第四部分 数理逻辑

类同上一小节，本节讨论基本永真蕴涵式与蕴涵推理

● 回顾：若蕴涵式$P\rightarrow Q$ 为永真，

则称为蕴涵重言式（或者永真蕴含式），

记为：$P\Rightarrow Q$，读做“P永真蕴含Q”。

基本永真蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
3. $\neg A \Rightarrow A \to B$
4. $B \Rightarrow A \to B$
5. $\neg(A \to B) \Rightarrow A$
6. $\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$
7. $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$
8. $\neg B \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$
9. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$
10. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
11. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$
12. $(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge D)$

基本永真蕴涵式

13. $(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$
14. $A \Rightarrow B \to (A \wedge B)$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$
17. $A \to (B \to C) \Rightarrow B \to (A \to C)$

每个等式可产生两个永真蕴含式

如, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

由蕴涵等值式$A \to B = \neg A \vee B$可产生如下两个永真蕴含式

$A \to B \Rightarrow \neg A \vee B$， $\neg A \vee B \Rightarrow A \to B$

永真蕴含式可用真值表证明，但也可用以下办法证明：

(1) 假定前件是真，若能推出后件是真，则此蕴含式是真。

(2) 假定后件是假，若能推出前件是假，则此蕴含式是真。

例 证明 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$

方法 1: 设 $\neg Q\wedge(P\to Q)$是真，则 $\neg Q$、$P\to Q$是真。所以，Q是假，P是假。因而 $\neg P$是真。故 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

方法 2: 设 $\neg P$是假，则P是真。以下分情况讨论。

(i) 若Q为真，则 $\neg Q$是假，所以 $\neg Q\wedge(P\to Q)$是假。

(ii) 若Q是假，则$P\to Q$是假，所以 $\neg Q\wedge(P\to Q)$是假。

故 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

蕴含的性质

- 设P、Q为任意两个命题公式，$P \Leftrightarrow Q$的充分必要条件是$P \Rightarrow Q$且$Q \Rightarrow P$。
- 设A、B、C是合式公式，若$A \Rightarrow B$且A是重言式，则B必是重言式。
- 若$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$（传递性）
- 若$A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$
- 若$A \Rightarrow B$，$C \Rightarrow B$，则$A \vee C \Rightarrow B$

蕴涵推理

蕴涵推理是一种单向推理，简称推理

推理中典型的推理是数学推理。

数学推理：一般先有一些条件，由条件出发通过证明最终得到定理。

推理的三要素：

(1) 前提：已知条件

(2) 证明：由前提出发最终得到定理的实施过程。

期间使用两种手段，即推理规则与证明过程

(3) 定理：推理的结果，它是公式，通过证明而最终确定其为真

前提和定理均可形式化为公式，现对推理规则和证明过程形式化

推理规则

推理规则是由永真蕴涵式得到的蕴涵推理规则，表示为：

前提1, 前提2, …, 前提n $\vdash$ 结论

(1) 符号 $\vdash$ 表示“推出”之意

(2) 蕴涵重言式$A \Rightarrow B$表示“若A为真，则B亦为真”，即以A为前提，必得出B为其结论，故对$A \Rightarrow B$必有

$$A \vdash B$$

(3) 对$A \wedge B \Rightarrow C$，必然有：

$$A, B \vdash C$$

由永真蕴涵式可以导出以下推理规则：

推理规则

1. $A \vdash (A \vee B)$， $B \vdash (A \vee B)$ （附加式）
2. $A, B \vdash A$， $A, B \vdash B$ （简化式）
3. $A, B \vdash A \wedge B$ （合取引入规则）
4. $\neg A, A \vee B \vdash B$ （析取三段论）
5. $A, A \rightarrow B \vdash B$ （假言推论—分离规则）
6. $\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A$ （拒取式）
7. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ （假言三段论）
8. $A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$ （合取推理）
9. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash C$ （两难推论）
10. $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg A$ （归谬推理）
11. $A \rightarrow B \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$ （简单合取推理）

一个等价重言式（也称恒等式）$A \Leftrightarrow B$，就是$A \Rightarrow B$和$B \Rightarrow A$同时成立的意思，所以恒等式也是推理规则。前面已经学习了基本等值式。

永真蕴含式和恒等式都是重言式，对其中的变元可应用代入和替换规则，所以代入规则和替换规则也是推理规则。

证明过程

定义： 证明过程可以形式化为一组公式序列$C_1, C_2, \ldots, C_n$，在该序列中只允许出现按下面三种方法所引入的公式：

（1）前提引入P：在C_i中允许出现前提；

（2）推理引入T：在序列中允许使用推理规则，而推理规则的结论允许出现在C_i中；

（3）附加前提引入CP：若待证定理中有$A \to B$的形式，则可以将A作为附加前提引入而允许在C_i中出现，此后若B出现在$C_j(j>i)$中，则$A \to B$即是定理.

最后出现的C_n即为定理。

证明

前提为$A_1, A_2,\ldots, A_k$，结论为B，有公式序列 $C_1, C_2,\ldots, C_n$.

如果每一个C_i $(1\le i\le n)$ 是某个A_j, 或者可由序列中C_i前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_n = B$,

则称这个公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_n$是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明。

构造证明

例 构造下面推理的证明:若明天是星期一或星期三,我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课.我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 符号化各原子命题

p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①②拒取式

④ $(p\vee q)\rightarrow r$ 前提引入

⑤ $\neg(p\vee q)$ ③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$ ⑤置换

证明方法

定理常见的形式有：P当且仅当Q;
如果P, 那么Q

前者相当于$P \to Q$，并且$Q \to P$
所以，定理的主要形式是$P \to Q$

下面我们主要从策略意义上说明如何证明$P \to Q$形式的命题，具体的技巧，需要通过例题来学习。

证明方法

1. 直接证明法

假设P是真，如果能推得Q是真，则$P \rightarrow Q$是真。

2. 间接证明法

因为 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$，所以对$\neg Q \rightarrow \neg P$进行直接证明。

即，假设Q为假，如果推得P为假，则$\neg Q \rightarrow \neg P$为真。

3. 附加前提证明法

附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由:

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$　(蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow \neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \wedge \neg(\neg C \vee B))$　(德摩根律)

$\Leftrightarrow \neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \wedge (C \wedge \neg B))$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$　(结合律，德)

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$　(蕴涵等值式)

附加前提证明法实例

例 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

用附加前提证明法构造证明

附加前提证明法实例

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow r$，$r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

4. 归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) && \text{（德摩根律）} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 && \text{（同一律）} \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0 && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}
$$

归谬法实例

例4 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

5. $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$形式命题的证明

可用直接证明法或间接证明法。

因$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$的逆否命题是

$$\neg Q \to \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_n,$$

用间接证明法时，只需证明至少有一个i值，使$\neg Q$蕴含$\neg P_i$是真即可。

这也可以说是间接证明法的推广。

6. $(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \rightarrow Q$形式命题的证明

因为

$$
\begin{aligned}
& P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \rightarrow Q \\
& \quad \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_n \vee Q \\
& \quad \Leftrightarrow (\neg P_1 \vee Q) \wedge (\neg P_2 \vee Q) \wedge \cdots \wedge (\neg P_n \vee Q) \\
& \quad \Leftrightarrow (P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \rightarrow Q)
\end{aligned}
$$

所以，欲证$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n \rightarrow Q$永真，只需证明对每一$i$，$P_i \rightarrow Q$成立。这种证明方法叫**分情况证明**。

对偶

定义 设有公式*A*，其中仅有联结词∧、∨、¬ 。

在*A*中将∧、∨、*T*、*F*分别换以∨、∧、*F*、*T*得公式A^*，

则 A^*称为*A*的对偶公式。

对A^*采取同样手续，又得*A*，所以*A*也是A^*的对偶。

因此，对偶是相互的。

例 (1)$\neg P\vee(Q\wedge R)$和$\neg P\wedge(Q\vee R)$互为对偶吗？

(2) $P\vee F$ 的对偶是________。

对偶

定理 设A和A^*是对偶式。P_1，P_2，…，P_n是出现于A和A^*中的所有命题变元，于是

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)。$$

（证明略）

定理 若$A \Leftrightarrow B$，且A、B为由命题变元P_1，P_2，…，P_n及联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$ 构成的公式，则$A^* \Leftrightarrow B^*$。

证 $A \Leftrightarrow B$意味着

$$A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)\text{永真}$$

所以

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n)\text{永真}$$

对偶

由上一个独立得

$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$永真。

因为上式是永真式，可以使用代入规则，对所有i用$\neg P_i$代P_i得，

$A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$永真。

所以$A^* \Leftrightarrow B^*$。

本定理为对偶定理。

对偶

定理 如果A $\Rightarrow B$，且A、B为由命题变元P_1，P_2，…，P_n及联结词∧、∨、¬ 构成的公式，则$B^* \Rightarrow A^*$。

证 $A \Rightarrow B$意味着

$$A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \rightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)\text{永真}$$

所以

$$\neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) \rightarrow \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n)\text{永真}$$

由前面定理知道，

$B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$永真。

因为上式是永真式，可以使用代入规则，对所有i用$\neg P_i$代P_i得，

$B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \rightarrow A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$永真。所以$B^* \Rightarrow A^*$

练习

1. 构造下面推理的证明：

如果*A*参加球赛，则*B*或*C*也将参加球赛。

如果*B*参加球赛，则*A*不参加球赛。

如果*D*参加球赛，则*C*不参加球赛。

所以，*A*若参加球赛，则*D*不参加球赛。

对偶——应用练习

根据对偶原理，写出与下列等价式对应的另一个等价式。

(1) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(2) $A \wedge (A \vee B) = A$

(3) $A \wedge 0 = 0$

(4) $A \wedge 1 = A$

(5) $\neg A \vee (\neg B \vee C) = \neg(A \wedge B) \vee C$

(6) $(\neg A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) = C$

解 (1) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(2) $A \vee (A \wedge B) = A$

(3) $A \vee 1 = 1$

(4) $A \vee 0 = A$

(5) $\neg A \wedge (\neg B \wedge C) = \neg(A \vee B) \wedge C$

(6) $(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C) = C$

对偶——应用练习

根据对偶原理，写出与下列推理式对应的另一个推理式。

（1） $A \Rightarrow A \vee B$

（2） $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

（3） $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

（4） $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow \neg A \vee C$

（5） $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

解 （1） $A \wedge B \Rightarrow A$

（2） $A \Rightarrow (A \wedge B) \vee \neg B$

（3） $\neg A \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee \neg B$

（4） $\neg A \wedge C \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C)$

（5） $B \wedge D \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge D) \vee (A \wedge C)$

THE END