CÁLCULO VECTORIAL 2010-2011
HOJA 3

---

1. Calcular los siguientes límites, si es que existen:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(x+y)-1}{x+y}$

Sol: $a)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2} = \frac{0}{2} = 0.$

$b)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(x+y)-1}{x+y} = \lim_{z\to0} \frac{cos(z)-1}{z} = \lim_{z\to0} \frac{-sen(z)}{1} = -sen(0) = 0.$

2. Calcular el siguiente límite si es que existe:

   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$

Sol: Veamos que no existe. Primero nos acercamos al punto $(0,0)$ a través de la recta $(x,y) = (0,t)$

$$\lim_{t\to0} \frac{cos(0)-1+\frac{0^2}{2}}{0^4+t^4} = \lim_{t\to0} \frac{0}{t^4} = 0.$$

Si nos acercamos al punto $(0,0)$ a través de la recta $(x,y) = (t,0)$ tenemos que

$$\lim_{t\to0} \frac{cos(t)-1+\frac{t^2}{2}}{t^4+0^4} = \lim_{t\to0} \frac{-sen(t)+t}{4t^3} = \lim_{t\to0} \frac{-cos(t)+1}{12t^2} = \lim_{t\to0} \frac{sen(t)}{24t} = \lim_{t\to0} \frac{cos(t)}{24} = \frac{1}{24}.$$

Como ambos límites son distintos, el límite que nos piden calcular no existe.

3. Estudiar si son continuas las siguientes funciones:

$$a)\ \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$b)\ \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

Estudiar si pueden hacerse continuas definiéndolas de manera adecuada en el punto $(0,0)$.

Sol: $a)$ La función es continua ya que tanto $sen(x^2+y^2)$ como x^2+y^2 son continuas (por ser producto y composición de funciones continuas) y la función en el denominador x^2+y^2 es siempre distinta de cero en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Para ver si es posible definir la función adecuadamente en el punto $(0,0)$ de forma que siga siendo continua, debemos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{z\to0} \frac{sen(z)}{z} = \lim_{z\to0} \frac{cos(z)}{1} = cos(0) = 1$$

Por tanto, si le asignamos al $(0,0)$ el valor 1, la función seguiría siendo continua.

$b)$ Por un argumento similar al apartado anterior, la función es continua. Para ver si es posible definir la función adecuadamente en el punto $(0,0)$ de forma que la función siga siendo continua, debemos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Sin embargo en este caso este límite no existe. Efectivamente, si nos acercamos al $(0,0)$ través de la recta $(x,y)=(0,t)$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2}=-1.$$

Si nos acercamos al $(0,0)$ través de la recta $(x,y)=(t,0)$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2}=1.$$

Como ambos límites son distintos, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe. En particular, no es posible definir la función adecuadamente en el punto $(0,0)$ de forma que siga siendo continua.

4. Sea $f(x,y)=0$ si $y\le 0$ o si $y\ge x^2$ y sea $f(x,y)=1$ si $0<y<x^2$. Demostrar que $f(x,y)\to 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿ Es f continua en el origen?

5. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \text{ si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Sol: Primero estudiamos la continuidad. La función es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ya que tanto xy como $\sqrt{x^2+y^2}$ son continuas (por ser producto y composición de funciones continuas) y la función en el denominador $\sqrt{x^2+y^2}$ es siempre distinta de cero. Así pues sólo queda comprobar si es continua en $(0,0)$. Es decir, tenemos que comprobar $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Este límite lo calculamos usando las técnicas que hemos visto en clase:

$$0\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}}=$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{|x|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0.$$

Ya que hemos probado que el límite en valor absoluto existe y es 0, deducimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Por tanto la función es continua.

Veamos ahora si la función es diferenciable. Lo primero que debemos hacer es ver si las derivadas parciales existen. Con un cálculo sencillo llegamos a que para todo $(x,y)\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}.$$

Calculemos ahora $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ usando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{x^2+0^2}} - 0}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}} - 0}{y} = 0.$$

Hemos demostrado que las derivadas parciales existen y son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Las parciales son claramente continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y por tanto la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para que f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, basta probar que las parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Como ya hemos dicho que las parciales son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, basta comprobar que son continuas en $(0,0)$. Desafortunadamente, esto no es cierto. El límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no existe. Por ejemplo, si nos acercamos a $(0,0)$ a través de la recta $(x,y) = (0,t)$ nos queda

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(\sqrt{0^2+t^2})^3} = \lim_{t\to 0} (\frac{t}{|t|})^3$$

y este límite no existe ya que si nos acercamos a 0 con t positivo nos queda 1, pero si nos acercamos a 0 con t negativo nos queda -1. Deducimos por tanto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no existe y por tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

CUIDADO: Esto no quiere decir que la función f no sea diferenciable en $(0,0)$. Efectivamente, si nos hubiese quedado que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas entonces sí podríamos asegurar que f es difernecíable. Pero el hecho de que no lo sean no quiere decir que f no sea diferenciable.

Como las técnicas "fáciles" han fallado, no nos queda más remedio que recurrir a la definición. Recordar que f es diferenciable en el $(0,0)$ si (por definición) tenemos que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

es exactamente 0. Sin embargo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe (esto os lo dejo como ejercicio). Por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

6. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

probar que existen $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. Probar que la función no es continua en $(0,0)$ y por tanto tampoco es diferenciable en dicho punto.

7. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar cuales de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) f tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$,

b) f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ pero no es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$,

c) f no es continua en todo $\mathbb{R}^2$,

d) f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, y sus derivadas parciales no son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.