



# 布尔函数



**定义7.14** 设有 $B=\{0, 1\}$ , 可用它构造一个函数

$$Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $f:B^n \rightarrow B$ , 这个函数称为 **$n$ 元布尔函数**,  $x_i$ 称为它的**布尔变元**。

布尔函数可以用**布尔映射表**来表示, 例如三元布尔函数的映射表:

联想:命题逻辑中的真值表

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0





布尔函数可以用布尔表达式表示

**定义7.15** 布尔表达式可由如下公式组成：

- (1) 0和1是布尔表达式；
- (2) 布尔变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是布尔表达式；
- (3) 若 $E_1, E_2$ 是布尔表达式, 则 $E_1 \wedge E_2, E_1 \vee E_2, E_1'$ 是布尔表达式；
- (4) 布尔表达式由且仅由上述三种方式在有限步骤内组成。

回忆合式公式

例:  $(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3))'$  是布尔表达式       $\wedge$  布尔积( $\circ$ )、 $\vee$  布尔和(+)

$x_1 x_2 \circ x_3$  不是布尔表达式

如何由布尔函数构造布尔表达式？





**定义7.16** 布尔变元或其补称为**文字**，布尔变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的**最小项**是一个布尔积 $y_1 \circ y_2 \circ \dots \circ y_n$ ，其中 $y_i = x_i$ 或 $y_i = x_i'$

联想:命题逻辑中的最小项

**Note:** 一个最小项对一个且仅对一个变元值的组合为1，这个变元值的取值如下：

- (1) 当 $y_i = x_i$ 时，取值为1；
- (2) 当 $y_i = x_i'$ 时，取值为0。

类比:命题变元的赋值

例：最小项  $x_1 \circ x_2' \circ x_3$  仅对  $x_1=1, x_2=0, x_3=1$  的取值组合取值为1





**定义7.17** 由最小项所表示的布尔积所组成的布尔和，称为**积之和表达式**，也称**积之和展开式**

类比：命题逻辑中的主析取范式

**定理7.10** 布尔函数可用一个积之和展开式表示

**证明：**布尔函数可由布尔映射表表示，布尔映射表中使布尔函数的值为1的行与一个最小项对应，整个表有 $m$ 行使布尔函数的值为1，它们组成了 $m$ 个布尔积的布尔和，即一个**积之和展开式**。

例：前述表中的布尔函数为：

$$x_1' \circ x_2' \circ x_3' + x_1' \circ x_2 \circ x_3' + x_1 \circ x_2' \circ x_3' + x_1 \circ x_2 \circ x_3'$$

用布尔代数的性质化简为：  $x_3'$





**THE END**

