中值定理

微分中值定理及导数的其应用

1. 研究函数的性态:

增减， 极值， 凹凸， 拐点， 渐近线， 曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

证明不等式； 研究方程实根等.

4. 补充定理 (见下页)

定理. 设函数 $f(x), g(x)$在 $(a, +\infty)$上具有n 阶导数,

且 (1) $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

(2) $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x) \ (x > a)$

则当 $x > a$ 时 $f(x) > g(x)$.

证: 令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$\varphi^{(k)}(a) = 0 \ (k = 0, 1, \cdots, n-1); \quad \varphi^{(n)}(x) > 0 \ (x > a)$$

利用$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处的 n 一1 阶泰勒公式得

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n > 0 \quad (a < \xi < x)$$

因此 $x > a$ 时 $f(x) > g(x)$. ■

例2. 填空题

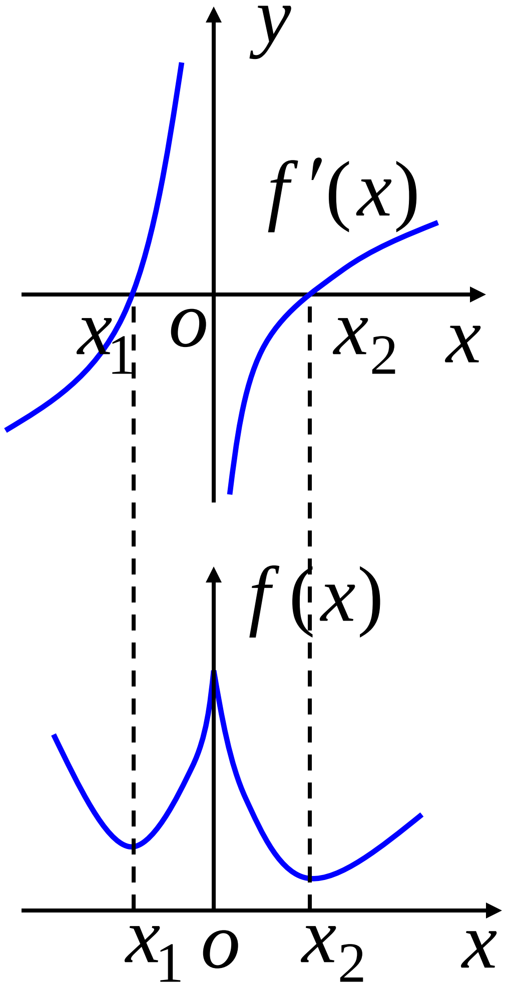
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导数图形如图所示，则 $f(x)$ 的

单调减区间为 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$；

单调增区间为 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$；

极小值点为 $\underline{x_1, \ x_2}$；

极大值点为 $\underline{x = 0}$.



提示：根据 $f(x)$ 的连续性及导函数的正负作 $f(x)$ 的示意图.

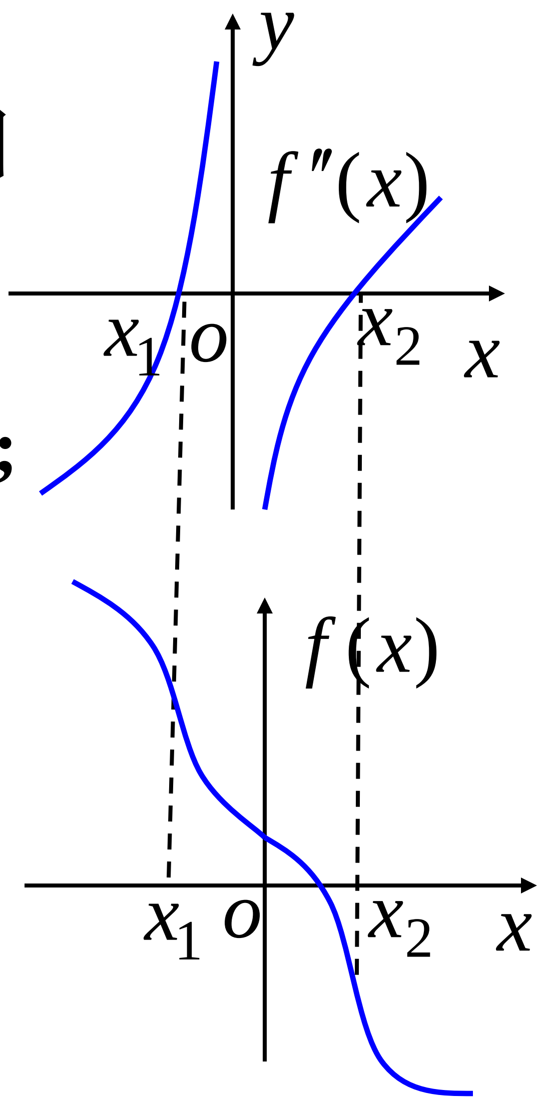
目录 上页 下页 返回

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$ 的图形如图所示，则函数 $f(x)$ 的图形在区间 $\underline{(x_1,0),(x_2,+\infty)}$ 上是上凹弧；

在区间 $\underline{(-\infty,x_1),(0,x_2)}$ 上是上凸弧；

拐点为

$\underline{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(0,f(0))}$.



提示：根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 $f(x)$ 的示意图.

例3. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 **[x , x +1]**上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\quad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例4. 设 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$,

证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证: 设 $\varphi(x)=e^x f(x)$

则 $\varphi'(x)=e^x[\,f(x)+f'(x)\,]>0$

故 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $e^x>0$, 因此 $f(x)$ 也至多只有一个零点 .

思考: 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其它不变时, 如何设辅助函数?

$\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

例5. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

解: 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\ge 1)$, 用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

极大值

令 $f'(x)=0$, 得 $x=e$,

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=e$, 因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值 .

又因 $2<e<3$, 且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项 .

例6. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0).$

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x) = 1+\ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加，从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即
$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \ (0<x<1)$ 时，如何设辅助函数更好？

提示: $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

例7. 设 $f(0)=0$，且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

（辅助函数的设计，将 b 改写成 x.）

证： 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$，则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$ 时，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$，得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立．

例8. 证明:当$0<x<1$时, $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证: **只要证** $(1-x)e^{2x}-1-x<0 \quad (0<x<1)$

设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x,$ 则 $f(0)=0$

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,$ $f'(0)=0$

$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$

利用一阶泰勒公式, 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=-2\xi e^{2\xi}x^2<0 \quad (0<\xi<x<1)$$

故原不等式成立. ■

目录 上页 下页 返回

例9. 证明当 $x > 0$ 时, $(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

证: 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1), \quad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, \quad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

法1 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒公式, 得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3 \geq 0 \quad (x>0, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 1 之间})$$

故所证不等式成立 .

法2 列表判别:

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow\ +$	2	$\nearrow\ +$
$f'(x)$	$\nearrow\ -$	0	$\nearrow\ +$
$f(x)$	$\searrow\ +$	0	$\nearrow\ +$

故当$x>0$时 $f(x)\geq 0$, 即 $(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$.

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2 \qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1, \qquad \boxed{f''(1)=2>0}$$

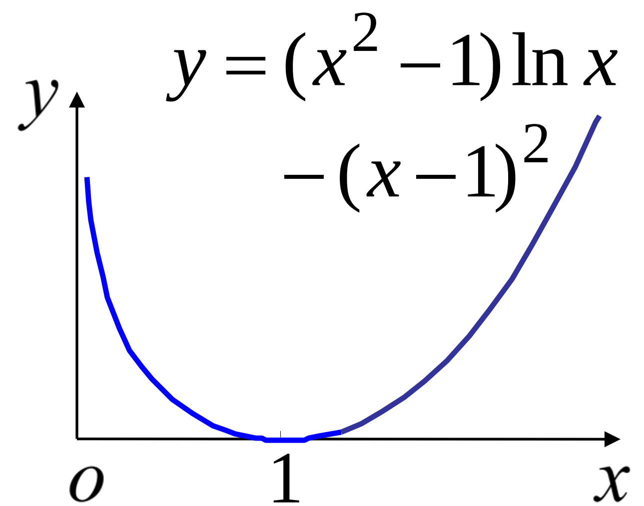
法3　利用极值第二判别法.

易知 $x=1$ 是 $f'(x)=0$ 的唯一根，

且 $f''(1)>0$, $\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极小点，**故** $f(1)=0$ **也是最小值，**

因此当 $x>0$ **时** $f(x)\geq 0$, **即**

$$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$$

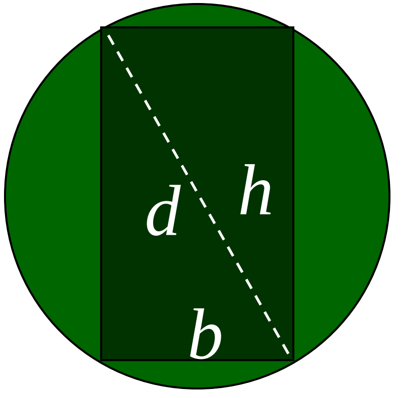


例10. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

$$w = \tfrac{1}{6} b h^2 = \tfrac{1}{6} b (d^2 - b^2), \qquad b \in (0, d)$$

令 $\quad w' = \tfrac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$



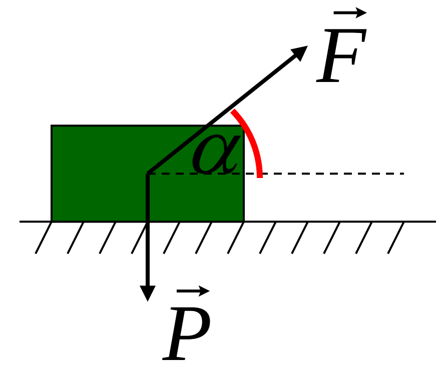
得 $\quad b = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, d$

从而有 $\quad h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, d$

即 $\quad d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$

由实际意义可知，所求最值存在，驻点只一个，故所求结果就是最好的选择 .

例11. 设有质量为 5 kg 的物体置于水平面上，受力 $\vec{F}$ 作用开始移动，设摩擦系数 $\mu = 0.25$，问力 $\vec{F}$ 与水平面夹角 α 为多少时才可使力 $\vec{F}$ 的大小最小？



解： 克服摩擦的水平分力 $F_x = F\cos\alpha$

正压力 $\quad P - F_y = 5g - F\sin\alpha$

$$\therefore \quad F\cos\alpha = \mu(5g - F\sin\alpha) \quad \text{其中 } F = |\vec{F}|$$

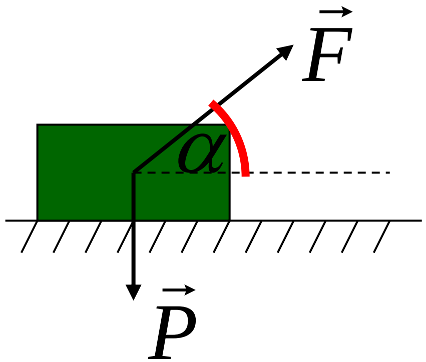
即
$$F = \frac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

令
$$\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题 .

解: ……

即 $F = \dfrac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$



令 $\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

则问题转化为求$\varphi(\alpha)$的最大值问题.

$$\varphi'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha$$

$$\varphi''(\alpha) = -\cos\alpha - \mu\sin\alpha$$

令 $\varphi'(\alpha) = 0$, 解得

$$\alpha = \arctan\mu = \arctan 0.25 = 14^\circ 2'$$

而 $\varphi''(\alpha) < 0$, $\therefore \alpha = 14^\circ 2'$ 时 $\varphi(\alpha)$ 取最大值,

因而 F 取最小值.

例12. 选择题

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 $\boldsymbol{a}$ 处(**B**).

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值； (C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

提示: 利用极限的保号性 +极值定义.

2. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$, 则（ D ）

(A) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(B) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点;

(C) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 ;

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 ;

提示：方法1：利用极限的保号性+极值第一充分条件 .

方法2：利用极限的保号性+泰勒展开式+极值定义 .

方法1：利用极限的保号性+极值第一充分条件

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1,$$ 由保号性，有

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,\ x\in \overset{0}{U}(0,\delta)$$

$$\therefore\ f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\uparrow \Rightarrow \begin{cases} f'(x)<f'(0)=0 & -\delta<x<0 \\ f'(x)>f'(0)=0 & 0<x<\delta \end{cases}$$

$(0,f(0))$不是拐点 $\Rightarrow f(0)$是$f(x)$的极小值

方法2：利用极限的保号性+泰勒展开式+极值定义

$$f(x)=f(0)+f'(x)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=f(0)+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \qquad \xi\in(0,x)$$

$$>f(0)$$

3. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 (**A**)

(*A*) 取得极大值 ;

(*B*) 取得极小值 ;

(*C*) 在某邻域内单调增加 ;

(*D*) 在某邻域内单调减少 .

提示: 利用极值的第二充分条件

将 $f(x)$ 代入方程, 令 $x = x_0$, 得

$$f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$

例13 求 $f(x)=\begin{cases} x^{2x} & x>0 \\ x+2 & x\le 0 \end{cases}$ 的极值。

提示： 利用极值的第一充分条件

解： $f'(x)=\begin{cases} 2x^{2x}(\ln x+1) & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$

在x=0处,

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x\ln x}-2}{x}=-\infty$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2-2}{x}=1$$

$\therefore\quad f(x)$在$x=0$点不可导。

令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{e}$

故，极值可疑点：

$$x=0,\ x=\frac{1}{e}$$

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1/e)$	$1/e$	$(1/e,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$		2（极大值）		$e^{-2/e}$（极小值）	

备用题 1. 试问 a 为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时取得极值，求出该极值，并指出它是极大还是极小.

解: $\because\quad f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，由题意应有

$$f'(\tfrac{2}{3}\pi)=a\cos(\tfrac{2}{3}\pi)+\cos 3(\tfrac{2}{3}\pi)=0$$

$\therefore\quad a=2$

又 $\because\quad f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x,\qquad f''(\frac{2}{3}\pi)<0$

$\therefore\quad f(x)$ 取得极大值为 $f(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{3}$

2. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$$

若 $f(x)$在某一点 $x_0 \neq 0$ 处有极值,则它是极大值还是极小值?为什么?

提示：利用极值的第二充分条件

解 由已知，在$x_0 \neq 0$处，有$f'(x_0) = 0$

$\therefore \quad x_0 f''(x_0) = 1 - e^{-x_0}$， 即 $f''(x_0) = \dfrac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$

当 $x_0 > 0$, $e^{-x_0} < 1$, $f''(x_0) > 0$;

当 $x_0 < 0$, $e^{-x_0} > 1$, $f''(x_0) > 0$;

总之，$x_0 \neq 0$时，$f''(x_0) > 0$. $\therefore f(x_0)$是极小值。