CÁLCULO VECTORIAL 2010-2011
HOJA 7

---

1. Sea $R = [0,1] \times [0,1]$. Calcular $\int_R sen(x+y)dxdy$.

Sol: $\int_R sen(x+y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 sen(x+y)dx)dy = \int_0^1 [-cos(x+y)]_0^1 dy = \int_0^1 (cos(y) - cos(1+y))dy = [sen(y) - sen(1+y)]_0^1 = (sen(1) - sen(2)) - (sen(0) - sen(1))$.

2. Sea $R = [-1,1] \times [0,1]$. Calcular $\int_R x^2 e^{xy} dxdy$.
(Pista: Integración por partes.)

Sol: $\int_R x^2 e^{xy} dxdy = \int_{-1}^1 (\int_0^1 x^2 e^{xy} dy)dx = \int_{-1}^1 [xe^{xy}]_0^1 dx = \int_{-1}^1 (xe^x - x)dx = \int_{-1}^1 xe^x dx - \int_{-1}^1 xdx = \int_{-1}^1 xe^x dx - [\frac{x^2}{2}]_{-1}^1 = \int_{-1}^1 xe^x dx = [u = x, v' = e^x; u' = 1, v = e^x] = [xe^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = (e + e^{-1}) - [e^x]_{-1}^1 = (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}$.

3. Sea $R = [-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Calcular $\int_R (xsen(y) - ye^x)dxdy$.

Sol: $\int_R (xsen(y) - ye^x)dxdy = \int_{-1}^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (xsen(y) - ye^x)dy)dx = \int_{-1}^1 [-xcos(y) - \frac{y^2}{2} e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_{-1}^1 (-\frac{\pi^2}{8} e^x + x)dx = [-\frac{\pi^2}{8} e^x + \frac{x^2}{2}]_{-1}^1 = -\frac{\pi^2}{8} e + \frac{\pi^2}{8} e^{-1}$.

4. Sea $R = [0,1] \times [0,1]$. Calcular $\int_R ye^{xy} dxdy$.

Sol: $\int_R ye^{xy} dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 ye^{xy} dx)dy = \int_0^1 [e^{xy}]_0^1 dy = \int_0^1 (e^y - 1)dy = [e^y - y]_0^1 = (e-1) - (1-0) = e - 2$.

5. Sea $R = [0,\pi] \times [0,\pi]$. Calcular $\int_R sen^2(3x - 2y)dxdy$.
(Pista: Recordar las fórmulas $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$ y $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.)

Sol: De las fórmulas es fácil deducir que $sen^2(\alpha) = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2}$. Por tanto

$$\int_R sen^2(3x-2y)dxdy = \int_R \frac{1-cos(6x-4y)}{2} dxdy = \int_0^\pi (\int_0^\pi \frac{1-cos(6x-4y)}{2} dx)dy =$$
$$= \int_0^\pi [\frac{x - \frac{1}{6} sen(6x-4y)}{2}]_0^\pi dy = \int_0^\pi [\frac{x - \frac{1}{6} sen(6x-4y)}{2}]_0^\pi dy = \int_0^\pi (\frac{\pi - \frac{1}{6} sen(6\pi - 4y)}{2} + \frac{sen(-4y)}{12})dy =$$
$$= [\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{48} cos(6\pi - 4y) + \frac{cos(-4y)}{48}]_0^\pi = [\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{48}] - [0 - \frac{1}{48} + \frac{1}{48}] = \frac{\pi^2}{2}.$$

6. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq e^x\}$. Dibujar D y calcular $\int_D (x+y)dxdy$.

Sol: $\int_D (x+y)dxdy = \int_0^1 (\int_1^{e^x} (x+y)dy)dx = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]_1^{e^x} dx =$
$= \int_0^1 (xe^x + \frac{e^{2x}}{2} - x - \frac{1}{2})dx = \int_0^1 xe^x dx + [\frac{e^{2x}}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x]_0^1 = \int_0^1 xe^x dx + (\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}) =$
$= \{$integracion por partes $[u = x, v' = e^x; u' = 1, v = e^x]\} =$
$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + (\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}) = e - [e^x]_0^1 + (\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

7. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq x \leq cos(y)\}$. Dibujar D y calcular $\int_D xsen(y)dxdy$.

Sol: $\int_D xsen(y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{cos(y)} xsen(y)dx)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{x^2}{2} sen(y)]_0^{cos(y)} dy =$
$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(y)^2 sen(y)dy = \frac{1}{2}[-\frac{1}{3} cos(y)^3]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{6}$.

8. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dibujar D y calcular $\int_D xdxdy$.

Sol: $\int_D x dxdy = \int_{-1}^{1}(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy)dx = \int_{-1}^{1}[xy]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx =$
$= [-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]_{-1}^{1} = 0$

9. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq log(x)\}$. Dibujar D y calcular $\int_D xe^y dxdy$.

Sol: $\int_D xe^y dxdy = \int_1^2(\int_0^{log(x)} xe^y dy)dx = \int_1^2[xe^y]_0^{log(x)}dx = \int_1^2(x^2-x)dx =$
$= [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_1^2 = (\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{5}{6}$.

10. Expresar la region D del ejercicio anterior como una región de tipo 2 y volver a calcular la integral.

Sol: Podemos escribir $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq log(2), e^y \leq x \leq 2\}$. Entonces
$\int_D xe^y dxdy = \int_0^{log(2)}(\int_{e^y}^2 xe^y dx)dy = \int_0^{log(2)}[\frac{x^2}{2}e^y]_{e^y}^2 dy = \int_0^{log(2)}(2e^y - \frac{e^{3y}}{2})dy =$
$= [2e^y - \frac{e^{3y}}{6}]_0^{log(2)} = (4 - \frac{8}{6}) - (2 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$.

11. Sea D la región acotada por las partes positivas de x e y y la recta $3x+4y = 10$. Calcular $\int_D(x^2+y^2)dxdy$.

Sol: Después de hacer un dibujo, nos convencemos de que

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{10}{3}, 0 \leq y \leq \frac{10}{4} - \frac{3}{4}x\}.$$

Por tanto,
$\int_D(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{10}{3}}(\int_0^{\frac{10}{4}-\frac{3}{4}x}(x^2+y^2)dy)dx = \int_0^{\frac{10}{3}}[x^2 + \frac{y^3}{3}]_0^{\frac{10}{4}-\frac{3}{4}x}dx =$
$= \int_0^{\frac{10}{3}}(x^2 + \frac{1}{3}(\frac{10}{4} - \frac{3}{4}x)^3 - x^2)dx = [-\frac{1}{9}(\frac{10}{4} - \frac{3}{4}x)^4]_0^{\frac{10}{3}} = \frac{5}{18}$.

12. Sea D la región acotada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $x = 1$ y $2x+y = -1$. Calcular su área. (Indicación: recordar que $\int_D 1\ dxdy$ es el área de D).

Sol: Después de hacer un dibujo de la región, nos convencemos de que

$$D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -2x-1 \leq y \leq x^2\}.$$

Por tanto,
$\int_D 1\ dxdy = \int_{-1}^{1}(\int_{-2x-1}^{x^2} 1\ dy)dx = \int_{-1}^{1}[y]_{-2x-1}^{x^2}dx = \int_{-1}^{1}(x^2 - (-2x-1))dx =$
$= \int_{-1}^{1}(x+1)^2dx = [\frac{1}{3}(x+1)^3]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$.

13. Sea D la región acotada por las rectas $y = x$, $y = x-1$, $y = 0$ y $y = 1$. Calcular $\int_D(x+y)dxdy$ utilizando el cambio de variables $T : [0,1] \times [0,1] \to D : (u,v) \mapsto (u+v, v)$.

Sol: El jacobiano de T es
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
Por tanto la integral es $\int_D(x+y)dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]}(u+v+v)\cdot 1\ dudv =$
$= \int_0^1(\int_0^1(u+2v)dv)du = \int_0^1[uv+v^2]_0^1du = \int_0^1(u+1)du = [\frac{u^2}{2}+u]_0^1 = \frac{3}{2}$.

14. Sea D la región en el primer cuadrante que está entre los arcos de los círculos $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 9$. Calcular $\int_D log(x^2+y^2)$. (Indicación: utilizar el cambio de variables $T : [1,3] \times [0,\pi/2] \to D : (r,\theta) \mapsto (rcos(\theta), rsen(\theta))$.)

Sol: El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Por tanto la integral es $\int_D log(x^2+y^2)dxdy = \int_{[1,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} log(r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta))r\ drd\theta =$

$= \int_{[1,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} log(r^2)r\ drd\theta = \int_1^3(\int_0^{\frac{\pi}{2}} log(r^2)rd\theta)dr = \int_1^3[log(r^2)r\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}dr = \frac{\pi}{2}\int_1^3 log(r^2)rdr =$

$= \{$integracion por partes $[u = log(r^2), v' = r; u' = \frac{2r}{r^2}, v = \frac{r^2}{2}]\} =$
$= [\frac{r^2}{2}log(r^2)]_1^3 - \int_1^3 \frac{2r}{r^2}\frac{r^2}{2}dr = \frac{9}{2}log(9) - [\frac{r^2}{2}]_1^3 = \frac{9}{2}log(9) - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}.$

15. Sea D la región acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ y $x + y = 4$. Calcular $\int_D \frac{1}{x+y}dxdy$ utilizando el cambio de variables $T : [1,4] \times [0,1] \to D : (u,v) \mapsto (u - uv, uv)$.

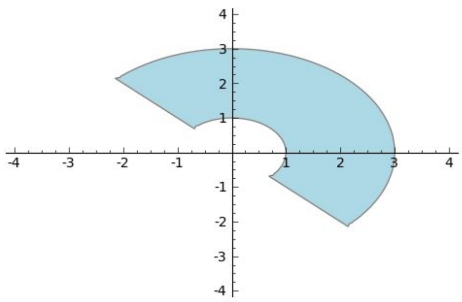
Sol: El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u$$

Por tanto la integral es $\int_D \frac{1}{x+y}dxdy = \int_{[1,4]\times[0,1]} \frac{1}{u-uv+uv}ududv =$
$= \int_{[1,4]\times[0,1]} 1\ dudv = 3.$

16. Sea D la región acotada por $1 \leq x^2+y^2 \leq 9$ y $-x \leq y$. Calcular $\int_D(x+y)dxdy$. (Indicación: utilizar un cambio de variable como en el ejercicio 14).

Sol: Primero nos hacemos un dibujo de la región D.

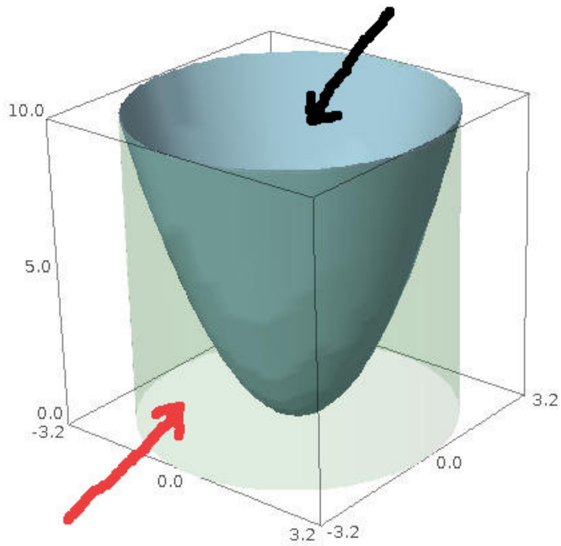


El enunciado nos sugiere que utilizemos un cambio de variables polar como el del ejercicio 14. Es decir, $T : [a,b]\times[c,d] \to D : (r,\theta) \mapsto (rcos(\theta), rsen(\theta))$. Tan sólo tenemos que averiguar quién debe ser $[a,b] \times [c,d]$. Como las coordenadas polares ya las hemos estudiado, sabemos que $[a,b] \times [c,d] = [1,3] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}]$. Por otro lado, el jacobiano de T ya lo hemos calculado en el ejercicio 14 y nos ha dado $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Por tanto,

$\int_D(x+y)dxdy = \int_{[1,3]\times[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]}(rcos(\theta) + rsen(\theta))r\ drd\theta =$
$= \int_1^3(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(r^2cos(\theta) + r^2sen(\theta))d\theta)dr = \int_1^3[r^2sen(\theta) - r^2cos(\theta)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}dr =$
$= \int_1^3 2\sqrt{2}r^2dr = [\frac{2\sqrt{2}}{3}r^3]_1^3 = 18\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

17. Hallar el volumen de la región dentro de la superficie $z = x^2 + y^2$ y entre $z = 0$ y $z = 10$.

Sol: Lo primero es hacer un dibujo.



El ejercicio nos pide el volumen del interior del paraboloide (donde apunta la flecha negra). Calculemos primero la integral de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en la región $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 10\}$, es decir, el volumen entre el paraboloide y el cilindro (donde apunta la flecha roja).

$\int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} (\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy) dx = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} [x^2 + \frac{y^3}{3}]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$
Nos damos cuenta de que va a salir difícil si lo hacemos así. Es mejor hacer esta integral cambiando a variables polares. Es decir, utilizamos el cambio $T : [0, \sqrt{10}] \times [0, 2\pi] \to D : (r, \theta) \mapsto (rcos(\theta), rsen(\theta))$. De los ejercicios anteriores sabemos que el jacobiano es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Por tanto,

$\int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_{[0,\sqrt{10}]\times[0,2\pi]} (r^2 cos^2(\theta) + r^2 sen^2(\theta)) r dr d\theta = \int_{[0,\sqrt{10}]\times[0,2\pi]} r^3 dr d\theta =$

$= \int_0^{\sqrt{10}} (\int_0^{2\pi} r^3 d\theta) dr = \int_0^{\sqrt{10}} 2\pi r^3 dr = [\frac{\pi r^4}{2}]_0^{\sqrt{10}} = 50\pi.$

Finalmente, el volumen que vamos buscando es el volumen del cilindro menos el volumen que acabamos de calcular. El volumen del cilindro es la altura por el area de la base, es decir, $10 * \pi * (\sqrt{10})^2 = 100\pi$. Por tanto el volumen que buscamos es $100\pi - 50\pi = 50\pi$. En particular, observar que acabamos de mostrar que hay el mismo volumen “dentro” que “fuera”.

18. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{1+4y}$ y $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t^2)$. Calcular $\int_\sigma f ds$.

Sol: El vector velocidad es $\sigma'(t) = (1, 2t)$. Por tanto
$\int_\sigma f ds = \int_0^1 \sqrt{1 + 4(t^2)} \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = [t + \frac{4t^3}{3}]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$

19. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ y $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos(t), sen(t))$. Calcular $\int_\sigma f ds$. Interpretar el resultado.

Sol: El vector velocidad es $\sigma'(t) = (-sen(t), cos(t))$. Por tanto

$\int_\sigma f ds = \int_0^{2\pi} (sen^2(t) + cos^2(t)) \cdot 1dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

Recordar que podemos interpretar $\int_\sigma f ds$ como el area de una valla cuya base viene dada por la curva σ y cuya altura por f. En este caso, la valla tendría como base la circunferencia unidad y altura 1 (ya que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ toma el valor 1 en dicha circunferencia). Por tanto el area en este caso ser la longitud de la base por la altura, es decir, 2π.

20. Calcular el área de una valla cuya base viene dada por la trayectoria $\sigma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos^3(t), sen^3(t))$ y su altura por la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 1 + \frac{y}{3}$.

Sol: El área de dicha valla será $\int_\sigma f ds$. El vector velocidad es $\sigma'(t) = (-3cos^2(t)sen(t), 3sen^2(t)cos(t))$. Por tanto

$\int_\sigma f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\frac{cos^3(t)}{3})(3cos(t)sen(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3cos(t)sen(t)+cos^4(t)sen(t))dt =$

$= [\frac{3}{2}sen^2(t) - \frac{1}{5}cos^5(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}.$

21. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x)$ y $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos(t), sen(t))$. Calcular $\int_\sigma F ds$.

Sol: El vector velocidad es $\sigma'(t) = (-sen(t), cos(t))$. Por tanto

$\int_\sigma F ds = \int_0^{2\pi} (-sen(t), cos(t))(-sen(t), cos(t))dt = \int_0^{2\pi} (sen^2(t)+cos^2(t))dt =$
$= \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$

22. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y)$ y $\sigma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos(\pi t), sen(\pi t))$. Calcular $\int_\sigma F ds$.

Sol: El vector velocidad es $\sigma'(t) = (-\pi sen(\pi t), \pi cos(\pi t))$. Por tanto

$\int_\sigma F ds = \int_0^2 (cos(\pi t), sen(\pi t))(-\pi sen(\pi t), \pi cos(\pi t))dt = 0.$

23. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xy, xy)$ y D el disco de centro $(0, 0)$ y radio 4. Verificar el Teorema de Green.

Sol: Sea la curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (4cos(t), 4sen(t))$. Esta curva recorre la frontera del disco en las condiciones del Teorema de Green. Por tanto, tenemos que comprobar que $\int_\sigma F ds = \int_D rot(F) ds$. Calculemos primero $\int_\sigma F ds$. Tenemos que $\sigma'(t) = (-sen(t), cos(t))$. Por tanto,

$\int_\sigma F ds = \int_0^{2\pi} (cos(t)sen(t), cos(t)sen(t))(-sen(t), cos(t))dt =$
$= \int_0^{2\pi} (-cos(t)sen^2(t) + cos^2(t)sen(t))dt = [-\frac{1}{3}sen^3(t) - \frac{1}{3}cos^3(t)]_0^{2\pi} =$
$= (-\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{3}) = 0.$

Ahora calculemos $\int_D rot(F) ds$. Tenemos que $rot(F) = y - x$ y $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Por tanto,

$\int_D rot(F) ds = \int_{-4}^4 (\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (y - x)dy)dx = \int_{-4}^4 [\frac{y^2}{2} - xy]_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx =$
$\int_{-4}^4 [(\frac{16-x^2}{2} - x\sqrt{16 - x^2}) - (\frac{16-x^2}{2} + x\sqrt{16 - x^2})]dx = \int_{-4}^4 -2x\sqrt{16 - x^2} dx =$
$= [\frac{2}{3}(16 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_{-4}^4 = 0.$

24. Sean $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto(xy,-y^2)$ y $\sigma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2:t\mapsto(2cos(t),\sqrt{2}sen(t))$. Calcular $\int_\sigma Fds$ de forma directa y utilizando el teorema de Green. (Indicación: la región que encierra la trayectoria σ viene dada por $x^2+2y^2\leq 4$.)

Sol: Primero lo calculamos de forma directa. Tenemos que

$\int_\sigma Fds=\int_0^{2\pi}(2\sqrt{2}cos(t)sen(t),-(\sqrt{2}sen(t))^2)(-2sen(t),\sqrt{2}cos(t))dt=$
$=\int_0^{2\pi}(-4\sqrt{2}cos(t)sen^2(t)-2\sqrt{2}cos(t)sen^2(t))dt=\int_0^{2\pi}-6\sqrt{2}cos(t)sen^2(t)dt=$

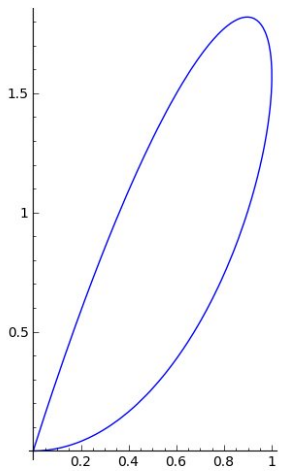
$=[-2\sqrt{2}sen^3(t)]_0^{2\pi}=0.$

Ahora lo calculamos utilizando el Teorema de Green. Según dicho teorema, tenemos que $\int_\sigma Fds=\int_D rot(F)$, donde $D=\{(x,y):x^2+2y^2\leq 4\}$. Así pues,

$\int_\sigma Fds=\int_D rot(F)=\int_D -xdxdy=\int_{-2}^{2}(\int_{-\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}-xdy)dx=\int_{-2}^{2}[-xy]_{-\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}dx=$
$=\int_{-2}^{2}-2x\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}dx=[\frac{4}{3}(2-\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}]_{-2}^{2}=0.$

25. El Teorema de Green se puede utilizar para calcular el área de una región. Efectivamente, si consideramos el campo vectorial $F(x,y)=(-y,x)$ y una trayectoria $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ para la que se pueda emplear el Teorema de Green, entonces el área de la región que encierra dicha trayectoria es $\frac{1}{2}\int_\sigma Fds$. Calcular el área encerrada por la curva $\sigma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2:t\mapsto(sen(t),tsen(t))$.
(Pista: hacer primero el ejercicio 5).

Sol: Aunque no lo pedía el ejercicio, os pongo una imagen de la curva y de la región que encierra.



Según el enunciado, el area de esta región es igual a $\frac{1}{2}\int_\sigma Fds$ donde $F(x,y)=(-y,x)$. Por tanto el area es

$\frac{1}{2}\int_\sigma Fds=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(-tsen(t),sen(t))(cos(t),sen(t)+tcos(t))dt=$
$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(-tsen(t)cos(t)+sen^2(t)+tsen(t)cos(t))dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}sen^2(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-cos(2t)}{2}dt=$

$=\frac{1}{2}[\frac{t-\frac{1}{2}sen(2t)}{2}]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$