§5.3 实对称矩阵的相似矩阵

说明：1. 一般方阵常常不能对角化

2. 对角化条件一般难于判断。

本节主要结论：实对称矩阵

（1） 特征值必为实数

（2） 必相似于对角矩阵

（3） 且可正交相似于对角矩阵（相似变换可为正交变换）

一、实对称矩阵的特征值和特征向量

定理5.6 实对称矩阵的特征值为实数，对应的特征向量是实向量.

分析 复数$z=a+bi$是实数 $\Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow a-bi=a+bi$
$\Leftrightarrow \overline{a+bi}=a+bi \Leftrightarrow \bar{z}=z$

证明 设λ是A的特征值, x是对应特征向量,

已知: $\bar{A}=A,\ A^{\mathrm{T}}=A,\ Ax=\lambda x(x\neq 0)$, 欲证$\bar{\lambda}=\lambda$

由 $Ax=\lambda x \quad \Rightarrow \quad \bar{A}\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$, 但 $\bar{A}=A$, $\quad \therefore A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$

$$\Rightarrow \bar{x}^{\mathrm{T}}Ax=\bar{x}^{\mathrm{T}}\lambda x=\lambda(\bar{x}^{\mathrm{T}}x),$$ 注意是数!

及 $\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax=(\bar{x}^{\mathrm{T}}A)x=(A^{\mathrm{T}}\bar{x})^{\mathrm{T}}x=(A\bar{x})^{\mathrm{T}}x=(\bar{\lambda}\bar{x})^{\mathrm{T}}x$
$=\bar{\lambda}(\bar{x}^{\mathrm{T}}x)$ 数!

上二式相减 $\Rightarrow (\lambda-\bar{\lambda})(\bar{x}^{\mathrm{T}}x)=0$

设 $x^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\because \bar{x}^{\mathrm{T}}x=\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2+\cdots+\bar{x}_nx_n=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2\neq 0$$

$\therefore \lambda - \bar{\lambda} = 0$，即 λ 是实数.

$\therefore$ 在方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 中，系数矩阵是实矩阵.

$\therefore$ 解向量是实向量。 **证毕**

定理5.7 设实对称阵A的两个特征值λ_1, λ_2互异，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$是对应特征向量，则 $\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2$.

即： 实对称阵的不同特征值所对应的特征向量互相正交.

证明 已知$A = A^{\mathrm{T}}, \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = A\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = A\boldsymbol{p}_2$,欲证 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0$.

$\because A^{\mathrm{T}} = A, \quad \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = A\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = A\boldsymbol{p}_2,$

$\therefore \lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} A$

$\therefore \lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{p}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2$

$$\therefore (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0.$$

但$\lambda_1 \neq \lambda_2$， $\therefore \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$，即 $\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2$ **证毕**

例1 已知三阶实对称矩阵A的特征值为$1,-1,0$，其中$\lambda_1=1$与$\lambda_3=0$对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{p}_1=(1,a,1)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{p}_3=(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$$

求矩阵A.

解 因为A是实对称矩阵，所以A的不同特征值的特征向量正交，$\therefore \boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_3$

$$\therefore [\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3]=1\cdot a+a(a+1)+1\cdot 1=0 \Rightarrow a=-1$$

又设$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$是$A$的对应于特征值$\lambda_2=-1$的特征向量，它和$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3$都正交，则有

$$\begin{cases}[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=1\cdot x_1+(-1)x_2+1\cdot x_3=0\\ [\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_2]=(-1)\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3=0\end{cases}$$

齐次线性方程组系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=2x_3\end{cases}\Rightarrow \text{基础解系为}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$

$$故A = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

二、正交矩阵

例 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2)$

$$A^{\mathrm{T}}A = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \alpha_1 \perp \alpha_2,\ 且\ \|\alpha_1\| = \|\alpha_2\| = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \perp \beta_2,\ 且\ \|\beta_1\| = \|\beta_2\| = 1$$

定义5.5 n阶实方阵A是正交矩阵

$$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}A = E (\Leftrightarrow A^{-1} = A^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow AA^{\mathrm{T}} = E)$$

性质 (1) $\det A = \pm 1$;

证 $\det(A^{\mathrm{T}}A) = \det E \Rightarrow \det A^{\mathrm{T}} \cdot \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1$

(2) A是正交阵 $\Leftrightarrow$ 1^{o}. A^{T} 是正交阵

$\Leftrightarrow$ 2^{o}. A^{-1}是正交阵($\Rightarrow$ 正交阵必可逆)

$\Leftrightarrow$ 3^{o}. A^{*} 是正交阵

证 1^{o} "$\Rightarrow$" 设$AA^{\mathrm{T}} = E$, $\therefore (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}) = AA^{\mathrm{T}} = E$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}$是正交阵;

"$\Leftarrow$" 设 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}) = E$, $\therefore AA^{\mathrm{T}} = E$

$\Rightarrow A$ 是正交阵;

2^{o} "$\Rightarrow$" 设 $AA^{\mathrm{T}} = E$,

$\therefore (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1} = (AA^{\mathrm{T}})^{-1} = E^{-1} = E$

$\Rightarrow A^{-1}$是正交阵;

“$\Leftarrow$”设 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}=E \Rightarrow (A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}=E$

$\Rightarrow (AA^{\mathrm{T}})^{-1}=E \Rightarrow AA^{\mathrm{T}}=E$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}$是正交阵;

3^{o} “$\Rightarrow$” 设 A 是正交阵,$\therefore A$ 可逆. 由 $A^{*}A=(\det A)E$

$\Rightarrow A^{*}=(\det A)A^{-1}$, $\therefore (A^{*})^{\mathrm{T}}=(\det A)(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

$\therefore (A^{*})^{\mathrm{T}}A^{*}=\det A\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\det A\cdot A^{-1}$

$$=(\det A)^{2}(A^{-1})^{\mathrm{T}}(A^{-1})E.$$

“$\Leftarrow$” 设 A^{*} 是正交阵,$\therefore A^{*}$ 可逆. 由 $A^{*}A=(\det A)E$

$\Rightarrow \det A\neq 0$ (否则 $A^{*}A=O\Rightarrow A=O$, 矛盾)

$\therefore \det A^{*}=(\det A)^{n-1}=\pm 1, \det A=\pm 1$

由$A^{*}A=(\det A)E \Rightarrow A=(\det A)(A^{*})^{-1}$

$$\therefore \quad A^{\mathrm{T}}A = (\det A)(A^*)^{-\mathrm{T}}(\det A)(A^*)^{-1}$$

$$= (\det A)^2[A^* \cdot (A^*)^{\mathrm{T}}]^{-1} = (\det A)^2 E = E.$$

证毕

(3) A, B 是正交阵 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ AB 是正交阵;

证 设$A^{\mathrm{T}}A = E, B^{\mathrm{T}}B = E \Rightarrow (AB)^{\mathrm{T}}(AB) = B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)B = E$

反之，取 $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 都不是正交阵,

但 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交阵.

(4) 实方阵 A 是正交阵

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组是单位正交向量组;

$\Leftrightarrow$ A 的行向量组是单位正交向量组;

证

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$$

$\therefore \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j=[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j]=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},(i,j=1,\cdots,n)$

证毕

三、实对称矩阵正交相似于对角矩阵

定理5.8 设A是n阶实对称阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值

则有正交矩阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

此时称 A 正交相似于 Λ.

证明 对A的阶数用数学归纳法

(1) 当$n=1$时，$A=(a_{11})$，取正交阵$Q=(1)$，使

$Q^{\mathrm{T}}AQ=(a_{11})=\Lambda$成立；

(2) 设对 $n-1$ 时，结论成立.

对n：设q_1是对应于特征值λ_1的单位特征向量，即

$$Aq_1=\lambda_1 q_1 \text{ 且 } \|q_1\|=1,$$

考虑与$\boldsymbol{q}_1$正交的任一向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$：$\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$

视x为未知向量，则此齐次线性方程组：

有 n 个未知数, 一个方程, 系数矩阵为 $\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}$，$rank\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}=1$

$\therefore$基础解系恰含 $n-1$ 个线性无关解向量，设为

$\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n.$ 对其正交化且标准化，可得

标准正交向量组 $\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_2,\cdots\boldsymbol{q}_n$

$\therefore \boldsymbol{Q}_1 \triangleq (\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n)$ 是正交阵, 且数：

$$\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i=(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1)=\lambda_1\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\delta_{1i},$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

$$\therefore \boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_n \\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$， $b_{ij} = \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_j$， $i, j = 2, \ldots, n$

易见$b_{ji}=\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i=(\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_j=\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_j=b_{ij}$

$\therefore \boldsymbol{B}$是$n-1$阶实对称矩阵，由归纳假设，

$\exists n-1$阶正交阵$\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$,使

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^{-1}\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{Q}}_2=\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{Q}}_2=diag(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$$

现令 $\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{Q}}_2\end{pmatrix}_{n\times n}$,及 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$.

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}_2$是正交阵：$\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{Q}}_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{Q}}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}$

$\therefore\quad Q$ 是正交阵.

$$\therefore\ Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=Q_2^{\mathrm{T}}\left(Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1\right)Q_2$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{Q}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{Q}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{Q}_2^{\mathrm{T}}B\tilde{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$\therefore$由(1)与(2)，可知实对称矩阵 A 正交相似于对角矩阵

证毕

推论 设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$是$n$ 阶实对称矩阵A的m 个不同的特征值，重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_m$，且

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$$

则 r_i 重特征值 λ_i 必有 r_i 个线性无关的特征向量.

证 由定理5.8，A 实对称 $\Rightarrow$ A相似于对角阵 Λ,

由定理5.5 推论2 $\Rightarrow$ λ_i 有 r_i 个线性无关特征向量.

➢ n 阶实对称阵 A 正交相似于对角阵的问题与求解步骤

问题： 求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

步骤 （1）求 A 的全部特征值(含重数)，即

解一元 n 次方程 $\det(A-\lambda E)=0$

根：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$;

重数：r_1，$r_2,\cdots,r_m$，　且 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$

(2) 对每个 λ_i,求对应的 r_i 个线性无关的特征向量：

$$\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{ir_i},\qquad i=1,2,\cdots,m$$

即求齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，

注意：必有 $rank(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-r_i$,对应解空间 $\boldsymbol{S}_i$, $\dim\boldsymbol{S}_i=r_i$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{ir_i}$, 正交化，单位化，得

$$\boldsymbol{q}_{i1},\boldsymbol{q}_{i2},\cdots,\boldsymbol{q}_{ir_i},$$ 仍为 λ_i 之特征向量；

(4) 写出正交矩阵（即为正交相似变换矩阵）

$$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{q}_{11},\cdots,\boldsymbol{q}_{1r_1},\boldsymbol{q}_{21},\cdots,\boldsymbol{q}_{2r_2},\cdots,\boldsymbol{q}_{m1},\cdots,\boldsymbol{q}_{mr_m}\right),$$

及对角阵

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}\right\} r_1\text{个} & & & \\ & \left.\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}\right\} r_2\text{个} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left.\begin{matrix}\lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{matrix}\right\} r_m\text{个} \end{pmatrix}$$

例2 对下列实对称矩阵A,求正交矩阵Q,使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角矩阵

$$(1)A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解（1）$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)$

特征值 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$

由$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

由$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

由$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

特征向量$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\because \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互异，$\therefore \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 互相正交(可直接验证)

单位化 $\Rightarrow \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$

所求正交阵为 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$

使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

（2）由P133例题5. 4知A的特征值为λ_1=5，$\lambda_2=\lambda_3=-1$

相应于λ_1=5的特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

相应于λ_2=λ_3=−2的特征向量$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

则$\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$与$\boldsymbol{p}_1$正交，但$\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$不正交，正交化得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{p}_3-\frac{[\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

再单位化$\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

所求正交阵为$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,

使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

练习 (2002数一 8分)

设A,B为同阶方阵，

(1) 如果A,B相似，试证A,B的特征多项式相等；

(2) 举一个2阶方阵的例子,说明(1)的逆命题不成立；

(3) 当AB均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.