CÁLCULO VECTORIAL 2010-2011
HOJA 6

1. Sean las trayectorias $\sigma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos(t), sen(t))$ y $\sigma_2 : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (cos(2t), sen(2t))$. Dibujar las curvas que describen σ_1 y σ_2. Calcular la longitud de arco de cada una de ellas.

2. Calcular la longitud de arco de las siguientes trayectorias:

   a) $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (6t, 3t^2, t^3)$,

   b) $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$

   c) $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$

   d) $\sigma : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2t, t, t^2)$

3. Calcular la longitud de arco de la trayectoria $\sigma : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2t, t^2, log(t))$. Calcular la tangente de la curva descrita por σ en el punto $(2,1,0)$.

4. Sea la trayectoria $\sigma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (|t|, |t-1|)$. Dibujar la curva que describe σ. ¿Cuál es su longitud de arco?

5. Calcular el plano tangente de las siguientes superficies parametrizadas en los puntos especificados:

   a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (2u, u^2+v, v^2)$ en el punto $(0,1,1)$,

   b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u^2-v^2, u+v, u^2+4v)$ en el punto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$,

   c) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u^2, u\sin(e^v), \frac{1}{3}u\cos(e^v))$ en el punto $(13,-2,1)$.

6. Sea la superficie parametrizada

$$\phi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

   Dado un punto $(u_0, v_0) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$, calcular un vector unitario normal a la superficie en $\phi(u_0, v_0)$.

7. Calcular el rotacional de los siguientes campos vectoriales:

   a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$,

   b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (yz, xz, xy)$,

   c) $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (\frac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xy}{x^2+y^2+z^2})$,

8. Calcular la divergencia de los campos vectoriales del ejercicio anterior.

9. Calcular la divergencia del campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.

10. Sea la función $f(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2$. Calcular su campo gradiente y verificar que el rotacional de dicho campo es el campo vectorial nulo.

11. Sea el campo vectorial $F(x,y) = (y\cos(x), x\sin(y))$. ¿Es un campo vectorial gradiente?

12. Sea el campo vectorial $F(x,y,z) = (3x^2y, x^3+y^3, 0)$. Calcular el rotacional. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.