Otimização Linear
Definições e Solução Gráfica

PPL: Hipóteses

- Aditividade: se em 1kg do produto i houver 200g do componete k e em 2kg do produto j houver 100g do componente k, então, na mistura deverá (3kg) deverá haver 300g do componente k

- Linearidade: se aij for a quantidade do componente i em uma unidade da mistura j então $a_{ij}x_j$ será a quantidade em x_j unidades da mistura

- Fracionamento: valores fracionários são aceitáveis

Definições

- Foma Padrão de um PPL:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&..... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_j \geq 0, \; j = 1,2,...,n
\end{aligned}
$$

- Em notação matricial:

$$
\begin{gathered}
\text{Min } f(x) = c^T x \\
Ax = b \\
x \geq 0
\end{gathered}
$$

C^T, x, b: vetores de dimensão n; A: matriz com m linhas e n colunas;

0: vetor nulo

Definições:

- Solução e Região Factível:

x é solução factível se satisfizer todas as restrições e condições de não negatividade. O conjunto de todas as soluções factíveis é chamado de região factível.

- Solução Ótima: é uma solução factível que fornece o melhor valor para função objetivo. Denota-se x^*

$f(x^*) \leq f(x)$, para qualquer x factível.

Transformações de problemas na forma padrão

- Existem variáveis não-positivas

Seja $x_k \leq 0$:

<u>Solução</u>: Criar variável x_k' tal que $x_k' = -x_k$

Assim, modelo terá variável $x_k' \geq 0$

Transformações de problemas na forma padrão

- Restrições do tipo $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + \underbrace{x_3}_{x_3 \geq 0} = 5$$

- Restrições do tipo $\geq$

$$x_1 + 6x_2 \geq 7 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 6x_2 - \underbrace{x_4}_{x_4 \geq 0} = 7$$

Transformações de problemas na forma padrão

- Existem variáveis livres, isto é, variáveis x_k que podem assumir qualquer valor real (negativo, nulo ou positivo)

Solução: Substituir x_k por $x_k^+ - x_k^-$, com $x_k^+ \geq 0$ e $x_k^- \geq 0$

- PPL é de maximização:

$$\max f(x) = \min \{-f(x)\}$$

Solução Gráfica de PPL’s

- Passos para resolver graficamente um PPL:

a) Escolher uma solução x viável qualquer

b) Traçar o hiperplano definido pela função objetivo passando pelo ponto x

c) Determinar o gradiente da função objetivo no ponto x

d) Caminhar no sentido e direção do gradiente da função objetivo até tangenciar a região viável (maximização). Caminhar no sentido contrário ao gradiente em problemas de minimização.

e) O ponto de tangência representa a solução ótima x^*

Solução Gráfica

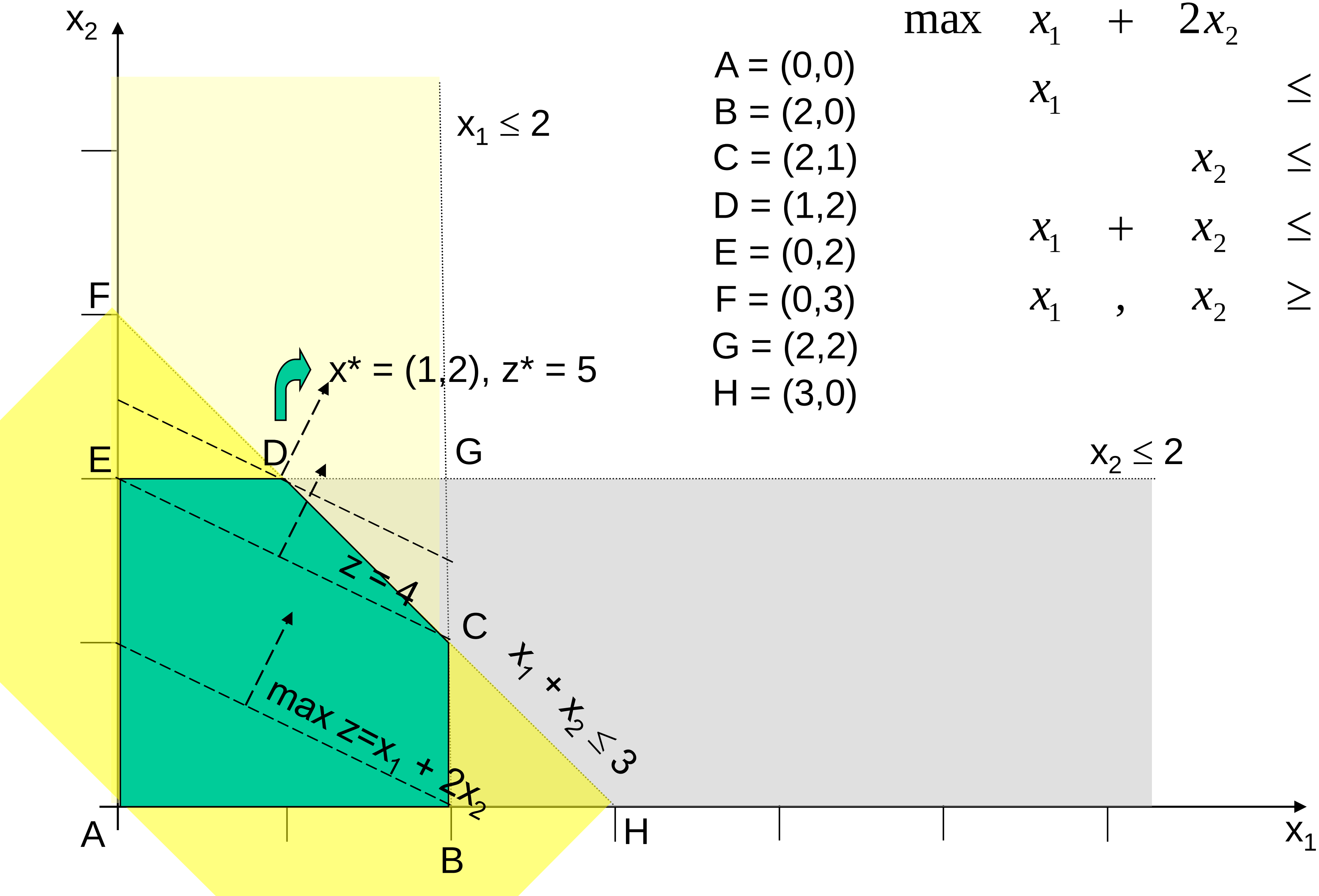
Resolver o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução Gráfica

$$\begin{array}{rcccccl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & & & \le & 2 \\ & & & x_2 & \le & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

A = (0,0)
B = (2,0)
C = (2,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)



Teorema Fundamental da Programação Linear

- O ótimo de um PPL, se existir, ocorre em pelo menos um vértice do conjunto de soluções viáveis.
- Situações que podem ocorrer com relação ao conjunto M de soluções viáveis:

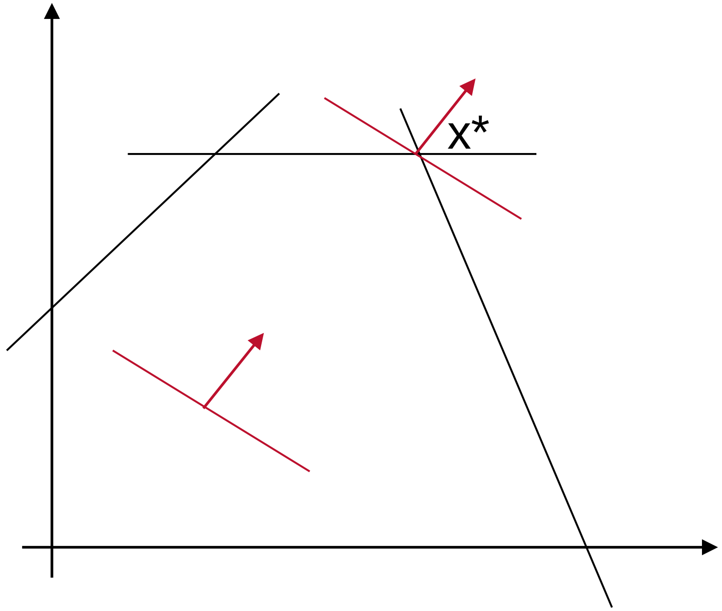
1) M = { }

   Neste caso não há solução viável => Não há solução ótima

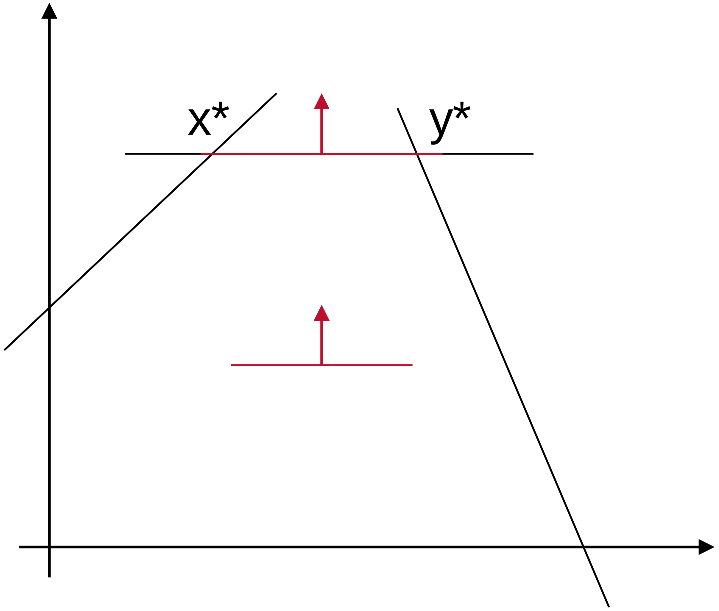
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

a) M é limitado



Única solução ótima, a qual é vértice

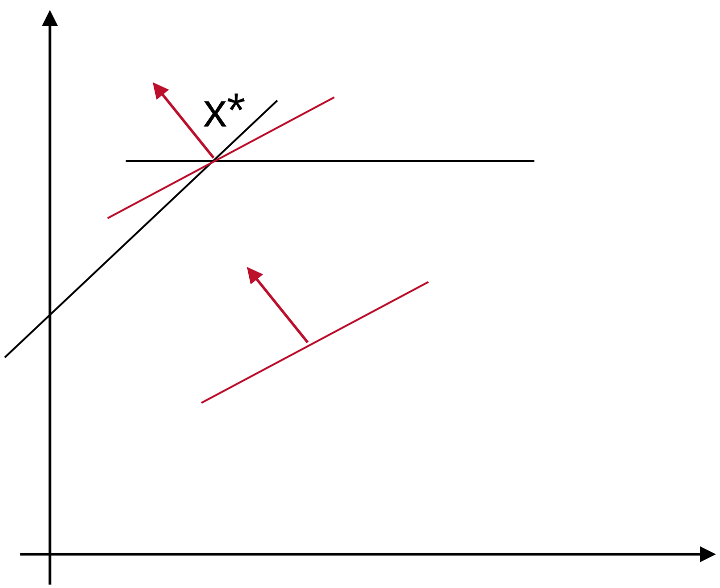


Infinidade de soluções ótimas, sendo duas vértices

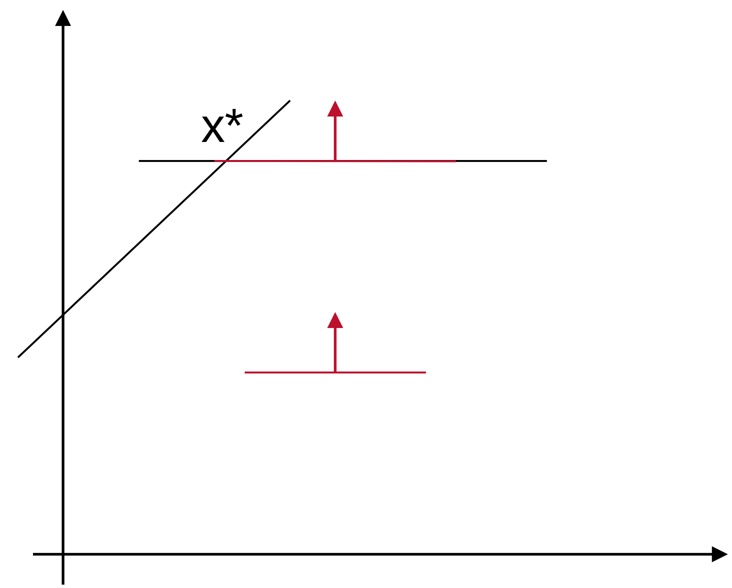
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

b) M é ilimitado



Única solução ótima, a qual é vértice

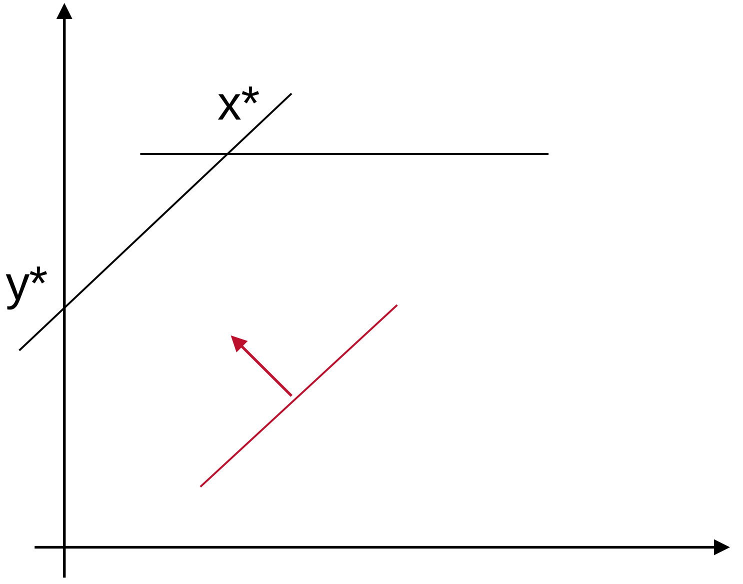


Infinidade de soluções ótimas, sendo uma vértice

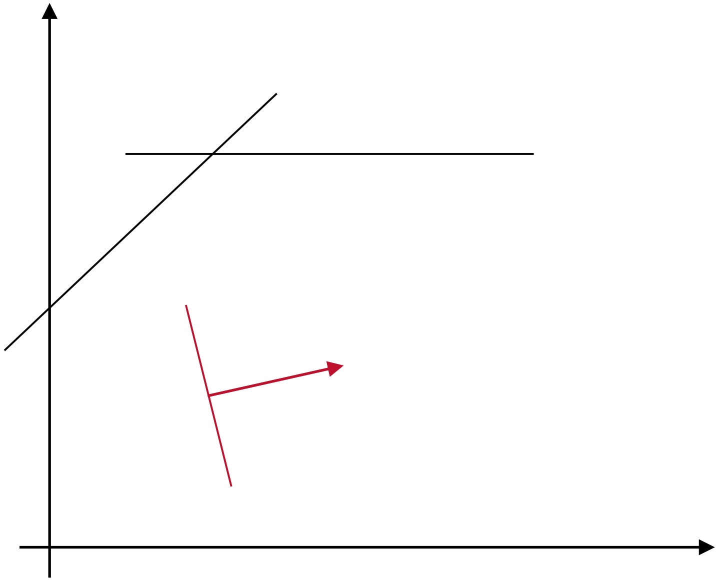
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

b) M é ilimitado



Infinidade de soluções ótimas, sendo duas vértices

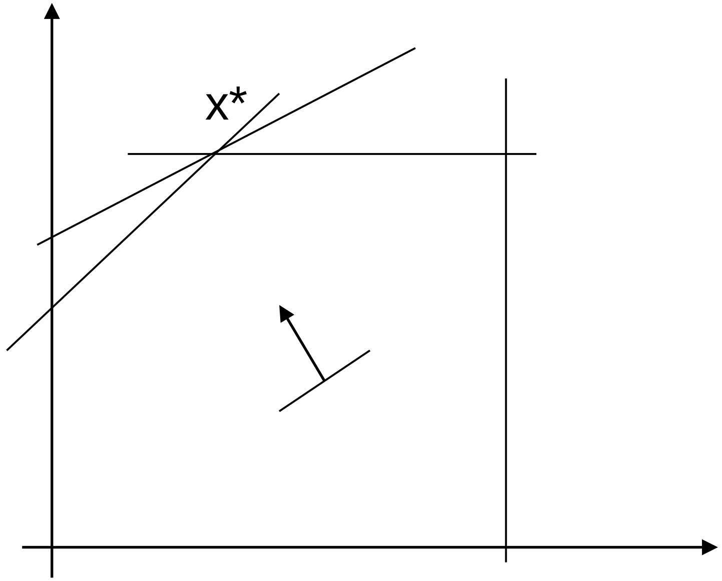


Não há soluções ótimas

Solução ótima ilimitada

Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio



Vértice obtido com interseção de retas diferentes : soluções ótima degenerada

Dificuldades nos métodos de solução!!!