Prosjekt 1 (oppgave 1-4)
MAT-0001
høst 2022

En sentral del av denne innleveringen er fokus på korrekt føring. Dere vil ikke få godkjent om innleveringen deres ikke er oversiktlig og godt ført.
En godt ført matematikkoppgave skal ikke bare inneholde riktig svar, men også en strukturert fremgangsmåte som kan overbevise selv den mest vrange personen du kjenner om at du har regnet riktig. God føring kan være så mangt, men under kommer noen huskeregler.

1. Det skal komme klart frem fra besvarelsen hva du ønsker å finne ut av. Kunne du gitt denne oppgaven til mamma, og hun hadde visst hva du ønsket å vise?

2. Dersom du bruker teoremer, formler eller annet skal dette skrives eksplisitt "vi bruker ABC-formelen", "det følger fra kjerneregelen at ...".

3. Alle mellomregninger trengs ikke og forklares, men du må ha med hovedtrekkene i fremgangsmåten din. Bare riktig svar og ingen fremgangsmåte gir ingen utteling.

4. Alle tekstoppgaver skal ha tekstsvar og grunngi om svaret ditt virker rimelig.

Vi kan svarene på oppgavene, disse er ikke interessante for oss. Det som er interessant er deres fremgangsmåter, forklaringer og løsninger. Du vil ikke få lov å skrive programvare, lage nye medisiner, eller gjøre utredninger på hvor det befinner seg olje, om du ikke kan argumentere overbevisende om at dine utregninger er korrekte.

Oppgave 1

a) Velg en planteart som produserer blomster og tell antall kronblad på $k = 10$ forskjellige blomster for den valgte arten. Lag en graf med antall kronblad på $x-$aksen og antall blomster på $y-$aksen. Denne grafen er en visuell representasjon av en funksjon $f(x)$, hvor $x = 1, 2, ...$ er antall kronblad, og $f(x)$ viser hvor mange av de k plantene som har x kronblad.

b) Gjenta oppgave 1a) med $n = 3$ forskjellige blomsterproduserende planter.
Lag en graf for hver plantetype.

c) La $g(x)$ være en funksjon som for hver x gir det totale antall blomster, fra tellingene utført i oppgave 1a) og 1b), med x kronblad. Lag en graf av denne funksjonen slik som i 1a) og 1b). Fra denne grafen observerer du at noen antall kronblad synes å forekomme spesielt ofte. Hvilke antall er dette?

d) Fibonaccitallene er en mengde naturlige tall unikt bestemt som

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Bruk denne formelen til å beregne de 10 første Fibonaccitallene.
Hvor mange av de mest forekommende antall kronblad fra oppgave 1c) var Fibonaccitall?

e) Vis at for Fibonaccitallene gjelder

$$a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1} - a_n \cdot a_{n-1}.$$

Regn ut a_n^2 for $n = 4, 5$ og 6 ved hjelp av denne formelen.

f) Vis at man kan regne ut summen av de n første Fibonacci tallene ved hjelp av formelen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_{n+2} - 1.$$

Regn ut summen av de 10 første Fibonacci tallene ved hjelp av denne formelen.

g) Vis ved direkte numerisk beregning med desimaltall at når n vokser over alle grenser nærmer forholdet a_{n+1}/a_n seg en konstant, som vi betegner med ϕ.
Finn konstanten ϕ med en nøyaktighet på fire siffer. Dette oppnår dere ved å beregne forholdet a_{n+1}/a_n for så store n at det er ingen endring i de fire første sifrene når en går fra n til $n+1$.

h) Det er gitt at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

er lik konstanten ϕ.
Vis at denne konstanten er en løsning til likningen

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

i) Vis at

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

er den eneste positive løsningen av likningen i 1h).

j) Vis at den negative løsningen av likningen i 1h) kan skrives som $\psi = -1/\phi$.

k) Vis at

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1} \quad \text{for alle} \quad n \geq 1.$$

l) La a og b være vilkårlige reelle tall og definer for $n = 0, 1, 2, ...$

$$G_n = a\phi^n + b\psi^n.$$

La $a = 1/2$, $b = 3/2$ og beregn G_n for $n = 1, 2, 3, 4$.

m) Vis ved direkte regning at dersom

$$a = \frac{5+\sqrt{5}}{20},$$

$$b = \frac{5-\sqrt{5}}{20},$$

så er $G_1, ..., G_4$ rasjonale tall .

Oppgave 2

1) La P, V, a, b og T være benevnte størrelser hvor benevningene er gitt ved

$$[P] = \mathrm{Pa}\,(\mathrm{Pascal})$$

$$[V] = \mathrm{m}^3$$

$$[a] = \mathrm{Pa}^2/\mathrm{m}$$

$$[T] = \mathrm{K}\,(\mathrm{Kelvin})$$

$$[b] = \mathrm{K}/\mathrm{m}^2$$

a) Forklar kort enhetene Pa (Pascal) og K (Kelvin).

b) Vis at

$$\Phi = \frac{Pa^{-\frac{1}{2}}bV^{\frac{1}{2}}}{T}$$

er en ubenevnt avledet størrelse.

c) La størrelsene P, V, a, b og T ha måltall:

$$< P >= 1,2$$

$$< V >= 0,81$$

$$< a >= 0,01$$

$$< b >= 300$$

$$< T >= 120$$

Regn ut måltall for størrelsen Φ fra b).
Bekreft svaret ditt ved å vise at dersom vi endrer enheter

$$\mathrm{m} \rightarrow \mathrm{mm}$$

så endres ikke måltallet for størrelsen Φ.

2) Ganske ofte betrakter vi ikke ekte men **ideell gass** når vi lager modeller for fysiske prosesser. En ideell gass er en forenklet tilnærming til virkelige gasser.
Hva er en forskjell mellom en ideell gass og en ekte gass?

- Ideell gass har ikke noe bestemt volum mens ekte gass har bestemt volum.
- Ideell gass har ingen masse mens ekte gass har masse.

- Kollisjon av ideelle gasspartikler er elastisk men ikke-elastisk for ekte gass.
- Ingen energi involvert under kollisjon av partikler i ideell gass. Kollisjon av partikler i ekte gass tiltrekker seg energi.

En ideell gass følger **tilstandslikningen**

$$PV = Nk_BT,$$

der P er trykk ved temperatur T (målt i Kelvin), N er antall molekyler av gassen (vi setter N = konstant for en gitt gassmasse) og konstanten k_B kalles Boltzmanns konstant.

a) Boltzmanns konstant k_B har måltall $1,3807 \cdot 10^{-23}$.
Finn benevningen til k_B.

b) **Isobar prosess**
En isobar prosess er en termodynamisk prosess der trykket P er konstant.

i) Bruk tilstandslikningen til ideell gass ovenfor for å vise at for isobar prosess er

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

der V_i $(i = 1, 2)$ er volumet av gassen ved temperatur T_i $(i = 1, 2)$.

ii) Finn start- og sluttemperatur for en ideell gass hvis volumet til gassen redusert til det halve ved isobar avkjøling med 290 K.

iii) Tegn grafen til isoprosessen i ii) med temperatur T på $x-$aksen og volum V på $y-$aksen.

c) **Isokor prosess**
En isokor prosess er en termodynamisk tilstandsendring som foregår med konstant volum V.

i) Bruk tilstandslikningen til ideell gass ovenfor for å vise at for isokor prosess er

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

der P_i $(i = 1, 2)$ er trykket til gassen ved temperatur T_i $(i = 1, 2)$.

ii) Finn sluttemperaturen for en ideell gass hvis trykket til gassen redusert med $1,5$ ganger ved isokor prosess. Starttemperaturen var 480 K.

Oppgave 3

Vi skal sette sammen et måltid av x hg potetgull og y hg Coca Cola. Måltidet skal settes sammen slik at man får i seg:

1. Høyst 4 000 kJ energi
2. Minst 120 g karbohydrater
3. Høyst 8 g proteiner
4. Minst 10 g fett

Vi skal sette sammen måltidet slik at størrelsen av trivselsfaktoren til diett

$$T = 15x + 4y$$

blir størst mulig.
Vi bruker følgende tabell over næringsinnhold for potetgull og Coca Cola (per 100 gram potetgull eller Coca Cola):

	Energi	Protein	Karbohydrat	Fett
Potetgull	2 000 kJ	8 g	50 g	30 g
Coca Cola	200 kJ	0 g	10 g	0 g

a) Forklar at x og y må tilfredstille ulikhetene

$$10x + y \leq 20$$

$$5x + y \geq 12$$

$$x \geq 1/3$$

$$x \leq 1$$

b) Skraver området som x og y må tilfredstille i $(xy)-$planet .

c) Finn den verdien av x og y som maksimaliserer størrelsen T ovenfor.
Forklar fremgangsmåten og angi den maksimale verdien av T.

Figure 1: Fuji

Oppgave 4

1) I denne deloppgaven skal vi studere funksjonen som beskriver radiusen til det høyeste fjellet i Japan, bedre kjent som Fuji.

For enkelhetsskyld estimerer vi høyden til Fuji som 4 km, og siden fjellet er omtrent sirkulært kan vi si at diameteren til basen er omtrent 40 km.

a) Funksjonen under gir bindestrek r til Fuji som en funksjon av hvor høyt vi befinner oss over bakken (z) i kilometer:

$$r^2 = 100z - 400\sqrt{z} + 400.$$

Velg noen verdier for z og beregn r.
Hva er minste og største gyldige $z-$verdi?
Passer radiusen r til opplysningene gitt i starten av deloppgaven?

b) Vis ved å løse likningen i a) med hensyn på z at vi har

$$z(r) = \left(2 \pm \frac{r}{10}\right)^2, \quad -20 \leq r \leq 20.$$

c) Tegn grafen til funksjonen $z(r)$.

2) La $f(x)$ være en funksjon gitt ved

$$f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^2+2x-3} \Bigg/ \frac{x-2}{x^2+2x-8}$$

a) Skriv uttrykket for $f(x)$ så enkelt som mulig.
Hint: Bruk $(abc)-$formelen.

b) Bestem definisjonsmengden for $f(x)$.

c) Finn eventuelle horisontale og vertikale asymptoter for $f(x)$.

d) Finn skrå asymptoter for $f(x)$.

e) Skisser grafen til $f(x)$ ut fra det du fant i a)-d).
Pass på D_f!
Scan grafen med bruk av "Microsoft Office Lens" eller en tilsvarende app.
Resultatet må lagres som PDF.

f) Skraver området M begrenset av $x-$aksen og skrå og vertikal asymptoter for $f(x)$ (som du fant i c) og d)).

  i) Finn alle vinklene og sidelengdene til området M.

  ii) Regn ut arealet til området M.