§ 2.3 逆矩阵

一、概念的引入

问题：在数字运算中，已知数a与c，求x，使得

$ax=c$ 或 $xa=c$？（引出数字乘法逆运算—除法）

解　设$a \neq 0$，于是a^{-1}有意义。

用a^{-1}左乘第一个方程两边，得

$$a^{-1}(ax)=a^{-1}c \quad 而 \quad a^{-1}a=1 \quad \therefore x=a^{-1}c$$

用a^{-1}右乘第二个方程两边，得

$$(xa)a^{-1}=ca^{-1} \quad 而 \quad aa^{-1}=1 \quad \therefore x=ca^{-1}$$

所以，除法运算可归结为：数a是否有逆元素a^{-1}？

即是否有数b，使得$ab = ba = 1$？

当$a \neq 0$时，a有逆元素b，$b=a^{-1}$

二、逆矩阵的定义和唯一性

定义2.10 对于n阶方阵A，如果有一个n阶方阵B，使得
$$AB = BA = E,$$
则说方阵A是可逆的，并把方阵B称为A的逆矩阵.

A的逆矩阵记作A^{-1}. 显然有 $E^{-1} = E$

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,\quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

注意：逆矩阵千万不要写作 $\dfrac{1}{A}$ 。

定理2.1 若n阶方阵A可逆，则A的逆矩阵唯一。

证明 设方阵B、C都是A的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E \qquad AC = CA = E$$

因此 $$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

所以矩阵A的逆矩阵唯一。

- **逆矩阵求法———待定系数法**

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A$的逆矩阵。

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵,

则有 $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\ 2b+d=0,\\ -a=0,\\ -b=1,\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=2.\end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}=\overset{BA}{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

注意：这种求法虽然思路简单，但计算量太大，比如要求一个三阶矩阵的逆阵，就要求解一个九个未知数的方程组，所以平时不用它来求逆阵。

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

定理2.2 矩阵 A 可逆的充要条件是 $\det A \neq 0$.

证明（必要性）已知A可逆，则有矩阵 A^{-1} 使得

$$AA^{-1}=E$$

两边取行列式，有

$$\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) = \det E = 1$$

所以

$$\det A \neq 0$$

（充分性） 当 $\det A \neq 0$时，由式

$$AA^* = A^*A = (\det A)E$$

得

$$A\left(\frac{1}{\det A}A^*\right) = \left(\frac{1}{\det A}A^*\right)A = E$$

所以矩阵A可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$$

证毕

➢ 逆矩阵求法二——伴随矩阵法

由定理2.2的证明知

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$$

其中A^*为A的伴随矩阵。

特别地，对于二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

当 $\det A = ad-bc\neq 0$时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

例3　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$，判断$A$是否可逆. 若可逆，求其逆阵。

解　因为
$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 3 & 4 & 6\end{vmatrix}=1\neq 0$$

所以矩阵A可逆. 又因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}=-3\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\5&8\end{vmatrix}=1\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\4&8\end{vmatrix}=4$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-3&4\\1&2&-3\end{pmatrix}$$

注意验证

注：用伴随矩阵法求逆阵非常容易出错，一般不提倡。

定理2.2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

推论1 方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆 $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} = 0$

- **奇异矩阵与非奇异矩阵的定义**

当 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵；

当 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵；

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵.

推论2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，则方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$.

证明 因为 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，所以

$$(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{E} = 1$$

所以 $\det A \neq 0$，所以 A可逆，记其逆阵为A^{-1}，则有

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$$

同理可证 $$B^{-1} = A$$

注意：以后判断B是否为A的逆矩阵，只需验证 $AB = E$ 和 $BA = E$ 中的一式即可。

四、运算规律

1. A可逆 $\Rightarrow A^{-1}$可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$

证 对A^{-1}，取$B=A$，则有

$$A^{-1}B = A^{-1}A = E$$

2. A可逆，$k \neq 0 \Rightarrow kA$ 可逆，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$。

证　对 kA，取 $B = \frac{A^{-1}}{k}$，则有

$$(kA)B = (kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = E$$

3. 同阶方阵 A_n, B_n均可逆 $\Rightarrow AB$ 可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证　对AB，取$C = B^{-1}A^{-1}$，则有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$

4. A可逆 $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

证 A可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^{\mathrm{T}}) \neq 0 \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$可逆

对A^{T}，取$B = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$，则有

$$A^{\mathrm{T}} B = A^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1} A)^{\mathrm{T}} = E$$

$$\therefore \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

5. A可逆 $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

证 因为A可逆，所以有

$$AA^{-1} = E$$

两边取行列式，有 $(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E} = 1$

$$\therefore \quad \det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}$$

注意：$\boldsymbol{A}$可逆，且$k \neq 0 \Rightarrow \det(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\det \boldsymbol{A}^{-1}$ （×）

$\boldsymbol{A}$可逆，且$k \neq 0 \Rightarrow \det(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-n}\det \boldsymbol{A}^{-1}$ （√）

6. $\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^*$也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$

证 "$\Rightarrow$" 设$\boldsymbol{A}$可逆，则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，由恒等式

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$ 得 $\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{E}$

所以$\boldsymbol{A}^*$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$

“$\Leftarrow$” （反证法）已知 A^* 可逆，假设 A 不可逆，则

$$\det A = 0$$

因此

$$AA^* = (\det A)E = O$$

因为 A^* 可逆，所以上式两端同时右乘 $(A^*)^{-1}$，得

$$A = O(A^*)^{-1} = O$$

所以 $A^* = O$，与 A^* 可逆矛盾，所以 A 可逆。

7. A 可逆 $\Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

证 在恒等式 $AA^* = (\det A)E$ 中, 把 A 用 A^{-1} 代替, 有

$$(A^{-1})(A^{-1})^* = (\det A^{-1})E$$

所以

$$(A^{-1})^* = \frac{A}{\det A}$$

再由性质6的证明知，

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{\det A}$$

所以有 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

8. 无论A是否可逆，恒有 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$

证 当A可逆时，对恒等式 $AA^* = (\det A)E$ 两边取行列式，有

$$(\det A)(\det A^*) = (\det A)^n$$

因为A可逆，所以 $\det A \neq 0$，所以有

$$(\det A^*) = (\det A)^{n-1}$$

当A不可逆时，由性质6的证明知$A^* = O$，所以

$$\det A^* = \det A = O$$

所以有$\det A^* = (\det A)^{n-1}$

9. A可逆$\Rightarrow (A^*)^* = (\det A)^{n-2} A \ (n \geq 2)$

证 在恒等式$AA^* = (\det A)E$中, 把A用A^*代替, 有

$$A^*(A^*)^* = (\det A^*)E = (\det A)^{n-1} E$$

两端左乘$(A^*)^{-1}$，得

$$(A^*)^* = (\det A)^{n-1}(A^*)^{-1} = (\det A)^{n-2} A$$

10. 同阶方阵A_n, B_n均可逆$\Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$

证 由$A^* = (\det A)A^{-1}$得

$$(\boldsymbol{AB})^{*}=[\det(\boldsymbol{AB})](\boldsymbol{AB})^{-1}=[(\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})](\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$=[(\det\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}][(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}]$$

$$=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$$

11. 负幂 $\boldsymbol{A}$可逆，定义

$$\boldsymbol{A}^{0}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

则关于方阵的幂的结论，可以扩展到

$$\boldsymbol{A}^{k}\cdot\boldsymbol{A}^{l}=\boldsymbol{A}^{k+l}$$

$$(\boldsymbol{A}^{k})^{l}=\boldsymbol{A}^{kl}\qquad(k,l\in\boldsymbol{Z})$$

例4 设方阵A满足$A^3-A^2+2A-E=O$，证明A及$E-A$均可逆，并求A^{-1}和$(E-A)^{-1}$。

证明 由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得

$$A(A^2-A+2E)=E$$

由定理2.2的推论知A可逆，且

$$A^{-1}=A^2-A+2E$$

同理 由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得

$$(E-A)(A^2+2E)=E$$

由定理2.2的推论知$E-A$可逆，且

$$(E-A)^{-1}=A^2+2E$$

练习（2001数一，3分）

设矩阵A满足$A^2+A-4E=O$，则$(A-E)^{-1}=$______

例5　已知3阶矩阵A的行列式$\det A=2$，则

$\det(A^{-1}-2A^*)=$______

解　由$AA^*=(\det A)E$，得$A^*=(\det A)A^{-1}$，所以

$A^*=2A^{-1}$，所以

$$\det(A^{-1}-2A^*)=\det(A^{-1}-4A^{-1})=\det(-3A^{-1})$$

$$=(-3)^3(\det A)^{-1}=-\frac{27}{2}$$

练习　已知三阶方阵满足$2A^{-1}=A^*$，则$\det[(2A)^*]=$______

$$AA^*=(\det A)E\Rightarrow(2A)(2A)^*=\det(2A)E$$

五、逆矩阵的应用

1. n阶线性方程组的求解

对于n个方程n个未知数的线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，若$\det\boldsymbol{A}\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$\boldsymbol{b}=\left(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n\right)^{\mathrm{T}}$.

分析

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

所以 $$x_j=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\left(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\cdots+A_{nj}b_n\right)$$

$$x_j = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D^{(j)}}{D}$$

$$D^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默法则

例6 利用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

解 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

所以有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，又因为 $\det \boldsymbol{A} = -8 \neq 0$，所以

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

可求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}$

所以

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

2. 求线性变换的逆变换

对于线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，若 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

这是x到y的线性变换.

3. 矩阵方程求解

设m阶方阵A和n阶方阵B都可逆，矩阵 $\boldsymbol{C}_{m\times n}$ 已知，则有

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C \qquad XB = C \Rightarrow X = CB^{-1}$$

$$AXB = C \Rightarrow XB = A^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

注意：1. 矩阵相乘的次序不能变；

2. 若给定的方程与上面三种形式都不同时，多数可经过恒等变形化为其中的一种.

例7

设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $X = AX - A^2 + E$，求X

解 将所给方程变形，得

$$(A - E)X = A^2 - E$$

又因为$AE = EA$，所以

$$(A - E)X = (A - E)(A + E)$$

因为 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 所以 $A-E$ 可逆。

所以

$$X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

例8 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=2BA^{-1}+3E$

求矩阵 B(2000.5)

分析 把原矩阵方程变形，得到

$$(A-2E)BA^{-1}=3E$$

等式两边同时左乘 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$$

由已知 $\boldsymbol{A}^*$，及式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det\boldsymbol{A}}$ 和式 $\det\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})^{n-1}$ 很容易求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 但是求 $\boldsymbol{A}$ 的时候要进行一次逆运算，求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$ 的时候还要进行一次逆运算，很麻烦。

解 由已知式变形得到

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$$

所以有

$$\boldsymbol{B}=3[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]^{-1}$$

$$=3(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$

由 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 知，

$$\det A^* = 16$$

因为A是三阶方阵，且由式 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$ 得

$$\det A^* = (\det A)^2 = 16$$

所以

$$\det A = \pm 4$$

当 $\det A = 4$时，$A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A} = \dfrac{A^*}{4}$

所以

$$B = 3(E - 2A^{-1})^{-1} = 3(E - \frac{1}{2}A^*)^{-1}$$

$$B=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}=3\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-3&0\\0&0&-3\\-3&0&0\end{pmatrix}$$

当 $\det A=-4$ 时， $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}=-\dfrac{A^*}{4}$

所以 $B=3(E-2A^{-1})^{-1}=3(E+\frac{1}{2}A^*)^{-1}$

$$=3\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&1&-2\\-2&4&1\\1&-2&4\end{pmatrix}$$

练习（2000数一）　参考书P74，例4

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且

$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ ，其中 E 为4阶单位矩阵，

求矩阵B。