第十一章 谓词逻辑

11.3 谓词逻辑公式

要在谓词逻辑中进行演算和推理

必须给出谓词逻辑中公式的抽象定义及它们的解释

一阶语言$\mathscr{L}$

就是用狭义谓词演算范围内的逻辑概念所表达的语言，具体地说，就是用个体变元、个体常元、函数符号、谓词符号（一般包括等号在内），以及与、或、非、蕴涵等命题连接词，还有“存在一个体”和“对一切个体”两种量词所表达的语言。

一阶语言$\mathscr{L}$的字母表

定义11.1 设L是一个非逻辑符集合, 由L生成的一阶语言$\mathscr{L}$的字母表包括下述符号：

非逻辑符号

(1) L中的个体常元符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, (i \geq 1)$

(2) L中的函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, (i \geq 1)$

(3) L中的谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, (i \geq 1)$

逻辑符号

(4) 个体变元符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, (i \geq 1)$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

一阶语言$\mathscr{L}$的项

定义11.2 $\mathscr{L}$的项的定义如下：

(1) 个体常元和个体变元符号是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

例如，a, x, $x+y$, $f(x)$, $g(x,y)$都是项

一阶语言$\mathscr{L}$的原子公式

定义11.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的原子公式.

例如，$F(x, y)$, $F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$均为原子公式

一阶语言$\mathscr{L}$的谓词逻辑公式

定义11.4 $\mathscr{L}$的合式公式（谓词逻辑公式）定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

合式公式简称公式

例如，$F(x)$，$F(x)\vee\neg G(x,y)$，$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$是合式公式吗？

答案：都是合式公式

练习

下面的符号串是谓词逻辑公式吗?

1. $\forall y\, \exists x(P(f(x,y), y, z) \land Q(x,y))$
2. $\exists y(\forall x(F(x,y)) \rightarrow \forall x(P(x))$
3. $\forall x(P(y))$
4. $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(y))$
5. $\exists x(f(x) \land Q(x,y))$
6. $\exists z(\forall x \exists y \land Q(x))$

1, 3是谓词谓词逻辑公式，其他不是

自由变元与约束变元

定义11.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，

称x为指导变元，A为相应量词的辖域.

在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，

A中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的.

例如，$\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$，

x为指导变元，

$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，

x的两次出现均为约束出现，y与 z 均为自由出现

自由变元与约束变元

又如, $\exists x(F(x,y,z)\to\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$,

$\exists x$中的x是指导变元, 辖域为$(F(x,y,z)\to\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$.

$\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$.

x的3次出现都是约束出现,

y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现,

z的2次出现都是自由出现

自由变元与约束变元

指出公式 $\forall y \exists Z R(y,z,x) \rightarrow J(z,x)$ 中的自由变元和约束变元。

$\exists y \forall y F(y,y)$ 重复约束，不容许出现

$\exists y(G(y) \rightarrow \forall y T(y))$ 重复约束，不容许出现

$\exists y \forall x F(x,x)$ 空约束，无意义，不容许出现

注意：上述情况要避免出现。

确定的公式

定义11.6 若公式A中不含自由出现的个体变元，则称A为确定(封闭)的公式.

例如，$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 为确定的，
而 $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 不是确定的

判断下述公式是否为确定的公式

(1) $\exists x(I(x)\wedge \mathrm{J}(\mathrm{x}))\wedge \mathrm{K}(\mathrm{x})$

(2) $\forall yR(y,z)\rightarrow \mathrm{L}(\mathrm{y},\mathrm{z})$

(3) $\forall x(I(x)\rightarrow \mathrm{J}(\mathrm{x}))\wedge \mathrm{I}(\mathrm{a})$

(4) $\exists x\forall y\forall zK(x,y,z)\rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x})$

注意：合式公式是按照形成规则生成的字符串，没有实际的含义，只有将其中的变元（个体、谓词）用指定的常元代替后，所得公式才具有特定的实际含义。

确定的公式

例 （1） $\exists xF(f(x), a)$

指定个体域、非逻辑符号(个体常元、函数符号、谓词符号)的具体含义

(a)个体域R； $a=0$； $f(x)=2x+1$； $F(x, y): x=y$

存在实数x，使得2x+1=0 真命题

(b)个体域N； 其他同上

存在自然数x，使得2x+1=0 假命题

确定的公式

例 （2） $\forall x G(x,y)$

(a)个体域N； $G(x, y)$: $x \geq y$

任意自然数x大于等于y 不是命题

(b) 将自由出现的个体变元y赋值，

若y=0，则真命题；

若y=1，则假命题

确定的公式

Note

- 对公式中的个体域、非逻辑符号(个体常元、函数符号、谓词符号)的指定称为解释；指定自由出现的个体变元的值称为赋值
- 公式经过解释后若其中无自由变元，则公式真假即可确定，若其中有自由变元，则真假无法确定，需要对公式进一步赋值才能确定
- 赋值是在个体域中选择一组个体，分别代入公式的自由变元处
- 经解释后的公式可以有多个赋值，甚至无穷多个

如下给出解释的定义

公式的解释

定义11.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言, $\mathscr{L}$的**解释**I由4部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常元符号$a \in L$, 有一个 $\bar{a} \in D_I$, 称 $\bar{a}$ 为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f \in L$, 有一个D_I上的n元函数 $\bar{f}: D_I^n \to D_I$, 称 $\bar{f}$ 为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F \in L$, 有一个D_I上的n元谓词常元$\bar{F}$, 称 $\bar{F}$ 为F在I中的解释.

设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常元符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释 $\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$, 称所得到的公式A'为A在I下的**解释**, 或A在I下**被解释成**A'.

实例

例7 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a} = 0$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y$, $\bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

解. (1) $\exists x F(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x \forall y(F(f(x,a),y) \rightarrow F(f(y,a),x))$

$\forall x \forall y((x+0=y) \rightarrow (y+0=x))$ 真

(3) $\forall x F(g(x,y),a)$

$\forall x(x \cdot y=0)$ 真值不定, 不是命题

定理11.1 确定的公式在任何解释下都是命题

注意: 不确定的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题.

例如: $\forall x(F(g(y,a), x)\rightarrow F(x,a))$

公式的类型

定义11.8 若公式*A*在任何解释下均为真, 则称*A*为永真式(逻辑有效式).

若*A* 在任何解释下均为假, 则称*A*为矛盾式(永假式).

若至少有一个解释使*A*为真, 则称*A*为可满足式.

若至少有一个解释使*A*为真, 且至少有一个解释使*A*为假， 则称*A*为偶然式.

代换实例

定义11.9 设A_0是含命题变元 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，

$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，

用$A_i\,(1\le i\le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如， $F(x)\to G(x)$ 和 $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$都是$p\to q$的代换实例.

定理11.2 重言式的代换实例都是永真式，

矛盾式的代换实例都是矛盾式.

例. $\forall xA(x)=\neg\neg\forall xA(x)$是$P=\neg\neg P$的代换实例，为永真式.

实例

例8 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>5, $G(x)$: x>4, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:x<5, $G(x)$:x<4, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

练习

3.17 判断下列各式的类型.

(1) $F(x,y)\rightarrow(G(x,y)\rightarrow F(x,y))$.

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow F(x))\rightarrow\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$.

(3) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists y\forall xF(x,y)$.

(4) $\exists x\forall yF(x,y)\rightarrow\forall y\exists xF(x,y)$.

(5) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(y,x))$.

(6) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$.

(7) $\exists xF(x,y)$.

(8) $\exists xF(x,y)\rightarrow\forall yF(x,y)$

11.4谓词逻辑等值式与等式推理

定义11.10 设A, B是两个谓词公式,

如果$A\leftrightarrow B$是永真式, 则称其为等价永真式,

记作$A\Leftrightarrow B$或$A=B$, 称为等值式。

基本等值式

第一组 命题逻辑中的基本等值式的代换实例

例如，$\neg\neg\forall xF(x)=\forall xF(x)$,

$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y) = \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$ 等

基本等值式

基本等值式

第二组

(1) 消去量词等值式

设个体域$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

① $\forall xA(x) = A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) = A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

基本等值式

(2) 量词转化等值式

① $\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$

② $\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

利用(1)说明上述两式成立

基本等值式

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式.

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的出现

关于全称量词的：

① $\forall x(A(x)\vee B) = \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) = \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\to B) = \exists xA(x)\to B$

④ $\forall x(B\to A(x)) = B\to\forall xA(x)$

$$\begin{aligned}
&\forall x(A(x)\to B)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(\neg A(x)\vee B)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(\neg A(x))\vee B\\
\Leftrightarrow\ &\neg\exists xA(x)\vee B\\
\Leftrightarrow\ &\exists xA(x)\to B
\end{aligned}$$

前变后不变

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) = \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) = \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\to B) = \forall xA(x)\to B$

④ $\exists x(B\to A(x)) = B\to\exists xA(x)$

前变后不变

基本等值式

(4) 量词对命题联结词的分配等值式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) = \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) = \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：∀对∨，∃对∧无分配律，但有下面关系

③ $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Longrightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

④ $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Longrightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

量词对$\leftrightarrow$及$\rightarrow$的处理。

只需应用它们对$\wedge$、$\vee$、$\neg$的恒等式即可推出。例如

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

证

$$\begin{aligned}\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists xB(x) \\ &\Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)\end{aligned}$$

基本等值式

(5) 量词次序等值式

① $\forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y)$

② $\exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y)$

但必须注意$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$是不成立的。

例如:

设$P(x, y)$表示$x+y=0$，论述域是有理数集合。则$\forall x \exists y(x+y=0)$是真，但$\exists y \forall x(x+y=0)$是假。由此可知，量词的次序是重要的。

$$\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

$$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$

$$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

等式推理

等式推理——由已知的等值式推演出新的等值式的过程，包括三部分：

1. 基本等式：推理的基础和前提

2. 推理规则：推理的主要部分

(1) 代入规则

(2) 替(置)换规则

(3) 改名规则

(4) 代替规则

3. 推理过程

改名规则

3. 改名规则 (约束变元)

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变元的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变元符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A'=A$.

例：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))= \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$

代替规则

4. 代替规则 (自由变元)

设A为一公式，将A中某个个体变元的所有自由出现用A中未曾出现过的个体变元符号代替，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A'=A$.

例：$\forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))= \forall x(F(x,u,z)\to\exists yG(x,y,z))$

谓词逻辑公式等值推理的实例

例9 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$=\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词转化等值式

$=\forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

实例

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$= \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$ 量词转化等值式

$= \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$= \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 置换

实例

例10 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变元：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

解　$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$= \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$　　改名规则

$= \forall x\exists t(F(x,y,z)\rightarrow G(x,t,z))$　　辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$= \forall x(F(x,u,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$　　代替规则

$= \forall x\exists y(F(x,u,z)\rightarrow G(x,y,z))$　　辖域扩张等值式

回顾-(3)的符号化，证明或否定两种符号化相等

将下列命题符号化

(1) 有的汽车比有的火车跑得快.

(2) 有的火车比所有的汽车跑得快.

(3) 说所有的火车比所有汽车都跑得快是不对的.

(4) 说有的飞机比有的汽车慢是不对的.

实例

例11 设个体域 $D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

$\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$

解 $\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$

$= (\exists y(F(a)\to G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\to G(y)))\wedge(\exists y(F(c)\to G(y)))$

$= ((F(a)\to G(a))\vee(F(a)\to G(b))\vee(F(a)\to G(c)))$

$\wedge((F(b)\to G(a))\vee(F(b)\to G(b))\vee(F(b)\to G(c)))$

$\wedge((F(c)\to G(a))\vee(F(c)\to G(b))\vee(F(c)\to G(c)))$

实例

解法二

$$\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$$

$$=\forall x(F(x)\to\exists yG(y))$$ 辖域缩小等值式

$$=\forall x(F(x)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$=(F(a)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(b)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(c)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

练习

设个体域 $D=\{a,b\}$，消去下列各公式的量词.

$\forall x \exists y(F(x) \wedge G(x,y))$.

$\exists x F(x) \wedge \forall x G(x)$.

练习

1. 前面已证明 $\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

请证明 $\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

练习

3.20 将下列各式的否定号内移,使得否定号只能出现在谓词前.

(1) $\neg \exists x \exists y L(x,y)$.

(2) $\neg \forall x \forall y L(x,y)$.

(3) $\neg \exists x(F(x) \land \forall y \neg L(x,y))$.

(4) $\neg \forall x(\exists y L(x,y) \lor \forall y H(x,y))$.

3.21 将下列公式化成与之等值的公式,使其没有既是约束出现的,又是自由出现的个体变项.

(1) $\forall x F(x,y) \land \exists y G(x,y,z)$.

(2) $\exists x(F(x,y) \land \forall y G(x,y))$.

$\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x)\to \forall x B(x)$

证明 $\forall x(A(x)\to B(x)) \to (\forall x A(x)\to \forall x B(x))$ 为永真即可.

该式 $\Leftrightarrow \neg\forall x(A(x)\to B(x)) \vee (\forall x A(x)\to \forall x B(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \vee (\neg\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$

$\Leftrightarrow \underbrace{\exists x(A(x)\wedge\neg B(x)) \vee \exists x\neg A(x)}_{\exists\text{对}\vee\text{的分配律}} \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \exists x(\underbrace{(A(x)\wedge\neg B(x)) \vee \neg A(x)}_{\vee\text{对}\wedge\text{的分配律}}) \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \exists x(\underbrace{(A(x)\vee\neg A(x))}_{\text{永真}} \wedge (\neg B(x)\vee\neg A(x))) \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\exists x(\neg B(x)\vee\neg A(x))}_{\exists\text{对}\vee\text{的分配律}} \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\neg B(x) \vee \exists x\neg A(x) \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x B(x) \vee \exists x\neg A(x) \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow (\underbrace{\neg\forall x B(x) \vee \forall x B(x)}_{\text{永真}}) \vee \exists x\neg A(x)$

$\Leftrightarrow 1.$

$\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x)\to \forall x B(x)$

证：设个体域为 $D=\{a,b\}$

当 $\forall x(A(x)\to B(x))$ 真时

即 $(A(a)\to B(a))\wedge(A(b)\to B(b))$ 为真，所以 $A(a)\to B(a)$ 和 $A(b)\to B(b)$ 真

要证 $\forall x A(x)\to \forall x B(x)$

即证 $A(a)\wedge A(b)\to B(a)\wedge B(b)$ 为真.

① 若 $A(a)\wedge A(b)$ 为假，则 ✓

② 若 $A(a)\wedge A(b)$ 为真，则 $A(a)$ 真且 $A(b)$ 真.

又因 $A(a)\to B(a)$ 和 $A(b)\to B(b)$ 真

∴ $B(a)$ 真，$B(b)$ 真

∴ $B(a)\wedge B(b)$ 真

由①② 知 $A(a)\wedge A(b)\to B(a)\wedge B(b)$ 为真.

3.4 设个体域为 $D=\{x \mid x$ 是人$\}$，$L(x,y)$：x 喜欢 y. 将下列命题符号化.

(1) 所有的人都喜欢赵小宝.

(2) 所有的人都喜欢某些人.

(3) 没有人喜欢所有的人.

(4) 每个人都喜欢自己.

3.10 在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 没有不吃饭的人.

(2) 在北京卖菜的人不全是东北人.

(3) 自然数全是整数.

(4) 有的人天天锻炼身体.

3.14 指出下列公式中的指导变元，量词的辖域，各个体变项的自由出现和约束出现.

(1) $\forall x(F(x) \to G(x,y))$.

(2) $\forall x F(x,y) \to \exists y G(x,y)$.

(3) $\forall x \exists y(F(x,y) \land G(y,z)) \lor \exists x H(x,y,z)$.

3.15 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D_I 为实数集 $\mathbf{R}$.

(b) $\bar{a}=0$.

(c) $\bar{f}(x,y)=x-y, x,y \in D_I$.

(d) $\bar{F}(x,y)$：$x=y$，$\bar{G}(x,y)$：$x<y, x,y \in D_I$.

说明下列公式在 I 下的含义，并指出各公式的真值.

(1) $\forall x \forall y(G(x,y) \to \neg F(x,y))$.

(2) $\forall x \forall y(F(f(x,y),a) \to G(x,y))$.

(3) $\forall x \forall y(G(x,y) \to \neg F(f(x,y),a))$.

(4) $\forall x \forall y(G(f(x,y),a) \to F(x,y))$.

2. 证明 $\forall x(A(x) \to B(x)) \Longrightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$

THE END