Part 5.대안적 실험설계

지역 실험과 스위치백 실험, 불응과 도구변수

2025.05.18 김시은

발표자 소개

- 김시은

- 인하대 일반대학원
  통계데이터사이언스학과 통계학전공

- 가짜연구소 10기 러너

목차

10장 지역 실험과 스위치백 실험

- 지역 실험
- 통제 집단합성법 설계
- 스위치백 실험

11장 불응과 도구변수

- 불응
- 도구변수
- 불연속 설계

10장 지역 실험과 스위치백 실험

문제 상황 : 패널 데이터를 수집하기 위한 실험 설계 시 간단한 A/B test로는 해결할 수 없음

solution : 대안적 실험설계 방법 (지역 실험과 스위치백 실험)

문제상황 1아직 고객이 아닌 사람들을 무작위로 배정할 수 없어서 마케팅 효과를 추론하기 어려움

Solution 1 지역 실험 : 도시나 주와 같은 전체 시장을 실험군으로 하고 다른 시장은 대조군으로 남겨둠

→ 실험군과 대조군을 어떻게 최적으로 선정하나? 통제집단 합성법

- 주요 아이디어 : 분석단위를 고객 → 도시나 주 단위 ,도시를 무작위로 배정
  - 문제 : 도시 수 <<< 고객 수 ,무작위 배정 불가능
  - 표본의 크기가 부족 (ex: 시장이 작거나 실험대상이 하나인 경우)

10장 지역 실험과 스위치백 실험

Causal-Lab

문제 상황 : 패널 데이터를 수집하기 위한 실험 설계 시 간단한 A/B test로는 해결할 수 없음

solution : 대안적 실험설계 방법 (지역 실험과 스위치백 실험)

문제 상황 2 그런데 지역 실험을 하기에도 부족할 정도로 도시 수가 충분히 많지 않다면?

solution 2 스위치백 실험

- 한 처치를 여러 번 켜고 끄는 방식
- 처치 받을 실험 대상이 단 하나만 있을 때도 처치 전후 분석을 통해 적용가능

10.1 지역실험

지역 실험이 필요한 이유

- 아직 고객이 아닌 사람들을 무작위로 배정할 수 없어

목표 : 어느 도시에서 처치할지 결정 ,즉 **전체 시장을 대표할 수 있는 도시 그룹 선택**

→ 해당 도시들에 대한 처치를 통해 전체 시장에 동일하게 처치를 주었을 때 예상되는 결과를 파악할 수 있음

- 데이터 구성 ⇒ 실험대상 : 도시, 시간 차원 : 날짜, 도시의 처치여부에 대한 열, 개입 후 기간에 대한 열
- 결과인 앱 다운로드 수에 초점, 개입 후 기간은 분석에서 제외(어느 도시에서 처치할 지 결정할 것이기 때문)

	app_download	population	city	state	date	post	treated
0	3066.0	12396372	sao_paulo	sao_paulo	2022-03-01	0	1
1	2701.0	12396372	sao_paulo	sao_paulo	2022-03-02	0	1
2	1927.0	12396372	sao_paulo	sao_paulo	2022-03-03	0	1
3	1451.0	12396372	sao_paulo	sao_paulo	2022-03-04	0	1
4	1248.0	12396372	sao_paulo	sao_paulo	2022-03-05	0	1

10.1 지역실험

문제 상황 : 표본 크기 공식을 이용하여 실험에 필요한 도시의 수를 판단하기 어려움

$$n = \frac{16\sigma^2}{\delta^2}$$

문제 발생 원인

- 도시 마다 결과에 대한 분산이 다름
- 동일한 실험 대상의 반복관측을 통해 추정값의 정밀도를 높일 수 있다는 점을 고려하지 않음
- 심지어 이렇게 구한 표본의 크기보다 실험 대상이 현저히 부족할 수 있음

10.2 통제집단합성법 설계

적은 수의 실험 대상에서 최적의 실험군을 선택할 때 유용

solution : 통제집단합성법 (→ 결과를 어떻게 해석할지를 염두에 두기)

goal: 모든 실험 대상의 평균 행동을 근사하는 가상의 실험군 찾기

$$Y_{post}\, f \;=\; Y_{post}\, w$$

⇒ 가중치 w와 결합했을 때 시장의 평균 결과를 제공하는 실험군 도시의 조합

How? : 전체 평균을 구하려면 먼저 각 도시가 평균에 기여하는 정도를 알아야 함

→ 이상적인 목표

10.2 통제집단합성법 설계

Goal1: 실험군 찾기

$$Y_{post}\, f \;=\; Y_{post}\, w$$

Method: 가장 쉬운 방법 $f = w$ ⇒ 모든 도시가 실험군

problem: 처치효과를 추정할 대조군이 없어짐

solution: 제약 조건 부여 (가중치 벡터 w의 0이 아닌 요소의 갯수가 전체 도시 수인 N보다 작아야됨)

- $|w|_0 < N$= 0이 아닌 요소 개수
- 처치 후 Y_{post} 관측할 수 없음 → w 찾을 수 없음

10.2 통제집단합성법 설계

Goal2: 첫 번째와 다른 도시 그룹 찾기 , 대조군 찾기

- 조건
  - 시장 평균을 대략적으로 반영할 수 있어야 하며, 처음에 선정한 도시 그룹과는 구별
  - 동일한 도시를 실험군 및 대조군 도시로 동시에 사용할 수 없음 (← 제약 조건 추가)

최종 수식

$$Y_{post}\, f \;=\; Y_{post}\, v$$

$$\text{s.t } w_i v_i \;= 0 \;\; \forall\, i$$

- 0이 아닌 w와 0이 아닌 v 요소는 각각 실험군 및 대조군 도시

  → 문제는 위 방법은 모두 Y_{post}사용. 즉, Y_{post}는 관측할 수 없기 때문에 불가능한 방법

10.2 통제집단합성법 설계

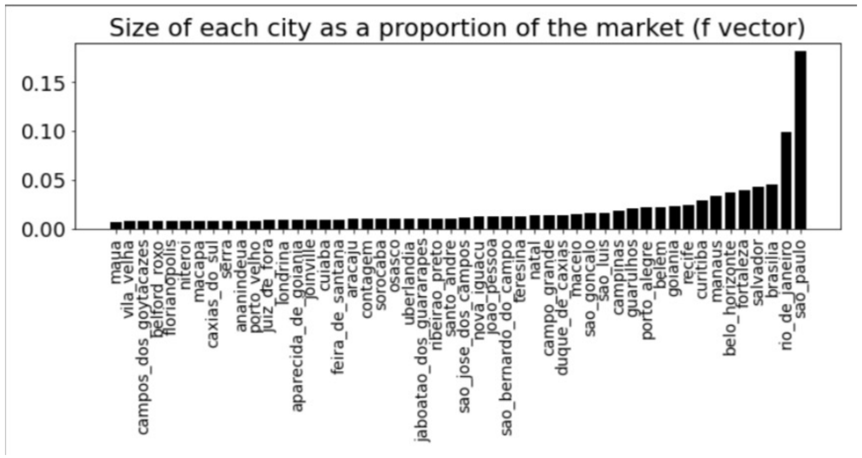
Solution 1 : 개입 전 기간 Y 즉, Y_{pre} 살피기

→ 두 개의 서로 다른 도시 그룹을 찾아 각각의 가중평균이 시장 평균에 근접

→ 실질적으로 몇 가지 제약조건을 추가해야할 수도 있음

예시 :

- 실험군 규모가 크면 거의 모든 대상이 처치를 받으므로 마케팅 캠페인을 전체 시장에 진행하기 전에 먼저 테스트하기에 적합하지 않음
- 또한 많은 시장에서 도시의 규모는 지수 분포를 따르는 경향이 있어 소수의 도시가 시장의 거의 대부분을 차지함
- 표준 통제 집단 합성법을 사용하면 외삽이 허용되지않아 가장 큰 도시를 포함하게 됨



10.2 통제집단합성법 설계

Solution 2: 통제집단합성법 모델에서 절편이동 허용

$$\min_{w,v} ||Y_{pre}f - Y_{pre}w_{tr} - \alpha_0||^2 + ||Y_{pre}f - Y_{pre}v_{co} - \beta_0||^2$$

$$s.t\ \sum w_i = 1\ and\ \sum v_i = 1,$$

$$w_i, v_i \geq 0\ \ \forall\, i,$$

$$\mathrm{w}_i\, v_i = 0\ \forall\, i,$$

$$||w||_0 \leq m$$

- 볼록하지 않아서 최적값을 찾을 수 없음
- 다만 충분히 적절한 도시 그룹을 찾으면 됨

10.2.1 무작위로 실험군 선택하기

Method 1 : 무작위로 도시 선택하기

1. 몇 가지 상수 정의
   - 근사치를 구하려는 시장평균 Y_{pref}
   - 가능한 모든 도시의 목록
   - 실험군 도시의 최대 수 m
2. 각 도시에 맞는 가중치 찾기
   - 가중치가 0인 도시가 있다면 굳이 사용할 필요 없음
     - 즉, 추정된 가중치가 0에 너무 가깝지 않은 도시 선택

10.2.1 무작위로 실험군 선택하기

3. 다양한 표본 도시에 시도하면서 어떤 것이 더 나은 결과를 가져오는지 확인 = 통제 집단 합성법 모델에 대한 손실 함수 최소화

4. 가상의 실험군 과 가상의 대조군 찾기

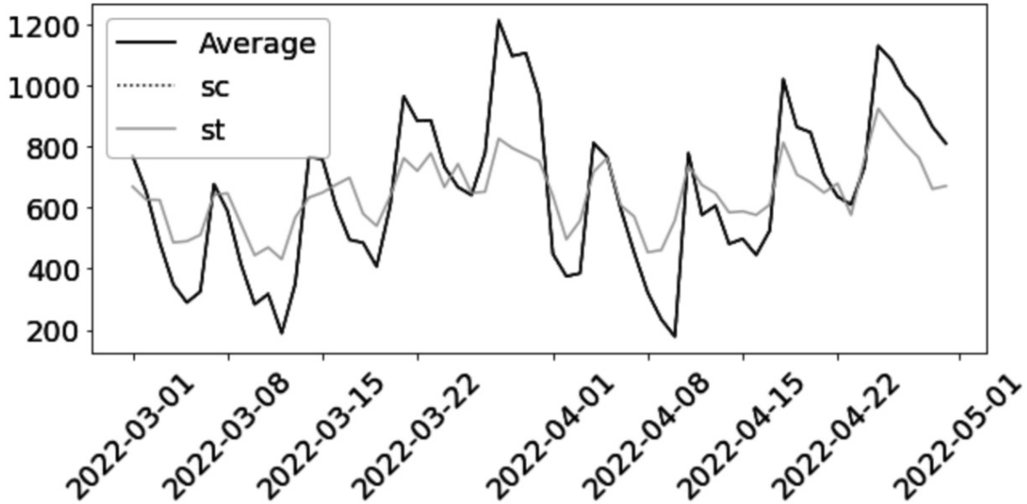
① 실험의 외적 타당성을 극대화하기 위해 각 군의 손실 함수 찾고 두 손실을 합쳐 최소화 하는 조합 찾기.

- 즉, 시장 평균과 매우 유사한 실험군 선택

② m=0 모든 도시를 대조군으로 선택, $v = f$로 설정

③ m 이 작은 경우 실험군 도시와 대조군 도시가 전체 도시 목록

- 모든 도시들을 포함하고 가중치를 약간 조정
  - 이 경우 대부분의 손실은 가상의 실험군에서 발생
  - 가상의 대조군은 시장 평균과 거의 비슷



가상의 실험군은 잘 적합되지 않았지만
가상의 대조군은 시장 평균과 거의 비슷함

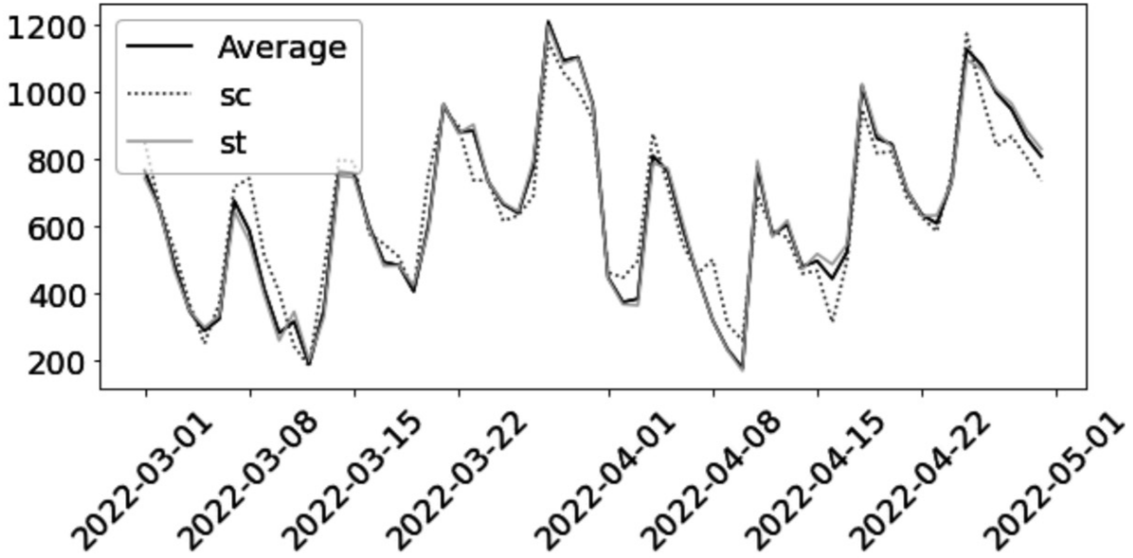
10.2.2 무작위 탐색

Problem : 무작위로 실험군 선택시 가상의 실험군은 제대로 적합되지 않음

Goal: 주어진 도시 수에 따른 총 손실 최소화

solution: 다양한 **도시 조합**을 무작위 탐색,그 중 성능이 좋은 조합 선택 -> **Method 2** : **도시 조합**을 무작위 탐색

- 큰 도시들은 전체 시장 평균에 큰 영향을 미침 → 실험군에 포함시키면 전체 손실을 줄일 수 있음
  - 만약 손실이 커지는 상황을 피하고 싶다면 대조군에서 가장 큰 도시를 제외



가상의 실험군,대조군 모두 시장평균을 잘 따라감

10.2.2 무작위 탐색

해석 방법

- 통제집단합성법
    - 위 방법을 사용해 실험을 설계했더라도 반드시 이 방법으로 결과를 해석할 필요는 없음
- 합성 이중차분법: 추정량의 분산을 줄일 수 있음
    - 그 결과로 얻은 추정량의 분산을 추정할 때는 주의해야함
    - 도시군을 무작위로 선택하지 않았으므로 다른 실험 대상으로 처치를 재배정하는 추론 과정은 유효하지 않음
- t-검정 : 실험 대상이 어떻게 선택되었는지를 가정하지 않음

10.3 스위치백 실험

통제집단합성법을 활용한 실험 설계의 한계 : 여전히 적당한 수의 실험 대상이 필요함

극단적으로 실험 대상이 1개 뿐이라면?

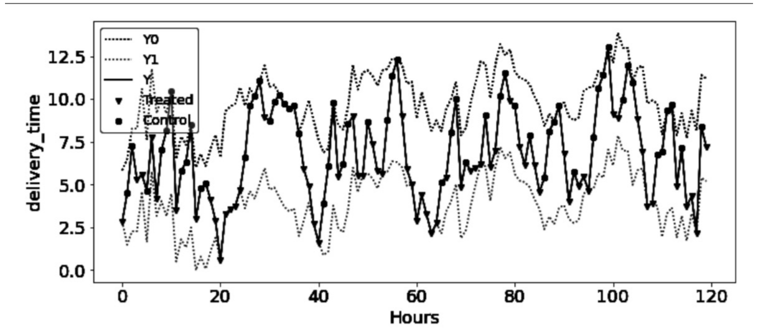
- 가정 : 한 도시 내에서 운영하는 소규모 음식 배달 업체
- **배달 수수료 인상이 배달 시간에 어떤 영향을 미치는 지** 알고 싶음
  - 기존 A/B test 한계
    - 실험군 고객 절반에 대해 가격을 인상하면, 전체 수요 감소로 인해 배달 가능한 배달원 즉, **쉬는 배달원이 많아짐**
    - 이는 곧 **대조군에 배달 가능한 배달원이 늘어나게 되고 배달 시간 감소**하게 되어 대조군에 혜택이 돌아감
  - 통제집단 합성법 설계 한계
    - 해당 회사는 한 시장에만 있어서 통제집단합성법을 활용한 실험을 적용하기 어려움

10.3 스위치백 실험

Solution : 스위치백 실험

- 만약 위 예시에서 가격이 원래 수준으로 돌아갔을 때 가격 인상의 효과가 금방 사라진다면 여러 번 가격인상을 반복하며 전후 비교 가능
- 단 한 개나 아주 적은 수의 실험 대상이 있을 때 유용
- 주의사항 : 이월 효과의 차수가 작아야 함
  - 처치가 끝난 후에도 그 효과가 장기간에 걸쳐 지속되지 않아야 됨
- 작동 원리
  - 각 기간마다 50% 확률로 처치 여부를 무작위로 배정

10.3 스위치백 실험



- 세 기간 동안의 처치가 결과를 결정.즉,바로 직전의 처치 뿐만 아니라 그 이전의 두 기간 동안의 처치에도 영향을 받음

$$Y_t = f(d_{t-2}, d_{t-1}, d_t)$$

이월 효과의 차수 : 2

한계

- 현실에서는 관측된 결과만 알 수 있음
- 잠재적 결과(가격 인상이 항상 적용되었거나 가격 인상이 전혀 적용 되지 않았을 때의 결과)와 관측된 결과를 비교할 수 없음

10.3.1 시퀀스의 잠재적 결과

- 처치 효과는 이후 시간까지 영향을 주기 때문에 스위치백 실험에서는 잠재적 결과를 처치 벡터의 형태로 정의

$$Y_t(D) = Y_t([d_0, d_1, \dots, d_r]),\ t < r$$

가정 1 : 처치에 대한 비기대 가정

- 잠재적 결과는 현재와 과거의 처치에만 의존하고 미래의 처치에는 영향을 받지 않음

$$Y_t(D) = Y_t([d_0, d_1, d_2, \dots, d_t])$$

- 이월 기간 m의 크기를 안다면? $Y_t(D) = Y_t([d_{t-m}, \dots, d_t])$

- 전체 처치효과 :항상 처리를 받지 않는 상태에서 항상 받는 상태로 바뀌었을 때의 효과

$$\tau_m = E[Y_t(1_{t-m}, \dots, 1_t) - Y_t(0_{t-m}, \dots, 0_t)]$$

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

1. **모델 추정**

$$Y_t = \alpha + d_t + d_{t-1}, \dots, d_{t-k} + e_i$$

2. **가정 2 :** 시차의 효과가 가산적

$$Y_t = f(d_t, d_{t-1}, d_{t-2}) = \alpha + d_t + d_{t-1} + d_{t-2} + e_i$$

3. 도메인 지식을 활용하여 m의 상한선을 이용하여 처치에 대한 시차를 만듦 -> 시차가 있는 데이터 확보 후 결과(Y_t)를 이전 시차들과 현재 처치에 회귀

	d_l0	d_l1	d_l2	...	d_l4	d_l5	d_l6
0	1	NaN	NaN	...	NaN	NaN	NaN
1	0	1.0	NaN	...	NaN	NaN	NaN
2	0	0.0	1.0	...	NaN	NaN	NaN
3	1	0.0	0.0	...	NaN	NaN	NaN
4	1	1.0	0.0	...	1.0	NaN	NaN

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	9.3270	0.461	20.246	0.000	8.414	10.240
d_l0	-2.9645	0.335	-8.843	0.000	-3.629	-2.300
d_l1	-1.8861	0.339	-5.560	0.000	-2.559	-1.213
d_l2	-1.0013	0.340	-2.943	0.004	-1.676	-0.327
d_l3	0.2594	0.341	0.762	0.448	-0.416	0.935
d_l4	0.1431	0.340	0.421	0.675	-0.531	0.817
d_l5	0.1388	0.340	0.408	0.684	-0.536	0.813
d_l6	0.5588	0.336	1.662	0.099	-0.108	1.225

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

c. 해석 :

- 두 번째 시차까지 유의함 ⇒ 2개의 기간에 걸친 이월 효과가 있음
- 참고로 회귀 모델에서 전체 효과 τ_m을 추정하기 위해 이월 효과의 차수 m에 대해서는 정확히 알 필요는 없음

$$\widehat{\tau_m} = \sum_{l=0}^{lags} \widehat{d_{t-l}}$$

- 모든 시차 매개변수의 추정값을 합하면 됨 → 그러나 이런 경우에는 전체 효과의 추정값이 다소 정확하지 않을 수 있음
- 정확한 전체 효과의 추정값을 구하기 위해선 이월 효과 차수 만큼의 시차를 사용하면 분산을 크게 줄일 수 있음

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

Problem : 위 과정은 잠재적 결과 $Y_t(D)$의 모델 설정이 정확해야한다는 가정을 전제로 함

- 시계열 데이터에 적용 어려움

- solution: 처치가 어떻게 배정되었는지를 알면 적용 가능한 IPW(역확률 가중치)와 같은 방법을 통해 τ_m을 추정
  - 처치 배정 방식은 회사가 통제하기 때문에 적용 가능

IPW 란?

- 관측된 결과를 처치 확률의 역수인 $\frac{1}{p(D=d)}$을 곱해 잠재적 결과를 재구성함

$$E[\widehat{Y_d}] = N^{-1}\Sigma\left(\frac{Y_d 1(D=d)}{p(D=d)}\right)$$

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

Causal-Lab

1. $P(D_{t-m:t} = d)$ 구하기

- 확률계산을 할 때 잠재적 결과가 처치 벡터로 정의되어 있다는 것을 고려해야함
- 랜덤화(무작위 배정) 확률 p가 항상 50%인 경우
  - 각 랜덤화 지점에서 처치는 50%확률로 동일하게 유지되거나 전환됨

  ⇒ 추정의 관점

    - $P(D_{t-m:t} = 1) = P(D_{t-m:t} = 0)$
  - $P(D_{t-m:t} = d)$ 가 모든 시점에서 동일한 것은 아님
  - ⇒ 랜덤화 시점과 시퀀스에서의 위치에 따라 달라짐

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

Causal-Lab

1. $P(D_{t-m:t}=d)$ **구하기**

- 처치는 모든 기간에 랜덤화
  - [1,1,1,1,1,1] 수열에서 세 번 연속으로 같은 처치를 관측할 확률
  - $P(D_{t-m:t}=d)$ = [na,na,.5^3,.5^3,.5^3,.5^3]
- 세 번의 기간마다 랜덤화
  - $P(D_{t-m:t}=d)$ = [na,na,.5, .5^2,.5^2,.5]
  - t=4,5일 때 현재 기간과 그 이전 두 기간을 포함하는 시차가 2인 창이 랜덤화 지점을 포함
  - t=4 [1,1,1,1,1,1] ,t=5 t=4 [1,1,1,1,1,1]

10.3.2 이월 효과의 차수 추정

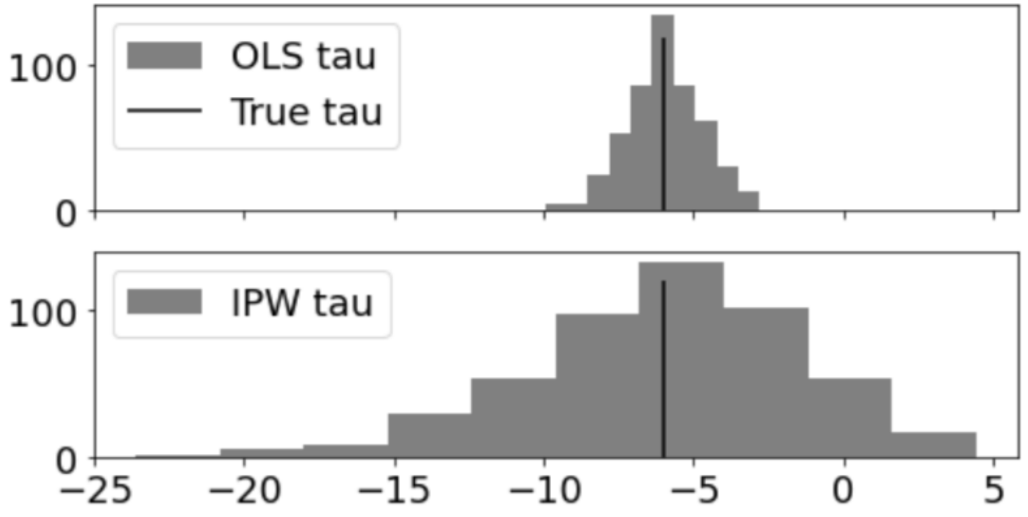
3. 최근 m개의 처치와 현재 처치가 모두 동일할 때마다 관측된 결과를 실행 확률로 곱해준 결과의 평균

$$\hat{Y}(d) = \frac{1}{T-m}\sum_{t=m+1}^{T} Y_t \frac{1(D_{t-m:t} = d)}{P(D_{t-m:t} = d)}$$

4. IPW 추정량 (스위치 백 실험에 사용)

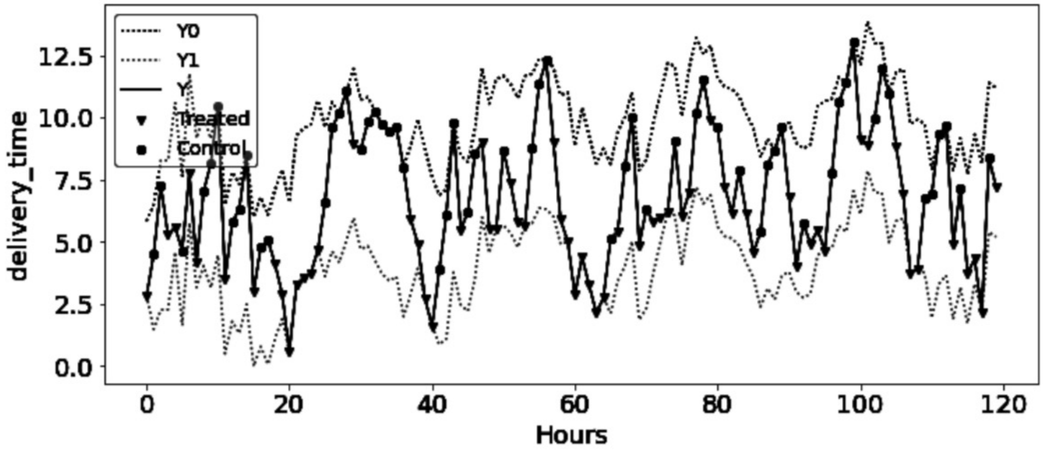
$$\hat{\tau} = \hat{Y}(1) - \hat{Y}(0) = \frac{1}{T-m}\sum_{t=m+1}^{T}\{Y_t(\frac{1(D_{t-m:t}=1)}{P(D_{t-m:t}=1)} - \frac{1(D_{t-m:t}=0)}{P(D_{t-m:t}=0)})\}$$

5. 결과
   - 추정된 $\mathrm{E}(\hat{\tau}) = \tau$, unbiased estimator
   - IPW 분포는 훨씬 더 넓게 퍼져 있음 ⇒ 분산이 큼



10.3.4 최적의 스위치백 설계

- IPW 추정량을 사용하여 분산을 줄일 수 있는 실험을 설계해야함
- IPW 추정량 공식
- 분산이 큰 이유
  - m+1개의 연속적인 처치가 동일한 시퀀스만 유지함
  - 상위 및 하위 잠재적 결과 사이의 모든 데이터를 제거



  - 더 많은 데이터를 사용하고 싶다면 연속적으로 동일한 처치를 더 많이 확보
    - 처치의 분산이 감소하고 극단적인 경우에는 추정이 불가능해짐
  - 추정량의 분산은 더 많은 유용한 데이터와 큰 처치 분산을 모두 가짐으로써 줄일 수 있음
  - 더 많은 유용한 데이터를 어떻게 얻나?← 분산을 줄이는 설계 핵심

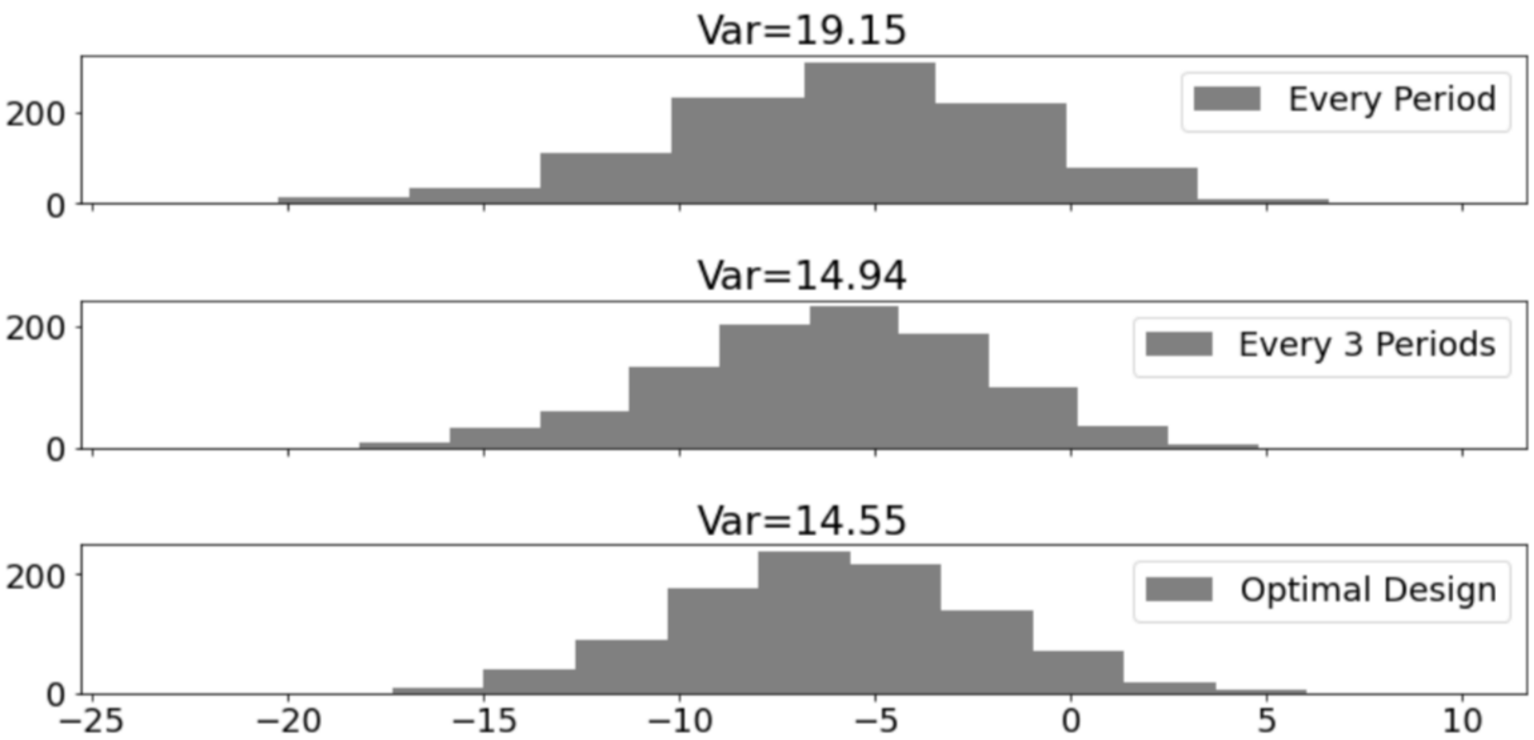
10.3.4 최적의 스위치백 설계

- 방법
  1. 직관적 설계
     - m+1기간 마다 랜덤화
       - 각 블록의 시작 시점에서 무작위로 처치를 할당하게 됨
       - 각 블록 즉, 각 시퀀스는 m+1개의 연속적인 처치가 동일
       - 분산을 최소화하진 않지만 그래도 최소값에 가까움
  2. 최적 설계
     - m>0 일 때, 매 m기간 마다 랜덤화하고 실험 기간의 시작과 끝에서 크기가 m인 간격을 추가하면 분산을 좀 더 최소화 할 수 있음

$$T^* = \{1, 2m + 1, 3m + 1, \ldots, (n-2)m + 1\}$$

     - T^*: 최적의 랜덤화 지점, m: 이월 효과의 차수, n : T/m=n≥ 4을 만족하는 정수
     - 실험의 길이는 이월 차수 m으로 나눌 수 있어야 함
     - 크기 m인 블록을 최소한 4개는 포함할 수 있을 만큼 충분히 길어야 함
     - 그럼 m=0 인 경우(이월이 없는 경우)에는?
       - 모든 데이터를 유지하면서 처치 분산을 최대화할 수 있는 모든 기간에 랜덤화

10.3.4 최적의 스위치백 설계



- 최종 설계 방법 비교
  - 최적 설계를 사용할 때 얻을 수 있는 분산 감소 < 모델 가정을 하고 OLS를 사용하여 얻을 수 있는 분산 감소

10.3.5 강건한 분산

- IPW 추정량의 분산은 어떻게 추정하나?
  - 분산은 실험 설계에 따라 달라짐
  - 최적 설계 설정 → 그에 따른 분산 계산
- 최적 설계에 따라 랜덤화 지점 결정 가정

분산

최적 설계의 시작과 끝에 남긴 간격을 고려

$$\hat{\sigma}(\tau) = \frac{1}{\boxed{(T-m)^2}} \{8\overline{Y_1^2} + \sum_{k=2}^{K-1} 32\,\overline{Y_k^2}\,1\left(d_{km+1} = d_{(k+1)m+1}\right) + 8\,\overline{Y_k^2}\}$$

두 개의 연속된 블록이 동일한 처리를 받았을 때마다 1

표본 크기의 제곱

처음 m개를 버렸으므로 m을 빼야함

- 참고로 시작과 끝에 간격이 있어 첫번째와 마지막 항에서 확실히 연속된 동일한 처리 발생 → 지시함수 필요 없음

10.3.5 강건한 분산

- 계산된 신뢰구간
- 신뢰구간이 꽤 넓게 나옴

```
In [36]: se_hat = np.sqrt(var_opt_design(df_opt["d"],
                                          df_opt["delivery_time"],
                                          T=120, m=2))

         [tau_hat - 1.96*se_hat, tau_hat + 1.96*se_hat]

Out[36]: [-18.490627362048095, -1.351406536256997]
```

- OLS와 매 기간을 랜덤화 한 설계를 사용한 경우보다 훨씬 넓음
- 모델 가정을 하지 않았기때문에 추가 분산은 감수해야 함
- 최적 설계를 따르더라도 OLS로 분석 할 수 있음
  - 이 설계가 OLS 분산을 최소화하진 않지만, 기간마다 랜덤화 할 때보다 더 정확한 추정값을 얻을 수 있음

요약

사용 가능한 실험 대상의 수가 다소 부족한 경우 두가지 대안적 실험 설계

1. 통제집단합성법 설계
    - 목표 : 전체 실험 대상의 평균 행동을 근사하는 소규모 실험 대상 집단 찾기
    - 실험 대상의 수가 상대적으로 적을 때 유용
    - 이월효과의 차수가 커서 처치효과가 사라지는데 오랜 시간이 걸리는 경우에도 적합
2. 스위치백 실험
    - 이월효과의 차수가 작을 때 좋은 대안
    - 실험 대상이 매우 적거나 하나뿐인 경우에도 작 작동
    - 처치확률과 랜덤화 지점에 따라 정의됨
        - 실험길이 T가 이월 차수 m의 최소 정수배로 4배가 되어야 함
        - m=0 ,즉 이월효과가 없는 경우 매기간 랜덤화 설계

11장 불응과 도구 변수

- 기업은 특정 요건을 충족하는 고객들에게 추가로 제품이나 서비스를 제공.
- 그러나 그 특정 요건을 충족할지 말지는 고객에게 달려있어 원하는 영향을 추론하기 어려움
- 특정 요건을 충족하는 고객과 그렇지 않은 고객사이에 Y_0가 다를 가능성이 높아 서비스의 영향평가를 복잡하게 만듦
- 만약 회사가 서비스나 제품의 제공여부를 무작위로 결정하더라도 고객에게 이를 받아들이도록 강요할 수 없음

  ex) 만약 은행이 특정 금액 이상을 소비하는 고객에게 다양한 혜택을 제공하는 프라임 신용카드를 제공하더라도 고객이 선택하지 않을 수 있음 → **불응 = 처치를 배정받은 모든 사람이 처치를 받지는 않음**

- 불응을 대하는 방법과 불응 문제가 있는 실험을 설계할 때 고려해야 할 사항에 대해 배우기

11.1 불응

순응 그룹

1. 순응자 : 자신에게 배정된 처치를 받는 사람
2. 항시 참여자 : 배정과 관계없이 항상 처치 받는 사람
3. 항시 불참자 : 배정과 관계없이 처리를 한 번도 받지 않은 사람
4. 반항자 : 배정된 처치와 반대되는 처치 받는 사람

Problem: 처치를 받고 난 후 결과만 관측할 수 있기 때문에 원래 어느 그룹에 속해 있었는지 알 수 없음

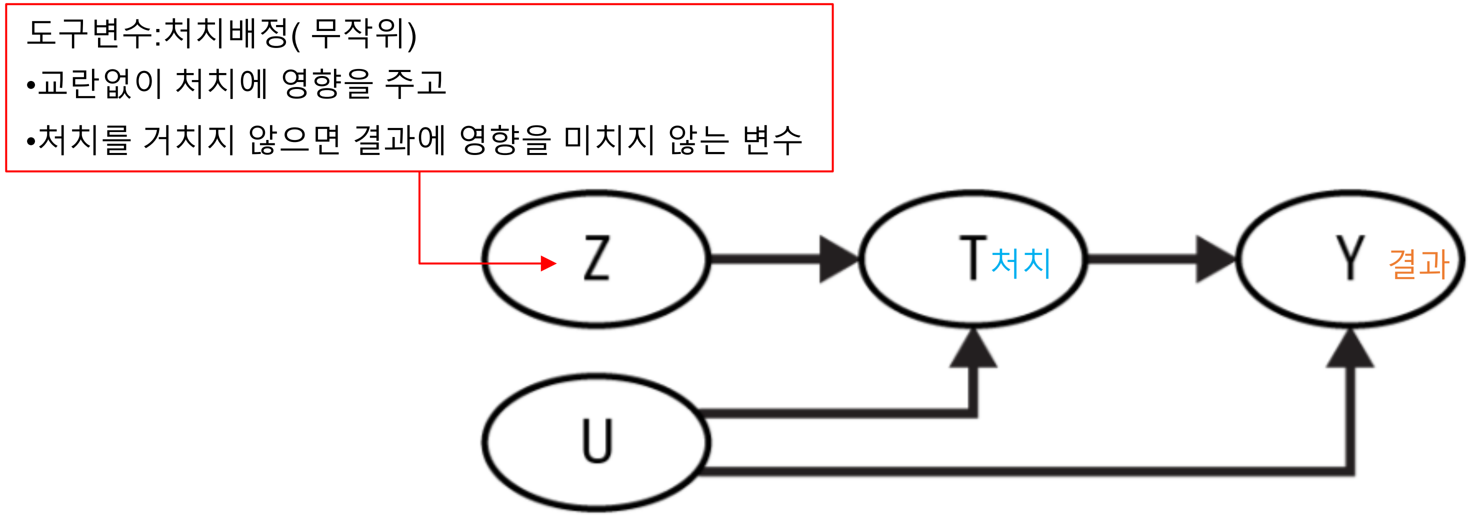
11.1 불응

ex)

1. 은행이 고객에게 **프라임 신용카드를 제공했을 때 프라임 카드가 고객의 구매금액을 얼마나 늘리는지** 알고 싶음
    - 프라임 서비스 제공 비용 발생, 프라임 고객의 구매금액 최소 500달러 이상 증가 → 서비스 가치있음
2. 해당 은행은 10,000명의 고객을 대상으로 프라임 신용카드 이용 가능 여부를 무작위로 배정하는 실험 진행
3. 고객의 절반은 실험군, 나머지 절반은 대조군으로 배정

Problem : 은행이 고객에게 카드를 선택하도록 강요할 수 는 없음 → 불응 존재

11.1 불응



U : 처치 선택과 결과에 교란을 주는 숨겨진 요인

- 도구변수 Z가 무작위로 할당된 경우 , Z는 다른 어떤 변수와도 독립. 특히 Z는 결과 변수(Y)에 영향을 미치는 다른 공통 원인(confounder)과 독립
- Z의 무작위성은 Z와 Y 간의 관계가 Z가 Y에 미치는 인과적 경로(Z → T → Y)에 의해서만 설명됨을 보장
- **순응 그룹과 처치 배정이 결정적으로 처치 적용의 원인**
- U를 순응 그룹을 유발하는 미지의 요인으로 생각할 수도 있음

11.2 잠재적 결과 확장

Causal-Lab

Problem:

- 불응 상황에서는 단순히 "처치를 받았을 때의 결과(Y_1)"와 "처치를 받지 않았을 때의 결과(Y_0)"만으로는 충분하지 않음 . 즉, **도구변수에 의해 처치를 받았는 지 아닌 지가 중요함**

→ **why?**

- 도구 변수(Z)가 처치에 영향을 미치기 때문에 Z의 값에 따라 개인이 어떤 처치를 받을 잠재성이 있는지 고려해야 함

Solution:

- 불응을 더 정확하게 다루고 식별하기 위해 잠재적 결과 표기법 도입

11.2 잠재적 결과 확장

잠재적 결과 표기법

- Z(도구 변수) = T(처치)의 원인 → 잠재적 처치 T_z를 정의
  - ex) Z=1일 때 받을 처리(T_1)와 Z=0일 때 받을 처리(T_0)
- 잠재적 결과는 도구변수 Z에 대한 새로운 반사실 $Y_{z,t}$를 가짐
  - Z와 T 모두 특정 값으로 강제되었을 때의 결과

처치 의도 효과(ITTE)

$$ITTE = E[Y|Z=1] - E[Y|Z=0] = E[Y_{1,t} - Y_{0,t}]$$

- Z가 Y에 미치는 영향 즉, 처치 배정에 따른 영향을 측정하는 지표
- 편향 없이 추정가능
- ex) 프라임 신용카드 제공의 영향 → 은행에서 **프라임 신용카드를 사용함**으로써 기대할 수 있는 고객 당 추가 구매금액 (PV)

→ 처치 할당이 무작위로 이루어졌기 때문에, ITTE는 처치를 할당 받은 그룹(프라임 카드를 사용할 수 있게 된 고객)과 할당 받지 않은 그룹(프라임 카드를 사용할 수 없는 고객)을 비교할 수 있음

11.2 잠재적 결과 확장

주의 ! 처치효과와 처치 의도효과는 같지 않음

- ITTE는 **은행이 프라임 카드를 사용할 수 있는 기회를 고객에게 제공했을 때** 기대되는 효과 → 고객의 추가 구매 금액
- 은행의 궁극적인 목표는 **서비스를 제공했을 때 프라임 카드 사용의 비용 대비 이점을 파악. 즉 처치를 할당 받았을 때 처치를 받은 경우의 효과를 알고 싶음**
- ITTE만으로는 충분하지 않을 수 있음
  - $Y_{1,t}$ 에는 처치를 할당 받았음에도 처치를 받지 않은 고객이 있음(불응자)
  - **결과적으로 ITTE는 처치가 할당된 고객이 실제로 처치를 받았을 때의 효과인 ATE보다 작게 측정됨 → 불응자가 있어 원래 효과가 감소됨 → 0에 가까운 값으로 편향되는 경향이 보임**

- 따라서 ITTE에만 의존하기보단 **고객의 프라임 카드 선택에 따른 처치효과**를 파악해야 함
  - 은행은 카드 사용자격을 완벽히 통제함 → 대조군인 고객은 프라임 카드 사용 자격을 얻지 못해 카드를 사용할 수 없음 → 단방향 불응 발생
  - 따라서 순응 그룹에서 항시 참여자와 반항자는 존재 할 수 없음, 항시 참여자는 순응자로, 반항자는 항시 불참자로 분류됨.

11.2 잠재적 결과 확장

1. **추정량 정의**

$$E[Y\,|T=1] - E[Y\,|\,T=0]$$

2. **무작위 배정의 이상적 상황**
   - T가 완전 무작위 → T=1 그룹과 T=0 그룹이 처치 외에는 동일
   - $E[Y\,|T=1] - E[Y\,|\,T=0]$는 **ATE**(평균처치효과)를 **일관추정**

3. **현실: 선택적 처치 할당 → 편향 발생**
   - 고객이 스스로 'prime card'를 선택(T=1)
   - 선택 자체에 차별적 특성(소비성향 등)이 개입

4. **편향 분해**

$$E[Y|\,T=1] - E[Y|\,T=0] = \underbrace{\boxed{E[Y_1 - Y_0\,|\,T=1]}}_{\text{ATT}} + \underbrace{\boxed{E[Y_0|\,T=1] - E[Y_0|\,T=0]}}_{\text{Bias}}$$

5. **Upward Bias 예시**
   - $E[Y_0|\,T=1] > E[Y_0|\,T=0]$
   - → 단순차이는 **ATT**보다 크게 나타남
   - (prime card 선택 고객이 원래 소비가 높았기 때문)

11.2 잠재적 결과 확장

Causal-Lab

Problem

1. ITTE는 ATE에 대한 편향 추정값

2. ATE 식별할 수 없음

-> **Solution : 추가적인 가정 필요**

11.3 도구변수 식별 가정

1. **독립성**
   - Z와 $T((T_z \perp Z \mid X)$ 그리고 Z와 $Y((Y(Z,T_z) \perp Z \mid X)$ 사이에 측정되지 않은 교란요인은 없음
2. **배제 제약**
   - $Y_{z,t} = Y_t$
   - 처치 T를 통하지 않고 Z에서 Y로 가는 경로가 없음
   - 3. 도구변수가 처치를 통해서만 결과에 영향을 미침
3. **연관성**
   - $E[T_1 - T_0] \neq 0$
   - Z에서 T로 가는 화살표가 존재
   - 도구변수가 처치 변수에 영향을 미쳐야 함
4. **단조성**
   - $T_{i1} \geq T_{i0}$
   - 도구변수가 처치변수를 한 방향으로만 영향을 줌

11.3 도구변수 식별 가정

$$E[Y|Z=1] - E[Y|Z=0] = E\left[Y_{1,1}T_1 + Y_{1,0}(1-T_1)\middle|Z=1\right] - E\left[Y_{0,1}T_0 + Y_{0,0}(1-T_0)\middle|Z=0\right]$$

$\downarrow$ 배제 제약으로 첨자 제거

$$E[Y_1 T_1 + Y_0 (1 - T_1) \,|\, Z = 1] - E[Y_1 T_0 + Y_0 (1 - T_0) \,|\, Z = 0]$$

$\downarrow$ 독립성 가정 -> 두 기댓값 묶기

$$E[Y_1 T_1 + Y_0(1-T_1) - Y_1 T_0 - Y_0(1-T_0)] = E[(Y_1 - Y_0)(T_1 - T_0)]$$

$\downarrow$ 단조성 가정 사용 , $T_1 > T_0$인 경우(순응자)
, $T_1 = T_0$ 인 경우로 확장 가능

$$E[(Y_1 - Y_0)(T_1 - T_0)|T_1 > T_0] * P(T_1 > T_0) + E[(Y_1 - Y_0)(T_1 - T_0)|T_1 = T_0] * P(T_1 = T_0)$$

$\downarrow$ $T_1 = T_0$ 인 경우로 $T_1 - T_0 = 0$

$$E[Y|Z=1] - E[Y|Z=0] = E[Y_1 - Y_0|T\_1 > T_0] * \boxed{P(T_1 > T_0)} = E[T_1 - T_0]$$ = 순응률

Causal-Lab

11.3 도구변수 식별 가정

- 국지적 평균 처치 효과 (LATE) →순응자들에 대한 평균 처치효과

$$E[Y_1 - Y_0 | T_1 > T_0] = \frac{E[Y|Z=1] - E[Y|Z=0]}{E[T|Z=1] - E[T|Z=0]}$$

- 도구 변수가 결과에 미치는 영향을 도구변수가 처치에 미치는 영향인 순응률로 조정 → 순응자들에 대한 평균 처치효과를 식별할 수 있음
- 도구변수를 사용하여 불응에서의 효과 식별 가능
- ATE는 식별할 수 없지만 우리가 궁금한 것은 선택한 사람에 대한 효과 → LATE만으로 충분

11.4,5 도구변수 분석 1,2단계

1. **도구변수 분석의 첫번째 단계 = 1단계 회귀**
   - 처치변수를 도구변수에 대해 회귀
   - 연관성 가정 확인

2. **2단계** (축약형)

- 결과를 도구변수에 회귀하여 처치 의도 효과 추정
- 1,2단계 진행 후 전자의 매개변수 추정값을 후자의 매개변수 추정값으로 나누어 LATE에 대한 추정값 얻을 수 있음
- ITTE의 두 배 이상
   - 순응률이 50%보다 낮기때문
   - 순응자들이 평균 효과보다 높은 값을 가지므로 LATE는 ATE보다 큼
   - 점추정값의 신뢰구간을 활용하지 않으면, 이 값이 맞는지 알기 어려움
   - 부트스트랩을 이용해 확인 할 수도 있지만 도구변수 추정값의 표준 오차를 계산하는 실제 공식을 살피는 것이 권장됨

11.6 2단계 최소제곱법

LATE를 추정하는 다른 방법

- 처치의 원인
  - 랜덤 요소인 랜덤화된 도구변수 Z
  - 교란편향이 발생하는 U 변수

1. 처치 변수를 도구 변수에 대해 회귀 → 예측값 $\hat{T}$ 얻음
   - 예측값인 $\hat{T}$: 편향되지 않은 처치 변수
   - 샘플링 오류 발생 (데이터가 무한 하지 않아 처치의 적합된 값인 $\hat{T}$ 는 Z와 U의 함수가 되므로 모든 편향이 사라지지는 않음)
2. 결과를 해당 예측값 $\hat{T}$ 에 회귀 → 이전과 같은 도구 변수 추정값을 얻음
   - 도구변수 추정량은 일치성은 가지지만 편향은 존재함
   - 더 많은 데이터를 수집할수록 $\hat{T}$ 는 점점 더 U의 영향을 적게 받게 됨 $plim_{n\to\infty} \beta_{IV} = \beta$]
   - 일치 추정량 됨

- 유용한 이유
  - 표준 오차 적절하게 계산 가능
  - 회귀 모델에서 변수를 추가할 때 만큼이나 쉽게 더 많은 도구 변수와 공변량 추가 가능

11.7 표준오차(유용한 이유 1)

축약형 단계 예측의 잔차

$$\widehat{e_{IV}} = Y - \widehat{\beta_{IV}}T$$

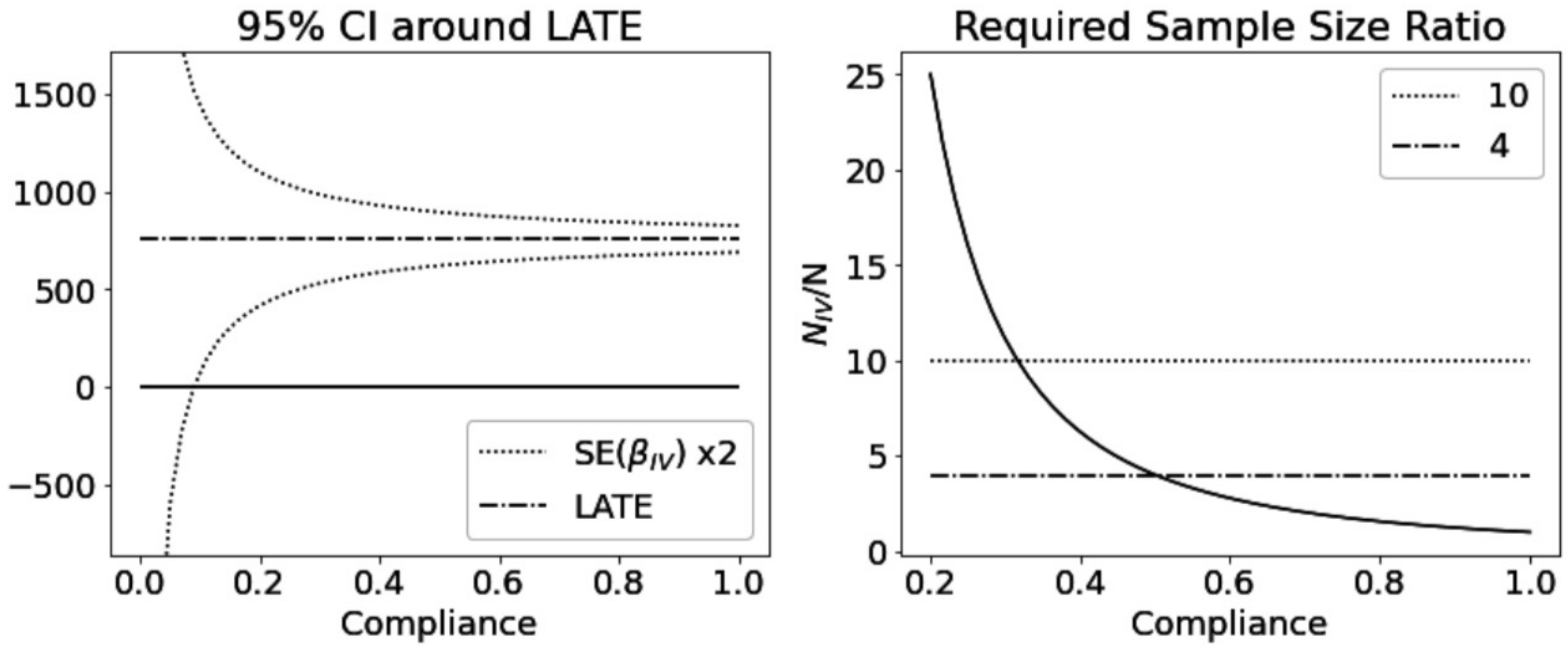
- 2단계에서 얻을 수 있는 잔차는 $Y - \widehat{\beta_{IV}}T$
- 즉 원하는 잔차는 예측된 처치가 아닌 기존의 처치 사용
- 도구변수 추정값에 대한 표준오차 계산

$$SE(\widehat{\beta_{IV}}) = \frac{\sigma(\widehat{e_{IV}})}{\widehat{\beta_{z,1st}}\sigma(Z)\sqrt{n}}$$

- $\sigma(Z) \leq 0.5$
  - 오차는 무작위 배정하여 테스트이 검정력을 극대화 할 수 있음
- 순응률 $\widehat{\beta_{z,1st}}$
  - 불응인 경우 표준 오차 증가함

11.7 표준오차(유용한 이유 1)

1. 다양한 예상 순응률을 가정하여 LATE 매개변수 추정값에 대한 신뢰구간 크기 비교
2. 여러 순응률을 고려할 때 불응이 존재하는 테스트에 얼마나 많은 표본이 더 필요한 지 보여줌



11.8 통제변수와 도구변수 추가

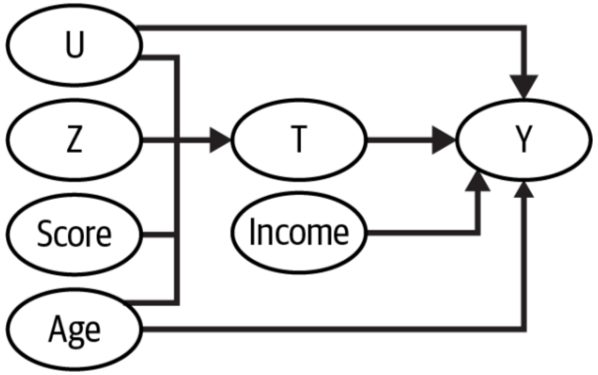
```
In [11]: Z = df["prime_eligible"]
         T = df["prime_card"]
         n = len(df)

         # not the same as iv_regr.resid!
         e_iv = df["pv"] - iv_regr.predict(df)
         compliance = np.cov(T, Z)[0, 1]/Z.var()

         se = np.std(e_iv)/(compliance*np.std(Z)*np.sqrt(n))

         print("SE IV:", se)
         print("95% CI:", [late - 2*se, late + 2*se])

Out[11]: SE IV: 80.52861026141942
         95% CI: [596.6401590115549, 918.7546000572327]
```



- 도구 변수의 표준오차가 크면 신뢰구간이 넓어짐
- 도구변수 표준오차를 낮출 수 있는 방법
  - 추가 공변량 포함하기
    - 모델이 결과(Outcome) 또는 처치(Treatment)에 영향을 미치는 다른 요인들을 더 잘 설명할 수 있게 되어, 순수한 처치 효과를 분리하는 데 도움
    - 표준 오차가 줄어들어 추정된 효과에 대한 신뢰도가 높아짐
    - ex) 신용 점수는 순응의 원인이지만 결과의 원인은 아님

→ 처음 세가지 도구변수 가정을 만족하므로 단조성만 가정하면 추가 도구변수로 사용가능

11.8 통제변수와 도구변수 추가

주의할 점

- 도구변수인 신용점수는 처리를 예측하는 1단계에선 중요하지만(도구변수로 취급) 결과를 직접 예측하는 2단계에 조건부로 두고 포함시키면 불필요한 잡음을 추가하는 것 → 분산 커짐
    - 처치에는 영향을 주지만 결과에는 영향을 주지않는 변수를 통제 변수로 주면 추정값의 분산이 커짐
- 배제제약을 만족하는 도구변수를 찾기 어려움
    - 도구 변수를 사용하려면 '도구 변수가 Outcome에 Treatment를 제외하고는 직접적인 영향을 미치지 않는다'는 배제 제약을 만족
    - 도구변수 배정 메커니즘을 알기 어렵기 때문
    - 공변량이 순응과 결과 모두에 영향을 주기때문
        - **2단계에서 결과를 잘 예측할 통제변수를 포함 → 도구변수 추정값의 분산 줄일 수 있음**

11.8 통제변수와 도구변수 추가

Causal-Lab

직접 구현 시

$$SE(\widehat{\beta_{IV}}) \approx \frac{\sigma(\hat{e}_{IV})}{\sigma(\tilde{T})\sqrt{nR^2_{1st}}}$$

💡 **표본 크기를 늘리는 방법외에 표준오차를 줄이는 방법**

1. 1단계의 R square 증가시키기

   → 순응을 잘 예측하는 강력한 도구변수를 찾기

   → 결과에 영향을 미치지 않으면서 배제 제약을 만족해야 함

2. T에 대한 예측력이 높은 변수를 제거하여 $\sigma(\hat{T})$ 증가 시키기

3. 결과의 예측력이 높은 변수를 찾아서 2단계 잔차 줄이기

11.9 불연속 설계

개념

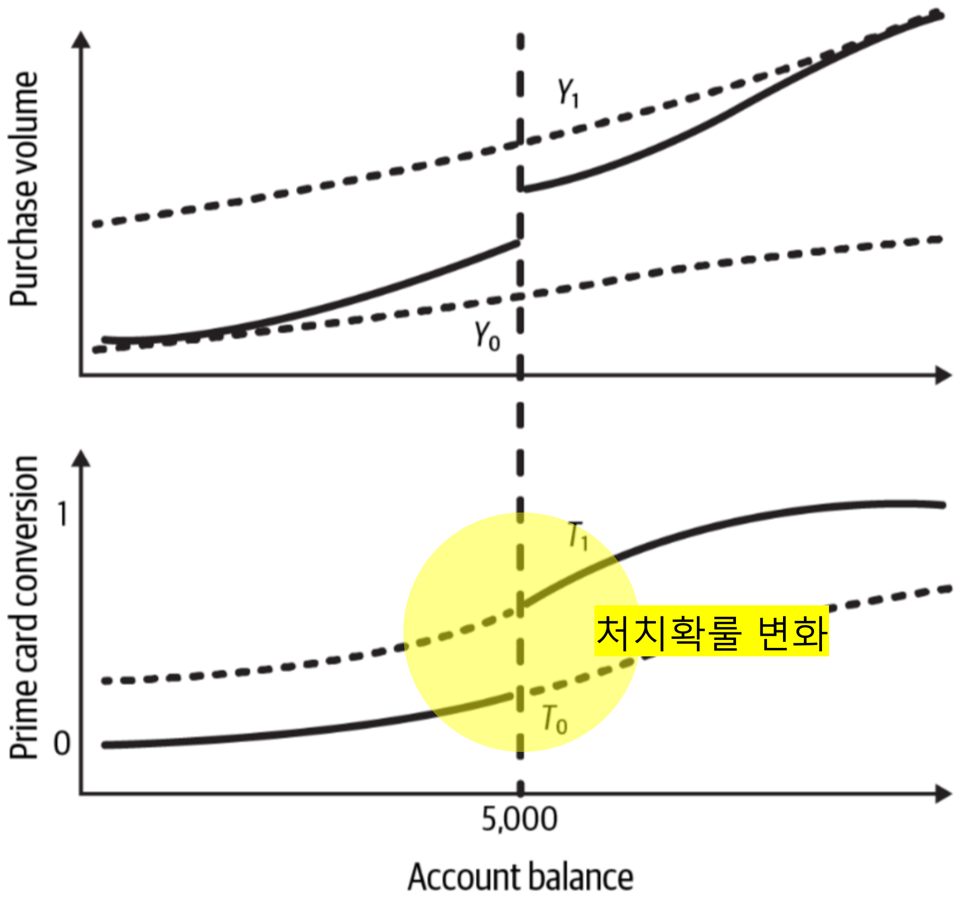
- 무작위 배정이 불가능할 때 사용할 수 있는 방법
- 처치 배정에 인위적인 불연속성이 발생하는 지점을 활용해 처치효과 식별
  - 가정
    - 소득이 $50미만인 가구만 혜택을 받을 수 있음
    - 임계값 바로 위와 바로 아래에 있는 가구는 유사
  - 임계값 바로 위와 바로 아래에 있는 가구 비교 → 프로그램 효과 측정가능

한계

- 현업에서 유용하지만 활용도가 상대적으로 제한적
  - 기업은 A/B 테스트나 무작위 실험을 쉽게 수행가능
    - 그러나 이런 실험을 진행하기에 시간이 많이 소요되거나 대상자의 참여율이 낮아 불응 문제가 발생한다면?
      →이미 불연속 설계에 충족하는 데이터가 있는 경우 RDD가 유용
    - 은행의 카드 제공방식(계좌 잔고 $5000 이하인 고객에게는 신용카드 제공 시 수수료 부과)
    - 임계값 이상인 고객은 카드 선택할 가능성이 더 높아지고 임계값 이하인 고객은 가능성이 더 낮아짐

11.9 불연속 설계

회귀 불연속 설계와 도구변수의 관계



이러한 처치확률의 변화가 결과에 미치는 영향

- 임계값을 초과하더라도 처치확률이 1보다 작으면 관측한 결과가 실제 잠재적 결과 Y_1보다 작아짐
- 임계값 아래에서 관측한 결과는 실제 잠재적 결과 Y_0보다 높음
- 임계값에서의 처치효과가 실제 보다 작게 보이며 도구 변수를 사용해 이를 보정해야함

계좌 잔고에 따른 반사실 처치

- 계좌잔고 = 도구변수 → 처치(프라임카드)를 받을 확률 높임
- 임계값을 넘으면 P(T=1) 급증

11.9.1 불연속 설계 가정

- 도구변수 가정 외에도 잠재적 결과 및 잠재적 처치 함수의 평활도에 대한 추가 가정 필요

$$\lim_{r \to c^-} E[Y_t|R=r] = \lim_{r \to c^+} E[Y_t|R=r]$$
$$\lim_{r \to c^-} E[T_z|R=r] = \lim_{r \to c^+} E[T_z|R=r]$$

- **불연속 지점인 R=c에서 잠재적 결과 Y_t와 잠재적 처치 T_z의 좌극한과 우극한은 동일**

  → 회귀 불연속 설계에 대한 LATE 추정량 유도 가능

$$LATE = \frac{\lim_{r \to c^+} E[Y|R=r] - \lim_{r \to c^-} E[Y|R=r]}{\lim_{r \to c^+} E[T|R=r] - \lim_{r \to c^-} E[T|R=r]}$$
$$= E[Y_1 - Y_0 | T_1 > T_0, R=c]$$

- 국소적
  - 임곗값 R=c에서만 처치효과를 줌 → 불연속 설계의 국소성
  - 순응자의 처치효과만 추정

11.9.2 처치 의도 효과

개념

- 처치를 받도록 '의도'되거나 '할당'된 것의 효과. 즉, 처치 계획대로 진행했을 때 발생하는 결과
- 도구변수가 변할 때 결과가 어떻게 바뀌는지 측정하여 알 수 있음
- 최종 도구변수 추정값의 분자

예시

- 배정 변수인 잔고를 중심으로 조정 → 임계값 0으로 옮기기
    - 회귀분석의 매개 변수 해석을 더 쉽게 해줌

잔고

	balance	prime_card	pv	tau	categ
0	12100.0	1	356.472	300.0	always-takers
1	4400.0	1	268.172	300.0	always-takers
2	4600.0	1	668.896	300.0	always-takers
3	3500.0	1	428.094	300.0	always-takers
4	12700.0	1	1619.793	700.0	complier

임계값 위에 있는지 여부를 나타내는 더미 변수와 상호작용하는 중심이 조정된 배정 변수 R을 사용

→ 결과 변수에 대한 회귀분석 진행

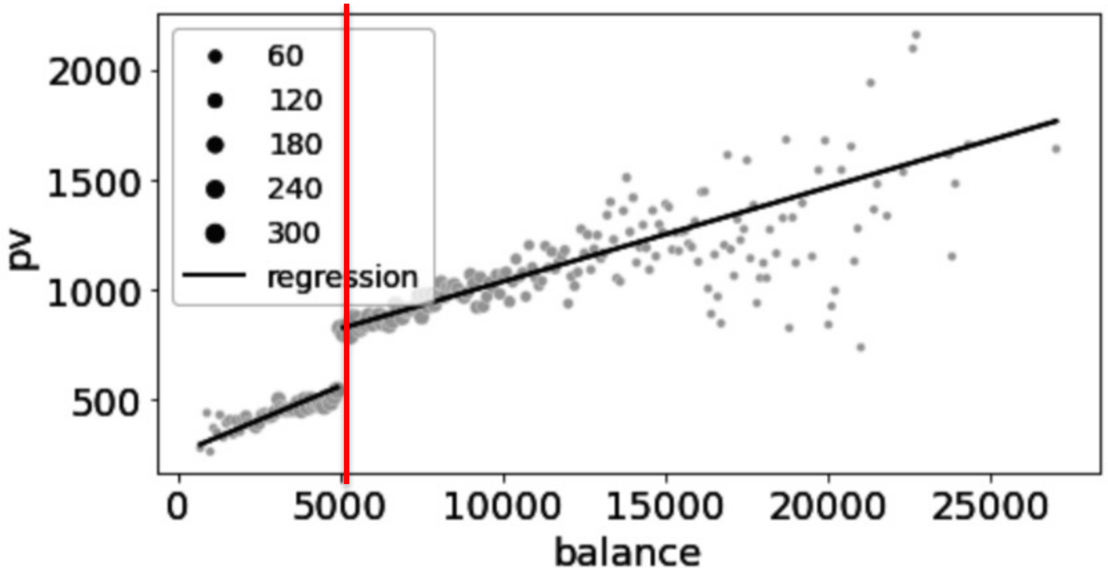
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 r_i + \beta_2 \mathbb{I}(r_i > c) + \beta_3 \mathbb{I}(r_i > c) r_i$$

- 임계값을 초과하는 것과 관련된 매개 변수 추정값인 $\widehat{\beta_2}$ = 처치 의도 효과

11.9.2 처치 의도 효과

- 임곗값 위아래 두 개의 회귀선 추정
- 순응률이 100%라는 이상적인 상황이라면, 즉 기준점 위에 있는 모든 사람이 실제로 처리를 받고, 기준점 아래에 있는 모든 사람이 처리를 받지 않는 상황을 가정

→ ITTE(처리가 할당된 것에 대한 효과)=ATE(실제로 처리 받은 것에 대한 평균적인 효과)



11.9.3 도구변수 추정값

순응률이 100%라는 이상적인 상황이 아니라면?

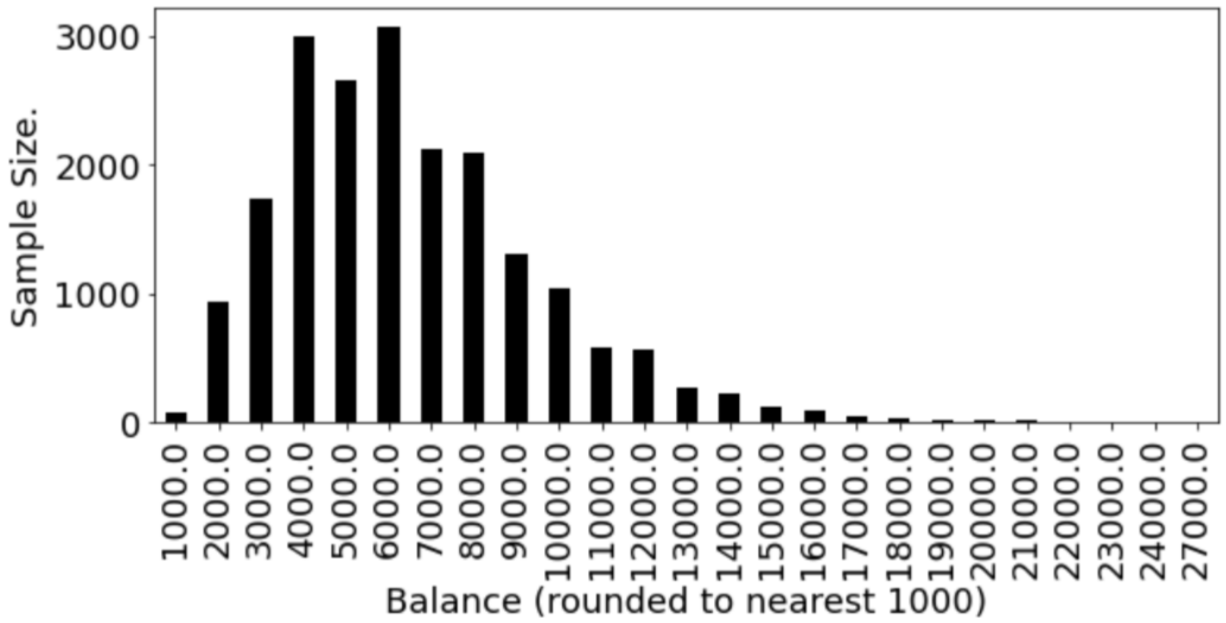
- ITTE 그 자체로는 실제 처치 효과 제대로 반영하지 못함
- ITTE를 순응률로 나눠야함 = **LATE (Local ATE for Compliers)**
  - 임곗값을 넘을 때 처치 확률이 얼마나 변하는지 의미
- 이 값을 추정하려면 이전 과정을 반복하되 결과변수인 pv를 처치변수인 prime_card로 대체
  - 순응률 추정 → 1단계 과정
- 도구변수에 의해 처치 상태가 변경된 순응자의 평균 처치 효과인 LATE 추정 가능 → 2단계 과정
- 실제 LATE와 매우 근사한 추정값을 얻을 수 있음
  - 개별 처치효과인 tau열과 순응 범주가 포함되어 있어 실제 ATE와 비교할 수 있음

11.9.4 밀도 불연속 테스트

잠재적 문제

1. 뭉침 또는 집군 문제
   - 실험 대상들이 스스로 실험군으로 포함시켜 임곗값에서 밀도 증가하는(뭉쳐있는) 현상
     - 대상이 배정변수를 조작할 수있으면 스스로 실험군에 포함시킬 수도 있음

→ 평활도 가정 위배 (임곗값 바로 위와 바로 아래 사람들을 더는 비교할 수 없음)



11장 요약

1. 불응 문제

- 처치 할당을 받았어도 개인이 따르지 않거나, 할당받지 않았어도 선택 가능
- 무작위 할당에도 **개인 선택**으로 인한 **편향(Bias)** 발생

2. 도구변수(IV) 접근법

목적: 불응 으로 인한 편향 제거 → Complier 집단의 평균처치효과(LATE) 추정

식별 가정 : **독립성,단조성 ,배제제약(Exclusion),연관성**

3. 추정 절차: Two-Stage Least Squares (2SLS)

- **1단계 :** 순응률(ΔD)
- **2단계:** LATE 추정

4. 불연속 설계: 불연속성을 도구변수로 취급

발표들어주셔서 감사합니다.