

微积分（上）期中试题

(2021-11-6)

一、填空题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 - x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $y = \frac{3+3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$, 则 $y(0^-) = \underline{\hspace{2cm}}, y(0^+) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $y = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x}, & -1 < x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \ln(b+x), & 0 < x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设以 2 为周期的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{4x} = 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $y = 2^{\tan x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $y = \frac{x^2}{x+1}$, 则 $y^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}} (n \geq 2).$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 6x}{\ln x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设函数 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数, 则 $f^{(n)}(a) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、单项选择题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. 函数 $f(x) = x \sin x e^{\cos x} (-\infty, +\infty)$ 是 () 函数.

A. 有界; B. 单调; C. 周期; D. 偶.

2. 设 $f(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$, 则 $f(x) = ()$.

A. e^{x-1} ; B. e^x ; C. e^{x+1} ; D. e^{x+2} .

3. 函数 $f(x) = x \cos x$ ().

A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界; B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界;
C. 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在; D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大量.

4. 函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$, 可去间断点 $x = 1$, 则 ().

A. $a = 0, b = e$; B. $a = 0, b = 1$; C. $a = 1, b = e$; D. $a = 1, b = 1$.

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x^2 等价的无穷小为 ().

A. $1 - \cos x$; B. $1 - e^{x^2}$; C. $x \arctan x$; D. $\ln(1 + x\sqrt{x})$.

6. 下列结论中正确的是 ().

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $f'(x_0)$ 存在; B. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 连续;

C. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x)$ 在点 x_0 连续;

D. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ xg(x), & x > 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 为有界函数, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处 ().

A. 不连续; B. 连续, 但不可导; C. 可导, $f'(0) = 0$; D. 可导, $f'(0) = g(0)$.

8. 设 $f(x) = g(x^2)$, 其中函数 $g(t)$ 可导, 则 $df(x) = ()$.

A. $2xg'(x^2)$; B. $2x[g(x^2)]'$; C. $2xg'(x^2)dx$; D. $2x[g(x^2)]'dx$.

9. 设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则 $f^{(n)}(x) = ()$.

A. $n![f(x)]^{n+1}$; B. $n[f(x)]^{n+1}$; C. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$; D. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$.

10. 设函数 $f(x)$ 可导, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = 2 - x$ 垂直, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在点 x_0 处的微分 dy 是 ().

A. 比 Δx 高阶的无穷小;

B. 比 Δx 低阶的无穷小;

C. 与 Δx 同阶但不等价的无穷小;

D. 与 Δx 等价的无穷小.

三、(7 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$.

四、(7 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

五、(6 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \leq 0, \end{cases}$ 试根据不同的 α, β , 讨论 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性, 若

在 $x = 0$ 处间断, 试指出间断点的类型.

六、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上可导, 且 $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} \{ |f(x)| \}$ 在点 x_0

处取得, 试证: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使 $|f'(\xi)| \geq M$.