习题课

极限与连续

一、 极限

二、 连续

一、 极限

1. 极限定义的等价形式 (以 $x \to x_0$ 为例)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \rightleftarrows \lim_{x\to x_0} [f(x) - A] = 0$$

$\boxed{"\varepsilon - \delta"}$ (即 $\alpha = f(x) - A$ 为无穷小)

$$\rightleftarrows f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$$

$$\rightleftarrows \forall \{x_n\}(x_n \neq x_0),\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

2. 极限存在准则及极限运算法则

3. 无穷小量

无穷小的性质； 无穷小的比较；

常用等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，有

$\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

$\arctan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$;

$e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$;

4. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ \lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e.$$

5. 求极限的常见方法:

1）用极限定义求极限;

2）求分式极限----消零因子法;

3） 用单调有界准则求极限;

4）用夹逼准则求极限;

5）用两个重要极限求极限;

6）利用左右极限求极限;

7）用变量代换求极限;

9）用等价无穷小代换求极限;

这些方法非常重要且十分有效.随着课程的深入,后面还将介绍新的方法.

6. 判断极限不存在的方法

例1 . 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$(2)\ \lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x} \qquad (3)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}$$

提示: (1) $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

$$=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=\underbrace{2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小}}\ \underbrace{\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界}}$$

所以，原式 = 0

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

令 $t=x-1$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t(t+2)}{\sin\pi(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin\pi t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\pi t}=\frac{2}{\pi}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}$ $\boxed{1^{\infty}}$

解: 法1 利用第二个重要极限

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-x}\cot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x}$$

$$=e^{2}$$

法2 对数恒等变形，利用结论

$$原式 = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\cot x}$$

$$\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) \sim \frac{2x}{1-x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2x}{1-x}\right)} = e^{2}$$

补充: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln\left[1+u(x)\right]}$$

例2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解:利用左右极限求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{\overset{\to 0}{-\frac{4}{x}}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\underset{\to 2}{1+e^{\frac{4}{x}}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$\Longrightarrow$ 原式 = 1

例3. 确定常数 a , b , 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$

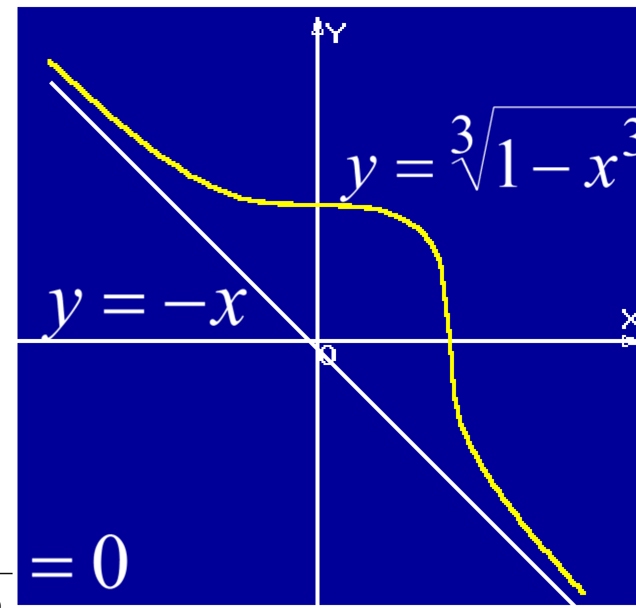
解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}\right)=0$$

故 $-1-a=0$, 于是 $a=-1$, 而

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\underbrace{-x\sqrt[3]{1-x^3}}_{+}+x^2}$$



例4. 当 $x \to 0$时, $\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$ 是 x 的几阶无穷小?

解: 设其为 x 的 k 阶无穷小, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq 0$$

因 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^{3k}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}(1+x^{\frac{3}{2}})}$$

故 $$k=\frac{1}{6}$$

例5. 设 $a>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right),\ n=1,2\cdots$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

证明 $\because\quad x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)\geq\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^2}}=\sqrt[3]{a},n=1,2\cdots$

$\therefore\quad \{x_n\}$ 有下界又

$$\because\quad x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_n^2}-x_n\right)$$

$$=\frac{a-x_n^3}{3x_n^{\ 2}}\leq 0\qquad (\because\ x_n^3\geq a)$$

$\therefore\quad \{x_n\}$ 单调下降有下界，从而存在极限

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 对 $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n{}^2}\right)$

两边取极限 $\Rightarrow A = \frac{1}{3}\left(2A + \frac{a}{A^2}\right)$

$\therefore A = \sqrt[3]{a}.$

二、 连续

1. 函数连续的等价形式

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\left(\Delta x = x - x_0 , \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right)$$

$$\Longleftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \left| x - x_0 \right| < \delta \text{时，有}$$

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

2. 函数间断点

- 第一类间断点
  - 可去间断点
  - 跳跃间断点
- 第二类间断点
  - 无穷间断点
  - 振荡间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

有界定理；最值定理； 零点定理；介值定理 .

例1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$ __2__，$b=$ __e__ .

提示: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$

$\boxed{1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2}$

$\dfrac{a}{2}=1=\ln b$

目录 上页 下页 返回

例2. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，试确定常数 a 及 b.

解: $\because$ $x=0$ 为无穷间断点，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

$$\Longrightarrow a=0\,,\, b\neq1$$

$\because x=1$ 为可去间断点，$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Longrightarrow \lim_{x\to1}(e^x-b)=0 \Longrightarrow b=\lim_{x\to1}e^x=e$$

例3. 求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点, 并判别其类型.

解: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(1+x)}\sin x}{|x|\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$

$x = -1$ 为第一类可去间断点

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$

$x = 1$ 为第二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,$

$x = 0$ 为第一类跳跃间断点

例4. 设 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，且对任意实数 x, y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续．

证明: 由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，有

$$f(0+0)=f(0)+f(0)$$

从而 $f(0)=0.$

任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

例5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，$x_i \in [a,b], t_i > 0, i = 1,2,\cdots,n,$

$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$证明:至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使得$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(x_i)$.

证 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 最小值 m, $\forall x \in [a,b]$, 有 $m \le f(x) \le M$

$\forall x_i \in [a,b], t_i > 0,\ i = 1,2,\cdots,n,$ 都有

$$m = \sum_{i=1}^{n} m \cdot t_i \le \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} M \cdot t_i = M$$

由介值定理知至少存在一点 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(x_i).$$