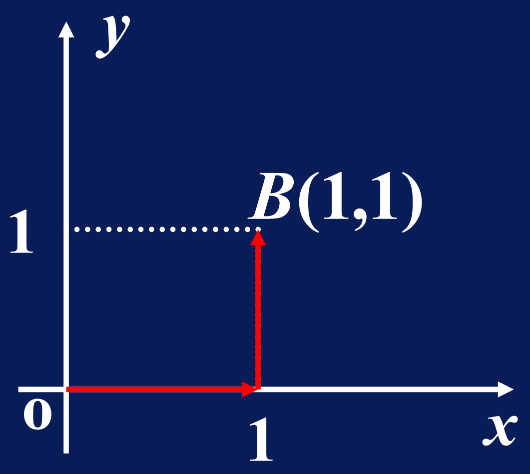
积分与路径无关 $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

(方法1)

$$\because\ y\varphi'(x)=2xy \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2+c,$$

由$\varphi(0)=0, \quad \Rightarrow c=0, \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2.$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$$



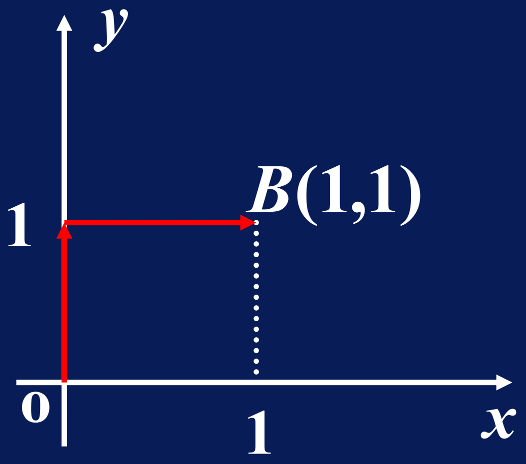
$$=\int_0^1 x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 y\varphi(1)\,\mathrm{d}y$$

$$=0+\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

(方法2)

$\because$ 积分与路径无关

$$\therefore \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x + y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$$



$$= \int_0^1 y\varphi(0)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x\cdot 1^2\,\mathrm{d}x \qquad (\varphi(0)=0)$$

$$= \int_0^1 y\cdot 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

例10 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有连续导数，求

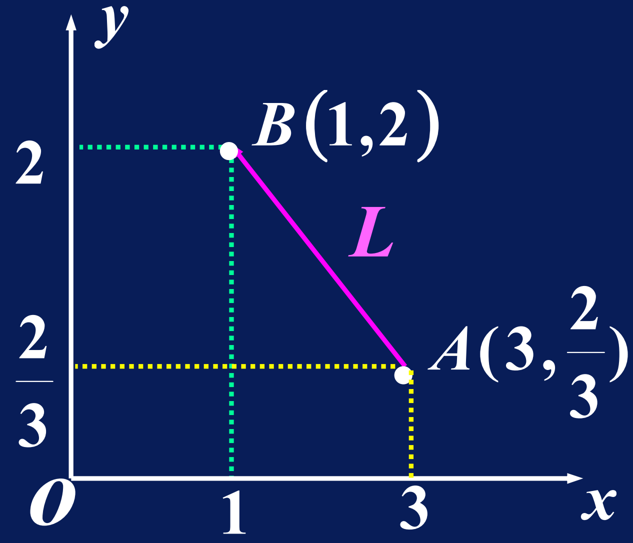
$$I=\int_L \underbrace{\frac{1+y^2 f(xy)}{y}}_{P}\mathrm{d}x+\underbrace{\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]}_{Q}\mathrm{d}y$$

其中L是从点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段 .

解 $$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xy\,f'(xy)$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (y\neq 0)$$

积分与路径无关，



目录 上页 下页 例10-1 继续

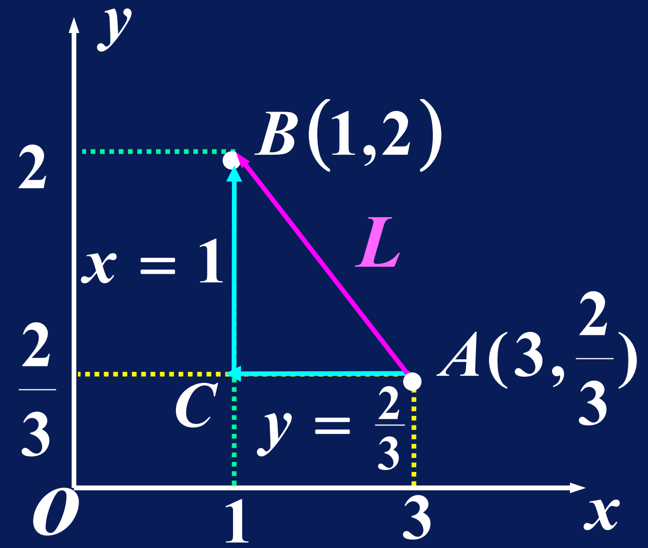
(方法1) 选折线路径 ACB.

$$I=\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\left(\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right)(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_3^1 \frac{3}{2}\left[1+\frac{4}{9}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left[f(y)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$



$$= \int_3^1 \frac{3}{2}[1 + \frac{4}{9} f(\frac{2}{3}x)]\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{2} [f(y) - \frac{1}{y^2}]\mathrm{d}y$$

$$= [-3 + \int_3^1 \frac{2}{3} f(\frac{2}{3}x)\mathrm{d}x] + [\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y - 1]$$

$$= \int_3^1 \frac{2}{3} f(\frac{2}{3}x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y - 4$$

令 $\frac{2}{3}x = t$

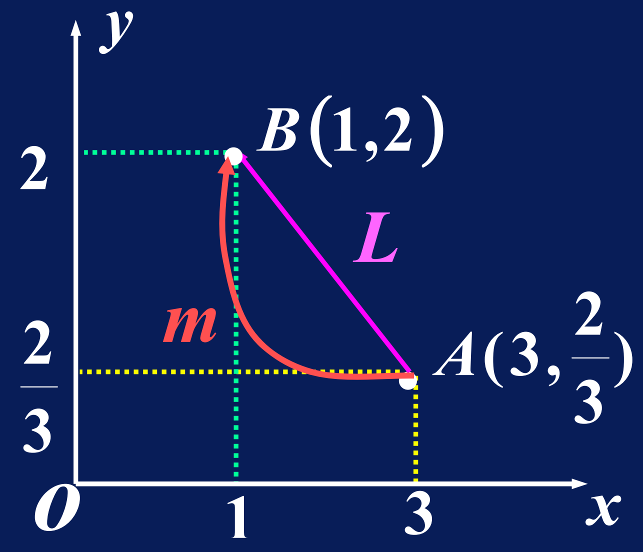
$$= \cancel{\int_2^{\frac{2}{3}} f(t)\mathrm{d}t} + \cancel{\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y} - 4$$

$$= -4$$

(方法2) 选路径 $\overset{\frown}{AmB}$:

$$xy = k \quad (k = 2)$$

$$x : 3 \mapsto 1$$



$$I = \int_{\overset{\frown}{AmB}} \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy) - 1\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_3^1 \{[\frac{x}{2} + \frac{2}{x} f(2)] + [xf(2) - \frac{x^3}{4}] \cdot (-\frac{2}{x^2})\}\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_3^1 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}x^2\Big|_3^1 = -4.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例11 计算

$$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y,$$

其中L为由点$(a,0)$到点$(0,0)$的上半圆周

$x^2+y^2=ax, y\geq 0$，常数 $m\neq 0$.

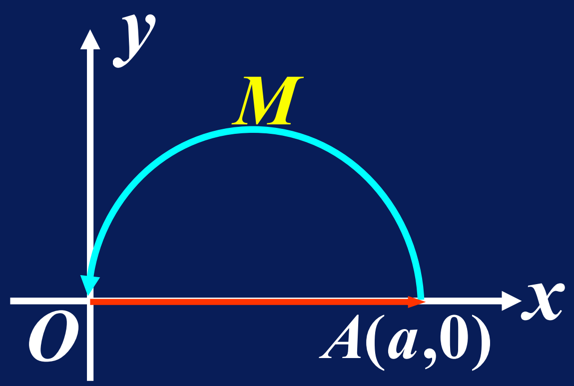
解 $\because \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\sin y-my)=\mathrm{e}^x\cos y-m$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\cos y-m)=\mathrm{e}^x\cos y$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad\therefore$ 积分与路径有关.

(方法1)

$$I=\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}=\oint_{\overset{\frown}{AMOA}}-\int_{\overline{OA}}$$



$$\oint_{\overset{\frown}{AMOA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=m\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{m}{8}\pi a^2,$$

$$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a 0\cdot\mathrm{d}x=0,$$

$$\therefore\quad I=\oint_{AMOA}-\int_{\overline{OA}}=\frac{m}{8}\pi a^2-0=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

目录 上页 下页 返回 结束

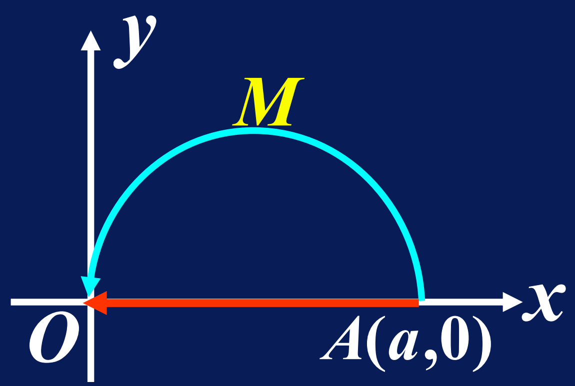
(方法2)

$$I=\int_L (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$$

$$=\left[\int_L e^x\sin y\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy\right]-\underline{\int_L my\,dx}$$

$$I_1=\int_L e^x\sin y\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$$ 与路径无关

$$=\int_{\overline{AO}} e^x\sin y\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$$



$$=\int_a^0 e^x\sin 0\,dx=0.$$

目录 上页 下页 返回 结束

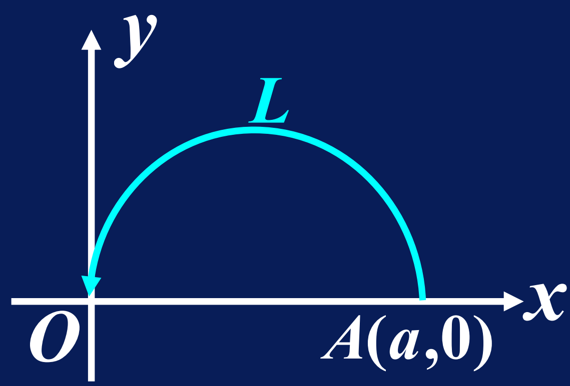
$$I_2 = \int_L my\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} m \cdot \frac{a}{2}\sin t \cdot \left(-\frac{a}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{ma^2}{4} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{ma^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{ma^2\pi}{8}$$

从而 $I = I_1 - I_2 = \dfrac{m}{8}\pi a^2.$



$$L: \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t \\ y = \dfrac{a}{2}\sin t \end{cases},$$

$$t:\quad 0 \mapsto \pi$$

三、平面曲线积分基本定理

设$P(x,y), Q(x,y)$在平面单连通域G内有一阶连续的偏导数，如果存在可微函数 $u(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\forall (x,y) \in G$$

则称 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在G内的一个原函数.

如：$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)]$

$\therefore \quad u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 是$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$的一个原函数.

定理10.5 (平面曲线积分基本定理)

若$u(x,y)$是$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在单连通域$G$上的一个原函数，则第二类曲线积分

$$\int_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

$$=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

其中A，$B\in G$，且$\overset{\frown}{AB}\subset G$.

曲线积分的
牛顿-莱布尼茨
公式

证 $\because$ $u(x,y)$是$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$的一个原函数

又定理10.4(1)=>(2)的证明，可设

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

因为曲线积分在G内与路径无关

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_0,y_0)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$$

注 1° 曲线积分的牛顿-莱布尼茨公式的另一种形式

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{\mathrm{grad}\,u = (P,\ Q)}$$

$$\int_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = u(B) - u(A)$$

即 $$\int_A^B \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = u(B) - u(A)$$

保守场

亦即 $$\int_A^B \mathrm{grad}\,u \cdot \mathrm{d}\vec{r} = u(B) - u(A)$$

2° 求原函数 $u(x, y)$的常见方法:

(1) 分项组合法;

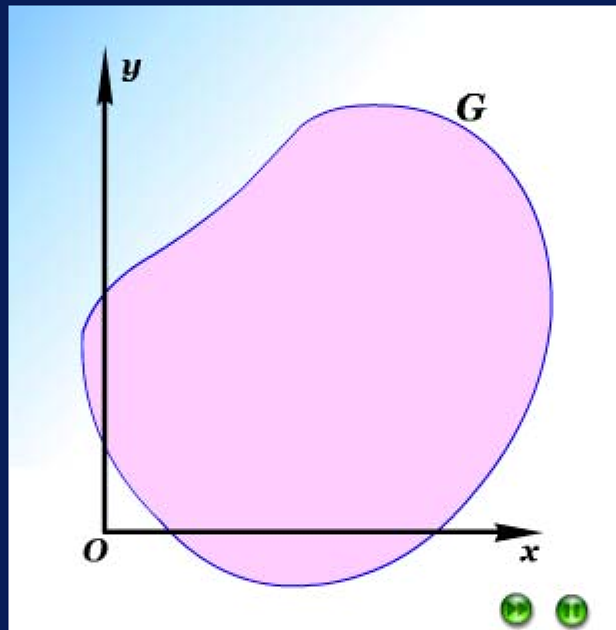
(2) 特殊路径法，如：折线 法;

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$



(3) 偏积分法.

目录 上页 下页 返回 结束

如：对于例8,

计算 $\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$

为由点 $O(0,0)$到点$B(1,1)$的曲线弧 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$.

解法2 $\because\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\in \mathrm{R}^2$

$\therefore\ \exists\, u=u(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\ \ (\forall (x,y)\in R^2).$$

$u(x,y)=?$

(方法1)　分项组合法

$$(x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^2\,\mathrm{d}x+(y\cdot 2x\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y)+y^4\,\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(\frac{x^3}{3})+\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}(\frac{y^5}{5})=\mathrm{d}(\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^5}{5})$$

$$\therefore\quad u(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^5}{5}$$

从而 $\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$

$$=u(1,1)-u(0,0)=\frac{23}{15}.$$

注 1° $\varphi(y)\,\mathrm{d}\,x \neq \mathrm{d}[\varphi(y)x]$

如: $y\,\mathrm{d}\,x \neq \mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y$

2° $\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}[\int \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x]$

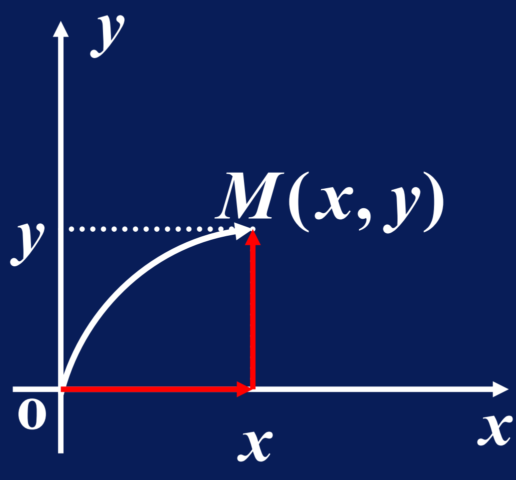
$$\psi(y)\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}[\int \psi(y)\,\mathrm{d}\,y]$$

如: $x\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}(\int x\,\mathrm{d}x)$

$$= \mathrm{d}(\frac{x^2}{2} + C)$$

(方法2) 折线法

$$u(x,y)=\int_{\overset{\frown}{OM}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x P(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^y (x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^5}{5}.$$

(方法3) 偏积分法

$\exists\, u = u(x, y)$, 使

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \qquad (\forall (x, y) \in R^2).$$

$$= (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^4$$

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + C(y)$$

待定

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y + C(y)$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+C'(y)=x^2+y^4$$

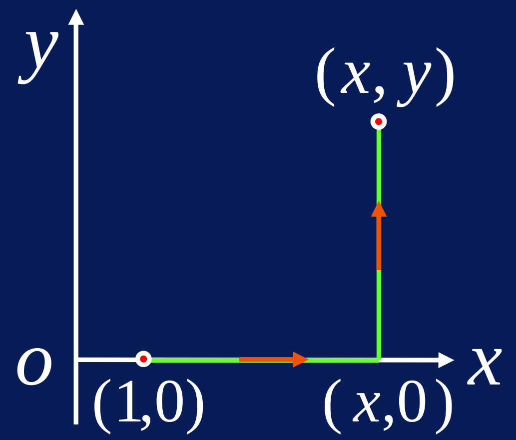
$$C'(y)=y^4$$

$$C(y)=\int y^4\,\mathrm{d}\,y=\frac{y^5}{5}+C_0$$

$$\therefore\quad u(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^5}{5}+C_0$$

(C_0为任意常数)

例12 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面($x>0$)内存在原函数，并求出一个这样的函数.



证 令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x>0)$$

在右半平面上取点(1, 0)

u(x,y)唯一吗?

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\int_1^x 0\cdot\mathrm{d}x + x\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \arctan\frac{y}{x} \quad (x>0)$$

内容小结

(1) 边界曲线L的正向.

(2) 格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(3) 平面曲线积分与路径无关的条件

(4) 平面曲线积分基本定理

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域 G 上 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下四个命题成立.
等价命题	(1) 在 D 内 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 (2) $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, 闭曲线 $C \subset G$ (3) 在 G 内存在 $U(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ (4) 在 G 内, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

第二类曲线积分计算题步骤

适合直接计算吗?

是 → 直接计算

否 ↓

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立吗?

是 → L是封闭曲线吗?

- 是 → $\oint_L = 0$
- 否 → 改变路径直接计算

否 → L是封闭曲线吗?

- 是 → 使用格林公式
- 否 → 补线变封闭用格林公式

备用题

例2-1 计算 $\oint_L (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy$,

(1) L是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的正方向；

(2) L是心脏线 $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$的正向.

解 $P=y-e^x$, $Q=3x+e^y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2.$

L所围成的区域为D，由格林公式得：

$$\oint_L (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy=2\iint_D dxdy$$

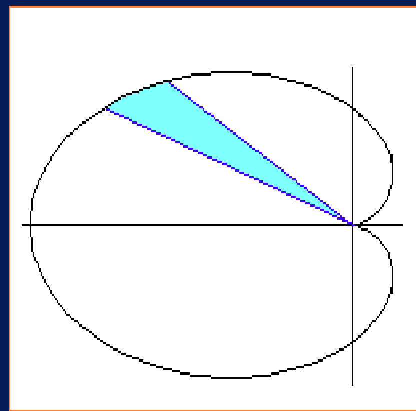
目录 上页 下页 返回 结束

$$\oint_L (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy = 2\iint_D dxdy$$

(1) D: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$的面积为$\pi ab$，故

$$\oint_L (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy = 2\pi ab.$$

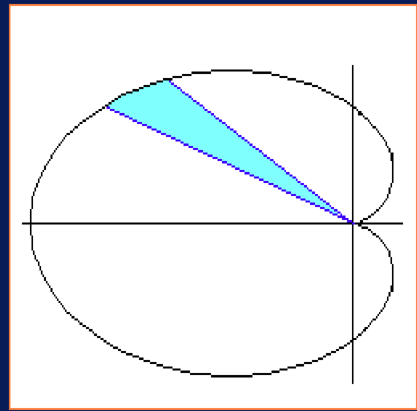
(2) L的极坐标方程为$\rho=1-\cos\theta$,



D为 $0\le\rho\le 1-\cos\theta(0\le\theta\le 2\pi)$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\oint_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+0 \quad = 3\pi.$$

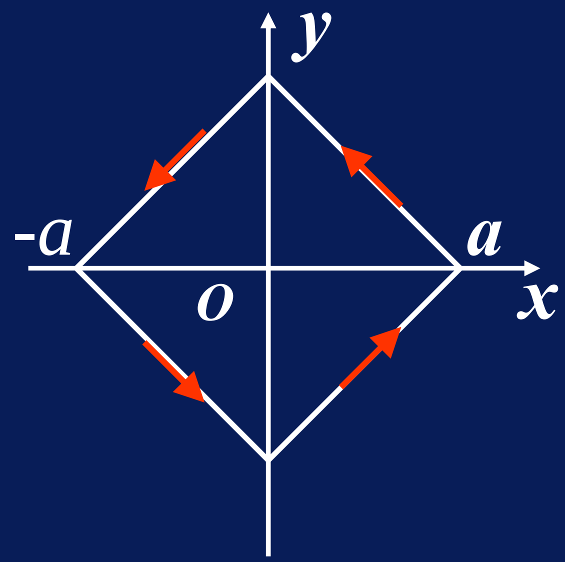
目录 上页 下页 返回 结束

例2-2 计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{|x| + |y|}$,其中$L$是依次以$A(a,0)$, $B(0,a)$, $E(-a,0)$, $F(0,-a)$为顶点的逆时针方向的 正方形$(a > 0)$.

解 闭路径L的方程式为$|x| + |y| = a$, L所围区域为D,

则D的边长为$\sqrt{2}a$, 面积为$2a^2$.

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{|x| + |y|} = \frac{1}{a}\oint_L xdy - ydx,$$

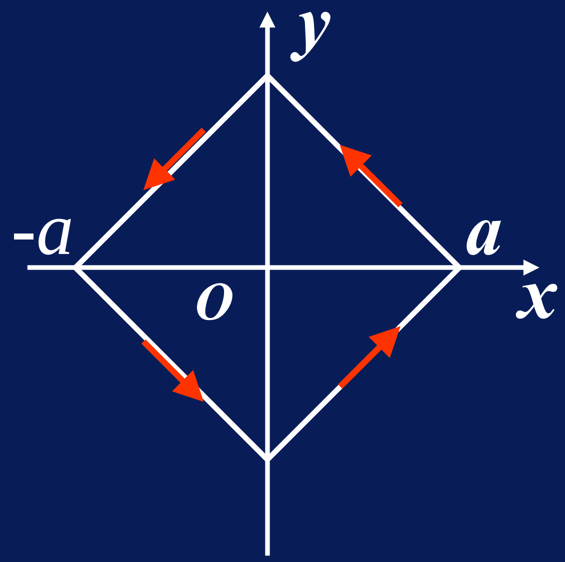


$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{|x| + |y|}$$

$$= \frac{1}{a}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

格林公式

$$= \frac{2}{a}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4a.$$



目录 上页 下页 返回 结束

例4-1 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从$O\,(0,0)$到$A\,(4,0)$.

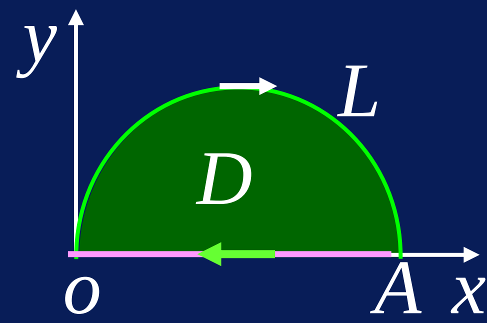
解 添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D, 则

$$\text{原式}=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

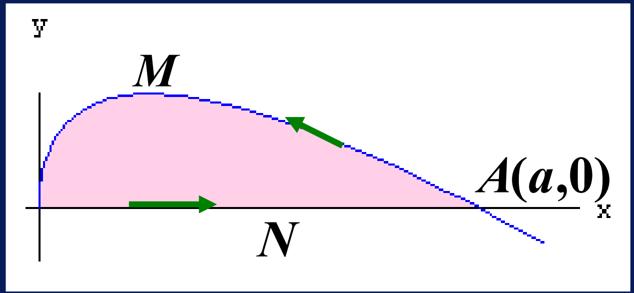
$$=-\iint_D(-4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$



例6-1 计算抛物线 $(x+y)^2 = ax(a>0)$，与x 轴围成的面积.

解 $ONA: y=0;$



$\overset{\frown}{AMO}: y=\sqrt{ax}-x,\ x\in[0,a].$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{ONA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{AMO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^0 x(\frac{a}{2\sqrt{ax}}-1)\mathrm{d}x-(\sqrt{ax}-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{AMO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \quad = \frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^2.$$

例7-1 设函数$u(x,y)$与$v(x,y)$在闭域D及其周界L上具有一阶连续偏导数。证明：

$$\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L uv\,\mathrm{d}y-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 $P=0,\ Q=uv,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因P、Q、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，故由格林公式得：

$P = 0,\ Q = uv,$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因P、Q、$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$连续，故由格林公式得：

$$\oint_L uv\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而 $\displaystyle\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L uv\,\mathrm{d}y - \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

例10-1 试确定λ值,使$\int_L \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$的值与路径无关，其中 路径$L$与$x$轴不相交(或不相接触）；并计算

$$\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$$

解 $P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda,\quad Q=\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)],$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-(x^2+y^2)]$$

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的值与路径无关的充要条件是

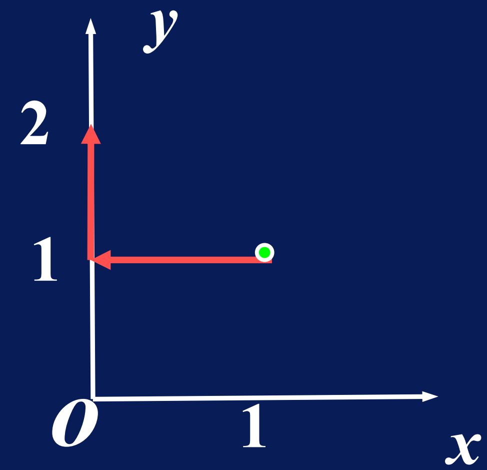
P、Q、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，且$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,

即 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$,

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

当$\lambda=-\dfrac{1}{2}$时，$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关，

其中L与x轴无公共点，



$$\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(1,1)}^{(0,1)}+\int_{(0,1)}^{(0,2)}=\int_1^0 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^2 0\cdot\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例12-1 证明：$(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$

$=\mathrm{d}u(x,y)$，并求原函数 $u(x,y)$.

解 $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy-y^2)\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy-y^2)=2(x-y)$,

所以 $(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$

为某函数$u(x,y)$的全微分.

令 $A(0,0), M(x,y), E(0,y)$,

则 $u(x,y)=\int_A^M(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$

其中C是任意常数。

令 $A(0,0),\ M(x,y),\ E(0,y),$

$$u(x,y)=\int_A^M (2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{AE}+\int_{EM}(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x (2xy-y^2)\mathrm{d}x+\int_0^y(-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$