第二部分　代数系统

第五章　代数系统基础

主要内容

二元运算及其性质

- 一元和二元运算定义及其实例
- 二元运算的性质

代数系统

- 代数系统定义及其实例
- 子代数

代数系统的同态与同构

常用代数系统分类

5.1 二元运算及其性质

定义5.1 设S为集合，n元函数 f：$S^n \to S$ 称为S上的**n元运算**

若n=2，则函数 f：$S \times S \to S$ 称为S上的**二元运算**，简称为二元运算．对二元运算：

- S中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一．
- S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算封闭．

例1 (1) 自然数集合N上的加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是．

(2) 整数集合Z上的加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是．

(3) 非零实数集R*上的乘法和除法都是R*上的二元运算，而加法和减法不是．

实例

(4) 设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$M_n(R)=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij}\in R,\; i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

则矩阵加法和乘法都是M_n(R)上的二元运算.

(5) S为任意集合，则∪、∩、－、⊕ 为$P(S)$上二元运算.

一元运算的定义与实例

定义5.2 设S为集合，函数 $f:S\to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.

例2 (1) 求相反数是整数集合Z,有理数集合Q和实数集合R上的一元运算

(2) 求倒数是非零有理数集合Q*,非零实数集合R*上一元运算

(3) 求共轭复数是复数集合C上的一元运算

(4) 在幂集$P(S)$上规定全集为S，则求绝对补运算~是$P(S)$上的一元运算.

(5) 设S为集合，令A为S上所有双射函数的集合，求一个双射函数的反函数为A上的一元运算.

(6) 在$n(n\geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(\mathbf{R})$上，求转置矩阵是$M_n(R)$上的一元运算.

二元与一元运算的表示

1. 算符

可以用∘, ∗, · , ⊕, ⊗,Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符.

对二元运算∘，如果 x 与 y 运算得到 z，记做 $x \circ y = z$

对一元运算Δ, x的运算结果记作Δx.

2. 表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表

公式表示

例 设R为实数集合，如下定义R上的二元运算∗:

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x * y = x.$$

那么 $3*4 = 3$， $0.5*(-3) = 0.5$

运算表

运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例3 设 $S=P(\{a,b\})$，S上的⊕和 ~运算的运算表如下

⊕	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

二元运算的性质

定义5.3 设$\circ$为S上的二元运算,

(1) 若对任意$x,y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在S上满足交换律.

(2) 若对任意$x,y,z \in S$有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, 则称运算在$S$上满足结合律.

(3) 若对任意$x \in S$ 有 $x \circ x = x$, 则称运算在S上满足幂等律. x为运算$\circ$的幂等元.

定义5.4 设$\circ$和$*$为S上两个不同的二元运算,

(1) 若对任意$x,y,z \in S$有 $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$,
$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$, 则称$\circ$运算对$*$运算满足(第一/第二)分配律.

(2) 若$\circ$和$*$都可交换,且对任意$x,y \in S$有 $x \circ (x * y) = x$， $x * (x \circ y) = x$, 则称$\circ$和$*$运算满足吸收律.

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, n≥2；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集，|A|≥2

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩ 相对补− 对称差⊕	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无
A^A	函数复合∘	无	有	无

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, $n\geq2$；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集，$|A|\geq2$

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

特异元素：单位元、零元

定义5.5 设$\circ$为S上的二元运算，

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$e_l\circ x = x \quad (\text{或 } x\circ e_r = x),$$

则称e_l(或e_r)是S中关于$\circ$运算的左(或右)单位元.
若$e\in S$关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于$\circ$运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

(2) 如果存在θ_l(或θ_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$\theta_l\circ x = \theta_l \quad (\text{或 } x\circ \theta_r = \theta_r),$$

则称θ_l(或θ_r)是S 中关于$\circ$运算的左(或右)零元.
若$\theta\in S$ 关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于运算$\circ$的零元.

可逆元素和逆元

(3) 设$\circ$为S上的二元运算, 令e为S中关于运算$\circ$的单位元.

对于$x\in S$，如果$\exists y_l$(或 $\exists y_r$)$\in S$使得

$$y_l\circ x=e\text{（或}x\circ y_r=e\text{）}$$

则称y_l(或 y_r)是x的左逆元（或右逆元）.

关于$\circ$运算，若$y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y为x的逆元. 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x逆元$-x$ x逆元x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n阶全0矩阵 n阶单位矩阵	无 n阶全0 矩阵	X逆元$-X$ X的逆元X^{-1} （X可逆）
$P(B)$	并∪ 交∩ 对称差⊕	∅ B ∅	B ∅ 无	∅的逆元为∅ B的逆元为B X的逆元为X

惟一性定理

定理5.1 设$\circ$为S上的二元运算，e_l和e_r分别为S中关于运算的左和右单位元，则$e_l = e_r = e$为S上关于$\circ$运算的惟一的单位元.

证：**先证相等**

$$e_l = e_l \circ e_r \quad (e_r\text{为右单位元})$$
$$e_l \circ e_r = e_r \quad (e_l\text{为左单位元})$$

所以$e_l = e_r$, 将这个单位元记作e.

再证唯一：假设e'也是 S 中的单位元，则有 $e' = e \circ e' = e$. 惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

惟一性定理

定理5.2 设$\circ$为S上的二元运算, e和θ为该运算的单位元和零元, 如果S至少有两个元素，则$e \neq \theta$.

证：用反证法.

假若 $e = \theta$, 则$\forall x \in S$有

$$x = x \circ e = x \circ \theta = \theta$$

与S至少有两个元素矛盾.

- **注意:**
- 当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的;
- 当 $|S| = 1$时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理

定理5.3 设$\circ$为S上可结合的二元运算, e为该运算的单位元, 对于$x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r, 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.

满足结合律

证: 由 $y_l\circ x = e$ 和 $x\circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l\circ e = y_l\circ(x\circ y_r) = (y_l\circ x)\circ y_r = e\circ y_r = y_r$$

令$y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y'\in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y'\circ e = y'\circ(x\circ y) = (y'\circ x)\circ y = e\circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

- 说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}

消去律

定义5.6 设$\circ$为S上的二元运算，若对任意$x,y,z \in S$有

(1) 若$x \circ y = x \circ z$，且$x \neq \theta$，则$y=z$;

(2) 若$y \circ x = z \circ x$，且$x \neq \theta$，则$y=z$.

那么称此运算满足消去律，其中(1)称为左消去律,(2)称为右消去律.

- 注意：被消去的x不能是运算的零元θ
- 整数集合上的加法和乘法都满足消去律
- 幂集上的并和交运算一般不满足消去律

5.2 代数系统

定义5.6 非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1,f_2,\ldots, f_k$组成的系统称为**代数系统**, 简称代数，记做$<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

实例:

(1) $<N,+>$,$<Z,+,\cdot>$,$<R,+,\cdot>$是代数系统，+和·分别表示普通加法和乘法.

(2) $<M_n(R),+,\cdot>$是代数系统，＋和·分别表示 n 阶($n\geq 2$)实矩阵的加法和乘法.

(3) $<Z_n,\oplus,\otimes>$是代数系统，$Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，$\oplus$和$\otimes$分别表示模n的加法和乘法，对于$x,y\in Z_n$，$x\oplus y=(x+y)\bmod n$，$x\otimes y=(xy)\bmod n$

(4) $<P(S),\cup,\cap,\sim>$是代数系统，$\cup$和$\cap$为并和交，~为绝对补

代数系统的成分与表示

构成代数系统的成分：

- 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
- 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
- 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

研究代数系统时，如果把运算含有的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数.

例如：代数系统<Z,+,0>：集合Z, 运算+, 代数常数0

代数系统<*P*(*S*),∪,∩>：集合*P*(*S*), 运算∪和∩，无代数常数

代数系统的表示

(1) 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在）

如<Z,+,0>, <$P(S)$,∪,∩, ∅ ,S>

(2) 仅列出集合和运算: 在规定系统性质时不涉及具有单位元、零元等的性质（无代数常数）

如<Z,+>, <$P(S)$,∪,∩>

(3) 用集合名称简单标记代数系统

在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用

如代数系统Z, $P(B)$

同类型代数系统

定义5.7

如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们具有相同的构成成分, 也称它们是同类型的代数系统.

例如 V_1=<R, +, ·, 0, 1>, V_2=<M_n(R), +, ·, θ, E>, θ为 n 阶全0矩阵，E为 n 阶单位矩阵, V_3=<$P(B)$, ∪, ∩, ∅, B>

- V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算, 2个代数常数.

子代数系统

定义5.8 设$V=<S, \circ>$是代数系统，B是S的非空子集，$<B, *>$也是代数系统。若$a \in B, b \in B$，则$a*b=a\circ b$, 则称$<B, *>$是V的**子代数系统**，简称**子代数**. 有时将子代数系统简记为B.

例： N是<Z,+>的子代数

5.3 同构与同态

存在很多代数系统，通过仔细分析后发现，有些代数系统表面不同，其实质“相同”

例：$V=<\{0,1\}, \circ>$和$W=<\{a,b\}, *>$均为代数系统，其运算表为：

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	1

*V*的运算表

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

*W*的运算表

Note： 两个代数系统仅仅是元素与运算符的表示形式不同，实质一样，这种现象称为*V*与*W*同构

同构的定义

两个代数系统同构必须满足以下条件:

(1) 它们是同类型的代数系统;

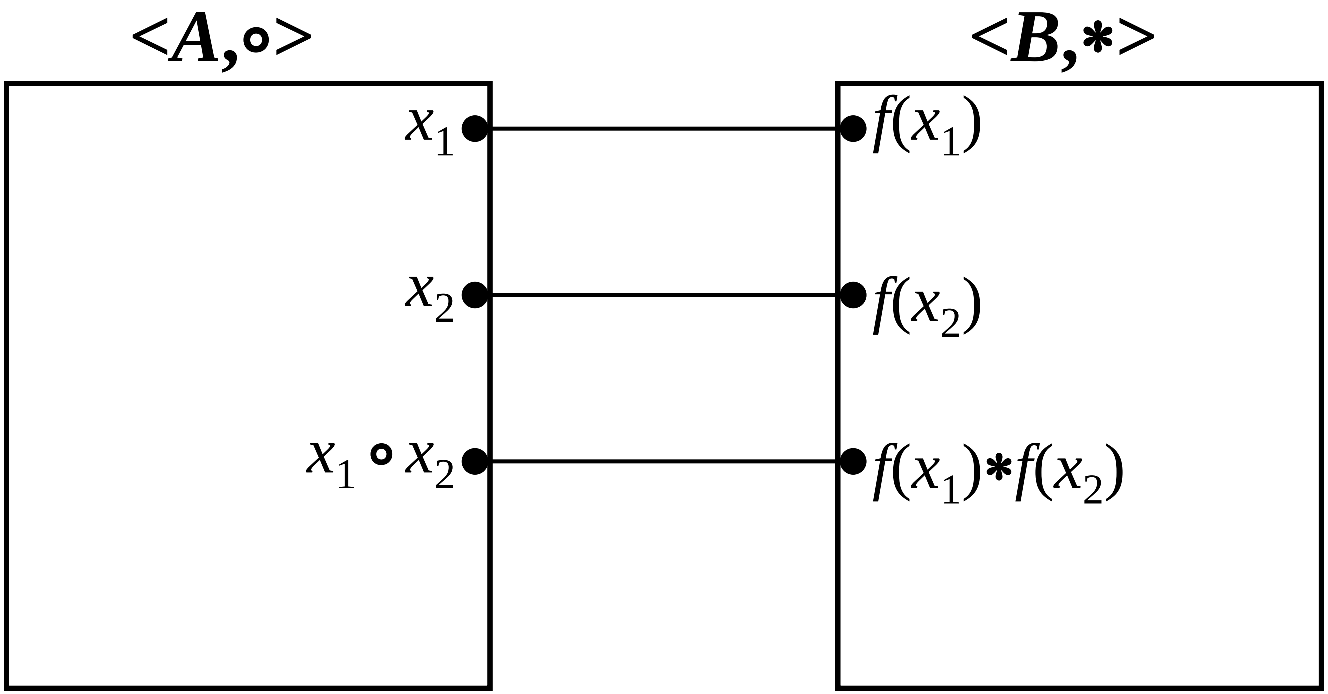
(2) 它们的集合基数相等（等势）;

(3) 运算定义法则相同。即，一个代数系统中的两个元素经过运算后所得结果与另一个代数系统对应的两个元素经运算后所得结果互相对应（运算表相应元素互换后相同）

定义5.9 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，若存在**双射**函数$f:A\to B$，且$\forall x, y\in A$ 有 $f(x\circ y) = f(x)*f(y)$, 则称 f 是V_1到V_2的**同构**映射（函数）. 或称V_1和V_2**同构**，记为

$$V_1 \simeq V_2$$

同构的涵义



同构的例子

例4 代数系统< R^+, ·>和<R, +>是同构的，其中R^+为正实数集

证明：构造函数f: $R^+ \rightarrow R$，

$$f(x)=\ln x$$

容易证明，此函数是双射函数。

因为：$f(a \cdot b)=\ln(a \cdot b)= \ln a+ \ln b= f(a)+ f(b)$

得证.

Note：

(1) 同构不仅使两个代数系统的集合具有相同的基数（或等势），而且对运算保持相同的性质

(2) 代数系统中二元运算的性质在同构时均能保持

同构的二元运算性质

定理5.4 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同构的代数系统，若V_1满足结合律（交换律），则V_2也满足结合律（交换律）

证明 略.

定理5.5 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同构的代数系统，f 是V_1到V_2的同构映射，若V_1存在单位元e_1，则V_2亦存在单位元e_2，且有$f(e_1) = e_2$.

证明 $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, 使得 $f(x) = y$, 由同构定义有：

$$y = f(x) = f(x \circ e_1) = f(x) * f(e_1) = y * f(e_1),$$

同理有：$y = f(x) = f(e_1 \circ x) = f(e_1) * y$,

即： $y * f(e_1) = f(e_1) * y = y$

故$f(e_1)$是V_2的单位元，即$f(e_1) = e_2$.

逆元存在性

定理5.6 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同构的代数系统，f是V_1到V_2的**同构**映射，若V_1对每个$x\in A$均存在逆元x^{-1}，则V_2对每个$y\in B$亦存在逆元y^{-1}，且若$f(x)=y$，有 $f(x^{-1})=y^{-1}$

证明 $\forall y\in B, \exists x\in A$, 使得 $f(x)=y$, 由同构定义和定理5.5有：

$$e_2=f(e_1)=f(x\circ x^{-1})=f(x)*f(x^{-1})=y*f(x^{-1}),$$

同理有： $e_2=f(e_1)=f(x^{-1}\circ x)=f(x^{-1})*y$,

即： $y*f(x^{-1})=f(x^{-1})*y=e_2$

故 $f(x^{-1})$是y的逆元，即$f(x^{-1})=y^{-1}$

零元存在性

定理5.7 设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同构的代数系统，$f$是$V_1$到$V_2$的同构映射，若$V_1$存在零元$\theta_1$，则$V_2$亦存在零元$\theta_2$，且有$f(\theta_1)=\theta_2$.

证明 $\forall y\in B$, $\exists x\in A$, 使得 $f(x)=y$, 由同构定义有:

$$f(\theta_1)=f(x\circ\theta_1)=f(x)*f(\theta_1)=y*f(\theta_1),$$

同理有: $f(\theta_1)=f(\theta_1)*y$,

故$f(\theta_1)$是V_2的零元θ_2，即$f(\theta_1)=\theta_2$.

分配律

定义5.10 设$V_1=<A,\circ,*>$和$V_2=<B,\odot,\otimes>$是代数系统，若它们之间存在一个双射函数$f:A\to B$，使得$\forall x_1,x_2\in A$ 有

$$f(x_1\circ x_2)=f(x_1)\odot f(x_2)$$

$$f(x_1 * x_2)=f(x_1)\otimes f(x_2),$$

则称 V_1和V_2**同构**.

分配律证明

定理5.8 设$V_1=<A,\circ,*>$和$V_2=<B,\odot,\otimes>$是同构的代数系统，f是V_1到V_2的同构映射，若V_1满足分配律，则V_2亦满足分配律.

证明 设$y_1, y_2, y_3 \in B$, 则存在$x_1, x_2, x_3 \in A$, 使得$f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，$f(x_3)=y_3$，由同构定义有：

$$f(x_1 \circ (x_2 * x_3)) = f(x_1) \odot (f(x_2) \otimes f(x_3)) = y_1 \odot (y_2 \otimes y_3)$$

$$f((x_1 \circ x_2) * (x_1 \circ x_3)) = (y_1 \odot y_2) \otimes (y_1 \odot y_3)$$

由于V_1满足分配律，即：$x_1 \circ (x_2 * x_3) = (x_1 \circ x_2) * (x_1 \circ x_3)$，

所以有：$f(x_1 \circ (x_2 * x_3)) = f((x_1 \circ x_2) * (x_1 \circ x_3))$

即：$y_1 \odot (y_2 \otimes y_3) = (y_1 \odot y_2) \otimes (y_1 \odot y_3)$

同理有：$y_1 \otimes (y_2 \odot y_3) = (y_1 \otimes y_2) \odot (y_1 \otimes y_3)$

所以第一分配律成立，同理可证第二分配律.

代数系统的等价

若两个代数系统同构，则一个代数系统的所有性质，对另一个代数系统亦成立，由此只要对一个代数系统研究透彻后，所有与之同构的代数系统的问题亦可得到解决。

定理5.9 代数系统间的同构关系是等价关系.

分析：等价关系同时满足自反性、对称性和传递性

设 $\langle A,\circ\rangle$、$\langle B,*\rangle$、$\langle C,\otimes\rangle$ 为任意三个代数系统

自反性☞ 自身同构：$\langle A,\circ\rangle \simeq \langle A,\circ\rangle$

对称性☞ 若 $\langle A,\circ\rangle \simeq \langle B,*\rangle$，则存在双射函数 $f:A\to B$，使得 $\forall x_1, x_2\in A$ 有 $f(x_1\circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$

则 f 必然存在反函数 $f^{-1}:B\to A$，要证 $\forall y_1, y_2\in B$ 有

$$f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)$$

等价性证明

传递性☞ 如果$<A,\circ> \simeq <B,*>$且$<B,*> \simeq <C,\otimes>$，要证明

$$<A,\circ> \simeq <C,\otimes>$$

证明：自反性 显然成立(恒等函数)。

存在双射函数 $f:A\to A$, $f(x)=x$.

$\forall x_1, x_2\in A$ 有，$f(x_1\circ x_2) = x_1\circ x_2 = f(x_1)\circ f(x_2)$,

故 $<A,\circ> \simeq <A,\circ>$.

等价性证明

对称性☞ 若$<A,\circ> \simeq <B, *>$，则存在双射函数$f:A\to B$，使得$\forall x_1, x_2\in A$ 有 $f(x_1\circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$

则 f 必然存在反函数$f^{-1}:B\to A$，要证$\forall y_1, y_2\in B$ 有

$$f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)$$

证明：自反性 显然成立.

对称性 对$\forall y_1, y_2\in B$ 必存在$x_1, x_2\in A$，使得 $f(x_1)= y_1$; $f(x_2)= y_2$

即$f^{-1}(y_1) = x_1$; $f^{-1}(y_2) = x_2$ 从而有

$$x_1\circ x_2 = f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)$$

$$x_1\circ x_2 = f^{-1}(f(x_1\circ x_2)) = f^{-1}(f(x_1) * f(x_2)) = f^{-1}(y_1 * y_2)$$

所以有 $f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)$.

等价性证明

传递性 即存在双射函数$f:A\to B$和$g:B\to C$, 使得对$\forall x_1, x_2\in A$, $\forall y_1, y_2\in B$ 都有

$$f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

$$g(y_1 * y_2) = g(y_1) \otimes g(y_2)$$

要找一个双射函数$h:A\to C$, 使得$\forall x_1, x_2\in A$都有

$$h(x_1 \circ x_2) = h(x_1) \otimes h(x_2)$$

令$h = f \circ g$， 由于f 和 g 均为双射函数，因此h 也是双射函数

$$\begin{aligned} h(x_1 \circ x_2) &= f\circ g(x_1 \circ x_2) = g(f(x_1 \circ x_2)) = g(f(x_1) * f(x_2)) \\ &= g(f(x_1)) \otimes g(f(x_2)) = f\circ g(x_1) \otimes f\circ g(x_2) \\ &= h(x_1) \otimes h(x_2) \end{aligned}$$

定理得证.

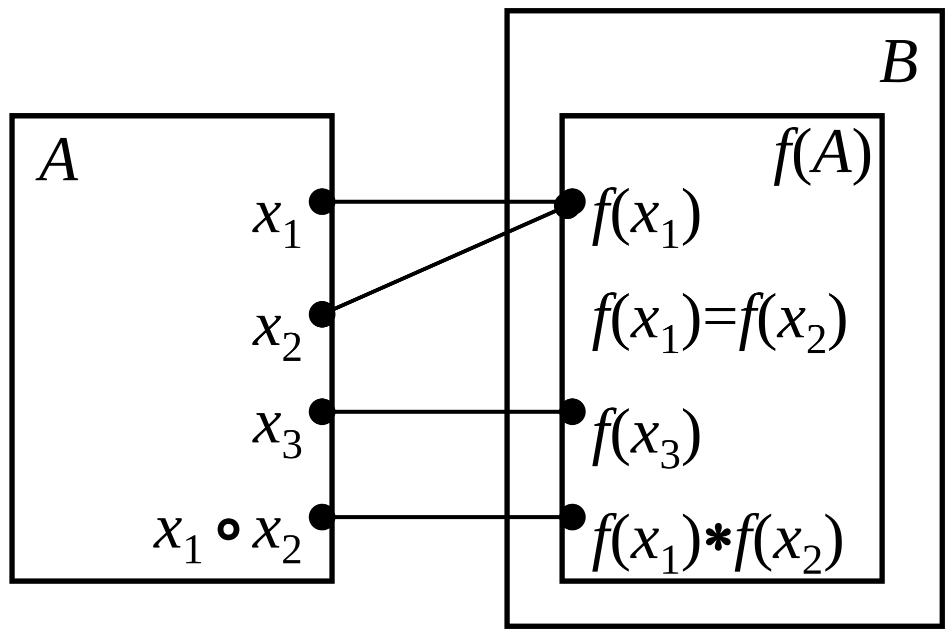
同态

定义5.11 设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统，若存在函数$f:A\to B$，使得$\forall x_1, x_2\in A$ 都有 $f(x_1\circ x_2) = f(x_1)*f(x_2)$, 则称 f 是V_1到V_2的同态映射（函数）. 或称V_1和V_2同态.

与同构的差异：

(1)同态映射不限制必须双射映射

(2)同态映射的像允许$f(A)\subset B$以及$f(A) = B$



同态

如果$f(A) = B$，即f是一个从A到 B的满射，则有

定义5.12 设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统，若存在满(单)射函数$f:A\to B$, 使得$\forall x_1, x_2\in A$ 都有 $f(x_1\circ x_2) = f(x_1)*f(x_2)$, 则称 f 是V_1到V_2的满(单)同态映射（函数）. 或称V_1和V_2满(单)同态.

同构、满（单）同态、同态条件依次减弱

实例

(1) 设V_1=<Z$^+$,+>, V_2=<Z$_n$,⊕>．其中Z$^+$为非负整数集，+为普通加法；Z$_n$={0,1,…,n–1}，⊕为模n加. 令

$$f : Z^+ \to Z_n，f(x)=(x) \bmod n$$

那么 f 是V_1到V_2的满同态.

(2) 设V_1=<R,+>, V_2=<R*,·>，其中R和R*分别为实数集与非零实数集，+ 和 · 分别表示普通加法与乘法．令

$$f : R \to R^*，f(x)= e^x$$

则 f 是V_1到V_2的单同态.

(3) 设V=<Z,+>，其中Z为整数集，+为普通加法. ∀a∈Z，令

$$f_a : Z \to Z，f_a(x)=ax，$$

那么 f_a 是V的自同态. 当a=0时称 f_0 为零同态；当a=±1时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态.

总结

(1) 满同态仍能保持结合律、交换率、分配率，存在单位元、零元和逆元，但对保持性质是单向的

(2) 同构对保持性质是双向的

原因：同构映射是对称的；满同态映射规则不一定满足对称性

(3) 对同态而言，性质能够单向地对一个子系统保持，即若$<A,\circ>$和$<B,*>$同态，则$<A,\circ>$所具有的性质单向地对$<B,*>$的一个子系统$<B',*>$ ($B'=f(A)$) 保持

原因：A到B的映射不一定满射，而是从A到B'的同态映射是满同态映射，可单向保持性质

自然同态

考虑例子

<Z,+>上的关系R = {$(x,y)|x, y\in Z, x-y$能被3整除}，是一个等价关系，它将Z划分成三个等价类：

[0]={…,-6,-3,0,3,6,…}　　[1]={…,-5,-2,1,4,7,…}

[2]={…,-4,-1,2,5,8,…}

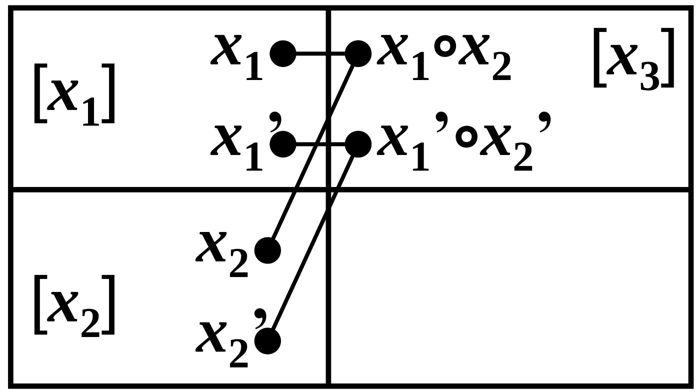
关系R使[0], [1], [2]中任意两个类的元素+运算后所得的结果均在同一个类内，如[1]和[2]中元素相加后结果在[0]中。R为同余关系。

定义5.13 设代数系统$\langle A,\circ\rangle$上有等价关系E，若对$\forall x_1, x_2\in A$ 有 $x_1 E x_1'$，$x_2 E x_2'$必有：　$(x_1\circ x_2)\ E(x_1'\circ x_2')$

则称E是$\langle A,\circ\rangle$上的同余关系.

商代数

Note：一个等价关系若为<A,∘>上的同余关系，则<A,∘>的运算"∘"按等价类保持



设有代数系统<A,∘>及其上的同余关系E，可以按E对A分类，而形成一个商集A/E. 再定义一个A/E上的运算"∗", 对任意$[x_1]$, $[x_2] \in A/E$, $x_1, x_2 \in A$有

$$[x_1]*[x_2]=[x_1 \circ x_2]$$

这样< A/E, ∗ >构成了一个代数系统, 称为<A,∘>的商代数

商代数

定理5.10 代数系统$<A,\circ>$与其上的商代数$<A/E, *>$同态.

证明: 建立一个函数$f_E:A\to A/E$,

$$f_E(x) = [x]$$

其中$x\in A$，且有

$$f_E(x_1\circ x_2) = [x_1\circ x_2]= [x_1]*[x_2]= f_E(x_1) * f_E(x_2)$$

得证.

Note:

(1) 把这种同态称为对于同余关系E的自然同态.

(2) 任何一个代数系统总可以找到一个与其同态的代数系统, 这个同态的代数系统就是它的商代数.

(3) 自然同态中的映射是一个满同态映射, 故$<A,\circ>$与其上的商代数$<A/E, *>$不仅同态, 而且满同态, 自然同态是一个满同态

同余关系

定理5.11 代数系统$<A,\circ>$与$<B,*>$同态, $f:A\to B$是它们之间的一个同态映射, 在$<A,\circ>$上建立一个关系E_f: 对$\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$, 记为$x_1 E_f x_2$. 则E_f是同余关系.

证明: 显然, E_f是等价关系.

即要证如果$x_1 E_f x_1'$, $x_2 E_f x_2'$必有: $(x_1 \circ x_2) E_f (x_1' \circ x_2')$ 即,

$$f(x_1 \circ x_2) = f(x_1' \circ x_2')$$

由f是同态映射, 可知

$$f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

$$f(x_1' \circ x_2') = f(x_1') * f(x_2')$$

由于$f(x_1) = f(x_1')$, $f(x_2) = f(x_2')$, 则有:

$$f(x_1 \circ x_2) = f(x_1' \circ x_2')$$

得证.

与商代数的同构

定理5.12 设f是从$<A,\circ>$到$<B,\otimes>$的满同态映射，则$<A/E_f, *>$与$<B,\otimes>$同构.

证明：略

Note:

(1) 对一个代数系统$<A,\circ>$，任一与它满同态的代数系统$<B,\otimes>$，总可以找到$<A,\circ>$的商代数$<A/E_f, *>$与之同构.

(2) 若有从$<A,\circ>$到$<B,\otimes>$的满同态，则必有从$<A,\circ>$到$<A/E_f, *>$的满同态，以及$<A/E_f, *>$与$<B,\otimes>$同构.

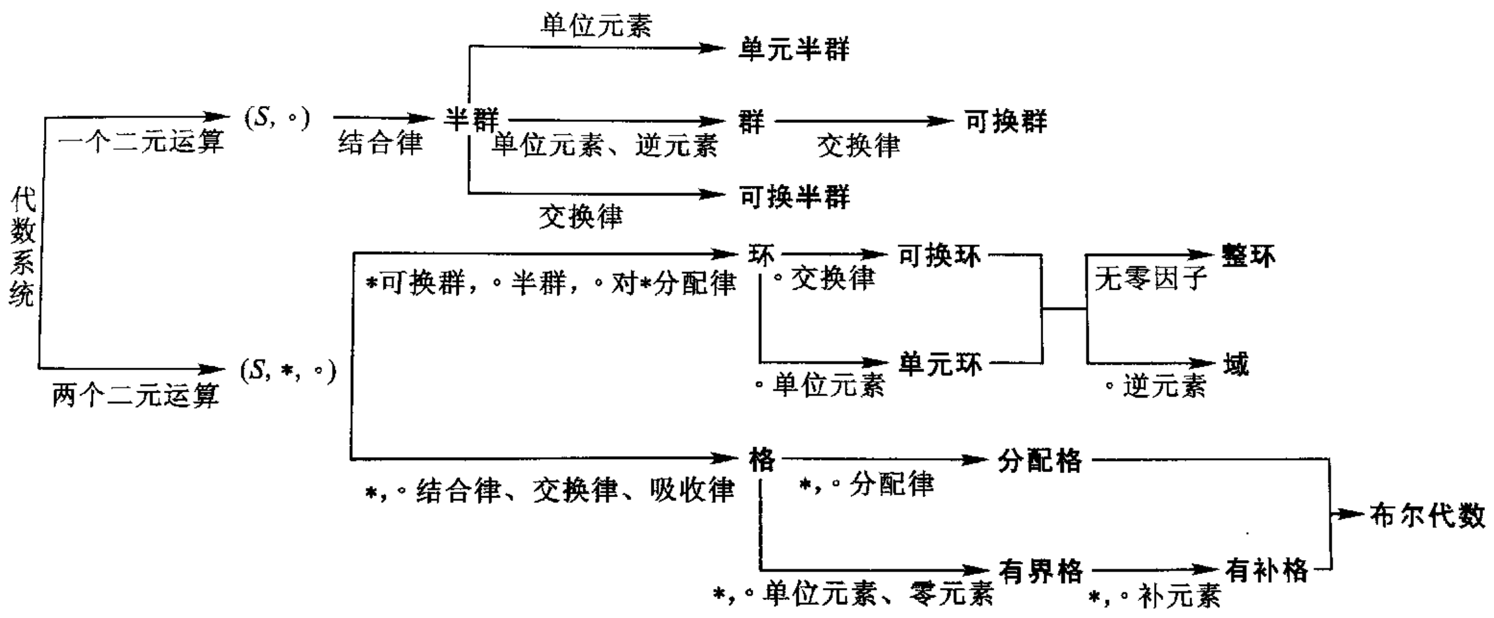
5.4 常用代数系统分类

思路:

(1) 对性质相同的代数系统进行集中, 统一的研究, 将某种(些)性质看成此代数系统的固有属性

(2) 按照某些共同性质分类, 构成了各种特定的代数系统

(3) 常用的代数系统划分成3大类15小类



THE END