第十一章 谓词逻辑

11.5 谓词逻辑的蕴涵推论

谓词逻辑的蕴涵推理也由三部分组成

(1) 前提：已知谓词逻辑公式，假定为真

(2) 证明：由前提出发最终得到定理的实施过程。期间使用两种手段，即推理规则与证明过程

(3) 定理：推理的结果，它是公式，通过证明而最终确定其为真

推理规则是命题逻辑推理规则的扩充与推广

证明过程仍包括：前提引入P、推理引入T、附加前提引入CP

推理规则

第一组 命题逻辑推理规则的代换实例

如, $\forall xF(x), \exists yG(y) \vdash \forall xF(x)$ 简化式

$\neg A, A\vee B \vdash B$ 析取三段论

第二组 基本等式生成的推理规则

如, $\forall xF(x) \vdash \neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \vdash \forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x) \vdash \exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \vdash \neg\forall xF(x)$

$\forall x(B\rightarrow A(x)) \vdash B\rightarrow\forall xA(x)$， $B\rightarrow\forall xA(x) \vdash \forall x(B\rightarrow A(x))$

推理规则

第三组 其他常用的重要推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \vdash \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \vdash \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \vdash \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \vdash \forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

(5) $\forall xA(x) \vdash \exists xA(x)$

(6) $\exists x\forall yA(x,y) \vdash \forall y\exists xA(x,y)$

(7) $\forall xA(x) \vdash A(x)$

(8) $A(x) \vdash \exists xA(x)$

第四组 量词消去引入规则

量词消去规则

1. 全称量词消去规则(∀-)

全称指定规则(US) **Universal Specification**

$\forall x A(x) \vdash A(y)$ 或 $\forall x A(x) \vdash A(c)$

其中x,y是个体变元符号, c是个体常元符号,

且在$A(x)$中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现。

若**A(*x*)** 表示公式 $\exists y P(x, y)$

***P*(*x*, *y*)**中的**x**原来是自由的，现在成了约束的，所以不能代入。

如果有必要代入***y***，则应先将式中的约束变元***y***改名。

原因：$\forall x A(x) \to A(y)$和 $\forall x A(x) \to A(c)$是永真式

练习

下列推导步骤为什么是错误的?

(1)	(i)	$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$	P
	(ii)	$P(x) \rightarrow Q(x)$	T, (i), US
(2)	(i)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
	(ii)	$P(a) \vee P(b)$	T, (i), US
(3)	(i)	$\forall x P(x) \vee \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	P
	(ii)	$P(a) \vee \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	T, (i), US

重要提示

要特别注意使用∀-规则的条件.

反例1. 对$A=\forall x\exists yF(x,y)$使用∀-规则, 推得$B=\exists yF(y,y)$.

取解释I: 个体域为R, $\overline{F}(x,y): x>y$

在I下A被解释为$\forall x\exists y(x>y)$, 真;

而B被解释为$\exists y(y>y)$, 假

原因: 在A中x自由出现在$\exists y$的辖域$F(x,y)$内

量词消去规则

2. 存在量词消去规则(∃-)

存在指定规则(ES) **Existential Specification**

$$\exists x A(x) \vdash A(e) \quad \text{或} \quad \exists x A(x) \vdash A(c)$$

- 其中e是额外变元, 它的变化范围是使$A(x)$为真的个体;
  c是使$A(x)$为真的个体常元符号
- 在任意给定的前提中和前面的推导步骤上（包括$A(x)$ 中），
  e、c不曾出现过
- 除x外，$A(x)$中无其他自由变元
- $A(e)$、$A(c)$是新引入的一个假设，只能用作暂时性的前提，不能作为证明的最终结论

量词消去规则

例: 设个体域是R，P(x)：x是正数，Q(x)：x是负数。

前提：$\exists x P(x)$, $\exists x Q(x)$

下面推理是否正确，若不正确说明原因

1. $\exists x P(x)$	P
2. P(a)	∃-
3. $\exists x Q(x)$	P
4. Q(a)	∃-
5. P(a)∧Q(a)	2,4合取引入

量词引入规则

3. 全称量词引入规则(∀+)
全称推广规则(UG) Universal Generalization

$$A(x) \vdash \forall y A(y)$$

- x为常元和额外变元时不能使用此规则
- 若A(x)中含有额外变元，则A(x)不能使用此规则
- 约束变元 y 不能在 $A(x)$ 中约束出现
- 使用附加前提引入时，蕴涵式的前件中所出现的自由变元不能使用此规则。
- x在前提的公式中自由出现时，不能使用此规则

原因：为了证明$\forall yA(y)$为真，只需要任意取一个x，证明$A(x)$为真.
要保证x的任意性，要求x与前提中的条件无关，即x不在前提的任何公式中自由出现.

自由出现的变元与公式的语义有关，而约束变元仅是符号而已

反例2(续)

反例2. 前提: $P(x) \to Q(x)$, $P(x)$

结论: $\forall x Q(x)$

"证明":

① $P(x) \to Q(x)$	前提引入
② $P(x)$	前提引入
③ $Q(x)$	①②假言推理
④ $\forall x Q(x)$	③$\forall$+

错误原因: 在④使用$\forall$+规则, 而x在前提的公式中自由出现.

重要提示

反例2. 前提: $P(x)\to Q(x)$, $P(x)$

结论: $\forall xQ(x)$

取解释I: 个体域为Z, $\overline{P}(x): x$是偶数， $\overline{Q}(x): x$被2整除

在I下前提为真, 结论为假, 从而推理不正确

量词引入规则

4\. 存在量词引入规则(∃+)

存在推广规则(EG) **Existential Generalization**

$A(x) \vdash \exists y A(y)$ 或 $A(c) \vdash \exists y A(y)$

其中x是个体变元或额外变元, c是个体常元,

且取代 x 及 c 的 y 不能在 A(x) 中约束出现.

原因：若个体变元或额外变元x以及常元 c使$A(x)$为真，则必有 $\exists y A(y)$

练习

下列推导步骤为什么是错误的?

(4)	(i) $P(x) \rightarrow Q(x)$	P
	(ii) $\exists x P(x) \rightarrow Q(x)$	T，(i)，EG
(5)	(i) $P(a) \rightarrow Q(b)$	P
	(ii) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	T，(i)，EG

例：证明$\exists x M(x)$是 $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$和 $\exists x H(x)$的有效结论。

解. 本题是证 $\forall x(H(x)\rightarrow M(x)) \land \exists x H(x) \Rightarrow \exists x M(x)$

① $\exists x H(x)$

② $H(y)$

③ $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$

④ $H(y)\rightarrow M(y)$

⑤ $M(y)$

⑥ $\exists x M(x)$

观察下述推理过程，对吗？若不对找出错误:

(1) $\forall x\exists yP(x, y)$	P，前提
(2) $\exists yP(c, y)$	T，(1)，US
(3) $P(c, d)$	T，(2)，ES
(4) $\forall xP(x, d)$	T，(3)，UG
(5) $\exists y\forall xP(x, y)$	T，(4)，EG

第(4)步是错误的，$P(c, d)$不符合条件：“**在之前的推导步骤中，*x*不能是常元和额外变元**”，不能引用*UG*。如果没有这个限制就会错误地证明:

$$\forall x\exists yP(x, y) \Rightarrow \exists y\forall xP(x, y)$$

而这一式前面已指明它是不成立的。

练习

1. 证明："所有人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。"

练习

2. 根据前提集合: 同事之间总是有工作矛盾的，张平和李明没有工作矛盾，能得出什么结论?

解 设$P(x, y)$: x和y是同事关系，

$Q(x, y)$: x和y有工作矛盾，a: 张平，b: 李明，则

前提: $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$，$\neg Q(a, b)$

我们做以下推理:

(1)	$\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$	P
(2)	$\forall y(P(a, y) \rightarrow Q(a, y))$	T, (1), US
(3)	$P(a, b) \rightarrow Q(a, b)$	T, (2), US
(4)	$\neg Q(a, b)$	P
(5)	$\neg P(a, b)$	T, (3), (4),

所以，除前提本身外，能得出: 张平和李明不是同事关系的结论。

练习

3.证明或否定以下论证：

(1) 每一棵松树都是针叶树，每一冬季落叶的树都非针叶树，

所以，每一冬季落叶的树都非松树。

解: 设*P*(*x*): *x*是松树，*Q*(*x*): *x*是针叶树，*R*(*x*): *x*是冬季落叶的树。

这个论证是

$$\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x))}{\text{所以 } \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))}$$

这个论证是有效的，证明如下:

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
②	$P(y) \rightarrow Q(y)$	T，①，US
③	$\neg Q(y) \rightarrow \neg P(y)$	T，②，E_{24}
④	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	P
⑤	$R(y) \rightarrow \neg Q(y)$	T，④，US
⑥	$R(y) \rightarrow \neg P(y)$	T，③，⑤，I_6
⑦	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$	T，⑥，UG

练习

(2) 每个大学教师都是知识分子，有些知识分子有怪脾气，所以有些大学教师有怪脾气。

解:设$T(x)$: x是大学教师，$N(x)$: x是知识分子，$H(x)$: x有怪脾气。这个论证是

$$\frac{\forall x(T(x) \rightarrow N(x)),\ \exists x(N(x) \wedge H(x))}{\text{所以}\ \exists x(T(x) \wedge H(x))}$$

这个论证是无效的，要证明无效，只需找出一种解释说明上式，即

$$\forall x(T(x)\rightarrow N(x)) \wedge \exists x(N(x) \wedge H(x)) \rightarrow \exists x(T(x) \wedge H(x))$$

非永真即可。

练习

$$\forall x(T(x)\rightarrow N(x))\wedge \exists x(N(x)\wedge H(x))\rightarrow \exists x(T(x)\wedge H(x))$$

个体域：所有实数集合；

T(x)：x是自然数；

N(x)：x是整数；

H(x)：x是负数。

练习

前提：$\exists x \forall y P(x,y)$；

定理：$\forall y \exists x P(x,y)$；

证明：C_1：$\exists x \forall y P(x,y)$，	P
C_2：$\forall y P(e,y)$，	T：ES，C_1
C_3：$P(e,z)$，	T：US，C_2
C_4：$\exists x P(x,z)$，	T：EG，C_3
C_5：$\forall y \exists x P(x,y)$.	T：UG，C_4

练习

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，

$\forall xP(x)$；

定理：$\forall xQ(x)$；

证明：C_1：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，

C_2：$P(x)\rightarrow Q(x)$，

C_3：$\forall xP(x)$，

C_4：$P(x)$，

C_5：$Q(x)$，

C_6：$\forall xQ(x)$.

练习

考虑蕴含式:

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to \forall xP(x) \lor \forall xQ(x)$$

(1) 证明它不是有效的。

(2) 下面是一个证明，企图证明上式有效，试找出其不正确之处。

$$\begin{aligned}
\forall x(P(x) \lor Q(x)) &\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x(\neg P(x) \land \neg Q(x)) \\
&\Rightarrow \neg(\exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x) \lor \neg \exists x \neg Q(x) \\
&\Leftrightarrow \forall xP(x) \lor \forall xQ(x)
\end{aligned}$$

作业讲解

11.2 证明下列公式：

(1) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists x\, Q(x)$;

(2) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$;

(3) $\forall xP(x) \rightarrow \exists x\, Q(x) = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

证明: (1) 方法一 （证明蕴含式为永真式即可）

方法二

前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$

结论：$\forall xP(x) \vee \exists x\, Q(x)$

反证法

①	$\neg(\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$	假设前提
②	$\neg\forall xP(x) \wedge \neg\exists xQ(x)$	① DM
③	$\neg\forall xP(x)$	② 简化式
④	$\exists x\neg P(x)$	③ 量词转化
⑤	$\neg\exists xQ(x)$	② 简化式
⑥	$\forall x\neg Q(x)$	⑤ 量词转化
⑦	$\neg P(y)$	④ $\exists-$
⑧	$\neg Q(y)$	⑥ $\forall-$
⑨	$\neg P(y) \wedge \neg Q(y)$	⑦⑧ 合取式
⑩	$\neg(P(y) \vee Q(y))$	⑨ DM
⑪	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P (前提引入)
⑫	$P(y) \vee Q(y)$	⑪ $\forall-$
⑬	$\neg(P(y) \vee Q(y)) \wedge (P(y) \vee Q(y))$	⑩⑫ 合取式，矛盾

11.2 证明下列公式：

(1) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$；

(2) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$；

(3) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

证明: (2) 方法一

证 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x)) = T$ 即可.

方法二

前提: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x))$, $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

结论: $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$

证明: （练习）

11.6 谓词逻辑范式

定义11.11 设A为一个谓词逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$$

其中Q_i $(1\le i \le k)$为$\forall$或$\exists$，M为不含量词的公式且M中不出现联结词$\rightarrow$和$\leftrightarrow$，则称A为前束范式.

例如，下面四个公式哪些是前束范式：

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\vee(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

只有1,2是前束范式

前束范式存在定理

定理11.3（前束范式存在定理）

谓词逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

简称为公式的前束范式。

求前束范式的步骤:

(1) 将公式中出现联结词→和↔的地方转化成¬、∨、∧

(2) 利用命题逻辑否定深入等式及谓词逻辑量词转化等式将否定联结词深入谓词前

(3) 利用改名、代替规则使所有约束变元均不同，且自由变元及约束变元亦不同

(4) 利用量词辖域收缩与扩张等式扩大量词的辖域至整个公式

求前束范式的实例

前束范式不惟一

例13 求下列公式的前束范式

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$= \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词转化等值式）

$= \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$= \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词转化等值式

$= \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ 改名规则

$= \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ 辖域收缩扩张规则

求前束范式的实例

(2) $\forall xF(x)\vee\exists yG(y) \rightarrow \forall xH(x)$

解 $\forall xF(x)\vee\exists yG(y) \rightarrow \forall xH(x)$

$= \neg(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))\vee\forall xH(x)$ 除去蕴涵

$= (\exists x(\neg F(x))\wedge\forall y(\neg G(y)))\vee\forall xH(x)$ 否定深入、量词转换

$= (\exists x(\neg F(x))\wedge\forall y(\neg G(y)))\vee\forall zH(z)$ 改名

$= \exists x\forall y\forall z((\neg F(x))\wedge(\neg G(y))\vee H(z))$ 量词辖域扩张

练习

求下列公式的前束范式

(1) $\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$.

斯科伦范式

前束范式的全称与存在量词排列杂乱无章，进一步规范

定义11.12 前束范式的首标部分仅出现全称量词，而且整个公式不出现自由变元，这种形式的公式称为斯科伦范式。

例如，$\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$为斯科伦范式

斯科伦范式

求斯科伦范式的步骤：

(1) 将公式中出现的自由变元用全称量词进行约束，设$x'_i(1\le i\le m)$为自由变元，则公式为: $\forall x'_1\ldots\forall x'_m Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$

(2) 对每个Q_ix_i从左到右作代换：

a) 若Q_ix_i为全称量词，则不作改动

b) 若Q_ix_i为存在量词且其左边无全称量词，则取一个公式中没出现过的常量符号c替代M中所有出现的x_i并删除Q_ix_i

c) 若Q_ix_i为存在量词且其左边有全称量词，则取一个函数$f(x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr})$, 其中$Q_ix_i$左边所出现的全称量词的个数为$r$，其约束变元分别为$x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr}$, 而$f$是一个$r$元函数符，它在公式其他处并不出现，然后用$f(x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr})$替代$M$中所出现的$x_i$并删除$Q_ix_i$

求斯科伦范式的例子

例14 设公式： $\forall x\exists y\forall z\exists u\exists v(P(t, x, y, z)\wedge Q(y, z, u)\wedge R(z, u, v))$

是前束范式，将其转化成斯科伦范式

解 (1) 将公式中出现的自由变元t用全称量词进行约束

$$\forall t\forall x\exists y\forall z\exists u\exists v(P(t, x, y, z)\wedge Q(y, z, u)\wedge R(z, u, v))$$

(2)用$f(t, x)$替代y并删除$\exists y$；用$g(t, x, z)$替代u并删除$\exists u$；用$h(t, x, z)$替代v并删除$\exists v$得

$$\forall t\forall x\forall z(P(t, x, f(t, x), z)\wedge Q(f(t, x), z, g(t, x, z))\wedge R(z, g(t, x, z), h(t, x, z)))$$

即为斯科伦范式。

斯科伦范式

注意：任意一个谓词逻辑公式A都可以转化为一个斯科伦范式A’，并且A’可满足当且仅当A可满足。

但是一般情况下，A并不与A’等值，只是“等可满足”。

练习

证明下列各等值式.

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$.

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$.

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$.

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$.

11.2 证明下列公式：

(1) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\vee\exists x\,Q(x)$;

(2) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)\wedge R(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$;

(3) $\forall xP(x)\rightarrow\exists x\,Q(x)=\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

11.3 求下列各式的前束范式：

(1) $\exists x(\neg\exists yP(x,y))\rightarrow(\exists zQ(z)\rightarrow R(x))$;

(2) $\forall x\forall y\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists uQ(x,u)\rightarrow\exists v\,Q(y,v))$;

(3) $\forall xP(x)\rightarrow\forall zQ(x,z)\vee\forall z\,R(x,y,z)$;

(4) $\exists x(\neg\exists yP(x,y)\rightarrow(\exists zQ(z))\rightarrow R(x))$.

将下列命题符号化.

(1) 兔子比乌龟跑得快.

(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快.

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快.

(4) 不存在跑得同样快的两只兔子.

THE END