第三章　函数

2008-2018 by Li Weigang. All rights reserved.

主要内容

函数的基本概念

- 函数定义
- 函数性质

函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

3.1 函数的基本概念

主要内容

函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从*A*到*B*的函数$f:A\to B$
- 函数的像与完全原像

函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

函数定义

定义3.1 设 F 为二元关系, 若 $\forall x\in \mathrm{dom}\,F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}\,F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数.

对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为F 在 x 的值, y是x的像, x是y的原像.

例 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>,<x_3,y_2>\}$, $F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

F_1是函数, F_2不是函数

定义3.2 设F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G\wedge G\subseteq F$$

设$f:X\rightarrow Y$,$g:W\rightarrow Z$,如果$X=W$,$Y=Z$,且对每一$x\in X$有$f(x)=g(x)$则称$f=g$.

如果两个函数F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}\,F=\mathrm{dom}\,G$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}\,F=\mathrm{dom}\,G$ 都有$F(x)=G(x)$

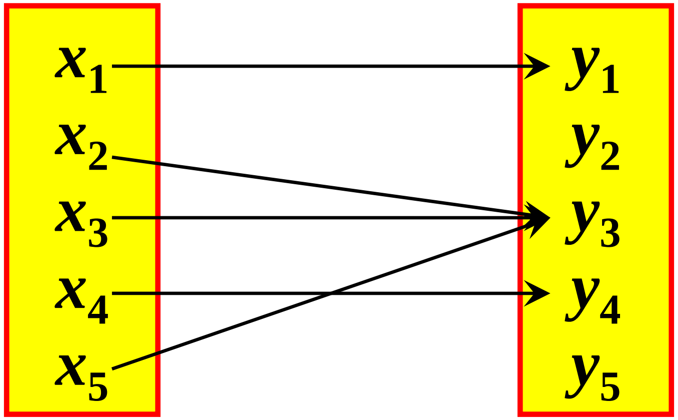
函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$ 不相等, 因为 $\mathrm{dom}\,F\subset \mathrm{dom}\,G$.

从A到B的函数

定义3.3 设A, B为集合, 如果

f 为函数，dom f=A，ran $f \subseteq B$,

则称 f 为**从A到B的函数**, 记作 f：$A \to B$.



存在性：$\forall x \in A$，必存在$y \in B$，
使得$\langle x,y\rangle \in f$

唯一性：$\forall x \in A$，仅存在一个$y \in B$，
使得$\langle x,y\rangle \in f$

例 f：N$\to$N，$f(x)=2^x$ 是从N到N的函数,

g：N$\to$N, $g(x)=2$ 也是从N到N的函数.

函数的像和完全原像

定义3.4 设函数 f：$A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$

(1)令$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1\}$称为$A_1$在 f 下的像.当$A_1=A$时,称$f(A)$为函数的像

(2)令$f^{-1}(B_1)=\{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$称为$B_1$在 f 下的完全原像

注意：

- 函数值与像的区别：函数值 $f(x) \in B$, 像$f(A_1) \subseteq B$

例 设 f：N→N, 且 $f(x)=\begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1)\}=\{0,2\}$$
$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\})=\{1,4\}$$

函数的性质

定义3.5 设 f： $A \to B$,

(1) 若 ran $f=B$, 则称 $f:A \to B$是满射的(或从A到B上的函数)

否则称内射的(或从A到B内的函数)

(2) 若 $\forall y \in$ ran f 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A \to B$ 是单射的（或从A到B的一对一的函数），否则称为多射（或从A到B的多对一的函数）

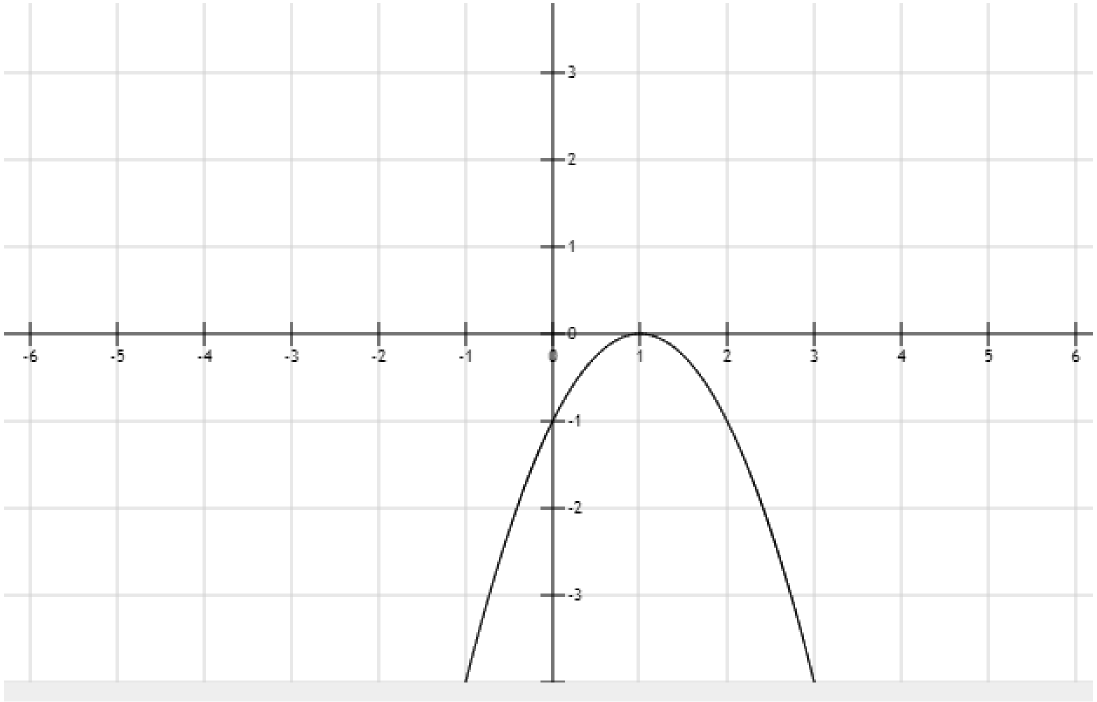
(3) 若 $f:A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A \to B$是双射的（或一一对应函数）

在双射函数$f:A \to B$中，若$A=B$, 则称此函数为A的变换

例题

例1 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

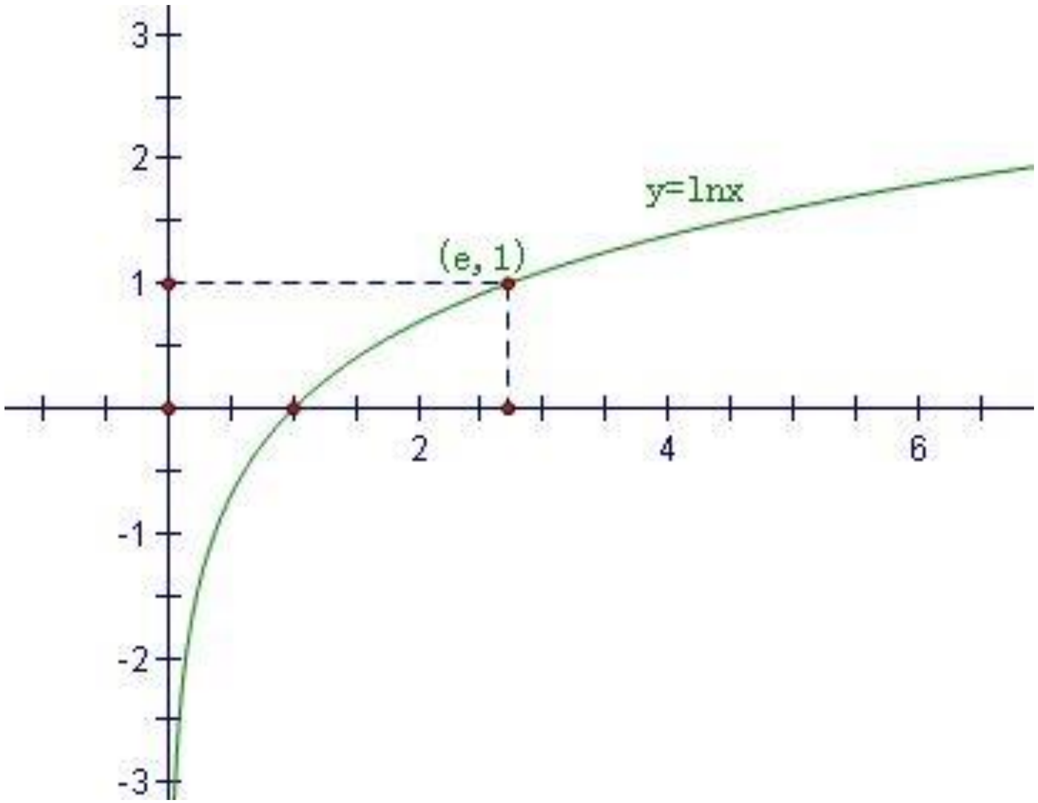
(1) f:R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$



在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

例题

(2) f:Z^+→R, $f(x)$=ln$x$, Z^+为正整数集



是单调上升的, 是单射的. 但不满射, ran f={ln1, ln2, …}.

例题

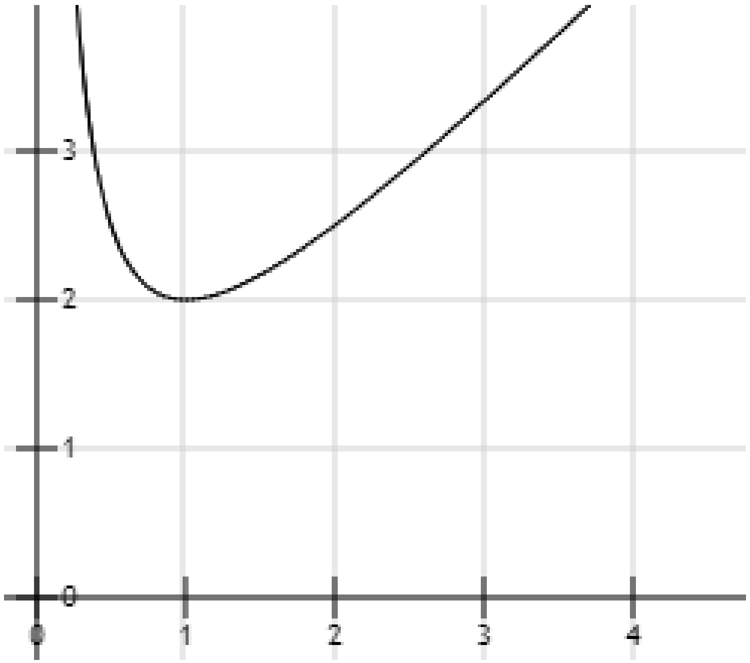
(3) f:R→Z, $f(x)=\lfloor x \rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如$f(1.5)=f(1.2)=1$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran f=R

(5) $f:R^+ \to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.



有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

3.2 常用函数

定义3.6

(1)设 $f{:}A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f{:}A\to B$是常函数.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，$f{:}A\to B$，如果对任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数

常用函数

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$f_{A'}:A\to\{0,1\}$定义为

$$f_{A'}(a)=1,\ a\in A'$$
$$f_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$
$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

实例

例4 (1) 偏序集$<P(\{a,b\}),R_{\subseteq}>$, $<\{0,1\},\le>$, $R_{\subseteq}$为包含关系, $\le$为一般的小于等于关系, 令

$$f:P(\{a,b\})\to\{0,1\},\quad f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0,\quad f(\{a,b\})=1,$$

f 是单调递增的, 但不是严格单调递增的

(2) A的每一个子集 A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如$A=\{a,b,c\}$, 则有

$$f_{\varnothing}=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\},\quad f_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$$

(3) 不同的等价关系确定不同的自然映射, 恒等关系确定的自然映射是双射, 其他自然映射一般来说只是满射. 例如

$$A=\{1,2,3\},\ R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

$$g: A\to A/R,\ \ g(1)=g(2)=\{1,2\},\ g(3)=\{3\}$$

3.3 函数的复合与反函数

主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

复合函数基本定理

定理3.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}\,(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}\,F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\,G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

证　先证明$F\circ G$是函数.

因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系. 若对某个$x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$有$xF\circ Gy_1$和 $xF\circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1>\in F\circ G\wedge<x, y_2>\in F\circ G$$

$$\Rightarrow\exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge<t_1,y_1>\in G)\wedge\exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge<t_2,y_2>\in G)$$

$$\Rightarrow\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge<t_1,y_1>\in G\wedge<t_2,y_2>\in G \qquad (F\text{为函数})$$

$$\Rightarrow y_1=y_2 \qquad (G\text{为函数})$$

所以 $F\circ G$ 为函数

证明

(1) $\mathrm{dom}\,(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}\,F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\,G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

(1)任取x,

$x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,\exists y(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(x\in \mathrm{dom}\,F\wedge t=F(x)\wedge t\in \mathrm{dom}\,G)$

$\Leftrightarrow x\in\{\,x\mid x\in \mathrm{dom}\,F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\,G\,\}$

(2)任取x,

$x\in \mathrm{dom}\,F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\,G$

$\Rightarrow <x,F(x)>\in F\wedge <F(x),G(F(x))>\in G$

$\Rightarrow <x,G(F(x))>\in F\circ G$

$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)\wedge F\circ G(x)=G(F(x))$

推论

推论1 设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证 由上述定理和运算满足结合律得证.

推论2 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

证 由上述定理易证，略

函数复合与函数性质

定理3.2 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

证明略

定理3.3 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f\circ g:A\to C$是单射的 , 则 f是单射的

(2) 如果 $f\circ g:A\to C$是满射的，则g是满射的

(3) 如果$f\circ g:A\to C$是双射的，则 f是单射的，g是满射的

证明略

实例

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$$
$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$$
$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$$

那么 $f:A\rightarrow B$和$f\circ g:A\rightarrow C$是单射的, 但$g:B\rightarrow C$不是单射的.

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$$
$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$$
$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$$

那么$g:B\rightarrow C$ 和 $f\circ g:A\rightarrow C$是满射的, 但 $f:A\rightarrow B$不是满射的.

反（逆）函数

函数具有单值性

逆函数存在的条件

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系.

(2) 任给单射函数 $f:A\to B$, 则f^{-1}是从ran f 到A的双射函数, 但不一定是从B到A的函数

对于某些$y\in B$-ran$f$, f^{-1}没有值与之对应

(3) 对于双射函数 $f:A\to B$, $f^{-1}:B\to A$是从B到A的双射函数.

定理3.3 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B\to A$，即f^{-1}是函数，且dom $f^{-1}=B$, ran $f^{-1}=A$.

再证明$f^{-1}:B\to A$的双射性质.

反函数的性质

定理3.4

(1) 设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B$, $f\circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$

证明思路:

根据定理可知 $f^{-1}:B\to A$也是双射的, 由复合函数基本定理的推论可知 $f^{-1}\circ f:B\to B$, $f\circ f^{-1}:A\to A$，且它们都是恒等函数.

求解

例5 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g, g \circ f$. 如果f和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f:R→R不是双射的, 不存在反函数.

g:R→R是双射的, 它的反函数是. g^{-1}:R→R, $g^{-1}(x)=x-2$.

THE END