

离散数学



西北工业大学

2022年4月22日 星期五

Lecture8 Graphs

About Graph Theory

图论是一门很有实用价值的学科，它在自然科学、社会科学等各领域均有很多应用。自上世纪中叶以来，它受计算机科学蓬勃发展的刺激，发展极其迅速，应用范围不断拓广，已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中。特别在计算机科学中，如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色。

Aims

图是一类具有广泛**实际问题背景**的**数学模型**，有着极其丰富的内容，是数据结构等课程的先修内容。学习时应掌握好图论的**基本概念**、**基本方法**和**基本算法**，善于把**实际问题抽象**为**图论的问题**，然后用图论的方法去解决。

图论作为一个**数学分支**，有一套完整的体系和广泛的内容，本篇仅介绍图论的**初步知识**，其目的在于今后对计算机有关学科的学习和研究时，可以以图论的基本知识作为**工具**。

Lecture 8 Graphs

我们所讨论的图(Graph)与人们通常所熟悉的图,例如圆、椭圆、函数图表等是很不相同的。图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型。

如果我们用点表示具体事物,用连线表示一对具体事物之间的联系。那么,一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成,至于点的位置和连线的长短曲直是无关紧要的。

8.0 内容提要



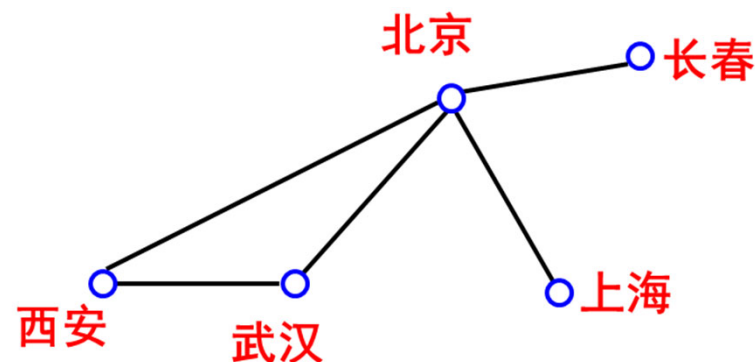
8.1 本章学习要求



8.2 图的基本概念

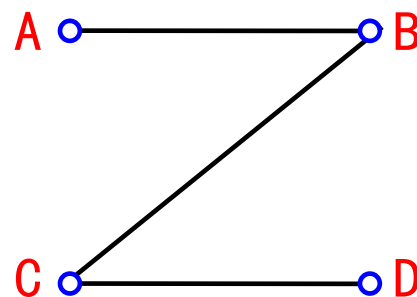
8.2.1 图的定义

例8.2.1 (1) 考虑一张航线地图，图中用点表示城市，当两个城市间有直达航班时，就用一条线将相应的点连接起来。这种航线地图的一部分如下图所示；



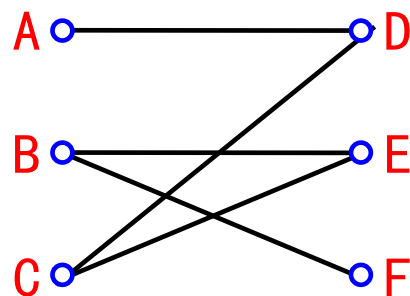
例8.2.1 (2)

假设有4台计算机，分别标记为A、B、C和D，在计算机A和B、C和D以及B和C之间有信息流。这种情形可用下图表示，通常称这种图为**通信网络**；



例8.2.1 (3)

假设有一群人和一组工作，这群人中的某些人能够做这组工作中的某些工作。例如，有3个人A、B和C，3件工作D、E和F，假设A只能做工作D，B能做工作E和F，C能做工作D和E。则这种情形可用下图表示，其中，在人和这个人能够做的工作之间画有线。



基本思想

用图形表示一组对象，其中有些对象对是有联系的。当然，这几个图形也可以表示其它的含义。例如在（3）的图中点A、B、C、D、E和F分别表示6家企业，如果某两家企业有业务往来，则其对应的点之间用线连接起来，这时的图形又反映了这6家企业间的业务关系。

对于这种图形，我们感兴趣的只是**有多少个点**和**哪些结点之间有线连接**，至于连线的长短曲直和结点的位置却无关紧要，只要求每一条线都起始于一个点，而终止于另一个点。

定义8.2.1

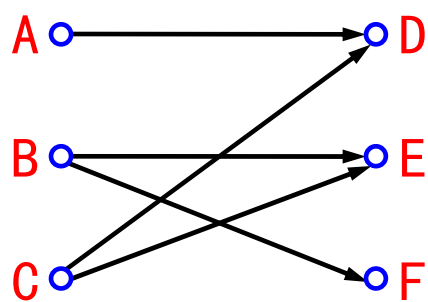
一个图 (Graph) 是一个序偶 $\langle V, E \rangle$ ，记为 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中：

(1) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是有限非空集合， v_i 称为结点 (Nodal Point)，简称点 (Point)， V 称为结点集 (Nodal Set)。

(2) E 是有限集合，称为边集 (Frontier Set)。 E 中的每个元素都有 V 中的结点对与之对应，称之为边 (Edge)。

与边相关的几个概念

定义8.2.1中的结点对即可以是**无序的**，也可以是**有序的**。



若边 e 与 **无序结点对** (u, v) 相对应，则称 e 为 **无向边** (Undirected Edge)，记为 $e = (u, v) = (v, u)$ ，这时称 u 、 v 是边 e 的两个**端点** (End point)。

若边 e 与 **有序结点对** $\langle u, v \rangle$ 相对应，则称 e 为 **有向边** (Directed Point) (或**弧**)，记为 $e = \langle u, v \rangle$ ，这时称 u 为 e 的**始点** (Initial Point) (或**弧尾**)， v 为 e 的**终点** (terminal Point) (或**弧头**)，统称为 e 的**端点**。

8.2.2 图的表示

对于一个图 G ，如果将其记为 $G = \langle V, E \rangle$ ，并写出 V 和 E 的集合表示，这称为**图的集合表示**。

而为了描述简便起见，在一般情况下，往往只画出它的图形：用小圆圈表示 V 中的结点，用由 u 指向 v 的有向线段或曲线表示有向边 $\langle u, v \rangle$ ，无向线段或曲线表示无向边 (u, v) ，这称为**图的图形表示**。

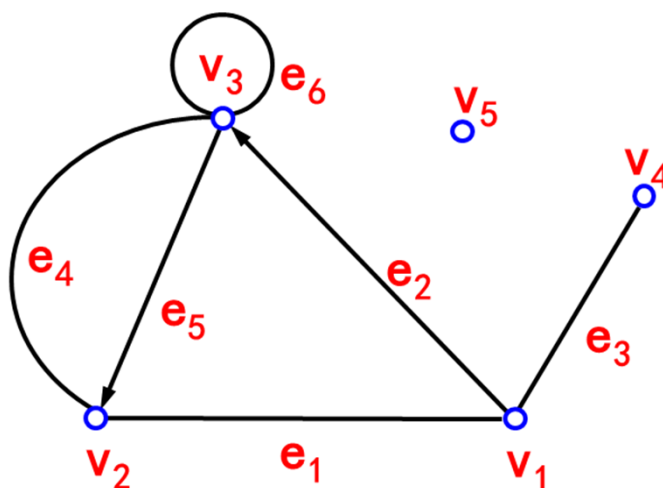
例8.2.2

设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，这里 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ， $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ，其中 $e_1 = (v_1, v_2)$ ， $e_2 = \langle v_1, v_3 \rangle$ ， $e_3 = (v_1, v_4)$ ， $e_4 = (v_2, v_3)$ ， $e_5 = \langle v_3, v_2 \rangle$ ， $e_6 = (v_3, v_3)$ 。试画出图 G 的图形，并指出哪些是有向边，哪些是无向边？

分析 由于 V 中有 5 个结点，因此要用 5 个 **小圆圈** 分别表示这 5 个结点，点的具体摆放位置可随意放。而对 E 中的 6 条边，**圆括号括起的结点对表示无向边**，**直接用直线或曲线连接两个端点**，**尖括号括起的结点对表示有向边**，前一个是始点，后一个是终点，**用从始点指向终点的有向直线或曲线连接**。

解

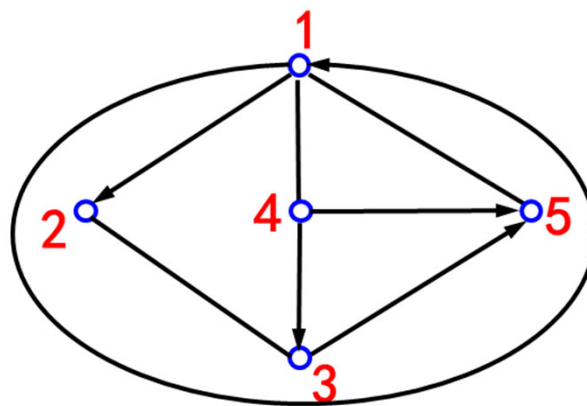
G的图形如下图所示。



G中的 e_1 、 e_3 、 e_4 、 e_6 是无向边， e_2 、 e_5 是有向边。

例8.2.3

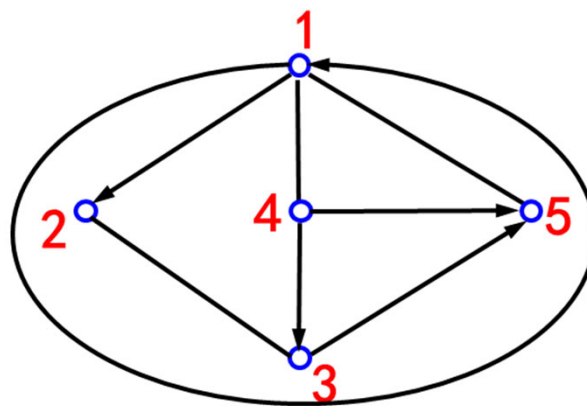
设图 $G = \langle V, E \rangle$ 的图形如下图所示，试写出 G 的集合表示。



分析 将所有小圆圈的记号构成结点集合，将连接结点对的直线或曲线用圆括号括起该结点对表示无向边，将连接结点对的有向直线或曲线用尖括号括起该结点对表示有向边，这里箭头指向的结点放在后面。

例8.2.3

设图 $G = \langle V, E \rangle$ 的图形如下图所示，试写出 G 的集合表示。



解 图 G 的集合表示为 $G = \langle V, E \rangle = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \rangle$ 。

图的矩阵表示

我们在学习中常常需要分析图并在图上执行各种过程和算法，也许必须用计算机来执行这些算法，因此必须把图的结点和边传输给计算机，由于集合与图形都不适合计算机处理，所以要找到一种新的表示图的方法，这就是图的矩阵表示。

由于矩阵的行和列有固定的次序，因此在用矩阵表示图时，先要将图的结点进行排序，若不具体说明排序，则默认为书写集合 V 时结点的顺序。

定义8.2.2

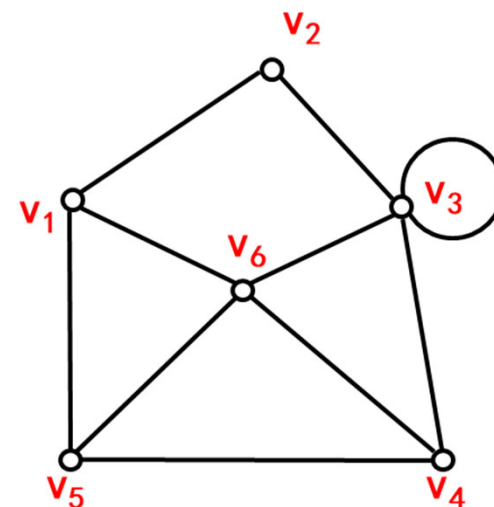
设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序，则 n 阶方阵 $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$ 称为 G 的邻接矩阵 (Adjacency Matrix)，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ 或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

例8.2.4

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

分析 首先将图中的6个结点排序，然后利用定义8.2.2写出其邻接矩阵。初学时可先在矩阵的行与列前分别按结点排序标上结点，若第*i*行前的结点到第*j*列前的结点有边相连，则在邻接矩阵的第*i*行第*j*列元素为1，否则为0。若结点排序为 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ ，则可标记如下：

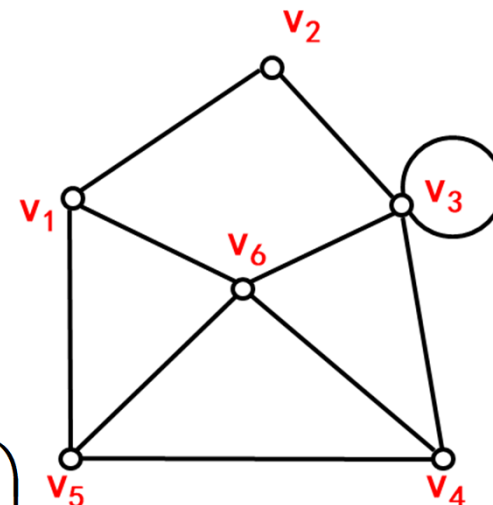


例8.2.4

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

解 若结点排序为 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ ，则其邻接矩阵

$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



8.2.3 图的操作

定义8.2.3 设图 $G = \langle V, E \rangle$ 。

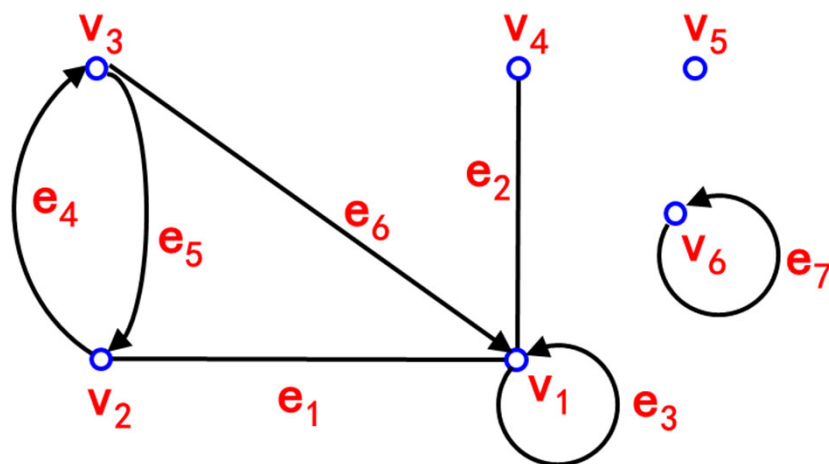
1. 设 $e \in E$ ，用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e 得到的图，称为**删除边 e** 。
又设 $E' \subseteq E$ ，用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边得到的图，称为**删除 E'** 。
2. 设 $v \in V$ ，用 $G - v$ 表示从 G 中去掉结点 v 及 v 关联的所有边得到的图，称为**删除结点 v** 。又设 $V' \subset V$ ，用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有结点及关联的所有边得到的图，称为**删除 V'** 。
3. 设 $e = (u, v) \in E$ ，用 $G \setminus e$ 表示从 G 中删除 e ，将 e 的两个端点 u, v 用一个新的结点 w 代替，使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边，称为**边 e 的收缩**。一个图 G 可以收缩为图 H ，是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。
4. 设 $u, v \in V$ (u, v 可能相邻，也可能不相邻)，用 $G \cup (u, v)$ 表示在 u, v 之间加一条边 (u, v) ，称为**加新边**。

8.2.4 邻接点与邻接边

定义8.2.4 在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 若两个结点 v_i 和 v_j 是边 e 的端点, 则称 v_i 与 v_j 互为邻接点 (Adjacent Point), 否则 v_i 与 v_j 称为不邻接的; 具有公共结点的两条边称为邻接边 (Adjacent Edge); 两个端点相同的边称为环 (Ring) 或自回路 (Self-Loop); 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点 (Isolated Point); 仅由孤立结点组成的图称为零图 (Null Graph); 仅含一个结点的零图称为平凡图 (Trivial Graph); 含有 n 个结点, m 条边的图, 称为 (n, m) 图。

例8.2.5

试写出下图所示图G的所有结点的邻接点、所有边的邻接边，并指出所有的孤立结点和环。



分析

根据定义8.2.4，如果两个结点间有边相连，那么它们互为邻接点；如果两条边有公共结点，那么它们互为邻接边。

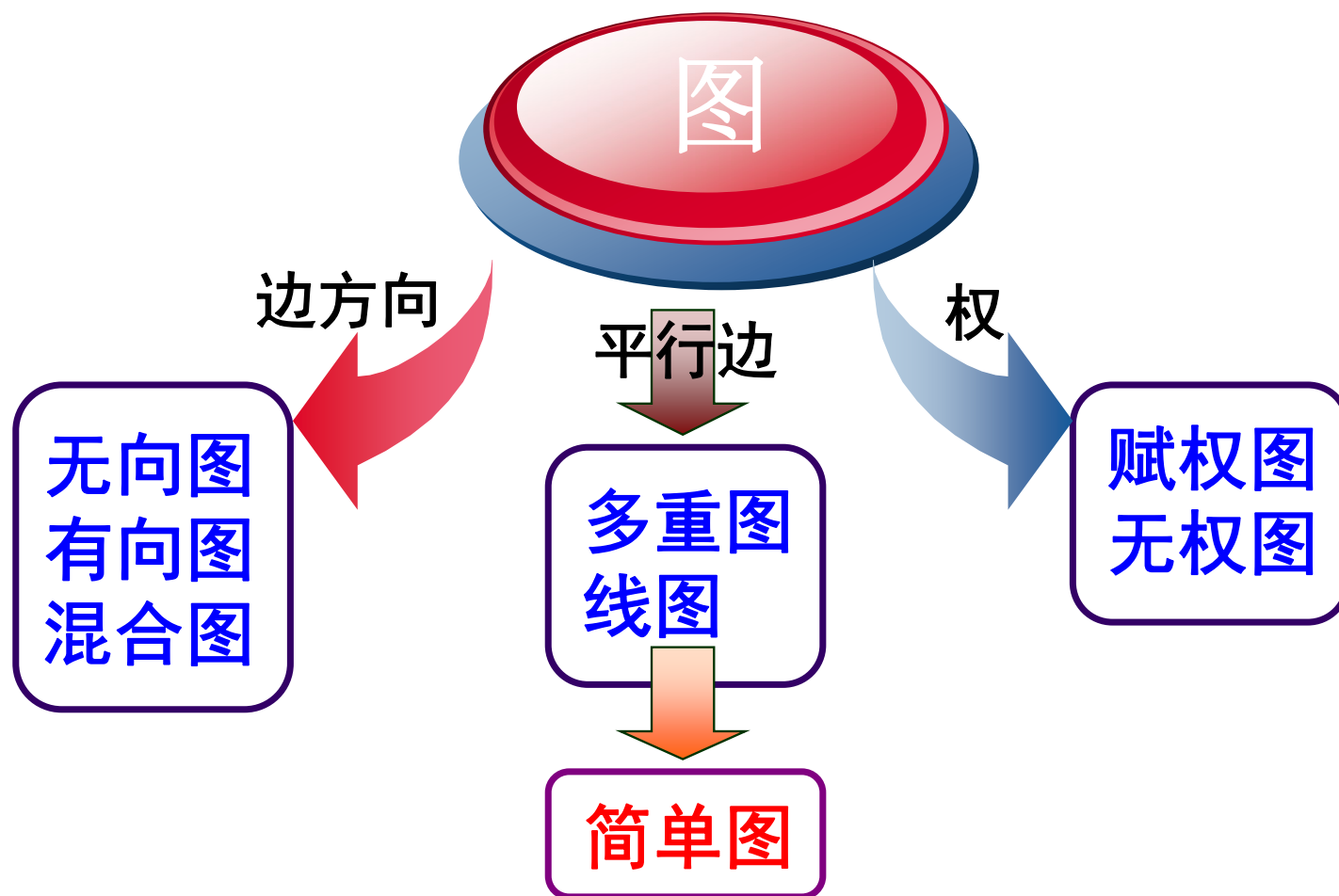
需要注意的是，只要当一个结点处有环时，它才是自己的邻接点；由于一条边有两个端点，在计算邻接边时要把这两个端点都算上，例如 e_2 和 e_4 都是 e_1 的邻接边。所有边都是自己的邻接边。

解

图G所有结点的邻接点和孤立结点，所有边的邻接边和环如下表所示。图G既不是平凡图，也不是零图，而是一个(6, 7)图。

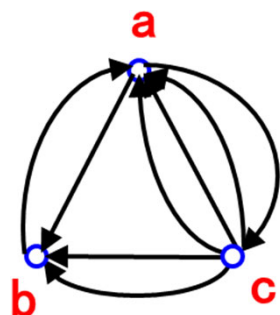
结点	邻接点	是否孤立结点	边	邻接边	是否环
			e_1	$E_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
v_1	v_1, v_2, v_3, v_4	否	e_2	e_1, e_2, e_3, e_6	否
v_2	v_1, v_3	否	e_3	e_1, e_2, e_3, e_6	是
v_3	v_1, v_2	否	e_4	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_4	v_1	否	e_5	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_5		是	e_6	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
v_6	v_6	否	e_7	e_7	是

8.2.5 图的分类

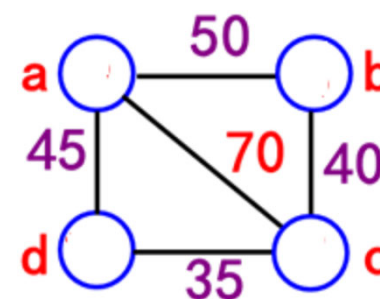


注

我们还可以将上述三种分类方法综合起来对图进行划分。



有向无权多重图



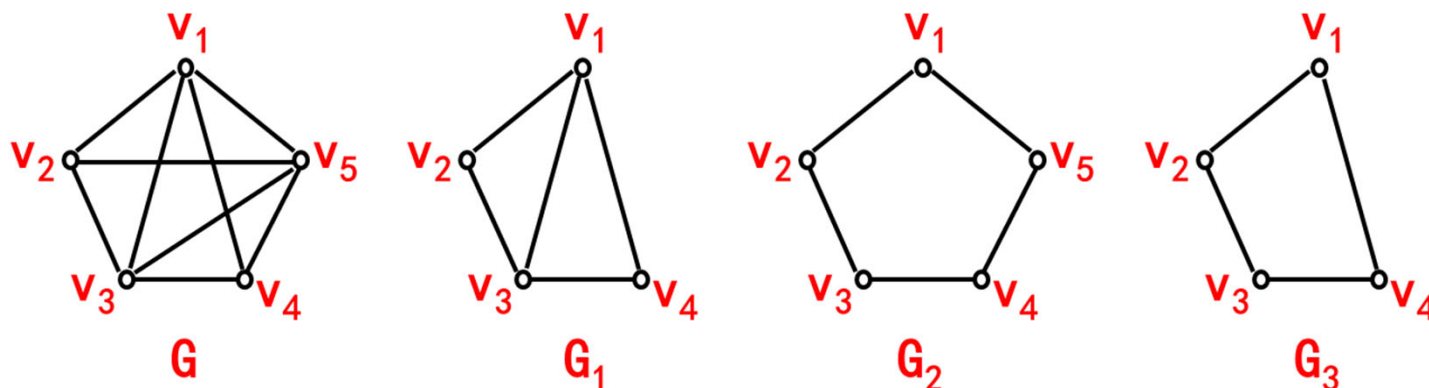
无向赋权简单图

8.2.6 子图与补图

定义8.2.8 设有图 $G = \langle V, E \rangle$ 和图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 。

1. 若 $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$, 则称 G_1 是 G 的**子图** (Subgraph), 记为 $G_1 \subseteq G$ 。
2. 若 $G_1 \subseteq G$, 且 $G_1 \neq G$ (即 $V_1 \subset V$ 或 $E_1 \subset E$), 则称 G_1 是 G 的**真子图** (Proper Subgraph), 记为 $G_1 \subset G$ 。
3. 若 $V_1 = V$, $E_1 \subseteq E$, 则称 G_1 是 G 的**生成子图** (Spanning Subgraph)。
4. 设 $V_2 \subseteq V$ 且 $V_2 \neq \Phi$, 以 V_2 为结点集, 以两个端点均在 V_2 中的边的全体为边集的 G 的子图, 称为 V_2 导出的 G 的子图, 简称 V_2 的**导出子图** (Induced Subgraph)。

例8.2.9



判断上图中，图 G_1 、 G_2 和 G_3 是否是图 G 的子图、真子图、生成子图、导出子图？

解 G_1 、 G_2 和 G_3 都是图 G 的子图、真子图； G_2 是图 G 的生成子图； G_1 是图 G 的 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的导出子图。

注 每个图都是它自身的子图、生成子图和导出子图。

定义8.2.9

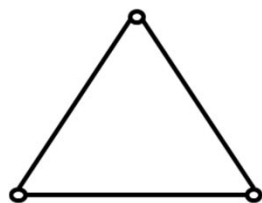
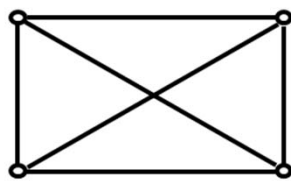
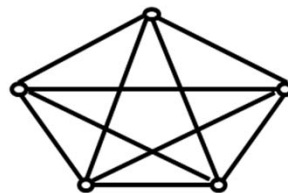
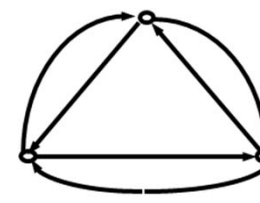
设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的无向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有边相连，则称 G 为无向完全图 (Undirected Complete Graph)，简称 G 为完全图 (Complete Graph)，记为 K_n 。

若无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，每个节点度数都等于 k ，则 G 为 k -正则图。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的有向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称 G 为有向完全图 (Directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为 K_n 。

对于完全图来说，其邻接矩阵除主对角元为 0 外，其它元素均为 1 。

例

 K_3  K_4  K_5  K_3

无向完全图 K_n 的边数为 $C(n, 2) = \frac{1}{2}n(n-1)$

有向完全图 K_n 的边数为 $P(n, 2) = n(n-1)$

定义8.2.9

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的无向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有边相连，则称 G 为无向完全图 (Undirected Complete Graph)，简称 G 为完全图 (Complete Graph)，记为 K_n 。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的有向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称 G 为有向完全图 (Directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为 K_n 。

对于完全图来说，其邻接矩阵除主对角元为 0 外，其它元素均为 1。

定义8.2.10

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为简单图, $G' = \langle V, E_1 \rangle$ 为完全图, 则称 $G_1 = \langle V, E_1 - E \rangle$ 为 G 的补图 (Complement of Graph), 记为 \bar{G} 。

注 在定义8.2.10中, 当 G 为有向图时, 则 G' 为有向完全图; 当 G 为无向图时, 则 G' 为无向完全图。

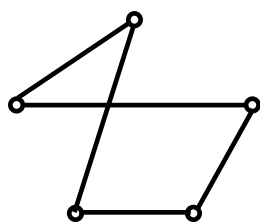
G 的补图也可理解为从结点集 V 的完全图中删除 G 中的边剩下的图, 即 G 与其补图的结点集是相同的, 边集是相对于完全图的边集为全集的补集。

显然, 若 $G_1 = \bar{G}$, 则 $G = \overline{G_1}$, 即它们互为补图。

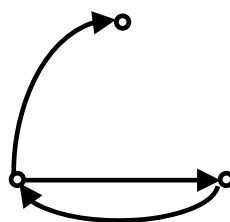
K_n 的补图为 n 个结点的零图。

例8. 2. 10

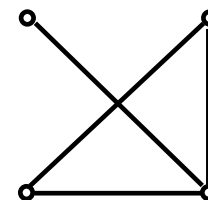
求下图中图 (a)、(b)、(c) 的补图。



(a)

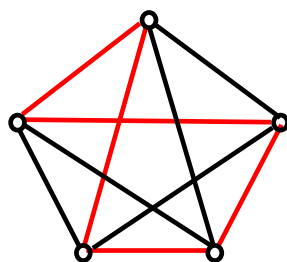


(b)

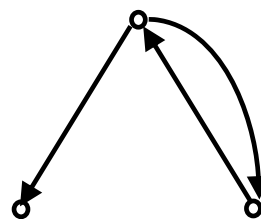


(c)

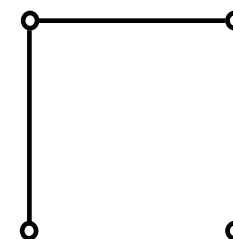
解 上图中图 (a)、(b)、(c) 的补图分别为图下中图 (a)、(b)、(c)。



(a)



(b)



(c)

注意，孤立结点一定不要漏了，否则结点集就不同。

利用邻接矩阵描述补图

若设简单图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则它的补图 \bar{G} 的邻接矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 有：

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

例8. 2. 11

证明：在任意6个人的集会上，总会有3个人相互认识或者有3个人互相不认识（假设认识是相互的）。

分析 把6个人作为结点，相互认识的人之间连边，这个问题就转化图的问题。可以利用图及其补图来解这个问题。

证明

把参加集会的人作为结点，相互认识的人之间连边，得到图 G ， \bar{G} 设为 G 的补图，这样问题就转化为证明 G 或 \bar{G} 中至少有一个完全子图 K_3 。

考虑完全图 K_6 ，结点 v_1 与其余5个结点各有一条边相连，这5条边一定有3条在 G 或 \bar{G} 中，不妨设有3条边在 G 中，设这3条边为 (v_1, v_2) 、 (v_1, v_3) 、 (v_1, v_4) 。

考虑结点 v_2, v_3, v_4 。若 v_2, v_3, v_4 在 G 中无边相连，则 v_2, v_3, v_4 相互不认识；若 v_2, v_3, v_4 在 G 中至少有一条边相连，例如 (v_2, v_3) ，则 v_1, v_2, v_3 就相互认识。因此，总会有3个人相互认识或者有3个人互相不认识。

8.2.7 结点的度数与握手定理

定义8.2.11 (1) 图 $G = \langle V, E \rangle$ 中以结点 $v \in V$ 为端点的边数(有环时计算两次)称为结点 v 的**度数**(Degree), 简称**度**, 记为 $\deg(v)$ 。

(2) 有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中以结点 v 为**始点的边数**称为 v 的**出度**(Out-Degree), 记为 $\deg^+(v)$; 以结点 v 为**终点的边数**称为 v 的**入度**(In-Degree), 记为 $\deg^-(v)$ 。显然, $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ 。

(3) 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, **度数为1**的结点称为**悬挂结点**(Hanging Point), 以悬挂结点为端点的边称为**悬挂边**(Hanging Edge)。

利用邻接矩阵描述

设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若 G 是无向图, 则 A 中第 i 行元素是由结点 v_i 所关联的边所决定, 其中为 1 的元素数目等于 v_i 的度数, 即,

$$\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} + a_{ii} \qquad \deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} + a_{ii}$$

利用邻接矩阵描述

若G是有向图，则A中第i行元素是由结点 v_i 为始点的边所决定，其中为1的元素数目等于 v_i 的出度，即

$$\deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik}$$

A中第i列元素是由结点 v_i 为终点的边所决定，其中为1的元素数目等于 v_i 的入度，即

$$\deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki}$$

定理8.2.1 (握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

分析 由定义8.2.11，结点 v 的度数等于以 v 为端点的边数，而1条边有2个端点（环的2个端点相同），因此1条边贡献2度。

定理8.2.1 (握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

证明 因为每条边都有两个端点(环的两个端点相同)，所以加上一条边就使得各结点的度数之和增加2，因此结论成立。

定理8.2.1 (握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

这个结果是图论的第一个定理，它是由欧拉于1736年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断：如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

推论8.2.1

图中度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V_1 = \{v \mid v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为奇数} \}$, $V_2 = \{v \mid v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为偶数} \}$ 。

显然, $V_1 \cap V_2 = \phi$, 且 $V_1 \cup V_2 = V$, 于是

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|,$$

式中 $2|E|$ 和 $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ (偶数之和为偶数) 均为偶数,

因而 $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ 也为偶数。于是 $|V_1|$ 为偶数, 即度数为奇数的结点个数为偶数。

定理8.2.2

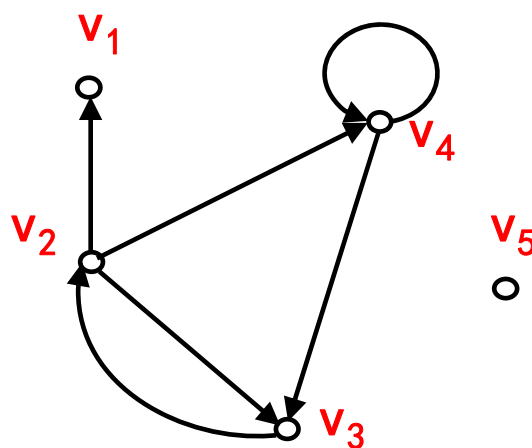
有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

证明 因为每条有向边具有一个始点和一个终点(环的始点和终点是同一个结点)，因此，每条有向边对应一个出度和一个入度。图 G 中有 $|E|$ 条有向边，则 G 中必产生 $|E|$ 个出度，这 $|E|$ 个出度即为各结点的出度之和， G 中也必产生 $|E|$ 个入度，这 $|E|$ 个入度即为各结点的入度之和。因而，在有向图中，各结点的出度之和等于各结点的入度之和，都等于边数 $|E|$ 。

定义8.2.12

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为图 G 的结点集，称 $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ 为 G 的**度数序列** (Degree Sequence)。



上图的度数序列为 $(1, 4, 3, 4, 0)$ 。

例8.2.14

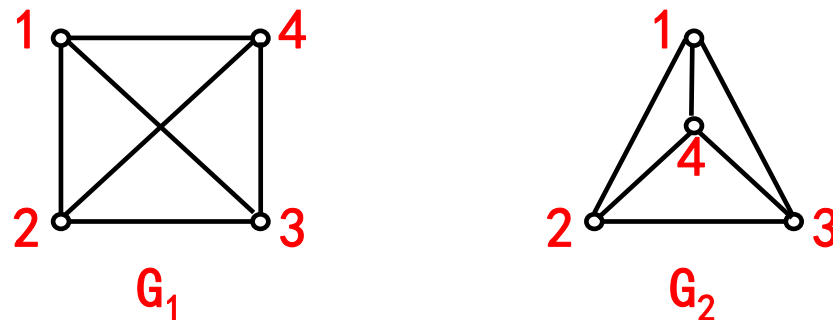
(1) $(3, 5, 1, 4), (1, 2, 3, 4, 5)$ 能成为图的度数序列吗？为什么？

(2) 已知图 G 中有15条边，2个度数为4的结点，4个度数为3的结点，其余结点的度数均小于等于2，问 G 中至少有多少个结点？为什么？

8.2.8 图的同构

图是表达事物之间关系的工具，因此，图的最本质的内容是结点和边的关联关系。而在实际画图时，由于结点的位置不同，边的长短曲直不同，同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。

例如下图中的两个图 G_1 和 G_2 实际上是同一个图 K_4 。



定义8.2.13

设两个图 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ ，如果存在**双射**函数 $g: V \rightarrow V'$ ，使得对于任意的 $e = (v_i, v_j)$ (或者 $\langle v_i, v_j \rangle$) $\in E$ 当且仅当 $e' = (g(v_i), g(v_j))$ (或者 $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle$) $\in E'$ ，并且 e 与 e' 的**重数相同**，则称 G 与 G' **同构** (Isomorphism)，记为 $G \cong G'$ 。

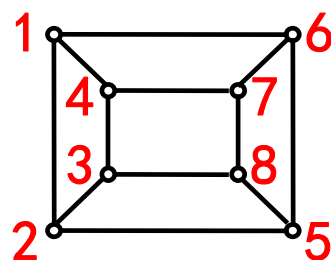
对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。

两个图同构的必要条件

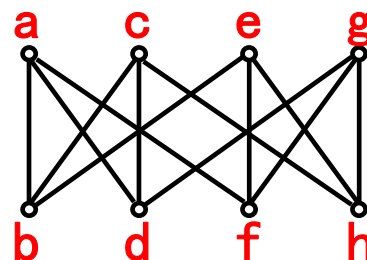
- (1) 结点数目相同；
- (2) 边数相同；
- (3) 度数相同的结点数相同。

例8.2.14

试证明下图中, $G \cong G'$ 。



G

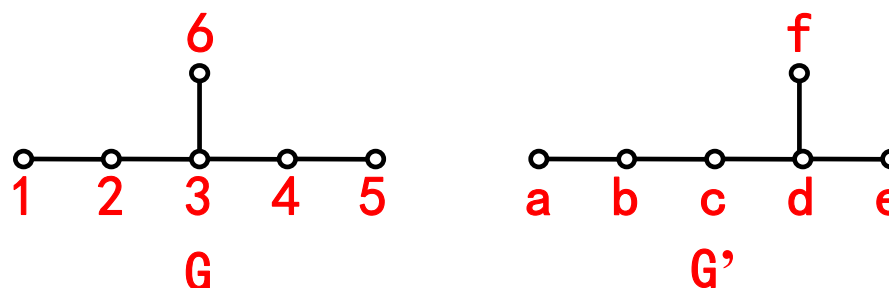


G'

分析 证明两个图同构, 关键是找到满足要求的结点集之间的双射函数。现在还没有好的办法, 只有凭经验去试。

例8. 2. 15

证明下图中， G 与 G' 不同构



注意 图同构的三个必要条件不是充分条件。在上图的 G 与 G' 两个图，虽然满足以上三个条件，但不同构。

寻找一种简单而有效的方法来判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。

8.2.9 图的难点

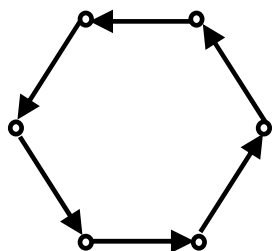
- 图是由两个集合构成的，可以利用集合的有关知识来研究它，如子图、完全图、补图等；
- 图的计算机表示就是它的邻接矩阵，实际中的图都是很大的，可能有成千上万的结点和边，用手工处理是很难想象的；
- 判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。现在还没有好的办法，只有凭经验按定义去试；
- 握手定理是图论的基本定理，很多理论都是以它为基础的，必须熟练掌握，并能灵活运用。

8.2.10 图的应用

自从克希荷夫运用图论从事电路网络的拓扑分析以来，尤其是近几十年来，网络理论的研究和应用十分引人注目，电路网络、运输网络、信息网络等与工程和应用紧密相关的课题受到了高度的重视，其中多数问题都与优化有关，涉及到问题的费用、容量、可靠性和其它性能指标，有重要的应用价值。网络应用的一个重要方面就是通讯网络。如电话网络、计算机网络、管理信息系统、医疗数据网络、银行数据网络、开关网络等等。这些网络的基本要求是网络中各个用户能够快速安全地传递信息，不产生差错和故障，同时使建造和维护网络所需费用低。因此通讯网络涉及的因素很多，我们就不详细介绍，仅说明一些基本知识。

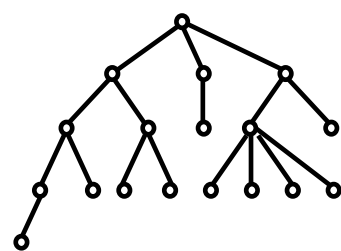
通讯网络

通讯网络中最重要的整体问题之一是网络的结构形式。通讯网络是一个强连通的有向图，根据用途和各种性能指标有着不同的结构形式，下图给出了一些典型的结构。



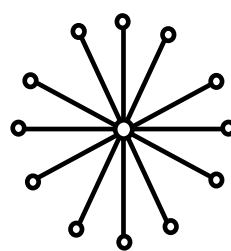
(a)

环 (Ring)
型网络



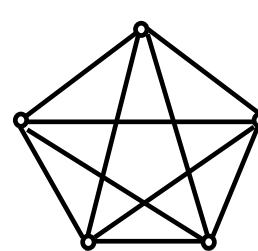
(b)

树 (Tree)
型网络



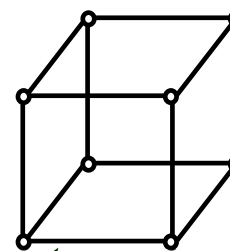
(c)

星 分布式 (Dist)
型网络



(d)

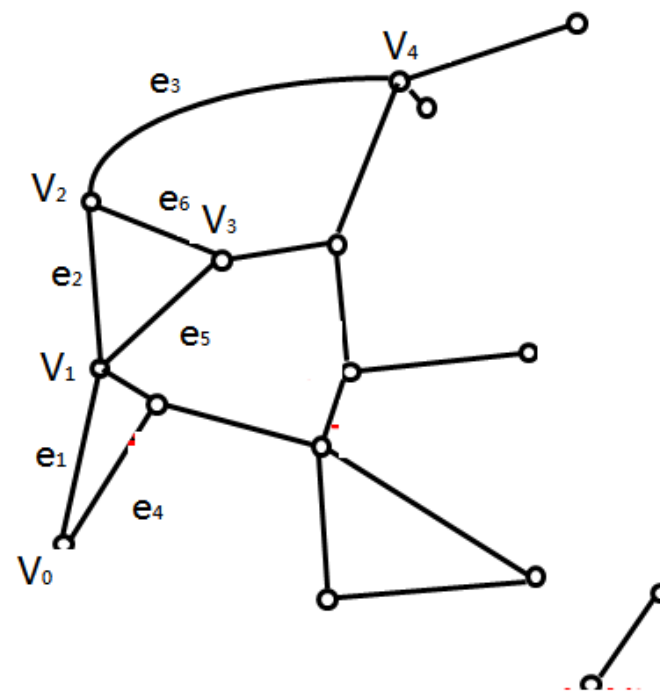
立方体 (Cube)
型网络



(e)

8.3 通路、回路与连通性

右图是中国铁路交通图的一部分，如果一个旅客要从昆明乘火车到北京，那么他一定会经过其它车站；而旅客不可能从兰州乘火车到达台北。这就引出了图的通路与连通的概念。



定义8.3.1

给定图 $G=\langle V, E \rangle$ 中 **结点和边相继交错出现的序列**

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k.$$

1. 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i (G 是有向图时要求 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点), $i=1, 2, \cdots, k$, 则称 Γ 为 **结点 v_0 到结点 v_k 的通路 (Entry)**。

v_0 和 v_k 分别称为此通路的 **始点和终点**, 统称为通路的 **端点**。

通路中 **边的数目 k** 称为此通路的 **长度 (Length)**。

当 $v_0 = v_n$ 时, 此通路称为 **回路 (Circuit)**。

定义8.3.1

2. 若通路中的所有边互不相同，则称此通路为简单通路 (Simple Entry) 或一条迹；若回路中的所有边互不相同，则称此回路为简单回路 (Simple Circuit) 或一条闭迹。
3. 若通路中的所有结点互不相同 (从而所有边互不相同)，则称此通路为基本通路 (Basic Entry) 或者初级通路、路径；若回路中除 $v_0=v_k$ 外的所有结点互不相同 (从而所有边互不相同)，则称此回路为基本回路 (Basic Circuit) 或者初级回路、圈。

说明

1. 回路是通路的特殊情况。因而，我们说某条通路，它可能是回路。但当我们说一基本通路时，一般是指它不是基本回路的情况。
2. 基本通路（回路）一定是简单通路（回路），但反之不真。因为没有重复的结点肯定没有重复的边，但没有重复的边不能保证一定没有重复的结点。
3. 在不会引起误解的情况下，一条通路 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$ 也可以用边的序列 $e_1e_2\cdots e_n$ 来表示，这种表示方法对于有向图来说较为方便。在线图中，一条通路 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$ 也可以用结点的序列 $v_0v_1v_2\cdots v_n$ 来表示。

定理8.3.1

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 m 的回路数目;
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$ 为 G 中长度为 m 的通路 (含回路) 总数。

证明

对 m 用数学归纳法。

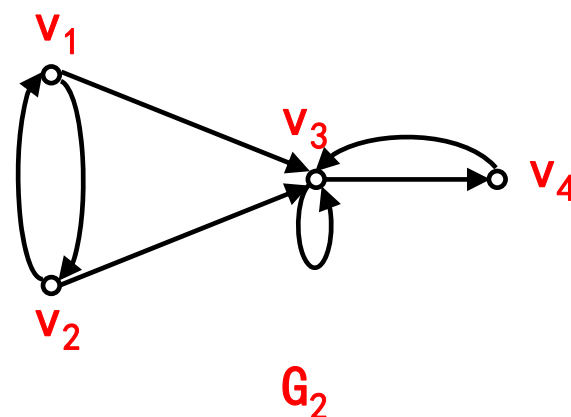
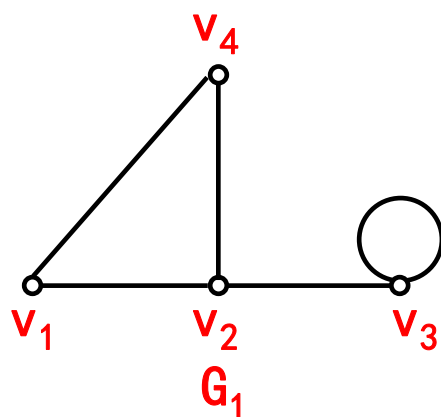
- (1) 当 $m = 1$ 时，显然成立。
- (2) 设 $m = k$ 时，定理成立。
- (3) 证明 $m = k+1$ 时定理成立。

因为 $(a_{ij}^{(k+1)})_{n \times n} = A^{k+1} = A \cdot A^k = \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)} \right)_{n \times n}$ ，故 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$

而 a_{ip} 是结点 v_i 到 v_p 长度为1的通路数目， $a_{pj}^{(k)}$ 是结点 v_p 到 v_j 长度为 k 的通路数目，故 $a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 经过 v_p 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目，那么 $\sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目。

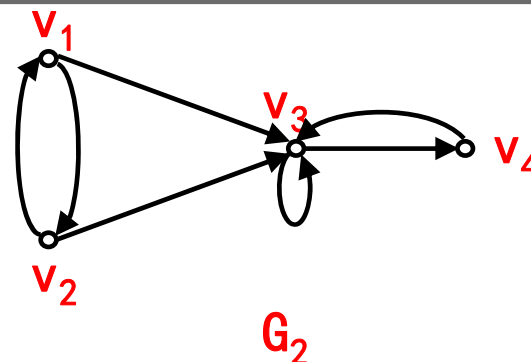
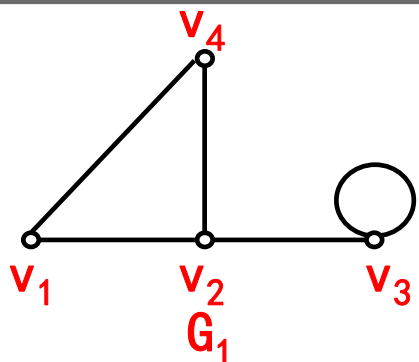
例8.3.2

求下图中图 G_1 和 G_2 的从结点 v_1 到结点 v_3 长度为2和3的通路数目及所有长度为2和3的通路数目。



分析 利用定理8.3.3，求图中长度为 m 的通路数目，只需要先写出图的邻接矩阵，然后计算邻接矩阵的 m 次方即可。

解



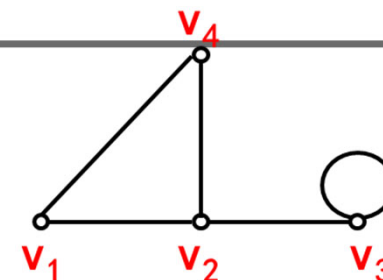
在图中， G_1 是无向线图， G_2 是有向线图，它们的邻接矩阵分别为：

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解(续1)

下面计算邻接矩阵的幂,



$$(A(G_1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(2)} = 1 \qquad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 21 \qquad \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 9$$

因而 G_1 中从结点 v_1 到结点 v_3 长度为2通路数目为1,
长度为2的通路(含回路)总数为21, 其中9条为回路。

解(续2)

$$(A(G_2))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(2)} = 2$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 13$$

$$\sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 4$$

G_2 中从结点 v_1 到结点 v_3 长度为2通路数目为2，长度为2的通路（含回路）总数为13，其中5条为回路。

解(续3)

$$(A(G_1))^3 = A(G_1) \cdot (A(G_1))^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(3)} = 2 \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 48 \quad \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 10$$

因而 G_1 中从结点 v_1 到结点 v_3 长度为3的通路数目为2，长度为3的通路（含回路）总数为48，其中10条为回路。

解(续4)

$$(A(G_2))^3 = A(G_2) \cdot (A(G_2))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(3)} = 4$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 22$$

$$\sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 4$$

G_2 中从结点 v_1 到结点 v_3 长度为3的通路数目为4，长度为3的通路（含回路）总数为22，其中4条为回路。

定义8.3.2

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, $v_i, v_j \in V$ 。

1. 如果从 v_i 到 v_j 存在通路, 则称 v_i 到 v_j 是可达的, 否则称 v_i 到 v_j 不可达。规定: 任何结点到自己都是可达的。
2. 如果 v_i 到 v_j 可达, 则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线 (Geodesic);
3. 从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离 (Distance), 记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达, 则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

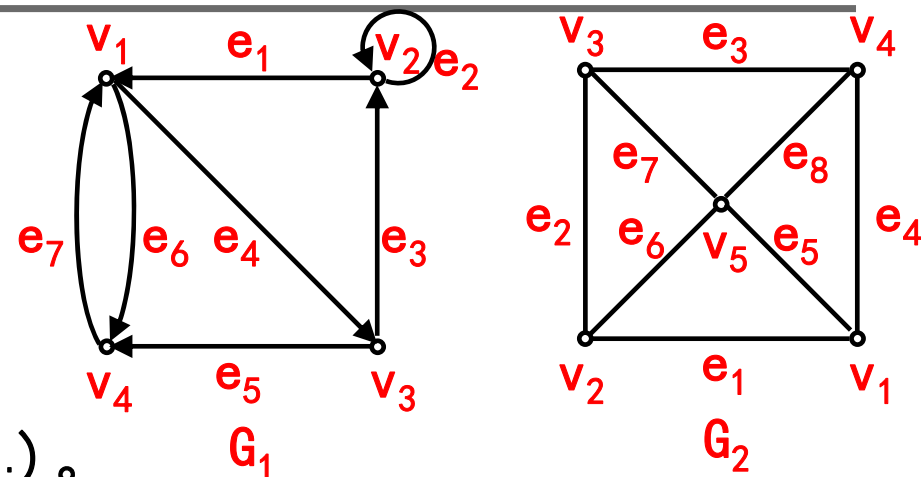
说明

$d(v_i, v_j)$ 满足下列性质：

(1) $d(v_i, v_j) \geq 0$;

(2) $d(v_i, v_i) = 0$;

(3) $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$ 。



对于无向图，一定有若 v_i 到 v_j 可达，则 v_j 到 v_i 可达；也有 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

对于有向图， v_i 到 v_j 可达，不一定有 v_j 到 v_i 可达；也不一定有 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

例如在上图 G_1 中， $d(v_1, v_2) = 2$ ， $d(v_2, v_1) = 1$ ， $d(v_4, v_1) = d(v_1, v_4) = 1$ ， $d(v_2, v_4) = 2$ ， $d(v_4, v_2) = 3$ ；

在上图 G_2 中， $d(v_1, v_3) = 2$ ， $d(v_3, v_4) = 1$ ， $d(v_2, v_4) = 2$ 。

定理8.3.2

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的通路。

分析 通路的长度为序列中的结点数减1，如果结点不重复，最多 n 个，因此通路长度最多 $n-1$ ；如果结点有重复，则在重复的结点间构成一条回路，删除这条回路，剩下的仍然是从结点 v_i 到结点 v_j 的通路。一直删下去，直到无重复结点为止，这样定理就得证了。

证明

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有 $k+1$ 个结点。若 $k \leq n-1$ ，这条通路即为所求。若 $k > n-1$ ，则此通路上的结点数 $k+1 > n$ ，由鸽笼原理知，必存在一个结点在此通路中不止一次出现，设 $v_{i_s} = v_{i_t}$ ，其中， $0 \leq s < t \leq k$ 。去掉 v_{i_s} 到 v_{i_t} 中间的通路，至少去掉一条边，得通路 $v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_s}, v_{i_{t+1}}, \cdots, v_{i_k}$ ，此通路比原通路的长度至少少1。如此重复进行下去，必可得一条从 v_i 到 v_j 的长度不大于 $n-1$ 的通路。

几个结论

推论8.3.1 在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的基本通路。

定理8.3.3 在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的回路。

推论8.3.2 在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的基本回路。

利用邻接矩阵判断可达

利用定理8.3.2和定理8.3.3，我们可以通过计算图的邻接矩阵及其幂的方法来判断从 v_i 到 v_j 是否可达，以及从 v_i 到 v_j 的距离。

设矩阵 $B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$

则 B^n 中的元素

$$b_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n a_{ij}^{(m)}$$

表示图 G 中从结点 v_i 到结点 v_j 的长度小于等于 n 的通路总数，若 $i = j$ ， $b_{ii}^{(n)}$ 为 G 中结点 v_i 到自身的长度小于等于 n 的回路总数。

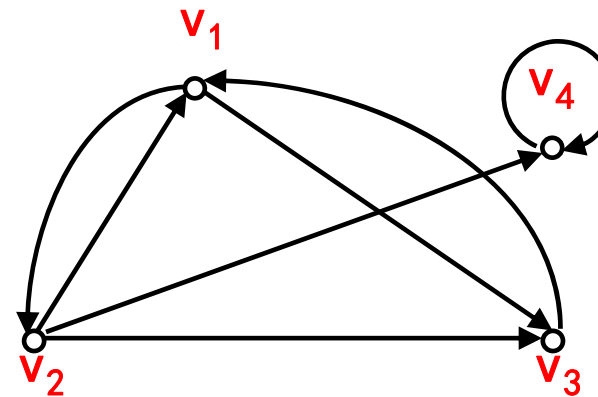
定理8.3.4

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$, $m=1, 2, \dots, n$; $B^n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ 。则有: 如果 $b_{ij}^{(n)} > 0$, 那么从 v_i 到 v_j 可达, 否则不可达; 并且

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, & \text{如果所有 } a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(n)} \text{ 均为 } 0 \\ k, & \text{否则, } k = \min \{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0, m = 1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

例8.3.3

判断右图中图G中结点之间的可达关系，并求任两结点间的距离。



分析 利用定理8.3.4，先写出图的邻接矩阵A，然后计算A的幂即可。

解

在图中，G的邻接矩阵及其2、3、4次幂分别为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解(续)

从而有

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

故从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_3 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_4 到 v_4 都是可达的，从 v_4 到 v_1, v_2, v_3 都是不可达的。并且有

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) \\ &= d(v_3, v_1) = 1, d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2, d(v_3, v_4) = 3, \\ d(v_4, v_1) &= d(v_4, v_2) = d(v_4, v_3) = \infty. \end{aligned}$$

定义8.3.3

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个线图，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序，称 n 阶方阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的可达性矩阵 (Accessibility Matrix)，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条非零长度的通路} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

说明

无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称。

与邻接矩阵不同，可达性矩阵不能给出图的完整信息，但由于它简便，在应用上还是很重要的。

如果我们知道矩阵 B_n ，则只需将其中的非零元素写成1，就可得到可达性矩阵，即

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij}^{(n)} \neq 0 \\ 0, & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

定理8.3.5

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图， A 、 P 分别是 G 的邻接矩阵和可达性矩阵，则有

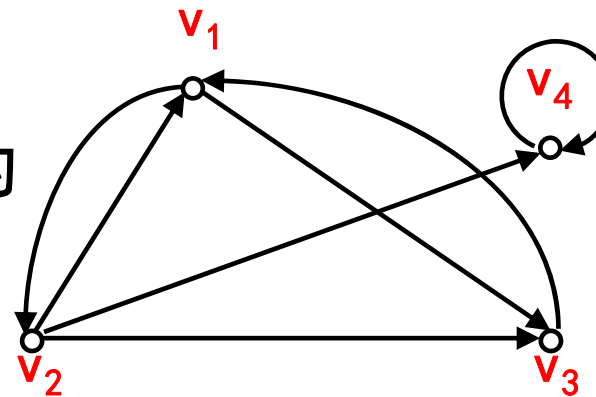
$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)} = \bigvee_{i=1}^n A^{(i)}$$

这里， $A^{(i)}$ 表示做矩阵布尔乘法的 i 次幂。

例8.3.4

求右图中图G中的可达性矩阵。

分析 直接利用定理8.3.5，先计算图的邻接矩阵A布尔乘法的2、3、4次幂，然后做布尔加即可。



解 在图8.3.4中，G的邻接矩阵及其2、3、4次布尔乘法幂分别为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = A \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例8.3.4(续1)

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(2)} \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{A}^{(3)} \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例8.3.4(续2)

于是该图的可达性矩阵为：

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{(1)} \vee \mathbf{A}^{(2)} \vee \mathbf{A}^{(3)} \vee \mathbf{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这与我们利用 B_4 求得的结果完全一致。

8.3.2 无向图的连通性

定义8.3.4 若无向图G中的任何两个结点都是可达的，则称G是**连通图** (Connected Graph)，否则称G是**非连通图** (Unconnected Graph) 或 **分离图** (Separated Graph)。

无向完全图 K_n ($n \geq 1$) 都是连通图，而多于一个结点的零图都是非连通图。

利用邻接矩阵A和可达性矩阵P，显然有：

非平凡无向线图G是连通图当且仅当它的可达性矩阵P的所有元素均为1。

定理8.3.6

无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中结点之间的可达关系 R 定义如下：

$$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V, u \text{ 到 } v \text{ 可达} \},$$

则 R 是 V 上的等价关系。

分析 利用等价关系的定义，很容易证明 R 是自反、对称、传递的。

说明

利用等价关系的特点，即等价关系可以导致集合的划分，因此对于任何无向图的结点集都存在一种划分，使得每个划分块中的结点都彼此可达，而两个不同划分块中的结点都不可达。

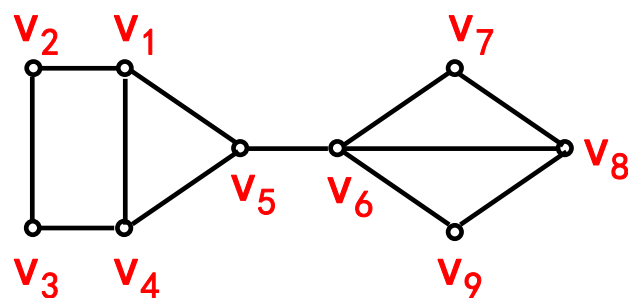
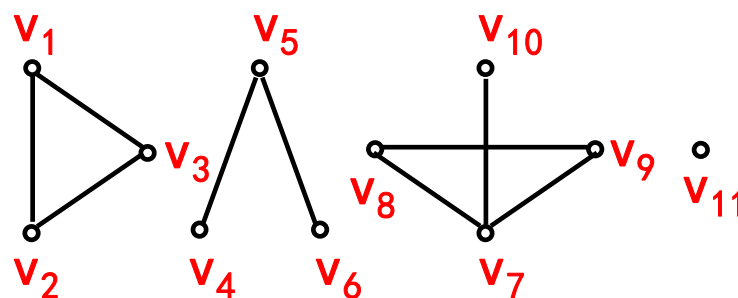
定义8.3.5

无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中结点之间的可达关系 R 的每个等价类导出的子图都称为 G 的一个连通分支 (Connected Component)。用 $p(G)$ 表示 G 中的连通分支个数。

显然，无向图 G 是连通图当且仅当 $p(G) = 1$ ；
每个结点和每条边都在且仅在一个连通分支中。

例8.3.5

判断下图中图 G_1 和 G_2 的连通性，并求其连通分支个数。

 G_1  G_2

分析 本题中图很简单，并且给出了图形，很容易看出 G_1 是连通图， G_2 是非连通图。容易看出， G_2 中可达关系的等价类为 $\{v_1, v_2, v_3\}$ ， $\{v_4, v_5, v_6\}$ ， $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ ， $\{v_{11}\}$ ，它们导出的子图即为 G_2 的4个连通分支。

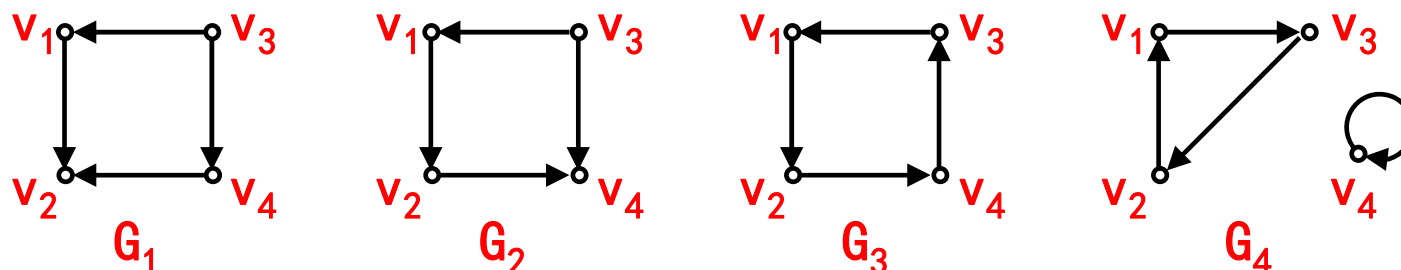
8.3.3 有向图的连通性

定义8.3.5 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有向图,

1. 略去 G 中所有有向边的方向得无向图 G' , 如果无向图 G' 是连通图, 则称有向图 G 是连通图或称为弱连通图 (Weakly Connected Graph)。否则称 G 是非连通图;
2. 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的, 则称 G 是单向连通图 (Unilaterally Connected Graph);
3. 若 G 中任何一对结点之间都是相互可达的, 则称 G 是强连通图 (Strongly Connected Graph)。

例8.3.6

判断下图中4个图的连通性。



解 在上图中， G_1 是弱连通图， G_2 是单向连通图（当然它也是弱连通图）， G_3 是强连通图（当然它也是单向连通图和弱连通图）， G_4 是非连通的有向图。

定理8.3.7

有向图 G 是强连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点的回路。

证明 充分性：如果 G 中存在一条经过所有结点的回路 C ，则 G 中任意二结点均在回路 C 上，所以 G 中任二结点都是相互可达的，因而 G 是强连通图。

必要性：设 G 是强连通图，那么 G 中任二结点均是相互可达的。不妨设 G 中的结点为 v_1, v_2, \dots, v_n ，因为 v_i 到 v_{i+1} 是可达的， $i=1, 2, \dots, n-1$ ，且 v_n 到 v_1 是可达的，所以 v_i 到 v_{i+1} 存在通路， $i=1, 2, \dots, n-1$ ，且 v_n 到 v_1 存在通路。让这些连通首尾相接，则得一回路 C 。显然所有结点均在该回路中出现。

利用A和P判断有向图的连通性

1. 有向线图G是强连通图当且仅当它的可达性矩阵P的所有元素均为1；
2. 有向线图G是单向连通图当且仅当它的可达性矩阵P及其转置矩阵 P^T 经过布尔并运算后所得的矩阵 $P' = P \vee P^T$ 中除主对角元外其余元素均为1；
3. 有向线图G是弱连通图当且仅当它的邻接矩阵A及其转置矩阵 A^T 经布尔并运算所得的矩阵 $A' = A \vee A^T$ 作为邻接矩阵而求得的可达性矩阵P'中所有元素均为1。

定义8.3.6

在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 设 G' 是 G 的子图, 如果

- (1) G' 是**强连通的** (**单向连通的**、**弱连通的**) ;
- (2) 对任意 $G'' \subseteq G$, 若 $G' \subset G''$, 则 G'' 不是**强连通的** (**单向连通的**、**弱连通的**) ;

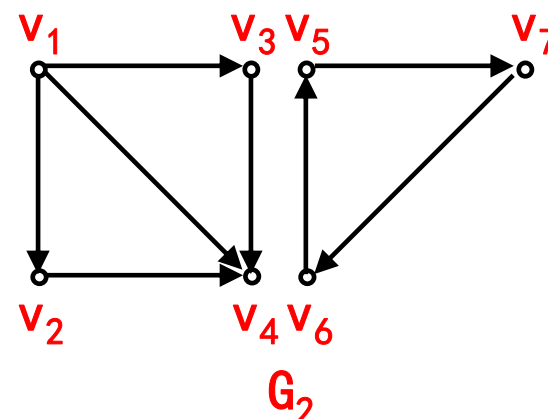
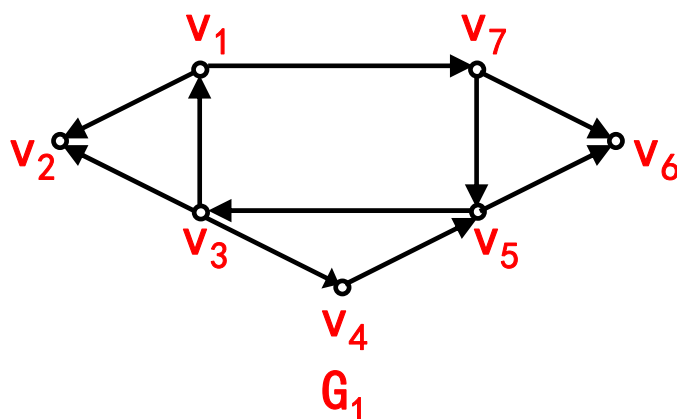
那么称 G' 为 G 的**强连通分支** (**单向连通分支**、**弱连通分支**) (Strongly/Unilaterally/weakly Connected Component), 或称为**强分图** (**单向分图**、**弱分图**) 。

注

1. 如果不考虑边的方向，弱连通分支对应相应的无向图的连通分支。
2. 注意把握（强、单向、弱）连通分支的**极大性特点**，即任意增加一个结点或一条边就不是（强、单向、弱）连通的了。

例8.3.7

求下面2个图的强、单向和弱连通分支。



分析 由定义从某个结点开始逐渐增加结点，看它们导出的子图是否是强（单向或弱）分图。

一个关系

若在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的结点集 V 上定义二元关系 R 为： $\langle v_i, v_j \rangle \in R$ 当且仅当 v_i 和 v_j 在同一强（弱）连通分支中， $\forall v_i, v_j \in V$ 。显然， R 是一个等价关系。

因为每一个结点 v_i 和自身总在在同一强（弱）连通分支中，所以 R 是自反的；若结点 v_i 和 v_j 在同一强（弱）连通分支中，显然 v_j 和 v_i 也在同一强（弱）连通分支中，所以 R 是对称的；又若结点 v_i 和 v_j 在同一强（弱）连通分支中，结点 v_j 和 v_k 在同一强（弱）连通分支中，则 v_i 和 v_j 相互可达， v_j 和 v_k 相互可达，因而 v_i 和 v_k 相互可达，故 v_i 和 v_k 在同一强（弱）连通分支中，所以 R 是传递的。

一个关系

若在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的结点集 V 上定义二元关系 R 为： $\langle v_i, v_j \rangle \in R$ 当且仅当 v_i 和 v_j 在同一强（弱）连通分支中， $\forall v_i, v_j \in V$ 。显然， R 是一个等价关系。

这种等价关系把结点分成等价类，等价类的集合是 V 上的一个划分，每一个等价类的结点导出一个强（弱）连通分支。

三个定理

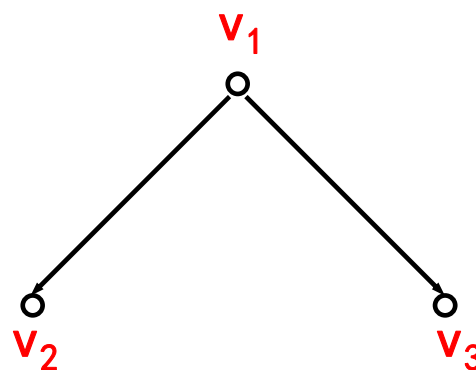
定理8.3.8 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中。

定理8.3.9 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一个结点至少位于一个单向连通分支中。

定理8.3.10 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

例

对于“两结点在同一单向连通分支中”这一关系，虽然它是自反的，对称的，但它不是传递的。



上图中， v_2 和 v_1 在同一单向连通分支中， v_1 和 v_3 在同一单向连通分支中，但 v_2 和 v_3 不在同一单向连通分支中。

8.3.5 通路、回路与连通性的应用

1、渡河问题

例8.3.7 一个摆渡人要把一只狼、一只羊和一捆菜运过河去。由于船很小，每次摆渡人至多只能带一样东西。另外，如果人不在旁时，狼就要吃羊，羊就要吃菜。问这人怎样才能将它们运过河去？

解 用F表示摆渡人，W表示狼，S表示羊，C表示菜。

若用FWSC表示人和其它三样东西在河的原岸的状态，这样原岸全部可能出现的状态为以下16种：

解(续1)

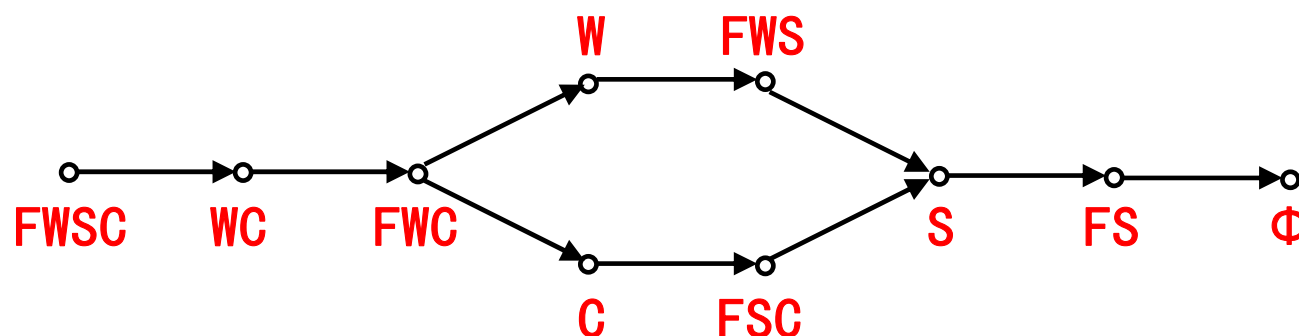
FWSC	FWS	FWC	FSC	WSC	FW	FS	FC
WS	WC	SC	F	W	S	C	Φ

这里 Φ 表示原岸什么也没有，即人、狼、羊、菜都已运到对岸去了。

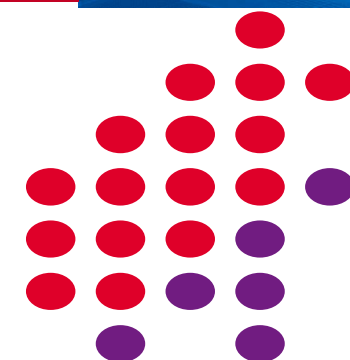
根据题意我们知道，这16种情况中有6种是不允许的，它们是：WSC、FW、FC、WS、SC、F。如FC表示人和菜在原岸，而狼和羊在对岸，这当然是不行的。因此，允许出现的情况只有10种。

解(续2)

以这10种状态为结点，以摆渡前原岸的一种状态与摆渡一次后仍在原岸的状态所对应的结点之间的联线为边做有向图G，如图



图中给出了两种方案，方案为图8. 3. 9中的从FWSC到 Φ 的不同的基本通路，它们的长度均为7，按图中所指方案，摆渡人只要摆渡7次就能将它们全部运到对岸，并且羊和菜完好无损。



Thank You !