§ 3.3　求解线性方程组的消元法

例 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ① \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 & ② \\ x_1 + x_3 = 3 & ③ \end{cases}$

$$\begin{array}{l} ② - 2 \times ① \\ ③ - \frac{1}{2}① \end{array} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②' \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} & ③' \end{cases}$$

$$③' - \frac{1}{8}②' \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①'' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②'' \\ -\frac{3}{8}x_3 = \frac{9}{4} & ③'' \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

§3.3 求解线性方程组的消元法

例 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ① \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 & ② \\ x_1 + x_3 = 3 & ③ \end{cases}$ 增广矩阵 $\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} ② - 2\times ① \\ ③ - \frac{1}{2}① \end{array} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②' \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} & ③' \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{2}r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$③' - \frac{1}{8}②' \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ①'' \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ②'' \\ -\frac{3}{8}x_3 = \frac{9}{4} & ③'' \end{cases} \qquad \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{8}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_1-3r_3}]{r_3\times(-\frac{8}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\substack{r_1+r_2 \\ r_1\div 2}]{r_2\times(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

可见：线性方程组消元法,等同于增广矩阵经行初等变换化为行最简形.

消元法:线性方程组三种变换 $\leftrightarrow$ 增广矩阵的三种行变换。

(1) 互换两个方程 $\leftrightarrow$ (1) 互换矩阵两行

(2) 用非零常数乘某方程 $\leftrightarrow$ (2) 用非零数乘某行

(3)方程若干倍加于另一方程 $\leftrightarrow$ (3)用行若干倍加于另一行

命题1：线性方程组经初等变换后，变成同解方程组.

命题2：线性方程组的增广矩阵经行初等变换后，变成同解方程组的增广矩阵.

一般线性方程组情形： $\boldsymbol{Ax=b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

把增广矩阵利用初等行变换，化为行最简形

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \cdots & x_n & =\text{常数} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \hat{H}=\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行最简形

注意：总可将 $\hat{H}$ 作变换，调整为上述行最简形，只是变动 x_i 的排序就可以了.

$$\hat{H}=\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \cdots & x_n & = \text{常数} \\ \end{array}$$

$$\hat{H}=\left(\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 解的讨论 （总有 $rank\mathbf{A} \le rank\hat{\mathbf{A}} \le \min(m, n+1)$ ）

1 $d_{r+1} \neq 0 \Leftrightarrow rank\mathbf{A} = r < rank\hat{\mathbf{A}} = r+1 (= rank\hat{\boldsymbol{H}})$

$\Leftrightarrow 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = d_{r+1} \neq 0$, 矛盾

$\Leftrightarrow$ 方程组无解

2 $d_{r+1}=0 \Leftrightarrow rankA = rank\hat{A}$

$\Leftrightarrow$ 方程组有解

(1) $rankA = rank\hat{A} = n \Leftrightarrow \hat{H} = \left[\begin{array}{c:c} E_n & d \\ O & 0 \end{array}\right]$

$\Leftrightarrow$ 方程组有唯一解,且解 $x_i = d_i,\ i=1,2\ldots,\ n$

(2) $rankA = rank\hat{A} = r < n \Leftrightarrow \hat{H} = \left[\begin{array}{cc:c} E_r & B & d \\ O & O & 0 \end{array}\right]$

$\Leftrightarrow$ 方程组有无穷多组解，且解为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n}x_n \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}x_{r+1} - b_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n}x_n \end{cases}$$

称 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 为自由未知量

或参数形式

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}k_1 - b_{1,r+2}k_2 - \cdots - b_{1,n}k_{n-r} \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}k_1 - b_{2,r+2}k_2 - \cdots - b_{2,n}k_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}k_1 - b_{r,r+2}k_2 - \cdots - b_{r,n}k_{n-r} \\ x_{r+1} = 0 + 1\ k_1 - 0\ k_2 - \cdots - 0\ k_{n-r} \\ x_{r+2} = 0 + 0\ k_1 - 1\ k_2 - \cdots - 0\ k_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = 0 + 0\ k_1 - 0\ k_2 - \cdots + 1\ k_{n-r} \end{cases}$$

或矩阵形式

一般解或通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{bmatrix} -b_{1,n} \\ -b_{2,n} \\ \vdots \\ -b_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

定理 3.4 对 $A_{m\times n}x=b$，设秩 $rankA$，$rank\hat{A}$

1. 线性方程组无解 $\Leftrightarrow$ $rankA \neq rank\hat{A}$（必有 $rankA < rank\hat{A}$）
2. 线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ $rankA = rank\hat{A}$

且 (1) 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $rankA = rank\hat{A} = n$ (未知数个数)

(2) 有无穷多组解 $\Leftrightarrow$ $rankA = rank\hat{A} < n$ (未知数个数)

注： 由定理3.4可以看出，决定一个方程组是否有解的并不是方程个数的多少，而是系数矩阵和增广矩阵的秩。

定理3.5 对齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$

1. 有非零解 $\Leftrightarrow$ 有无穷多组解 $\Leftrightarrow$ $rankA < n$
2. 只有零解 $\Leftrightarrow$ $rankA = n$（注：A未必为方阵）
3. 当$m<n$时 $\Rightarrow$ 有非零解（$\because rankA \le \min(m,n) < n$）

推论： 对 $A_{n\times n}x=0$

1. 有非零解 $\Leftrightarrow$ $rankA < n$ $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ (A 不满秩)
2. 只有零解 $\Leftrightarrow$ $rankA = n$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (A 满秩，非奇异，可逆)

注意：1.求解$Ax=b$要考虑增广矩阵，

求解$Ax=0$只考虑系数矩阵就可以了；

2.用初等变换求解方程组只能用初等行变换.

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1 \\ 3x_1-6x_2+5x_3-4x_4=2 \\ -2x_1+4x_2-4x_3+3x_4=-1 \end{cases}$

解

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{记做}}{=\!=} \boldsymbol{H}_1$$

$\therefore \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = 2 < 4 \Rightarrow$ 方程组有无穷多解

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{3}{2} \\ x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} + 2x_2 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_2 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$ （k_1, k_2为任意常数）

则有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} + 2k_1 - \dfrac{1}{2}k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（k_1, k_2为任意常数）

$$H_1=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times(-2)]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\| \quad H_2$$

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=2+2x_2-x_3\\ x_4=1+2x_3\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}x_2=k_1\\ x_3=k_2\end{cases}$$

（k_1,k_2为任意常数）

则有

$$\begin{cases}x_1=2+2k_1-k_2\\ x_2=k_1\\ x_3=k_2\\ x_4=1+2k_2\end{cases}$$

（k_1,k_2为任意常数）

$$H_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = H_3$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$ （k_1, k_2为任意常数）

则有

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{4}k_2 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

（k_1, k_2为任意常数）

注意：1.三种解彼此等价；

2.每种解都有且只有两个自由未知量.

（2001.5 15分）

例2 当**a,b**为何值时，线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$ 有唯一解，无解，无穷多解？在有无穷多解时，求通解.

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=b(1-a)$

(1) $D\neq 0$即 $b\neq 0$且$a\neq 1$时，方程组有唯一解；

(2) $b=0$时，

$$\hat{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$,$\operatorname{rank} \hat{A} = 3$ ，方程组无解.

(3) $a = 1$ 时，

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array}\right)$$

所以有

① $1-2b \neq 0$ 即 $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$,$\operatorname{rank} \hat{A} = 3$,方程组无解；

② $1-2b=0$即 $b=\dfrac{1}{2}$时，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}}=2<3$，方程组有无穷多解；

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

则通解为 $\begin{cases} x_1 = 2 - k \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \quad k \end{cases}$ （k为任意常数）

注意：在讨论带参数的线性方程组时，若方程个数与未知量个数相等，最好先用克拉默法则，即计算系数行列式D，当 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解；当D=0时，再对增广矩阵作初等行变换来继续判断解的情况。

练习：**2004数一 9分**

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

思考题

1. $A_{m\times n}x=b$

(1) $m>n$时，是否一定无解？为什么？

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)$$

(2) $m<n$时，是否一定有解？为什么？

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

2. $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(1) $m>n$时，是否只有零解？为什么？

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $m<n$时，是否一定有非零解？为什么？

$\because \quad \operatorname{rank}\boldsymbol{A}\le m<n$ 所以一定有非零解.