一. 填空题

2. 设函数 $f(x)=(\frac{x-1}{1+x})^{x}$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)=$ ________.

分析：极限类型1^{∞}，利用第二个重要极限。

解：因为 $f(x+1)=\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x+1}$

所以
$$\lim_{x\to\infty} f(x+1)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x+2}-1\right)^{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{(-\frac{x+2}{2})\cdot\frac{-2}{x+2}\cdot(x+1)}=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+2}}=e^{-2}$$

3. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______，是第______类间断点.

分析：函数 $f(x)$ 是以数列极限给出的，故先通过求数列极限求出 $f(x)$，然后再判断间断点类型。

解：当 $x=0$ 时， $f(x)=0$

当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{nx^2+1}=x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{x}$

所以
$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$$

考察分段点 $x=0$，因为
$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}=\infty$$

所以： $x=0$ 为 $f(x)$ 的**第二类（无穷）间断点**。

5. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2,\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_____.

分析：由等价无穷小定义及正确运用极限运算法则即可，分子有理化

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}$$
$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x})$$
$$=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\right]=\frac{3}{4k}=1,$$

所以 $k=\frac{3}{4}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

分析： 极限类型 $\dfrac{0}{0}$，采用洛必达法则，注意第二次使用洛必达法则之前先求出非零因式的极限。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)\cos x}{3x^2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\cos x+(1+x^2)\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}.$

10. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(0)=2$ 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$________.

分析： 由 $f(x)$ 二阶可导知，$f'(x)$ 连续，且只能洛必达 1 次。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1\overset{\text{洛必达}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1\Rightarrow f'(0)=1$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=1$

二. 选择题

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+x}{a(\sqrt{n})^3+bn+c}=1$，则（　　）.

A. $a=1,b=1$；　B. $a=-1,b=1$；　C. $a=0,b=1$；　D. $a=1,b=0$.

分析： 等式左边的极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定式极限类型，用第一章的结论

结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}n=m\\ 0, & \text{当}n>m\\ \infty, & \text{当}n<m\end{cases}$$

$(a_0b_0\neq 0, m, n$ 为非负常数)

可知，要使得此极限为非 0 常数，则分子与分母的最高次幂必须相同，故 $a=0,b=1$。

等式左边极限中的 x 是干扰项，在求极限过程中看做常数。

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）.

A. $f(0)=0$, 且 $f'_+(0)$ 存在；　　B. $f(0)=1$, 且 $f'_+(0)$ 存在；

C. $f(0)=0$, 且 $f'_-(0)$ 存在；　　D. $f(0)=1$, 且 $f'_-(0)$ 存在.

解： 因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}h^2=0$，所以

$$\lim_{h\to 0}f(h^2)=f(\lim_{h\to 0}h^2)=f(0)=0$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)-0}{h^2-0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}$

$$\xlongequal{\text{令}t=h^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0)=1$$

所以选 A。

8\. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{2^x}\sin x=$（　　）.

A. -1；　　B. 0；　　C. 1；　　D. ∞.

分析：此题求极限函数 $\dfrac{x^3-x}{2^x}\cdot\sin x$ 中的 $\dfrac{x^3-x}{2^x}$ 与 $\sin x$ 相关性不大，猜想此题是用无穷小与有界量的乘积还是无穷小来求极限，故可以先算下极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{2^x}$，看此极限是否为 0。

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{2^x}\quad\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\xlongequal{\text{连续用3次洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{(\ln 2)^2 2^x}=0$$

$$|\sin x|\le 1$$

所以：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{2^x}\cdot\sin x=0$，选 B.

10\. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'_+(a)>0, f'_-(b)<0$，则以下结论中错误的是（　　）.

A. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$；　　B. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f'(x_0)=0$；

C. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(a)$；　　D. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(b)$.

解： A. ×，例如 $f(x)=-x^2-1, x\in[-1,1]$ 满足 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f'_+(-1)>0, f'_-(1)<0$，但是 $f(x)<0, x\in[-1,1]$。

B. √ 由已知 $f'(x)$ 连续，$f'_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$，根据闭区间上连续函数的零点定理，可知存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$。

C. √ 因为 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以由极限的局部保号性可知，至少存在一点 $x_0\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$，有

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0\Longrightarrow f(x_0)>f(a)\ (x_0-a>0)。$$

D. √ 因为 $f'_+(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，所以由极限的局部保号性可知，至少存在一点 $x_0\in(b-\delta,b)\subset(a,b)$，有

$$\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}<0\Longrightarrow f(x_0)>f(b)\ (x_0-b<0)。$$