第六节

多元函数微分学的应用

- 一、几何应用
  - 1. 空间曲线的切线与法平面
  - 2. 曲面的切平面与法线
- 二、二元函数可微的几何意义
- ★ 三、全微分在近似计算中的应用

一、几何应用

回顾： 平面曲线的切线与法线

① 已知平面光滑曲线 $y = f(x)$, 在点 (x_0, y_0) 有

切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\quad (f'(x_0) \neq 0)$

② 若平面光滑曲线方程为 $F(x, y) = 0$, 因

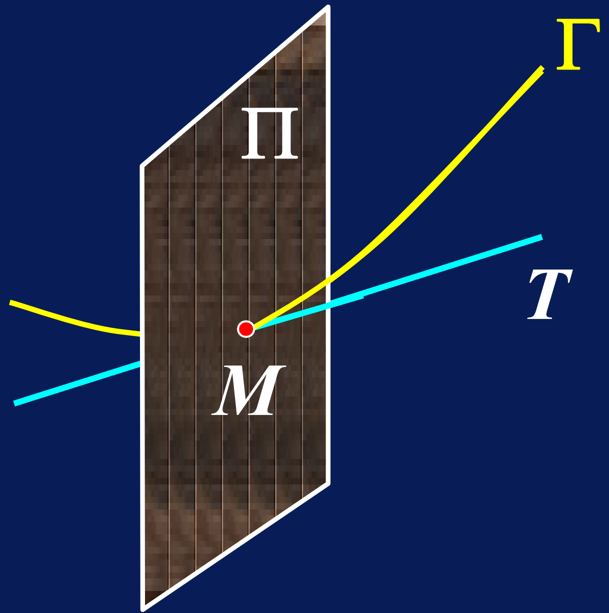
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$ 故在点 (x_0, y_0) 有

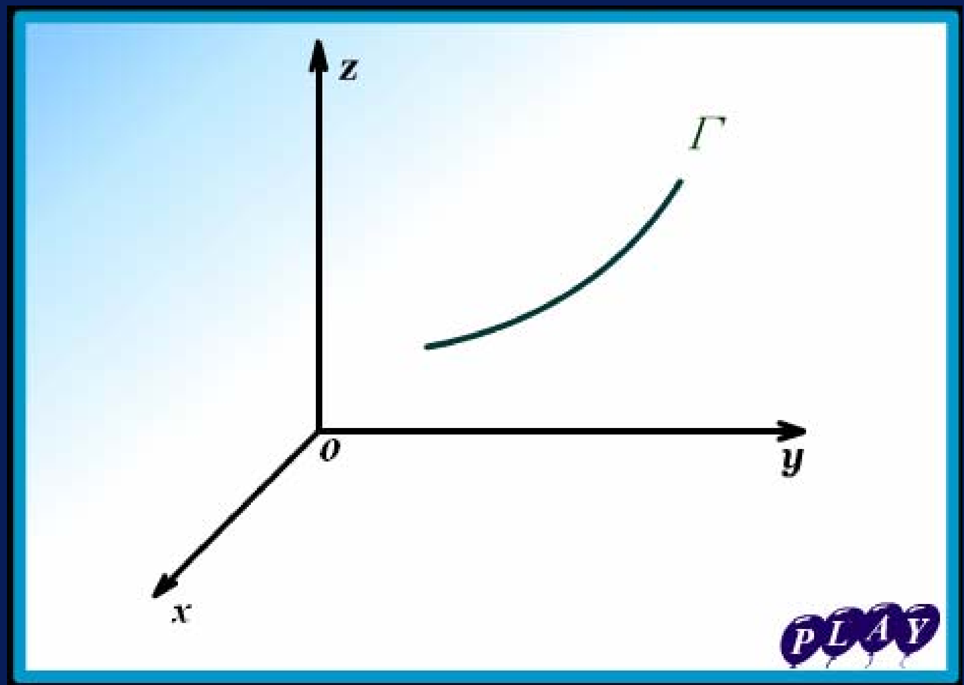
切线方程 $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

法线方程 $F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

1.空间曲线的切线与法平面

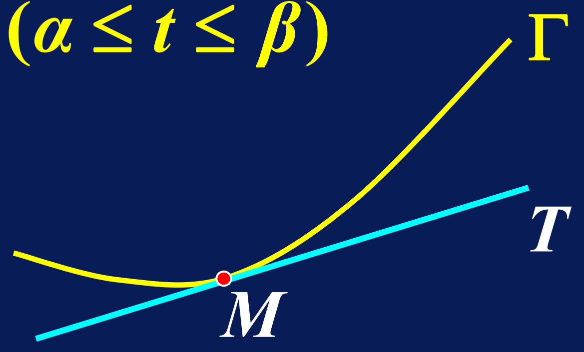
空间光滑曲线Γ在点 M 处的切线为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的法平面.





(1) 曲线方程为参数方程的情形

$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$



写成向量形式:

$$\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

当$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$都在$t_0$可导, 由第七章 知

$$\vec{r}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

Γ上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线的方向向量

其中$x_0=\varphi(t_0),\ y_0=\psi(t_0), z_0=\omega(t_0)$.

目录 上页 下页 返回 结束

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

Γ上点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程

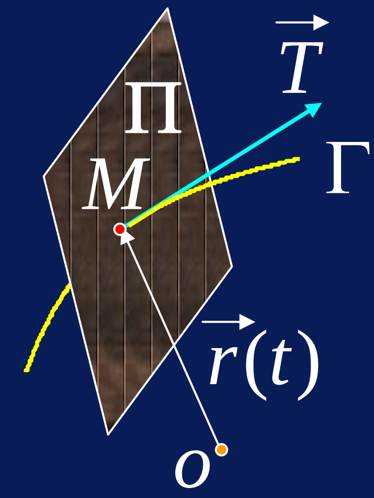
此处要求$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0，如个别为0，则理解为相应的分子为 0 .

$\vec{T}=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$ ——— 称为曲线 Γ的切向量

$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$:

曲线 Γ上点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切向量 . 指向参数t增大的方向.

$\vec{T}$ 也是法平面的法向量, 因此得



曲线 Γ 上点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

注 若光滑曲线 Γ 表示为:

$$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

则在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处, 切向量:

$$\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$$

切线方程:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程:

$$(x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0$$

(2) 曲线方程为一般方程的情形

$$\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

$$\left(若 J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0 \right)$$

由 $\begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0 \\ G(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0 \end{cases}$, 有

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot \varphi'(x) + F_z \cdot \psi'(x) = 0 \\ G_x + G_y \cdot \varphi'(x) + G_z \cdot \psi'(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot \varphi'(x) + F_z \cdot \psi'(x) = 0 \\ G_x + G_y \cdot \varphi'(x) + G_z \cdot \psi'(x) = 0 \end{cases}$$

可求得曲线在$M(x_0, y_0, z_0)$处的切向量：

$$\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$$

切向量求法之一

$$= \left\{ 1, -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}, -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix} \right\}_M$$

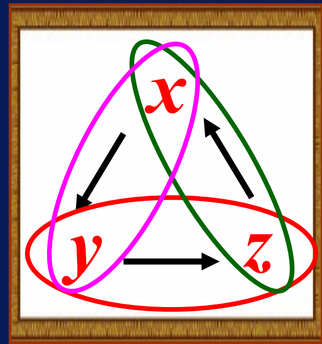
$$= \frac{1}{J}\left\{ J, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}_M ，\text{其中 } J = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

或 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

切向量求法之二

于是在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有



切线方程:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程为:

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_M(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_M(z-z_0)=0.$$

例1 求曲线Γ：$x=\int_0^t e^u \cos u du \quad y=2\sin t+\cos t$,

$z=1+e^{3t}$ 在$t=0$处的切线和法平面方程.

解 当$t=0$时，$x=0, y=1, z=2$, 切点：$M(0,1,2)$

$$x'=e^t\cos t,\quad y'=2\cos t-\sin t,\quad z'=3e^{3t},$$

切向量：$\vec{T}=(x',y',z')_{t=0}=(1,2,3)$

切线方程: $$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

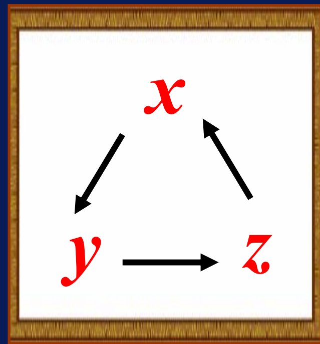
法平面方程: $$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$$

即 $$x+2y+3z-8=0.$$

例2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解(方法1) 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left|\begin{matrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$



$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$

切向量 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

$$=(-6,\ 0,\ 6)$$

目录 上页 下页 例2-1 继续

点 $M(1,-2,1)$,

切向量：$\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$

即 $\begin{cases} x+z-2=0, \\ y+2=0. \end{cases}$

法平面方程

$$-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$$

即 $x-z=0$

(方法2) $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

每个方程两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0. \end{cases}$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}$$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量为:

$$\vec{T}=\left(1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$$

点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即
$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程
$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即
$$x-z=0$$

(方法3) 将在后面介绍.

2.曲面的切平面与法线

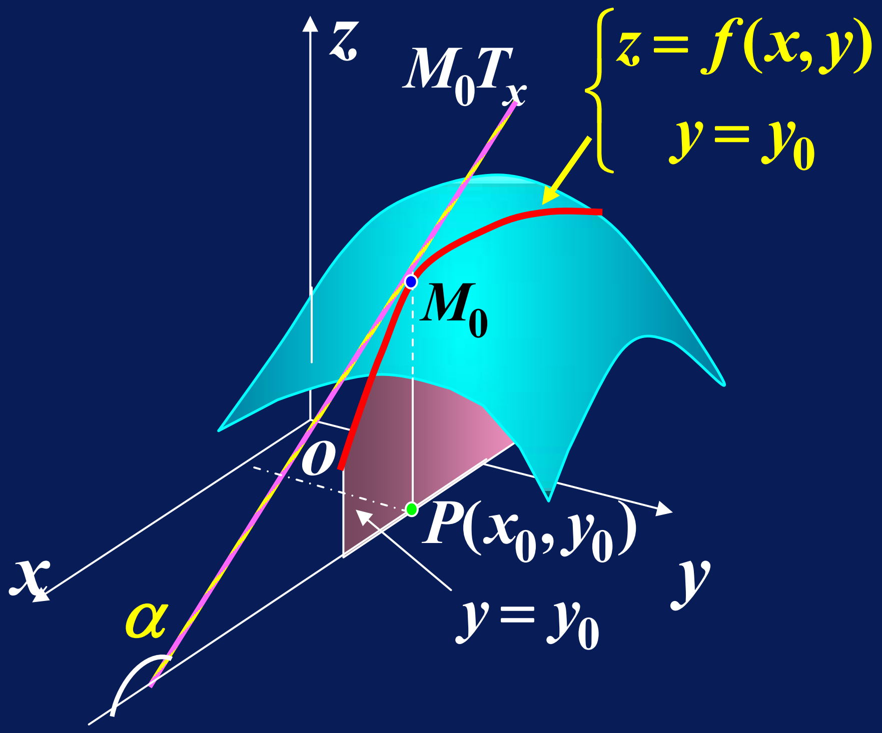
(1) 形如 $z=f(x,y)$ 的曲面的切平面与法线

$$\tan\alpha = f_x(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$

在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.



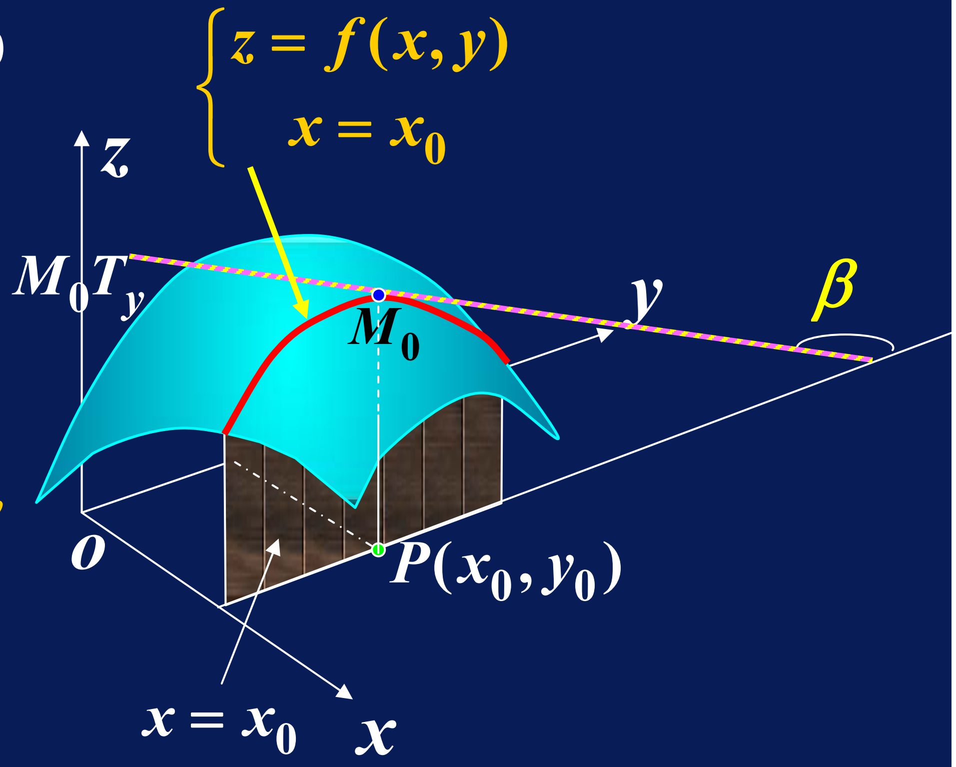
$$\tan\beta = f_y(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$

在点 M_0 处的切线 M_0T_y

对 y 轴的斜率.



目录 上页 下页 返回 结束

曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切向量为:

$$\overrightarrow{M_0T_x} = \left(1, \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}\right)\Big|_{M_0}$$

$$= (1, 0, f_x(x, y_0))\Big|_{M_0}$$

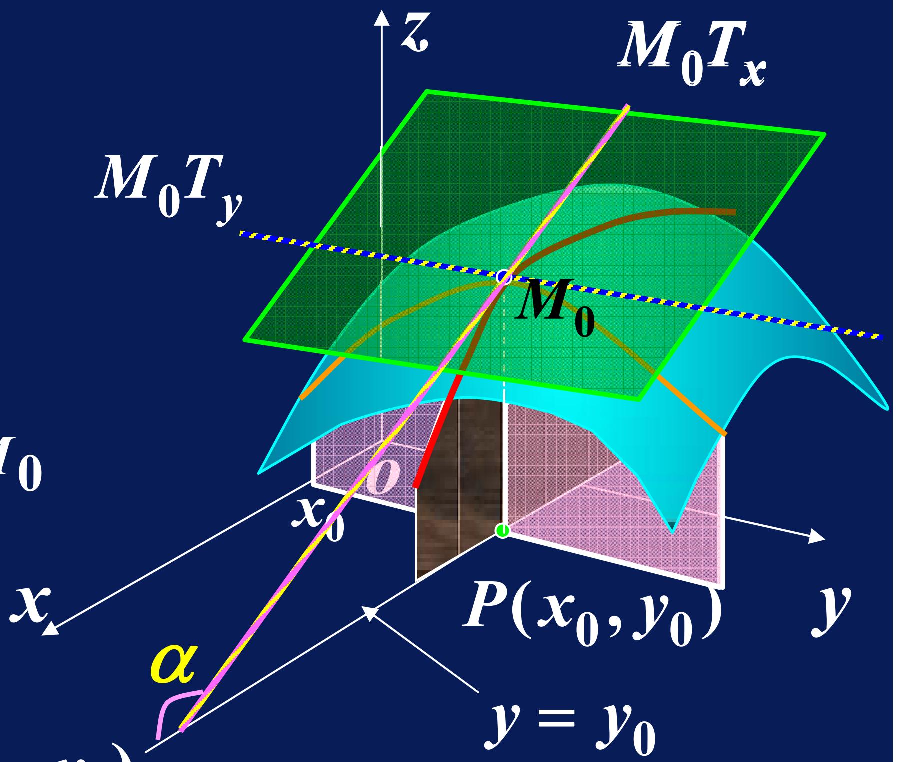
$$= (1, 0, f_x(x_0, y_0))$$

同理，曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切向量为:

$$\overrightarrow{M_0T_y} = \left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}, 1, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}\right)\Bigg|_{M_0}$$

$$= (0, 1, f_y(x_0, y))\Big|_{M_0}$$

$$= (0, 1, f_y(x_0, y_0))$$



定义 设 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)具有连续偏导数，称由切线 MT_x与MT_y确定的平面为曲面$z = f(x, y)$ 在点$M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的**切平面**.

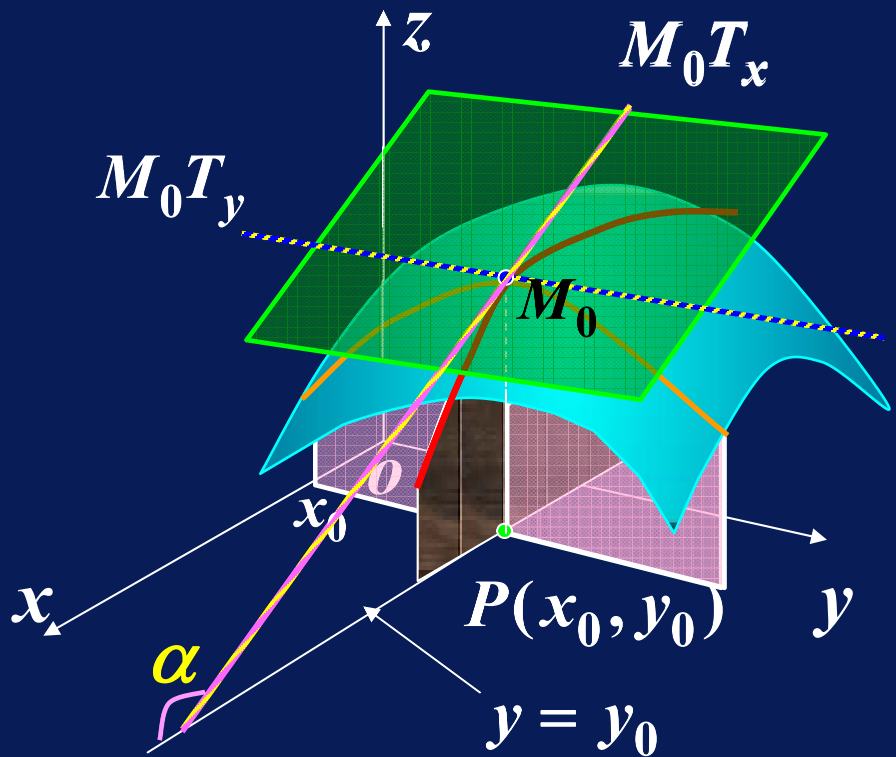
目录 上页 下页 返回 结束

切平面的法向量:

$$\vec{n}=\overrightarrow{MT_x}\times\overrightarrow{MT_y}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0)\\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$

$$=-f_x(x_0,y_0)\vec{i}-f_y(x_0,y_0)\vec{j}+\vec{k}$$



$$\vec{n}=\pm(f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0),\, -1)$$

曲面$z=f(x,y)$在点M_0的法向量

目录 上页 下页 返回 结束

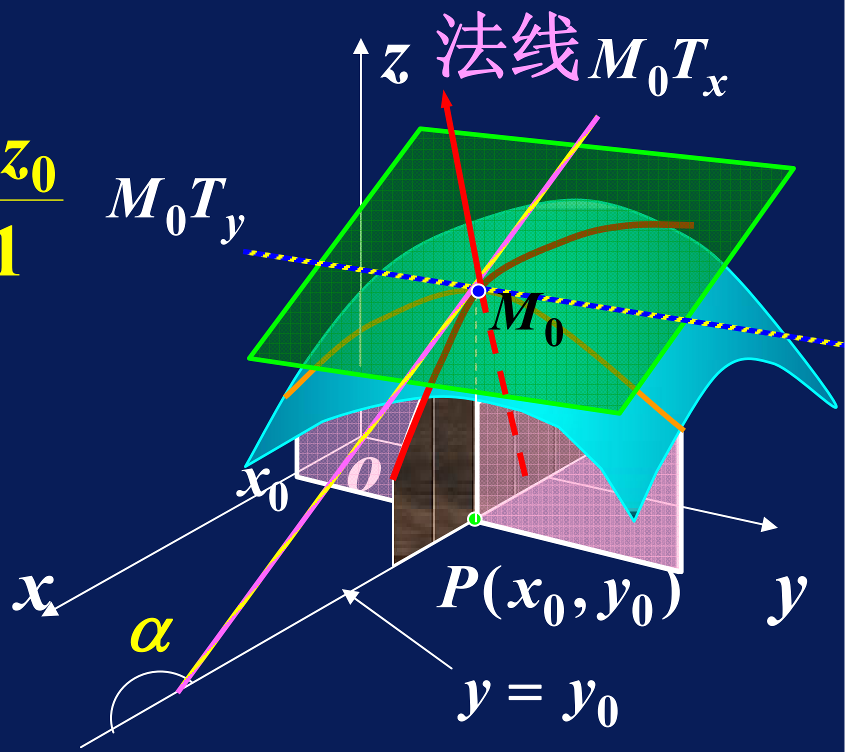
切平面方程：

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

记$z_0=f(x_0,y_0)$, 称通过点 $M(x_0,y_0,z_0)$且垂直于切平面的直线为曲面$z=f(x,y)$在点M处的法线.

法线方程:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$



求曲面的切平面(或法线)方程:一求切点，二求曲面的法向量.

注 1° 法向量的方向余弦

用 α, β, γ 表示法向量的方向角,

并假定法向量方向向上,

则 γ 为锐角 .

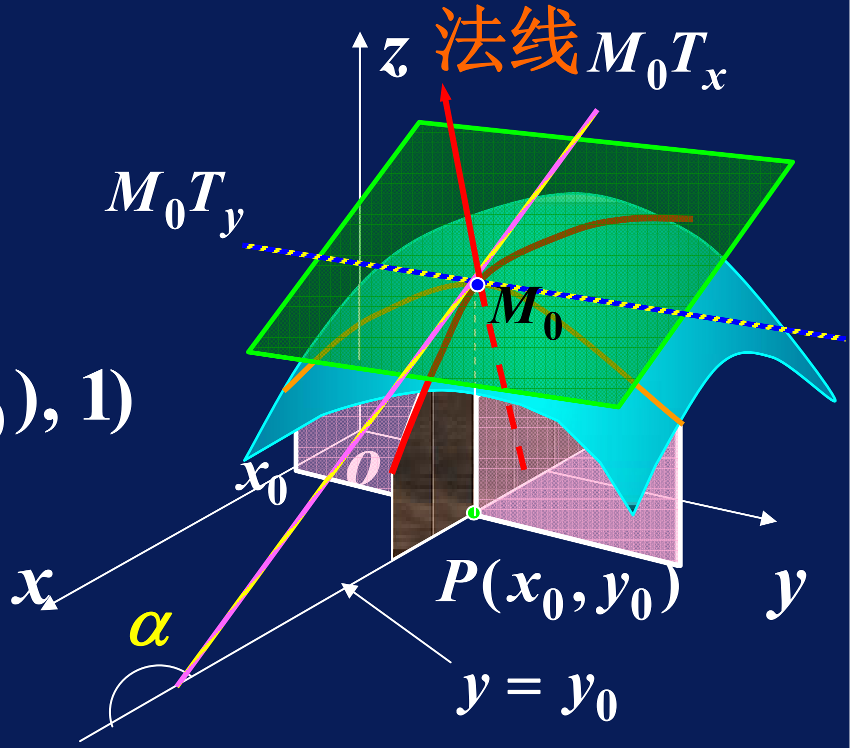
法向量:

$$\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

将 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$

分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦:



法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

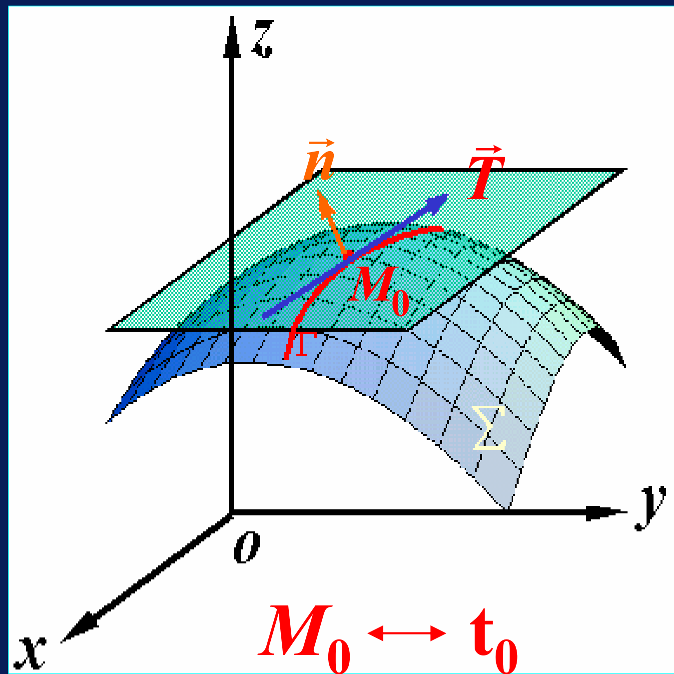
$$\cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}.$$

2° 设曲面 Σ 的方程为: $z = f(x, y)$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$$

f_x, f_y 在 (x_0, y_0) 处连续，则



可以证明：在曲面 Σ 上通过点 M_0 且在点 M_0 处有切线的任一曲线在该点的切线都在同一平面(曲面 Σ 的切平面)上.

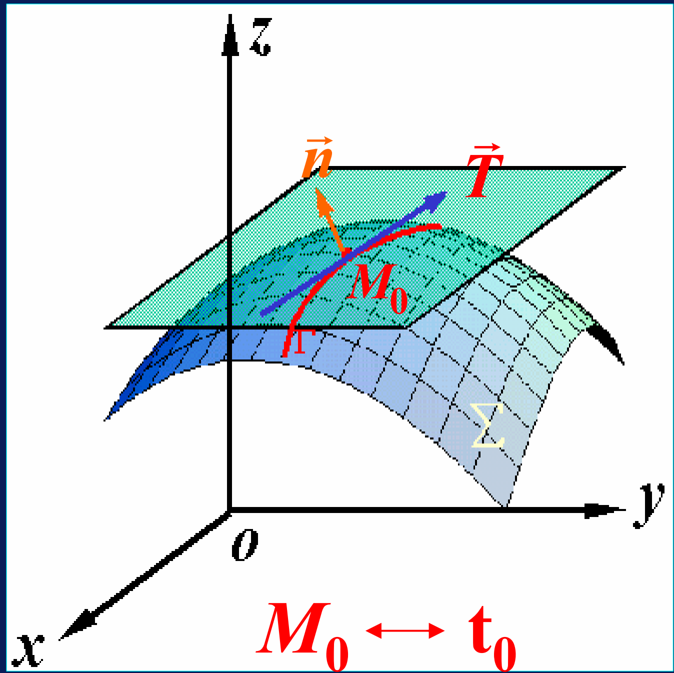
证　在曲面Σ上任取一条

通过点M_0的曲线

$$\Gamma:\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

曲线在点M_0处的切向量：

$$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)),$$



目录　上页　下页　返回　结束

曲线在点M_0处的切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

$\because$　曲线Γ在Σ上

$\therefore$　$z=\omega(t)\equiv f[\varphi(t),\psi(t)]$

故 $\omega'(t)\equiv f_x[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+f_y[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)$

$$\omega'(t_0)=\{f_x[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+f_y[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\Big|_{t=t_0}$$

$$=f_x(x_0,y_0)\varphi'(t_0)+f_y(x_0,y_0)\psi'(t_0)$$

即 $f_x(x_0,y_0)\cdot\varphi'(t_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\psi'(t_0)-1\cdot\omega'(t_0)=0$

$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$

—— 曲面$z=f(x,y)$在点M_0的法向量

$\therefore\ \ \vec{n}\cdot\vec{T}=0,$ 即 $\vec{n}\perp\vec{T}$

而$\vec{n}$由曲面Σ和其上的点 M_0所确定

$\therefore\ \ \Gamma$在点M_0处的切线必在过点 M_0且以$\vec{n}$为法向量的平面上，即在切平面上.

再由Γ的任意性，可知命题成立.

例3 求椭圆抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 在点$(1,1,3)$处的切平面方程及法线 方程.

解 记 $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, 则

$$f_x(x,y) = 4x, \qquad f_y(x,y) = 2y,$$

在点 $(1,1)$处，$f_x(1,1) = 4$, $\quad f_y(1,1) = 2$,

故法向量 $\vec{n} = (f_x(1,1), f_y(1,1), -1) = (4,2,-1)$.

从而切平面方程：$4(x-1) + 2(y-1) - (z-3) = 0$

即 $4x + 2y - z - 3 = 0.$

法线方程：$\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

(2) 形如 $F(x, y, z)=0$ 的曲面的切平面与法线

若光滑曲面Σ：$F(x,y,z)=0,$

$$M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$$

函数 $F(x, y, z)$ 具有连续的一阶偏导数，且

$$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则 $\Sigma: F(x,y,z)=0 \xrightarrow{\text{隐函数存在定理}} \Sigma: z=f(x,y),$

法向量：

$$\vec{n}=\pm(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$

$$\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

$$= \pm(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1)\Big|_{M_0}$$

$$= \pm(-\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, -1)$$

$$= \mp\frac{1}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

$$\boxed{\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))}$$

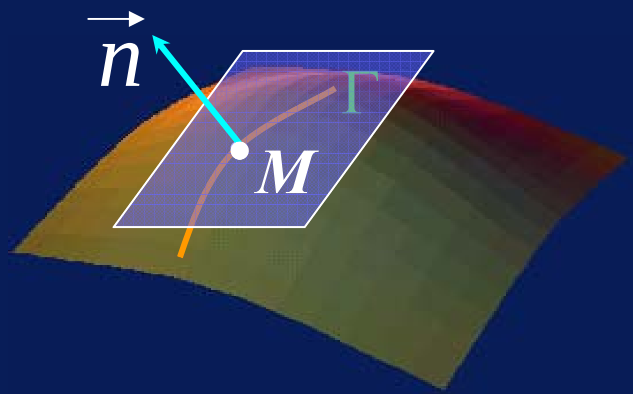
—— 曲面$F(x, y, z)= 0$在点M_0的法向量

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

例4 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$$\vec{n}\Big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)=2(1,4,9)$$

所以在球面上点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $(x-1)+4(y-2)+9(z-3)=0$

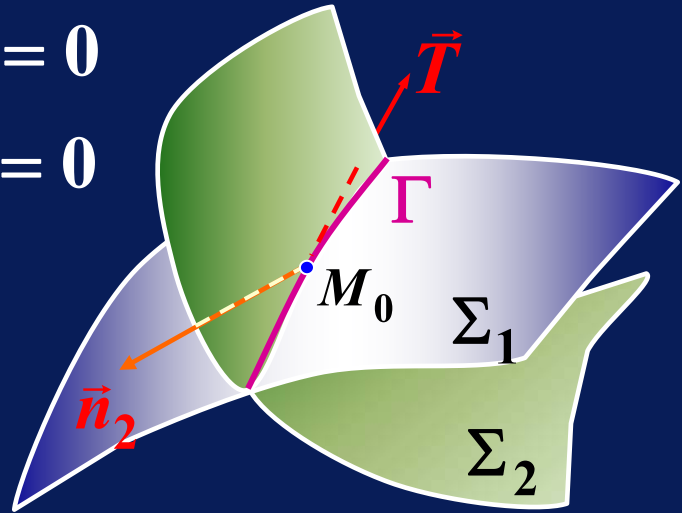
即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{9}.$$

目录 上页 下页 例题 结束

注 求光滑曲线Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量的第三种方法:



$\because \quad \vec{T}\perp\vec{n}_1, \qquad \vec{T}\perp\vec{n}_2$

$$\vec{n}_1=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

$$\vec{n}_2=(G_x(x_0,y_0,z_0),G_y(x_0,y_0,z_0),G_z(x_0,y_0,z_0))$$

$\therefore$ 曲线Γ在点M_0处的切向量:

$$\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0} \qquad (\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2)$$

例2 解（方法3）

曲面$x^2+y^2+z^2=6$与$x+y+z=0$的法向量分别为：

$$\vec{n_1}\Big|_M=(2x,2y,2z)\Big|_M=2(1,-2,1),$$

$$\vec{n_2}\Big|_M=(1,1,1),$$

曲线的切向量：$\vec{T}\Big|_M=(1,-2,1)\times(1,1,1)=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases} x+z-2=0, \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0,$

即 $x-z=0.$

二、二元函数可微的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微

$$\Longrightarrow \quad f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

$$=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)$$

$$(\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\approx f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\forall M(x,y)\in U(P(x_0,y_0))$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$$

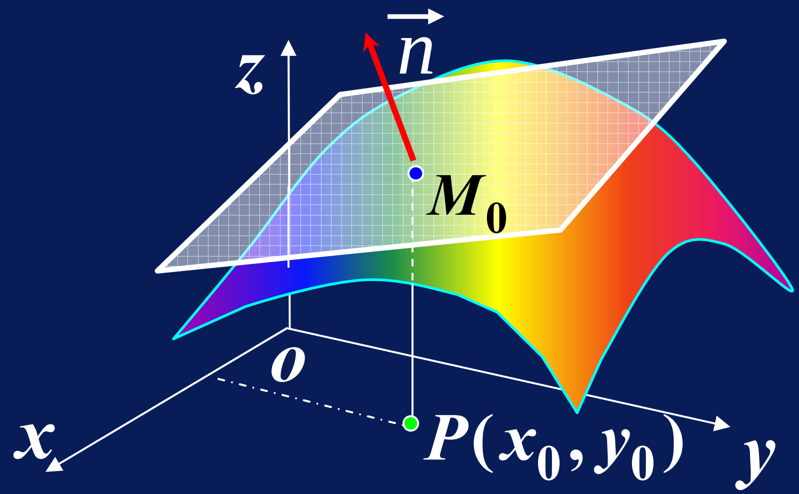
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

记上式右端为 z，于是有 $f(x,y)\approx z$，而

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

即 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-[z-f(x_0,y_0)]=0$

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处 的切平面方程



几何意义 由 $f(x,y)\approx z$ 知，若 $Z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可微，则曲面 $Z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 近旁的一小部分可用该点的切平面来近似.

★ 三、全微分在近似计算中的应用

1. 利用近似公式作计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(用于误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(用于近似计算)

例5 有一圆柱体受压后发生形变, 半径由 20cm 增大到 20.05cm , 高度由100cm 减少到 99cm , 求此圆柱体体积的近似改变量.

解 已知 $V=\pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

$$r=20,\quad h=100,$$

$$\Delta r = 0.05,\quad \Delta h = -1$$

$$\Delta V \approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1)$$

$$= -200\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

即受压后圆柱体体积减少了$200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例6 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x(x,y)=y\,x^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则 $1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times0.04+0\times0.02=1.08$$

2. 利用近似公式作误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差限, 即

$|\Delta x| \le \delta_x$, $|\Delta y| \le \delta_y$, $|\Delta z| \le \delta_z$, 则

z 的绝对误差限约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

例7 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$$a=12.5\pm0.01,\ b=8.3\pm0.01,\ C=30^\circ\pm0.1^\circ$$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解
$$\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b+\left|\frac{\partial S}{\partial C}\right|\delta_C$$

$$=\frac{1}{2}\left|b\sin C\right|\delta_a+\frac{1}{2}\left|a\sin C\right|\delta_b+\frac{1}{2}\left|ab\cos C\right|\delta_C$$

$$a=12.5,\ b=8.3,\ C=30^\circ,\ \delta_a=\delta_b=0.01,\ \delta_C=\frac{\pi}{1800}$$

故绝对误差约为 $\delta_S=0.13$

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12.5\times8.3\times\sin30^\circ\approx25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\dfrac{\delta_S}{|S|}=\dfrac{0.13}{25.94}\approx0.5\,\%$

例8 在直流电路中, 测得电压 $U = 24$ 伏 ,相对误差为 0.3%; 测得电流 $I = 6$安, 相对误差为 0.5 % , 求用欧姆定律计算电阻 R 时产生的相对误差和绝对误差 .

解 由欧姆定律可知 $R = \frac{U}{I} = \frac{24}{6} = 4$ (欧)

所以 R 的相对误差约为

$$\frac{\delta_R}{|R|} = \frac{\delta_U}{|U|} + \frac{\delta_I}{|I|} = 0.3\,\% + 0.5\,\% = 0.8\,\%$$

R 的绝对误差约为

$$\delta_R = |R| \times 0.8\,\% = 0.032 \text{ (欧)}$$

内容小结

1. 空间曲线的切向量

（1）参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

（2）一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 ① $\vec{T}=\left(\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

② $\vec{T}=\left\{1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}\Big|_M$

③ $\vec{T}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ 其中

$$\vec{n_1}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

$$\vec{n_2}=(G_x(x_0,y_0,z_0),G_y(x_0,y_0,z_0),G_z(x_0,y_0,z_0))$$

2. 曲面的法向量

（1） 曲面方程为隐式$F(x,y,z)=0$, 其法向量

$$\vec{n}=\pm(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

（2） 曲面方程为显式$z=f(x,y)$,其法向量

$$\vec{n}=\pm(-f_x,-f_y,1)$$

目录 上页 下页 返回 结束

思考题

1.前面当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时推出了曲线Γ：

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$ 的切向量为：$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$

或 $$\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$$

想一想，当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\neq 0$ 或 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 时，

曲线Γ的切向量是什么？

答案: 当$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\neq 0$时,

$$\vec{T}=\{\varphi'(y_0),1,\psi'(y_0)\}$$

或 $$\vec{T}=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$$

当$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\neq 0$时,

$$\vec{T}=\{\varphi'(z_0),\psi'(z_0),1\}$$

或 $$\vec{T}=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$$

2. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda=\pm 2$

3. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = x f(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则通过此点的切平面为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

求出 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M$, 并证明原点的坐标满足上述方程 .

4. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定向量平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

分析 只须证曲面上任一点处的法向量与定向量垂直.

证 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2')$$

问题 观察一下,定向量是什么?

取定向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

备用题

例1-1 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点，使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$，并求出此切线方程．

解 曲线上任一点处的切向量 $\vec{T} = \{1, 2t, 3t^2\}$,

平面的法线向量 $\vec{n} = \{1,2,1\}$,

因为切线与平面平行，所以 $\vec{T} \perp \vec{n}$,

故 $\vec{T} \cdot \vec{n} = 0$,

即 $1 \times 1 + 2 \times 2t + 1 \times 3t^2 = 0$,

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3.$$
$$\vec{T} = \{1,\ 2t,\ 3t^2\}$$

解得 $t = -1,\ t = -\frac{1}{3},$

对应的点为

$$(-1,1,-1) \text{ 及 } \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right).$$

这两点处的切向量分别 为

$$\{1,-2,3\} \text{ 及 } \left\{1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},$$

故切线方程为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{及} \quad \frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{z+\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$$

例1-2 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程和法平面 方程.

解 点 M 处的切向量：

$$x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t,\ z' = 2\cos\frac{t}{2},$$

点 $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处对应的参数 $t = \frac{\pi}{2}$,

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，$x' = 1,\ y' = 1,\ z' = \sqrt{2}$,

故点 M 处的切向量 $\vec{T} = \{1, 1, \sqrt{2}\}$.

于是切线方程 ：

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.}.$$

法平面方程 ：

$$\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+(y-1)+\sqrt{2}\left(z-2\sqrt{2}\right)=0,$$

即

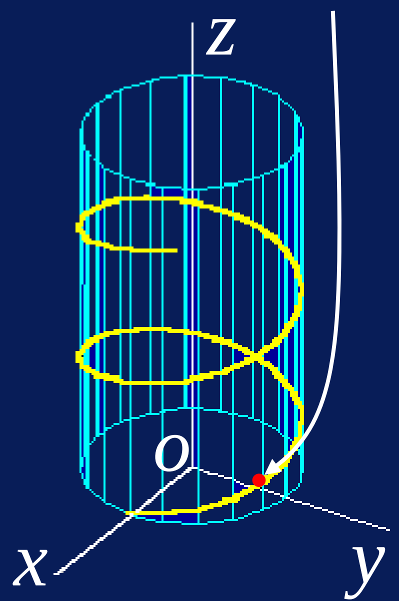
$$x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0.$$

求空间曲线的切线（或法平面）：

一求切点；二求切向量.

例1-3求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解 由于 $x' = -R\sin\varphi,\ y' = R\cos\varphi,\ z' = k$, 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\vec{T} = (-R, 0, k)$, 故



切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2-1 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程.

解 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线方程: $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

例3-1 在曲面 $z=x^2-y^2$ 上求一点，使该点处的切平面平行于平面 $2x-2y-z+3=0$

解 易得，曲面上任意一点 的法向量

$$\vec{n}=(2x,-2y,-1).$$

已知平面的法线向量 $\vec{n_1}=(2,-2,-1)$,

应有 $\vec{n}\,//\,\vec{n_1}$, 即 $\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-2y}{-2}=\dfrac{-1}{-1}$,

解之得 $x=1,\quad y=1,$

代入 $z=x^2-y^2$，得 $z=0$，故 所求点为(1,1,0).

例4-1 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴 上的截距之和等于 a.

证 设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上任意一点，

则该点处的法向量 $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}\right\}.$

切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}).$$

注意到点 (x_0,y_0,z_0) 在曲面上，

故 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$.

于是切平面方程为

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a},$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

切平面在各坐标轴上的 截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})$$

$$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

例4-2 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$的切平面，使它垂直于平面 $x-y-z=0$和 $x-y-\frac{z}{2}=2.$

解 设 (x_0,y_0,z_0)为曲面上的切点,

则切平面的法向量：

$$\vec{n}=(2x_0-1,2y_0,2z_0)$$

两已知平面的交线的方向向量：

$$\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,0)$$

依题意， $\vec{n} \,//\, \vec{n}_1$ $\quad\therefore\quad \dfrac{2x_0 - 1}{-1} = \dfrac{2y_0}{-1} = \dfrac{2z_0}{0}$

故得 $\quad y_0 = x_0 - \dfrac{1}{2},\ z_0 = 0$

代入 $x^2 + y^2 + z^2 = x$，得切点：

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right) \text{ 及 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right).$$

$\therefore$ 所求切平面方程为：

$$x + y - \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 0 \text{ 和 } x + y + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0.$$

例4-3 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 相切.

解 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0),\quad \vec{n}_2=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 \,/\!/\, \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0{}^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0{}^2}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0{}^2}$$

$$\therefore \quad x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

目录 上页 下页 返回 结束