§5.2 相似对角化

一、相似矩阵

1. **定义5.3** 设A,B是n阶方阵，若有n阶可逆方阵P，使

$$P^{-1}AP=B,$$

则称A与B**相似**，记作$A\sim B$.

对A进行运算$P^{-1}AP$，称为对A进行**相似变换**；可逆矩阵P称为把A变为B的**相似变换矩阵**.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=B,$$

$\therefore A\sim B$

2. 性质

(1) 反身性：$A \sim A$;

(2) 对称性：$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$;

(3) 传递性：$A \sim B$且$B \sim C \Rightarrow A \sim C$;

等价关系

(4) 相似矩阵的可逆性：$A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$,

$\therefore A$与B同时可逆或同时不可逆;

证 $A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP$

$$\Rightarrow \det B = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$$

(5) 逆矩阵相似性: $A \sim B$且A可逆 $\Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$;

证 $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$

(6) 同幂矩阵、数乘矩阵相似性：

$$A \sim B \;\Rightarrow\; kA \sim kB \;\; (k \in R)\;,$$

$$A^m \sim B^m \;\; (m \in N)$$

证 $B^m = (P^{-1}AP)^m = \underbrace{P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP}_{m个} = P^{-1}A^mP$

(7) 矩阵多项式相似性：

$$A \sim B \;\Rightarrow f(A) \sim f(B), \qquad f \text{ 是多项式；}$$

证　设 $f(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\therefore f(B) = a_s B^s + a_{s-1}B^{s-1} + \cdots + a_1 B + a_0 E$$

$$= a_s P^{-1}A^s P + a_{s-1}P^{-1}A^{s-1}P + \cdots + a_1 P^{-1}AP + a_0 P^{-1}EP$$

$$= P^{-1}(a_s A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E)P$$

$$= P^{-1}f(A)P$$

(8) 相似矩阵的特征多项式相同，特征值相同：

$$A \sim B \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E);$$

$$A \sim B \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \text{ 与 } B \text{ 特征值相同};$$

证 $\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP)$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det P = \det(A - \lambda E)$$

注 反之不成立：$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，特征值相同

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，但对$\forall$可逆矩阵$P$，$P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$，

$\therefore B \not\sim E.$

例 对角矩阵的特征值

设$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则其特征矩阵

$$\det(\Lambda-\lambda E)=\begin{vmatrix}\lambda_1-\lambda & & & \\ & \lambda_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$\therefore$ 对角矩阵的主对角线元素是其全部特征值.

二、相似对角化条件

问题：方阵*A*与对角阵相似的条件？

1. 定义5.4

$$\text{若}n\text{阶方阵}A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

则称*A*可对角化。

2. 对角化条件

定理5.5 n 阶方阵 A 与对角阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 （必要性）. 设$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} \triangleq diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,
则存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$$

记$\boldsymbol{P}$的列向量为$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$，即 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$

而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

$\therefore A\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\quad A\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\quad\cdots\quad,A\boldsymbol{p}_n=\lambda_n\boldsymbol{p}_n,$

$\therefore\ \lambda_j$是A的特征值，$\boldsymbol{p}_j$ 是相应的特征向量，$j=1,2,\cdots,n.$

又$\because P$可逆，$\therefore P$满秩，其列向量组$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$线性无关

(充分性) 设$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$是$A$的$n$个线性无关的特征向量，对应的特征值依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，即有

$$A\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\quad A\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\quad\cdots\quad,A\boldsymbol{p}_n=\lambda_n\boldsymbol{p}_n,$$

构造矩阵 $\quad P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\ \Rightarrow\ P$ 可逆.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ AP&=A(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=(A\boldsymbol{p}_1,A\boldsymbol{p}_2,\cdots,A\boldsymbol{p}_n)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)\\&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=P\Lambda\end{aligned}$$

$\therefore P^{-1}AP = \Lambda, \qquad \therefore A \sim \Lambda$

证毕

说明 (1)若 $A \sim \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,则$A$与$\Lambda$的特征值相同，$\Lambda$的主对角线元素$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值.

设相似变换矩阵为$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，则列向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 依次是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量.

(2) 相似变换矩阵不唯一；

(3) $A \sim \Lambda$,若不计λ_i的排列顺序,则Λ唯一，称为A的相似标准形.

推论1 n阶方阵A的n 个特征值互不相同$\Rightarrow A$ 与对角阵相似。

推论2　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A 的 m 个互不相同的特征值，重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_m$，且 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n.$ 则 A 与对角阵相似 $\Leftrightarrow$ A 的r_i 重特征值λ_i恰有r_i个线性无关的特征向量$(i=1,2,\cdots,m)$

$$
\text{即}\quad
\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 & r_1\ \text{重} & \boldsymbol{p}_{11} & \boldsymbol{p}_{12} & \cdots & \boldsymbol{p}_{1r_1} & r_1\ \text{个} & \text{线性无关} \\
\lambda_2 & r_2\ \text{重} & \boldsymbol{p}_{21} & \boldsymbol{p}_{22} & \cdots & \boldsymbol{p}_{2r_2} & r_2\ \text{个} & \text{线性无关} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_m & r_m\ \text{重} & \boldsymbol{p}_{m1} & \boldsymbol{p}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{p}_{mr_m} & r_m\ \text{个} & \text{线性无关} \\
\text{互异} & \text{和为}n & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{\boldsymbol{p}_{m1}\quad\boldsymbol{p}_{m2}\quad\cdots\quad\boldsymbol{p}_{mr_m}}}_{\text{共}n\text{个}}} & \text{共}n\text{个} & \underbrace{\hphantom{\text{线性无关}}}_{\text{合之仍线性无关}}
\end{array}
$$

$$A\sim\text{对角阵}\,\Lambda=\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_1\end{matrix}\right\}r_1\text{个}&&&\\&\left.\begin{matrix}\lambda_2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_2\end{matrix}\right\}r_2\text{个}&&\\&&\ddots&\\&&&\left.\begin{matrix}\lambda_m&&\\&\ddots&\\&&\lambda_m\end{matrix}\right\}r_m\text{个}\end{pmatrix}$$

注 推论1和推论2是判断A是否可对角化的常用条件.
推论1的条件是充分的，推论2的条件是充要的.

例1 下列矩阵哪些可对角化?若可,求相似变换矩阵.

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix},\qquad(2)\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix},$$

$$(3)\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

解 (1)

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\-6&-11&-6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-3$.

A的三个特征值互不相同，故A可对角化.

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -6 & -11 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_1=-1$对应特征向量$p_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -6 & -11 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_2=-2$对应特征向量$p_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$A-\lambda_3 E=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ -6 & -11 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{9}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_3=-3$对应特征向量$p_3=\begin{pmatrix}1 & -3 & 9\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\therefore A \sim \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = \Lambda,$$

相似变换矩阵$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,即有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda$$

注意 相似变换矩阵列向量的排列顺序和对角阵对角线元素排列顺序的对应关系.

上例中，若记$\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$,则

$$\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ \det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ -3 & -6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{B}$特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \ \lambda_3=-2.$

$\lambda_1=\lambda_2=1$时，

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$对应特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$\lambda_3=-2$时，

$$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_3=-2$对应特征向量$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

由于$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$线性无关，所以$\boldsymbol{B}$可对角化

令$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

- 若记$\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则有$\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$

$\therefore \boldsymbol{C}$特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$时，

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$对应特征向量$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

所以$\boldsymbol{C}$不能对角化.

练习 (2004 数一 9分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，

求a 的值，并讨论$\boldsymbol{A}$是否可相似对角化.

推论3 如果 n 阶方阵 A 可对角化，则 rank(A)= A的非零特征值的个数。

证明 若 A 可以对角化，设与其相似的对角阵为Λ 即存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 。

因此 A 与 Λ 等价，则有r(A)=r(Λ). 所以 Λ 对角线上的非零元个数为r(A).

又因为 A 与Λ 相似，所以 A 的特征值与 Λ 的特征值相同，所以r(A)= A 的非零特征值的个数。**证毕**

例2　(2010年　数一　4分)

设 A为4阶实对称矩阵，且 $A^2+A=O$。若 A 的秩为3，则 A 相似于（　）

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

三、相似对角化的应用

把一个矩阵对角化,不仅可以使矩阵运算简化,而且在理论和应用上都有意义.主要有以下几种应用:

1. 由特征值特征向量反求矩阵

例2 已知方阵A的三个特征值是0, 1, 3, 对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,求矩阵$A$.

解 A的特征向量是三维的, 所以A是三阶方阵

$\because A$有三个不同的特征值, 所以A可对角化

即存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,\quad \text{其中} P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

2. 求方阵的幂

例3 已知$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$,求$A^k$($k$为正整数).

解 由例1知方阵A可对角化，且对角阵和相似变换矩阵分别为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}，则 A=P\Lambda P^{-1}$$

$$\therefore\quad A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=\underbrace{P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}}_{k\text{个}}$$

$$\therefore A^k=P\Lambda^k P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(-2)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-(-2)^k&2-2\cdot(-2)^k&0\\-1+(-2)^k&-1+2\cdot(-2)^k&0\\-1+(-2)^k&-2+2\cdot(-2)^k&1\end{pmatrix}$$

3. 求行列式

例4 设A是n阶方阵, 2, 4, $\cdots$, $2n$是A的n个特征值，计算$\det(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

解 方法一 先求$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$的全部特征值，再求乘积即为行列式的值.

设$f(x)=x-3$,因为A的特征值为$\lambda_i=2i(i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$的全部特征值为$f(\lambda_i)=2i-3(i=1,2,\cdots,n)$

$$\therefore \det(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\prod_{i=1}^{n}(2i-3)=(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$

方法二 因为A有n个互不相同的特征值，所以A可以对角化，即存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A=P\Lambda P^{-1}\quad\therefore\det(A-3E)=\det(P\Lambda P^{-1}-3PEP^{-1})$$

$$=\det P\cdot\det(\Lambda-3E)\det P^{-1}=\det(\Lambda-3E)$$

$$=\begin{vmatrix}2-3&&&\\&4-3&&\\&&\ddots&\\&&&2n-3\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$