LÓGICA MATEMÁTICA

Tema 1. Sintaxis de primer orden

1.- Sea $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$ el lenguaje de la aritmética. Expresa en este lenguaje lo siguiente: i) x es par; ii) x divide a y; iii) x es un número primo; iv) para todo x e y con $y \neq 0$, existen unos únicos cociente y resto, u y v respectivamente, tales que $x = uy + v$; v) todo número es el cuadrado de otro; v) x es un cuadrado.

2.- Sea $L = \{\cdot, 1\}$ el lenguaje de teoría de grupos. Expresa en este lenguaje lo siguiente: i) el elemento neutro es único; ii) existen dos elementos neutros distintos; iii) existe un elemento de orden dos; iv) si x es un elemento de orden 2, su inverso también tiene orden 2; v) Si x es un elemento de orden 3 entonces existe un conjugado de x que tiene orden 2; vi) La operación "$\cdot$" no es conmutativa.

3.- Sea $L = \{<\}$ el lenguaje de conjuntos ordenados. Expresa en este lenguaje lo siguiente: i) el mínimo (con respecto a $<$) de existir, es único; ii) existen el mínimo y el máximo (con respecto a $<$).

4.- Sea $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ el lenguaje de cuerpos. Expresa en este lenguaje lo siguiente: i) x es raíz de un polinomio de segundo grado; ii) la característica es 3; iii) la característica es p (donde p es un número primo fijo).

Las fórmulas Ari, Gj, Ck *que se mencionan a continuación son de la* hoja de ejemplos de teorías.

5.- i) Halla todos los términos que aparecen en las fórmulas abreviadas Ar2, Ar5, G3 y C5; ii) escríbelos sin abreviaturas; iii) escribe las fórmulas abreviadas Ar7, G3 y C7 de forma no abreviada; iv) halla todas las fórmulas atómicas de Ar7, G3 y C7

6.- Halla el arbol de descomposición (abreviado) de cada una de las siguientes fórmulas abreviadas: Ar1, Ar3, G3 y C10. Repite el proceso pero sin abreviaturas.

7.- Sea L un lenguaje. Sean F, F', F'', G y G' fórmulas de L. Comprueba que las siguientes fórmulas abreviadas son tautologías:

i) $F \to (F \vee G)$;
ii) $(F \wedge G) \to F$;
iii) $((F \wedge (F' \wedge F'')) \to G) \to (F \to (F' \to (F'' \to G)))$;
iv) $(F \to (F' \to (F'' \to G))) \to ((F \wedge (F' \wedge F'')) \to G)$;
v) $(F \to G) \to ((G \to G') \to (F \to G'))$;
vi) $(F \to \neg G) \to (G \to \neg F)$;
vii) $(F \to F') \to ((G \to G') \to ((F \wedge G) \to (F' \wedge G')))$.

8.- Sea L un lenguaje. Sean F y G fórmulas de L y x una variable. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas abreviadas son tautologías?:

i) $\forall x\, F \to F$; ii) $(F \wedge G) \to \forall x F$; iii) $(\forall x\, F \to F) \to ((\neg \forall x\, F \to G) \to (\neg F \to G))$; iv) $\forall x (F \to F)$;
v) $(\forall x\, F \to F) \to (\neg(\forall x\, F \to G) \to \neg(F \to G))$; vi) $(\forall x\, F \to F) \to (\forall x (F \wedge G) \to (F \wedge G))$.

9.- ¿Qué variables aparecen libres y cuáles ligadas en cada una de las fórmulas de los árboles de descomposición del ejercicio 6?.

10.- Halla una clausura universal de cada una de las fórmulas halladas ejercicio 6.

11.- Para cada uno de los lenguajes $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$, $L = \{\cdot, 1\}$ y $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$, escribe una fórmula el la que que aparezca una variable que tenga una aparición libre y otra ligada (en la misma fórmula). Después cambia de nombre a las variables ligadas de tal forma que una misma variable no aparezca libre y ligada en una fórmula

12.- Realiza las sustituciones que se indican (siempre que sea posible).

En $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$:

i) $(Sx \neq 0)_x[S0]$; ii) $(Sx \neq 0)_y[S0]$; iii) $(Sx = Sy \to x = y)_{x,y}[SS0, S0]$; iv) $(x \cdot Sy = x \cdot y + x)_x[S0 + SS0]$; v) $(x < y \vee (x = y \vee y < x))_{x,y}[S0 + y, z]$; vi) $((x < y \vee (x = y \vee y < x))_x[S0 + y])_y[z]$ (comparad las dos últimas sustituciónes).

En $L = \{\cdot, 1\}$:

i) $(\exists y(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1))_x[y \cdot 1]$; ii) $(\exists y(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1))_x[z]$; iii) $(\exists y(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1))_x[x]$.

En $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:

i) $(x \neq 0 \to \exists y\, x \cdot y = 1)_y[x + 1]$; ii) $(0 \neq 1)_x[0]$.

13.- En las fórmulas del ejercicio anterior, cambia de nombre a las variables ligadas de tal forma que se puedan realizar todas las sustituciones.