问题1. 与导数概念有关的两个值得注意的问题

初学者由于对导数概念理解不深，常常在学习中犯一些错误，下面两个问题都与导数概念有关.

（1）函数在某一点可导能保证它在该点的某一邻域内也可导吗？

答 不能.　例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为无理数}, \\ 0, & x\text{为有理数} \end{cases}$$

仅在$x=0$处可导，在任何$x\neq 0$处均不可导。

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为无理数}, \\ 0, & x\text{为有理数} \end{cases}$$

证 由导数的定义得

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$0\le\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|\le\left|\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}\right|\to 0 \qquad \text{故} f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

又因为在任何$x\neq 0$处，函数不连续，所以也不可导.

此例还表明：

函数在x_0处可导，不仅不能推出在x_0某邻域可导.

也不能推出在x_0充分小邻域内连续。

显示出**函数在一点的导数仅仅反映函数在该点处的性质**.

根据上述结论，在用导数的定义求极限时，应当特别注意题中的已知条件，切不可将仅在一点可导的条件扩大到在该点的邻域内也可导，否则就会出错.

例1　设函数$f(x)$在x_0处可导，为求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}$$

有人采用下述方法

令$x=x_0-bh$，则$x_0+ah=x+(a+b)h$，于是

$$\text{原式}=\lim_{h\to 0}\frac{f[x+(a+b)h]-f(x)}{h}=(a+b)f'(x)$$

$$=(a+b)\lim_{h\to 0}f'(x_0-bh)=(a+b)f'(x_0)$$

试问这个解法对吗？为什么？

（2）函数在某点可导能保证其导函数在该点连续吗？

答 不能。 我们常说，可导一定连续，有的学生误认为：若函数在某点可导，则导函数在该点连续.这是不对的。 即使函数f在x_0的某邻域内可导，其导函数在x_0处也不一定连续。

例如 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

在$x=0$的邻域内可导，但是$f'(x)$在$x=0$处不连续。

$x\neq 0$时，$f'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} \not\longrightarrow f'(0)=0 \quad (x\to 0)$

问题2. 有关左右导数的两个问题

（1）如果$f(x)$在x_0处的左右导数都存在，

那么$f(x)$在x_0处连续吗？反之如何？

答： 若f在x_0处的左右导数都存在，则f在x_0处连续

左导数存在 $\Rightarrow$ 左连续

右导数存在 $\Rightarrow$ 右连续

左连续、右连续 $\Rightarrow$ 连续

反之不一定成立。 例如 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

在$x=0$处连续，但左右导数都不存在。

（2） 符号$f_+'(x_0)$与$f'(x_0^+)(f'(x_0+0))$是否有区别？

答：有区别。

$$f_+'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

f在x_0处的右导数

$$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$$

导数$f'(x)$在x_0处的右极限

一般来说，$\lim\limits_{x\to x_0^\pm}f'(x)$是否存在与$f_\pm'(x_0)$是否存在无必然联系

一般情况下，$\lim\limits_{x\to x_0^\pm}f'(x)\neq f_\pm'(x_0)$

例2 (1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$$f_+'(0)=0,$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$$ 不存在

(2) $f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$f_+'(0)$不存在, 然而$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{1+x^2}=-1.$

但是在一定条件下他们之间有如下关系：

定理 如果函数$f(x)$在x_0处右连续，在x_0的右邻域可导，

且$f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在，则$f_+'(x_0)=f'(x_0^+)$

例3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ 0, & x=0 \\ x\sin x, & x>0. \end{cases}$ 在$x=0$处的可导性

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0,\qquad f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+x\cos x)=0$

故$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$

同理, 如果函数$f(x)$在x_0处左连续，在x_0的左邻域可导，

且$f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$存在，则$f_-'(x_0)=f'(x_0^-)$

上述定理提供了求分段函数在分界点处导数的另一种方法，但是使用时要注意验证条件。

例4 设$f(x)=\begin{cases}2x, & x<1,\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$，试判定$f$在$x=1$处的可导性？

解 f在$x=1$处右连续，$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$，

$$\Rightarrow f_+'(1)=2.$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2\neq f(1)$，$f$在$x=1$处不左连续，

故$f_-'(1)$不存在. 从而f在$x=1$处不可导.

$$f_-'(1)\cancel{=}\lim_{x\to 1^-}(2x)'=2.$$

例5 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0, \end{cases}$判定$f$在$x=0$处的可导性.

解 $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\quad f$在$x=0$处连续,

又$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\quad$故$f'(0)=0.$

例6 设$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0, \end{cases}$下面解法是否正确?

解 因为$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$不存在,

所以f在$x=0$不可导.

答:不正确.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

问题3. 关于极值与最值的两个问题

1、连续函数在一个区间上唯一的极值必是最值吗？

设$f(x)$是区间I上的连续函数，且在I上有唯一极值点x_0，则当$f(x_0)$为极小（大）值时，$f(x_0)$必为$f(x)$在区间I上的最小（大）值.

上面说法是否正确？

答： 正确。可以用反证法证明之。

证　设$f(x)$在区间I上连续，只有唯一极小值点x_0，而无极大值点。

如果$f(x_0)$不是$f(x)$在区间I上的最小值，

则必存在$x_1 \in I$,使$f(x_1) < f(x_0)$，不妨设$x_1 < x_0$.

$\because f(x) \in C[x_1, x_0]$, $\exists \bar{x} \in [x_1, x_0]$,使$f(x)$在$x = \bar{x}$处

取得它在区间$[x_1, x_0]$上的最大值.

下证$\bar{x} \in (x_1, x_0)$,从而$\bar{x}$成为$f(x)$的极大值点，导出矛盾.

1)由$f(x_1) < f(x_0) \Rightarrow \bar{x} \neq x_1$;

2)若$\bar{x} = x_0$, 存在$\delta > 0$,使$f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0]$内为常数，

这与x_0为$f(x)$在区间I上唯一的极小值点矛盾. 证毕

注：I为闭区间，开区间，无穷区间，结论都成立。

2、函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大（小）值点一定是$f(x)$的极大（小）值点吗？

答： 不一定。

> 极值一定在区间内部取到，
> 最值可以在边界点取得。

问题4. 如何讨论方程根的存在性及个数问题？

讨论方程根的存在性常用以下两种方法：

1）利用连续函数的零点定理

2）利用Roll定理

讨论根的个数常用的有以下两种方法

1）利用函数的单调性

2）利用结论：若在区间I上$f^{(n)}(x)\neq 0$，则方程 $f(x)=0$在区间I上最多有n实根

例7 求证方程$x^2 = x\sin x + \cos x$恰有两个不同的实根。

证 令$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ 偶函数

$\because f(0) = -1 < 0, \quad f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上至少有一个零点。

又$f'(x) = x(2-\cos x) > 0 \quad x \in (0,+\infty)$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格单调增，最多有一个零点.

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点。

又$f(x)$是连续的偶函数，

故方程$x^2 = x\sin x + \cos x$恰有两个不同的实根。

例8 判定方程$e^x - |x+2| = 0$有几个实根，并指出各个根所在的区间。

解：令$f(x) = e^x - |x+2|$,则

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + 2, & x \le -2 \\ e^x - x - 2, & x > -2 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x < -2 \\ e^x - 1, & x > -2 \end{cases}$$

唯一驻点：$x = 0$，分段点：$x = -2$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\uparrow$	e^{-2}	$\downarrow$	-1	$\uparrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$　　各有一根　　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

方程$e^x - |x+2| = 0$共有三个根，分别在区间$(-\infty,-2)$,$(-2,0)$和$(0,+\infty)$内。

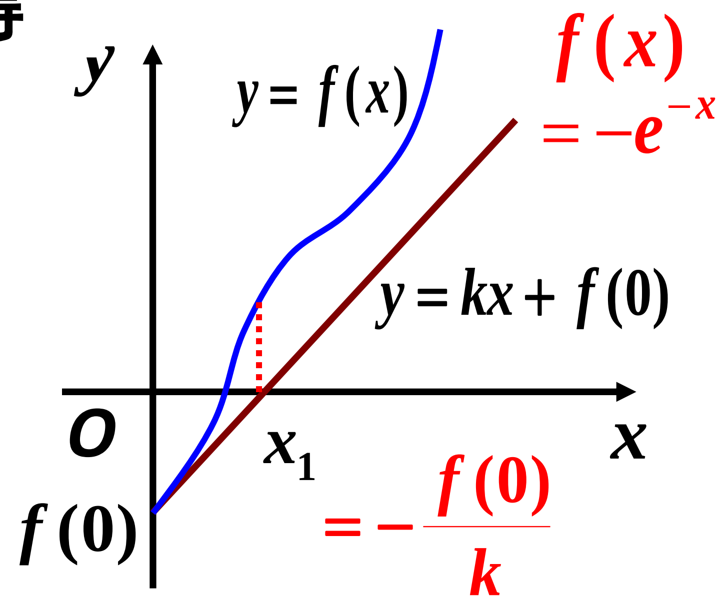
例9 设在区间$[0,+\infty)$上，函数$f(x)$有连续一阶导数，且$f'(x) \ge k > 0$，$f(0) < 0$，试证方程$f(x) = 0$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根。

可否$f'(x) \ge k > 0$改为$f'(x) > 0$?

证 令$x_1 = -\dfrac{f(0)}{k}$，由Lagrange定理得

$$f(x_1) = f(0) + f'(\xi)x_1$$

$$\ge f(0) + k\left(-\frac{f(0)}{k}\right) = 0$$



若$f(x_1) = 0$，则至少有一根；

若$f(x_1) > 0$，由零点定理知，

存在$x_0 \in (0, x_1)$，使$f(x_0) = 0$。又$f'(x) > 0$，

所以方程$f(x) = 0$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根。

问题5. 导数与微分有什么区别和联系？

- 可导与可微是等价的。即存在性是一样的。
- 导数和微分是两个完全不同的概念。

导数$f'(x_0)$ 是一个数；是函数在该点处的变化率；

是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率

微分$\boxed{dy=f'(x_0)\Delta x}$ 导数与微分之间的联系

是函数$f(x)$在x_0处改变量的线性主部

是Δy的近似值；是Δx的线性函数。

是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线在点x_0的纵坐标的改变量。

问题6.利用洛必达法则求极限时应当注意下面几个问题

1^0 是否为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，若不是，则不可贸然使用。

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$,有人求解如下：

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{12x-2}\cancel{=}\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

2^0 若极限$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$既不存在，也不是无穷大，则该法则失效，不能应用。但这种情况$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$下仍可能存在，可用其它方法计算。

例15 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x}$属于$\dfrac{\infty}{\infty}$不定式，但是

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1} \quad \text{极限不存在}$$

洛必达法则失效。

另解 $$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cos x\right) = 1.$$

3^0 数列极限不能直接利用洛必达法则，可以先用该法则求出对应的函数极限，再根据函数极限和数列极限的关系得到所要求的数列极限.

例16 求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$.

解 原极限$=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1})}{\frac{1}{x^2}}=a$$

4^0 洛必达法则是求未定式极限的一种有效方法，但在使用过程中，应与无穷小等价代换、求出式中非零因子的极限值等方法交替使用，以免出现复杂的求导运算，简化极限的计算过程.

例17 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x - x)e^{\cos x}}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x - x)}{x^2\tan x}$

$= e \cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x - x)}{x^2\tan x} = \dfrac{e}{3}$ （因 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\cos x} \neq 0$）

极限中非零因子可以提出以简化运算。

若$\lim f(x)=A\neq 0$,则

$$\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$$

$$=\begin{cases} AB, & \text{若}\lim g(x)=B \\ \text{极限不存在.} & \text{若}\lim g(x)\text{不存在} \end{cases}$$

设$\lim f(x)=A\neq 0$, $\lim g(x)$不存在,则$\lim f(x)g(x)$不存在.

反证 假设$\lim f(x)g(x)$存在,

则$g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$，两边取极限得$\lim g(x)$存在，矛盾.

5^0 洛必达法则要求分子$f(x)$与分母$g(x)$在 x_0的某去心邻域（或单侧邻域）内可导，且$g'(x)\neq 0$，这个条件常常被忽视，并且不容易发现错在何处.

例18 设$f(x)$在x_0处二阶可导，有人如下方法求极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)\right]}{2(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right]=0$$

错误何在？

6^0 仅当 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 比 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 简单易求时，该法则才有使用价值.否则，应另寻他法.

例19

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} \quad \frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-e^{-x}} \quad \frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$$

循环，无法求出.

另解：

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$= 1$$