CÁLCULO VECTORIAL 2010-2011
HOJA 4

---

1. Decidir si las siguientes funciones son diferenciables y calcular la matriz diferencial de cada una de ellas:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y)$,
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (xe^y + cos(y), x, x + e^y)$,
   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x + e^z + y, yx^2)$,
   d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (xye^{xy}, xsen(y), 5xy^2)$.

2. Decidir si las siguientes funciones son diferenciables y calcular la matriz diferencial de cada una de ellas:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (e^x, sen(xy))$,
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y, y + z)$,
   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, xy)$.

3. Usando las funciones del ejercicio 2, escribe $h \circ f$ y calcula su matriz diferencial. También, calcula su matriz diferencial usando la regla de la cadena.

4. Usando las funciones del ejercicio 2, escribe $g \circ h$ y calcula su matriz diferencial. También, calcula su matriz diferencial usando la regla de la cadena.

5. Usando las funciones del ejercicio 2, escribe $h \circ g$ y calcula su matriz diferencial. También, calcula su matriz diferencial usando la regla de la cadena.

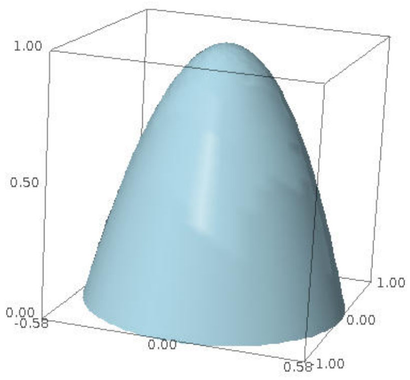
6. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xy^2, sen(\pi xy))$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si la matriz diferencial de $D(g \circ f)$ en el punto $(1, 1)$ es la matriz $(\pi \ \pi)$, ¿cuál es la matriz diferencial de g en el punto $(1, 0)$?

7. Calcular la derivada direccional de $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ en el punto $(1, 1, 2)$ y en la dirección del vector: $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$.

8. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

   a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $v = (3/5, 4/5)$,
   b) $f(x, y) = ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $v = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$,
   c) $f(x, y) = e^x cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$,
   d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $v = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$.

9. Suponer que una montaña tiene forma de un paraboloide elíptico, es decir, viene dado por la ecuación $z = 1 - 3x^2 - y^2$ para $x, y \in \mathbb{R}$ satisfaciendo $3x^2 + y^2 \leq 1$.



En el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, ¿en qué dirección está aumentando más rápido la altitud? Si se suelta una canica en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, ¿en qué dirección comenzará a rodar?

10. Otto Lindenbrock, un afamado profesor de mineralogía, contrata a un ingeniero (geólogo, digamos) para construir un ferrocarril que suba a la cima de la montaña del ejercicio anterior. Subir directo la montaña es demasiado empinado para la fuerza de la locomotora. El ingeniero piensa que una pendiente del 3 % es razonable. O dicho de otra forma, que la tasa de cambio de la altura es 0.03. En el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ determinar en qué direcciones (hay dos) se puede colocar la vía de modo que suba un 3 %.