第十一章 谓词逻辑

主要内容

- 谓词逻辑命题符号化

  个体、谓词、量词

  谓词逻辑命题符号化
- 函数
- 谓词逻辑公式
- 自由变元与约束变元
- 谓词逻辑等式与等式推理
- 蕴涵推理
- 谓词逻辑范式

11.1 谓词逻辑命题符号化

如何对如下命题进行符号化？

所有人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

以上推理是真命题，但命题逻辑中无法判断它的正确性

命题逻辑中只能按照三个简单命题处理：p, q, r

$(p \wedge q) \rightarrow r$

注意：命题逻辑中没有考虑到简单命题之间的内在联系和数量关系，所以需要对简单命题进行进一步分析！

个体

个体——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常元：具体的事物，用a, b, c表示

个体变元：抽象的事物，用x, y, z表示

例. (1) 5 是质数　　(2) 张明生于北京　　(3) x大于y

个体域 (论域) ——个体变元的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$

无限个体域，如 N, Z, R, …

全总个体域——由宇宙间的一切事物组成

谓词

谓词：表示个体性质或相互之间关系的词，用大写字母F,G,L等表示

谓词常元　如, $F(a)$：a是人

谓词变元　如, $F(b)$：b具有性质F;

$L(x,y)$：x与 y 有关系 L

例：令S：...是大学生，a：王晓红，b:张丽丽

命题：　王晓红是西北工业大学的学生　　　可表示为S(a)

命题：　张丽丽是西北工业大学的学生　　　可表示为S(b)

从符号S(a), S(b)可以看出王晓红和张丽丽都是西北工业大学的学生这个共性。

——可见比命题逻辑的符号化表达细致。

谓词

A(x,y)：x小于等于y

命题：2≤7　可表示为A(2,7)

Q(x,y,z)：x在y和z之间

命题：点a在点b和点c之间　可表示为Q(a,b,c)

谓词

一般地，含有n (n≥1)个个体变元$x_1, x_2, \ldots, x_n$的谓词P称为n元谓词，记作$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。

当n=1时，P(x) 表示x具有性质P； 一元谓词

当n ≥2时，$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 之间有关系P；多元谓词

约定：不含个体变元的谓词为0元谓词。 如：S(a)， A(2,7)

若0元谓词中的谓词为谓词常元,，则0元谓词是命题常元；

若0元谓词中的谓词为谓词变元，则0元谓词是命题变元。

谓词

$F(x_1, x_2, \ldots , x_n)$称为谓词填式，

确定了此谓词的元数及其与个体变元间的关系与性质，

是以个体域为定义域，以真假为值域的函数，

当个体变元确定后，其值才确定。

实例1

例1 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果2>3，则3<4

解：在命题逻辑中：

(1) p，p为墨西哥位于南美洲 （假命题）

(2) $p\to q$，其中，p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{3}$ 是有理数 （假命题）

(3) $p\to q$，其中，p：2>3，q：3<4 （真命题）

在谓词逻辑中？？

实例1解答

在谓词逻辑中：

(1) a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

$F(a)$

(2) $F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数.

$F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$

(3) $F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$.

$F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$

量词

量词——表示数量的词

全称量词∀: 表示所有的.

如，“一切”，“所有”，“凡”，“每一个”，“任意”等

$\forall x$: 对个体域中所有的x

例如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

$\forall x \forall y G(x,y)$表示个体域中所有的$x$和$y$有关系$G$

量词

存在量词$\exists$: 表示存在, 有一个.

如，“有一个”，“有的”，“一些”，“某些”“至少有一个”等

$\exists x$: 个体域中有一个x

例如, $\exists xF(x)$表示个体域中有一个x具有性质F

$\exists x\exists yG(x,y)$表示个体域中存在x和y有关系G

$\forall x\exists yG(x,y)$

表示对个体域中每一个x都存在一个y使x和y有关系G

$\exists x\forall yG(x,y)$

表示个体域中存在一个x使得对每一个y, x和y有关系G

实例2

例 2 在谓词逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合

(b) D为全总个体域

解 (a) 个体域D为人类集合

(1) $G(x)$：x爱美　　　$\forall x G(x)$

(2) $H(x)$：x用左手写字　　　$\exists x H(x)$

实例2

例 2 在谓词逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

解. (b) D为全总个体域，

$F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美, $H(x)$: x用左手写字

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$

1. 当个体域为全总个体域时，引入特性谓词$F(x)$；
2. (1),(2)是谓词逻辑中两个“基本”公式

特性谓词　在使用全总个体域的条件下，对每一个客体变元的范围用一个谓词加以限制，这个谓词称为特性谓词。

设 $D=\{a,b,c,d,e,f\}$ 为个体域.

其中具有性质 P 的元素为 $\{a、b、c\}$.

符号化下列旧题:

(1) 所有有性质 P 的元素都喜欢苹果.

(2) 存在有性质 P 的元素喜欢草莓

解: 设 $F(x)$ 表示 x 有性质 P

$G(x)$ 表示 x 喜欢苹果

$H(x)$ 表示 x 喜欢草莓

(1) $\forall x(F(x)\to G(x)) = (F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))\wedge(F(d)\to G(d))\wedge(F(e)\to G(e))\wedge(F(f)\to G(f)) = 1.$

$\forall x(F(x)\wedge G(x)) = (F(a)\wedge G(a))\wedge(F(b)\wedge G(b))\wedge(F(c)\wedge G(c))\wedge(F(d)\wedge G(d))\wedge(F(e)\wedge G(d))\wedge(F(f)\wedge G(f)) = 0.$ ×

(2) $\exists x(F(x)\wedge H(x)) = (F(a)\wedge H(a))\vee(F(b)\wedge H(b))\vee(F(c)\wedge H(c))\vee(F(d)\wedge H(d))\vee(F(e)\wedge H(e))\vee(F(f)\wedge H(f))$

在使用全总个体域的条件下，对每一个课体变元的范围用一个谓词加以限制，这个谓词称为**特性谓词**。

（1）对**全称量词**，特性谓词作为蕴含前件。

（2）对**存在量词**，特性谓词作为合取项。

例：(1) 人都爱美 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) 有人用左手写字 $\exists x(F(x)\wedge H(x))$

实例

例 每个人都有一个生母。

(在个体域为人类集合、全总个体域时分别符号化)

解1. 设个体域为：全体人类，$M(x,y)$：y是x的生母。

此命题可表达为：

$$\forall x\exists yM(x,y)$$

解2.个体域为全总个体域时

设$P(x)$：x是人，$M(x,y)$：y是x的生母。

此命题可表达为：

$$\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(P(y)\wedge M(x,y))$$

实例3

例3 在谓词逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 （注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域）

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

或者$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$$

或者$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$

实例4

例4 在谓词逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x犯错误

$\neg\exists x(F(x)\land\neg G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x喜欢吃糖

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x(F(x)\land\neg G(x))$

练习

将下列命题符号化

(1) 有的汽车比有的火车跑得快.

(2) 有的火车比所有的汽车跑得快.

(3) 说所有的火车比所有汽车都跑得快是不对的.

(4) 说有的飞机比有的汽车慢是不对的.

实例5

例5 在分别取个体域为

(a) D_1=N

(b) D_2=R

的条件下, 将下面命题符号化，并讨论真值

(1) 对于任意的数x，均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

解 设$G(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

(a) $\forall xG(x)$ 真

(b) $\forall xG(x)$ 真

实例5(续)

(2) 存在数x，使得 $x+7=5$

解 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$ 假

(b) $\exists xH(x)$ 真

本例说明：

- 量词所确定的公式与个体域有关，对不同的个体域，相同的公式可能有不同的真值.

11.2 函数

函数——谓词逻辑中个体与个体间的关系

函数有一元、二元、多元

表达为: $y=f(x)$; $z=f(x, y)$; $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

f为函数符号，等式左右均为个体变元

函数是个体到个体的映射

例6 将下述语句表达为函数

张三和他父亲及祖父三人一起去看演出。

解 设$F(x, y, z)$为某人x与某人y及某人z一起看演出，

$f(x)$为x的父亲，又设a为张三，则此语句可写成：

$$F(a, f(a), f(f(a)))$$

THE END