§4.3　向量组的秩和极大无关组

问题（1）一个向量组（含有限多个向量，或无限多个向量）线性无关的向量最多有几个？

（2）如何找出这一组线性无关向量组？

（3）其余向量与这一组向量有何关系？

一、向量组的秩和极大无关组

定义4.9　若向量组T（均同维）满足：

(1) T中有r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关$(r\geq 1)$;

(2) T中任$r+1$个向量(若有)都线性相关;

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是T的一个极大线性无关组。

简称为极大无关组，称r为向量组的秩。

例如 对T: $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,1,2)$

有 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$ 且 α_1,α_2 线性无关

所以，T的一个极大无关组是α_1,α_2，秩为2。

几点说明

(1) 向量组T的秩是唯一的；

(2) 规定, 当T只含零向量时, T秩＝0；

(3) 若T秩＝r, 则T中任r个线性无关向量都组成 T 的一个极大无关组;T 的极大无关组可能不止一个；

(4) 设T有有限个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$， 且T秩＝$r$, 则T本身就是T的唯一的一个极大无关组;

(5) T秩$r\le$ 向量维数n.

定理4.6（矩阵的行（列）向量组的秩判定方法）

设 $m\times n$ 矩阵A，$rank A = r(\geq 1)$，则

(1) A 的行 (列) 向量组的秩为 r；

(2) 当 A 的某个 r 阶子式 D_r 不为零时,含 D_r 的 r 个行 (列)向量组是 A 的行(列)向量组的一个极大无关组.

证明 $\because \ rank A = r,$

$\therefore$ A至少有一个 r 阶子式$D_r \neq 0$,且所有 $r+1$ 阶子式都为零,

由定理4.5，A 中含 D_r 的 r 个行（列）向量线性无关，

且任意 $r+1$ 个行（列）向量组线性相关.

$\therefore$这r个行（列）向量是A的行（列）向量组的一个极大无关组，

A 行（列）向量组的秩为 r.

说明：计算向量组的秩可以转化为求矩阵的秩.

例 设

$$T:\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

求T的秩与极大无关组.

解：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&1&0\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ rank\boldsymbol{A}=2,\ \therefore$ T秩$=2$.

又因为$\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 T 的一个极大无关组.

注意：$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$； $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$； $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_4$都是极大无关组，

但 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 不是极大无关组

再如 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,4,4),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4)$$

的秩和极大无关组.

解 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&4&4\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&4&4\\0&2&1&5\\0&0&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以rank$\boldsymbol{A}=3$，所以此向量组的秩为3.

注：此时要求极大无关组比较复杂.

定理4.7（利用初等变换求向量组的秩与极大无关组）

对矩阵 $A_{m\times n}$

(1) 若 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$，则 A 中任 s 个列向量，与 B 中对应列的 s 个列向量，线性相关性相同；

(2) 若 $A \xrightarrow{\text{初等列变换}} C$，则 A 中任 s 个行向量，与 C 中对应行的 s 个行向量，线性相关性相同.

证明　设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$\alpha_i,\beta_i$ 都是列向量.

在 A,B 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列，各取 s 个列向量：

$$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_s};\ \beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}$$

$\because$ 仅作行变换使 $A \to B$,

$\therefore$ 矩阵$(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_s}) \xrightarrow{\text{相同行变换}}$ 矩阵$(\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_s})$

考虑两齐次线性方程组:

$\alpha_{j_1} x_1 + \alpha_{j_2} x_2 + \cdots + \alpha_{j_s} x_s = 0$; $\beta_{j_1} y_1 + \beta_{j_2} y_2 + \cdots + \beta_{j_s} y_s = 0$

可见两系数矩阵 $(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_s}) \cong (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_s})$

$\therefore$ 此两方程组同解，故

或都只有零解 $\Rightarrow$ 所取两组列向量都各线性无关;

或都有非零解 $\Rightarrow$ 所取两组列向量都各线性相关.

证毕

求向量组 $\alpha_1=(2,2,4,4)$， $\alpha_2=(0,2,1,5)$，

$\alpha_3=(2,0,3,-1)$， $\alpha_4=(1,1,0,4)$

的秩和极大无关组.

解 记

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4&4\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\2&-1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=B$$

所以rank$A$＝rank$B$=3，所以此向量组的秩为3.

又因为B中 $\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$,所以B的第1,2,4行线性

无关,所以A中相应的第1,2,4行向量线性无关.

解法二（对行向量组，可以先都转置为列向量，排成矩阵后，用行变换化为行最简型）

设

$$T':\quad \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix}$$

显然 T' 秩=T 秩，且极大无关组互为转置向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

所以 T秩＝T′秩$= \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 3$

又因为$\boldsymbol{B}$中 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,所以$\boldsymbol{B}$的第1,2,4列线性无关,所以$\boldsymbol{A}$中相应的第1,2,4列向量线性无关.

所以向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$是向量组T的一个极大无关组.

二、等价向量组及秩的关系

定义4.10 （两个向量组等价的概念）

设有两个 n 维向量组

$$T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \qquad T_2: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$$

(1) 若每个 $\alpha_i (i=1,2,\cdots,r)$ 都可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表示，则称 T_1 可由 T_2 线性表示；

(2) 若 T_1, T_2 可互相线性表示，则称 T_1 与 T_2 等价.

等价三公理：

（1）反身性：向量组 T_1 与其自身 T_1 等价；

（2）对称性：若T1与T2等价，则T2与T1等价；

（3）传递性：若T1与T2等价, 且T2与T3等价, 则T1与T3等价.

问题：向量组与其什么样的子组等价？

定理4.8： 向量组与它的任一个极大无关组等价。

证明 设向量组T的一个极大无关组为

$$\mathrm{T}_1: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \qquad \therefore \mathrm{T}\text{秩} = r.$$

(1) $\forall \boldsymbol{\alpha}_i \in \mathrm{T}_1 (1 \le i \le r)$ 总可由T线性表示：

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_r + 0 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots$$

其中 $\boldsymbol{b}_1, \cdots$(若有的话)是T中异于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$的向量。

（2）反之，对$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{T}$，

若$\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{T}_1$， 则$\boldsymbol{\alpha}$可由$\mathrm{T}_1$线性表示；

若$\boldsymbol{\alpha} \notin \mathrm{T}_1$，则$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$必线性相关，但$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，

$\therefore \boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示.

总之, T可由T_1线性表示.

因此, T与T_1可互相线性表示, 即T与T_1等价. **证毕**

推论 向量组的任意两个极大无关组等价；

即 向量组的任意两个极大无关组可以互相线性表示.

证 设 T_1, T_2 都是T的极大无关组，由定理4.8及等价向量组的传递性有

$$T_1 \sim T, T \sim T_2 \Rightarrow T_1 \sim T_2$$

- 向量组的极大无关组，及互相等价定理，意义在于

(1) 一旦T的极大无关组T1得到, T的每一个向量都可以由此极大无关组T1线性表示, 且表示式唯一, 从而得到T的一种结构。

(2) T的不同极大无关组, 对应T的不同结构, 但彼此等价。因此, 可以互相转化, 即互相表示。

(3) 这些结论，是后面“向量空间”的基础。

上面讨论的是一个向量组与其子组的关系。

下面讨论两个向量组之间的关系。

定理4.9: 对两个n维向量组 （比较向量个数的多少）

$$T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \qquad T_2: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$$

若 (1) T_1线性无关，

且 (2) T_1可由T_2线性表示，

则 $r \le s$ (T_1向量个数$\le T_2$向量个数)

证明 不妨设T_1, T_2都是列向量组, 将T_1, T_2合在一起构成新向量组:

$$T: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$$

记 $A_{n\times(r+s)} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$

$\because T_1$可由T_2线性表示，$\therefore$对$\forall \boldsymbol{\alpha}_i \in T_1, \exists k_{ij}$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_{i1} \underset{c_{r+1}}{\boldsymbol{\beta}_1} + k_{i2} \underset{c_{r+2}}{\boldsymbol{\beta}_2} + \cdots + k_{is} \underset{c_{r+s}}{\boldsymbol{\beta}_s}$$

$$\therefore \boldsymbol{A} \xrightarrow[j=1,2,\cdots,r]{c_j - k_{i1}c_{r+1} - k_{i2}c_{r+2} - \cdots - k_{is}c_{r+s}} (\boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \triangleq \boldsymbol{B}$$

$\Rightarrow \ rank\boldsymbol{A} = rank\boldsymbol{B} \le s$ ($\boldsymbol{B}$的列数)

而由定理4.6，T秩（A列向量组的秩）$= rankA$，$\therefore$ T秩$\le s$.

又$\because T_1$线性无关，$\therefore T_1$秩$=r$，但T_1秩$\le$T秩，$r \le s$.　　证毕

定理4.9 说明

(1) r个线性无关向量, 若可用另一组向量线性表示，则后一组向量的个数不少于r；

(2) 一组线性无关的向量, 不可能用另一组个数更少的向量线性表示。

特别在三维向量空间中：

(1) 两个线性无关的向量，不能用同一个向量线性表示；

(2) 三个线性无关的向量，不能用两个或一个向量线性表示。

推论1 设向量组T_1秩为r,向量组T_2秩为s.若T_1可由T_2线性表示, 则$r \le s$.

证明 设T_1, T_2的极大无关组分别为

$$(\mathrm{I}):\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \qquad (\mathrm{II}):\ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$$

$\because$(I)可由T_1线性表示, T_1可由T_2线性表示, T_2可由(II)线性表示 $\quad\therefore$(I)可由(II)线性表示,

由定理4. 9 $\Rightarrow\ r \le s.$

推论2 **等价向量组的秩相等.**

证明 设向量组T_1与T_2等价，即可互相线性表示，则

$$T_1\text{秩} \le T_2\text{秩}，\ T_2\text{秩} \le T_1\text{秩},$$

$$\Rightarrow \qquad T_1\text{秩} = T_2\text{秩}。$$

注: (判断对错)

若两个n维向量组T_1与T_2秩相等, 则T_1与T_2等价.

……………………………(×)

例 T_1: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)$, T_1 秩 $=2$.

T_2: $\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,0)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,0,1)$, T_2 秩 $=2$.

但 T_1 与 T_2 不能互相线性表示, 即不等价.

注意与“两矩阵等价$\Leftrightarrow$它们秩相同”的区别.

（1）两个等价向量组的秩必定相等，

但秩相等的两个向量组未必等价。

（2）$A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价的充分必要条件是

$$rank A = rank B$$

推论3（例4.9）重要命题！

对矩阵 $A_{m\times r}, B_{r\times n}$，有 $rank(AB)\le\min\left(rank A,\ rank B\right)$.

证明 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times r}$, $\boldsymbol{B}$的行向量组为$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$,

记$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 其行向量组为$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m$,则有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}$$

$$\therefore \boldsymbol{c}_i = a_{i1}\boldsymbol{b}_1 + a_{i2}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{ir}\boldsymbol{b}_r, \quad i=1,2,\cdots,m$$

即此$\boldsymbol{C}$ 的行向量组可由$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{C}$行向量组秩$\le\boldsymbol{B}$行向量组秩.

但 $rank\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$组秩, $rank\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$组秩.

$\Rightarrow \ rank\boldsymbol{C} \le rank\boldsymbol{B}$, 即$rank(\boldsymbol{AB}) \le rank\boldsymbol{B}$

另一方面, $\because \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

$$\therefore rank\boldsymbol{C} = rank\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \le rank\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = rank\boldsymbol{A}$$

合之有 $rank(\boldsymbol{AB}) \le \min(rank\boldsymbol{A}, rank\boldsymbol{B})$. **证毕**

练习 (2010年 数一 4分)

设 A为$m\times n$ 型矩阵，B为$n\times m$型矩阵，E为m阶单位矩阵。若$AB = E$，则（ ）

(A) $\mathrm{r}(A)=m$, $\mathrm{r}(B)=m$; (B) $\mathrm{r}(A)=m$, $\mathrm{r}(B)=n$;

(C) $\mathrm{r}(A)=n$, $\mathrm{r}(B)=m$; (D) $\mathrm{r}(A)=n$, $\mathrm{r}(B)=n$;

练习 **(2003年 数一 4分)**

设向量组 I： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（ ）

(A) 当 $r<s$ 时，向量组II必线性相关；

(B) 当 $r>s$ 时，向量组II必线性相关；

(C) 当 $r<s$ 时，向量组I必线性相关；

(D) 当 $r>s$ 时，向量组I必线性相关.

注：这是定理4. 9的逆否命题。