§1.7 克拉默(Cramer)法则

- 引入：在第一节曾给出用行列式求解二元线性方程组和三元线性方程组的方法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

当它们的系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_i = \frac{D^{(i)}}{D} \qquad (i = 1,2,3)$$

一、线性方程组的概念

- 线性关系——加法和数乘

一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的方程组.它包含**m**个方程，**n**个**未知数** $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $m \times n$ 个**系数** a_{ij}，其中 i 为第 i 个方程码, j 为 x_j 之系数码；$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 称为**常数项或右端项**。

方程分类：$\begin{cases} b_1 = \cdots = b_m = 0, & \text{齐次线性方程组} \\ b_1, b_2, \cdots, b_m \text{不全为零，} & \text{非齐次线性方程组} \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

方程组之解：$x_1 = k_1, x_2 = k_2, \cdots, x_n = k_n$代入方程组，使每一个方程为恒等；

解集：解 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$之全体；

通解：能表示任一解的表达式；

同解：两个线性方程组有相同的解集合；

相容：即有解；不相容：即无解，或矛盾的。

特殊情况：对齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$显然是它的解，称为**零解**；若还有另外一组解 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \cdots, x_n = k_n$，且$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为**0**，则称之为**非零解**。

线性方程组所需讨论的问题：

1. 齐次方程组必有零解。

（1）有非零解（或只有零解）的充要条件；

（2）通解的结构，解的性质；

（3）解法 ；

2. 非齐次线性方程组

（1）是否有解？有解（或无解）的充要条件；

（2）有多少解？有唯一解的充要条件，有无穷多解的充要条件；

（3）解不止一个时，解的性质，解的结构；

（4）解法。

二、Cramer法则

只适用于方程个数=未知数个数的情况，即 $m=n$

定理1.6 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有唯一解，并且解可以表示为

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D},\ x_2=\frac{D^{(2)}}{D},\ x_3=\frac{D^{(3)}}{D},\cdots,x_n=\frac{D^{(n)}}{D}.$$

其中 $D^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 中第 $\boldsymbol{j}$ 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 $\boldsymbol{n}$ 阶行列式，即

$$D^{(j)}=\begin{array}{c}
\hphantom{a_{11}\cdots a_{1,j-1}}\ \text{第}\,j\,\text{列}\hphantom{a_{1,j+1}\cdots a_{1n}} \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}$$

证明 先证解的存在性.构造$n+1$阶行列式

$$\tilde{D}_{n+1}=\begin{array}{|c:cccccc|l}
b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & \leftarrow r_1 \\ \hdashline
b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & \leftarrow r_{i+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & (n+1)
\end{array}=0$$

第一行中元素 a_{ij}的代数余子式

$$\tilde{A}_{1,j+1}=(-1)^{1+(j+1)}\begin{vmatrix}
b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

$$
=(-1)^{j+2}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=-D^{(j)}
$$

将 $\tilde{D}$ 按第一行展开得,

$$
b_i D + a_{i1}(-D^{(1)}) + \cdots + a_{in}(-D^{(n)}) = 0
$$

又因为 $\boldsymbol{D \neq 0}$,

$$
a_{i1}\frac{D^{(1)}}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D^{(n)}}{D} = b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)
$$

则当 $\boldsymbol{D \neq 0}$ 时, 方程组(1)有解

$$
x_1 = \frac{D^{(1)}}{D},\ x_2 = \frac{D^{(2)}}{D},\ x_3 = \frac{D^{(3)}}{D},\cdots,x_n = \frac{D^{(n)}}{D}.
$$

下面证方程组解的唯一性。设方程组还有一组解 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，则有

$$x_j^* D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j}x_j^* & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j}x_j^* & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj}x_j^* & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \frac{c_j + x_l^* c_l}{\overline{\quad l = 1, \cdots, n (l \neq j) \quad}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{11}x_1^* + \cdots + a_{1j}x_j^* + \cdots + a_{1n}x_n^* & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{21}x_1^* + \cdots + a_{2j}x_j^* + \cdots + a_{2n}x_n^* & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n1}x_1^* + \cdots + a_{nj}x_j^* + \cdots + a_{nn}x_n^* & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = D^{(j)}
$$

所以有 $\quad x_j^* D = D^{(j)}$

同理可得 $\quad x_j D = D^{(j)}$

所以 $\quad x_j^* = x_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$

证毕

例1 用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$D^{(1)} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D^{(3)}=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}$$

$$=-27,$$

$$D^{(4)}=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=27,$$

$$\therefore x_1=\frac{D^{(1)}}{D}=\frac{81}{27}=3,\qquad x_2=\frac{D^{(2)}}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D^{(3)}}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\qquad x_4=\frac{D^{(4)}}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

- 使用克拉默法则求解方程组需要注意的几个问题

1.克拉默法则只适用于方程个数和未知数个数相同的情形；

2.克拉默法则的理论意义：它给出了解与系数的明显关系，但计算量大，不可取；

3. 推论1　若线性方程组(1)的系数行列式不为0，则此方程组一定有解，且解唯一；

推论2　若方程组(1)无解或有两个不同解，则其系数行列式必为0。

定理1.7 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组只有零解。

推论 若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D = 0$。

例2 问λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

有非零解？

解 由定理1.7的推论知，该线性方程组系数行列式为0，即

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{\underset{c_3+(\lambda-1)c_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3\\ 2 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3\\ 1-\lambda & 2\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & -(\lambda+1)\\ 1-\lambda & 2\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(2\lambda-1-\lambda^2+1)=(\lambda-3)(-\lambda^2+2\lambda)$$

$$=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)=0$$

所以 $\boldsymbol{\lambda=0,\lambda=2}$ 或 $\boldsymbol{\lambda=3}$时齐次方程组有非零解.

注　若方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$表示某类特殊的已知量(如函数，向量等)，而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$表示相同类型的“未知量”，则克拉默法则依旧适用。

例3 对于函数方程组 $\begin{cases} 2f_1 + f_2 + f_3 = x^2 + x + 3 \\ -f_1 + 2f_2 - f_3 = -x^2 + 2x + 1 \\ f_1 - 3f_2 + f_3 = x^2 - 3x - 2 \end{cases}$

求函数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$

解 由克拉默法则

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$D^{(1)} = \begin{vmatrix} x^2 + x + 3 & 1 & 1 \\ -x^2 + 2x + 1 & 2 & -1 \\ x^2 - 3x - 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & x^2+x+3 & 1 \\ -1 & -x^2+2x+1 & -1 \\ 1 & x^2-3x-2 & 1 \end{vmatrix} = -x-1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x^2+x+3 \\ -1 & 2 & -x^2+2x+1 \\ 1 & -3 & x^2-3x-2 \end{vmatrix} = -x^2,$$

$$f_1(x) = \frac{D^{(1)}}{D} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad f_2(x) = \frac{D^{(2)}}{D} = \frac{-x-1}{-1} = x+1,$$

$$f_3(x) = \frac{D^{(3)}}{D} = \frac{-x^2}{-1} = x^2.$$

- 下周二下午六点之前交第一章作业