例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad 1^{\infty}$

解：法1 第二个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+3^x+6^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3^x+6^x-3}\cdot\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(6^x-1)}{3x}}$$

$$=e^{\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 6}{3}}=6^{\frac{2}{3}}$$

法2 换底（对数恒等变形）

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x+6^x}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x+6^x}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[\ln(2^x+3^x+6^x)-\ln 3]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3+6^x\ln 6}{(2^x+3^x+6^x)}=\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 6}{3}=\frac{\ln 36}{3}$$

原式 $=e^{\frac{\ln 36}{3}}=6^{\frac{2}{3}}$

例2 已知$f(x)$在$x=a$处可导,且$f(a)>0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)}{f(a-x)}\right]^{\frac{1}{x}}$ 1^{∞}

解 法1 第二个重要极限+导数定义

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right]^{\frac{f(a-x)}{f(a+x)-f(a-x)}\cdot\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x\,f(a-x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x\cdot f(a-x)}}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x\cdot f(a-x)}=\frac{1}{f(a)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(a)}\left[\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right]=\frac{2f'(a)}{f(a)}$$

故 $$原式=e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

法2 换底+等价无穷小代换+导数定义

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{f(a+x)}{f(a-x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right]}$$

$$= \exp\lim_{x\to 0}\left[\frac{[f(a+x)-f(a-x)]}{x\,f(a-x)}\right] \qquad \boxed{\exp x = e^x}$$

$$= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(a-x)}\}$$

$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(a)}\left[\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right] \qquad \boxed{= \exp\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

$$\because \ln\left[1+\frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1\right] \sim \frac{f(a+x)}{f(a-x)}-1 = \frac{f(a+x)-f(a-x)}{f(a-x)}$$

例3 已知$f'(3)=2$, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)-h}{h}$

分析：此题不能用洛必达法则，只能利用导数定义求极限

解： $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{h}-1$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}-1$$

$$=-f'(3)-1$$

$$=-3$$

例4 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\dfrac{1}{6}}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$\boxed{\sin x\sim x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\cos x=1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

4. 设 $f(x)=e^{3-x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x[f(1+\frac{2}{x})-f(1)]=$ ________ $\infty\cdot 0$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(1+\frac{2}{x})-f(1)}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{\text{令}t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{f(1+2t)-f(1)}{t} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{t\to0^+}2f'(1+2t)$$

$$=2f'(1)=2(e^{3-x})'\Big|_{x=1}=-2e^2$$

例5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1})\quad (a\neq 0)$ $\infty\cdot 0$

解法1 利用拉格朗日中值定理求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{a}{x+1})\qquad (\xi \text{在} \frac{a}{x} \text{与} \frac{a}{x+1} \text{之间})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+1})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} \frac{a}{1+\xi^2} = a \qquad x\to+\infty,\quad \xi\to 0^+$$

原式$= a$

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$\because \lim_{x\to+\infty} x^2\left\{[\frac{a}{x}+o(\frac{1}{x^2})]-[\frac{a}{x+1}+o(\frac{1}{(x+1)^2})]\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ax^2}{x(x+1)}+\frac{+o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\right]=a$$

原式$=a$

解法3 利用洛必达法则

$$原式 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\Big\downarrow \ 令 t = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}) \quad (a \neq 0)$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

分析： 由于$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$， 故需分情况讨论。

解： $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x} \overset{洛}{=\!=\!=\!=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0\cdot 0=0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$不存在

例7 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\le 0,\end{cases}$$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则

$f(x)$ 在 $x=0$ 处 （D）.

(A) 极限不存在； (B) 极限存在但不连续；

(C) 连续但不可导； (D) 可导.

解：

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．选 D

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} x^2 g(x)=0$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$$

$$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例8设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1,$

则下列结论中错误的是（B）.

(A) $f''(a)$存在，且 $f''(a)=-1$

(B) $f''(a)$不存在；

(C) 存在 $\delta>0,$当 $x\in(a,a+\delta)$时，恒有 $f'(x)<0;$

(D)存在 $\delta>0,$ 当 $x\in(a-\delta,a)$时，恒有 $f'(x)>0.$

解：由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1,\quad\Rightarrow f'(a)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0,$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$

(B)错

例9 填空题

1.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k-(n-1)^k}{n^{2010}}=a(\neq 0,\infty)$，则$a$ = 2011________

k= 2011_____ ,

解： 分子为k-1次多项式,当k = 2011时a 为不等于0 的常数, 当k = 2011时，a = 2011.

2. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+2x-3)}$ 的可去间断点为 $x = 1$ ，跳跃间断点为 $x = 0$ ，无穷间断点为 $x = -3$.

解： $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+2x-3)}=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x-1)(x+3)}$

所以间断点为*x* = 0, *x* = 1, *x* = -3.

***x* = 0,** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{1}{3}$, ***x* = 0,** 第一类（跳跃）间断点

***x* = 1,** $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{|x|(x+3)}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{(x-1)}$

$=\dfrac{\sin1}{4}\lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)=-\dfrac{\pi}{8}\sin1$, ***x* = 1,**第一类（可去）间断点

***x* = -3.** $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\dfrac{\pi\sin3}{24}$, ***x* = -3，** 第一类（可去）间断点

3.当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}$ 关于 x 的无穷小的阶数为 （C）

A. 1； B. 2； C. 3； D. 4.

解：当 $x \to 0$ 时，

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}=\frac{\sin x-\tan x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x}}$$

$$\sim \frac{\sin x-\tan x}{2}=-\frac{\tan x(1-\cos x)}{2}\sim -\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=-\frac{x^3}{4}$$

故选 C。

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，则 $a=$ ___0___，$b=$ ___1___ .

解：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ ax^2+bx, & |x|<1\\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ \infty & |x|>1\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 点连续，故有

$$1=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\frac{a+b+1}{2}=\lim_{x\to1^-}f(x)=a+b$$

由于$f(x)$ 在$x=-1$点连续，故有

$$a-b=\lim_{x\to -1^{+}} f(x)=f(-1)=\frac{a-b-1}{2}=\lim_{x\to -1^{-}} f(x)=-1$$

即：
$$\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$$

例10 设数列 $x_1 > \sqrt{5}, x_{n+1} = \dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n} (n=1,2,\cdots)$

证明此数列的极限存在，并求此极限.

证：易见：$1 < x_{n+1} = \dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n} < 5, (n=1,2,\cdots)$

由于 $x_2 - x_1 = \dfrac{5-x_1^2}{5+x_1} < 0,$ 所以 $x_2 < x_1,$

假设 $x_k < x_{k-1},$ 则

$$x_{n+1} - x_n = \frac{20}{(5+x_n)(5+x_{n-1})} \cdot (x_n - x_{n-1}) < 0, (n=1,2,\cdots)$$ ，从而

$\{x_n\}$ 单调减少，故 $\{x_n\}$ 单调有界。因而极限存在，设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ 则对 $x_{n+1} = \dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n}$ 两边取极限得，

$a = \dfrac{5(1+a)}{5+a},$ 解出 $a = \sqrt{5}.$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{5}.$

例11 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+xf(x)}{x^2}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$。

解：法1 由所求的极限出发+洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1-x)-\ln(1-x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1-x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

$$\overset{洛}{=\!=\!=}-\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}$$

法2 由所给的极限出发+泰勒公式

$$\because \quad \lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

例12 设 $f(x)$ 在 R 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+2x)-f(a-x)}{x^2}=3$，试求 $f''(a)$ 并证明 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+2x)-f(a-x)}{x^2}=3 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$(洛)\ \lim_{x\to 0}\frac{2f'(a+2x)+f'(a-x)}{2x}=3 \qquad (※).$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}2x=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[2f'(a+2x)+f'(a-x)]=0$

$3f'(a)=0$

$\therefore f'(a)=0$，故 $x=a$ 为 $f(x)$ 的驻点.

由(※)式，有:

$$2\lim_{x\to 0}\frac{f'(a+2x)}{2x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(a-x)}{x}=3$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{f'(a+2x)\boxed{-f'(a)}}{2x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(a-x)-f'(a)}{-x}=3$$

$$2f''(a)-\frac{1}{2}f''(a)=3$$

$$\frac{3}{2}f''(a)=3 \Rightarrow f''(a)=2>0$$

$\therefore$ 由极值的第二充分条件，知 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

例13 设函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{x^2}-1}=3$ ，证明

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，并求 $f'(0)$；

(2) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

解：(1). 由 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)=0$ 可知

$$\lim_{x\to 0}[f(x)-1]=f(0)-1=0 \Rightarrow f(0)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=0$$

即：$f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=0$

(2). $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{x^2}-1}>0$

$\therefore$ 由函数极限的局部保号性，知存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(0,\delta)$ 时，有

$$\frac{f(x)-1}{e^{x^2}-1}>0$$

又因为 $x\neq 0$ 时，$e^{x^2}-1>0$，所以

$$f(x)>1=f(0),$$

由极值定义，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

[利用极限的局部保号性 + 极值定义]

例14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

I）求函数 $f(x)$的一阶麦克劳林公式（带拉格朗日型余项）。

II）证明：当n充分大时，存在常数M，使 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\dfrac{M}{2n^2}.$

解：I）由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,$ 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，故 $f(0)=0,$ 由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\quad \text{故}\quad f'(0)=0,$$

从而 $f(x)$ 的一阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2,$$

ξ 在x与0之间.

II）由题设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续的导数，故 $f''(x)$ 在包含原点的某闭区间上连续，则存在常数$M>0$,使得$\left|f''(x)\right|\le M$,于是

$$\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}Mx^2.$$

令 $x=\frac{1}{n}$, 当n充分大时，有 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2n^2}$.

例15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，在 $(0,1)$ 内二阶可微，且 $f(0)=f(1)=0$, 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0.$$

分析： $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2 f'(x))'\Big|_{x=\xi}=0$$

作辅助函数 $F(x)=x^2 f'(x)$. 但 $F(1)\neq 0$,

可考虑，在 $(0,1)$ 内某点 η 处，$F(\xi)=\eta^2 f'(\eta)=0$.

由罗尔定理，可得 $\eta\in(0,1)$, 使 $f'(\eta)=0$, 即

$$F(\xi)=0.$$

证： 对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理，可得 $\eta \in (0,1)$,

使 $f'(\eta)=0$,

令 $F(x)=x^2 f'(x)$, 则

$$F(0)=0, F(\eta)=\eta^2 f(\eta)=0,$$

由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,\eta) \subset (0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$,

即 $$2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0,$$

因 $\xi \neq 0$, 故 $$2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0.$$

四、证明题.

1、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证明：（1）零点定理

令 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$$F(0)=f(0)+0-1=-1<0$$

$$F(1)=f(1)+1-1=1>0$$

由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$F(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$$

即 $f(\xi)=1-\xi$。

（2）拉格朗日中值定理

可对 $f(x)$ 分别在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 利用拉格朗日中值定理，有

$$f(\xi)-f(0)=f'(\eta)(\xi-0),\quad \eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\zeta)(1-\xi),\quad \zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$$

由（1）的结论 $f(\xi)=1-\xi$，代入上面两式，有

$$1-\xi=\xi f'(\eta)\Rightarrow f'(\eta)=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$\xi=(1-\xi)f'(\zeta)\Rightarrow f'(\zeta)=\frac{\xi}{1-\xi}$$

所以，$f'(\xi)f'(\zeta)=1$.

注意：像这种含有两问的证明题，在证明第二问的时候一般都要利用到第一问的结论。

例16 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且

$$g''(x)\neq 0,\quad f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0,$$

证明：(1)在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2)在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明：（1）反证法，用罗尔定理推出矛盾

假设存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $g(x_0)=0$。

由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，可知 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。由 $g(a)=g(b)=0$，对 $g(x)$ 在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 上利用罗尔定理，有

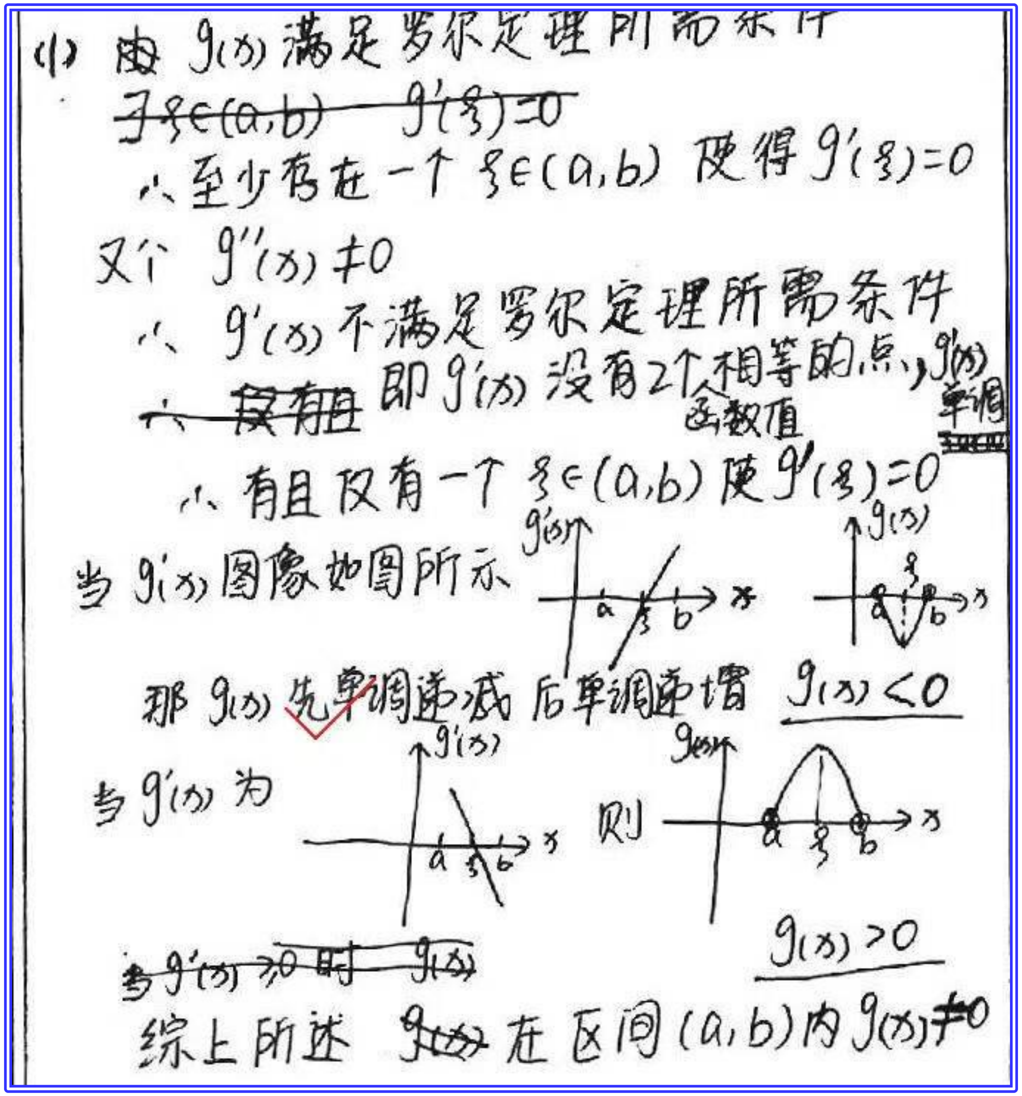
$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0,\ \xi_1\in(a,x_0),\xi_2\in(x_0,b)$$

对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上利用罗尔定理，有

$$g''(\xi)=0,\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$$

与题设条件 $g''(x)\neq 0, x\in[a,b]$ 矛盾！故假设不真。

法2 先证 g’(x)在(a,b)单调，然后分单调增和单调减进行讨论。



(1) 由 $g(x)$ 满足罗尔定理所需条件

~~$\exists \xi \in (a,b)$ $g'(\xi)=0$~~

∴至少存在一个 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$

又∵ $g''(x) \neq 0$

∴ $g'(x)$ 不满足罗尔定理所需条件

~~∴只有且~~ 即 $g'(x)$ 没有2个相等的函数值点，$g'(x)$ 单调

∴有且仅有一个 $\xi \in (a,b)$ 使 $g'(\xi)=0$

当 $g'(x)$ 图像如图所示

那 $g(x)$ 先单调递减后单调递增 $g(x)<0$

当 $g'(x)$ 为 则 $g(x)>0$

~~当 $g'(x)>0$ 时 $g(x)$~~

综上所述 ~~$g(x)$~~ 在区间 (a,b) 内 $g(x) \neq 0$

法2证明过程要用到g’(x)的连续性。若g’(x)不单调，则存在两点c,d，使得g’(c)=g’(d)，由罗尔定理可知存在一点ξ，使得g”(ξ)=0，这与题设条件g”(x) ≠0矛盾，故 g’(x)在(a,b)单调。

证明：(1) 由题知：$g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，

且 $g(a)=g(b)=0$

∴ 根据罗尔定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $g'(\eta)=0$

$g''(x)\neq 0$

① 设在(a,b)内 $g''(x)>0$

则 $g'(x)$在$[a,b]$内单调增加

∵ $g'(\eta)=0$

∴ $x\in(a,\eta)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调减少，

$x\in(\eta,b)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调增加

又∵ $g(a)=g(b)=0$

∴ 在(a,b)内 $g(x)<0$

② 同理可证当 $g''(x)<0$时，

在(a,b)内 $g(x)>0$

综上，在区间(a,b)内 $g(x)\neq 0$

错解原因： $g''(x)$在(a,b)区间内可能变号，有的点大于0，有的点小于0。

推广： 若把题目条件$g''(x)$存在修改为$g''(x)$连续，则可以利用图示方法，但还需要讨论第3种情况：$g''(x)$在(a,b)区间变号。此时对$g''(x)$利用闭区间连续函数的零点定理，可知存在一点ξ，使得$g''(\xi)=0$，这与题设条件$g''(x)\neq 0$矛盾，故$g''(x)$在(a,b)不变号。

（2）罗尔定理

令 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，

$$F(a)=f(a)g'(a)-f'(a)g(a)=0$$

$$F(b)=f(b)g'(b)-f'(b)g(b)=0$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$$

因为当 $x\in(a,b)$ 时，$g(x)\neq 0, g''(x)\neq 0$，故上式可变形为

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

（2）柯西中值定理

$\forall \xi \in (a,b)$，$f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,c]$、$[c,b]$ 上连续，在 (a,c)、(c,b) 上可导，且 $\forall x \in (a,b)$，$g'(x) \neq 0$（否则将与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾）.

由 Cauchy 中值 Th.

至少存在 $\xi_1 \in (a,c)$，$\dfrac{f(c)-f(a)}{g(c)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \Rightarrow \dfrac{f(c)}{g(c)} = \dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$

至少存在 $\xi_2 \in (c,b)$，$\dfrac{f(b)-f(c)}{g(b)-g(c)} = \dfrac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} \Rightarrow \dfrac{f(c)}{g(c)} = \dfrac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)}$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} = \frac{f(c)}{g(c)} \Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)}$$

$f'(x)$、$g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 上可导，$g''(x) \neq 0$.

$$\therefore \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)} = \frac{f''(\xi_\alpha)}{g''(\xi_\alpha)}, \quad \xi_\alpha \in (\xi_1, \xi_2)$$

令 $c = \xi$ 即证.