第四节 幂级数

- 一、函数项级数的一般概念
- 二、幂级数及其收敛性
- 三、幂级数的运算与性质

一、 函数项级数的一般概念

区间 I 上的函数

- 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$
- 收敛点（发散点）x_0: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛（发散）
- 收敛域（发散域 ）U: 收敛点（发散点）的全体.
- 和函数: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in U$ (收敛域)
- 部分和: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, 余项: $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

例1 确定下列函数项级数的收敛域，并求其和函数:

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}=1+\frac{1}{2^{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+\cdots+\frac{1}{2^{nx}}+\cdots$$

等比级数

公比: $\frac{1}{2^{x}}$

解 和函数: $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{x}}}\quad\left(\left|\frac{1}{2^{x}}\right|<1\right)$$

收敛域: $(0,+\infty)$,

发散域: $(-\infty,0]$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{-n}}{n^2} \quad (x \neq 0)$,

解 当$|x| = 1$时收敛，该级数收敛；

当$0 < |x| \neq 1$时,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \infty,$$

$\therefore$ 该级数发散， 故级数的收敛域:

$$U = \{ x \mid |x| = 1 \} = \{ -1, 1 \}.$$

收敛域不一定为区间！

二、幂级数及其收敛性

1. 定义 $(x-x_0)$的幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

x的幂级数 $(x_0 = 0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如, 等比级数为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$,

收敛域$(-1, 1)$为区间.

问题 一般幂级数的收敛域是否为区间?

2. 幂级数收敛域的结构

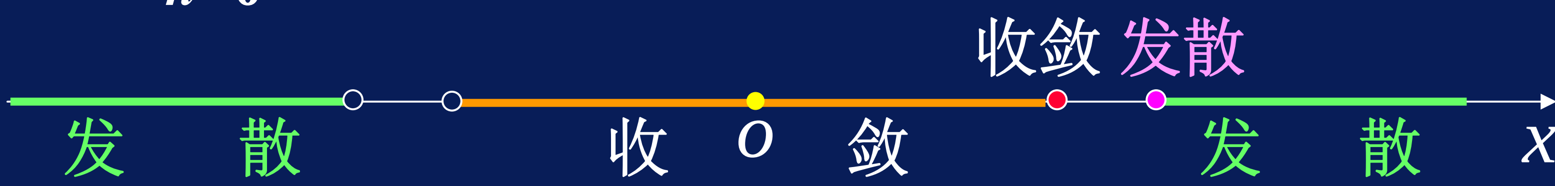
定理 11.10 (Abel定理)

(1) 若当 $x = x_0 \neq 0$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，

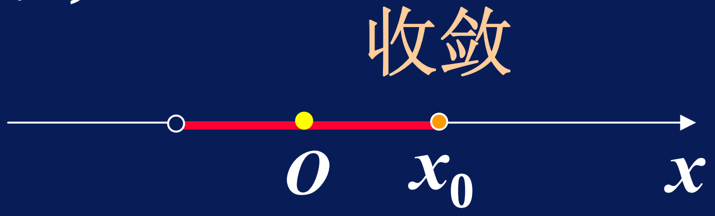
则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\underline{(|x| < |x_0|)}$ 绝对收敛.

(2) 若当 $x = x_0$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\underline{(|x| > |x_0|)}$ 发散.



证 (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \ (x_0 \neq 0)$ 收敛,



则 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

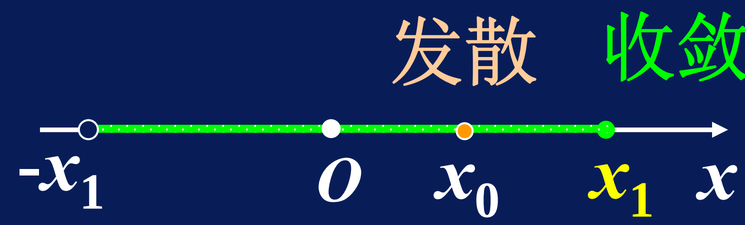
故有 $\varepsilon > 0,$ 使 $\left| a_n x_0^n \right| \le \varepsilon$

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le \varepsilon \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛, $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$ 也收敛,

故原幂级数绝对收敛 .

(2) （反证法）



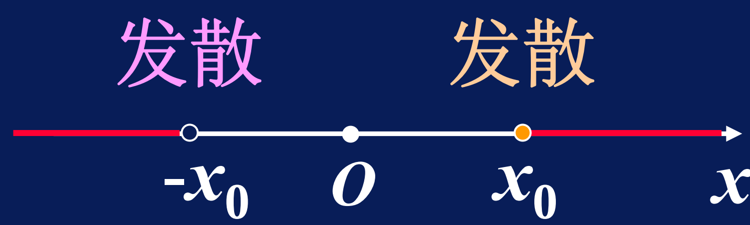
若有收敛点 x_1：

$$|x_1| > |x_0|$$

则由 (1) 知，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 也收敛，矛盾!

$\therefore$ 若当 $x = x_0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| > |x_0|)$ 发散.



结论: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域：以原点为中心的区间.

幂级数收敛与发散的**分界点**: $\pm R$

(1) $R = 0$ 时，幂级数仅在 $x = 0$ 收敛；

(2) $R = +\infty$ 时，幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛；

(3) $0 < R < +\infty$ 时，幂级数在 $(-R, R)$ 收敛；

在 $[-R, R]$ 外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛(发散) .

R：收敛半径； $(-R, R)$：收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛区间的收敛端点：收敛域.

3. 收敛半径 R 的求法

定理11.11 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

则收敛半径 $R = \begin{cases} 1/\rho, & \text{当 } 0<\rho<+\infty \text{ 时,} \\ +\infty, & \text{当 } \rho = 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \rho = +\infty \text{ 时,} \end{cases}$

用比值法判断 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 敛(散)，
则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 敛(散)

证 考虑 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$

1)若 $0<\rho<+\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \rho|x|$

当 $\rho|x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时，原级数收敛;

当 $\rho|x|>1$，即 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时，原级数发散.

故收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$.

2) 若 $\rho=0$，则由比值法知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, x\in(-\infty,+\infty)$ 绝对收敛，故 $R=+\infty$;

3) 若 $\rho=+\infty$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x\neq 0$ 处发散，故 $R=0$.

结论： $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

例2 求 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}$ 的收敛域.

解 (1) 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}=\frac{1}{2}$,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ;

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 .

$\therefore$ 收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

目录 上页 下页 例题 继续

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$

解 (2) $\because$ $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}$

$= \lim_{n\to\infty}(2n+1)\cdot 2n$

$= +\infty$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例3 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n^2}$ 的收敛域．

x-1的幂级数

解 记 $y=x-1$, 级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n n^2},$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{1}{3^n n^2}}=\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 收敛半径 $R=3$．

当 $y=3$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛;

当 $y=-3$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n n^2},$$

$$y=x-1.$$

故收敛域为: $-3\le y=x-1\le 3,$

即 $-2\le x\le 4\,.$

例4 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$ 的收敛域.

缺项幂级数，
直接用比值法

解 由比值法，

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}x^{2n+2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}2x^2 = 2x^2$$

$$\rho = 2x^2\begin{cases} <1, \text{级数收敛}, & |x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ >1, \text{级数发散}, & |x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{发散}$$

$\therefore$ 所给级数的收敛域：$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

三、幂级数的运算与性质

1. 幂级数的四则运算性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径分别为

R_1, R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则

(1)加减法: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R$

(2)乘法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

两幂级数可在公共收敛域上相加减, 相乘

注 两幂级数相除所得幂级数的收敛半径R可能比原两幂级数的收敛半径R_1, R_2小得多.

例如, 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0, \ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

收敛半径均为$R = +\infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

2. 幂级数的分析运算性质

性质 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 则其和函 数 $S(x)$

(1) 在收敛域 I 上连续, 可逐项积分;

收敛半径不变

(2) 在收敛区间内可逐项求导:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x\in(-R,R)$$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-R,R)$$

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解 1° 先求收敛域

$$\because \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 收敛;

$x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ,

$\therefore$ 该幂级数的收敛域: $[-1, 1)$.

2° 再求和函数 $S(x)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=x+\frac{1}{2}x+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots,\ x\in[-1,1)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)',\quad x\in(-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$$

由和函数的连续性

$$S(x)=S(x)-\underbrace{S(0)}_{0}=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1).$$

注

1° 幂级数逐项求导，逐项积分收敛半径不变，但逐项求导区间端点的敛散性可能变化，即收敛域可能发生变化.

2° 求幂级数和函数的方法:

① 求导 (去分母) → 求和 → 积分（如例5）

② 积分 (去分子) → 求和 → 求导（如例6(1)）

例6 求下列幂级数的收敛域及和函数:

(1) $1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

解 已知等比级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

公比: $-x$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

(1) (方法1)

$$s(x)=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots \quad (|x|<1)$$

$$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\Big]\mathrm{d}x \quad (|x|<1)$$

$$=\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\underline{\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x}\Big] \quad (\text{逐项积分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=-\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-1\Big]$$

$$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - 1\right] \qquad (|x|<1)$$

$$= -\left[\frac{1}{1+x} - 1\right]$$

两边对x求导:

$$s(x) = -\left[\frac{1}{1+x} - 1\right]' \qquad (|x|<1)$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2}$$

(方法2)

$$1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\boxed{nx^{n-1}}+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^n)'$$

$$=[\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^{n-1}x^n}]' \qquad (\text{逐项求导})$$

$$=-[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n]'$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n} \qquad (\,|x|<1\,)$$

$$=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad (\,|x|<1\,).$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n} \quad (\,|x|<1\,)}$$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n}\Big]\mathrm{d}x \quad (\,|x|<1\,)$$ （逐项积分）

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x) \quad (-1<x\le 1)$$ （由和函数的连续性）

$x=1$处，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$收敛；$x=-1$处，$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散.

目录 上页 下页 返回 结束

例7 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad (x\neq 0,\ \ x\in(-1,1))$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad (x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$$

于是 $$S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\quad (x\neq 0,\ x\in(-1,1))$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

注 求常数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$的和，可利用幂级数及其和函数.具体步骤如下：

1° 找一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，使 $a_n x_0^n = u_n$；

2° 求$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间；

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$发散；

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛，则转下一步:

3° 求出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 $S(x)$;

4° $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S(x_0)$.

例8 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数$S(x)$.

解 易知收敛半径 $R=+\infty$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$=S(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\therefore\quad S'(x)-S(x)=0\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

即 $[\mathrm{e}^{-x}S(x)]'=0,\quad x\in\mathrm{R}$

即 $[\mathrm{e}^{-x}S(x)]'=0,\quad x\in\mathrm{R}$

因此 $\mathrm{e}^{-x}S(x)=C,$

即 $S(x)=C\,\mathrm{e}^{x}$，$x\in\mathrm{R}$

由$S(0)=1$得，$S(x)=e^{x},$

故得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

内容小结

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

1. 收敛域： 以x_0为中心的区间；

2. 收敛半径： $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

3. 幂级数的四则运算性质

4. 幂级数的分析运算性质

连续性，逐项求导，逐项积分

思考题

1. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，问:

(1) 该级数的收敛半径是多少?

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 在 $x=-1$ 及 $x=1$ 处的敛散性如何?

解 (1) 收敛半径 R=3. 这是因为根据阿贝尔定理，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，

则当 $|x|<|-3|=3$ 时，级数绝对收敛.

所以 $R\geq 3$. 若 $R>3$，则由

当$|x|<R$时，该级数绝对收敛推知：

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处绝对收敛，这与

条件收敛矛盾. 所以必有$R=3$.

(2) 令 $t=x-3$. 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$

当 $|x-3|=|t|<3$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 绝对收敛；

当 $|x-3|=|t|>3$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 发散;

当 $x=-1$ 时，$|-1-3|=4>3$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在

$x=-1$ 处发散; 当 $x=1$ 时, $|1-3|=|-2|=2<3$，

所以该级数在 $x=1$ 处绝对收敛.

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=a$ 处条件收敛，求收敛半径.

解 由Abel 定理知，级数在 $|x|<|a|$ 处收敛，

$|x|>|a|$ 处发散. 故收敛半径为 $R=|a|$.

3. 能否确定 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} x^n$ 的收敛半径不存在？

其中 $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3/2, & n \text{ 为奇数} \\ 1/6, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

不能

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}, \quad \therefore R = 2.$$

备用题

例2-1 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

求收敛半径及收敛域.

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

当 $x=1$时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛;

当 $x=-1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散 .

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2-2 求下列幂级数的收敛半径与收敛域：

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n};\qquad (2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

解 (1) 因 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{3^n\cdot n}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=3$，收敛区间为 $(-3,3)$.

$x=3$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散 ；

$x=-1$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的交错级数 .

综上所述，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛域为 $[-3,3)$.

(2) 因 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

故收敛半径 $R=+\infty$，从而收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

例2-3 求收敛域： (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

解 (1)

规定: $0! = 1$

$$\because \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

所以收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $$\because \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

所以级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

例3-1 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解 令 $t=x-1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n n}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

当 $t=-2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛;

收敛域为 $-2\le t=x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

例3-2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域 .

解 令 $t=x-1$, 得 t 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n}$

因 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=1$, 故 $R=1$.

当$t=-1$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，当$t=1$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 ,

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n}$ 的收敛域为$(-1,1]$,

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域为$(0,2]$.

例4-1 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

分析 级数缺奇次项,故直接用比值审敛法求收敛半径.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\dfrac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$

当 $4x^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时级数收敛

当 $4x^2>1$ 即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时级数发散

故收敛半径: $R=\dfrac{1}{2}$.

例4-2 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2^n}$ 的收敛域．

缺项级数
用比值审敛法

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{2n+3}}{2^{n+1}}}{\dfrac{x^{2n+1}}{2^n}}\right| = \dfrac{x^2}{2}$

当 $\dfrac{x^2}{2}<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，幂级数收敛；

当 $\dfrac{x^2}{2}>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2^n}$ 发散，$R=\sqrt{2}$．

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}$ 发散，

故幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

例5-1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解 先求收敛半径 R. 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{1}\right|=1,\text{ 所以 } R=1.$$

在 $x=\pm 1$处 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$,

则 $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$,

逐项求导，得

$|x| < 1$

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

积分得 $xS(x) = xS(x)\big|_0^x = \int_0^x (xS(x))'\,\mathrm{d}\,x$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x|<1)$$

故 $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| & (0<|x|<1) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

例5-2 求(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数$S(x)$.

解 (1) 联想$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$ （需去分母）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

$$S(x)=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

故 $xS(x) = \int_0^x (xS(x))' \,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x), \quad (0 < |x| < 1 \text{ 及 } x = -1)$$

而 $\quad S(0) = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right) = 1,$

由和函数的连续性:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

例6-1 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n}$的和函数.

解 1° 先求收敛域

$\because \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$

在 $x=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散

在 $x=-2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛

$\therefore$ 所给级数的收敛域为: $[-2,2)$.

2° 再求和函数 $S(x)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n},\ x\in[-2,2)$

则 $S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^{n-1}$ (令 $t=\frac{x}{2}$)

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\quad (t\neq 0,\ t\in(-1,1))$$

$$=\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2t}\int_0^t[\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}]\,\mathrm{d}t$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$S(x)=\frac{1}{2t}\int_0^t \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2t}\ln(1-t)\quad (t\neq 0,\ t\in(-1,1))$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2}),\quad x\in(-2,0)\cup(0,2)$$ （变量代回）

$$S(0)=\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n}\Big]_{x=0}=\Big[\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2\cdot 2}+\frac{x^2}{2^3\cdot 3}+\cdots\Big]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

再由和函数的连续性， $S(x)$在$x=-2$处右连续

$$\therefore\quad S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{2}), & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

例7-1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中$a>1$.

解　令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$

构造 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为$S(x)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$$=x\cdot(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$