第八节 级数的应用

- 一、近似计算
- 二、欧拉公式
- ★ 三、物理应用

一、近似计算

1.函数值的近似计算

例1 计算 $\sqrt[3]{130}$ 的近似值，精确到 10^{-4}.

$$m=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{1}{25}$$

解 $\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$

二项展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

$$\sqrt[3]{130}=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\cdots\right]$$

$$\sqrt[3]{130} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25} - \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 + \cdots\right]$$

属莱布尼茨交错级数　$(因\ u_n \geq u_{n+1} \to 0)$

n 项余和满足　$: |r_n| < u_{n+1}$

取 $n = 2$ (前三项), $|r_2| < u_3$

$$= 5\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3\,!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 = \frac{1}{81\cdot 625} < \frac{1}{80600} < 10^{-4}$$

故 $\sqrt[3]{130} \approx 5[1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)$

$$= 5 + \frac{24}{1125} \approx 5.0658$$

2.定积分的近似计算

例2 求积分$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值，精确到 10^{-6}.

解 $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$

$(-\infty < x < +\infty)$

逐项积分，得

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{0.2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{0.2} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^{0.2}$$

$$= 0.2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5 - \frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7 + \cdots$$

目 录 上 页 下 页 例3-1 结 束

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0.2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5 - \frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7 + \cdots$$

莱布尼茨交错级数，取前三项，则误差为

$$|r_3| < \frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7 = \frac{1}{3281250} < 10^{-6}$$

故 $\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5$

$$\approx 0.2 - 0.0026667 + 0.0000320$$

于是 $\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.197365$.

二、欧拉(Euler)公式

1.复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ ①

① 收敛： 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n=v$ 均收敛;

① 绝对收敛: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n+iv_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ 绝对收敛

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ 收敛.

$$\left|u_n\right|\le\sqrt{u_n^{\,2}+v_n^{\,2}}$$

$$\left|v_n\right|\le\sqrt{u_n^{\,2}+v_n^{\,2}}$$

2.欧拉公式

可证在复平面上绝对收敛

复变量指数函数 $(z = x + iy)$

$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^{2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{n} + \cdots \quad (\,|z| < \infty\,)$$

$y = 0$ 时, 同实指数函数 e^{x} ;

$x = 0$ 时, $e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^{2} + \frac{1}{3!}(iy)^{3} + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^{n} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^{2} + \frac{1}{4!}y^{4} - \cdots + \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}y^{2n} + \cdots\right)$$

$$+ i\left(y - \frac{1}{3!}y^{3} + \frac{1}{5!}y^{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$

欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

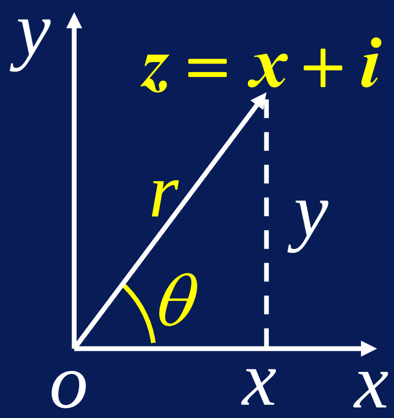
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

则 $\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{cases}$ （也称欧拉公式）

- 复数的指数形式

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z=re^{i\theta}$$



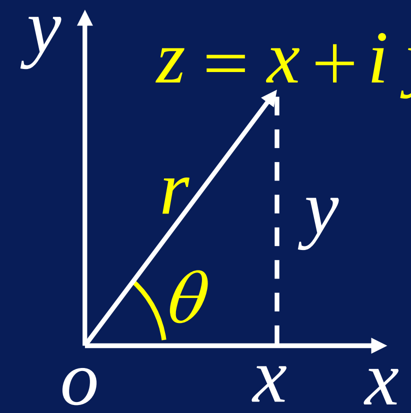
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$= \cos n\theta + i\sin n\theta$

(德莫弗公式)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$



特别

$$e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x(\cos y + i\sin y)\right| = e^x$$