编号：__________

西北工业大学考试试题（A 卷）答案

2021 －2022 学年　春 学期

开课学院______________________课程__________离散数学__________学时__64__

考试日期__2022.06.21__　　考试时间__2__小时　　考试形式（闭）（A）卷

题号	一	二	三	四	五	六	平时	期末	总分
得分									

考生班级		学　号		姓　名	

一、 选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 设论域为整数集，下列公式中值为真的是（ C ）

2. 设$A=\{a,\{a\}\}$, 它的幂集 P(A) 为（C　）

3. 集合 A= {1，2，3，… ,10} 上的关系 R= $\{<x,y> \mid x+y=10$ 且 $x,y\in A\}$,则 R 的性质为（ B　）

4. 设R_1和R_2是集合 A 上的二元关系，$\circ$是复合运算，则下列命题为真的是（ A　）

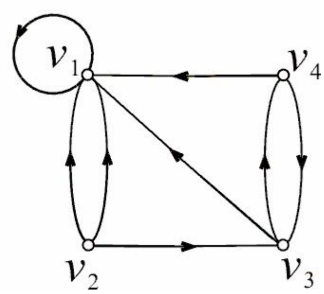
A. 若R_1和R_2是自反的，则$R_1\circ R_2$也是自反的

5. 关于关系闭包运算，下列命题中正确的是（ C ）。

A. $st(R)\supseteq ts(R)$　B. $st(R)=ts(R)$　C. $st(R)\subseteq ts(R)$　D. $st(R)\supset ts(R)$

6. 下列叙述中正确的是（ C ）

7. 右图是（　B　　）



B. 单向连通的

8. 下列运算中，关于整数集不能构成半群的是（A　）

A. $a * b = |a - b|$　　　　B. $a * b = b$

C. $a * b = \max(a, b)$　　　　D. $a * b = 2ab$

9. 下列代数系统＜ S, ∗ ＞中，哪个不是群？（B ）

B. S 为有理数集，∗为算术乘法

10. 下面偏序中能构成格的是（ C 　 ）

二、简答与演算题（四小题共 20 分）

1. （3 分）设 A={a, b, c, d, e, f}, A 上的划分 C={{a, b, c}, {d, e}, {f}}，求出由 C 所诱导出的 A 上的等价关系 R 的集合表达式。

答案：**R={<a,b>, <b,a>, <a,c>, <c,a>, <b,c>, <c,b>, <d,e>, <e,d>}∪I_A**

2. （6 分）**试给出有限集和无限集的一种定义，并以此说明{0，1，2，3…}和{0，2，4，6，…}哪个集合的元素多？为什么？**

答案：集合 N_n={0,1,2, … ,n-1} 与 A 之间如果存在双射函数 $f: N_n \to A$，则称 A 是有限的(具有基数 n)；如果 A 不是有限的则称其为无限的。

或者：如果存在双射函数 $f: S \to S$ 使得 $f(S) \subset S$, 则称 S 是无限的，否则是有限的。

两个集合都是无限集，是等势的，即元素一样多，都是阿列夫零

3. **（3 分）请简述无向树的概念及其三个显著特征。**

答案：连通而无回路的无向图是无向树。它的三个显著特征：G 连通，无回路且 $m=n-1$（若答出 G 是最小连通图；G 是最大无回路图；G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.或 G 中至少有两片树叶都给分）。

4.（8 分） 请分别写出格的两个定义（偏序格，代数格）。并简要说明二者是等价的。

答案：设 G 是非空集合, $+$和$\circ$是 G 上的两个二元运算, 如果它们满足交换律, 结合律和吸收率, 即$\forall a, b, c \in G$有

(1)交换律：$a+b=b+a$, $a\circ b=b\circ a$

(2)结合律：$(a+b)+c= a+(b+c)$, $(a\circ b)\circ c= a\circ(b\circ c)$

(3)吸收律：$a+(a\circ b) = a$, $a\circ(a+b) = a$

则称代数系统$\langle G, +, \circ\rangle$是格, 也称代数格。

设$\langle P, \leqslant\rangle$是偏序集, 如果 P 的任意子集均有上确界(最小上界)和下确界(最大下界)，则称 P 关于偏序$\leqslant$为偏序格。

从代数的观点看:

在偏序集中可以将求上确界和下确界定义为两个二元运算

$x\wedge y=\mathrm{glb}(x, y)$ $\{x, y\}$的下确界运算

$x\vee y=\mathrm{lub}(x, y)$ $\{x, y\}$的上确界运算

构成代数系统$\langle S, \wedge, \vee\rangle$, 运算均满足交换律, 结合律和吸收律

从偏序格的观点看:

设有代数格$\langle L, +, \circ\rangle$, 在其上定义关系$\leqslant$如下:

$x\leqslant y$: $x+y= x$, $x\circ y= y$

(1) 该关系有 $x\leqslant x$, 即$\leqslant$是自反的;

(2) 设$\forall x\forall y$, 若 $x\leqslant y$, 且 $y\leqslant x$ 成立, 则有 $x=y$. 因此, $\leqslant$是反对称的;

(3) 如果 $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, 则有 $x \preccurlyeq z$, 故 $\preccurlyeq$ 是传递的。

因此, $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集. 且 $\forall x, y \in L$, 都存在下确界 $x+y$ 与上确界 $x \circ y$, 所以 $\langle L, +, \circ \rangle$ 是偏序格。

三、数理逻辑部分（18 分）

1.（5 分）证明 苏格拉底三段论：所有的人总是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

证明 设 $M(x)$：x 是人，$D(x)$：x 是要死的，a：苏格拉底。苏格拉底论证符号化为：$\forall x(M(x) \to D(x))$ 且 $M(a)$，则 $D(a)$。证明如下：

1	$\forall x(M(x) \to D(x))$	P
2	$M(a) \to D(a)$	T, 1, US
3	$M(a)$	P
4	$D(a)$	T, 2, 3, I_1

2.（4 分）求公式 $(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$ 的主析取范式和主合取范式。原式

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg Q \wedge \neg R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$$
$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$
$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

所以主析取范式为：

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

主合取范式为：

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$
$$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

3.（9 分）用反证法证明 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \exists x Q(x)$

① $\neg(\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$	P(假设前提)
② $\neg\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$	T，①，E_{10}
③ $\neg\forall xP(x)$	T，②，I_2
④ $\exists x\neg P(x)$	T，③，Q_4
⑤ $\neg\exists xQ(x)$	T，②，I_2
⑥ $\forall x\neg Q(x)$	T，⑤，Q_3
⑦ $\neg P(y)$	T，④，ES
⑧ $\neg Q(y)$	T，⑥，US
⑨ $\neg P(y)\wedge\neg Q(y)$	T，⑦，⑧，合取式
⑩ $\neg(P(y)\vee Q(y))$	T，⑨，E_{10}
⑪ $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	P
⑫ $P(y)\vee Q(y)$	T，⑪，US
⑬ $\neg(P(y)\vee Q(y))\wedge(P(y)\vee Q(y))$	T，⑩，⑫，合取式，矛盾。

四、集合论部分（共 12 分）

1. （6 分）设 R 为实数集合，f: R→R，$f(x)=x^3-x+2$，g: R→R，$g(x)=x-5$。求 $f\circ g$， $g\circ f$，如果 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数。

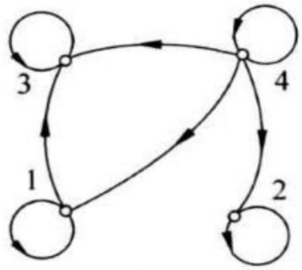
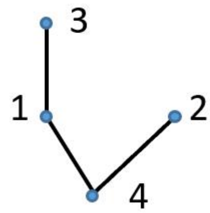
1. 答案：$f\circ g(x)=x^3-x-3$,

$g\circ f(x)=(x-5)^3-(x-5)-3$,

f:R→R 不是双射的，不存在反函数。

g:R→R 是双射的，它的反函数是 g^{-1}:R→R, $g^{-1}(x)=x+5$。

2.（6 分）在集合 X={1,2,3,4}上有偏序关系 R，其关系图如下，写出关系 R 的集合表示，并画出其哈斯图，求集合 X 的极大元、极小元、最大元和最小元。

R={<4,1>, <4,2>, <4,3>, <1,3>}∪I_X,

最小元为 4，无最大元，极大元为 3 和 2，极小元为 4。

哈斯图如上图右。

五、代数结构部分（共 18 分，每小题 9 分）

1．设两个代数系统 $V_1=(Z^+,+)$，$V_2=(Z_n,\oplus_n)$。其中 Z^+为非负整数集，+为普通加法；$Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，$\oplus_n$为模 n 加法，即：$\forall x, y\in Z_n$，$x\oplus_n y=(x+y)\bmod n$，mod 为取模运算。令

$$f: Z^+\to Z_n,\ f(x)=(x)\bmod n$$

试证明：V_1和 V_2满同态。

答案：只需证明 $f(x+y)=f(x)\oplus_n f(y)$且 f 为满射函数即可。

1）设 $x=k_1n+r_1, y=k_2n+r_2$，则 $x+y=(k_1+k_2)n+(r_1+r_2)$

所以 $f(x+y)=(x+y)\bmod n=((k_1+k_2)n+(r_1+r_2))\bmod n=(r_1+r_2)\bmod n$

2）$f(x)\oplus_n f(y)=((x)\bmod n+(y)\bmod n)\bmod n$

而 $(x)\bmod n=r_1, (y)\bmod n=r_2$，所以 $f(x)\oplus_n f(y)=(r_1+r_2)\bmod n$

综上，有 $f(x+y)=f(x)\oplus_n f(y)$。

因为 **dom** f = $\mathbf{Z}^+$, $f(x)=(x)\mathbf{mod}\ n$ 可以取得 $\mathbf{Z}_n$ 中每一个值，所以 **ran** $f=\mathbf{Z}_n$，f 是满射函数。得证。

评分标准：证得关系 $f(x+y)=f(x)\oplus_n f(y)$ 得 6 分；说明 f 是满射得 3 分。

2. 设（G, $*$）是群，$a\in G$，若 H 表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即

$$H=\{x|x\in G\wedge x*a=a*x\}$$

证明 H 是 G 的子群。

答案：

1）$e\in H$，H 是 G 的非空子集。

2）$\forall x,y\in H$，因为

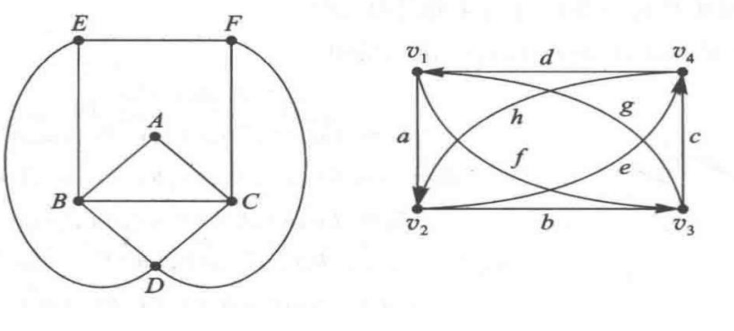
$a*y=y*a\Rightarrow a^{-1}*(a*y)*a^{-1}=a^{-1}*(y*a)*a^{-1}\Rightarrow y*a^{-1}=a^{-1}*y$，所以

$(x*y^{-1})*a=x*(y^{-1}*a)=x*(a^{-1}*y)^{-1}=x*(y*a^{-1})^{-1}=x*(a*y^{-1})=(x*a)*y^{-1}=a*(x*y^{-1})$

故 $x*y^{-1}\in H$，根据子群判定定理，H 是 G 的子群。得证。

六、图论部分（共 12 分）

1. （6 分）请给出一个平面无向图能够一笔画的充要条件，并说明下面的图是否能一笔画完？



答案：判断一个图形能否一笔画成，实质上就是判断图形是否存在欧拉路径和欧拉回路的问题。无向连通图 **G** 具有一条欧拉路径当且仅当 **G** 具有零个或两个奇数次数的顶点。图 **a** 能一笔画成

一个有向连通图具有欧拉回路，当且仅当它的每个顶点的引入次数等于引出次数；一个有向连通图具有欧拉路径，当且仅当它的每个顶点的引入次数等于引出次数，可能有两个顶点是例外，其中一个顶点的引入次数比它的引出次数大 **1**，另一个顶点的引入次数比它的引出次数小 **1**。所以图 **b** 可以一笔化画成。

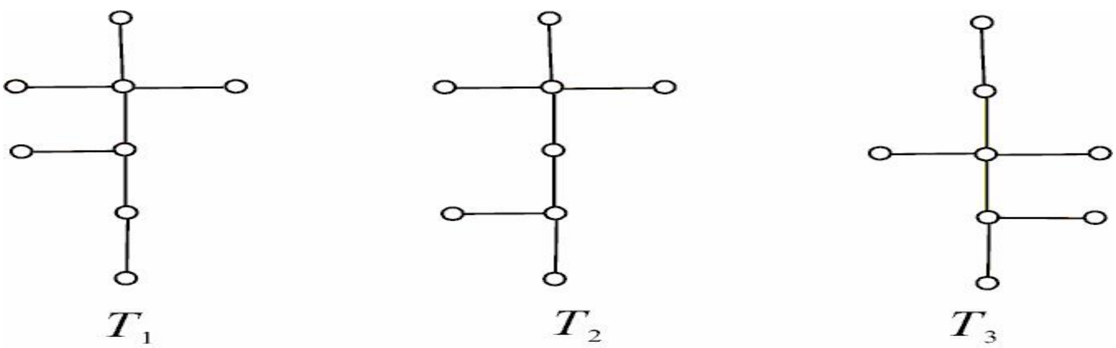
2. (6 分)已知无向树 T 有 5 片树叶，2 度与 3 度顶点各 1 个，其余顶点的度数均为 4，求 T 的顶点数 n，并画出满足要求的一颗无向树。

答案：设 T 的顶点数为 n, 则边数为 $n-1$，4 度顶点的个数为 $n-7$.

由握手定理得 $2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$

解出 $n = 8$，4 度顶点为 1 个.

T 的度数列为 **1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4**，共有 **3** 棵非同构的无向树。



上述三个图只要画出一个即可。