§1.3 对换及 n 阶行列式定义

一、概念的引入

二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

规律

（1）二阶行列式共有 2 项，即 $2!$ 项；而三阶行列式共有 6 项，即 $3!$ 项.

❖推广：n 阶行列式共有 $n!$ 项。

（2）每项都是位于不同行不同列的两（三）个元素的乘积。

❖推广：n 阶行列式每项都是位于不同行不同列的个 n 元素的乘积.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$\tau(312)=1+1=2,$$ 偶排列 $+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$\tau(132)=1+0=1,$$ 奇排列 $-$负号,

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 p_3)} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

二、n阶行列式的定义

定义 由 n^2 个数组成的 n阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n个元素的乘积的代数和$\sum(-1)^{\tau(p_1 p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,$ n 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

常用D或D_n表示n阶行列式。不混淆时，也可简记做$D=|a_{ij}|$或$D_n=|a_{ij}|$

说明

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

4、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}$.

5、 一阶行列式 $|a| = a$ 不要与绝对值记号相混淆;

如: $|-1| = -1$

例1 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是6阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项。

分析 题中所给两个数都是 D_6 中不同行不同列的6个元素的乘积，因此要判断它们是不是 D_6 中的项，关键是看它们的符号。

解 第一个数 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的6个因子的第一个下标为标准排列，第二个下标排列 4 3 1 2 6 5的逆序数为6，所以$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项。

第二个数 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 的6个因子的第一个下标不是标准排列，所以我们可先重新排序为 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$ ，再看第二个下标排列4 5 2 3 1 6的逆序数为8，所以 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$ 不是 D_6 中的项。

例2　试用定义求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解 先求所有乘积项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$

$(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1;$ $(-1)^{\tau(1243)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = 0;$

$(-1)^{\tau(1324)} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} = 2;$ $(-1)^{\tau(1342)} a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} = 0;$

$(-1)^{\tau(1423)} a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} = 0;$ $(-1)^{\tau(1432)} a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} = 6;$

$(-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = 6;$ $(-1)^{\tau(2143)} a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} = 0;$

$(-1)^{\tau(2314)} a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} = 8;$ $(-1)^{\tau(2341)} a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = 0;$

$(-1)^{\tau(2431)} a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} = -4;$ $(-1)^{\tau(2413)} a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} = 0;$

$$(-1)^{\tau(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}=-9;\quad (-1)^{\tau(3142)}a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}=0;$$

$$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=6;\quad (-1)^{\tau(3241)}a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=0;$$

$$(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=36;\quad (-1)^{\tau(3421)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=6;$$

$$(-1)^{\tau(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=0;\quad (-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}=-9;$$

$$(-1)^{\tau(4213)}a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}=0;\quad (-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-1;$$

$$(-1)^{\tau(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}=-12;\quad (-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=-2.$$

再求其代数和，得

$$D=1+0+2+0+0+6+6+0+8+0+(-4)+0+(-9)+0$$

$$+6+0+36+6+0+(-9)+0+(-1)+(-12)+(-2)$$

$$=34$$

例3 计算对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 不能使用对角线法则，因为由行列式的定义，4阶行列式应该是24项之和，而我们由对角线法则，只有8项，显然不对

注意： 对角线法则只适用于二、三阶行列式。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

由n阶行列式的定义

展开式中项的一般形式是 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$

若 $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$， 所以 p_1只能等于4，

从而这个项不为零，同理可得 $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

即行列式中不为零的项为$(-1)^{\tau(4321)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

例4　计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　分析

展开式中项的一般形式是 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

$$p_n = n,\ \ p_{n-1} = n-1,\ \ p_{n-2} = n-2,\cdots p_2 = 2, p_1 = 1,$$

所以不为零的项只有 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例如 $$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot4\cdot5\cdot8=160.$$

类似可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例5 计算次上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}$$

解 分析

展开式中项的一般形式是$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$.

$$p_n = 1, \quad p_{n-1} = 2, \quad \cdots, p_1 = n$$

所以不为零的项只有$(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

类似可得次下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

作为上（下）三角行列式和次上（下）三角行列式的特例，有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

次对角行列式

三、对换的定义

定义1.4 在一个排列中，将某两个元素对调，其余元素不动，即可得一新排列，这一过程称为对换.

将相邻两个元素对调，叫做相邻对换.

例如

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

对换与排列的奇偶性的关系

定理1.1 排列经过一次对换，其奇偶性改变。

证明 （相邻对换情形）

设排列为

$$a_1 \cdots a_l\, ab\, b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换}\, a\, \text{与}\, b} a_1 \cdots a_l\, ba\, b_1 \cdots b_m$$

除a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

$$a_1 \cdots a_l\, ab\, b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换}a\text{与}b} a_1 \cdots a_l\, ba\, b_1 \cdots b_m$$

当$a < b$时，

经对换后a的逆序数增加1， b的逆序数不变;

当$a > b$时，

经对换后a的逆序数不变，b的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

现来对换a与b. 变为 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$

$$a_1\cdots a_l\, a\, b_1\cdots b_m\, b\, c_1\cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l\, ab\, b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l\, b\, b_1\cdots b_m\, a\, c_1\cdots c_n$$

$$\therefore\quad a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n,$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理1知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而标准排列是偶排列(逆序数为0),因此知推论成立.

定理1.2 n 阶行列式的定义也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(q_1 q_2 \cdots q_n)} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

其中 $q_1, q_2 \cdots q_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列。

证 由行列式定义来证。

(1) $q_1, q_2, \cdots q_n$ 所有的全排列，共有 $n!$ 项。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(q_1 q_2 \cdots q_n)} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

(2)每一项都是取自不同行不同列所有元素之积，并取适当的正负号。

(3)取等号右边任意一项，$(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$

交换元素的顺序，变为原定义里的一项

$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$，比较其符号，由

定理1.1的推论有

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, & \cdots & q_n \\ 1, & 2, & \cdots & n \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{变换偶数次}]{\text{变换奇数次}} \left\{\begin{matrix} 1, & 2, & \cdots & n \\ p_1, & p_2, & \cdots & p_n \end{matrix}\right.$$

所以，每一项符号不变。因此，有

$$(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

即，新定义右端的一项是对应原定义右端一项的。

又设 $p_i = j$，则由 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$ 知道，$q_j = i$

则新定义右端的 $n!$ 项是与原定义右端的 $n!$ 项一一对应的。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(q_1 q_2 \cdots q_n)} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

所定义的行列式与原定义相等。 **证毕**

思考题

已知
$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

思考题解答

解 含 x^3 的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3,$$

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$$

故 x^3 的系数为-1.