

离散数学



西北工业大学

2022年3月9日 星期三

第3章 推理与证明技术

1 命题逻辑的推理理论

2 谓词逻辑的推理理论

3 数学归纳法的使用

4 CP规则相关证明

3.1 本章学习要求

核心
知识点

1

掌握各种不同类型的规则和公理，特别是命题逻辑和谓词逻辑的推理规则和公理

2

熟练掌握不同证明方法的证明原理、不同的应用场景

3

理解谓词逻辑的精髓，将其思想贯穿于所有的证明之中

3.2 命题逻辑的推理理论



认识世界的渐进过程

推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；而产生真实结论的推理过程未必是有效的。有效的推理中可能包含为“假”的前提，而无效的推理却可能得到为“真”的结论。

所谓推理有效，指的是它的结论是它前提的合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

3.2.1 推理的基本概念和推理形式

定义3.2.0 设 G, H 是公式，对任意解释 I ，如果 I 满足 G ，那么 I 满足 H ，则称 H 是 G 的逻辑结果（或称 G 蕴涵 H ），记为 $G \Rightarrow H$ ，此时称 G 为**前提**， H 为**结论**。

判定定理

定理3.2.0 设 G, H 是公式， H 是 G 的逻辑结果当且仅当 $G \rightarrow H$ 为永真公式。

证明：“ \Rightarrow ” 若 $G \Rightarrow H$ ，但 $G \rightarrow H$ 不是永真公式。
于是，必存在一个解释 I ，使得 $G \rightarrow H$ 为假，即在解释 I 下， G 为真，而 H 为假，这与 $G \Rightarrow H$ 矛盾，故 $G \rightarrow H$ 是永真公式。

“ \Leftarrow ” 若 $G \rightarrow H$ 是永真式，但 $G \Rightarrow H$ 不成立，故存在 G, H 的一个解释 I ，使得 G 为真，而 H 为假，从而在解释 I 下， $G \rightarrow H$ 为假，这与 $G \rightarrow H$ 是永真公式矛盾，所以 $G \Rightarrow H$ 。

推广

定义3.2.1 设 G_1, G_2, \dots, G_n, H 是公式, 称 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果(G_1, G_2, \dots, G_n 共同蕴涵 H), 当且仅当 H 是 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 的逻辑结果(logic conclusion)。记为 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$, 此时称 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 为**有效的**(efficacious), 否则称为**无效的**(inefficacious)。 G_1, G_2, \dots, G_n 称为**一组前提(Premise)**, 有时用集合 Γ 来表示, 记 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。 H 称为**结论**(conclusion)。又称 H 是**前提集合 Γ** 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

判定定理

定理3.2.1 公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$ 为永真公式。

证明：略。

“ \Rightarrow ” 与 “ \rightarrow ” 的不同

1. “ \rightarrow ” 仅是一般的蕴涵联结词， $G \rightarrow H$ 的结果仍是一个公式，而 “ \Rightarrow ” 却描述了两个公式 G ， H 之间的一种逻辑蕴涵关系， $G \Rightarrow H$ 的“结果”，是非命题公式；
2. 用计算机来判断 $G \Rightarrow H$ 是办不到的。然而计算机却可“计算”公式 $G \rightarrow H$ 是否为永真公式。

3.2.2 判断有效结论的常用方法

要求

$$\Gamma = \{ G_1, G_2, \dots, G_n \}$$
$$\Gamma \Rightarrow H$$



也就是

$$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$$

为永真公式



因而

真值表技术、演绎法和
间接证明方法

1、真值表技术

设 P_1, P_2, \dots, P_n 是出现在前提 G_1, G_2, \dots, G_n 和结论 H 中的一切命题变元，如果将 P_1, P_2, \dots, P_n 中所有可能的解释及 G_1, G_2, \dots, G_n, H 的对应真值结果都列在一个表中，根据“ \rightarrow ”的定义，则有判断方法如下：

1. 对所有 G_1, G_2, \dots, G_n 都具有真值T的行(表示前提为真的行)，如果在每一个这样的行中， H 也具有真值T，则 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果。
2. 对所有 H 具有真值为F的行(表示结论为假的行)，如果在每一个这样的行中， G_1, G_2, \dots, G_n 中至少有一个公式的真值为F(前提也为假)，则 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果。

例3. 2. 1

判断下列H是否是前提 G_1, G_2 的逻辑结果

- | | | | |
|-----|--------------|--------------------------------------|---|
| (1) | $H: Q;$ | $G_1: P; G_2: P \rightarrow Q;$ | 是 |
| (2) | $H: \neg P;$ | $G_1: P \rightarrow Q; G_2: \neg Q;$ | 是 |
| (3) | $H: Q;$ | $G_1: \neg P; G_2: P \rightarrow Q.$ | 否 |

解

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
(1)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0
(2)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
(3)				

2 推理定律

设 G, H, I, J 是任意的命题公式，则有：

1) $I_1: G \wedge H \Rightarrow G$ (简化规则)

$I_2: G \wedge H \Rightarrow H$

2) $I_3: G \Rightarrow G \vee H$ (添加规则)

$I_4: H \Rightarrow G \vee H$

3) $I_5: \neg G \Rightarrow G \rightarrow H$

$I_6: H \Rightarrow G \rightarrow H$

4) $I_7: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow G$

$I_8: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow \neg H$

5) $I_9: G, H \Rightarrow G \wedge H$

2 推理定律(续)

6) $I_{10}: \neg G, G \vee H \Rightarrow H$ (选言三段论)

$I_{11}: \neg G, G \vee H \Rightarrow H$

不可兼或

7) $I_{12}: G, G \rightarrow H \Rightarrow H$ (分离规则)

8) $I_{13}: \neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$ (否定后件式)

9) $I_{14}: G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$ (假言三段论)

10) $I_{15}: G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I$ (二难推论)

例子

1)、前提：

1. 如果明天天晴，我们准备外出旅游。 $P \rightarrow Q$

2. 明天的确天晴。 P

结论：我们外出旅游。 Q

可描述为： $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ （分离规则）

2)、前提：

1. 如果一个人是备胎，则他不幸福。 $P \rightarrow Q$

2. 如果一个人不幸福，则他易emo。 $Q \rightarrow R$

结论：备胎易emo。 $P \rightarrow R$

可描述为： $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ （假言三段论）

例子(续1)

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提：

1. 凶手为王某或陈某

$P \vee Q$

2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出

$P \rightarrow R$

3. 王某案发之晚并未外出。

$\neg R$

结论：陈某是凶手。

Q

则可描述为： $P \rightarrow R, \neg R \Rightarrow \neg P$

(否定后件式)

$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$

(选言三段论)

例子(续2)

4)、前提：

1. 如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。 $P \rightarrow R$

2. 如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。 $Q \rightarrow R$

3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。 $P \vee Q$

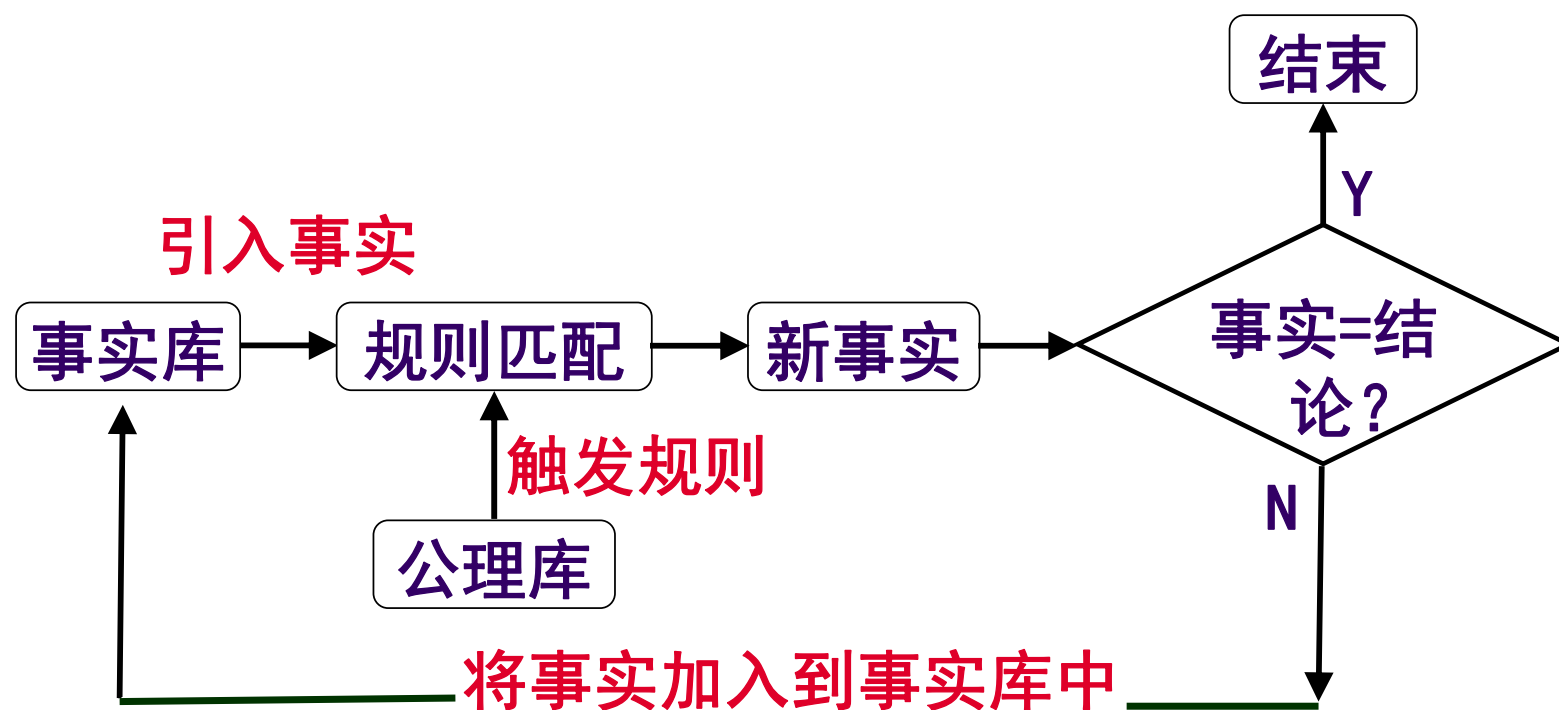
结论：该同学被大学录取。 R

则上述例子可描述为：

$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$ (二难推论)

3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发, 依据公认的推理规则和推理定律, 推导出一个结论来。



演绎的定义

定义3.2.2

从前提集合 Γ 推出结论 H 的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

其中， H_i 或者是 Γ 中的某个前提，或者是前面的某些 H_j ($j < i$) 的有效结论，并且 H_n 就是 H ，则称公式 H 为该**演绎**的有效结论，或者称从前提 Γ 能够**演绎**出结论 H 来。

推理规则

- ① 规则P（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
- ② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。
- ③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合 Γ 与公式P推导出S，则能从此前提集合 Γ 推导出 $P \rightarrow S$ 。

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R,$$
$$P \Rightarrow (Q \rightarrow R) \text{ 等价于 } (P \wedge Q) \Rightarrow R$$

例3.2.2

设前提 $\Gamma = \{P \vee Q, P \leftrightarrow R, Q \rightarrow S\}$, $G = S \vee R$ 。证明 $\Gamma \Rightarrow G$ 。

证明:	(1)	$P \vee Q$	P
	(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T, (1), E
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$\neg P \rightarrow S$	T, (2), (3), I
	(5)	$\neg S \rightarrow P$	T, (4), E
	(6)	$P \leftrightarrow R$	P
	(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T, (6), E
	(8)	$P \rightarrow R$	T, (7), I
	(9)	$\neg S \rightarrow R$	T, (5), (8), I
	(10)	$S \vee R$	T, (9), E

4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是**正向推理**。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

$P \Rightarrow Q$ 等价于 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ，因此，为了间接地证明 $P \Rightarrow Q$ ，可以假设 Q 为假($\neg Q$)，然后证明 P 为假($\neg P$)。

定义3.2.3

假设 G_1, G_2, \dots, G_n 是一组命题公式, P_1, P_2, \dots, P_n 是出现在中的一切命题变元, 若有解释 I 使 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 取值为“真”, 则称公式 G_1, G_2, \dots, G_n 是一致的, 或者说相容的。

如对任意的解释 I , 都有 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 取值为“假”, 则称公式 G_1, G_2, \dots, G_n 是不一致的。或者说 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 是一个矛盾式。

定义3.2.3

假设 G_1, G_2, \dots, G_n 是一组命题公式, P_1, P_2, \dots, P_n 是出现在中的一切命题变元, 若有解释 I 使 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 取值为“真”, 则称公式 G_1, G_2, \dots, G_n 是一致的, 或者说它们是相容的。

$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 是矛盾式当且仅当

$$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R,$$

其中, R 可为任意公式, $R \wedge \neg R$ 为一矛盾式。

间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$$

定理3.2.2 设命题公式集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 是一致的，于是从前提集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 出发可以逻辑地推出公式H的充要条件是从前提集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H\}$ 出发，可以逻辑地推出一个**矛盾（永假）**式来。

例3. 2. 6

用反证法证明二难推论

$$P \vee Q, \quad P \rightarrow R, \quad Q \rightarrow R \Rightarrow R$$

证明:	(1)	$P \rightarrow R$	P
	(2)	$\neg R$	P (附加)
	(3)	$\neg P$	$T, (1), (2), I$
	(4)	$Q \rightarrow R$	P
	(5)	$\neg Q$	$T, (2), (4), I$
	(6)	$P \vee Q$	P
	(7)	P	$T, (5), (6), I$
	(8)	$P \wedge \neg P$	$T, (3), (7), I$

三种证明方法之间的关系

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$$

反证法

$$\stackrel{\text{CP}}{\Leftrightarrow} G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow \neg H \rightarrow (R \wedge \neg R) \quad \text{CP规则证明法}$$

$$\Leftrightarrow G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow \neg \neg H \vee (R \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$$

直接证明法

3.2.3 命题逻辑推理的难点

1. 弄清楚蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 的逻辑关系及其真值，这里 Q 是 P 的必要条件。无论蕴涵关系如何表述，都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。
2. 推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴涵式的引用要适当，逻辑思维要清晰。
3. 弄清楚几种推理方法的区别与联系，对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带CP规则的直接证明方法。

3.2.4 命题逻辑推理的应用

例3.2.7 符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

或者明天下午是天晴，或者是下雨；如果明天下午是天晴，则我将去看电影；如果我去看电影，我就不看书。如果我看书，则天在下雨。

设 P：明天下午天晴； Q：明天下午下雨；

R：明天下午去看电影； S：明天下午看书。

则上述命题可符号化为：

$$P \vee Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S \Rightarrow S \rightarrow Q.$$

证明

(1) S	P (附加)
(2) $R \rightarrow \neg S$	P
(3) $\neg R$	$T, (1), (2), I$
(4) $P \rightarrow R$	P
(5) $\neg P$	$T, (3), (4), I$
(6) $P \bar{\vee} Q$	P
(7) Q	$T, (4), (7), I$

例3. 2. 8

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

A或B盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。B盗窃了x。

设 P：A盗窃了x； Q：B盗窃了x； R：作案时间发生在午夜前； S：B证词正确； T：在午夜时屋里灯光未灭。 则上述命题可符号化为：

$$P \vee Q, P \rightarrow \neg R, S \rightarrow T, \neg S \rightarrow R, \neg T \Rightarrow Q$$

例3.2.8 (续)

证明 采用直接证明方法

(1)	$\neg T$	P
(2)	$S \rightarrow T$	P
(3)	$\neg S$	T, (1), (2), I
(4)	$\neg S \rightarrow R$	P
(5)	R	T, (3), (4), I
(6)	$P \rightarrow \neg R$	P
(7)	$\neg P$	T, (5), (6), I
(8)	$P \vee Q$	P
(9)	Q	T, (7), (8), I

例3.2.8

如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

分析：令P：马会飞； Q：羊吃草；

R：母鸡是飞鸟；

S：烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句为：

$\Gamma = \{P \vee Q \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S\}, G = \neg Q.$

证明 $\Gamma \Rightarrow G$ 。

例3.2.8 证明

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \rightarrow S$	P
(3)	$\neg R$	T, (1), (2), I
(4)	$P \vee Q \rightarrow R$	P
(5)	$\neg (P \vee Q)$	T, (3), (4), I
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	T, (5), E
(7)	$\neg Q$	T, (6), I

3.3 谓词逻辑的推理理论

3.3.1 谓词演算的演绎与推理

定义3.3.1 设 G_1, G_2, \dots, G_n, H 是公式, 称 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果(G_1, G_2, \dots, G_n 共同蕴涵 H), 当且仅当 H 是 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 的**逻辑结果**(logic conclusion)。记为 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$, 此时称 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 为**有效的**(efficacious), 否则称为无效的(inefficacious)。 G_1, G_2, \dots, G_n 称为一组**前提**(Premise), 有时用集合 Γ 来表示, 记 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。 H 称为**结论**(conclusion)。 又称 H 是前提集合的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

定理3.3.1

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$ 为有效公式。

一、推理规律

$$(1) I_{16}: (\forall x) G(x) \Rightarrow (\exists x) G(x);$$

$$(2) I_{17}: (\forall x) G(x) \vee (\forall x) H(x) \\ \Rightarrow (\forall x) (G(x) \vee H(x));$$

$$I_{18}: (\exists x) (G(x) \wedge H(x)) \\ \Rightarrow (\exists x) G(x) \wedge (\exists x) H(x);$$

$$(3) I_{19}: (\forall x) (G(x) \rightarrow H(x)) \\ \Rightarrow (\forall x) G(x) \rightarrow (\forall x) H(x);$$

$$I_{20}: (\forall x) (G(x) \rightarrow H(x)) \\ \Rightarrow (\exists x) G(x) \rightarrow (\exists x) H(x)。$$

推理规律（续）

$$(4) \quad I_{21}: (\exists x) (\forall y) G(x, y) \Rightarrow (\forall y) (\exists x) G(x, y);$$

$$I_{22}: (\forall x) (\forall y) G(x, y) \Rightarrow (\exists y) (\forall x) G(x, y);$$

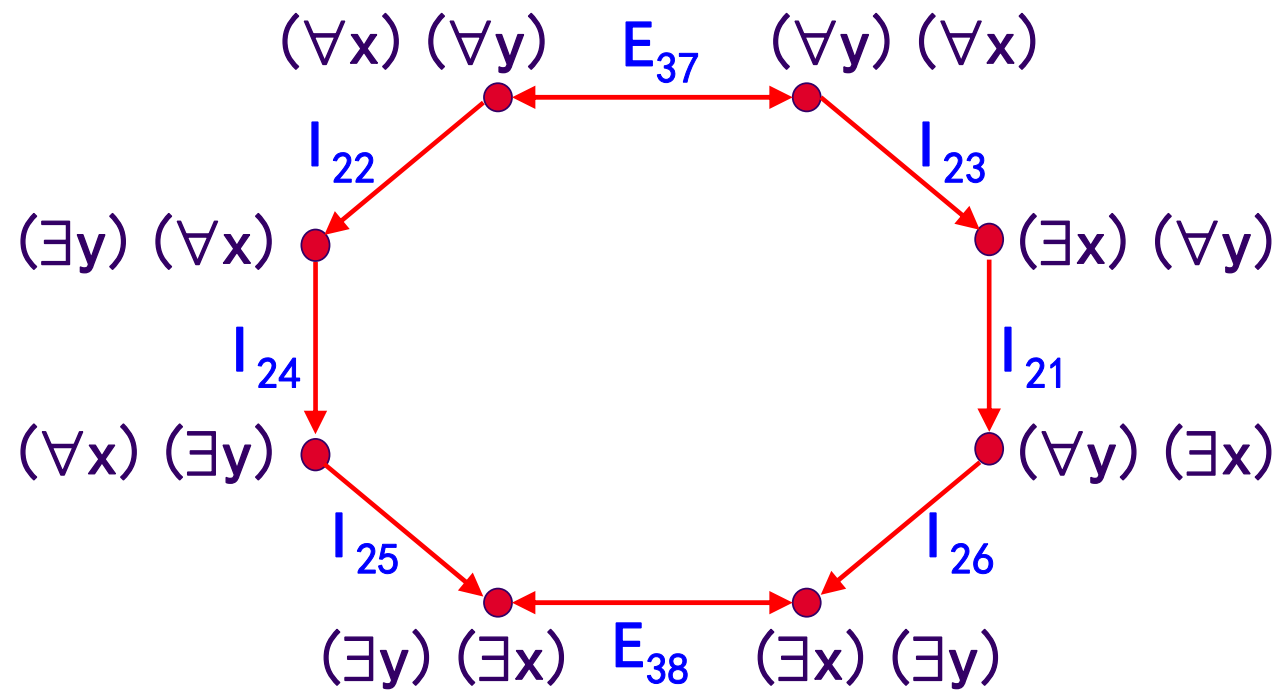
$$I_{23}: (\forall y) (\forall x) G(x, y) \Rightarrow (\exists x) (\forall y) G(x, y);$$

$$I_{24}: (\exists y) (\forall x) G(x, y) \Rightarrow (\forall x) (\exists y) G(x, y);$$

$$I_{25}: (\forall x) (\exists y) G(x, y) \Rightarrow (\exists y) (\exists x) G(x, y);$$

$$I_{26}: (\forall y) (\exists x) G(x, y) \Rightarrow (\exists x) (\exists y) G(x, y);$$

量词关系图



二、推理规则

1、US（全称特指规则， **Universal Specify**）：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中 $G(x)$ 对 y 是自由的

推广： $(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$

其中 c 为任意个体常量

2、ES（存在特指规则， **Existential Specify**）：

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中 c 为使 $G(c)$ 为真的特定个体常量；若 $G(x)$ 中还有除 x 以外的自由变量时，则必须用这些变量的函数符号来取代。

二、推理规则

1、US（全称特指规则，Universal Specify）：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中G(x)对y是自由的

推广：
$$\frac{}{(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)}$$

其中c为任何个体常量

2、ES（存在特指规则，Existential Specify）：

在G(x)中，x不出现在量词

$(\forall y)$ 或 $(\exists y)$

其辖域之内。；若G(x)中还有除x以外的自由变量时，则必须用这些变量的函数符号来取代。

推理规则（续）

3、UG（全称推广规则， **Universal Generalize**）：

$$G(y) \Rightarrow (\forall x) G(x)$$

其中 $G(y)$ 对 x 是自由的且 $G(y)$ 中无自由变量 x

4、EG（存在推广规则， **Existential Generalize**）：

$$G(c) \Rightarrow (\exists x) G(x)$$

其中 $G(c)$ 对 x 是自由的且 $G(c)$ 中无自由变量 x

推广： $G(y) \Rightarrow (\exists x) G(x)$

其中 $G(y)$ 对 x 是自由的且 $G(y)$ 中无自由变量 x

推理规则的正确使用(1)

例3.3.1 设实数集中, 语句“不存在最大的实数”
可符号化为:

$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ 。 其中: $G(x, y): y > x$ 。

推导1:

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

(2) $(\exists y)G(y, y)$ US,(1)

分析: 推导1是错误的。正确的推导如下:

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

(2) $(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

推理规则的正确使用(1)

例3.3.1 设实数集中, 语句“不存在最大的实数”
可符号化为:

$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ 。 其中: $G(x, y): y > x$ 。

推导1:

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

注意: 使用US规则来消去量词时, 若选用变元y取代x, 则要求在原公式中x不能出现在量词 $(\forall y)$ 或 $(\exists y)$ 的辖域之内。

(2) $(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

推理规则的正确使用 (2)

推导2:

- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P
- (2) $(\exists y)G(z, y)$ US,(1)
- (3) $G(z, c)$ ES,(2)

分析: 推导2是错误的。正确的推导如下:

- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P
- (2) $(\exists y)G(z, y)$ US,(1)
- (3) $G(z, f(z))$ ES,(2)

推理规则的正确使用 (2)

推导2:

- | | | |
|-----|---------------------------------|--------|
| (1) | $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ | P |
| (2) | $(\exists y)G(z, y)$ | US,(1) |
| (3) | $G(z, c)$ | ES,(2) |

注意：使用ES规则来消去量词时，若还有其它自由变元时，则必须用关于自由变元的函数符号来取代常量符号。

推理规则的正确使用 (3)

推导3:

$$(1) (\exists y)G(z, y) \quad P$$

$$(2) (\forall y)(\exists y)G(y, y) \quad UG,(1)$$

分析: 推导3是错误的。正确的推导如下:

$$(1) (\exists y)G(z, y) \quad P$$

$$(2) (\forall z)(\exists y)G(z, y) \quad UG,(1)$$

推理规则的正确使用 (3)

推导3:

$$(1) (\exists y)G(z, y) \quad P$$

$$(2) (\forall y)(\exists y)G(y, y) \quad UG, (1)$$

分析：推导3是错误的。正确的推导如下：

注意：使用UG规则来添加量词时，若选用变元x取代y，则要求在原公式中y不能出现在量词 $(\forall x)$ 或 $(\exists x)$ 的辖域之内。

推理规则的正确使用（4）

推导4:

(1) $G(x, c)$ P

(2) $(\exists x)G(x, x)$ $EG, (2)$

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

(1) $G(x, c)$ P

(2) $(\exists y)G(x, y)$ $EG, (2)$

推理规则的正确使用（4）

推导4:

(1) $G(x, c)$ P

(2) $(\exists x)G(x, x)$ $EG, (2)$

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

注意：使用EG规则来添加量词时，若选用变元 x 取代 c ，则要求在原公式中 c 不能出现在量词 $(\forall x)$ 或 $(\exists x)$ 的辖域之内且原公式中无自由变量 x 。

3.3.2 谓词演算的综合推理方法

1. 推导过程中可以引用命题演算中的**规则P**和**规则T**。
2. 如果**结论是以蕴涵形式(或析取形式)**给出，我们还可以使用**规则CP**。
3. 若需**消去量词**，可以引用**规则US**和**规则ES**。
4. 当所要求的结论可能被**定量**时，此时可引用**规则UG**和**规则EG**将其量词加入。

谓词演算的综合推理方法（续1）

5. 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法。
6. 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，完全可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。
7. 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

例3.3.1

证明**苏格拉底三段论**：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设 $H(x)$ ： x 是人； $M(x)$ ： x 是要死的；

s ：苏格拉底。 则符号化为：

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \Rightarrow M(s)$$

证明：	(1)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$	P
	(2)	$H(x) \rightarrow M(x)$	US,(1)
	(3)	$H(s)$	P
	(4)	$M(s)$	T,(2),(3),I

例3.3.1

证明苏格拉底三段论：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设 $H(x)$ ： x 是人； $M(x)$ ： x 是要死的；

s ：苏格拉底。 则符号化

$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)$

(4)错了!

证明： (1)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$	P
(2)	$H(x) \rightarrow M(x)$	US,(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T,(2),(3),I

例3.3.1

证明**苏格拉底三段论**：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设 $H(x)$ ： x 是人； $M(x)$ ： x 是要死的；

s ：苏格拉底。 则符号化为：

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \Rightarrow M(s)$$

证明：(1)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$	P
(2)	$H(s) \rightarrow M(s)$	US,(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T,(2),(3),I

例3.3.2 (找茬)

证明:

$$(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x)$$

有下面的推导:

(1)	$(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(2)	$P(x) \rightarrow Q(x)$	US, (1)
(3)	$(\exists x) P(x)$	P
(4)	$P(c)$	ES, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x) Q(x)$	EG, (5)

例3.3.2 (2)

推导可修改为：

- | | | |
|-----|---------------------------------------|----------------|
| (1) | $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$ | P |
| (2) | $P(c) \rightarrow Q(c)$ | US, (1) |
| (3) | $(\exists x) P(x)$ | P |
| (4) | $P(c)$ | ES, (3) |
| (5) | $Q(c)$ | T, (2), (4), I |
| (6) | $(\exists x) Q(x)$ | EG, (5) |

例3.3.2(3)

请看推导：

$$(1) \quad (\exists x) P(x)$$

$$(2) \quad P(c)$$

$$(3) \quad (\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(4) \quad P(c) \rightarrow Q(c)$$

$$(5) \quad Q(c)$$

$$(6) \quad (\exists x) Q(x)$$

P

ES, (1)

P

US, (3)

T, (2), (4), I

EG, (5)

正确!

3.3.3 谓词逻辑推理的难点

1. 在推导过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
2. 如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。

谓词逻辑推理的难点（续）

3. 如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
4. 在用规则US和规则ES消去量词、用规则UG和规则EG添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。

谓词逻辑推理的难点（续）

5. 在**添加量词**($\forall x$)、($\exists x$)时，所选用的 x 不能在公式 $G(y)$ 或 $G(c)$ 中**自由出现**且 $G(y)$ 或 $G(c)$ 对 x 是**自由**的。
6. 在使用**规则EG**引入存在量词($\exists x$)时，**此 x 不得仅为 $G(c)$ 或 $G(y)$ 中的函数变元**。在使用**规则UG**引入全称量词($\forall x$)时，**此 x 不得为 $G(y)$ 中的函数变元**(因该函数变元不得作为自由变元)。
7. 在使用**规则UG**引入全称量词($\forall x$)时， **$G(y)$ 中不得出现在使用规则US引入 y 之后由规则ES引入的常量或函数**。

3.3.4 谓词逻辑推理的应用

例3.3.5 每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

设： $H(x)$: x 是人； $P(x)$: x 喜欢坐汽车；

$Q(x)$: x 喜欢骑自行车； $R(x)$: x 喜欢步行。

则上述语句可符号化为：

$$(\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x)),$$

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x)),$$

$$(\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x))$$

例3. 3. 5证明

(1) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x))$	P
(2) $H(c) \wedge \neg Q(c)$	ES,(1)
(3) $H(c)$	T,(2),I
(4) $\neg Q(c)$	T,(2),I
(5) $(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$	P
(6) $H(c) \rightarrow P(c) \vee Q(c)$	US,(5)
(7) $P(c) \vee Q(c)$	T,(3),(6),I
(8) $P(c)$	T,(4),(7),I

例3.3.5 (续)

(9)	$(\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x))$	P
(10)	$H(c) \wedge R(c) \rightarrow \neg P(c)$	US,(9)
(11)	$\neg(H(c) \wedge R(c))$	T,(8),(10),I
(12)	$\neg H(c) \vee \neg R(c)$	T,(11),E
(13)	$\neg R(c)$	T,(3),(12),I
(14)	$H(c) \wedge \neg R(c)$	T,(3),(13),I
(15)	$(\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x))$	EG,(14)

例3.3.6 :

证明下述论断的正确性：

所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。

解：设谓词如下：

$P(x)$: x 是哺乳动物；

$Q(x)$: x 是脊椎动物；

$R(x)$: x 是胎生动物。

则有：

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \\ \Rightarrow & (\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

证明:

- 1) $\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ P
- 2) $(\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ T,1),E
- 3) $\neg(\neg P(c) \vee R(c))$ ES,2)
- 4) $(P(c) \wedge \neg R(c))$ T,3),E
- 5) $P(c)$ T,4),I
- 6) $\neg R(c)$ T,4),I
- 7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ P
- 8) $P(c) \rightarrow Q(c)$ US,7)
- 9) $Q(c)$ T,5),8),I
- 10) $Q(c) \wedge \neg R(c)$ T,6),9),I
- 11) $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$ EG,10)

例3.3.7

证明下列论断的正确性：

有些学生相信所有的教师；任何一个学生都不相信骗子；所以，教师都不是骗子。

解：设谓词如下：

S(x): x是学生

T(x): x是教师

P(x): x是骗子

L(x,y): x相信y

则可符号化为：

$$\begin{aligned} & (\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow L(x,y))), \\ & (\forall x)(\forall y)((S(x) \wedge P(y)) \rightarrow \neg L(x,y)) \\ \Rightarrow & (\forall x)(T(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$

证明:

- | | |
|---|--------|
| 1) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow L(x,y)))$ | P |
| 2) $S(c) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow L(c,y))$ | ES,1) |
| 3) $S(c)$ | T,2),I |
| 4) $(\forall y)(T(y) \rightarrow L(c,y))$ | T,2),I |
| 5) $T(x) \rightarrow L(c,x)$ | US,4) |
| 6) $(\forall x)(\forall y)((S(x) \wedge P(y)) \rightarrow \neg L(x,y))$ | P |
| 7) $(\forall y)((S(c) \wedge P(y)) \rightarrow \neg L(c,y))$ | US,6) |
| 8) $(S(c) \wedge P(x)) \rightarrow \neg L(c,x)$ | US,7) |

证明:

9) $S(c) \rightarrow (P(x) \rightarrow \neg L(c, x))$	T,8),E
10) $P(x) \rightarrow \neg L(c, x)$	T,3),8),E
11) $L(c, x) \rightarrow \neg P(x)$	T,10),E
12) $T(x) \rightarrow \neg P(x)$	T,5),11),E
13) $(\forall x)(T(x) \rightarrow \neg P(x))$	US,12)

3.4 数学归纳法

3.4.1 数学归纳法原理

假设要证明的命题能写成形式:

$$\forall n \geq n_0, \text{ 有 } P(n)$$

其中 n_0 是某个固定的整数,

即: 希望证明对所有的整数 $n \geq n_0$ 都有 $P(n)$ 为真。

数学归纳法原理

假设

- 1) 验证 $n=n_0$, 有 $P(n_0)$ 为真; (归纳基础)
- 2) 假设对于 $n=k(k \geq n_0)$, 有 $P(k)$ 为真; (归纳假设)
- 3) 证明 $n=k+1$, 有 $P(k+1)$ 为真。 (归纳结论)

结论 对所有的整数 $n \geq n_0$, 都有 $P(n)$ 为真。

谓词表示:

$$(\exists n_0)(P(n_0) \wedge (\forall n)((n = k) \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))) = 1$$

强形式数学归纳法原理

假设

- 1) 验证 $n=n_0, n_0+1$, 有 $P(n_0), P(n_0+1)$ 为真;
(归纳基础)
- 2) 假设对于 $n \leq k (k \geq n_0)$, 有 $P(n)$ 为真; (归纳假设)
- 3) 证明 $n=k+1$, 有 $P(k+1)$ 为真。 (归纳结论)

结论 对所有的整数 $n \geq n_0$, 都有 $P(n)$ 为真。

谓词表示:

$$(\exists n_0)(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge (\forall n)((n \leq k) \wedge P(n) \rightarrow P(k+1))) \\ = 1$$

例3.4.1

用数学归纳法证明：

$$\text{对所有 } n \geq 1, \text{ 有 } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

证明 归纳基础验证

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ 显然 } P(1) \text{ 真值为 } 1;$$

归纳假设假定 对于 $n=k(k \geq 1)$, 有 $P(k)$ 为真,
即有

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2};$$

例3.4.1 证明

归纳结论证明 对于 $n=k+1$, 有 $P(k+1)$ 为真

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

由数学归纳法原理得到, $P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 为真。

例3.4.2

对每个正整数 $n \geq 1$ ，能惟一地写成 $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ ，
其中 P_i 是素数且满足 $P_1 < P_2 < \dots < P_s$ 。

分析 设 $P(n) : n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ ；由于素数一定是大于等于2的正整数，因此， $n_0 = 2$ 。

例3.4.2

证明 归纳基础验证

因为 $2=2^1$, $3=3^1$, 所以 $P(2)$ 、 $P(3)$ 为真;

归纳假设假定

对 $n \leq k$ 的所有正整数, 都有 $P(n)$ 为真, 即

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \cdot \cdot p_s^{a_s}$$

例3.4.2(续)

归纳结论证明 对 $n=k+1$ ，需分两种情况讨论：

(1) 如果 n 本身就是一个素数，则 $k+1=(k+1)^1$ ，即 $P(k+1)$ 为真；

(2) 如果 n 不是一个素数，则 $k+1=lm$ ，其中 $2 \leq l \leq k$ ， $2 \leq m \leq k$ ，此时由归纳假设有

$$l = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s},$$

$$m = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_s^{c_s}$$

其中， p_1, p_2, \dots, p_s 是素数，且是包含 l, m 中全部分解因子， $b_i, c_i \geq 0$ 的自然数，

例3.4.2(续)

为此有

$$k+1=lm=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_s^{b_s} p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_s^{c_s}$$

$$=p_1^{b_1+c_1}p_2^{b_2+c_2}\cdots p_s^{b_s+c_s} = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$$

由于 p_1, p_2, \dots, p_s 是素数，所以 $k+1$ 能分解成素数的积，又因为 l 和 m 的因子分解是惟一的，所以 $k+1$ 的因子分解也是惟一的，所以 $P(k+1)$ 是真的。由数学归纳法原理得到， $P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 为真。

习题

1.符合化下列论断，并用演绎法验证论断是否正确

1) 每个相声演员都是刻苦钻研的，每个刻苦钻研而又聪明的人在他的事业上都将获得成功。小岳岳是相声演员，并且是聪明的，所以小岳岳在他的事业上将获得成功。

2) 每个旅客或者坐头等舱或者坐二等舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此，有些旅客坐二等舱。

2.证明是 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。（请先阅读qq群文件中Rosen书的1.5.7节）



Thank You !