第四章 有限集与无限集

主要内容

- 基本概念
- 有限集元素的计数
- 无限集的性质

4.1 基本概念

有限集和无限集是两类性质不同的集合
它们之间的很多性质不能互相推广

定义4.1 集合N_n={0,1,2, … ,n-1}与 S 之间如果存在双射函数 f: $N_n \rightarrow S$, 则称S是有限集；如果S不是有限集，则称其为无限集。

定义4.2 如果存在双射函数f: $S \rightarrow S'$ 使得$S' = f(S) \subset S$, 则称S是无限集，否则是有限集。

例1：由有限个元素组成的集合是有限集
自然数集合N是无限集（证明思路，通过一个双射函数验证
例如$f(x)=2x$）

4.2 有限集合元素的计数

定义4.3 有限集S元素的个数称为其基数，记为$|S|$。

有限集计数的方法

1. 文氏图法

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个?

解 方法一：文氏图

定义以下集合：

$S=\{x \mid x \in Z \wedge 1 \le x \le 1000\}$

$A=\{x \mid x \in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x \mid x \in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x \mid x \in S \wedge x$可被8整除$\}$

实例

$\lfloor x \rfloor$表示小于等于x的最大整数，lcm( )表示求最小公倍数

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$, $|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

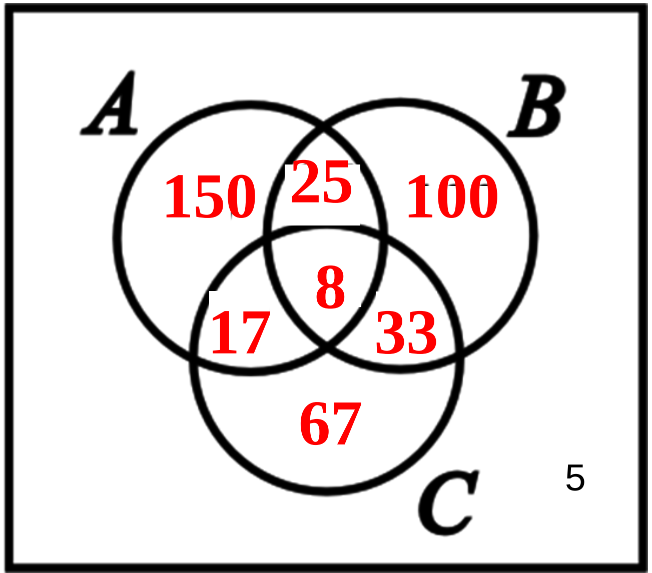
$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

画出文氏图，然后填入相应的数字

解得 N=1000－(200+100+33+67)

=600



文氏图法

对文氏图的直观认识：

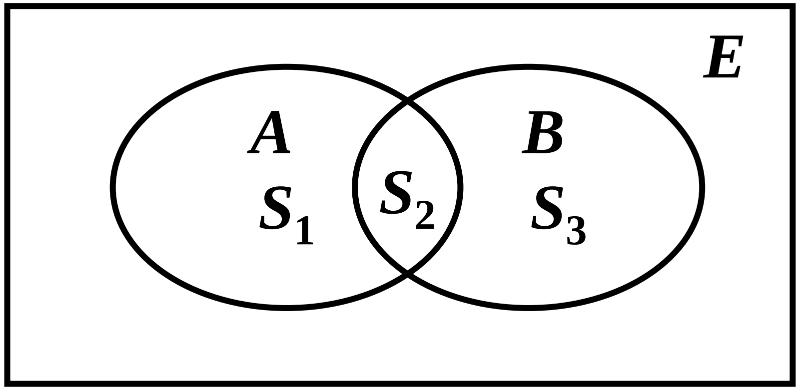
设A和B是有限集合，则

- 若A和B分离（交集为空集），则有：$|A\cup B| = |A|+|B|$
- 一般地，$|A\cup B| = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

$$= (|S_1| + |S_2|) + (|S_2| + |S_3|) - |S_2|$$

$$=|A|+|B| - |A\cap B|$$

特别地：$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$



2. 包含排斥原理

定理4.1 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

推论 S中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

实例

方法二

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\ |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,\ |C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/33 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

4.3 无限集的性质

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 可列集

集合的等势

定义4.4 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是**等势**的, 记作$A\approx B$. 如果A不与B等势, 则记作$A\not\approx B$.

集合等势的实例

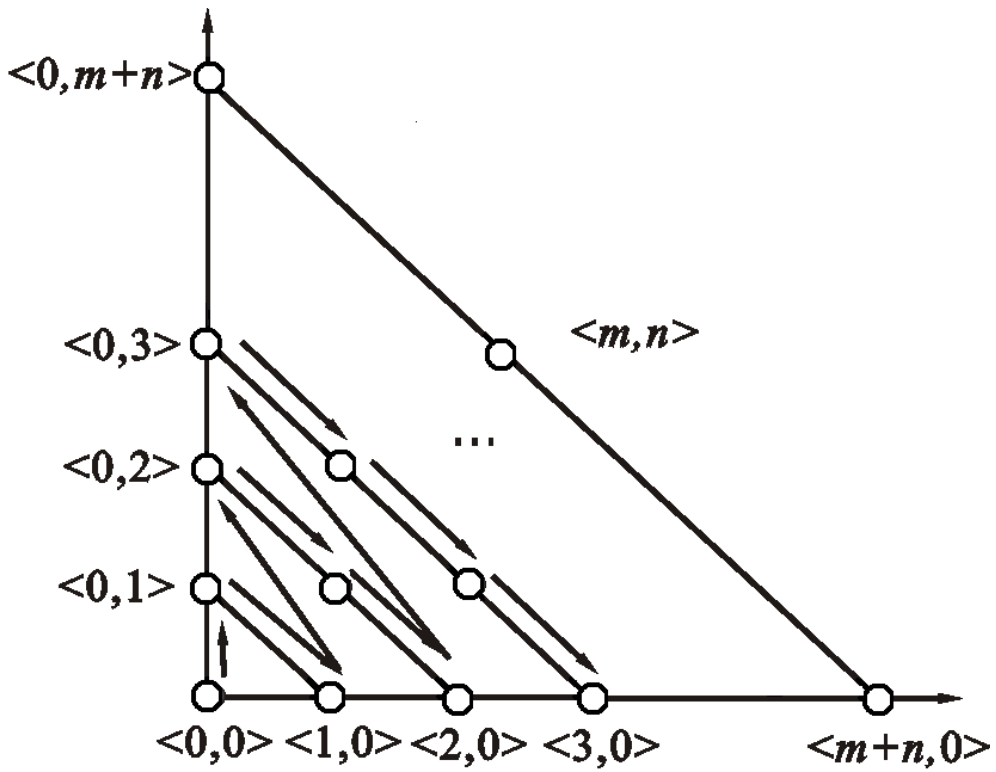
例3 (1) Z≈N.

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

则f是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

集合等势的实例: N×N≈N

(2) N×N≈N.　N×N中所有的元素排成有序图形



$$f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N},\quad f(<m,n>)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

实数集合的等势

(3) (0,1)≈R. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x\in R\wedge 0<x<1\}$. 令

$$f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(4) 对任何$a, b\in \mathrm{R}$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$，双射函数 $f:[0,1]\to[a,b]$, 找一个过点$(0, a)$和$(1, b)$的单调函数即可.

$$f(x)=(b-a)x+a$$

类似地可以证明, 对任何$a, b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

有限集和无限集

定理4.2 若一集合为无限集，则它必含有与其等势的真子集；

推论 一个集合为无限集的充要条件是它必含有与其等势的真子集.

定义4.5 一个集合若存在与其等势的真子集, 则称为无限集，否则称为有限集

最常用的无限集：

定义4.6 与自然数N等势的集合叫做可列集（可数无限集）

定理4.3 一无限集必包含一可列集，可列集的无限子集仍为可列集

有限集和无限集

定义4.6 与自然数N等势的集合叫做**可列集（可数无限集）**

如果存在一个从*N*到*A*的双射函数,那么集合*A*的基数是 $\aleph_0$ ，记为 $|A| = \aleph_0$

$\aleph_0$ 读做阿列夫零

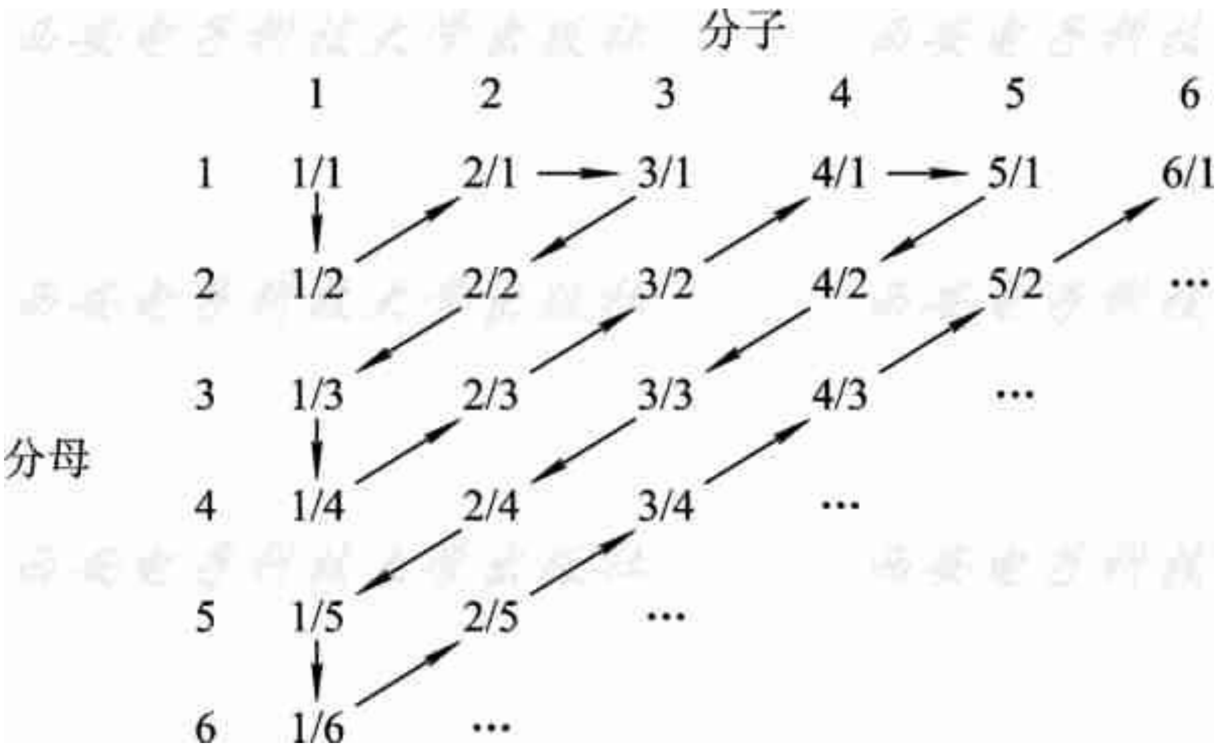
可数集：有限集和可列集

不可数集（不可数无限集）：不可数的集合

一些结论

(1) 整数集Z是可列集

(2) 有理数Q是可列集



一些结论

(1) 整数集Z是可列集

(2) 有理数Q是可列集

(3) 实数集R是不可列的

定理: 实数的子集［0,1］不是可数无限。

证 设 f 是从N到［0,1］的任一函数, 我们将证明f 不是满射函数, 从而证明［0,1］不是可数无限。

我们把每一$x\in$［0,1］都表示为无限十进制小数, 于是$f(0)$, $f(1)$, $f(2)\ldots$可表示为

$$f(0): \cdot\ x_{00}\quad x_{01}\quad x_{02}\quad x_{03}\cdots$$

$$f(1): \cdot\ x_{10}\quad x_{11}\quad x_{12}\quad x_{13}\cdots$$

$$f(2): \cdot\ x_{20}\quad x_{21}\quad x_{22}\quad x_{23}\cdots$$

$$\vdots$$

$$f(n): \cdot\ x_{n0}\quad x_{n1}\quad x_{n2}\quad x_{n3}\cdots$$

$$\vdots$$

这里x_{ni}是$f(n)$小数展开式的第i个数字。现在我们指定实数$y \in$［0,1］如下:

$$y \cdot y_0\quad y_1\quad y_2\cdots$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{如果} x_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{如果} x_{ii} = 1 \end{cases}$$

数y是决定于数组对角线上的数字。显然, $y\in$［0,1］, 然而, y与每一$f(n)$的展开式至少有一个数字(即第n个数字)不同。因此, 对一切n, $y\neq f(n)$。我们得出映射$f:N\rightarrow$［0,1］不是一个满射函数。

因为f是任意的, ［0,1］不是可数无限集。

定义 如果有从［0,1］到集合A的双射函数,那么A的基数是c。

|(0,1)| = |［0,1］| = c

证：定义集合A是 $\left\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\cdots\right\}$, 定义映射f 如下:

$$f:[0,1]\rightarrow(0,1)$$

$$f(0)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+2} \quad 对 n\geq 1$$

$$f(x)=x 对 x\in[0,1]-A$$

THE END