Aktivnost 13

Barvanje zemljevidov

Kakšno zvezo ima sestavljanje urnikov z reševanjem sudokuja bomo izvedeli, ko bomo pobarvali nekaj zemljevidov.

Povzetek

V mnogih optimizacijskih problemih imamo opravka s situacijami, ko se, recimo nekateri dogodki ne dogajajo istočasno ali pa nekatere stvari ne smejo stati zraven določenih drugih. "Šolski" primer takega problema je sestavljanje urnikov, kjer je potrebno poskrbeti, da isti učitelj ne bo istočasno na dveh koncih (ker ne more biti) in da bo v učilnici za biologijo le en razred naenkrat. Lepa matematična predstavitev tega problema je barvanje zemljevidov, na katerih dve sosednji državi ne smeta biti iste barve.

Namen

Otroci spoznajo znani problem barvanja grafov.

Vidijo, kako je mogoče probleme, ki navidezno nimajo nobene povezave z barvanjem grafov, prevesti na barvanje grafov.

V splošnem, vidijo, da se za navidez različnimi problemi lahko skriva (strukturno) isti problem, zato so lahko algoritmi za njihovo reševanje uporabni v najrazličnejših situacijah.

Otroci se tudi ponovno srečajo z grafi. Doslej smo z njimi predstavili ladijske povezave med otoki in povezave med hišami v Blatnem dolu. Tu povezave v grafih ne prikazujejo fizičnih povezav temveč relacijo "nezdružljivosti", kar je nekoliko abstraktneje od prejšnjih rab grafov.

Potrebščine

Vsak otrok potrebuje

- kopije zemljevidov, ki jih bo barval (13A, 13B in 13C; na 13C so grafi za štiri učence),
- vsaj štiri barvice (lahko tudi flomastre ipd.),
- majhne barvne oznake (koščki papirja, majhne figurice, perlice)

Dodatna navodila

Aktivnost je zasnovana tako, da se otroci najprej srečajo s problemom, ki ga ni težko razumeti, ne morejo pa poiskati njegove rešitve (če že, pa bo iskanje nesistematično in nepregledno).

Nato spoznajo navidez povsem nepovezano področje, barvanje grafov, pri čemer začnejo iz običajnega izhodišča, barvanje zemljevidov.

Nato vidijo, kako se barvanje grafov skriva za reševanjem Sudoka in, končno, kako lahko s pomočjo barvanja grafov sestavljajo urnike krožkov.

Uvodna motivacija

Otrokom razloži tole nalogo.

V neki šoli so vsi krožki ob dveh popoldan. Seznam prijavljenih je takšen:

Računalniški krožek:	Anica, Alenka, Bernarda, Cilka
Matematični krožek:	Bernarda, Ludvik, Tone, Lucija
Dramska skupina:	Anica, Cilka, Lucija, Jure
Pevski zbor:	Cilka, Ludvik, Peter
Likovni krožek:	Alenka, Martin, Jure
Košarka:	Aleš, Albin, Peter
Nogomet:	Tone, Peter, Aleš

Ravnateljica Marinka mora določiti, na kateri dan bo kateri krožek. A, prejoj, krožkov je sedem, dni pa samo pet. Poleg tega otroci ne bi radi imeli krožkov ob petkih. Je mogoče razporediti krožke od ponedeljka do četrtka tako, da se nobenemu otroku ne bodo prekrivali in bo vsak otrok lahko obiskoval vse krožke, na katere se je vpisal?

Podaj primer: računalniški in matematični krožek ne smeta biti na isti dan, saj bi rada Bernarda hodila na oba. Prav tako morata biti na različna dneva košarka in nogomet, zaradi Aleša in Petra.

Prepiši gornji seznam prijavljenih na tablo in pusti otrokom, da poskusijo sami razpostaviti krožke. Verjetno ne bo nihče prišel do rešitve. Če komu uspe, ga prosi, da opiše postopek, s katerim je prišel do rešitve. Najbrž ne bo prav preprost in sistematičen, temveč je do rešitve prišel s poskušanjem.

Ubogi geograf

Geograf Jože izdeluje zemljevide. Pravzaprav so že narejeni, mora jih samo še pobarvati. Da se bodo dežele lepo videle, jih želi pobarvati tako, da bodo sosednje dežele vedno različnih barv. Če se dve deželi dotikata samo v eni točki, pa sta lahko tudi iste barve.

Tule ima (zelo približen!) zemljevid Slovenije.

Recimo, da se odloči Gorenjsko pobarvati z rdečo. V tem primeru Štajerska in Notranjska ne smeta biti rdeči, saj meja potem ne bo razločna. Če pobarvamo Štajersko z zeleno, pa sme biti zelena tudi Notranjska. Dolenjska sme biti spet rdeča, ne sme pa biti zelena, ker sta zeleni njeni sosedi, Notranjska in Štajerska.

Geograf Jože si ne more privoščiti veliko različnih barvic, zato mu bomo pomagali vsak zemljevid pobarvati s čim manj barvami.

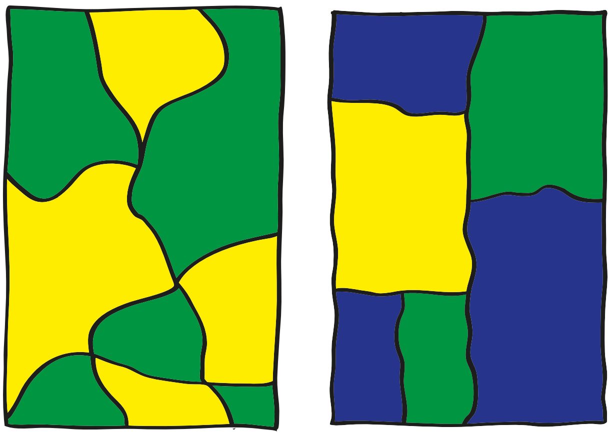
Navodila

1. Otrokom daj polo 13A, pobarvajo naj levi zemljevid. Odkrili bodo, da je zemljevide, za katere zadostujeta dve barvi, pravzaprav lahko pobarvati, saj nimajo veliko izbire: ko pobarvajo eno državo, je vse ostalo že določeno.

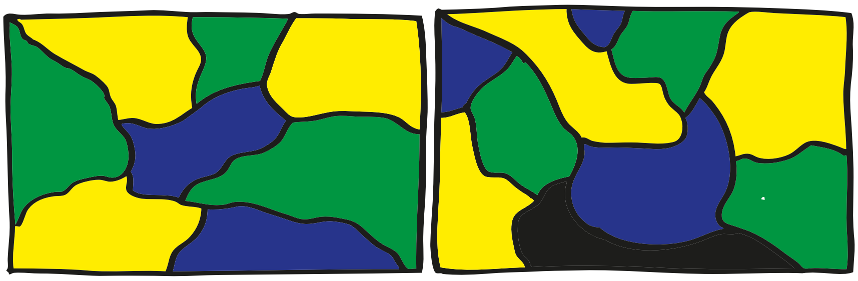
2. Nato naj se lotijo desnega zemljevida. Odkrili bodo pravila "mora biti": ko pobarvajo eno državo, morajo biti sosednje drugačne barve. Ko pobarvajo eno od sosednjih, s tem določijo barvo naslednje...

Otroci si lahko pri barvanju pomagajo z oznakami – barvnim papirjem, figuricami ipd, da jim ni potrebno radirati, kadar si premislijo. Vendar so ti zemljevidi dovolj preprosti, da to verjetno ne bo potrebno.

Za oba zemljevida obstaja le eno barvanje z dvema oziroma s tremi barvami (otroci lahko seveda uporabijo druge barve). Rešitvi sta spodaj.



3. Ko končajo s tema zemljevidoma, razdeli polo 13B. Zgornji zemljevid je mogoče pobarvati s tremi barvami, spodnji zahteva štiri.

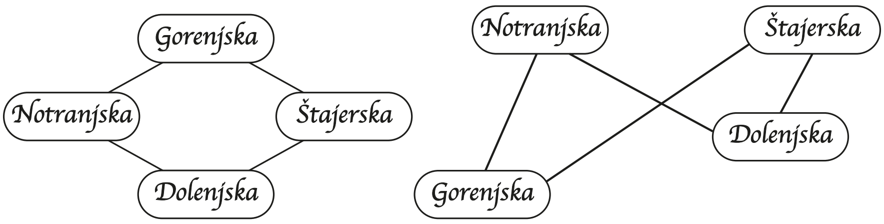


   Starejše otroke lahko vprašaš, kako vedo, da so uporabili najmanjše možno število barv. Na primer, zgornji zemljevid s pole (rešitev levo zgoraj) zahteva tri barve, ker obstaja trojka držav (recimo največje tri), ki mejijo ena na drugo.

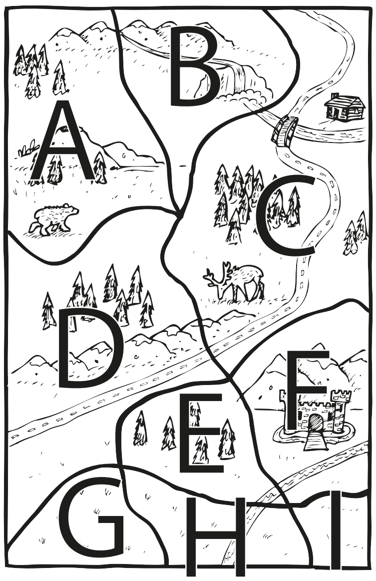
4. Otrokom, ki končajo prezgodaj, lahko predlagaš, da si izmislijo zemljevid, za katerega niti štiri barve ne bodo dovolj. Dokazano je, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami, torej ga bo naloga za nekaj časa zaposlila. ;) Otroci bodo verjetno našli zemljevide, za katere se bo zdelo, da zahtevajo več barv, vendar se bo izkazalo, da se motijo.

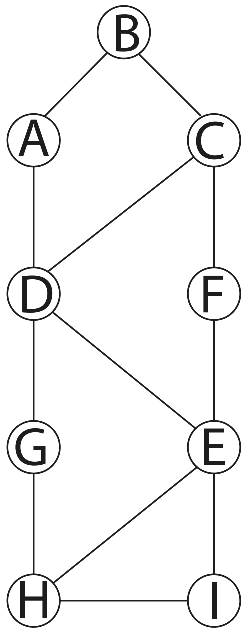
Zemljevidi, kot jih vidijo matematiki in računalnikarji

Razloži otrokom, da matematiki in računalnikarji zemljevide rišejo preprosteje. Ne zanimajo jih smreke in jelenčki, še oblike držav ne. Zanje je pomembno le, kateri dve državi sta sosedi. Namesto držav narišejo krogce ali kvadratke in povežejo tiste pare držav (se pravi krogcev), ki mejijo ena na drugo. Tako dobijo sliko, kakršni sta spodnji dve. Da, celo za to, kje je katera država, jim je vseeno: spodnji sliki sta zanje enaki, saj so enake vse povezave na njima. Takšni sliki matematiki pravijo "graf".



Namesto zemljevida barvajo krogce in pazijo, da dveh krogcev, ki sta povezana, ne pobarvajo z isto barvo. Podobno poenostavijo ostale zemljevide.





1. Otrokom razdeli graf s pole 13C. Naj ga pobarvajo. Spomni jih, da dve točki, ki sta povezani, ne smeta biti iste barve.
2. Povej, da ta graf pravzaprav predstavlja enega od zemljevidov, ki so jih barvali. Lahko odkrijejo, katerega? (Odgovor: gornji zemljevid.)
3. Pogovori se: je lažje barvati pravi zemljevid ali graf? Kaj je preglednejše? Lahko iz grafa hitreje razbereš, da potrebuješ vsaj tri barve? (Namig: glej E, H in I.)
4. Otroci naj spremenijo tudi ostale zemljevide v grafe in jih pobarvajo. Graf naj narišejo tako, da bo čim preglednejši; krogce lahko prestavljajo, kakor želijo, pazijo naj le na povezave.

Barvni sudoku

Naslednji pogovor izvedeš frontalno. V njem bodo otroci videli, kako je reševanje sudokujo pravzaprav povezano z barvanjem grafov.

Pravila sudokoja otroci najbrž poznajo. Preriši spodnji sudoku na tablo. Skupaj ga dopolnite s številkami od 1 do 4 tako, da bodo vsa števila v isti vrstici, istem stolpcu in v istem kvadratu različna. (Namig: obstaja polje, v katerem ne more biti nič drugega ko številka 3. Nato bodo našli polje, kjer je lahko le 2...)

			1
	4		
		2	
2			

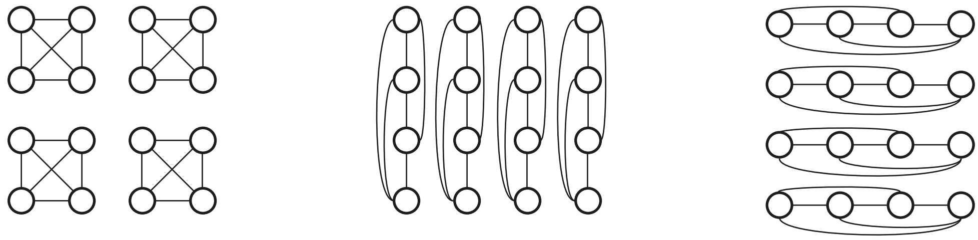
Zraven tega sudokujo nariši spodnji "barvni sudoku". Na voljo je modra, rdeča, rumena in zelena barva. Polja, ki so označena, pobarvaj, kot kaže slika. Ostala j epotrebno pobarvati tako da se v nobeni vrstici, v nobenem stolpcu in v nobenem od štirih manjših kvadratov nobena barva ne bo ponovila.

			rdeča
	zelena		
		modra	
modra			

Ko bodo otroci videli obe sliki, jih pripelji do tega, da bodo odkrili, da gre za eno in isto nalogo, le da enkrat uporabljamo številke, drugič barve. Če pozorno pogledamo, vidimo, da so vsa polja s številko 4 zelena, vse enice so rdeče... Reševanje številskega in reševanje barvnega Sudoka je ena in ista reč!

Barvanje sudokuja je enako barvanju zemljevidov. Tudi za sudoku velja, da sosednji polji ne smeta biti iste barve, vendar ima poleg tega še druge omejitve. Poskusimo prerisati sudoku v graf; namesto polj sudokuja bomo risali kroge in med seboj povezali tiste kroge, ki ne smejo biti iste barve (oziroma vsebovati iste številke).

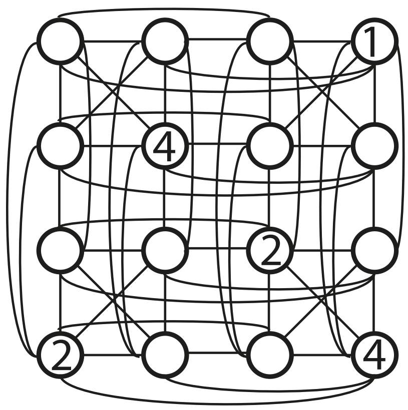
Da bomo lažje sledili, za začetek narišimo tri grafe.



Nariši levi graf in razloži, da so v njem povezani vsi pari polj v vsakem kvadratu: ta "sudoku" moramo pobarvati tako, da so barve v vsakem kvadratku različne. Čim bi uporabili dve enaki, bi bilo to očitno narobe, saj so povezani vsi pari točk. Na vrstice in stolpce pa ta graf ne pazi.

Preriši drugi graf. V njem so povezane vse točke iz vsakega stolpca. To nam preprečuje, da bi pobarvali z enako barvo dve polji iz istega stolpca.

Nariši še tretji graf. Ta je podoben drugemu, le da se ukvarja z vrsticami.



Če hočemo pravilno rešen sudoku, moramo preprečiti, da bi bili z isto barvo pobarvani dve polji iz istega kvadratka, iz istega stolpca ali iz iste vrstice. To pokažemo tako, da združimo vse tri prepovedi.

Celotnega grafa morda ne želiš v živo prerisati na tablo, zato ga projeciraj, imej na večjem papirju ali pa ga nariši že pred uro.

Da je to res ista reč, se lahko prepričamo: pobarvamo (ali oštevilčimo) kroge tako, kot smo pobarvali sudoku, pa bomo videli, da je vsak par, ki je povezan, različnih barv.

Kaj je lažje: reševati pravi sudoku ali barvati takšen graf? Pri zemljevidih smo videli, da je barvanje grafa lažje od barvanja pravega zemljevida. Tu pa je obratno: povezave v tem grafu so preveč prepletene, da bi jim lahko sledili in jih upoštevali. Reševanje sudokuja, takšnega, kakršen je, je preprostejše.

Računalniku pa je vseeno, zmeda ga ne moti. Programi, ki znajo sami rešiti sudoku (in tudi programi, ki jih sestavljajo) zato pri reševanju uporabljajo prav takšne grafe. Za "pravi", večji sudoku bi sestavil graf z 9 × 9 = 81 točkami in ogromno povezavami.

Če otroke zanima jim lahko poveš še, da število povezav zelo hitro narašča: v gornji sliki je 56 povezav, pri sudokuju 9 × 9 jih imamo 810, pri 16 × 16 jih je 4992.

(Če učitelj potrebuje ponovitev kombinatorike, bo za svojo domačo nalogo naračunal še, da je formula za število povezav v sudokuju s stranico n enako $n^2\left(\frac{3}{2}n-\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right)$.)

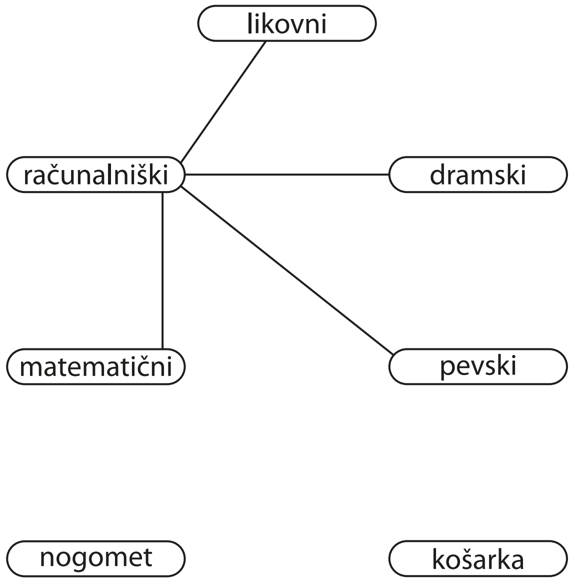
Krožki

Otroke spomni na problem krožkov.

1. Vprašaj otroke, ali mislijo, da nam to, da znamo barvati graf, kaj pomaga pri razporejanju krožkov.

2. Verjetno ne bodo videli, v čem bi bila zveza, zato jih povabi, naj narišejo graf. Krožki bodo kot "države" in dva krožka bosta povezana, če ne smeta biti na isti dan. Računalniški krožek ne sme biti istočasno kot likovni (zaradi Alenke), kot dramski (zaradi Anice) in kot matematični (zaradi Bernarde). Z nogometom in košarko ga ne povežemo, saj ni nikogar, ki bi želel tako na računalniški krožek kot na nogomet ali na košarko.

   Ob tej razlagi na tablo nariši spodnji graf. Otroci naj ga prerišejo in dodajo manjkajoče povezave.



3. Potem, ko otroci narišejo povezave vsak zase, to naredite še skupaj, da bodo videli, kako se tega sistematično lotiti. Najprej preveri, kateri krožki ne smejo biti skupaj z matematičnim, nato kateri ne smejo biti skupaj z dramskim in tako naprej. Pri vsakem krožku gledaš le krožke, ki mu sledijo na seznamu; likovni krožek, na primer, primerjaš le s košarko in nogometom, ne pa tudi matematiko, računalništvom ipd.

4. Vprašaj otroke, če zdaj znajo razporediti krožke. Glede na to, da smo se pravkar učili barvati grafe, bodo (že zaradi funkcijske fiksacije) verjetno predlagali, da bi graf krožkov pobarvali, čeprav morda ne bodo razumeli, čemu bi to služilo. Nič hudega; pusti jih, naj ga pobarvajo. Zadoščale bodo štiri barve.

5. Pojasni, kaj smo storili: vsaka barva bo ustrezala enemu dnevu. *Če dva krožka ne smeta biti na isti dan, smo ju povezali; ker sta povezana, nista iste barve, torej nista na isti dan.* Barvanje je torej vsakemu krožku priredilo dan.

6. Barve spremenimo v dneve. Naj bo, recimo, rumena ponedeljek, modra torek in tako naprej. Pojasni, da bi bil lahko ta razpored tudi drugačen – rumena bi lahko pomenila tudi sredo, torek pa bi bila rdeča...

7. Krožke nam je uspelo spraviti v štiri dni. Vprašaj učence, ali bi šlo tudi v tri? Če bi šlo: kako? Če ne: zakaj ne? (Odgovor: ne. matematični, računalniški, dramski in pevski so paroma nezdružljivi, kar se lepo vidi iz grafa. Torej mora biti vsak od teh krožkov na svoj dan.)

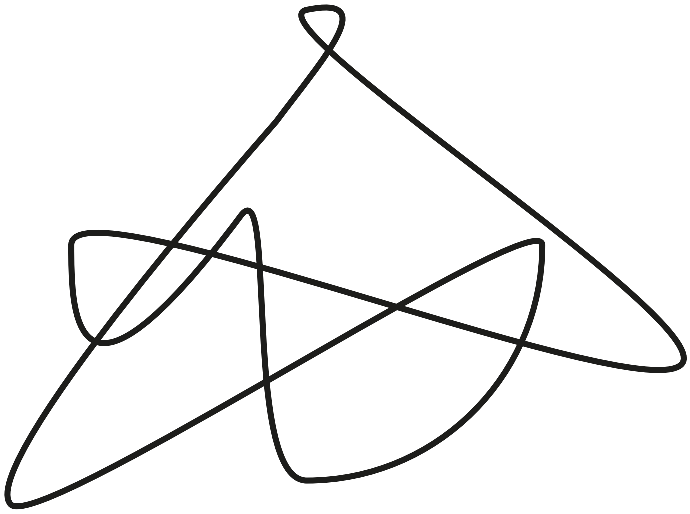
Pogovor

Barvanje zemljevidov, igranje sudoka in sestavljanje urnikov so ena in ista reč. Računalnikarjem je to všeč: če napišejo program, ki zna barvati grafe, ga lahko uporabijo za najrazličnejše namene.

Če bodo otroci razumeli, jih lahko spomniš, za kaj vse smo že uporabljali grafe. Z njimi smo najprej risali Blatni dol. Točke so ustrezale hišam in povezave so bile poti med hišami. Nato smo z njimi risali zemljevide gusarskega otočja; točke so bile otoki, povezave so bila ladijske povezave. Tokrat pa smo grafe uporabili tako, da so točke ustrezale krožkom, povezava pa je pomenila, da dva krožka ne smeta biti na isti dan. Povej jim, da so grafi zelo uporabna reč, saj lahko z njimi ponazarjamo še veliko drugih reči.

Zanimivost

Če na papir narišeš sklenjeno "čačko" (krivuljo, ki se konča tam, kjer se je začela), dobiš zemljevid, ki ga je vedno mogoče pobarvati s tremi barvami. Poskusi, pa boš videl, da je res. Če imaš kakega res nadarjenega otroka, lahko doma razmisli, zakaj je tako. (Če odkrije, mu svetuj študij topologije. ;))



Otroci lahko poskušajo narisati tudi veliko bolj zapleteno čačko, pa jo bodo vedno lahko pobarvali z dvema barvama.

Za učitelje: Za kaj gre?

Zgodba z barvanjem zemljevidov se je začela leta 1852, ko je Francis Guthrie odkril, da lahko pobarva zemljevid angleških grofij s štirimi barvami in zazdelo se mu je, da to velja za vsak zemljevid. Za problem so izvedeli matematiki in se z njim mučili več kot stoletje. Šele leta 1976 so končno dokazali, da je domneva resnična: vsak zemljevid (na ravnini) je mogoče pobarvati s štirimi barvami. Matematika in računalništvo sta polna odprtih problemov in nedokazanih domnev. Da so za reševanje tega problema potrebovali 120 let, nam je lahko v vzpodbudo, da bodo tudi današnji računalniški problemi nekoč rešeni.

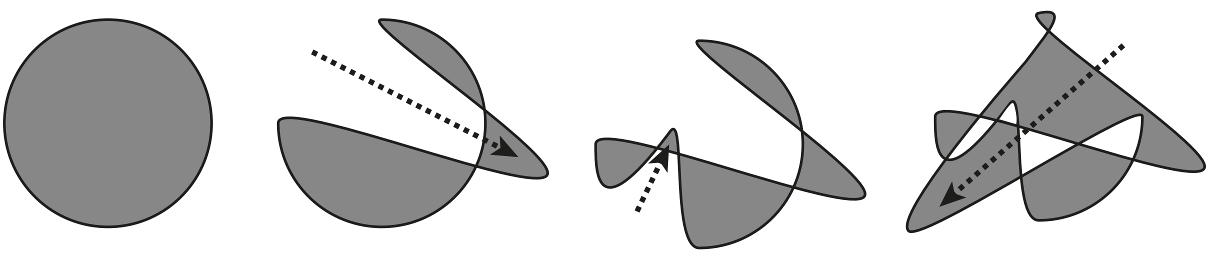
Barvanje grafov je pomemben problem zato, ker se nanj prevede kopica drugih problemih. Z otroki v tej aktivnosti spoznamo dva takšna primera: sudoku in sestavljanje urnikov. Veliko teh problemov je zelo težkih – ne konceptualno, temveč v tem smislu, da bi iskanje najboljše možne rešitve vzelo ogromno časa. Sestavljanje optimalnega urnika za šolo – recimo fakulteto, kjer si študenti lahko izbirajo predmete – bi lahko vzelo stoletja celo z najboljšimi računalniki in algoritmi.

Problem optimalnega grafa spada v razred problemov, za katere ne poznamo dobrih točnih algoritmov. Čas, potreben za iskanje optimalnega barvanja narašča eksponentno z velikostjo grafa. Približno si to lahko predstavljamo, kakor da se čas, ki je potreben za barvanje, podvoji z vsako novo dodano točko.

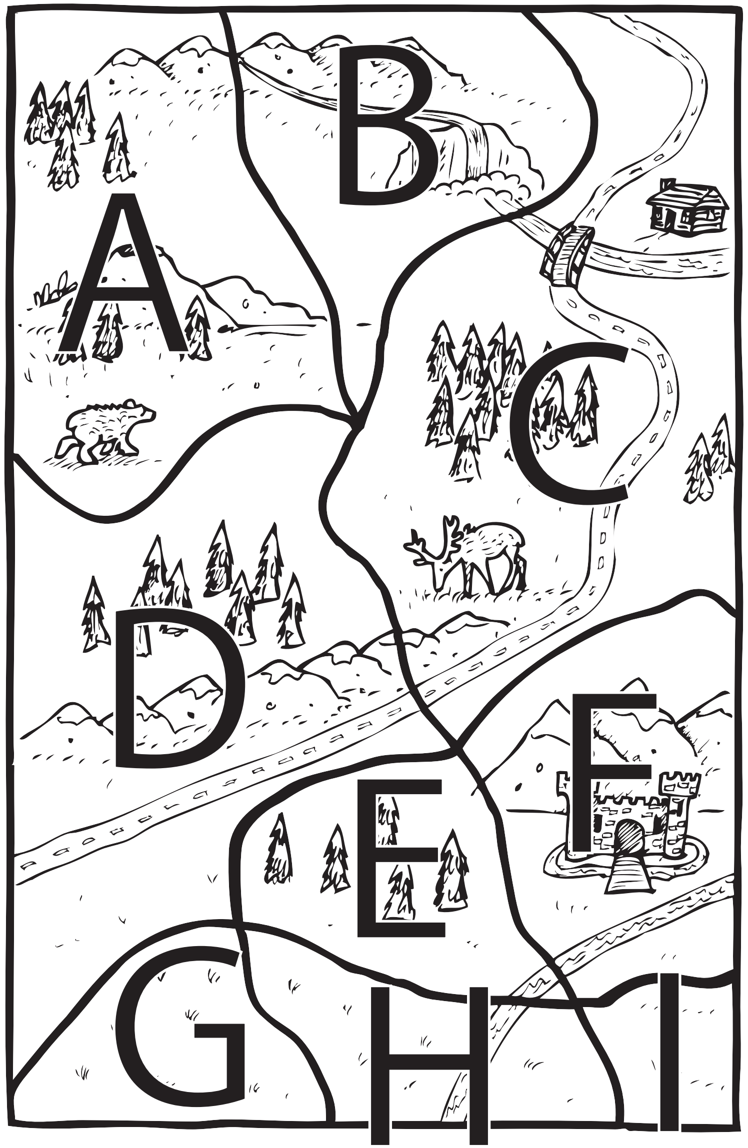
Podobnih problemov je še tisoče. Za njihovo reševanje uporabljamo postopke, ki v doglednem času dajo solidno rešitev. Ta sicer ni vedno optimalna (in celo če je, tega navadno ne vemo), zato pa jo vsaj imamo. Šola ima pač raje neoptimalen urnik, kot da mora na njegovo sestavljanje čakati celo stoletje.

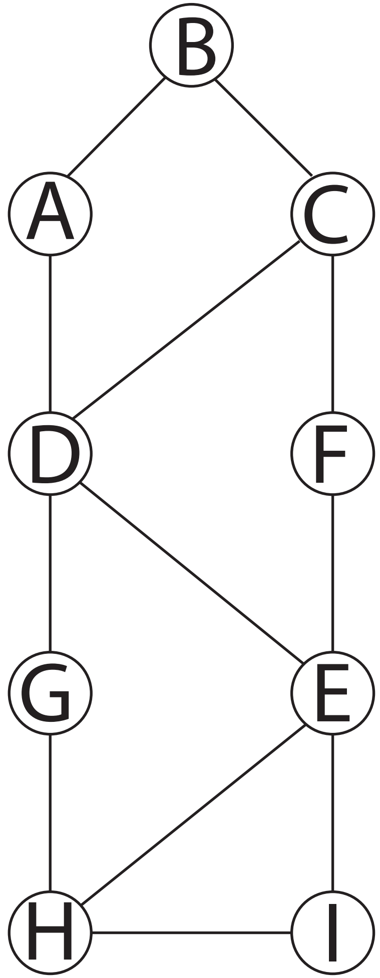
V naslednjih aktivnostih bomo spoznali še nekaj težkih problemov, na dodatkih za učitelje pa rekli še nekaj besed o naravi takšnih problemov.

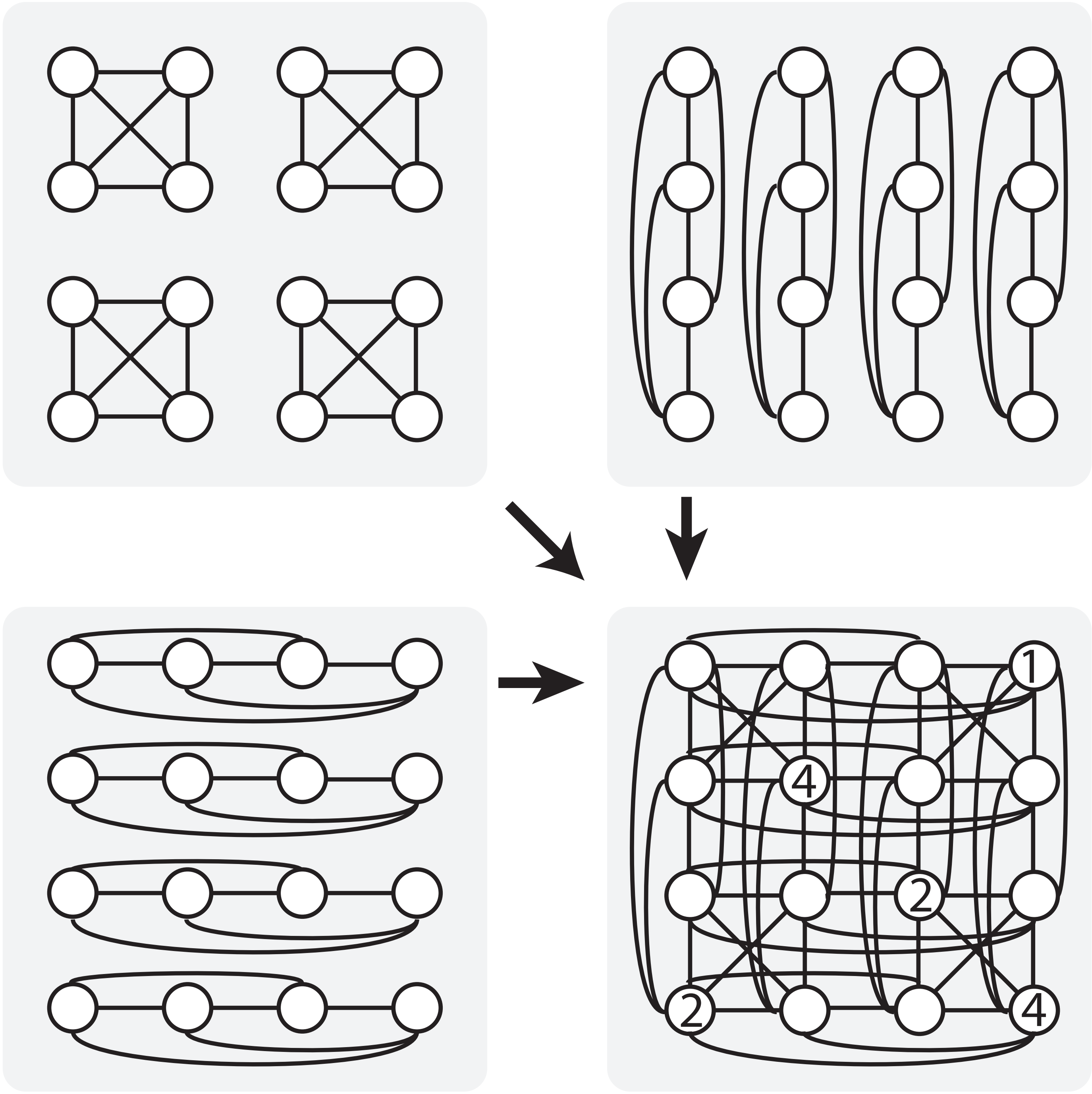
Kaj pa je s čačko? Če bi jo naredili iz vrvice in jo raztegnili, bi dobili krog. To je mogoče narediti z vsako čačko (če smo le dovolj previdni, da ne zavozlamo vrvice). Pobarvajmo krog s črno. Zdaj pa deformirajmo vrvico nazaj v čačko (praktično nemogoče, v teoriji pa seveda gre – če smo jo razvlekli v krog, jo lahko tudi nazaj). Predstavljajmo si, da je vrvica premazana s posebno snovjo, ki tistemu, prek česar jo vlečemo, spreminja barvo – belo postaja črno, črno pa belo. Zgodi se tole.



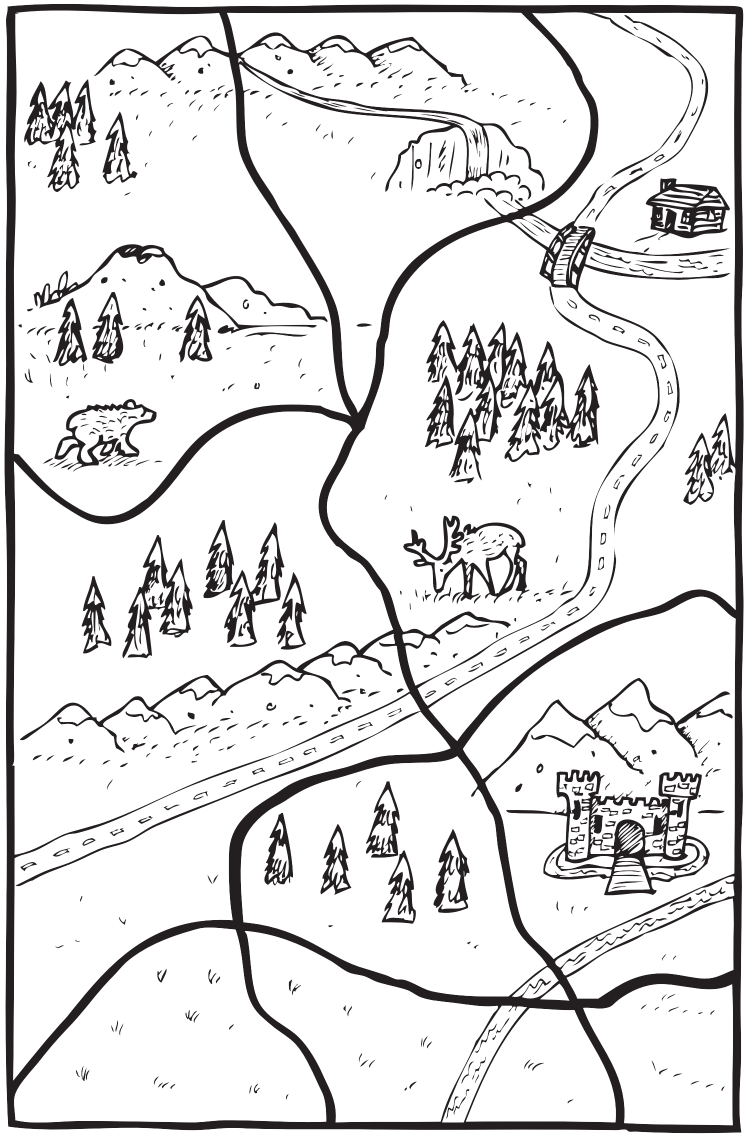
(a) (b) (c) (d)

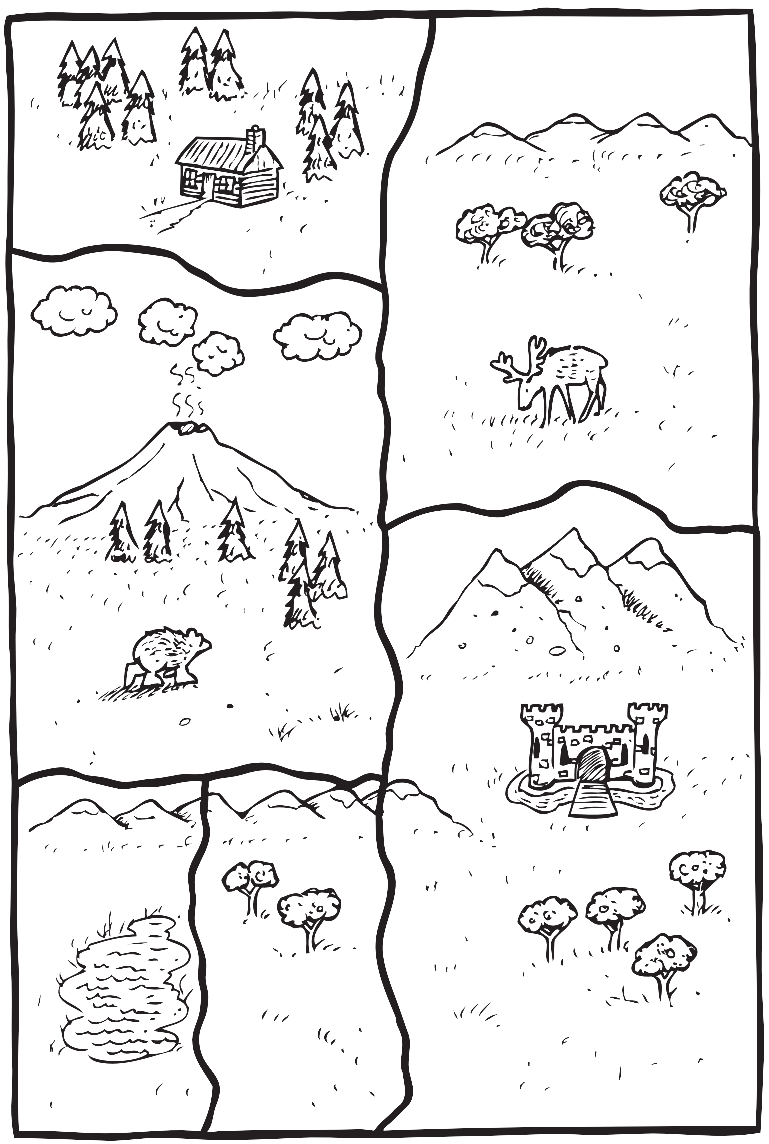

A
B
C
D
E
F
G
H
I


B
A
C
D
F
G
E
H
I

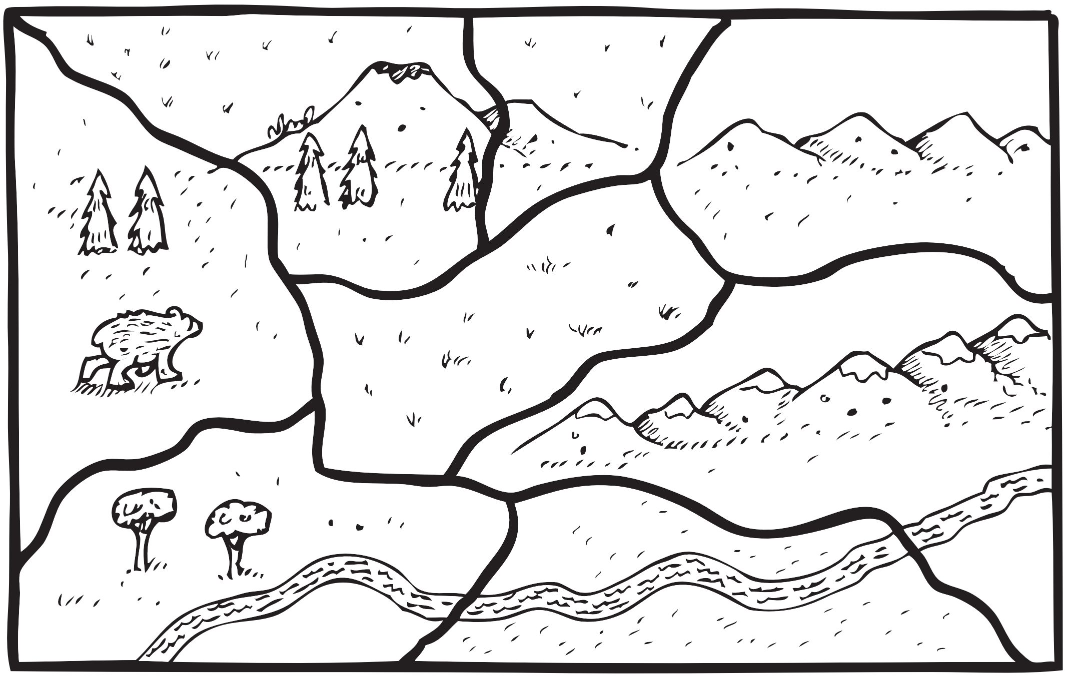

1
4
2
2
4

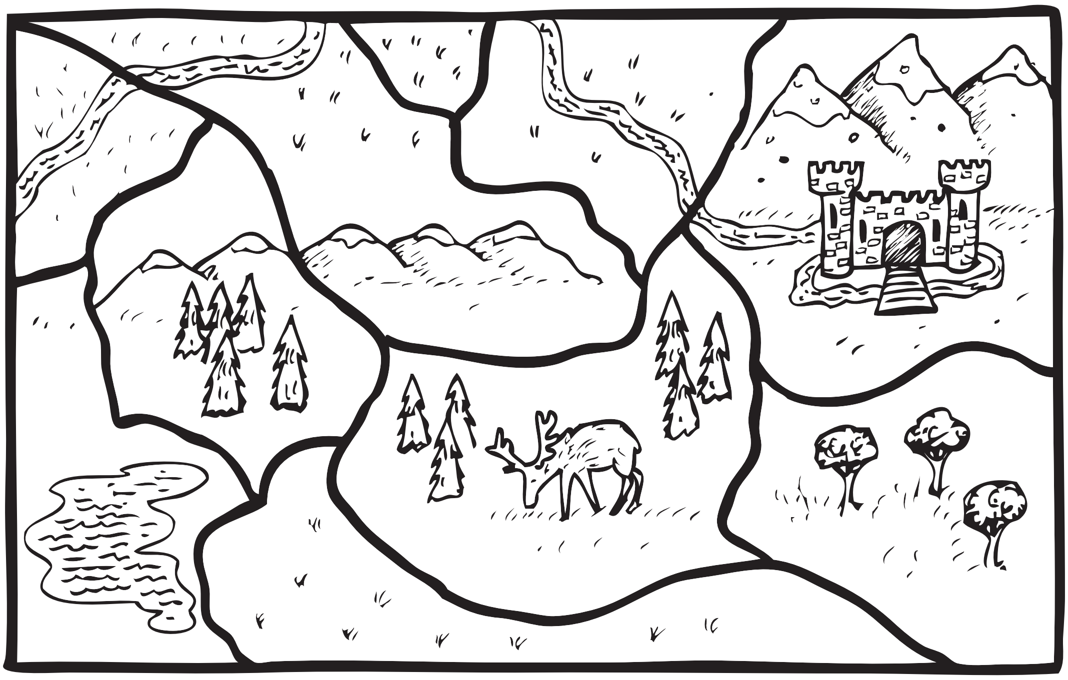
13A





13B





13C