Ejemplos de teorías de primer orden

1.- Ar: *La teoría de la aritmética* en el lenguaje $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$:

Ar1: $\forall x\, Sx \neq 0$
Ar2: $\forall x \forall y (Sx = Sy \to x = y)$
Ar3: $\forall x\, x+0 = x$
Ar4: $\forall x \forall y\ x+Sy = S(x+y)$
Ar5: $\forall x\, x \cdot 0 = 0$
Ar6: $\forall x \forall y\ x \cdot Sy = x \cdot y + x$
Ar7: $\forall x \neg\, x < 0$
Ar8: $\forall x \forall y (x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$
Ar9: $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

2.- G: *La teoría de grupos* en el lenguaje $L = \{\cdot, 1\}$:

G1: $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
G2: $\forall x (x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$
G3: $\forall x \exists y (x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

3.- C: *La teoría de cuerpos* en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:

C1: $\forall x \forall y \forall z\ x+(y+z) = (x+y)+z$
C2: $\forall x (x+0 = x \wedge 0+x = x)$
C3: $\forall x \exists y (x+y = 0 \wedge y+x = 0)$
C4: $\forall x \forall y\ x+y = y+x$
C5: $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
C6: $\forall x\, x \cdot 1 = x$
C7: $\forall x (x \neq 0 \to \exists y\, x \cdot y = 1)$
C8: $\forall x \forall y\ x \cdot y = y \cdot x$
C9: $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
C10: $0 \neq 1$

4.-OL: *La teoría de órdenes lineales* en el lenguaje $L = \{<\}$:

OL1: $\forall x \neg\, x < x$
OL2: $\forall x \forall y ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
OL3: $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

5.- ZFC: *La teoría de conjuntos (de Zermelo–Fränkel)* en el lenguaje $L = \{\in\}$:

ZFC 1: Axioma de extensión: $\forall x \forall y (\forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x = y)$
ZFC 2: Axioma-esquema de compresión: para cada $F[w, y, w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{F}or(L)$,

$$\forall y \forall w_1, \dots, \forall w_n \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w \in y \wedge F))$$

ZFC 3: Axioma del par: $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$
ZFC 4: Axioma de la unión: $\forall x \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow \exists y (w \in y \wedge y \in x))$
ZFC 5: Axioma-esquema de remplazamiento: para cada $F[x, y, w, w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{F}or(L)$,

$$\forall w \forall w_1, \dots, \forall w_n (\forall x \in w \exists! y F \to \exists z \forall x \in w \exists y \in z\, F)$$

ZFC 6: Axioma de infinitud: $\exists z (0 \in z \wedge\ \forall y (y \in z \to y \cup \{y\} \in z))$
ZFC 7: Axioma de las partes: $\forall x \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w \subset x)$
ZFC 8: Axioma de regularidad: $\forall x (\exists y\, y \in x \to \exists z (z \in x \wedge \neg \exists w (w \in x \wedge w \in z)))$.
ZFC 9: Axioma de elección: $\forall x \exists z (z \text{ bien ordena } x)$

6.- GADST: *La teoría de grupos abelianos divisibles y sin torsión* en el lenguaje $L = \{+, 0\}$:

GADST1: $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$
GADST2: $\forall x(x + 0 = x)$
GADST3: $\forall y \exists x(x + y = 0)$
GADST4: $\forall x \forall y(x + y = y + x)$
GADST5$_n$: $\forall x \exists y\, ny = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (divisibilidad)
GADST6$_n$: $\forall x(x \neq 0 \to nx \neq 0)$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (carencia de torsión)

7.- OLDSE: *La teoría de órdenes lineales densos sin extremos* en el lenguaje $L = \{<\}$.

OLDSE1 Irreflexiva: $\forall x(\neg x < x)$
OLDSE2 Transitiva: $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
OLDSE3 Tricotómica: $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
OLDSE4 Denso: $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$
OLDSE5 Sin extremos: $\forall x \exists y \exists z(x < y \wedge z < x)$

8.- Cuerpos$_p$: *La teoría de cuerpos de característica* p en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:

- Las fórmulas **C1–C10** de la teoría de cuerpos
- $\mathbf{C_p}$: $p\,1 = 0$ (característica p)

9.- Cuerpos$_0$: *La teoría de cuerpos de característica* 0 en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:

- Las fórmulas **C1–C10** de la teoría de cuerpos
- Para cada p primo $\neg\mathbf{C_p} : p\,1 \neq 0$

10.- CAC: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$:

- Las fórmulas **C1–C10** de la teoría de cuerpos
- Para cada $n \geq 1$, $\mathbf{R_n} : \forall x_0, \ldots \forall x_{n-1} \exists y(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + x_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + x_0 = 0)$

(Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz)

11.- CAC$_p$: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica* p en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$:

- $CAC \cup \{C_p\}$

12.- CAC$_0$: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica* 0 en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$:

- $CAC \cup \{\neg C_p :\ p \text{ primo}\}$

13.- CRC: *La teoría de cuerpos realmente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

- Los axiomas **C1–C10** (cuerpo)
- **R1** : $\forall x \exists y(y^2 = x \vee y^2 + x = 0)$
- Para cada n impar, $\mathbf{R_n} : \forall x_0, \ldots, \forall x_{n-1} \exists y(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + x_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + x_0 = 0)$

(Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz)

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{R2_n} : \forall x_0 \ldots \forall x_n(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \to (x_0 = 0 \wedge x_1 = 0 \cdots \wedge x_n = 0))$

14.- CO: *La teoría de cuerpos ordenados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$.

- Los axiomas **C1–C10** (cuerpo)
- Los axiomas **O1–O3** (orden lineal)
- **CO1** : $\forall x \forall y \forall z(x < y \to x + z < y + z)$
- **CO2** : $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge 0 < z) \to x \cdot z < y \cdot z)$

15.- CORC: *La teoría de cuerpos ordenados realmente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$.

- Los axiomas de **CO** (cuerpo ordenado)
- **R3** : $\forall x(0 < x \to \exists y(y \neq 0 \wedge y^2 = x))$
- Los axiomas $\mathbf{R_n}$, para cada n impar (realmente cerrado)