线性代数

第 六 章

二 次 型

二次型起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面方程为标准形的问题.这一理论在数理统计、物理、力学及现代控制理论等诸多领域都有重要应用.

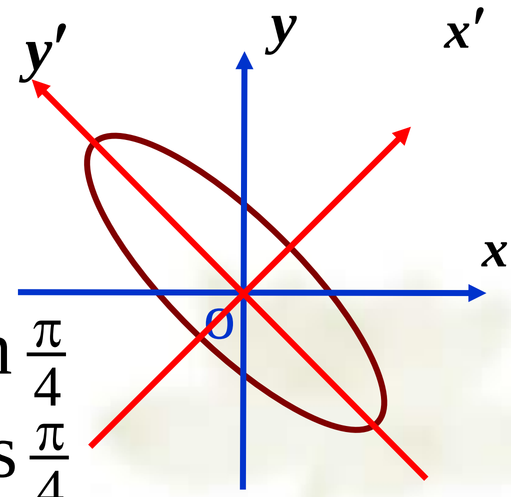
本章主要以矩阵为工具，讨论化二次型为标准形的问题，它与第五章的内容有着紧密的联系，如用正交变换化二次型为标准形与实对称矩阵正交相似于对角阵是以两种形式出现的同一个问题.

§6.1 二次型及其矩阵表示

在解析几何中,为了研究曲线的类型及性质,常把二次曲线方程化为标准形.例如对二次曲线方程

$$5x^2+8xy+5y^2=9$$

可利用坐标旋转变换将其化为标准形。

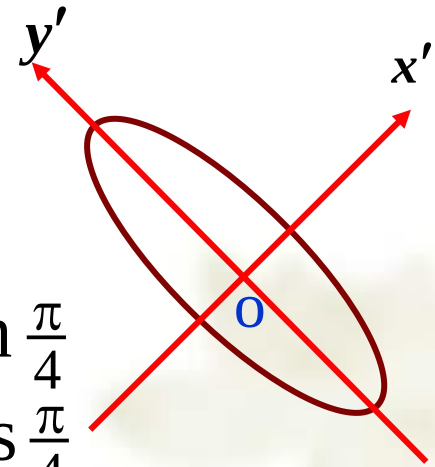


作坐标旋转变换 $\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$

§6.1 二次型及其矩阵表示

在解析几何中,为了研究曲线的类型及性质,常把二次曲线方程化为标准形.例如对二次曲线方程

$$5x^2+8xy+5y^2=9$$



可利用坐标旋转变换将其化为标准型。

作坐标旋转变换 $\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$

矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Q} \triangleq (\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2)$$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) = (x', y')\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

易验证 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵.

令 $f(x, y) = (x, y)\underset{\boldsymbol{A}}{\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9$

$\Rightarrow \quad f(x, y) = (x', y')\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$为实对称矩阵.

而$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=(x',y')\Lambda\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=9x'^2+y'^2$$

$\therefore$ 原方程化为 $9x'^2+y'^2=9$ 没有含$x'y'$的混合乘积项

$\Leftrightarrow x'^2+\dfrac{y'^2}{3^2}=1,$ 在坐标系 $x'Oy'$ 上的椭圆方程

- 再来分析一下 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$

$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(9-\lambda)(1-\lambda)$,$\therefore$特征根为 $\lambda_1=9,\ \lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\qquad \text{即}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1$$

$$\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \text{即}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2=\lambda_2\boldsymbol{q}_2$$

一、二次型

1. 定义6.1

(1) n元二次型是指如下形式的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3,n-1}x_3x_{n-1} + 2a_{3n}x_3x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

n 元二次型的**特点**：

① 含n个自变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$;

② 二次齐次多项式：只含x_i^2或$x_i x_j$的项，无一次项和常数项.

例如：

$$\left.\begin{aligned} &f(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 \\ &f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + xz + yz \\ &f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 \end{aligned}\right\}$$ 都是二次型。

$$\left.\begin{aligned} &f(x,y) = x^2 + y^2 + 5 \\ &f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2x \end{aligned}\right\}$$ 不是二次型。

(2) 标准型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$

特点：只有平方项，无混合乘积项。

当 a_{ij} 为实数时，称 f 为实二次型；

当 a_{ij} 为复数时，称 f 为复二次型。

本章仅讨论实二次型。

2. 二次型的矩阵形式

为了记法方便，记 $a_{ij} = a_{ji} (i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n)$,则有

$$2a_{ij}x_i x_j = a_{ji}x_j x_i + a_{ij}x_i x_j$$

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + 2a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3,n-1}x_3x_{n-1} + 2a_{3n}x_3x_n \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&\quad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + a_{2n}x_2x_n \\
&+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 + \cdots + a_{3,n-1}x_3x_{n-1} + a_{3n}x_3x_n \\
&+ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
&+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \cdots + a_{n,n-1}x_nx_{n-1} + a_{nn}x_nx_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + a_{2n}x_2x_n \\
&+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 + \cdots + a_{3,n-1}x_3x_{n-1} + a_{3n}x_3x_n \\
&+ \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
&+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \cdots + a_{n,n-1}x_nx_{n-1} + a_{nn}x_nx_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
&+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&+ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&+ x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)
\end{aligned}
\quad = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

由前面的假设$a_{ij}=a_{ji}$知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵

令$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

得实二次型的矩阵形式 $f=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,

其中$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,是实对称矩阵

由上述推导可以看出，任意给定一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型．这样，二次型与对称矩阵之间存在**一一对应**的关系．

我们把这个对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵；而把 f 叫做对称矩阵 A 的二次型。

定义： 二次型 f 的矩阵 A 的秩，称为 f 的秩。

注意：二次型的矩阵 A 必为对称矩阵。换句话说，只有当 A 为对称矩阵时，二次型的矩阵表达式才是唯一的。

如果不要求*A*是对称矩阵，那么同样一个二次型可以有多种表达形式。例如：

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_2^2+3x_1x_2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$ 其中*A*为对称矩阵。

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_2^2+3x_1x_2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

由于二次型与其对称矩阵是一一对应的, 因此研究一个二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的性质可以转化为研究对称矩阵$\boldsymbol{A}$ 的性质。反之亦然。

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3,n-1}x_3x_{n-1} + 2a_{3n}x_3x_n \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}
$$

例（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&2&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_1x_3-3x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&-1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

（3）$f(x_1,x_2,x_3)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+d_3x_3^2$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

- **特别的，当A为实方阵(未必对称时)，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 仍然是二次型，但该二次型的矩阵为$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$**

二、二次型的基本问题

1. 二次曲面化简

$$f(x,y,z)\triangleq a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2 \\ +2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$$

矩阵形式 $$f=(x,y,z)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+c$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c=0$$

求变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'(\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$，其中$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

使 $$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix}}_{\Lambda}\boldsymbol{x}'$$

$$=d_1x'^2+d_2y'^2+d_3z'^2$$ 无混合乘积项

而 $$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}'\triangleq e_1x'+e_2y'+e_3z'$$

从而 $f=d_1x'^2+d_2y'^2+d_3z'^2+e_1x'+e_2y'+e_3z'+c=0$

当 $d_i\neq 0$ 时，可配完全平方，例如

(1) d_1,d_2,d_3 都不为零时

$$f=d_1(x'-x_0')^2+d_2(y'-y_0')^2+d_3(z'-z_0')^2+c'=0$$

令$X = x' - x_0', Y = y' - y_0', Z = z' - z_0'$（坐标系平移）

则可得 $d_1X^2 + d_2Y^2 + d_3Z^2 = c''$(不妨设$c'' \geq 0$)

此类方程可化为标准方程，表示椭球面、或单叶双曲面、或双叶双曲面、或椭圆锥面等。

（2）$d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d_3 = 0$，$e_3 \neq 0$ 时

$$f = d_1(x' - x_0')^2 + d_2(y' - y_0')^2 + e_3(z' - z_0') + c' = 0$$

令 $X = x' - x_0', Y = y' - y_0', Z = z' - z_0'$（坐标系平移）

则可得 $$Z = c'' + d_1X^2 + d_2Y^2$$

此类方程可表示椭圆抛物面、或双曲抛物面（马鞍面）

可利用可逆线性变换和平移变换，

将二次曲面的一般方程化为标准方程。

$\therefore$目标：求变换 $x = Cx'$，化二次型 f 为“标准型”.

2. 二次型化简问题

设 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax, A^{\mathrm{T}} = A.$

求$x = Cy, C = (c_{ij})_{n\times n}, \det C \neq 0$

$$\text{使 } f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2 = y^{\mathrm{T}}By,$$

$$B = diag(d_1, d_2, \cdots d_n)$$

即把 $f(x)$化为标准型 $f(x) = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)$

$$= y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y = y^{\mathrm{T}}By(\forall y \in R^n)$$

$$\Leftrightarrow C^{\mathrm{T}}AC = diag(d_1, d_2, \cdots d_n) = B$$

三、合同矩阵

定义6.2 设 A,B 为 n 阶方阵(注：A,B 未必是对称矩阵)

A与B合同，即$A \simeq B \Leftrightarrow \exists$可逆阵$C$，使$C^{\mathrm{T}}AC = B$.

合同关系是等价关系，即满足

（1）反身性：$A \simeq A$;

（2）对称性：$A \simeq B \ \Rightarrow \ B \simeq A$;

（3）传递性：$A \simeq B$ 且 $B \simeq C \ \Rightarrow \ A \simeq C$;

定理6.1 (1) $A \simeq B$ 且 $A^{\mathrm{T}} = A \ \Rightarrow \ B^{\mathrm{T}} = B$.

(与对称阵合同的矩阵也是对称阵)

(2) $A \simeq B \ \Rightarrow \ rankA = rankB$.

(合同矩阵的秩相同)

证明

(1) 设 $B = C^{T}AC$, C 可逆 $\Rightarrow$ $B^{T} = C^{T}A^{T}C = C^{T}AC = B$;

(2) $A \simeq B \Rightarrow A \cong B \Rightarrow rankA = rankB$

推论 可逆线性变换 $x = Cy$ 把二次型

$$f(x) = x^{T}Ax$$

仍变为二次型

$$f(x) = f(Cy) = y^{T}By,$$

其中 $B = C^{T}AC$ 是对称矩阵，且$B \simeq A$.

- 化二次型为标准型的实质：

  对实对称矩阵A，求可逆矩阵C，使$C^{T}AC$为对角矩阵

附：矩阵之间的四种关系

$$A\text{与}B\text{等价}, A \cong B \iff PAQ = B, P\text{与}Q\text{可逆}$$

$$A\text{与}B\text{相似}, A \sim B \iff P^{-1}AP = B, P\text{可逆}$$

$$A\text{与}B\text{合同}, A \simeq B \iff C^{\mathrm{T}}AC = B,\ C\text{可逆}$$

$$A\text{与}B\text{正交相似} \iff Q^{-1}AQ = B,\ Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \sim B \arrow[dr, shift left] \arrow[dl, shift left, "/" marking] & \\
A\text{与}B\text{正交相似} \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & & A \cong B \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left, "/" marking] \\
 & A \simeq B \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$