Temat 13

Ubogi kartograf — Kolorowanie grafu

Streszczenie

Wiele problemów optymalizacyjnych dotyczy sytuacji, gdy dwa zdarzenia nie mogą wystąpić w tym samym momencie lub gdy pewne obiekty nie mogą do siebie. Na przykład, każdy kto tworzył kiedykolwiek złożony harmonogram bądź układał plan lekcji w szkole, spotkał się z wyzwaniem spełnienia wymagań wszystkich zainteresowanych stron. Trudności tego rodzaju dobrze ilustruje problem kolorowania mapy, wymagający tego, aby dwa sąsiednie państwa były w innym kolorze. Zajęcia dotyczą właśnie tego problemu.

Wiek

- ✓ 7 lat i więcej

Potrzebne materiały

- ✓ tablica szkolna lub inna powierzchnia do pisania

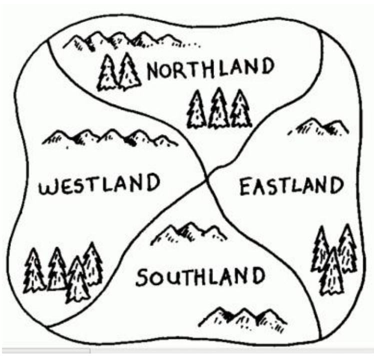
Każdemu dziecku potrzebne będą:

- ✓ kart pracy
- ✓ kolorowych znaczników (np. żetonów, pionków do gry)
- ✓ kolorowych kredek lub pisaków.

Kolorowanie grafu

Wprowadzenie

Motywem przewodnim tych zajęć jest historia kartografa, który chce pokolorować mapę w taki sposób, aby dwa sąsiadujące ze sobą kraje były w innym kolorze.



Przykładowa mapa zawiera cztery kraje. Jeśli kraj północny pokolorujemy na czerwono, to kraje: wschodni i zachodni nie mogą być czerwone, gdyż trudno byłoby dostrzec granice między nimi a krajem północnym. Do pomalowania jednego i drugiego z nich możemy użyć tego samego koloru zielonego – nie mają bowiem wspólnej linii granicznej. (To, że „spotykają się" w jednym punkcie nie ma w tym momencie znaczenia.) Ponieważ kraj południowy możemy pomalować na czerwono, potrzeba i wystarczy dwóch kolorów do pomalowania tej mapy.

Kartograf z naszej opowieści jest biedny i nie może pozwolić sobie na używanie wielu kredek, więc stara się używać najmniejszej możliwej liczby kolorów.

Przebieg zajęć

Opisz problem, nad którym dzieci będą pracować, wyjaśniając przy tablicy na czym polega proces kolorowania.

Rozdaj pierwszą kartę pracy. Mapa na niej przedstawiona może być poprawnie pokolorowana przy użyciu tylko dwóch kolorów. Sformułowanie tego wymagania wobec uczniów może sugerować szczególną trudność zadania. Okaże się jednak, że w istocie jest całkiem proste: w porównaniu z mapami wymagającymi większej liczby kolorów w tym przypadku odpada zupełnie problem wyboru koloru dla kolejnego kraju.

Zachęć dzieci do użycia tylko dwóch kolorów. Powinny odkryć zasadę „trzeba tak": jeśli dany kraj jest pokolorowany jednym z kolorów, to każdy sąsiadujący z nim musi być pokolorowany drugim z kolorów. Po wielokrotnym zastosowaniu tej reguły mapa zostanie skutecznie pomalowana. Najlepiej gdyby dzieci same mogły odkryć tę zasadę, bez podpowiedzi. Dzięki temu rozumienie tematu będzie głębsze.

Po wykonaniu zadania dzieci mogą otrzymać kolejne karty pracy.

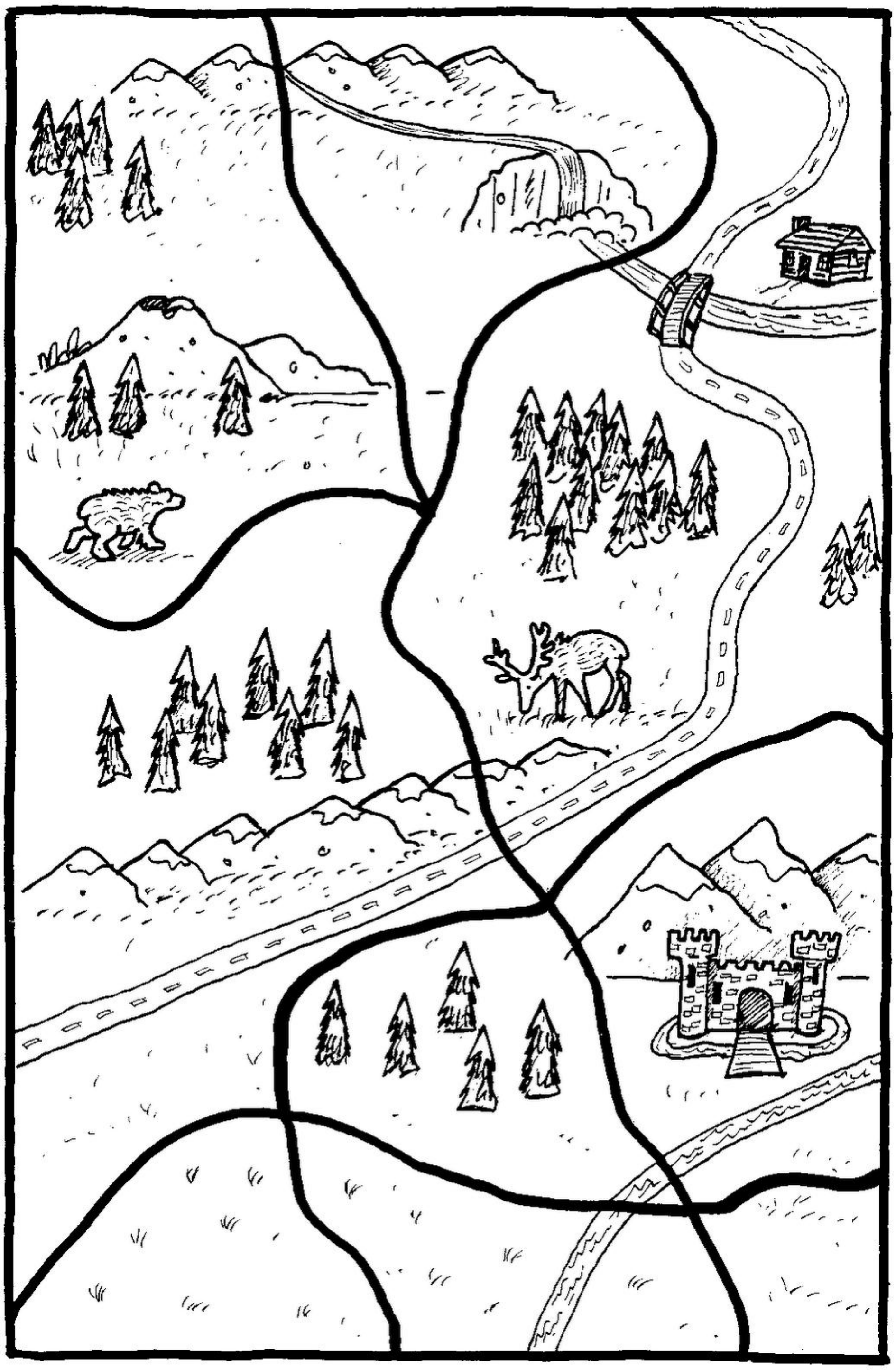
Dzieci mogą zauważyć, że lepiej jest wykorzystać kolorowe żetony zamiast kolorowania kredkami – w czasie pracy może być konieczna zmiana wcześniej podjętej decyzji o wyborze koloru.

Starsze dzieci można zapytać o to, czy potrafią uzasadnić swoją pewność co do tego, że użyły najmniejszej z możliwych liczby kolorów. Mogą to uczynić na przykład w ten sposób: trzy kolory są konieczne, bo na mapie jest taka trójka krajów (trzy największe?), z których każdy graniczy każdym z pozostałych dwóch.

Po uzupełnieniu wszystkich kart pracy, warto poprosić dzieci, by spróbowały narysować taką mapę, do pokolorowania której trzeba by użyć co najmniej pięciu kolorów. Zazwyczaj dzieci przedstawiają projekty, które ich zdaniem, spełniają powyższe wymaganie. Nasze zadanie polega na tym, by przekonać dzieci o tym, że się mylą.

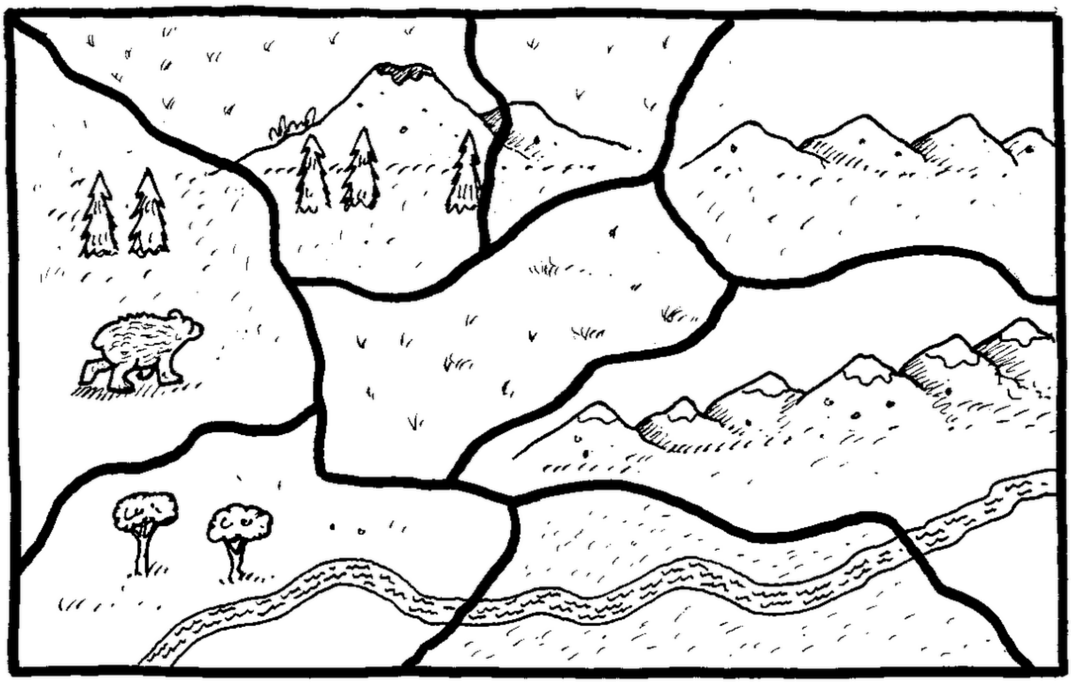
Karta pracy: Kolorowanie grafu (nr 1)

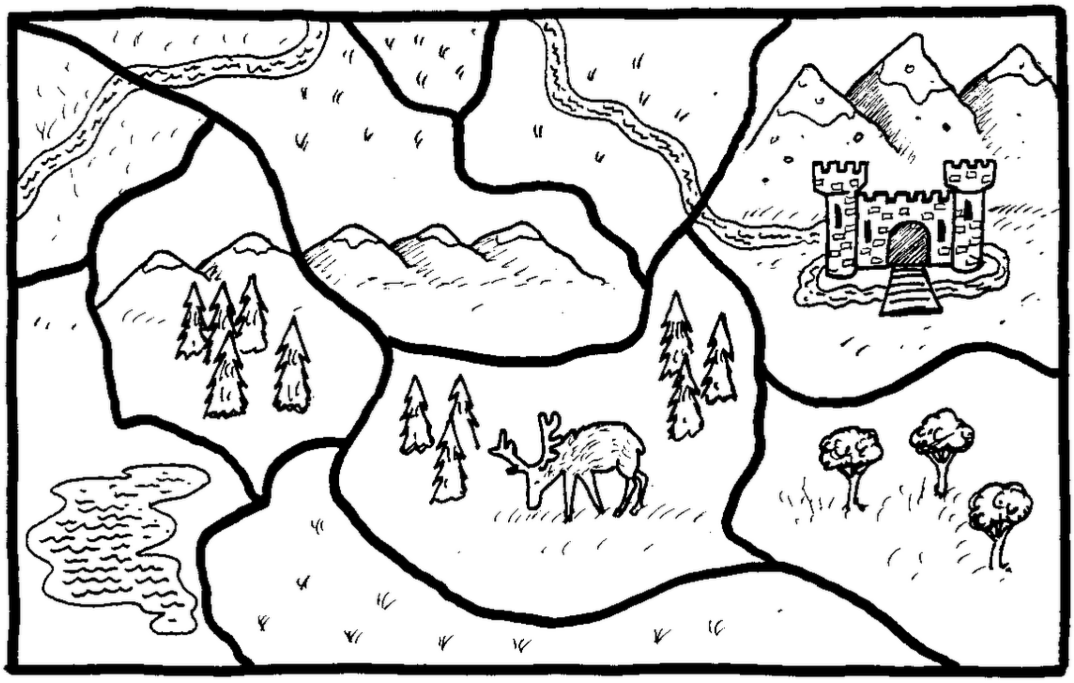
Pokoloruj kraje na mapie, używając jak najmniejszej liczby kolorów
(w taki sposób, by sąsiednie kraje były różnego koloru).



Karta pracy: Kolorowanie grafu (nr 2)

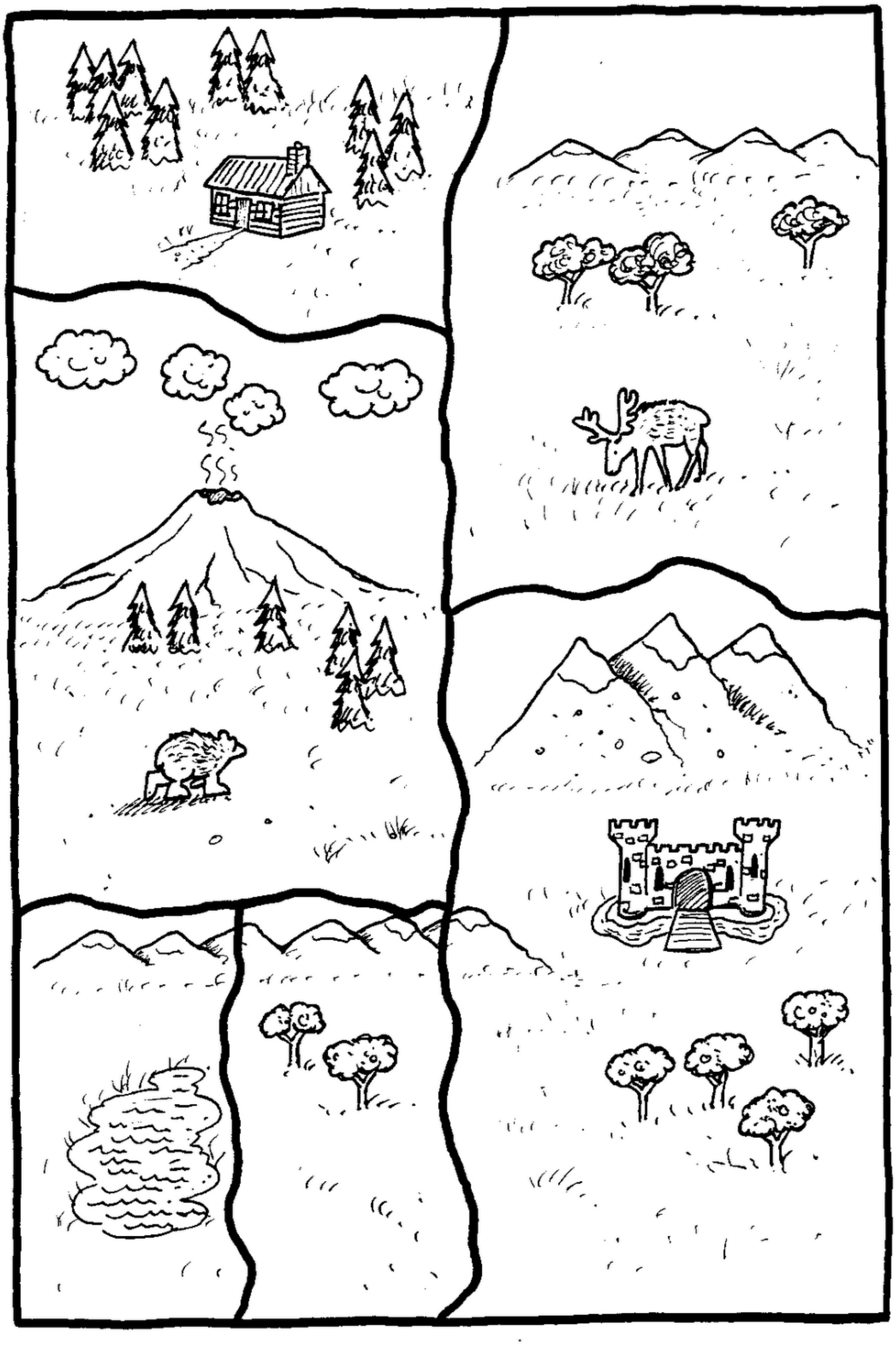
Pokoloruj kraje na mapie, używając jak najmniejszej liczby kolorów
(w taki sposób, by sąsiednie kraje były różnego koloru).:





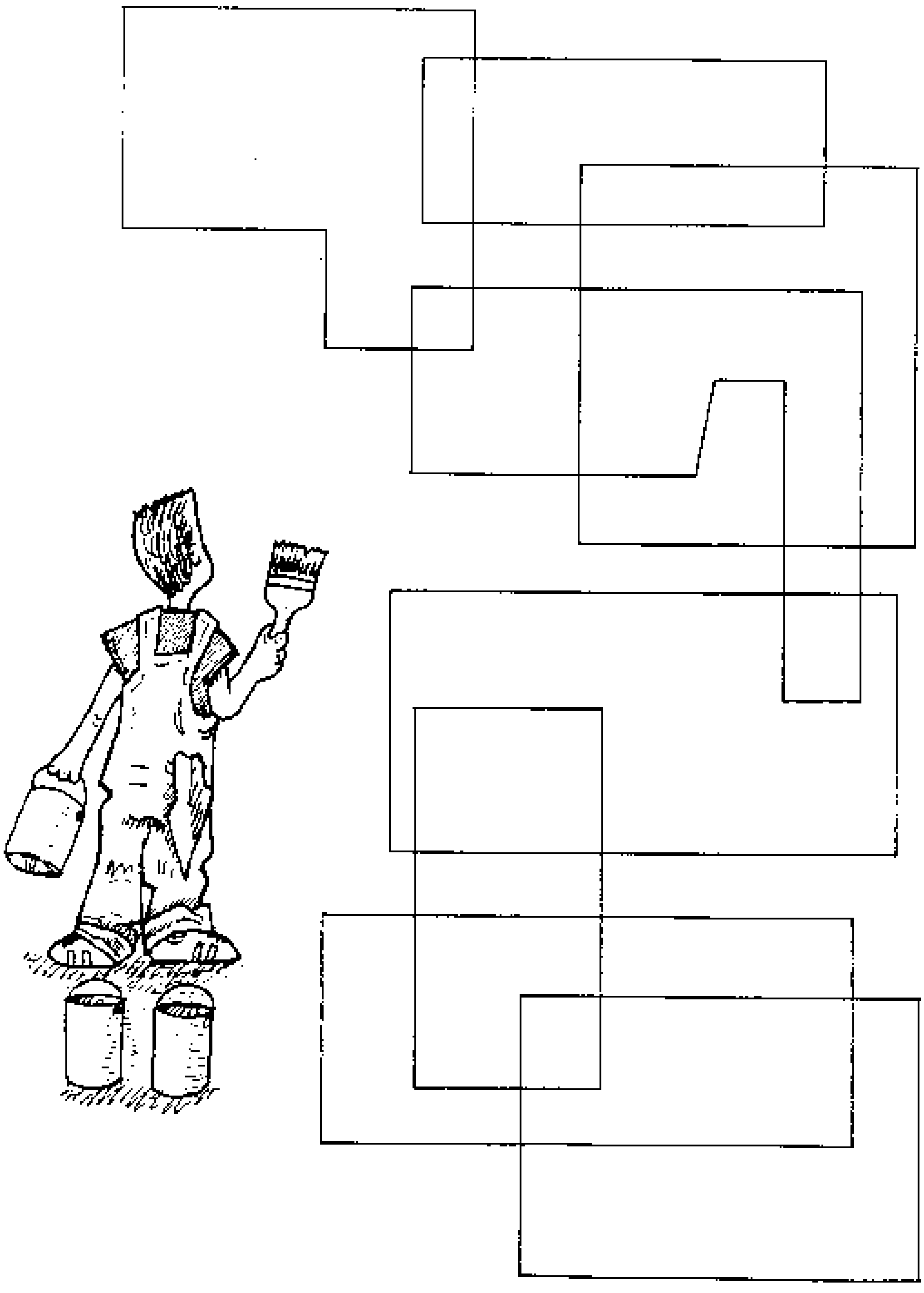
Karta pracy: Kolorowanie grafu (nr 3)

Pokoloruj kraje na mapie, używając jak najmniejszej liczby kolorów (w taki sposób, by sąsiednie kraje były różnego koloru).



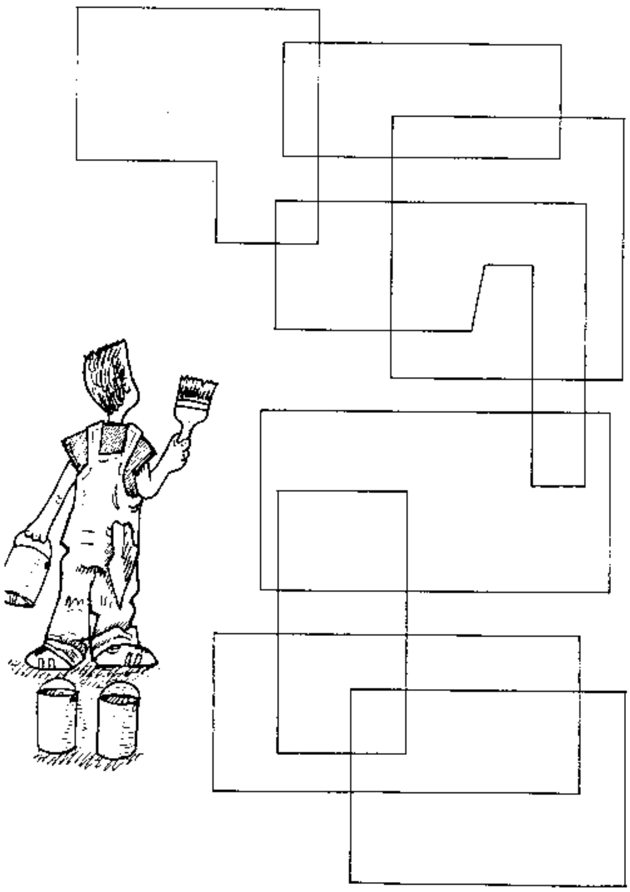
Karta pracy: Kolorowanie grafu (nr 4)

Pokoloruj kraje na mapie, używając jak najmniejszej liczby kolorów
(w taki sposób, by sąsiednie kraje były różnego koloru).



Modyfikacje i rozszerzenia

Istnieje prosty sposób konstrukcji mapy, do pomalowania której wystarczą dwa kolory. Takiej ja ta na rysunku poniżej. Należy narysować nakładające się na siebie krzywe zamknięte. Ich liczba może być dowolnie duża – zawsze do pokolorowania powstałej w ten sposób mapy wystarczą dwa kolory. Dzieci mogą się o tym przekonać, tworząc tego typu mapy.



Cztery kolory zawsze wystarczą do pokolorowania mapy narysowanej na płaskiej powierzchni. Podobnie jest na w przypadku powierzchni kuli (globusa). Ktoś może być ciekaw, jak wygląda sytuacja map na powierzchniach o bardziej dziwnych kształtach przestrzennych, takich jak torus (tj. powierzchnia opony). Poważni naukowcy rozstrzygnęli już, że w tym konkretnym przypadku może być potrzebnych nawet i pięć kolorów. Dzieci mogą spróbować to sprawdzić.

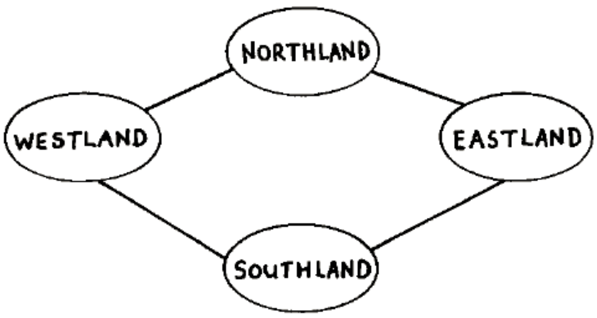
Można sformułować inne ciekawe problemy badawcze związane z kolorowaniem map i to na powierzchni płaskiej. Niektóre z nich zawierają pytania, na które do tej pory nie znaleziono pełnej odpowiedzi. Dla przykładu, wyobraźmy sobie, że mapa jest kolorowana „na przemian" przez dwie osoby: jedna jest kompetentna a druga nie jest (lub jest złośliwa). Pierwsza postępuje w sposób efektywny, a druga, kiedy przypada kolej na nią, w sposób tylko poprawny. Jaka jest najmniejsza liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania jakiejkolwiek mapy w tym przypadku? Naukowcy udowodnili, że ta liczba na pewno nie jest większa niż 33. Istnieje hipoteza, która mówi, że wystarczy 9 kolorów [stan wiedzy na rok 1998 – przyp. tłumacza]. Dzieci mogą potraktować ten problem badawczy jako zabawną grę dwuosobową.

Inny problem kolorowania, zwany problemem kolonialnym, wygląda tak: na dwóch różnych mapach znajduje się taka sama liczba państw, a każde państwo na pierwszej mapie w sposób jednoznaczny ma przyporządkowane państwo-kolonię na drugiej mapie (można dodać narrację: pierwsza mapa to mapa państw na Ziemi a drugą -- mapa kolonii na Księżycu). Jaka jest minimalna liczba kolorów potrzebnych do poprawnego kolorowania obu map, przy założeniu, że każde państwo oraz jego kolonia muszą być tego samego koloru? Problem ten pozostaje do tej pory nierozwiązany.

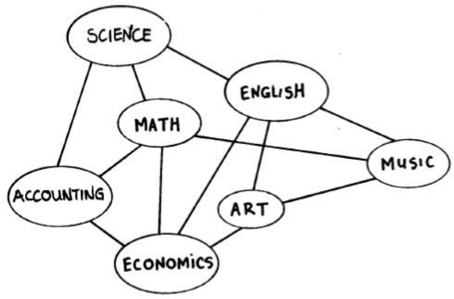
O co w tym wszystkim chodzi?

Problem kolorowania map, który był przedmiotem zajęć polega na ustaleniu minimalnej liczby kolorów (dwa, trzy lub cztery) potrzebnej do pokolorowania danej mapy. Hipoteza o tym, że dowolną mapę można pokolorować przy użyciu co najwyżej czterech kolorów została sformułowana już w roku 1852. Niemniej jednak, udowodniono ją dopiero po 124 latach w roku 1976. Historia zakończonego sukcesem zmagania z problemem czterech barw stanowi zachętę dla naukowców zajmujących się wieloma innymi nierozstrzygniętymi do tej pory problemami informatyki, które sformułowane zostały później.

Problem kolorowania mapy należy do klasy problemów zwanej „kolorowaniem grafu”. W informatyce graf jest metodą przedstawiania relacji między obiektami (przykład na rysunku). Punkty (na rysunku znacznie powiększone), zwane wierzchołkami, są ilustracją obiektów a odcinki, czyli krawędzie, ukazują jakiś rodzaj relacji między obiektami.



Na rysunku przedstawiony jest graf, który przedstawia mapę z zadania wstępnego. W wierzchołkach zapisana jest informacja o państwach a krawędzie między poszczególnymi wierzchołkami wskazują na to, jakie państwa graniczą ze sobą. W przypadku grafu poprawność jego kolorowania oznacza tyle, że dwa wierzchołki połączone krawędzią nie mogą być tego samego koloru. Inaczej niż w przypadku map, liczba kolorów koniecznych do poprawnego pokolorowania grafu, który pozbawiony jest ograniczeń charakterystycznych dla dwuwymiarowej natury mapy, może być dowolnie duża. Problem kolorowania grafu dotyczy więc minimalizacji liczby kolorów w poszczególnych przypadkach.



Na rysunku ukazany jest graf przedmiotów szkolnych. Fakt istnienia krawędzi łączącej wierzchołki reprezentujące zajęcia z dwóch przedmiotów oznacza tyle, że przynajmniej jeden z uczniów uczęszcza na oba zajęcia, więc nie mogą być one w planie lekcji o tej samej godzinie. Możliwość zilustrowania zagadnienia układania planu lekcji w postaci takiego grafu oznacza, że minimalizacja liczby godzin w szkolnym planie jest problemem równoważnym kolorowaniu tego grafu. Algorytmy kolorowania grafu budzą wielkie zainteresowanie w informatyce. Używa się ich w wielu praktycznych zastosowaniach technicznych. Prawdopodobnie nie mają jednak większego znaczenia dla kolorowania map – postać biednego kartografa była stworzona na potrzeby tej książki.

Istnieje bardzo wiele innych zagadnień, które można zilustrować za pomocą grafów. Dwa przykłady znajdują się w naszych książkach: minimalne drzewo rozpinające (zajęcia nr 9) i zbiory dominujące (zajęcia nr 14). Za pomocą grafów można przedstawiać różnego rodzaju informacje. Na przykład sieć dróg między miastami (i problem trasowania), połączenia między atomami w cząsteczce, trasy w sieci komputerowej, ścieżki w układzie scalonym czy relacje między zadaniami dużego projektu. Dlatego wszystkie tego rodzaju zagadnienia znajdują się w polu zainteresowań informatyków. To dużej mierze ich pracy zawdzięczamy istnienie efektywnych systemów nawigacji samochodowej.

Wiele z nich to problemy bardzo trudne – mimo że łatwo je sformułować, to jednak ich rozwiązania są skrajnie czasochłonne. Dla przykładu: znalezienie optymalnego kolorowania grafu o średnich rozmiarach – co pozwoliłoby na znalezienie najlepszego możliwego planu lekcji dla szkoły o 30 nauczycielach i 800 uczniach – zajęłoby komputerom stosującym najlepsze znane dziś algorytmy czas liczony w latach, a nawet w setkach lat (zakładając ich bezawaryjność i niezniszczalność). Te metody są więc praktycznie bezużyteczne. Dlatego musimy zadowolić się algorytmami prowadzącymi do rozwiązań nieoptymalnych, ale wystarczająco dobrych.

Czas potrzebny do znalezienia optymalnych rozwiązań tego rodzaju trudnych problemów wzrasta w sposób wykładniczy wraz ze wzrostem rozmiaru grafu. Wyobraźmy sobie, że problem kolorowania mapy chcemy rozwiązać metodą „siłową” rozpatrując wszystkie możliwe sposoby kolorowania mapy. Wiemy, że wymagana liczba kolorów nie może być większa niż cztery, więc każde z państw pokolorowane być może na cztery sposoby. Jeśli mamy n państw, to liczba możliwych kolorowań do przeanalizowania jest równa 4^n. Wzrasta ona w gwałtowny sposób: dodanie jednego państwa oznacza czterokrotne zwiększenie tej liczby, a więc i takie zwielokrotnianie czasu potrzebnego do znalezienia rozwiązania. Inaczej mówiąc: superszybki komputer, który rozwiązywałby problem kolorowania mapy dla 50 państw w ciągu jednej godziny, potrzebowałby już czterech godzin na znalezienie rozwiązania dla przypadku 51 państw. Dodanie 10 państw spowodowałoby wydłużenie jego działania do więcej niż roku. Oznacza to, że tego rodzaju problemy nie przestaną być trudne tylko dlatego, że budować będziemy coraz szybsze komputery.

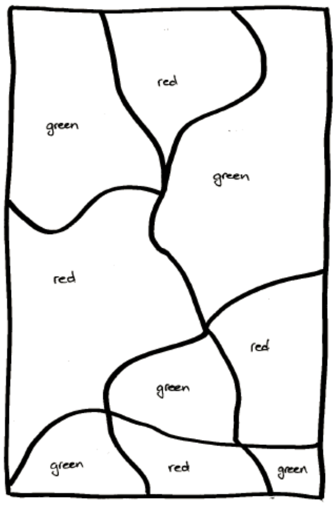
Kolorowanie grafu jest dobrym przykładem problemu o wykładniczym czasie rozwiązania. W przypadku małej liczby państw, jak to miało miejsce w zadaniach z kart pracy, znalezienie optymalnego kolorowania było dość proste. Już jednak dwucyfrowa liczba państw praktycznie uniemożliwia ręczne rozwiązywanie problemu. W przypadku trzycyfrowej liczby państw nawet komputer potrzebowałby czasu mierzonego w latach na przeanalizowanie wszystkich możliwych kolorowań w celu znalezienia optymalnego.

Wiele zagadnień życia (technicznych, ekonomicznych itd.) jest zagadnieniami o tego rodzaju stopniu złożoności. Ich wystarczająco efektywne rozwiązywanie jest niezbędne do funkcjonowania dzisiejszego świata. Stosowane są metody heurystyczne (przybliżone), które w rozsądnym czasie pozwalają na znalezienie rozwiązań wystarczająco dobrych dla bieżących celów praktycznych.

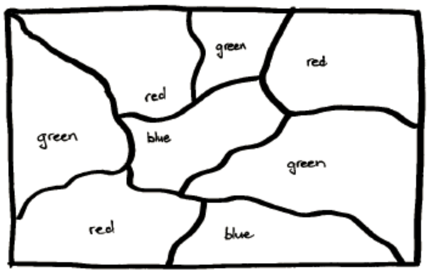
Na przykład stworzony za pomocą heurystycznych szkolny plan lekcji może wymagać używania o jedną więcej sal lekcyjnych niż w przypadku idealnego planu (który prawdopodobnie istnieje). Szukając analogii można by powiedzieć tak: biedny kartograf zakupi jeden dodatkowy kolor, choć z teoretycznych rozważań wiadomo, że nie jest on niezbędny.

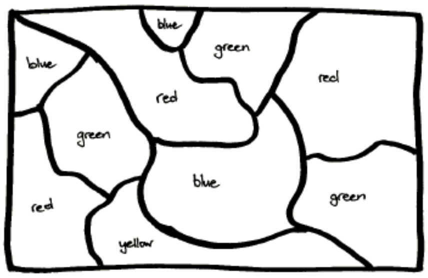
Nikt nie udowodnił do tej pory, że nie istnieje efektywna (niewykładnicza) metoda rozwiązania problemu kolorowania grafu. Naukowcy jednak wątpią w to, że kiedykolwiek zostanie znaleziona. Więcej na ten temat w dwóch następnych rozdziałach.

Rozwiązania i wskazówki

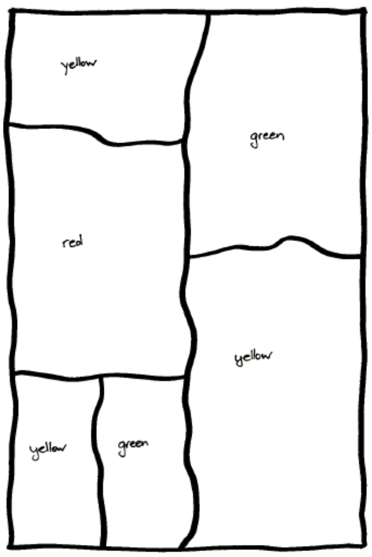


To jest jedyne możliwe rozwiązanie dla mapy z karty pracy nr 1 (dwa kolory wystarczą).

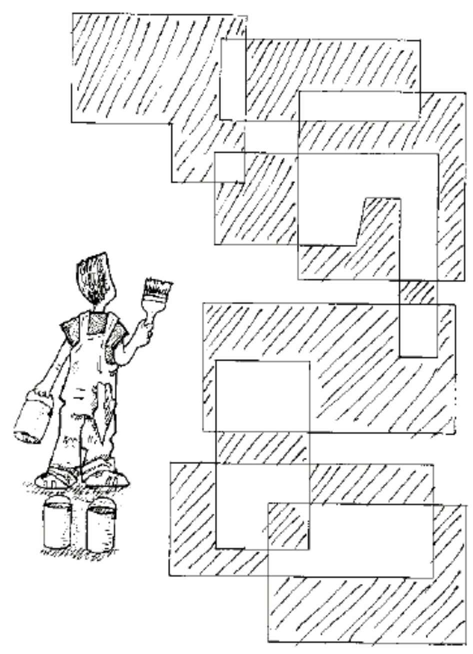




Do pokolorowania pierwszej z map karty pracy nr 2 wystarczy użyć trzech kolorów. Druga wymaga już czterech



Mapa z karty nr 3 wymaga użycia trzech kolorów.



Do pokolorowania mapy z karty nr 4 wystarczą dwa kolory.