MATEMÁTICAS BÁSICAS

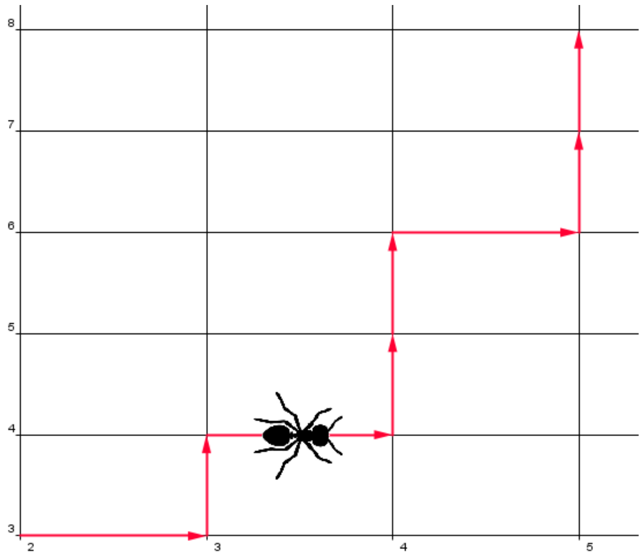
ENTREGA DE EJERCICIOS
Ejercicios del tema 4 (segunda entrega)

Francisco Javier Martínez Aguinaga

Grado en Matemáticas - Curso 1º
Universidad Complutense de Madrid
Octubre de 2012

Ejercicio 1. Calcula cuántos caminos distintos puede seguir una hormiga que se desplace desde el punto del plano $(2,3)$ hasta el $(5,8)$, si lo hace siempre sin retroceder por rectas paralelas a los ejes, con una de las coordenadas enteras.

La sección del plano por la que se está desplazando la hormiga queda dividida en una cuadrícula de $(5-2)\times(8-3)$; o sea, de 3×5. Por lo tanto está claro que la hormiga, tome el camino que tome, habrá de avanzar tres unidades en el eje X y cinco unidades en el eje Y; independientemente del orden en que lleve a cabo estos movimientos. Por tanto, un posible camino sería el siguiente:



De forma esquemática, podríamos expresar este movimiento de la siguiente manera:

$$(\rightarrow,\uparrow,\rightarrow,\uparrow,\uparrow,\rightarrow,\uparrow,\uparrow,)$$

donde $\rightarrow$ simboliza un movimiento hacia adelante en el eje X y $\uparrow$ simboliza un movimiento adelante en el eje Y. Basta darse cuenta de que cualquiera de los caminos posibles desde $(2,3)$ hasta $(5,8)$ será una lista de longitud 8 cuyos componentes serán tres movimientos en el eje X y cinco movimientos en el eje Y.
Entonces, nos damos cuenta de que existe una biyección entre los caminos posibles que puede seguir la hormiga y las listas ordenadas de longitud ocho con cinco componentes de un tipo (iguales entre sí) y otros tres componentes de otro tipo (también iguales entre sí). Es decir, el problema se reduce a determinar cuántas listas distintas podemos encontrar con estas características.
Supongamos que tenemos cinco letras A y tres letras B. Queremos ver de cuántas maneras distintas podemos ordenarlas. Tomando como ejemplo las siguientes dos listas:

$$\underline{A},\underline{A},\underline{B},\underline{A},\underline{B},\underline{A},\underline{A},\underline{B}$$

$$\underline{A},\underline{B},\underline{B},\underline{B},\underline{A},\underline{A},\underline{A},\underline{A}$$

nos damos cuenta de que en realidad una lista se diferencia de otra en el lugar que ocupan las letras B. Mientras que en la primera lista éstas ocupan los lugares $\{3,5,8\}$, en la segunda ocupan los lugares $\{2, 3, 4\}$. Por tanto, lo que verdaderamente queremos saber es cuántas combinaciones posibles existen de ocho huecos tomados de tres en tres (los huecos correspondientes a las letras B). Y sabemos que esto corresponde al número combinatorio $\binom{8}{3}$. Pero,

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$$

Por tanto, la hormiga podrá seguir 56 caminos diferentes para llegar a $(5, 8)$ desde $(2, 3)$.

Cuando hemos argumentado que una lista se diferencia de otra por el lugar que ocupaban las letras B, podríamos haber dicho, análogamente, que lo que las diferenciaba era el lugar que ocupaban las letras A. Entonces, habríamos llegado a que el número de caminos posibles era $\binom{8}{5}$ que, efectivamente, es el número de caminos que hemos obtenido, ya que $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

Ejercicio 2.

a) Calcula cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra **REPETIDORES**.

b) Se mete en una urna una bola con cada una de las palabras formadas en el apartado anterior. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola figure una palabra con las dos letras **R** consecutivas.

Para calcular cuántas palabras distintas se pueden formar con 11 letras diferentes, basta calcular el número de posibles permutaciones de las once letras; esto es, 11!. Sin embargo, en este caso, la letra **R** se repite dos veces y la letra **E** se repite tres. Por tanto, el cálculo ha de ser ligeramente diferente:

En primer lugar, contemos cuántas palabras distintas podemos formar suponiendo las letras **E** ditintas entre sí y lo mismo para las letras **R**.

$$R_1E_1PE_2TIDOR_2E_3S$$

En tal caso, tendríamos 11! posibles palabras diferentes. Sin embargo, hemos de darnos cuenta de que para un orden concreto de las letras (por ejemplo el de arriba), existen 3! posibles permutaciones de las letras **E**:

$$RE_1PE_2TIDORE_3S$$
$$RE_1PE_3TIDORE_2S$$
$$RE_2PE_1TIDORE_3S$$
$$RE_2PE_3TIDORE_1S$$
$$RE_3PE_1TIDORE_2S$$
$$RE_3PE_2TIDORE_1S$$

Por tanto, basta dividir 11! entre 3! para no contar tantas veces la misma palabra. Por tanto, tenemos que, sin tener en cuenta las posibles permutaciones de las letras **E** dentro de una ordenación posible de las 11 letras, tenemos $\frac{11!}{3!}$ palabras diferentes. Sin embargo, se nos presente el mismo problema con las letras **R**, ya que también se repiten. Por tanto, siguiendo el razonamiento anterior, tenemos que para una ordenación determinada de las 11 letras de la palabra **REPETIDORES**, estamos contando 2! veces la misma palabra:

$$R_1EPETIDOR_2ES$$

$$R_2EPETIDOR_1ES$$

Por tanto, basta dividir $\frac{11!}{3!}$ entre 2! para no contar más de una vez la misma palabra. Por tanto, concluimos que el número de palabras distintas que pueden formarse con las letras de la palabra **REPETIDORES** es exactamente $\frac{11!}{2!\cdot 3!}$.

Para calcular la probabilidad pedida, haremos uso de la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{N^{o}\ \ casos\ \ favorables\ \ para\ \ A}{N^{o}\ \ casos\ \ posibles}$$

El número de casos posibles lo hemos calculado en el ejercicio anterior, puesto que $\frac{11!}{2!\cdot 3!}$ responde al número de palabras diferentes. Sin embargo, hemos de calcular el número de casos favorables; esto es, el número de palabras con las 11 letras dadas que contienen dos letras **R** consecutivas. Dada una lista de n elementos sobre una línea recta, sabemos que podemos tomar $n-1$ pares de elementos consecutivos. Sin embargo, al fijar una pareja concreta de huecos consecutivos, tenemos que el resto de huecos puede ser ocupado por las demás letras, importando el orden. Por lo tanto, en este caso tenemos $11-1=10$ formas posibles de situar las letras **R** y para cada una de ellas existen $\frac{9!}{3!}$ posibilidades de ordenar el resto de las letras. Así pues, el número de casos favorables es $10\cdot\frac{9!}{3!}=\frac{10!}{3!}$. Por lo tanto, la probabilidad que queremos calcular es:

$$P(A) = \frac{N^{o}\ \ casos\ \ favorables\ \ para\ \ A}{N^{o}\ \ casos\ \ posibles} = \frac{10!}{3!} : \frac{11!}{2!3!} = \frac{10!}{3!}\cdot\frac{2!3!}{11!} = \frac{2}{11}$$

.