§ 3.2 矩阵的初等变换

一、初等变换

定义3.4 对矩阵进行的如下三种变换

1. 对调两行(列)； 对调 $r_i \leftrightarrow r_j$, $c_i \leftrightarrow c_j$

2. 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行(列)的所有元素；

   数乘 $r_i \times k(kr_i), c_j \times k(kc_j)$

3. 某一行(列)的所有元素的***k***倍加到另一行(列)对应元素上； 倍加 $r_i + kr_j$, $c_i + kc_j$

称为矩阵的**初等行(列)变换**.

初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经过初等变换得到 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$, 记做 $\boldsymbol{A}_{m\times n} \to \boldsymbol{B}_{m\times n}$.

例1

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{记做}}{=\!=}B$$

行阶梯型

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&-3/2&5/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1/2&1/4\\0&1&-3/2&5/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{记做}}{=\!=}H$$

行最简型

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3+\frac{3}{2}c_2 \\ c_4-\frac{5}{4}c_2}]{\substack{c_3-\frac{1}{2}c_1 \\ c_4-\frac{1}{4}c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}_{2\times 2} \\ \boldsymbol{O}_{1\times 2} & \boldsymbol{O}_{1\times 2} \end{pmatrix} \overset{\text{记做}}{=\!=} \boldsymbol{\Lambda}$$ 等价标准型

命题 每一个初等变换都有逆变换，且其逆变换是同等类型的初等变换。

例如 我们以行变换为例.

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是 $r_i \leftrightarrow r_j$；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \longrightarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

2. $r_i \times k$ 的逆变换是 $r_i \times \dfrac{1}{k}$；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i \times \frac{1}{k}}{\overset{r_i \times k}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3. $r_i + kr_j$的逆变换是 $r_i + (-k)r_j$；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i + (-k)r_j}{\overset{r_i + kr_j}{\rightleftarrows}} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \longrightarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

二、等价矩阵

定义3.5 如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与B等价. 记做$A \cong B$或$A \to B$.

在例1中， $A \cong B \cong H \cong \Lambda$

- 等价矩阵满足等价三公理

(1) 反身性：$A \cong A$

(2) 对称性：若$A \cong B$则$B \cong A$;

(3) 传递性：若$A \cong B$且$B \cong C$，则$A \cong C$.

定理3.1 $A \cong B \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

分析 只要证明每种初等变换都不改变矩阵的秩就可以了。

(1) 显然前两种情况都不改变矩阵的秩；

(2) 只证明第三种初等变换且只证明行变换.

设 $A_{m\times n} \xrightarrow{r_i + kr_j} B_{m\times n}$，仅改变第$i$行

当 $\operatorname{rank} A = r < \min\{m, n\}$时（则$A$中不为0子式的最高阶数为$r$），知$B$必存在$r+1$阶子式，记做$D$

- D中不含B的第i行，则D是A的$r+1$阶子式 $\Rightarrow D = 0$
- D中同时含B的第i行和第j行，则D是A中对应子式在A中的第j行的k倍加到第i行后的$r+1$阶子式，值不变 $\Rightarrow D = 0$
- D含B的第i行但不含第j行，则D的该行形如 $a_{il} + ka_{jl}$ $(l = 1,2,\cdots,r+1)$，则D有分解式 $D = \overline{D} + k\tilde{D}$，其中 $\overline{D}$ 和 $\tilde{D}$是A中的$r+1$阶子式 $\Rightarrow D = 0$

所以$\boldsymbol{B}$的所有r+1阶子式都为0 $\Rightarrow \mathrm{rank}\,\boldsymbol{B} \le r = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$

反之，对$\boldsymbol{B}$作如下逆变换 $\boldsymbol{B}_{m\times n} \xrightarrow{r_i+(-k)r_j} \boldsymbol{A}_{m\times n}$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \le \mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}$$

所以得 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}$

- 初等变换的一个重要应用——

用初等行(列)变换把矩阵化为最简型，求秩.

定理3.2 若 $m\times n$ 矩阵A的秩为$r(r>0)$，则A可经过**初等行变换**化为如下形式的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_{1i_1} & * & \cdots & * & b_{1i_2} & * & \cdots & * & b_{1i_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2i_2} & * & \cdots & * & b_{2i_r} & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{ri_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

其中 $b_{1i_1},b_{2i_2},\cdots,b_{ri_r}$ 都不为0.

称B为**行阶梯形矩阵**.

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_{1i_1} & * & \cdots & * & b_{1i_2} & * & \cdots & * & b_{1i_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2i_2} & * & \cdots & * & b_{2i_r} & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{ri_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

规律 （1）只经过行变换；

（2）下面的行总比上面的行非零元素少，且都在后面；

（3）每一竖线右边的数不为0；

（4）每一阶对应一行，有多少阶对应多少非零行，即秩；

（5）不唯一。

进一步可化为如下的**行最简形**

$$
H=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

规律 (1) 只经过行变换；

(2) 每一阶对应非零行，竖线右边为1，1所在列其余元素为0；

(3) 唯一.

注意：$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{H}$

同理 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\boldsymbol{B}$（列阶梯形）$\xrightarrow{\text{初等列变换}}\boldsymbol{H}$（列最简形）

例2 用初等列变换化 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$ 为列阶梯形和列最简形。

解

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}1&3&0&2\\-1&1&2&-1\\3&1&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-2c_1]{c_2-3c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4&2&1\\3&-8&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_4-\frac{1}{4}c_2]{c_3-\frac{1}{2}c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4&0&0\\3&-8&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow \text{列阶梯形}$$

$$\xrightarrow{c_2\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\3&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&-2&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow \text{列最简形}$$

定理3.3 秩为r的 $m\times n$矩阵A，经过有限次初等变换，总可化为如下等价标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

即有

$$A \cong \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

推论1 设A是n阶方阵，A满秩$\Leftrightarrow A \cong E_n$

证 方阵A满秩$\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow$等价标准形为$E_n$

推论2 两同型矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 它们的秩相同

充要条件

证 设A的等价标准形为 $\boldsymbol{E}_A$, $\boldsymbol{B}$的等价标准形为$\boldsymbol{E}_B$

$$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_A \cong \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{E}_B \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} \boldsymbol{E}_A$$