2. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数为（　　）

A. 1；　　B. 2；　　C. 3；　　D. 无穷多个.

注意： 在判断间断点类型时，若分母的零点也是分子的零点，此时需要对分子分母的相同零点进行单独讨论，分子分母的相同零点间断点类型有可能和分子零点的间断点类型不一样（因为 0/0 的未定式极限有可能存在）。

分析：此题在判断间断点的类型时要注意到 $f(x)$ 的间断点中包含了分子的 3 个零点 $x=0,\pm1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 有可能存在，需要分情况讨论。

选择题：

2. ①. 找 $f(x)$ 无定义的点.

可去间断点：~~$\lim_{x\to x_0}$~~ $f(x_0^-)=f(x_0^+) \neq f(x_0)$

$\sin\pi x=0$，即：

$\pi x = n\pi \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

第一类间断点. $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 极限同时存在.

即：$x=n \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

②. 判断类型.（∵ $x=0,\pm1$ 也是分子的零点）

1). $x=0$（无定义）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)}{\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

（等价无穷小代换）

∴ $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点；

2). $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{-2}{-\pi}=\frac{2}{\pi}$$

（不能用等价无穷小代换）

∴ $x=1$ 是 ‥ ‥ ‥（可去）‥ ‥

3). $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

∴ $x=-1$ 也是可去间断点.

4). $x=n$，($n=\pm2,\pm3,\cdots$)

$$\lim_{x\to n}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \infty$$

∴ $x=n$ 是 $f(x)$ 的 第二类（无穷）间断点.

$$\lim_{x\to n}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to n}\frac{\sin\pi x}{x-x^3}=0$$

∴ $\lim\limits_{x\to n} f(x)=\infty$

∴ 可去间断点有 3 个.　（C）

3. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

A. $a = 1$，$b = -\frac{1}{6}$；　B. $a = 1$，$b = \frac{1}{6}$；　C. $a = -1$，$b = -\frac{1}{6}$；　D. $a = -1$，$b = \frac{1}{6}$.

解：

3. $f(x) \sim g(x)$.　(A)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = 1$$　$\frac{0}{0}$ (洛)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 (-bx)} = 1$$　← 等价无穷小代换.

即：$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin ax}{x^3} = -b$$

↓洛

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - a\cos ax}{3x^2} = -b \quad (*)$$

$\therefore$ $$\lim_{x\to 0} (1 - a\cos ax) = 0$$

$1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

将 $a=1$ 代入 (*)，得：

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = -b$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -b$$

$\therefore \boxed{b = -\frac{1}{6}}$

2. 设 $f(x+1) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x) =$（　　）.

A. e^{x-1}；　　B. e^{x}；　　C. e^{x+1}；　　D. e^{x+2}.

分析：　1^{∞} 极限，利用第二个重要极限

解：

$$f(x+1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}\cdot\frac{n(x+2)}{n-2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(x+2)}{n-2}} = e^{x+2}$$

故　$f(x) = e^{x+1}$