习题课

导数与微分

一、 导数和微分的概念及应用

二、 导数和微分的求法

一、 导数和微分的概念及应用

- 导数：$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

  当 $\Delta x \to 0^{+}$ 时, 为右导数 $f'_{+}(x)$

  当 $\Delta x \to 0^{-}$ 时, 为左导数 $f'_{-}(x)$

- 微分： $\mathrm{d} f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$

- 关系：可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

- 应用:

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)'=0;\quad (\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\sin x)'=\cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分段点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2) 用导数定义求极限

(3) 微分在近似计算与误差估计中的应用

例1. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

解:

$$\text{原式}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x+(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(x_0)$$

例2. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1　利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2　利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!$$

例3. 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解: 原式 = $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$= f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f'(1)$$

例4. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$, 求 $f'(2)$.

解: $$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot\frac{f(x)}{(x-2)}\right]=0$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$$

例5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$

试确定常数 $a\,,b$ 使 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$.

解: $f(x)=\begin{cases} ax+b\,, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2\,, & x>1 \end{cases}$

利用 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导连续，得

$\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f'_-(1)=f'_+(1) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1)=f(1) \\ a=2 \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\,, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2\,, & x>1 \end{cases}$$

$x<1$ 时，$f'(x)=a$，　$x>1$ 时，$f'(x)=2x$

$\therefore\quad a=2,\ b=-1,\qquad f'(1)=2$

$$f'(x)=\begin{cases} 2\,, & x\le 1 \\ 2x\,, & x>1 \end{cases}$$

判别: $f'(x)$ 是否为连续函数？

目录　上页　下页　返回

例6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

1. 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性.

2.讨论 $f'(x)$在 $x=0$处的连续性和可导性。

解: **1.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \Longrightarrow f'(0)=0$$

即 $f(x)$在 $x=0$ 处可导 .

2. 当$x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right),$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续，不可导。

$f(x)$在x_0可导 $\not\longrightarrow$ $f'(x)$在x_0可导和连续, 即

$f'(x_0)$存在 $\not\longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

例7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 连续，则 λ 的取值范围是？

解：法1. 把 $f'(0)$ 求出来，此时需确定 λ 的范围（初步），然后再利用 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续再次确定 λ 的范围，二者取交集.

由于极限 $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos x}_{(A)}$ 仅当 $\lambda\geq 1$ 时存在，所以 $=\begin{cases}0 & \lambda>1\\ 1 & \lambda=1\end{cases}$

① 当 $\boxed{\lambda>1}$ 时，

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos x-x^{\lambda}\sin x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

要使得 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，即

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(\lambda x^{\lambda-1}\cos x-x^{\lambda}\sin x)=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cdot(\lambda\cos x-x\sin x)=f'(0)=0$$

$\lambda>1$　　$\lambda>1$　　0

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}=0\Rightarrow\lambda-1>0$

$\Rightarrow\lambda>1$

要使上式成立，有：$\lambda-1>0\Rightarrow\lambda>1$

② 当 $\lambda=1$ 时，

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x-x\sin x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-x\sin x)=1=f'(0)$，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

综合①,②，有：$\boxed{\lambda\geq 1}$

法2. 把$f'(0)$直接用极限表示，直接利用$f'(x)$在$x=0$连续求出λ的范围.

因为

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos x-x^{\lambda}\sin x & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos x & x=0\end{cases}$$

← 利用$f(x)$在$x=0$的导数定义(★)

所以有：$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，即

$$\lim_{x\to 0}(\lambda x^{\lambda-1}\cos x-x^{\lambda}\sin x)=\underline{\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\lambda x^{\lambda-1}\cos x-x^{\lambda}\sin x-x^{\lambda-1}\cos x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}[\underbrace{(\lambda-1)\cos x-x\sin x}_{\to(\lambda-1)}]=0$$

①若$\lambda-1\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}=0 \Rightarrow \lambda-1>0 \Rightarrow \lambda$

②若$\lambda=1$，式子显然成立.

$\therefore \lambda\geq 1$

要使上式成立，有：$\lambda-1\geq 0$

$\therefore \boxed{\lambda\geq 1}$

二、 导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则；

2. 熟练掌握求导方法和技巧;

(1) 求分段函数的导数—开区间直接导，分段点定义求

注意讨论分段点处左右导数是否存在和相等 ；

(2) 隐函数求导法 $\longrightarrow$ 对数求导法 ；

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导;

(4) 复合函数求导法 (可利用一阶微分形式不变性);

(5) 高阶导数的直接求法 —— 逐次求导、归纳 ；

间接求导法（化代数和）; 利用莱布尼兹公式.

例7. 设 $y = e^{\sin x}\sin e^{x} + f(\arctan\frac{1}{x})$, 其中 $f(x)$ 可微，求 y'.

一阶微分形式不变性+微分运算法则

解: $\mathrm{d}y = \sin e^{x}\,\mathrm{d}(e^{\sin x}) + e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin e^{x})$

$$+ f'(\arctan\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}(\arctan\tfrac{1}{x})$$

$$= \sin e^{x}\cdot \underline{e^{\sin x}}\,\mathrm{d}(\sin x) + \underline{e^{\sin x}}\cdot\cos e^{x}\,\mathrm{d}(e^{x})$$

$$+ f'(\arctan\tfrac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}(\tfrac{1}{x})$$

$$= e^{\sin x}(\cos x\sin e^{x} + e^{x}\cos e^{x}\ )\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{1+x^2}f'(\arctan\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cdots$$

例8. 设 $x \le 0$ 时 $g(x)$ 有定义, 且 $g''(x)$ 存在, 问怎样选择 a, b, c 可使下述函数在 $x = 0$ 处有二阶导数.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x > 0 \\ g(x), & x \le 0 \end{cases}$$

解: 由题设 $f''(0)$ 存在, 因此

1) 利用 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 即 $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$,

得 $c = g(0)$

2) 由 $f'(0)$ 存在, 有 $f'_+(0) = f'_-(0)$, 而

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'_-(0)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(ax^2 + bx + c) - g(0)}{x - 0} = b$$

得 $b = g'_-(0)$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x\le 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>0 \\ b & x=0 \\ g'(x) & x<0 \end{cases}$$

$c=g(0)$ $b=g'_-(0)=f'(0)$

3) 由 $f''(0)$ 存在，有 $f''_-(0)=f''_+(0)$，而

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'_-(0)}{x-0}=g''_-(0)$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2ax+b)-b}{x-0}=2a$$

得 $a=\dfrac{1}{2}g''_-(0)$

$f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义是 $f(x)$在 x_0 可导的前提条件。

【$f(x)$在x_0可导，$f'(x)$在x_0有定义，$f'(x_0)$存在，这3个说法是等价】

1. 某点可导

$f(x)$在x_0可导 $\Rightarrow$
- $f(x)$在x_0有定义，某x_0邻域有定义
- $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$
- $f(x)$在x_0连续

$f(x)$在x_0二阶可导 $\Rightarrow$
- $f''_-(x_0)=f''_+(x_0)$
- $f'(x)$在x_0可导
- $f'(x)$在x_0连续
- $f(x)$在x_0可导
- $f(x)$在x_0连续

2. 某邻域可导

$$f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{可导}\Rightarrow \begin{cases} f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{有定义} \\ f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{连续} \\ f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{极限存在} \end{cases}$$

$$f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{二阶可导}\Rightarrow \begin{cases} f''(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{有定义} \\ f'(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{可导} \\ f'(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{连续} \\ f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{可导} \\ f(x)\text{在}U(x_0,\delta)\text{连续} \end{cases}$$

例10. 设由方程$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \quad (0 < \varepsilon < 1) \end{cases}$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\frac{d}{d t}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{d t}(\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)})}{2(t+1)}$$

$$= \frac{(t+1)(1-\varepsilon\cos y) - t[(1-\varepsilon\cos y) + \varepsilon(t+1)\sin y\frac{dy}{dt}]}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^2}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\cos y) - \varepsilon t(t+1)\sin y\frac{dy}{dt}}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^2}$$

$$\frac{d y}{d t} = \frac{2t}{1-\varepsilon\cos y}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\cos y)^2 - 2\varepsilon t^2(t+1)\sin y}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

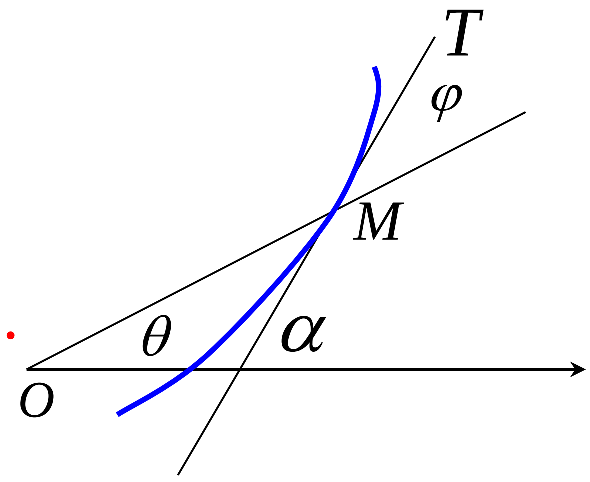
例11. 已知曲线极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$ 求曲线上一点处切线与向径夹角的正切值表达式。

解: 曲线极坐标方程为参数方程 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$ θ为参量

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\big(\rho(\theta)\sin\theta\big)'}{\big(\rho(\theta)\cos\theta\big)'}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta},$$

$$\tan\varphi=\tan\big(\alpha-\theta\big)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}-\tan\theta}{1+\dfrac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}\tan\theta}=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$



例12．已知 $f(x)$ 任意阶可导，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $n\ge 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{n![f(x)]^{n+1}}$

提示:

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$$

$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$$

$$\cdots\cdots$$

例13 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

同样可求 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}$

例14 设 $y = x^2 f(\sin x)$ 求 y'', 其中 f 二阶可导.

解: $y' = 2x \cdot f(\sin x) + x^2 \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$

$$y'' = (2x f(\sin x))' + (x^2 f'(\sin x) \cos x)'$$

$$= 2f(\sin x) + 2x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$+ 2x f'(\sin x) \cos x + x^2 f''(\sin x) \cos^2 x$$

$$+ x^2 f'(\sin x)(-\sin x)$$

$$= 2f(\sin x) + (4x \cos x - x^2 \sin x) f'(\sin x)$$

$$+ x^2 \cos^2 x f''(\sin x)$$

目录 上页 下页 返回

例15. $y = e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'.

解: $$y' = (e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x) \arctan\sqrt{x^2-1}$$
$$+ e^{\sin x^2} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x \right)$$

$$= 2x\cos x^2 \, e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$$
$$+ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} e^{\sin x^2}$$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例16. 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$, 求 y'.

解: $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$$

目录 上页 下页 返回

例17. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确?

因 $f'(x)\cancel{=}\varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

例18. 设 $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{2}+\tan\frac{2}{\sqrt{x}}$，求 y'.

解： $y'=-\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot 2(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}})$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}}\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}$$

例19. 设 $y=f(f(f(x)))$,其中 $f(x)$ 可导, 求 y'.

解： $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$

目录 上页 下页 返回

例20. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(\frac{x-t}{x+t}\right)^{x}$，求 $f^{(n)}(t)$

解：

$$f(t)=\lim_{x\to\infty} t\left[\left(1-\frac{2t}{x+t}\right)^{-\frac{x+t}{2t}}\right]^{-\frac{2tx}{x+t}}=te^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2tx}{x+t}\right)}=te^{-2t}$$

$$\therefore f^{(n)}(t)=(-2)^{n}e^{-2t}t+n(-2)^{n-1}e^{-2t}$$

$$=(-2)^{n-1}e^{-2t}(n-2t)$$

例21.设函数$f(x)$可导，$f(x)\neq 0$,且对任意实数 x, y,总有

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

证明：$f'(x)=f(x)\cdot f'(0),\ x\in(-\infty,+\infty)$

证：$\because f(x+y)=f(x)f(y)$

$\therefore y=0,\ f(x)=f(x)f(0) \quad f(x)[1-f(0)]=0$

$\because f(x)\neq 0, \quad f(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$

例22.设函数 $f(x)$ 在$x=0$的邻域内有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$$

1. 在$U(0,\delta)$内 $f''(x)$ 存在且连续；

2. 在$U(0,\delta)$内 $f'(x)$ 存在且连续；

3. 在$U(0,\delta)$内 $f(x)$ 存在且连续；

求 $f(0), f'(0), \lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$

解：由题设条件，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \Longrightarrow$$

(1) $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$

$$e^3=\lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{x^2+f(x)}\cdot\frac{x^2+f(x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=3 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

例23. 设 $y = x + e^x$, 求其反函数的导数 .

解：方法1　利用反函数和直接函数导数的关系

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + e^x$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+e^x}$$

方法2　利用隐函数的求导法则

等式两边同时对 y 求导，注意x是的 y函数

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + e^x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+e^x}$$

例24 落在平静水面上的石头，产生同心波纹。若最外一圈波纹半径的增大率总是6米/秒，问在2秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解： 设波纹的半径为 r, 对应的面积为 S, 则

$$S=\pi r^2$$

两边对 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

当 $t=2$ 时，$r=6\times 2=12$, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=6$,

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=2\pi r\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=2\pi\times 6\times 12=144\pi(m^2/s)$$

4. 设以 2 为周期的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{4x}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线斜率为________.

分析：由周期性知，$f'(3)=f'(1),$ 故只需求 $f'(1)$。又已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，所以利用导数定义求极限。

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{4x}=1$$

$$-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=1$$

$$-\frac{1}{4}f'(1)=1\Rightarrow f'(1)=-4$$

7. 设 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$，则 $y^{(n)}=$________________ $(n\geq 2)$.

解： $y=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

故， $y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

10. 设函数 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数，则 $f^{(n)}(a)=$_____.

解 由莱布尼茨公式，可得

$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{1}n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$$
$$+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)+n!\ (x-a)\varphi(x).$$

因此 $f^{(n-1)}(a)=0$.于是

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=n!\ \varphi(a).$$

【注】 由于 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内具有 $n-1$ 阶导数，未必具有 n 阶导数，因此不能直接求 $f(x)$ 的 n 阶导数，只能利用定义来求 $f^{(n)}(a)$.

8. 设 $f(x)=g(x^2)$，其中函数 $g(t)$ 可导，则 $\mathrm{d}\,f(x)=$（　　）.

A. $2xg'(x^2)$； B. $2x[g(x^2)]'$； C. $2xg'(x^2)\mathrm{d}\,x$； D. $2x[g(x^2)]'\mathrm{d}\,x$.

解： $\because \quad f'(x)=g'(x^2)\cdot 2x$

$\because \quad df(x)=2x\,g'(x^2)dx$

10. 设函数 $f(x)$ 可导，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y=2-x$ 垂直，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}\,y$ 是（　　）.

A. 比 Δx 高阶的无穷小； B. 比 Δx 低阶的无穷小；

C. 与 Δx 同阶但不等价的无穷小； D. 与 Δx 等价的无穷小.

解：由题目条件可知，$f'(x_0)=1$，故

$$dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=\Delta x$$

$dy\big|_{x=x_0}$ 是△x 的等价无穷小。

例 设$x = g(y)$是函数$y = f(x)$的反函数，且 $f(1) = 2, f'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,求$g'(2)$.

解 注意到当 $x = 1$时，$y = f(1) = 2$

由反函数求导法则，$g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ ，可得

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

例6-2 设 $y=\arctan x$， 求 $y^{(n)}(0)$.

解 (方法1) 莱布尼茨公式

$$y'=\frac{1}{1+x^2},\quad y'(0)=1$$

即 $$(1+x^2)y'=1$$

$$[(1+x^2)y']^{(n-1)}\equiv 0\quad (n\geq 2)$$

由莱布尼茨公式，得

$$(1+x^2)y^{(n)}+(n-1)\cdot 2x\,y^{(n-1)}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\cdot 2y^{(n-2)}\equiv 0$$

亦即

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)x\,y^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}\equiv 0$$

$$(n\geq 2)$$

令 $x=0$，得 $y^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)=0$

即 $y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$ $(n\geq 2)$

由 $y(0)=0$, 得

$$y''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=0,\ \cdots,\ y^{(2m)}(0)=0$$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0)$$

$$=\cdots=(-1)^m(2m)!$$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad (m=0,1,2,\cdots)$

$$y=\arctan x,\ y'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$$

(4) 设 $F(x)=f(x)g(x)$，$x=a$ 是 $g(x)$ 的跳跃型间断点，$f'(a)$ 存在，则 $f(a)=0$，$f'(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　　　(D) 非充分非必要条件

解：设 $g(x)$ 在 $x=a$ 的左、右极限分别为 A，B，则 $A\neq B$.

充分性

若 $f(a)=f'(a)=0$，则 $F(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右导数分别为：

$$F'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)g(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)$$

$$=f'_-(a)\cdot A=f'(a)\cdot A=0$$

[$f'(a)$存在 $\Rightarrow f'_-(a)=f'_+(a)=f'(a)$]

同理 $F'_+(a)=f'(a)\cdot B=0$

$\therefore F'_-(a)=F'_+(a)=0\Rightarrow F(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

分析：由于 $g(x)$ 在 $x=a$ 不连续，故在 $x=a$ 不可导，所以不能用积的求导法则求 $F'(a)$，必须要用导数定义求 $F'(a)$

必要性

若 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导，则 $F(x)$ 在 $x=a$ 连续

由 $F(x)$ 在 $x=a$ 连续，有

$$F(a-0)=\lim_{x\to a^-}f(x)g(x)=f(a-0)\cdot A=f(a)\cdot A$$

[$\because f'(a)$存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 连续 $\Rightarrow f(a-0)=f(a+0)=f(a)$]

$$F(a+0)=\lim_{x\to a^+}f(x)g(x)=f(a+0)\cdot B=f(a)\cdot B$$

$\therefore F(a-0)=f(a)\cdot A=F(a+0)=f(a)\cdot B$

$\therefore f(a)\cdot(A-B)=0\Rightarrow f(a)=0$ ($\because A-B\neq 0$)

由 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导，有：

$\cancel{F'_-(a)=f'_-(a)\cdot A=F'_+(a)=f'_+(a)\cdot B}$

$$F'_-(a)=f'(a)A=F'_+(a)=f'(a)\cdot B$$

$\therefore f'(a)(A-B)=0\Rightarrow f'(a)=0$

$\therefore f(a)=0$，$f'(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 的充要条件.