第三节

可利用变量代换法求解的一阶微分方程

- 一、齐次方程
- 二、伯努利方程
- 三、可利用变量代换法求解的其他一阶方程

一、齐次方程

类型3 $\quad \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (3.1)$ ——齐次方程.

其中 $f(x,y)$满足：$\forall \lambda \in R$，$\lambda \neq 0$

有 $\quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.

取 $\lambda = \dfrac{1}{x}$，则

$$f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}\cdot x, \frac{1}{x}\cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

求解法：作变量代换：$u = \dfrac{y}{x}$,

即 $y=xu$, $\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原式，得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F(u)$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{F(u)-u}{x}$ (3.2)

可分离变量的方程

1° 当 $F(u)-u\neq 0$ 时, 得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{F(u)-u}=\ln\left|C_1x\right|$,

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代回,即可得到原方程的通解 .

2° 当 $\exists u_0$，使 $F(u_0)-u_0=0$ 时, 则 $u=u_0$ 是(3.2)的解,

代回原方程， 得齐次方程的解 $y=u_0x$.

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$ 的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$u+xu'=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2},\quad xu'=-\frac{u(u^2-3u+2)}{1-u+u^2},$$

$$\frac{-1+u-u^2}{u(u-1)(u-2)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\left(\frac{-\frac{1}{2}}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{-\frac{3}{2}}{u-2}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{-1+u-u^2}{u(u-1)(u-2)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}+\frac{C}{u-2}$$

$$-1+u-u^2\equiv A(u-1)(u-2)+Bu(u-2)+Cu(u-1)$$

$$-\frac{1}{2}\ln u+\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)=\ln x+\ln C,$$

$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=C_1x,$$ 变量代回，得

原微分方程的通解为：$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$

例2 求解微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sqrt{x^2-y^2}$. ①

解 ① $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$

$x>0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$ ②

$x<0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$ ③

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入②，得 $\cancel{u}+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cancel{u}+\sqrt{1-u^2} \quad (x>0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (x>0, u\neq\pm1)$$

$$\arcsin u=\ln x+C,$$

代入③，得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\sqrt{1-u^2} \quad (x<0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (x<0, u\neq\pm1)$$

$$\arcsin u=-\ln(-x)+C,$$

变量代回，得原方程的 通解：

$$\arcsin\frac{y}{x} = \pm\ln|x| + C,$$

(C为任意常数．$x<0$时，取“$-$”；$x>0$时，取“$+$”)

此外，$y=\pm x\ (u=\pm 1)$也是原方程的解．

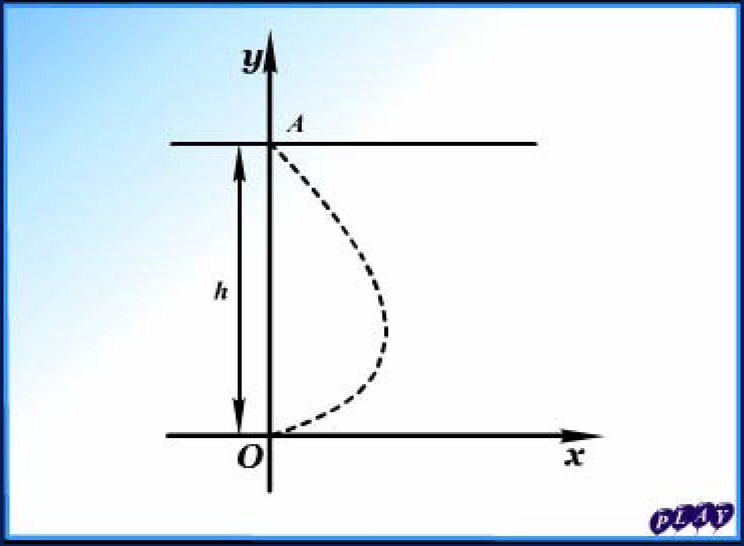
例3 设河边点O的下对岸为点A，河宽$OA=h$，两岸为平行直线，水流速度为a，有一鸭子从点A游向点O，设鸭子(在静水中)的游速为$b(b>a)$，且鸭子游动方向始终朝着点O. 求鸭子游过的迹线的方程.

解 设水流速度为$\vec{a}(|\vec{a}|=a)$，鸭子游速为$\vec{b}(|\vec{b}|=b)$

则鸭子实际运动速度为

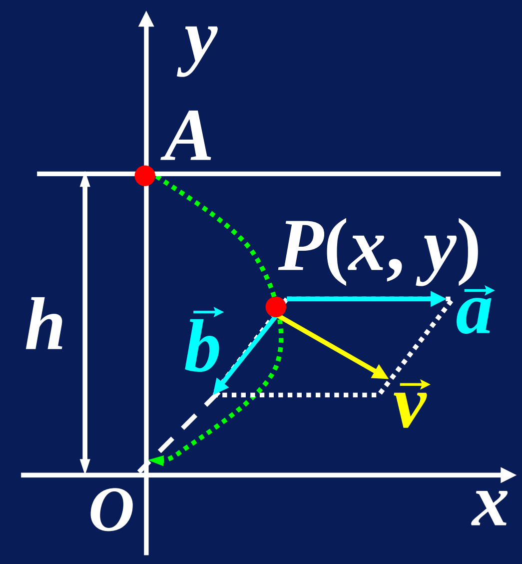
$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}.$$

取O为坐标原点，河岸朝顺水方向为x轴，y轴指向对岸.



设在时刻 t 鸭子位于点$P(x, y)$，则鸭子运动速度

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$



故一方面，有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{v_x}{v_y}$

另一方面，由 $\vec{a} = (a, 0)$，$\vec{b} = b\,\vec{e}_{\overrightarrow{PO}}$

其中$\vec{e}_{\overrightarrow{PO}}$ 为与 $\overrightarrow{PO}$ 同方向的单位向量.

而 $\overrightarrow{PO} = -(x, y)$ 得 $\vec{e}_{\overrightarrow{PO}} = \dfrac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$

目录 上页 下页 返回 结束

于是 $\vec{b} = -\dfrac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$

从而 $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (a - \dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}})$

由此得微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{v_x}{v_y} = -\dfrac{a}{b}\sqrt{(\dfrac{x}{y})^2+1} + \dfrac{x}{y}$,

令 $\dfrac{x}{y} = u$, 则 $x = yu$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + u$

代入上面的方程，得 $y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{a}{b}\sqrt{u^2+1}$

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = -\frac{a}{by}\mathrm{d}y$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

积分得 $$\operatorname{arsh} u = -\frac{a}{b}(\ln y + \ln C)$$

即 $$u = \operatorname{sh}\ln(Cy)^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{2}[(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}]$$

于是 $$x = \frac{y}{2}[(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}] = \frac{1}{2C}[(Cy)^{1-\frac{a}{b}} - (Cy)^{1+\frac{a}{b}}]$$

以 $y = h$ 时 $x = 0$ 代入上式，得 $C = \dfrac{1}{h}$,

故鸭子游过的迹线方程为

$$x = \frac{h}{2}[(\frac{y}{h})^{1-\frac{a}{b}} - (\frac{y}{h})^{1+\frac{a}{b}}],\quad 0 \le y \le h$$

目录 上页 下页 返回 结束

二、伯努利方程

伯努利(**Bernoulli**)方程的标准形式

类型4 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \qquad (4.1)$$

$$(\alpha\neq 0,1;\ \alpha\in R)$$

当 $\alpha=0,1$ 时， 方程为线性微分方程.

当 $\alpha\neq 0,1$ 时，方程为非线性微分方程.

求解法：需经过变量代换化为线性微分方程.

$$(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

1° $y \neq 0$, (4.5)式两端除以 y^{α}，得

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x),$$

令 $z = y^{1-\alpha}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

代入上式，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$,

—— 关于 z 的线性方程

通解:

$$z = e^{-\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-\alpha)Q(x)e^{\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].$$

目录 上页 下页 返回 结束

变量代回，得原方程 (4.1)的通解：

$$y^{1-\alpha}=e^{-\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-\alpha)Q(x)e^{\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right].$$

2° 当$\alpha>0$时，$y=0$也是(4.1)的解.

例4 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 这是$\alpha=\dfrac{1}{2}$时的伯努利方程 .

两端除以$\sqrt{y}$，得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2$,

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x^2,$$

令 $z=\sqrt{y}$， 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

原方程化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{x^2}{2},$

解得 $z=e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int\frac{x^2}{2}e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right),$

即所求通解为：$y=x^4\left(\frac{x}{2}+C\right)^2.$

例5 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x^2y-x}$ 的通解.

解 将所给方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x^2y-x}{y}$

即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}x=x^2$ —— 这是关于 x, $\alpha=2$ 的伯努利方程 .

令 $z=x^{-1}$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}z=-1$

原方程的通解:

$$x^{-1}=z=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y(-\ln|y|+C)$$

三、可用变量代换求解的其他一阶方程

例6 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$的通解，其中

$a_i, b_i, c_i (i=1,2)$均为常数，$c_1^2+c_2^2 \neq 0$ 且

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

准齐次方程

解 令$\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$，其中$h$ 和 k是待定的常数，

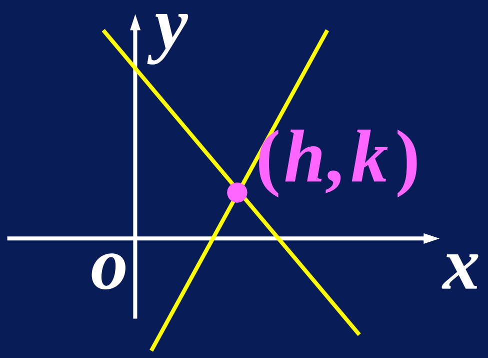
则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X$， $\mathrm{d}y = \mathrm{d}Y$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+\underline{a_1h+b_1k+c_1}}{a_2X+b_2Y+\underline{a_2h+b_2k+c_2}}\right)$$

考虑 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$ (1)

当$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时,

(1)有唯一一组解: $\begin{cases} x=h, \\ y=k, \end{cases}$



于是 $\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0, \\ a_2h+b_2k+c_2=0, \end{cases}$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$ —— 齐次方程

令 $u=\dfrac{Y}{X}$,

则可将此方程化为可分离变量的方程.

求其通解，再变量代回 $\begin{cases} X=x-h, \\ Y=y-k, \end{cases}$

即可得到原方程的通解.

例7 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 $\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-3=0,\end{cases}$ 解得 $x=1,\ y=2,$

令 $x=X+1, y=Y+2.$ 代入原方程得

$\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X-Y}{X+Y},$ 令 $u=\dfrac{Y}{X},$

方程变为 $u + X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \dfrac{1-u}{1+u}$, 分离变量法得

$X^2(u^2+2u-1)=C$, 即 $Y^2+2XY-X^2=C$,

将 $X = x-1, Y = y-2$ 代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1$.

例8 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x};$$

解 令 $z=xy$, 则 $\frac{dz}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回，所求通解为

$$2xy-\sin(2xy)=4x+C.$$

例9 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$;

解 (方法1) 令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$,

代入原式 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\dfrac{1}{u}$,

分离变量法得 $u-\ln(u+1)=x+C$,

将 $u=x+y$ 代回, 所求通解为

$y-\ln(x+y+1)=C$, 或 $x=C_1e^{y}-y-1$

(方法2) 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y$ —— 关于x是线性方程

解得 $x=e^{\int \mathrm{d}y}[\int ye^{-\int \mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]$

$$=e^{y}[\int ye^{-y}\mathrm{d}y+C]$$

$$=e^{y}[-(y+1)e^{-y}+C]$$

$$=-(y+1)+Ce^{y}.$$

内容小结

1. 齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x}).$

解法: 令 $u = \frac{y}{x}.$

将齐次方程化为可分离变量的方程;

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$

解法: 令 $z = y^{1-\alpha}.$

将伯努利方程化为线性的方程.

思考题

解方程

$$\int_0^x [2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}]\mathrm{d}t = xy(x).$$

思考题解答

方程两边同时对 x 求导:

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=y+xy',$$

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y, \quad y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

这是齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

原方程通解: $\operatorname{arsh}\dfrac{y}{x}=\ln Cx.$

例4-1 求方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$的通解.

解 以y^2除方程的两端，得 $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$

即 $$-\frac{d(y^{-1})}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$$

令$z=y^{-1}$，则上述方程成为 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-a\ln x$

这是一个线性方程，它的通解为

$$z=x[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2]$$

以y^{-1}代z，得所求方程的通解为 $yx[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2]=1$

例4-2 $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$ (1)

解 $(1) \Leftrightarrow y' + xy = \frac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$ ($\alpha = -1$的伯努利方程)

令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$，则 $\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$,

$\therefore \quad \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$,

$$z = e^{-\int 2x\,dx}\left[\int xe^{-x^2}e^{\int 2x\,dx}\,dx + C\right]$$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

例5-1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{xy+x^3y}$ 的通解．

解 (方法1) 将所给方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+x^3)y}$$

可分离变量方程

分离变量，积分

$$\int y\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{(x+x^3)}\mathrm{d}x$$

得原方程的通解 $\dfrac{1}{2}y^2=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

(方法2) 将所给方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = xy + x^3 y$$

或 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = x^3 y$$ —— 这是关于 x, $\alpha = 3$ 的伯努利方程 .

令 $z = x^{1-\alpha} = x^{-2}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -2x^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

原方程化为 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + 2yz = -2y,$$

原方程化为 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+2yz=-2y,$$

由常数变易公式，得其通解：

$$z=e^{-\int 2y\,\mathrm{d}y}\left[\int(-2y)e^{\int 2y\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=e^{-y^2}\left[\int(-2y)e^{y^2}\,\mathrm{d}y+C\right]=e^{-y^2}(-e^{y^2}+C)$$

$$=Ce^{-y^2}-1.$$

将变量代回，得原方程的通解： $x^{-2}=Ce^{-y^2}-1.$

例8-1 利用变量代换求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2.$

解 令 $x+y=u$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$ 代入原方程

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2$ 解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x.$

(2) $f(xy)y\,\mathrm{d}x + g(xy)x\,\mathrm{d}y = 0$.

解　令$u = xy$,　　则$\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$,

$$f(u)y\,\mathrm{d}x + g(u)x \cdot \frac{\mathrm{d}u - y\,\mathrm{d}x}{x} = 0,$$

$$[f(u) - g(u)]\frac{u}{x}\mathrm{d}x + g(u)\mathrm{d}u = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{g(u)}{u[f(u) - g(u)]}\mathrm{d}u = 0,$$

通解为　$\ln|x| + \int \frac{g(u)}{u[f(u) - g(u)]}\mathrm{d}u = C$.