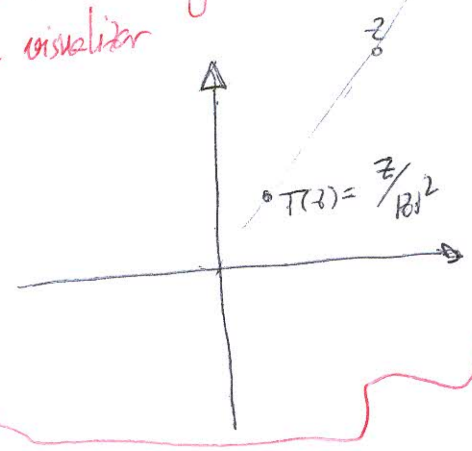
Este apartado es muy fácil de visualizar



$\boxed{37}$

$$T : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$$

a) ¿ $T(T(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$?

$$T(z) = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow T(T(z)) = T\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\bar{z}}}} = \frac{1}{1/z} = z$$

¿ $T(z) = z$ si $|z| = 1$?

$$T(z) = z \Leftrightarrow \frac{z}{|z|^2} = z \Leftrightarrow z = |z|^2 z \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

¿ $|T(z)| < 1$ si y solo si $|z| > 1$?

$$|T(z)| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{|z|^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{||z|^2|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|}{|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z| < |z|^2 \underset{|z| \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 < |z|$$

$|z|^2$ es real positivo y por tanto $||z|^2| = |z|^2$

b) Si $z = x+iy \neq 0$ está en la recta $y=x$ entonces $T(z)$ también

$$T(z) = T(x+ix) = \frac{x+ix}{x^2+x^2} \overset{x\neq 0}{=\!=} \frac{1+i}{2x} = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{} + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{} i$$

La partes real e imaginaria de $T(z)$ son iguales y por tanto está en la recta $x=y$.

c) Si $z = x+iy$ está en la recta $x=1$, entonces $T(z)$ está en la circunferencia de centro $1/2$ y radio $1/2$.

$$T(1+yi) = \frac{1+yi}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2} i$$

Tenemos que probar que $|T(1+yi) - 1/2| = 1/2$, es decir,

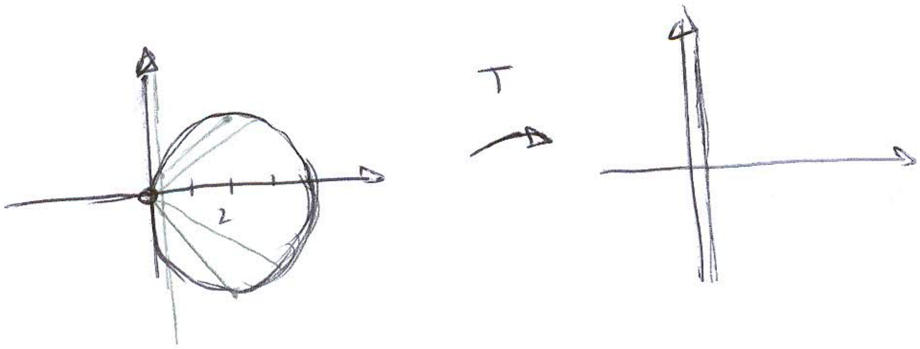
$$|T(1+yi) - 1/2|^2 = 1/4$$

Efectivamente

$$|T(1+yi) - 1/2|^2 = \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+y^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+y^2)^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{1+y^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+y^2) - (1+y^2)}{(1+y^2)^2} + 1/4 = 1/4$$

d) Si $z \neq 0$ está en la circumferencia $|z-2|=2$ entonces $T(z)$ está en la recta $x = 1/4$.



Si $|z-2|=2$ entonces $|z-2|^2=4$, es decir, si $z = x+iy$

$$4 = |z-2|^2 = |(x-2)+yi|^2 = (x-2)^2+y^2 = x^2+4-4x+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 4x$$

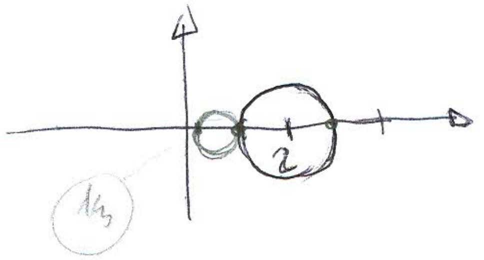
En particular

$$T(z) = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{y}{4x}i$$

por tanto $T(z)$ está en la recta $x = 1/4$.

e) si z está en la circunferencia $|z-2|=1$

¿En qué circunferencia está $T(z)$?



$$\left.\begin{array}{l} T(1)=1 \\ T(3)=1/3 \end{array}\right\}$$

Parece que va a ser la circunferencia de centro

$$\frac{1/3+1}{2} = \frac{4/3}{2} = 2/3$$

y de radio $1-2/3 = 1/3$.

Veamos si es cierto: si $|z-2|=1$ entonces

$$|z-2|^2=1 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+4-4x+y^2=1$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=-3+4x$$

Tenemos que comprobar que $|T(z)-2/3| = 1/3$, es decir, $|T(z)-2/3|^2 = 1/9$

$$|T(z)-2/3|^2 = \left|\frac{x+iy}{x^2+y^2}-\frac{2}{3}\right|^2 = \left|\frac{x+iy}{-3+4x}-\frac{2}{3}\right|^2 = \left[\frac{x}{-3+4x}-\frac{2}{3}\right]^2+\left[\frac{y}{(-3+4x)}\right]^2 =$$

$$= \frac{x^2}{(-3+4x)^2}+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{-3+4x}\right)+\frac{y^2}{(-3+4x)^2} = \frac{x^2+y^2}{(-3+4x)^2}+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{-3+4x}\right) =$$

$$= \frac{-3+4x}{(-3+4x)^2}+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{-3+4x}\right) = \frac{1-\frac{4}{3}x}{-3+4x}+\frac{4}{9} = \frac{\frac{3-4x}{3}}{-3+4x}+\frac{4}{9} = -\frac{1}{3}+\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$