2020-2021 学年高等数学（下）期中试题解答

2021-5-9

一、填空题(每小题 4 分，共 40 分)

1．$yx^{y-1}\,\mathrm{d}\,x+\ln x\cdot x^{y}\,\mathrm{d}\,y$；　　2．$f_1', f_{12}''\cdot y$；　　3．$\mathbf{0}$；　　4．$(1,1,2)$；

5．$\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$ 或 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$；　6．$(2,4,6)$；　　7．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho$；

8．$\dfrac{4}{5}\pi$；　　9．$6a$；　　10．$\dfrac{3\pi}{2}$．

二、选择题(每小题 4 分，共 40 分)　BCBAD　CADBC

三、解　由$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ 4z=x^2+y^2 \end{cases}$，解得 $x^2+y^2=4$．　　　　（2 分）

所求体积　$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}}\mathrm{d}z$　　　　（6 分）

$$=2\pi\int_0^2\left(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4}\right)\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)\qquad (7\text{ 分})$$

四、解　设 D 为 C 所围平面区域，　C 为 D 的正向边界曲线，由格林公式，

$$I=\oint_C\left(x^2+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}\,x+\left(2y+x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}\,y=\iint_D(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\ \ (*)\qquad (4\text{ 分})$$

要使 I 达到最大，D 应包含所有使被积函数 $f(x,y)=1-x^2-y^2$ 大于零的点，而不包含使 f 小于零的点. 因此应取 C：$x^2+y^2=1$（逆时针方向）．　　　　(7 分)

五、解　由$\begin{cases} z_x=3x^2-3y=0 & (1) \\ z_y=3y^2-3x=0 & (2) \end{cases}$，（1）式—（2）式得：$(x^2-y^2)+(x-y)=0$，

即 $(x-y)(x+y+1)=0$．

因 $x+y+1\neq 0$（否则 $z_x=3(x^2+x+1)>0$），有 $x=y$．入(1)式得：$x=0$，$x=1$，

得驻点 $(0,0)$，$(1,1)$．　　　　（3 分）

$A=z_{xx}=6x$，$B=z_{xy}=-3$，$C=z_{yy}=6y$，

对于 $(0,0)$，$\Delta=AC-B^2=-9<0$，$z(0,0)$ 非极值；　　　　（5 分）

对于 $(1,1)$，$\Delta=AC-B^2=27>0$，$A=6>0$，$z(1,1)=-1$ 为极小值.　　　　（6 分）

六、解　解方程组$\begin{cases} z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}, \\ 2az=x^2+y^2 \end{cases}$得两曲面的交线：$\begin{cases} x^2+y^2=2a^2, \\ z=a. \end{cases}$故$\Omega$在$xOy$面上的投影域为：$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2a^2\}.$（3 分）

将所给曲面分成两部分:$S=S_1+S_2$，对于曲面$S_1: z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$，

$z_x=-\dfrac{x}{z},\ z_y=-\dfrac{y}{z}$，其面积：

$$A_1=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{3}a\rho}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho \qquad (6\text{ 分})$$

$$=-2\sqrt{3}\pi a(3a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}a}=2\sqrt{3}\pi a^2(\sqrt{3}-1) \qquad (7\text{ 分})$$

对于曲面$S_2: z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$，$z_x=\dfrac{x}{a},z_y=\dfrac{y}{a}$，其面积：

$$A_2=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint_D\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3a}(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}a}$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1) \qquad (9\text{ 分})$$

故所求立体表面积$A=A_1+A_2=\dfrac{16}{3}\pi a^2.$（10 分）