Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод дихотомії.

Алгоритм (метод поділу відрізка навпіл) за книжкою Бартіша

1. Задати поч. лок. відрізок $[a_0, b_0]$, величину $\delta > 0$, точність обчислення $\varepsilon > 0$, $k = 0$

2. Обчислити

$$y_k = \frac{a_k + b_k - \delta}{2} \qquad z_k = \frac{a_k + b_k + \delta}{2}$$

і значення ф-ії в цих точках $f(y_k)$, $f(z_k)$

3. Визначити новий локалізований відрізок.

Якщо $f(y_k) \leq f(z_k)$, то покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$

Якщо $f(y_k) > f(z_k)$, то покласти $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$

4. Якщо $|a_{k+1} - b_{k+1}| \leq \varepsilon$, то пошук завершений. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину інтервалу $x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Пр. Знайти мінімум ф-ії $f(x) = (x-5)^2$ на відрізку $[a_0, b_0] = [3, 7]$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0{,}2$

1. $[a_0, b_0] = [3, 7]$, $\delta = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}2$, $k = 0$

2. $y_0 = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2} = \frac{3 + 7 - 0{,}05}{2} = 4{,}975$ $\qquad z_0 = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2} = 5{,}025$

$f(y_0) = (4{,}975 - 5)^2 = 0{,}000625$

$f(z_0) = (5{,}025 - 5)^2 = 0{,}000625$

3. $f(y_0) = f(z_0) \Rightarrow a_1 = a_0 = 3$, $b_1 = z_0 = 5{,}025$

4. $|a_1 - b_1| = |3 - 5{,}025| = 2{,}025 > \varepsilon$

Переходжу до кроку 2, $k = k+1 = 0+1 = 1$

2.1 $y_1 = \frac{a_1 + b_1 - \delta}{2} = \frac{3 + 5{,}025 - 0{,}05}{2} = 3{,}9875$ $\qquad z_1 = \frac{a_1 + b_1 + \delta}{2} = 4{,}0375$

$f(y_1) = (3{,}9875 - 5)^2 = 1{,}02516$

$f(z_1) = (4{,}0375 - 5)^2 = 0{,}926406$

3.1 $f(y_1) > f(z_1) \Rightarrow a_2 = y_k = 3{,}9875$, $b_2 = b_1 = 5{,}025$

4.1 $|a_2 - b_2| = |3{,}9875 - 5{,}025| = 1{,}0375$

Переходжу до кроку 2, $k = k+1 = 1+1 = 2$

k	x_{2k}	x_{2k-1}	$f(x_{2k})$	$f(x_{2k-1})$	$[a, b]$	$\lvert a-b \rvert$
1	4,975	5,025	0,000625	0,000625	[3; 5,025]	2,025
2	3,9875	4,0375	1,02516	0,926406	[3,9875; 5,025]	1,0375

...

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод поділу відрізка навпіл.

Для використання методу необхідно, щоб ф-ія $f(x)$ була неперервно-диференційовна.

Алгоритм.

1. Задати поч. лок. від. $[a_0, b_0]$ і точність обч. $\varepsilon > 0$, $k=0$
2. Обчислити

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

та значення похідної в т. $f'(x_k)$

Якщо $f'(x_{k+1}) = 0$, то $x_{k+1} \rightarrow$ розв'язок

3. Визначити новий лок. відрізок.

Якщо $f'(x_k) > 0$, то $a_{k+1} = a_k$
$b_{k+1} = x_{k+1}$

Якщо $f'(x_k) < 0$, то $a_{k+1} = x_{k+1}$
$b_{+1} = b_k$

4. Якщо $|a_{k+1} - b_{k+1}| \leq \varepsilon$, то пошук завершений. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину інтервалу

$x^* \approx \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Пр. Знайти мінімум ф-ії $f(x) = (x-5)^2$ на відрізку $[a_0, b_0] - [3,7]$ методом поділу навпіл з точністю $\varepsilon = 0,2$

1. $[a_0, b_0] - [3,7]$, $\varepsilon = 0,2$
$f'(x) = 2(x-5)$
2. $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$
$f'(x_1) = 2(5-5) = 0$

Отже $x_1 = x^* = 0$ - точка розв'язку

Якщо взяти інший відрізок

1. $[a_0, b_0] = [1,7]$, $\varepsilon = 0,2$
$f'(x) = 2(x-5)$
2. $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$
$f'(x_1) = 2(4-5) = -2$
3. $f'(x_1) < 0 \Rightarrow a_1 = x_1 = 4$
$b_1 = b_0 = 7$

4. $|a_1 - b_1| = |4-7| = 3 > \varepsilon$

Переходжу до кроку 2 і $k = k+1 = 0+1 = 1$

2.1 $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{4+7}{2} = 5,5$
$f'(x_2) = 2(5,5-5) = 1$

3.1 $f'(x_2) > 0 \Rightarrow a_2 = a_1 = 4$
$b_2 = x_2 = 5,5$

4.1 $|a_2 - b_2| = |4 - 5,5| = 1,5 > \varepsilon$

Переходжу до кроку 2 і $k = k+1 = 1+1 = 2$ ...

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод золотого поділу.

Алгоритм.

1. Задати поч. лок. інт. $[a_0, b_0]$, $\delta > 0$ достатньо мале число, $\varepsilon > 0$ - точність обчислення. $k=0$
2. Обчислити

$$x_1 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) \qquad x_2 = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) = a_0 + b_0 - x_1$$

3. Обчислити $f(x_1), f(x_2)$. Порівняти $f(x_1)$ і $f(x_2)$

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то покласти
$$a_{k+1} = a_k$$
$$b_{k+1} = x_2$$
$$x_2 = x_1$$
$$x_1 = a_{k+1} + b_{k+1} - x_2$$

Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то покласти
$$a_{k+1} = x_1$$
$$b_{k+1} = b_k$$
$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = a_{k+1} + b_{k+1} - x_1$$

4. Обчислити $|a_{k+1} - b_{k+1}|$. Якщо рез. $\leq \varepsilon$, то пошук завершений. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину інтервалу $x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Пр. Знайти мінімум ф-ії $f(x) = (x-5)^2$ на відрізку $[3;7]$ методом золотого поділу з точністю $\varepsilon = 0,2$

1. $[a_0, b_0] = [3,7]$, $\varepsilon = 0,2$, $k=0$
2. $x_1 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = 3 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(7-3) \approx 4,53$ $\quad x_2 = a_0 + b_0 - x_1 = 3+7-4,53 = 5,47$
3. $f(x_1) = (4,53-5)^2 = 0,22$

$f(x_2) = (5,47-5)^2 = 0,22$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a_1 = a_0 = 3$
$$b_1 = x_2 = 5,47$$
$$x_2 = x_1 = 4,53$$

4. $|a_1 - b_1| = |3 - 5,47| = 2,47 > \varepsilon$

Переходжу до кроку 2, $k = k+1 = 0+1 = 1$

2.1 $x_1 = a_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) = 3 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(5,47-3) = 3,94$ $\quad x_2 = a_1 + b_1 - x_1 = 3 + 5,47 - 3,94 = 4,53$

3.1 $f(x_1) = (3,94-5)^2 = 1,11$ $\quad f(x_2) = (4,53-5)^2 = 0,22$

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow a_2 = x_1 = 3,94$
$$b_2 = b_1 = 5,47$$
$$x_1 = x_2 = 3,94$$

4.1 $|a_2 - b_2| = |3,94 - 5,47| = 1,53 > \varepsilon$

...

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод Фібоначчі.

Алгоритм

1. Задати поч. лок. інт. $[a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ – точність обчислення, обчислити число n – к-ість точок $\frac{b-a}{\varepsilon} \leq F_n$. Покласти $k=0$.

2. Обчислити
$$x_1 = a_k + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_k - a_k) \qquad x_2 = a_k + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_k - a_k)$$

3. Обчислюємо $f(x_1)$ і $f(x_2)$

4. Порівнюємо

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$ тоді
$$a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = x_2 \quad x_2 = x_1$$

Якщо $f(x_1) > f(x_2)$ тоді
$$a_{k+1} = x_1 \quad b_{k+1} = b_k \quad x_1 = x_2$$

Пр. Знайти мінімум ф-ії $f(x) = (x-5)^2$ на відрізку $[3,7]$ методом Фібоначчі з точністю $\varepsilon = 0,2$

1. $[a_0, b_0] = [3,7]$, $\varepsilon = 0,2$, $k=0$

$$\frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{7-3}{0,2} = \underline{\underline{20}}$$

$[1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13] \quad 21 \quad 34$

$n = 7$

2. $x_1 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0 - a_0) = a_0 + \frac{F_5}{F_7}(b_0 - a_0) = 3 + \frac{5}{13}(7-3) = 4,52$

$x_2 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0) = a_0 + \frac{F_6}{F_7}(b_0 - a_0) = 3 + \frac{8}{13}(7-3) = 5,46$

3. $f(x_1) = (4,52-5)^2 = 0,23$

$f(x_2) = (5,46-5)^2 = 0,23$

4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a_1 = a_0 = 3$
$b_1 = x_2 = 5,46$
$x_2 = x_1 = 4,52$

5. $|a_1 - b_1| = |3 - 5,46| = 2,46 > \varepsilon$

Переходимо до кроку 2.

2.1 $x_1 = a_1 + \frac{F_5}{F_7}(b_1 - a_1) = 3 + \frac{5}{13}(5,46-3) = 3,94$

$x_2 = a_1 + \frac{F_6}{F_7}(b_1 - a_1) = 3 + \frac{8}{13}(5,46-3) = 4,52$

3.1 $f(x_1) = (3,94-5)^2 = 1,1236$

$f(x_2) = (4,52-5)^2 = 0,2304$

4.1 $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow a_2 = x_1 = 3,94$
$b_2 = b_1 = 5,46$
$x_1 = x_2 = 4,52$

...

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод парабол.

Алгоритм.

1. Задати поч. лок. інт. $[a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ - точність обчислення. $k=0$
2. Вибираємо точку c так, щоб виконувалось

$$\Delta^- = f(a_1) - f(c_1) \geq 0$$

$$\Delta^+ = f(b_1) - f(c_1) \geq 0$$

$$\Delta^- + \Delta^+ > 0$$

3. Обчислюємо

$$S_1 = c_1 + \frac{1}{2} \frac{(b_1-c_1)^2\Delta^- - (c_1-a_1)^2\Delta^+}{(b_1-c_1)\Delta^- + (c_1-a_1)\Delta^+}$$

4. Вибираємо точку

$$t_1 = \begin{cases} S_1, & S_1 \neq c_1 \\ \frac{c_1+a_1}{2}, & S_1 = c_1 \end{cases}$$

5. За значеннями $f(x)$ у точках a_1, t_1, c_1, b_1 визначаємо $[a_2, b_2]$ з внут. точкою $c_2 = c_1 \vee t_1$.

Пр. $f(x) = (x-5)^2$

1. $\varepsilon = 0{,}2$; $[a_0, b_0] = [3, 7]$, $k=0$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$

2. $f(a_0) = (3-5)^2 = 4$ $\qquad \Delta^- = 4 - 0 = 4$

$f(b_0) = (7-5)^2 = 4$ $\rightarrow$ виконується $\qquad \Delta^+ = 4 - 0 = 4$

$f(c_0) = (5-5)^2 = 0$

3. $$S_1 = c_0 + \frac{1}{2} \frac{(b_0-c_0)^2\Delta^- - (c_0-a_0)^2\Delta^+}{(b_0-c_0)\Delta^- + (c_0-a_0)\Delta^+} = 5 + \frac{1}{2} \frac{(7-5)^2 \cdot 4 - (5-3)^2 \cdot 4}{(7-5)\cdot 4 + (5-3)\cdot 4} = 5$$

4. $S_1 = c_0 \Rightarrow t_0 = \frac{c_0 + a_0}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$

$f(t_0) = (4-5)^2 = 1$

5.

a	t	c	b
4	1	0	4

$\Rightarrow \min = 0 \Rightarrow a_1 = t_0 = 4$, $b_1 = b_0 = 7$

6. $|a_1 - b_1| = |4-7| = 3 > \varepsilon$

Переходжу до кроку 2. $\quad c_0 = c_1 = 5$

2.1 $f(a_1) = (4-5)^2 = 1$ $\qquad \Delta^- = 1 - 0 = 1 \geq 0$

$f(b_1) = (7-5)^2 = 4$ $\qquad \Delta^+ = 4 - 0 = 4 \geq 0$ $\rightarrow$ вик.

$f(c_1) = (5-5)^2 = 0$ $\qquad \Delta^- + \Delta^+ = 1 + 4 = 5 \geq 0$

3.1 $$S_1 = c_1 + \frac{1}{2} \frac{(b_1-c_1)^2\Delta^- - (c_1-a_1)^2\Delta^+}{(b_1-c_1)\Delta^- + (c_1-a_1)\Delta^+} = 5 + \frac{1}{2} \frac{(7-5)^2 \cdot 1 - (5-4)^2 \cdot 4}{(7-5)\cdot 1 + (5-4)\cdot 4} = 5$$

4.1 $S_1 = c_1$

$t_1 = \frac{c_1 + a_1}{2} = \frac{5+4}{2} = 4{,}5$

$f(t_1) = (4{,}5-5)^2 = 0{,}25$

5.1

a	t	c	b
1	0,25	0	4

$\rightarrow \min = 0 \Rightarrow a_2 = t_1 = 4{,}5$, $b_2 = b_1 = 7$

6.1 $|a_2 - b_2| = |4{,}5 - 7| = 2{,}5 > \varepsilon$

...

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод ДСК.

Алгоритм.

1. Задаємо довільну точку x_0, крок $h_0 > 0$, $k=0$
2. Обчислимо значення $f(x_0)$ та $f(x_0+h_0)$.
   Якщо $f(x_0) > f(x_0+h_0)$ переходимо до кроку 5
3. Якщо $f(x_0) < f(x_0+h_0)$, тоді $h_0 = -h_0$
4. Якщо $f(x_0-h_0) \leqslant f(x_0) \geqslant f(x_0+h_0)$, то ф-ія не є унімодальною на заданому проміжку. Обчислення з даної точки припиняються. Рекомендовано іншу x_0.
5. Поки $f(x_k) \geqslant f(x_k+h_k)$, обчислюємо $x_{k+1} = x_k + h_k$, $h_{k+1} = 2h_k$, $k=k+1$
   Якщо $f(x_k) < f(x_k+h_k)$ переходимо на крок 6.
   Позначимо $x_{k+1} = x_k + h_k = x_m$
   $x_k = x_{m-1}$
   $x_{k-1} = x_{m-2}$
   Зменшимо крок $h_{k+1} = h_k/2$ та обчис. $x_{m+1} = x_m - h_{k+1}$ і $f(x_{m+1})$
6. З чотирьох точок $x_{m-2} < x_{m-1} < x_{m+1} < x_m$ вилучаємо більшу за значенням ф-ії і залишаємо три точки, які утв. лок. відрізок

Пр. Визначити лок. відрізок ф-ії $f(x) = x^2 - 2x + 5$ за умови, що $x_0 = 2$, $\Delta x_0 = 0{,}1 = h$

1. $x_0 = 2$, $h_0 = 0{,}1$
2. $f(x_0) = 4 - 4 + 5 = 5$
   $f(x_0+h_0) = f(2{,}1) = 5{,}21$
3. $f(x_0) < f(x_0+h_0) \Rightarrow h_0 = -h_0 = -0{,}1$
   $f(x_0+h_0) = f(1{,}9) = 4{,}81$
   $f(x_0) > f(x_0+h_0)$
5. $x_1 = x_0 + h_0 = 2 - 0{,}1 = 1{,}9$
   $h_1 = 2h_0 = -2$
   $k = 0+1 = 1$
   $f(x_1) = 1{,}9^2 - 2 \cdot 1{,}9 + 5 = 4{,}81$
   $f(x_1+h_1) = f(-0{,}1) = (-0{,}1)^2 - 2 \cdot (-0{,}1) + 5 = 5{,}21$
   $f(x_1) < f(x_1+h_1)$

   $x_m = x_1 + h_1 = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$
   $x_{m-1} = x_1 = 1{,}9$
   $x_{m-2} = x_0 = 2$
   $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ $\Rightarrow x_{m+1} = 1{,}9 + 1 = 2{,}9$

   $f(x_m) = 5{,}21$
   $f(x_{m-1}) = 4{,}81$
   $f(x_{m-2}) = 5$
   $f(x_{m+1}) = 7{,}61$ – max – вилучаємо

   Отр. лок відрізок $[0{,}1; 2]$

Мінімізація ф-ії однієї змінної. Метод ламаних.

Алгоритм. $f \in C^1[a,b]$ ← один раз диференційована

1. Вибираємо точку $x_0 \in [a,b]$
   та знаходимо константу Ліпшиця $L = \max\limits_{[a,b]} f'(x)$
2. Записуємо $q(x,x_0) = f(x_0) - L|x-x_0| = p_0(x)$
3. Знаходимо точку $x_1 = \min p_0$
4. Точка x_1 буде або т. a, або т. b
5. Знаходимо $p_1(x) = \max\{p_0(x), q(x,x_1)\}$
6. Знаходимо т. $x_2 = \min p_1$
7. Знаходимо $p_2(x) = \max\{p_1(x), q(x,x_2)\}$
8. І так далі, до умови зупинки. $|p_k(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| < \varepsilon$

Пр. $f = x^2 + 2x - 1$

$f' = 2x + 2 \qquad [-3;2]$

1. $x_0 = 0$

   $L = 6$

2. $p_0 = f(x_0) - L|x-x_0| = -1 - 6|x|$

   $x_1 = -3$

3. $p_1 = f(x_1) - L|x-x_1| = 2 - 6|x+3| =$

   $= \begin{cases} -6x-16, & x \geq -3 \\ 6x+20, & x \leq -3 \end{cases}$

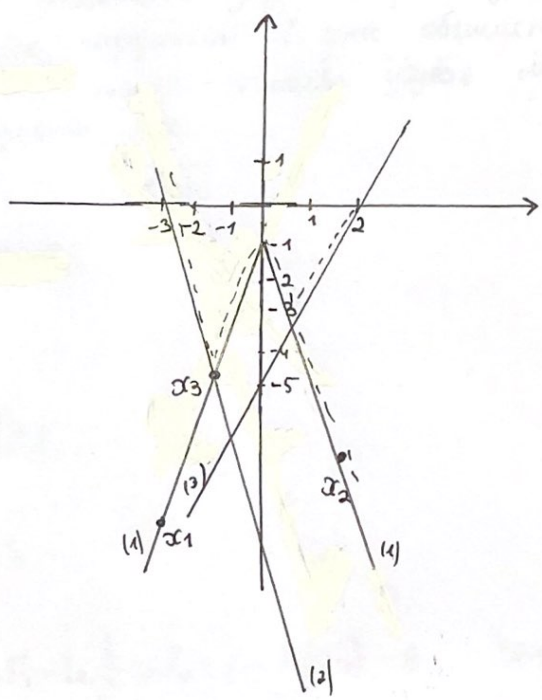
   $x_2 = 2$

4. $p_2 = f(x_2) - L|x-x_2| = 7 - 6|x-2|$

   $-1 - 6|x| = 2 - 6|x+3|$

   $x_3 = -1{,}25$

5. $p_3 = \dots$



Метод простого перебирання

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо крок $h = \frac{2\varepsilon}{L}$ і послідовність точок

$$x_1 = a + \frac{h}{2}, \ldots, x_{i+1} = x_i + h = x_1 + ih, \ldots, x_{n-1} = x_1 + (n-2)h$$

$$x_n = \min\{x_1 + (n-1)h, b\}$$

Точка x_n повинна задов. умову $x_{n-1} < b - \frac{h}{2} \leq x_n$. У кожній із заданих точок обчислюємо $f(x_i)$, а за $\overline{x_n}$ вибираємо точку, для якої вик. ум. $f(\overline{x_n}) = \min\limits_{i=\overline{1,n}}\{f(x_i)\}$.

Розглянемо проміжок $\Delta_i = [x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}]$, $i = \overline{1,n}$. На цьому проміжку вик. оцінка

$$f(x) \geq f(x_i) - L\frac{h}{2} \geq f(\overline{x_n}) - \frac{h}{2}L = f(\overline{x_n}) - \varepsilon \qquad \forall x \in \Delta_i$$

Оскільки $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$ покриває весь проміжок $[a,b]$, то ця оцінка правильна для всіх $x \in [a,b]$, а також для точки мінімуму (якої ми не обчислимо).

Отже, $f(x^*) \geq f(\overline{x_n}) - \varepsilon$. Звідси випливає $f(\overline{x_n}) \leq f^* + \varepsilon$

Метод послідовного перебирання.

Метод простого перебирання потребує обчислення значень ф-ії у достатньо великій к-сті точок, водночас не враховує інформації в уже обчислених точках, що робить його неефективним. Цей недолік частково усуває метод послідовного перебирання. Точки x_i вибираємо так:

$$x_1 = a + \frac{h}{2}, \quad x_{i+1} = x_i + h + \frac{f(x_i) - F_i}{L}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$x_n = \min\{x_{n-1} + h + (f(x_{n-1}) - F_{n-1})/L, b\},$$

де $F_i = \min\limits_{j=\overline{1,i}} f(x_j)$

n вибираємо з умови

$$x_{n-1} < b_n - \frac{h}{2} \leq x_{n-1} + h + \frac{f(x_{n-1}) - F_{n-1}}{L}$$

Легко бачити, що для

$$x \in \left[x_i, x_i + \frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{L}\right], \ i = \overline{1, n-1}$$

вик. оцінки:

$$f(x) \geq f(x_i) - L\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{L} - x_i\right) = F_i - L\frac{h}{2} \geq F_n - \varepsilon = f(\overline{x_n}) - \varepsilon \qquad (2.13)$$

аналогічна оцінка вик. для $x \in [x_i - \frac{h}{2}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ та $x \in [x_n, b]$.

Оскільки проміжки

$$[x_i - \frac{h}{2}, x_i] \cup [x_i, x_i + \frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{L}], \ i = \overline{1, n-1} \text{ та } [x_n, b]$$

покривають весь відрізок $[a,b]$, то нерівність (2.13) вик. також для точки $x = x^*$.

Отже, $f(x^*) = f^* \geq f(\overline{x_n}) - \varepsilon$

Звідси випливає умова $f(\overline{x_n}) \leq f^* + \varepsilon$. Методи перебирання іноді наз. методами покриттів.

Пр. Розв'язати методом послідовного перебирання з точність $\varepsilon=0{,}2$ задачу

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+5 & \text{ їде } x\in(-\infty,2] \\ 7-x & \text{ їде } x\in(2;\infty) \end{cases} \to \min_{x\in[0;4]}$$

Легко побачити, що на проміжку $[0;4]$ константа Ліпшиц $L=2$

Оскільки $h=\frac{2\varepsilon}{L}=0{,}2$, то $x_1=0{,}1$ $f(0{,}1)=4{,}81$

Дані в табл.

Отже наш отр. наближений розв'язок $\bar{x}_*=3{,}928$, $f(\bar{x}_*)=3{,}072$.

Розв'язком задачі є точка $x_*=4{,}0$, $f(x_*)=3$

K	x_k	$f(x_k)$	F_k	k	x_k	$f(x_k)$	F_k
1	0,1	4,81	4,81	9	1,88	4,774	4,01
2	0,3	4,49	4,49	10	2,46	4,54	4,01
3	0,5	4,25	4,25	11	2,925	4,074	4,01
4	0,7	4,09	4,09	12	3,128	3,872	3,872
5	0,9	4,01	4,01	13	3,328	3,672	3,672
6	1,1	4,01	4,01	14	3,528	3,472	3,472
7	1,3	4,09	4,01	15	3,728	3,272	3,272
8	1,54	4,29	4,01	16	3,928	3,072	3,072

Градієнтний метод. (метод I порядку)

Зап. вигляд $x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$

$h_k = -f'(x_k)$, наслідовн. вигл. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$ $\alpha_k > 0$

Коли $\alpha_k > 0$ задається

Алгоритм:

1. Задати x_0, $\varepsilon > 0$, m - к-сть ітер. закінчено, $k = 0$
2. Знайти $\nabla f(x_k) = f'(x_k)$
3. Перевірити якщо $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$, то маємо розвязок, інакше крок 4
4. Задати $\alpha_k = 1$
5. Обчисл. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$
6. Перевірити $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, якщо умова зад. $\rightarrow$ крок 7.
   Інакше $\alpha_k = \frac{\alpha_k}{2}$ і поверт. на крок 5
7. Пер. ум. зуп. $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon$, якщо вик, то знайшли розвязок.
   Інакше $k = k+1$ і переходимо на крок 2.

Пр. $f = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

1. $x_0 = (0,5, 1)$ $\varepsilon = 0,1$
2. $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2 ; x_1 + 2x_2)^T$
   $\nabla f(x_0) = (4 \cdot 0,5 + 1 ; 0,5 + 2 \cdot 1)^T = (3; 2,5)^T$
   $f(x_0) = 2 \cdot (0,5)^2 + 0,5 \cdot 1 + 1^2 = 2$
3. $\|\nabla f(x_0)\| = \sqrt{3^2 + 2,5^2} \approx 3,9 > \varepsilon$
4. Задаю $\alpha_0 = 1$
5. $x_1 = x_0 - \alpha_0 f'(x_0) = (0,5; 1) - 1(3; 2,5) = (-2,5; -1,5)$
   $f(x_1) = 2 \cdot (-2,5)^2 + (-2,5)(-1,5) + (-1,5)^2 = 18,5$
6. $f(x_1) > f(x_0)$ - не вик., отже $\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2}$, пов крок 5
5. $x_1 = x_0 - \alpha_0 f'(x_0) = (0,5; 1) - \frac{1}{2}(3; 2,5) = (-1; -0,25)$
   $f(x_1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1)(-0,25) + (-0,25)^2 = 2,3$
6. $f(x_1) > f(x_0)$ - не вик. отже $\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{2} = 0,25$ пов. крок 5
5. $x_1 = x_0 - \alpha_0 f'(x_0) = (0,5; 1) - 0,25(3; 2,5) = (-0,25; 0,375)$
   $f(x_1) = 2 \cdot (-0,25)^2 + (-0,25) \cdot 0,375 + (0,375)^2 = 0,171875$
6. $f(x_1) < f(x_0)$ - вик. $\Rightarrow$ крок 7
7. $\|x_1 - x_0\| = \|(-0,25; 0,375) - (0,5; 1)\| = \|(-0,75; -0,625)\| = \sqrt{(-0,75)^2 + (-0,625)^2} = 0,976 > \varepsilon$

Переходжу на крок 2. $k = k+1 = 0+1 = 1$

2.1 $\nabla f(x_1) = (4 \cdot (-0,25) + 0,375; -0,25 + 2 \cdot 0,375)^T = (-0,625; 0,5)^T$
   $f(x_1) = 0,171875$

3.1 $\|\nabla f(x_1)\| = \sqrt{(-0,625)^2 + (0,5)^2} = 0,8$

4.1 $\alpha_1 = 1$ 5.1 $x_2 = x_1 - \alpha_1 f'(x_1)$ ...

Градієнтний метод (з одновимірним пошуком)

Алгоритм.

1. Задати $x_0, \varepsilon > 0, m$ - к-сть ітерацій закінчення, $k=0$
2. Знайти $\nabla f(x_k)$
3. Перевірити $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$, то маємо розвязок, інакше крок 4.
4. Розвязати
   $\varphi(\alpha) = f(x_k - \alpha f'(x_k)) \to min$
   Методом ДСК шукаємо лок відр., з $\alpha_0 = 1$
5. Обч. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$
6. Пер. $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon$, якщо вик. $\Rightarrow$ знайшли розвязок, інакше крок 2.

Пр. $f = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

1. $x_0 = (0{,}5; 1)$ $\varepsilon = 0{,}1$
2. $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$
   $\nabla f(x_0) = (3; 2{,}5)^T$
3. $\|\nabla f(x_0)\| = 3{,}9 > \varepsilon$
4. $F = 2(x_0(1) - \alpha \cdot f'(1))^2 + (x_0(1) - \alpha \cdot f'(1)) \cdot (x_0(2) - \alpha f'(2)) + (x_0(2) - \alpha f'(2))^2 \to min$
   Шукаємо α, промiжок > 0
   $\alpha_0 = 0{,}24$
5. $x_1 = x_0 - \alpha f'(x_0) = (0{,}5; 1) - 0{,}24(3; 2{,}5) = (-0{,}22; 0{,}4)^T$
6. $\|x_1 - x_0\| = 0{,}937 > \varepsilon$
   Покладемо $k=1$, крок 2.

2.1 $\nabla f(x_1) = (4 \cdot (-0{,}22) + 0{,}4; -0{,}22 + 2 \cdot 0{,}4)^T = (-0{,}48; 0{,}58)^T$

3.1 $\|\nabla f(x_1)\| = 0{,}752 > \varepsilon$

4.1 $\alpha_1 = 0{,}546$

5.1 $x_2 = x_1 - \alpha f'(x_1) = (0{,}04; 0{,}08)^T$

6.1 $\|x_2 - x_1\| = 0{,}156 > \varepsilon$

Покладемо $k=2$, крок 2 ...

Метод яру.

Виберемо дві точки x_0, x_1 і, вик. один з варіантів град. методу, визначимо нові точки y_0, y_1. Потім приймаємо

$$x_2 = y_1 - (y_1 - y_0)h \cdot sign(f(y_1) - f(y_0))) / \|y_1 - y_0$$

де $h > 0$ - додатна змінна, яка є кроком методу. З т. x_2 проведемо спуск одним із відомих градієнтних методів до дна яру і визнач. т. y_2 і т.д. Якщо відомі точки $y_0, y_1, \dots, y_k$, $k \geq 2$, то з точки

$$x_{k+1} = y_k - (y_k - y_{k-1})\|y_k - y_{k-1}\|^{-1} h \cdot sign(f(y_k) - f(y_{k-1}))$$

вик. спуск за доп. відомого варіанта град. методу і відшукаємо наст. точку y_{k+1} на дні яру.

Величину кроку h підбир. самостійно з урах. інфо. про мінімізацію ф-ії.
Ефективність методу може суттєво поліпшити, якщо крок h вибрати змінним, що даватиме змогу:

1) прямолінійні ділянки яру проходити швидше
2) на крутих ділянках крок методу суттєво зменшити, що зменшить імовірність викидання наступного наближення з яру.
3) домогтись якомога найменшого відхилення точок.

На практиці h_k виб. з умови

$$h_{k+1} = h_k C^{\cos\alpha_k - \cos\alpha_{k-1}}$$

$k = 2, 3, \dots$, де α_k - кут між векторами $x_k - y_{k-1}$, $y_k - y_{k-1}$

$$\cos\alpha_k = (x_k - y_{k-1}, y_k - y_{k-1})(\|x_k - y_{k-1}\| \|y_k - y_{k-1}\|)^{-1},$$ де $c > 1$ - парам. входу.

...

$$h_{k+1} = A C^{\cos\alpha_k}, \quad A = h_2 C^{-\cos\alpha_1} = const > 0, \quad k = 2, 3$$

Метод Ньютона. $\alpha \in (0;1]$

Алгоритм.

1. Задати x_0, $\varepsilon > 0$, m - к-ість іт. закінчення, $k=0$
2. Знайти $\nabla f(x_k)$, $f''(x_k)$
3. Перевірити $\|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon$, то маємо розв'язок інакше крок 4
4. Розв'язати систему рівнянь або знайти обернену матрицю
5. Деяким методом одновимірної мінім. шукаємо α або методом дроблення
6. Обч. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k b_k$

   $x_{k+1} = x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k)$
7. Пер. умову зупинки, якщо вик. → знайшли розв, інакше $k=k+1$, крок 2.

Пр. $f = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

1. $x_0 = (0{,}5 ; 1)$ $\varepsilon = 0{,}1$
2. $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2 ; x_1 + 2x_2)^T$
3. $\|\nabla f(x_0)\| = 3{,}9 > 0{,}1$

   Матриця других похідних

   $H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $H^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$
5. Покладемо $\alpha_0 = 1$
6. $x_1 = x_0 - (f''(x_0))^{-1} f'(x_0) = (0{,}5 ; 1) - (0{,}5 ; 1) = (0, 0)$

   $f(x_1) = 0$

   $f(x_0) = 2$

   $f(x_1) < f(x_0)$ - вик

   Значить α не рухаємо
7. $\|x_1 - x_0\| = 1{,}12 > \varepsilon$

   Покладемо $k = 1$

2.1 $\nabla f(x_1) = (0, 0)^T$

3.1 $\|\nabla f(x_1)\| = 0 < \varepsilon$ ✓ Розв'язок знайдено

Модифікований метод Ньютона зі зміною кожних p кроків матриць.

У даному методі значення матриці Гессе залишається незмінним протягом p кроків

$$x_{k+1} = x_k - \left(f''\left(x_{\left[\frac{k}{p}\right]\cdot p}\right)\right)^{-1} f'(x_k)$$, де $[a]$ - ціла частина a

Алгоритм такий же як в методі Ньютона

$p=1$

$x_1 = x_0 - f''(x_0)^{-1} f'(x_0)$

$x_2 = x_1 - f''(x_1)^{-1} f(x_1)$

$x_3 = x_2 - f''(x_2)^{-1} f(x_2)$

$p=2$

$x_1 = x_0 - f''(x_0)^{-1} f'(x_0)$

$x_2 = x_1 - f''(x_0)^{-1} f'(x_1)$

$x_3 = x_2 - f''(x_2)^{-1} f(x_2)$

$x_4 = x_3 - f''(x_2)^{-1} f(x_3)$

$p=3$

$x_1 = x_0 - f''(x_0)^{-1} f'(x_0)$

$x_2 = x_1 - f''(x_0)^{-1} f'(x_1)$

$x_3 = x_2 - f''(x_0)^{-1} f'(x_2)$

$x_4 = x_3 - f''(x_3)^{-1} f'(x_3)$

$x_5 = x_4 - f''(x_3)^{-1} f'(x_4)$

$x_6 = x_5 - f''(x_3)^{-1} f'(x_5)$

Пр. $f = 2x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2$

1. $x_0 = (0{,}5; 1)$ $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 2$
2. $\nabla f(x) = (6x_1^2 + 2x_1x_2;\ x_1^2 + 2x_2)^T$

$\nabla f(x_0) = (2{,}5; 2{,}25)^T$

$H = \begin{pmatrix} 12x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{pmatrix}$

$H(x_0) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\|\nabla f(x_0)\| = 3{,}36 > \varepsilon$
4. $H(x_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{pmatrix}$
5. Поклад. $\alpha_0 = 1$
6. $x_1 = x_0 - f''(x_0)^{-1} \cdot f'(x_0) = (0{,}5; 1) - \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}25 \end{pmatrix} = (0{,}317; 0{,}03)$

$f(x_1) = 0{,}07$

$f(x_1) < f(x_0)$ - вик.

7. $\|x_1 - x_0\| = 0{,}987 > \varepsilon$

Покладемо $k=1$, крок 2.

2.1 $\nabla f(x_1) = (0{,}62; 0{,}16)^T$

3.1 $\|\nabla f(x_1)\| = 0{,}64 > \varepsilon$

4.1 $H(x_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{pmatrix}$

5.1 Пок. $\alpha_1 = 1$

6.1 $x_2 = x_1 - f''(x_0) f'(x_1) = (0{,}245; -0{,}014)$

$f(x_2) = 0{,}03$

$f(x_2) < f(x_1)$ - вик. 7. $\|x_2 - x_1\| = 0{,}08 > \varepsilon$ ...

Метод Стеффенсена.

У тих випадках, коли обчислення матриці $f''(x)$ вимагає значних обчислювальних затрат, постає питання щодо можливості побудови методу, який за швидкістю і трудомісткістю не гірший, ніж метод Ньютона. Один з таких методів є м. Стеффенсена.

У даному випадку похідна Гессе заміняється різницевим відношенням перших похідних.

Якщо відоме x_k, то наступні наближення визн. за ф-лою:

$$x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k, x_k - \beta_k f'(x_k))\right)^{-1} f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

β_k - числовий параметр $f'(x, y)$ - поділена різниця, яка апроксимує $f''(x)$.

Елементи матриці $f'(x,y)$ визначаються за ф-лою:

$$f_{ij}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{x^i}(x^1, \dots, x^j, y^{j+1}, \dots, y^n) - f_{x^i}(x^1, \dots, x^{j-1}, y^j, \dots, y^n)}{x^j - y^j}, & x^j \neq y^j \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^1, \dots, x^{j-1}, y^j, \dots, y^n), & x^j = y^j \end{cases}$$

Квазіньютонівські методи.

Квазіньютонівська умова $H_{k+1} \Delta y_k = \Delta x_k$

Їх ще наз. методами змінної метрики.

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H_k f'(x_k)$$

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(x_k - \alpha H_k f'(x_k))$$

Матриця H_k апроксимує матрицю $(f''(x_k))^{-1}$ і наз. квазіньютонівською матрицею. Ця матриця повинна задовольняти наступні умови

$$H_{k+1} \Delta y_k = \Delta x_k$$

$$\Delta y_k = f'(x_{k+1}) - f'(x_k) \qquad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$H_0 = I$$

Метод Бройдена (квазі. метод)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\overbrace{(\Delta x_k - H_k\Delta y_k)(\Delta x_k - H_k \Delta y_k)^T}^{\text{матриця}}}{\underbrace{(\Delta x_k - H_k \Delta y_k, \Delta y_k)}_{\text{число}}}$$

матриця — H_{k+1}; вектор транспонований — $(\Delta x_k - H_k\Delta y_k)^T$; вектор — $\Delta x_k - H_k \Delta y_k$; вектор — Δy_k

$\left.\begin{array}{l}\Delta x_k\text{-вектор}\\ H_k\text{-матриця}\\ \Delta y_k\text{-вектор}\end{array}\right\}$ вектор H_0 - одинична матриця

Пр. $f = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

1. $x_0 = (0,5; 1)$ $\varepsilon = 0,1$
2. $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$
   $\nabla f(x_0) = (3; 2,5)^T$
3. $\|\nabla f(x_0)\| = 3,9 > 0,1$
4. $\alpha_0 = 0,24$
5. $x_1 = x_0 - \alpha_0 \nabla f(x_0) = (0,5;1) - 0,24(3;2,5)^T = (-0,22; 0,4)^T$
   $\nabla f(x_1) = (-0,48; 0,58)^T$
6. $\Delta x_0 = x_1 - x_0 = (-0,22; 0,4)^T - (0,5;1) = \begin{pmatrix}-0,72\\-0,6\end{pmatrix}$

$\Delta y_0 = f'(x_1) - f'(x_0) = (-0,48; 0,58)^T - (3; 2,5)^T = \begin{pmatrix}-3,48\\-1,92\end{pmatrix}$

$H_0 \Delta y_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3,48\\-1,92\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3,48\\-1,92\end{pmatrix}$

$(\Delta x_0 - H_0\Delta y_0) = \begin{pmatrix}-0,72\\-0,6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3,48\\-1,92\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,76\\1,32\end{pmatrix}$

$(\Delta x_0 - H_0\Delta y_0)(\Delta x_0 - H_0\Delta y_0)^T = \begin{pmatrix}2,76\\1,32\end{pmatrix}\cdot(2,76 \;\; 1,32) = \begin{pmatrix}7,6176 & 3,6432\\ 3,6432 & 1,7424\end{pmatrix}$

$(\Delta x_k - H_k \Delta y_k, \Delta y_k) = \begin{pmatrix}2,76 & -3,48\\ 1,32 & -1,92\end{pmatrix} = -12,1392$

скалярний доб векторів

$H_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{-12,1392}\cdot\begin{pmatrix}7,6176 & 3,6432\\ 3,6432 & 1,7424\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,37248 & -0,3\\ -0,3 & 0,856485\end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix}0,37248\alpha - 0,22\\ 0,4 - 0,64\alpha\end{pmatrix}$

$\alpha = 0,623$

$x_2 = \begin{pmatrix}-0,000081\\ 0,00128\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ розвязок за 2 кроки

Метод Девідона-Флетчера-Пауелла (квад. мет.)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x_k \cdot \Delta x_k^T}{(\Delta x_k, \Delta y_k)} - \frac{H_k(\Delta y_k \cdot \Delta y_k^T) H_k}{(H_k \Delta y_k, \Delta y_k)}$$

Метод Бройдена-Флетчера-Шанно

$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{(H_k \Delta y_k, \Delta y_k)}{(\Delta x_k, \Delta y_k)}\right) \frac{\Delta x_k \cdot \Delta x_k^T}{(\Delta x_k, \Delta y_k)} - \frac{(\Delta x_k \cdot \Delta y_k^T) H_k}{(\Delta x_k, \Delta y_k)} - \frac{H_k (\Delta y_k \cdot \Delta x_k^T)}{(\Delta x_k, \Delta y_k)}$$

Методи нульового порядку.

Метод циклічного покоординатного спуску.

За напрям пошуку вик. координат орти $e_1, e_2, \dots, e_n$, де e_j – вектор розмірності n, усі компоненти якого, за винятком j, дор. нулю, j-та компонента дор. 1.

Реалізація:

На k-му циклі задана точка x_k і система напрямів e_i, $i=\overline{1,n}$ - орт.

На початку циклу приймаємо біжуче значення точки $t_1 = x_k$ і вик. почергово мінімізацію ф-ії $f(x)$ у напрямах $e_1, e_2, \dots, e_n$. Мінімізація $f(x)$ у напрямі e_i полягає в обчисленні значення $f(t_i + \lambda_i e_i) = \min\limits_{\lambda} f(t_i + \lambda e_i)$ і визначенні $t_{i+1} = t_i + \lambda_i e_i$.

Якщо $i<n \Rightarrow i = i+1$ продовж. обч.

$i=n \Rightarrow x_{k+1} = t_{n+1}$

Якщо вик. $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ припиняємо обчислення, а x_{k+1} приймаємо за розв'язок задачі, або ж вик. новий $k+1$ цикл.

Пр. Знайти розв'язок задачі $(2x^1x^2)^2 + 3(x^2-2)^2 \to \min$ методом покоординатного спуску з точністю $\|x_k - x_{k-1}\| < 10^{-2}$

Ортогональними напрямами слугуватимуть координатні орти $d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Виберемо поч. т. $x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, тоді $t_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $f(x_0) = 12$.

Проведемо мінімізацію вздовж напряму d_1.

$f(t_1 + \alpha_1 d_1) = \min f(t_1 + \alpha d_1)$

$f(t_1 + \alpha_1 d_1) = f(\lambda, 0) = (2\alpha)^2 + 12 \geq 12 \Rightarrow \alpha = 0$

Отже, $t_2 = t_1 = (0,0)^T$. Тоді $t_3 = t_2 + \lambda_2 d_2 = (0,\lambda)^T$

$f(t_3) = \min f(0,\lambda) = \min(\lambda^2 + 3(\lambda-2)^2) = \min(4\lambda^2 - 12\lambda + 12)$.

Розв'язком задачі є $\lambda = 1{,}5$

Отже, $t_3 = (0; 1{,}5)^{0'} = x_1$

$f(x_1) = 3{,}0$

Метод Розенброка.

На кожній ітерації (циклі) вик. ітераційний процес уздовж n лінійно незалежних і ортогональних напрямів...

Метод Хука і Джівса

Пр. Знайти розвʼязок задачі $(2x^1 - x^2) + 3(x^2-2)^2 \to \min$ методом Хука-Джівса з точністю $\|x_k - x_{k-1}\| < 10^{-2}$

Як і в поп. методі вибираємо $x_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Виконавши повний цикл за методом покоординатного спуску отримаємо $x_2 = \begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix}$. Оскільки $\|x_2 - x_1\| \geqslant 10^{-2}$ то визнач. напрям $d = x_2 - x_1 = \begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix}$ і точку $y_2 = \begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix} = (1+\lambda)\begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix}$ де $\lambda = \arg\min\limits_{\lambda} f(y_2)$. Провівши відповідні мат. викладки отр. $\lambda = 0$.

Отже, $y_2 = x_2 = \begin{pmatrix}0\\1,5\end{pmatrix}$.

Тепер проводимо знову повний цикл методу покоординатного спуску. Ми отр. $x_3 = \begin{pmatrix}0,750\\1,875\end{pmatrix}$ і переходимо до обчислення y_3. У дан. випадку $d = x_3 - x_2 = \begin{pmatrix}0,75\\0,375\end{pmatrix}$ і, відповідно, $y_3 = \begin{pmatrix}0,75(1+\lambda)\\1,875 + \lambda 0,375\end{pmatrix}$. З умови $\lambda = \arg\min\limits_{\lambda} f(y_3)$ отр. $\lambda = 1/3$. Відповідно $y_3 = \begin{pmatrix}0,75(1+1/3)\\1,875 + \frac{1}{3}0,375\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, що є розвʼязком задачі

Метод спряжених напрямів

Побудова методу спряжених напрямів зумовлена ідеєю відшукати розв'язок задачі мінімізації квадратичної ф-ії за скінченну к-ість ітерацій. У методах спряжених напрямів треба знайти такі напрями $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$, що послідовність не більше n одновимірних мінімізацій уздовж цих напрямів приводить до відшукання мінімуму квадратичної ф-ії

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (b,x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Тобто, $f(x_n) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

де $x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$

$$f(x_k + \alpha_k h_k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x_k + \alpha h_k) \quad k = 0, 1, \dots$$