22-23 秋学期微积分（上）期中试题

（2022-11-5）

一、填空题(每小题 4 分，共 40 分)

1．设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

2．设函数 $f(x)=(\dfrac{x-1}{1+x})^x$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x+1)=$ __________.

3．设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______，是第______类间断点.

4． $f(x)=\begin{cases}(\sin 2x+e^{2ax}-1)/x, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$______.

5．当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2,\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_____.

6．若物体的运动规律为 $s=3\sin 2t$，则其在 $t=0$ 时的速度为______， 加速度为_______.

7．设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $y'(\pi)=$________ ，$\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}$ ___________.

8．函数 $y=f(x)$ 是由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________________.

9．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

10．设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(0)=2$ 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$_______.

二、单项选择题(每小题 4 分，共 40 分)

1．函数 $f(x)=|x\sin x|e^{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是（　　）函数.

A. 有界；　　B. 单调；　　C. 周期；　　D. 偶.

2. 以下四个命题中正确的是（　　）.

A. 有界数列必定收敛；　　B. 发散数列必定无界；

C. 无界数列必定发散；　　D. 单调数列必有极限.

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+x}{a(\sqrt{n})^3+bn+c}=1$，则（　　）.

A. $a=1,b=1$；　B. $a=-1,b=1$；　C. $a=0,b=1$；　D. $a=1,b=0$.

4. 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）.

A. 无穷小量；　　B. 有界的，但不是无穷小量；

C. 无穷大量；　　D. 无界的，但不是无穷大量.

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）.

A. $f(0)=0,$ 且 $f'_+(0)$ 存在；　　B. $f(0)=1,$ 且 $f'_+(0)$ 存在；

C. $f(0)=0$, 且 $f'_-(0)$ 存在；　　D. $f(0)=1$, 且 $f'_-(0)$ 存在.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \dfrac{a+b\cos x}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则（　　）.

A. $a=-2,b=2$；　B. $a=2,b=-2$；　C. $a=-1,b=1$；　D. $a=1,b=-1$.

7. 设 $\begin{cases} x=\sin t\cdot\ln t, \\ y=\cos t\cdot\ln t, \end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\Big|_{t=1}=$（　　）.

A. $\tan 1$；　B. $\cot 1$；　C. $\sin 1$；　D. $\cos 1$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{2^x}\sin x=$（　　）.

A. -1；　B. 0；　C. 1；　D. ∞.

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，对任意 $x_1,x_2\in(a,b)(x_1<x_2)$，至少存在一点 ξ，使（　　）

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$；　B. $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1),\xi\in(x_1,b)$；

C. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\xi\in(x_1,x_2)$；D. $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a),\xi\in(a,x_2)$.

10. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'_+(a)>0, f'_-(b)<0$，则以下结论中错误的是（　　）.

A. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$；　B. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f'(x_0)=0$；

C. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(a)$；　D. 存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(b)$.

三、（7 分）求极限 $I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$；

四、（7 分）设函数 $y=(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$，求其 n 阶导数的一般表达式.

五、（6 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

六、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.证明：

（1）　存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（2）　对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.