HOJA 3

(1)

$\Rightarrow$)

$F_1: F$ (Teorema)

$F_2: \forall x_n F$ (Generalización)

$\vdots$

$F_{n+1}: \forall x_1 \dots \forall x_n F$ (Generalización)

$\Leftarrow$)

$F_1: \forall x_1 \dots \forall x_n F$ (Teorema)

$F_2: \forall x_1 \dots \forall x_n F \to \forall x_2 \dots \forall x_n F$ (C2 + sust($\forall x_2 \dots \forall x_n F, x_1, x_1$))

$F_3: \forall x_2 \dots \forall x_n F$ MP(1,2)

$F_4: \forall x_2 \dots \forall x_n F \to \forall x_3 \dots \forall x_n F$ (C2 + sust($\forall x_3 \dots \forall x_n F, x_2, x_2$))

$F_5: \forall x_3 \dots \forall x_n F$ MP(3,4)

$\vdots$

$F_{2n}: \forall x_n F$

$F_{2n+1}: \forall x_n F \to F$ (C2 + sust($\forall x_n F, x_n, x_n$))

$F_{2n+2}: F$ MP(2n, 2n+1).

② $\forall_v F \leftrightarrow \forall_w F_v[w]$ $\quad$ w no aparece en F

$F_1: \forall_v F \to F_v[w]$ $\quad$ $(C2 + \text{Sust}(F, v, w))$

$F_2: \forall_w(\forall_v F \to F_v[w])$ $\quad$ (Generalización)

$F_3: F_2 \to (\forall_v F \to \forall_w F_v[w])$ $\quad$ ($C1$ + w no aparece en $\forall_v F$)

$F_4: \forall_v F \to \forall_w F_v[w]$ $\quad$ $MP(2,3)$

$F_5: \forall_w F_v[w] \to \underbrace{(F_v[w])_w[v]}_{= F}$ $\quad$ $(C2 + \text{Sust}(F_v[w], w, v))$

$F_6: \forall_v F_5$ $\quad$ (Generalización)

$F_7: \forall_v(\forall_w F_v[w] \to F) \to (\forall_w F_v[w] \to \forall_v F)$ $\quad$ ($C1$ + v no aparece libre en $\forall_w F_v[w]$)

$F_8: \forall_w F_v[w] \to \forall_v F$ $\quad$ $MP(6,7)$

$F_9: F_4 \to F_8 \to (\forall_v F \leftrightarrow \forall_w F_v[w])$

$F_{10}: F_8 \to (\forall_v F \leftrightarrow \forall_w F_v[w])$ $\quad$ $MP(9,4)$

$F_{11}: \forall_v F \leftrightarrow \forall_w F_v[w]$ $\quad$ $MP(8,10)$.

③ $T \vdash F \to G$ $\quad$ ¿ $T \vdash \forall_v F \to \forall_v G$?

$F_1: F \to G$ $\quad$ (Teorema)

$F_2: \forall_v F \to F$ $\quad$ $(C2 + \text{Sust}(F, v, v))$

$F_3: F_2 \to F_1 \to (\forall_v F \to G)$ $\quad$ (Tautología)

$F_4: F_1 \to (\forall_v F \to G)$ $\quad$ $MP(2,3)$

$F_5: \forall_v F \to G$ $\quad$ $MP(3,4)$

$F_6: \forall_v(\forall_v F \to G)$ $\quad$ Generalización

$F_7: F_6 \to (\forall_v F \to \forall_v G)$ $\quad$ ($C1$ + v no aparece libre en $\forall_v F$)

$F_8: \forall_v F \to \forall_v G$ $\quad$ $MP(6,7)$

$\boxed{x \text{ no aparece libre en } G}$

4

(i) $\vdash \forall x G \leftrightarrow G$

$F_1: \forall x G \to G$ (C2 + sust(G, x, x))

$F_2: \forall x (G \to G) \to (G \to \forall x G)$ (C1 + x no aparece libre en G)

$F_3: G \to G$ (Tautología)

$F_4: \forall x (G \to G)$ (Generalización)

$F_5: G \to \forall x G$ MP(2,4)

$F_6: F_1 \to F_5 \to (\forall x G \leftrightarrow G)$ (Tautología)

$F_7: F_5 \to (\forall x G \leftrightarrow G)$ MP(6,1)

$F_8: \forall x G \leftrightarrow G$ MP(7,5)

(ii) $\vdash \exists x G \leftrightarrow G$

$F_1: \forall x \neg G \leftrightarrow \neg G$ (Teorema (i))

$F_2: F_1 \to (\neg \forall x \neg G \leftrightarrow G)$ (Tautología)

$F_3: \underbrace{\neg \forall x \neg G}_{\exists x G} \leftrightarrow G$ MP(1,2).

(iii) $\vdash (G \to \forall x F) \leftrightarrow \forall x (G \to F)$

$\forall x (G \to F) \to (G \to \forall x F)$ (C1 + x no aparece en G)

$F_1: \forall x (G \to F) \to (G \to \forall x F)$ (C1 + x no aparece en G)

$F_2: \forall x F \to F$ (C2 + sust(F, x, x))

$F_3: (\forall x F \to F) \to (G \to \forall x F) \to (G \to F)$ (Tautología)

$F_4: (G \to \forall x F) \to (G \to F)$ MP(2,3)

$F_5: \forall x F_4$ Generalización

$F_6: \forall x F_4 \to ((G \to \forall x F) \to \forall x (G \to F))$ (C1 + x no aparece libre en $G \to \forall x F$)

$F_7: (G \to \forall x F) \to \forall x (G \to F)$ MP(5,6)

$F_8: F_1 \to F_7 \to ((G \to \forall x F) \leftrightarrow \forall x (G \to F))$ (Tautología)

$F_9: F_7 \to ((G \to \forall x F) \leftrightarrow \forall x (G \to F))$ MP(8,1)

$F_{10}: (G \to \forall x F) \leftrightarrow \forall x (G \to F)$ MP(7,9)

iv) $\vdash (\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x (F \to G)$

$F_1: (\neg G \to \forall x \neg F) \leftrightarrow \forall x (\neg G \to \neg F)$ (Teorema iii))

~~$F_2: (\neg\forall x \neg F \to G) \to F_1 \to [(\neg\forall x \neg F \to G) \leftrightarrow \forall x (\neg G \to \neg F)]$ (Tautología)~~

~~$F_2: F_1$~~

$F_2: F_1 \to [(\overset{\exists x F}{\neg\forall x \neg F} \to G) \leftrightarrow \forall x (\neg G \to \neg F)]$ (Tautología)

$F_3: (\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x (\neg G \to \neg F)$ MP(1,2)

$F_4: (\neg G \to \neg F) \leftrightarrow (F \to G)$ (Tautología)

$F_5: \forall x (\neg G \to \neg F) \leftrightarrow \forall x (F \to G)$ (Ejercicio 3 aplicado en las dos direcciones)

$F_6: F_5 \to F_3 \to [(\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x (F \to G)]$

$F_7: F_3 \to [(\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x (F \to G)]$ MP(5,6)

$F_8: (\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x (F \to G)$ MP(3,7)

v) $\vdash (\forall x F \vee G) \leftrightarrow \forall x (F \vee G)$

Basta observar que esta fórmula es equivalente a

$(\neg\forall x F \to G) \leftrightarrow \forall x (\neg F \to G)$

sabiendo esto, la demostración es fácil

(5) $\vdash \exists x \forall y F \to \forall y \exists x F$

$F_1: F \to \exists x F$ (Teorema, lo vimos en un ejemplo en clase)

$F_2: \forall y F \to \forall y \exists x F$ (Ejercicio 3)

$F_3: \forall x (\forall y F \to \forall y \exists x F)$ Generalización

$F_4: \forall x (\forall y F \to \forall y \exists x F) \leftrightarrow (\exists x \forall y F \to \forall y \exists x F)$ (Ejercicio 4.10))

$F_5: \exists x \forall y F \to \forall y \exists x F$ MP(3,4)

~~(6)~~

(7) $\vdash \forall x (F \wedge G) \leftrightarrow (\forall x F \wedge \forall x G)$

~~$F_1: \forall x (F \wedge G) \to (F \wedge G)$ (C2 + sust(F∧G, x, x))~~

~~$F_2: F \wedge G \to F$ (Tautología)~~

~~$F_3: F \wedge G \to G$ (Tautología)~~

$F_1: (F \wedge G) \to F$ (Tautología)

$F_2: \forall x (F \wedge G) \to \forall x F$ (Ejercicio 3)

$F_3: (F \wedge G) \to G$ (Tautología)

$F_4: \forall x (F \wedge G) \to \forall x G$ (Ejercicio 3)

$F_5: F_2 \to F_4 \to (\forall x (F \wedge G) \to (\forall x F \wedge \forall x G))$ (Tautología)

$F_6: F_4 \to (\forall x (F \wedge G) \to (\forall x F \wedge \forall x G))$ MP (2,5)

$F_7: \forall x (F \wedge G) \to (\forall x F \wedge \forall x G)$ MP (4,6)

$F_8: \forall x F \to F$ (C2 + sust(F, x, x))

$F_9: \forall x G \to G$ (C2 + sust(G, x, x))

$\neg\forall x \neg\neg F$

$F_1: (\overbrace{\exists x \neg F}^{=} \to G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \to G)$ (Teorema iv))

$F_2: F \leftrightarrow \neg\neg F$ (Tautología)

$F_3: \forall x F \leftrightarrow \forall x \neg\neg F$ (Ejercicio 3 aplicado en las dos direcciones)

$F_4: F_3 \to (\neg\forall x F \leftrightarrow \neg\forall x \neg\neg F)$ (Tautología)

$F_5: (\neg\forall x F \leftrightarrow \neg\forall x \neg\neg F)$ MP(3,4)

$F_6: F_5 \to F_1 \to ((\neg\forall x F \to G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \to G))$ (Tautología)

$F_7: F_1 \to ((\neg\forall x F \to G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \to G))$ MP(1,6)

$F_7: (\neg\forall x F \to G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \to G)$ MP(1,7).

vi) $\vdash (\exists x F \wedge G) \leftrightarrow \exists x(F \wedge G)$

Basta observar que esta fórmula es equivalente a

$$(\exists x F \wedge G) \leftrightarrow \neg\forall x \neg(F \wedge G)$$

$$\neg(\neg\exists x F \vee \neg G) \leftrightarrow \neg\forall x(\neg F \vee \neg G)$$

$$(\neg\exists x F \vee \neg G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \vee \neg G)$$

$$(\forall x \neg F \vee \neg G) \leftrightarrow \forall x(\neg F \vee \neg G)$$

y esta última es de apartado (v).

$F_{10}: F_8 \to F_9 \to ((\forall x F \wedge \forall x G) \to (F \wedge G))$ (Tautología)

$F_{11}: F_9 \to ((\forall x F \wedge \forall x G) \to (F \wedge G))$ MP(8,10)

$F_{12}: (\forall x F \wedge \forall x G) \to (F \wedge G)$ MP(9,11)

$F_{13}: \forall x [(\forall x F \wedge \forall x G) \to (F \wedge G)]$ Generalización

$F_{14}: F_{13} \to [(\forall x F \wedge \forall x G) \to \forall x (F \wedge G)]$ (C1 + x no aparece libre en $\forall x F \wedge \forall x G$)

$F_{15}: (\forall x F \wedge \forall x G) \to \forall x (F \wedge G)$ MP(13,14)

$F_{16}: F_7 \to F_{15} \to [(\forall x F \wedge \forall x G) \leftrightarrow \forall x (F \wedge G)]$

$F_{17}: F_{15} \to [(\forall x F \wedge \forall x G) \leftrightarrow \forall x (F \wedge G)]$ MP(7,16)

$F_{18}: [(\forall x F \wedge \forall x G) \leftrightarrow \forall x (F \wedge G)]$ MP(15,17).

8

(i) $\vdash (\forall x F \to G) \leftrightarrow \exists x (F \to G)$

Basta observar que esta fórmula es equivalente a

$$(\forall x F \to G) \leftrightarrow \exists x (F \to G)$$

$$(\forall x F \to G) \leftrightarrow \neg \forall x \neg (F \to G)$$

$$\neg(\forall x F \to G) \leftrightarrow \forall x \neg (F \to G)$$

$$(\forall x F \wedge \neg G) \leftrightarrow \forall x (F \wedge \neg G)$$

Por el ejercicio 7 y el ejercicio 4.i) deducimos el resultado.

El resto, (ii), (iii) y (iv) se sacan a partir de (i).

9 Probemos por inducción en la complejidad de la fórmula la indicación del ejercicio.

- Si F es atómica: entonces está en FNP y no tiene variables ligadas. Por tanto basta poner $F'=F$.
- Si F es $\neg G$: por hipótesis de inducción existe fórmula equivalente a G

$$G' = Q_1 z_1 \cdots Q_p z_p \tilde{G}$$

donde $z_1, \dots, z_p \notin V_0$ y $\tilde{G}$ no tiene cuantificadores. Sea la fórmula

$$F' = Q_1' z_1 \cdots Q_g' z_p \neg \tilde{G}$$

donde $Q_i' = \begin{cases} \forall, \text{ si } Q_i = \exists \\ \exists, \text{ si } Q_i = \forall \end{cases}$. Es evidente que F' es una fórmula normal prenex de F con $z_1, \dots, z_p \notin V_0$.

- Si F es $H \to G$: por hipótesis de inducción, existen fórmulas

$$H' = Q_1 z_1 \cdots Q_m z_m \tilde{H} \quad , z_1, \dots, z_m \notin V_0$$

$$G' = \tilde{Q}_1 v_1 \cdots \tilde{Q}_l v_l \tilde{G} \quad , v_1, \dots, v_l \notin V_0 \cup \{z_1, \dots, z_m\}$$

con $\vdash H \leftrightarrow H'$ y $\vdash G \leftrightarrow G'$. Dado que las variable ligadas de H' y G' son distintas, usando los ejercicios 4 y 8 llegaremos a una fórmula FNP de F que no tiene las variables ligadas en V_0. Por ejemplo, si $Q_1 = \forall$ entonces por 8.i) tenemos que

$$\vdash (H' \to G') \leftrightarrow \exists z_1 (Q_2 z_2 \cdots Q_m z_m \tilde{H} \to G')$$

O dicho de otra forma, usando 8.i) y 4.iv) tenemos que

$$\vdash (H' \to G') \leftrightarrow [Q_1' z_1 \cdots Q_m' z_m (\tilde{H} \to G')]$$

donde $Q_i' = \begin{cases} \forall & \text{si } Q_i = \exists \\ \exists & \text{si } Q_i = \forall \end{cases}$

Si usamos 4.iii) y 8.ii) tendremos que

$$\vdash [Q_1' z_1 \cdots Q_m' z_m (\tilde{H} \to G')] \leftrightarrow [Q_1' z_1 \cdots Q_m' z_m \tilde{Q}_1 v_1 \cdots \tilde{Q}_\ell v_\ell (\tilde{H} \to \tilde{G})]$$

Así pues, basta tomar como $F' = Q_1' z_1 \cdots Q_m' z_m \tilde{Q}_1 v_1 \cdots \tilde{Q}_\ell v_\ell (\tilde{H} \to \tilde{G})$

- Si $F = \forall x G$ entonces hay dos casos
  - a)- $x \notin V_0$: En este caso, por hipótesis de inducción existe G' en FNP tal que $\vdash G \leftrightarrow G'$ y con ninguna variable ligada en V_0. Usando el ejercicio 3, $\vdash \forall x G \leftrightarrow \forall x G'$ y basta por tanto tomar $F' = \forall x G'$.
  - b)- $x \in V_0$: En este caso, sea w una variable nueva tal que $w \notin V_0$ y no aparece en G. Por el Ejercicio 2

    $$\vdash \forall x G \leftrightarrow \forall w G_x[w]$$

    Finalmente, basta aplicar el caso a) a la fórmula $\forall w G_x[w]$.

$\boxed{10}$

i) $$\forall x \; x \cdot y = x \to y = 1 \quad , \; L = \{\cdot, 1\}$$

$$\exists x \, (x \cdot y = x \to y = 1)$$

ii) $$\neg x = 0 \to \exists y \; x \cdot y = 1$$

$$\exists y \, (\neg x = 0 \to x \cdot y = 1)$$

iii) $$\forall y \, (\exists x \; x < y \wedge \exists x \; y < x)$$

$$\forall y \, (\exists v \; v < y \wedge \exists x \; y < x)$$

$$\forall y \, \exists v \, (v < y \wedge \exists x \; y < x)$$

$$\forall y \, \exists v \, \exists x \, (v < y \wedge y < x)$$

iv) $$\exists x \; x = y \to \exists x \, (x = 0 \vee \neg \exists y \; y < 0)$$

$$\exists v \; v = y \to \exists x \, (x = 0 \vee \forall y \; \neg y < 0)$$

$$\forall v \, (v = y \to \exists x (x = 0 \vee \forall y \; \neg y < 0))$$

$$\forall v \, \exists x \, (v = y \to (x = 0 \vee \forall y \; \neg y < 0))$$

$$\forall v \, \exists x \, (v = y \to \forall y \, (x = 0 \vee \neg y < 0))$$

$$\forall v \, \exists x \, (v = y \to \forall z \, (x = 0 \vee \neg z < 0))$$

$$\forall v \, \exists x \, \forall z \, (v = y \to (x = 0 \vee \neg z < 0))$$

v) $\exists x\, x \in y \to \exists x (x \in y \wedge \forall z (\neg z = x \to x \in z))$

$\forall x [x \in y \to \exists x (x \in y \wedge \forall z (\neg z = x \to x \in z))]$

$\forall x [x \in y \to \exists v (v \in y \wedge \forall z (\neg z = v \to v \in z))]$

$\forall x \exists v [x \in y \to (v \in y \wedge \forall z (\neg z = v \to v \in z))]$

$\forall x \exists v [x \in y \to \forall z (v \in y \wedge (\neg z = v \to v \in z))]$

$\forall x \exists v \forall z [x \in y \to (v \in y \wedge (\neg z = v \to v \in z))]$

vi) $\forall x (\exists y\, y \in x \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$

$\forall x \forall y (y \in x \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$

$\forall x \forall y (y \in x \to \exists v (v \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in v)))$

$\forall x \forall y \exists v (y \in x \to (v \in x \wedge \forall z \neg (z \in x \wedge z \in v)))$

$\forall x \forall y \exists v (y \in x \to \forall z (v \in x \wedge \neg (z \in x \wedge z \in v)))$

$\forall x \forall y \exists v \forall z (y \in x \to (v \in x \wedge \neg (z \in x \wedge z \in v)))$

⑥ $\vdash G_i \leftrightarrow G_i'$ para todo $i = 1, \dots, m$

Sea $F \in For(L)$. Sea $F' \in For(L)$ la fórmula que obtenemos a partir de F cuando sustituimos algunas G_i por G_i' (en particular G_i es una subfórmula de F). Entonces

$$\vdash F \leftrightarrow F'$$

Lo demostramos por inducción en la complejidad:

- Si F es atómica entonces $F' = F$ y por tanto es obvio.
- Si F es $\neg G$: Entonces $F' = \neg G'$ donde G' es la fórmula G donde hemos sustituido algunas G_i por G_i'. Por hipótesis de inducción

  $$\vdash G \leftrightarrow G'$$

  Es facil ver entonces que $\vdash \underbrace{\neg G}_{F} \leftrightarrow \underbrace{\neg G'}_{F'}$
- Si F es $H \to G$: Entonces $F' = H' \to G'$ donde H' y G' la hemos obtenido a partir de H y G sustituyendo algunas G_i por G_i'. Por hipótesis de inducción $\vdash H \leftrightarrow H'$ y $\vdash G \leftrightarrow G'$. Veamos que $\vdash F \leftrightarrow F'$.

  F_1: $G \leftrightarrow G'$ (Teorema)
  F_2: $H \leftrightarrow H'$
  F_3: $(H \to G) \leftrightarrow (H' \to G')$ (Tautología)

- Si F es $\forall x G$: Entonces $F' = \forall x G'$ donde G' lo hemos obtenido de G sustituyendo algunos G_i por G_i'. Por hipótesis de inducción

$$\vdash G \leftrightarrow G'$$

Veamos que $\vdash F \leftrightarrow F'$. Puesto que $\vdash G \rightarrow G'$ por el ejercicio 3, $\vdash \underbrace{\forall x G}_{F} \rightarrow \underbrace{\forall x G'}_{F'}$.

Puesto que $\vdash G' \rightarrow G$, por el ejercicio 3, $\vdash \underbrace{\forall x G'}_{F'} \rightarrow \underbrace{\forall x G}_{F}$.