361

a) Sí es una relación de orden
Si identificamos los números complejos $\mathbb{C}$ con los puntos de $\mathbb{R}^2$ como vimos en clase nos damos cuenta que el orden del ejercicio no es más que el orden lexicográfico que vimos en su día

Evidentemente $-i \leq 0$ ya que $0=0$ y $-1 \leq 0$

y $0 \leq i$ porque $0=0$ y $0<1$.

b) Sean $z=a+bi$ y $w=c+di$ tales que $z,w \geq 0$.

Como $z \geq 0$ entonces tenemos que $a>0$ ó $a=0$ y $b \geq 0$.

Si $a>0$ entonces deducimos que $z+w \geq 0$ ya que

$$z+w=(a+c)+(b+d)i$$

y como $c \geq 0$ (puesto que $w \geq 0$) entonces $a+c>0$.

Si $a=0$ entonces puede ocurrir que $c=0$ ó $c>0$.

Si $c=0$ entonces $z+w=(b+d)i$ pero puesto que $b \geq 0$ y $d \geq 0$ deducimos que $b+d \geq 0$. Si $c>0$ entonces es evidente que $a+c>0$ y por tanto $z+w \geq 0$.

¿Se verifica que $z \cdot w \geq 0$ cuando $z, w \geq 0$?

No, no se verifica. Es evidente que $i \geq 0$, pero sin embargo

$$i \cdot i = -1 \leq 0$$