高等数学期末复习专栏二

导数及其应用

1. 利用导数的定义求极限

例 1 已知 $f'(4)=3$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-h)-f(4)}{3h}$

解： 由导数的定义，知 $f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$，于是

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4-h)-f(4)}{3h}=\frac{-1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-h}=\frac{-1}{3}f'(4)=-1$$

例 2 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}\tan x$ 求 $f'(1), f'(0)$

解： $f'(x)=\dfrac{\tan x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2 x}$ （$x\neq 0$）

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\tan x}{x}=0$$

例 3 若 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+2u)-f(x_0-u)}{\arctan u}$

解： 由导数的定义，知 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+2u)-f(x_0-u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{[f(x_0+2u)-f(x_0)]-[f(x_0-u)-f(x_0)]}{u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(x_0+2u)-f(x_0)}{2u}+\frac{f(x_0-u)-f(x_0)}{-u}\right\}=2f'(x_0)+f'(x_0)=3f'(x_0)$$

$$=6$$

例 4 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=0, f'(1)=2$，

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

分析：当 $n\to\infty$ 时，$f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to f(1)=0$，该极限为 1^∞ 型未定式.

针对这类幂指函数的极限可以利用重要极限 II 或等价无穷小替换

进行求解.

解法 1：原式=$\lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}} = e^{f'(1)} = e^2$$

注：当$n\to\infty$**时，**$\ln\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\sim f\left(1+\frac{1}{n}\right)$

解法 2：

$$原式 = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}nf\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}\ln\left(1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}}} = e^{f'(1)\ln e} = e^2$$

2. 导数与微分

例 5 设 $y=\arctan\frac{1-x}{1+x}$**，求** $\mathrm{d}y$**.**

【注释】函数 $y=f(x)$ **在点** x **处可微的充分必要条件为** $y=f(x)$ **点** x **处可导，并且** $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

解：由于 $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\dfrac{-1}{1+x^2}$

所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}$

例 6 设 $y=x^x+x^{\sin x}$**，求** y'**.**

解：由于 $y=e^{x\ln x}+e^{(\sin x)\cdot\ln x}$

所以 $y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'+e^{(\sin x)\cdot\ln x}[(\sin x)\cdot\ln x]'$

$$=x^x(1+\ln x)+x^{\sin x}\left((\cos x)\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

例 7 设 $y=f(\cos^2 x)$**，且** f **二阶可导，求** $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$**.**

解： $\frac{dy}{dx}=f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x)=-\sin 2xf'(\cos^2 x)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-2\cos 2x\cdot f'(\cos^2 x)-\sin 2x\cdot f''(\cos^2 x)\cdot(-\sin 2x)$$

$$=-2\cos 2x\cdot f'(\cos^2 x)+\sin^2 2x\cdot f''(\cos^2 x)$$

3. 分段函数的导数与导函数的连续性

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ **其中** $g(x)$ **有二阶连续导数，且**

$g(0)=g''(0)=1$， $g'(0)=-1$，

(1)求 $f'(x)$**；**

(2)讨论 $f'(x)$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **内的连续性.**

解：(1) 当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$ **(连续用两次罗必达法则)**

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(g''(0)-1)=0\text{。}$$

即：$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(g''(x)-e^{-x})\cdot x+g'(x)+e^{-x}-(g'(x)+e^{-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(g''(x)-e^{-x})\cdot x}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}(g''(0)-1)=0.$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又由于 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是初等函数，由初等函数的连续性知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

4. 由参数方程确定的函数的二阶导数

例 9 设 $t>-1$ 时，有 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ，$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\cos t}{-\sin t}=-\csc t+\cot t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=(\csc t\cot t-\csc^2 t)\cdot\frac{1}{-\sin t}=\csc^2 t(\csc t-\cot t)$$

5. 利用导数求函数的最值

例 10 一房地产公司有 50 套公寓要出租，当月租金定为 4000 元时，公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时，就会多一套公寓租不出去，而租出去的公寓平均每月需要花费 400 元的维修费，试问房租定为多少可获得最大收入？

解：设月租金为 x **元时，每月总租金为** $f(x)=(x-400)\cdot(50-\frac{x-4000}{200})$

其中 $x\geq 4000$

$$f'(x)=(50-\frac{x-4000}{200})-\frac{x}{200}+\frac{400}{200}=\frac{14400-2x}{200}$$

$f'(x)=0$ **得，** $x=7200$.

$x=7200$ 为 $f(x)$ 在 $[4000,+\infty)$ 内唯一的一个驻点，故 $f(x)$ 在 $x=7200$ 取得最大值.

7. 微分中值定理的应用

例 11 **设** $f(x),g(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，且** $f(x),g(x)$ **在** (a,b) **内可导，** $f(a)=f(b)=0$**，则存在** $\xi\in(a,b)$**，使得** $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

分析： 欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$，

即证 $f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0$

即证 $[f(x)\cdot e^{g(x)}]'\big|_{x=\xi}=0$

证： 令 $F(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$

$\because F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$.

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 中值定理，由 Rolle 中值定理知，

在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0$，从而命题得证.

练习：设 $f(x)$ **在** $[0,1]$**，且** $f(x)$**，在** $(0,1)$ **内可导，** $f(1)=0$**，则存在** $\xi\in(0,1)$**，使得** $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

例 12 **设** $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$ **在** $x=-1$ **处取得极值，在** $(0,1)$ **为曲线的拐点，试求** a,b,c **的值.**

答案： $a=0,b=-1,c=1$.

例 13 **若** $x\to0$ **时，** $e^x-(ax^2+bx+1)$ **是比** x^2 **高阶的无穷小，求** a, b.

解： 由题意知：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$.

另一方面，由洛必达法则得到：

$0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-b}{2x}$，则$0=\lim\limits_{x\to 0}e^x-2ax-b=1-b$，

即：$b=1$.

此时，再次用洛必达法则得

$0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2a}{2}=\dfrac{1}{2}(1-2a)$，

即：$a=\dfrac{1}{2}$.

例 14 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，

证明：(1) 对任意 $x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$；

(2) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，**使** $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证 ：(1) 反证法：假设存在一点$x\in(a,b)$满足$g(x)=0$. 则在区间$[a,x]$上，$g(x)$满足 Rolle 中值定理的条件，由 Rolle 中值定理得，存在一点$\xi_1\in(a,x)$，使得$g'(\xi_1)=0$，同理存在一点$\xi_2\in(x,b)$，使得$g'(\xi_2)=0$. 由于$g'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上满足 Rolle 中值定理的条件，由 Rolle 中值定理得，存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得$g''(\xi)=0$，这与条件$g''(x)\neq 0$矛盾.

(2) 构造新函数$F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续可导，且$F(a)=F(b)=0$. 由 Rolle 中值定理得，存在一点$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$，即有：

$$f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f''(x)g(x)-f'(x)g'(x)\big|_{x=\xi}=f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0,$$

由$g(x)\neq 0$与$g''(x)\neq 0$得：$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.