第三节

任意项级数的审敛法

- 一、交错级数及其审敛法
- 二、绝对收敛与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

1. 定义 交错级数：

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots \ (u_n > 0)$$

定理11.6 (莱布尼茨审敛法) 若交错级数满足:

1) $u_n \geq u_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $S \leq u_1$,

其余项满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

称满足条件1), 2)的级数为莱布尼茨交错级数

证明思路: $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

证 1° 先证部分和数列S_{2n}单调增加且有上界.

$$\because\quad S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$= S_{2n-2} + \underbrace{(u_{2n-1} - u_{2n})}_{+} \geq S_{2n-2}$$

$0 \leq u_n$ 递减

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore\quad \{S_{2n}\}$单调增加且有上界

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$$

目录 上页 下页 返回 结束

2° 再证 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$

故级数收敛于S, 且 $S \le u_1,$

S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$$

$$\le u_{n+1}.$$

仍为莱布尼茨交错级数

注　1° 莱布尼茨定理中的条件(1)可换成:

$$u_{n+1} \le u_n \quad (n \ge N)$$

2° $\{u_n\}$不单调 $\not\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n > 0)$ 发散;

反例: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$,

$$u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n} > 0$$

虽然 $\{u_n\}$不单调, 事实上,

$$u_{2k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}=\frac{2}{2^{2k}}<u_{2k}=\frac{3}{2^{2k}},\qquad \boxed{u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$$

$$u_{2k}=\frac{3}{2^{2k}}>u_{2k+1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$$ 所以，不单调

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{2^n}]$ 收敛

3° $\{u_n\}$单调增加

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n>0)$ 发散； $(\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0)$

例1 证明交错级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}+\cdots$$

收敛, 并估计其余项 r_n (常数 $p>0$).

需证u_n递减趋于零

解 因 $u_n=\dfrac{1}{n^p}\to 0\ (n\to\infty)$,

且 $u_n=\dfrac{1}{n^p}\ge\dfrac{1}{(n+1)^p}=u_{n+1}$

由莱布尼茨审敛法 知级数收敛,

且 $|r_n|\le u_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^p}$

注 1° 取 $p=1$,得收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

和为 $\ln 2$,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$ (第五节)

绝对值级数

2° $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

问题: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$敛散性的关系?

目录 上页 下页 返回 结束

二、绝对收敛与条件收敛

1. 定义

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

例如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{条件收敛,} & 0 < p \le 1; \\ \text{绝对收敛,} & p > 1. \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 定理 (绝对收敛与收敛的关系)

定理11.7 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则该级数必收敛.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 令$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$

则 $0 \le v_n \le |u_n|$, 由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

而 $u_n = |u_n| - 2v_n$, 由收敛级数的基本性质,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| - \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \text{ 收敛.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 均收敛

注 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\not\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛

例2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n^2}$ 条件收敛、绝对收敛还是发散？

解 $\because\quad |u_n|=\left|\frac{\sin n!}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n!}{n^2}\right|$ 收敛

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n^2}$ 绝对收敛 .

例3 判定交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$的敛散性.

解 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10}$, $v_n=(-1)^n u_n$

1° 绝对收敛性

$$\because \quad |v_n|=u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10}\ge\frac{1}{n+10}\quad (n\ge 1)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$发散, $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$发散

2° 条件收敛性

分析 需判定 $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ 递减、趋于零

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+10} \overset{令}{=} f(n), \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10} \quad (x > 0)$$

$$\because \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+10) - \sqrt{x}}{(x+10)^2} = \frac{10-x}{2\sqrt{x}(x+10)^2}$$

$$< 0 \quad (x > 10)$$

$\therefore$ 当 $x > 10$ 时，$f(x)$ 单调减少，

目录 上页 下页 返回 结束

故当$n>10$时，　$f(n+1)<f(n)$

即　$u_{n+1}<u_n \quad (n>10)$

又$\because$　$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+10} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\dfrac{10}{\sqrt{n}}} = 0$

$\therefore$　由莱尼布茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$ 收敛.

综合$1^{\circ}, 2^{\circ}$可知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$ 条件收敛.

注 1° 用莱布尼茨判别法判断交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$$

是否收敛时，要考察$\{u_n\}$是否单调减少，通常有以下三种方法：

(1) 比值法： $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \overset{?}{\le} 1 \quad (n \ge N)$

(2) 差值法： $u_{n+1} - u_n \overset{?}{\le} 0 \quad (n \ge N)$

(3) 函数法： 由u_n找一个可导函数$f(x)$,

使 $f(n) = u_n$，再考察 $f'(x) < 0$?

2° 关系 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 √

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散 $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散 （一般地）

但特殊地，有

定理11.9 设任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1 \quad (\text{或} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1)$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1,$

可得 $|u_{n+1}| > |u_n| \quad (n > N),$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \neq 0,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,\quad$ 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

说明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散（用比值法或根值法判） $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

例4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散?

解 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-n)^n}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$,

又 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$

比值法判定

$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-n)^n}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 发散,

由定理 11.9 知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$ 发散.

内容小结（任意项级数审敛法）

1. 利用部分和极限： $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \begin{cases} = S \\ \text{不存在} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{收敛} \\ \text{发散} \end{cases}$

2. 利用收敛的必要条件： $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \quad \Rightarrow$ 发散

3. 利用正项级数审敛法

$\begin{cases} \text{比较审敛法} \\ \boxed{\begin{array}{l}\text{比值审敛法} \\ \text{根值审敛法}\end{array}} \end{cases}$

判 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\boxed{\text{判 } \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 发散} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}}$

4. 莱布尼茨判别法： $\Rightarrow$ 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

思考题 由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

猜 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，
(因 u_n^2 较 u_n 小)

解 由 $0 \le u_n \to 0$，得 $u_n < 1 \ (n > N)$，

于是 $0 \le u_n^2 \le u_n$，由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意 反之不成立. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 .

备用题

例1-1 判定下列的敛散性：

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ 收敛

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+\cdots$ 收敛

问题 上述级数的绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 是否收敛？

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散； 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛； 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛.

例2-1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}\ (p>1)$是绝对收敛、条件收敛还是发散 ?

解 因 $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$,

又$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|$收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 绝对收敛 .

例2-2 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

证 (1) 因 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

例2-3 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛 .

证 令 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$,

因 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \big/ e^{n+1}}{n^2 \big/ e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

例3-1 判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解 因 $|u_n| = \left|(-1)^n \sin\frac{x}{n}\right| = \sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}\ (n\to\infty)$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$ 发散，由比较法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，

故原级数非绝对收敛 .

又 $\sin\frac{x}{n} > \sin\frac{x}{n+1}\quad \left(n > \frac{2x}{\pi}\right)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n} = 0$ ，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$（$n > \frac{2x}{\pi}$）是 莱布尼茨交错级数 ，

因此条件收敛 .

例3-2 设$u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ （ C ）.

(A) 发散；　　(B) ~~绝~~对收敛;

(C) 条件收敛；　(D) 收敛性根据条件不能确定.

分析 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$，选 (B) 错；

又 $$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$