Oppgave 4)

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x)$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

a) Finn polynomene $P_n(x)$ for $n = 2, 3, 4, 5, 6$

$n = 1$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{2 \cdot 1 + 1}{1+1} \cdot x \cdot P_1(x) - \frac{1}{1+1} \cdot P_0(x) \\ &= \frac{3}{2} \cdot x \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{2 \cdot 2 + 1}{2+1} \cdot x \cdot P_2(x) - \frac{1}{2+1} \cdot P_1(x) \\ &= \frac{5x}{3} \cdot \left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot x \\ &= \frac{15x^3 - 5x}{6} - \frac{2x}{6} \\ &= \frac{15x^3 - 7x}{6} \end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \frac{2 \cdot 3 + 1}{3+1} \cdot x \cdot P_3(x) - \frac{1}{3+1} \cdot P_2(x) \\ &= \frac{6x}{4} \cdot \left(\frac{15x^3 - 7x}{6}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right) \\ &= \frac{90x^4 - 42x^2}{24} - \frac{3x^2 - 1}{8} \\ &= \frac{30x^4 - 17x^2 + 1}{8} \end{aligned}$$

$n = 4$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= \frac{2 \cdot 4 + 1}{4+1} \cdot x \cdot P_4(x) - \frac{1}{4+1} \cdot P_3(x) \\ &= \frac{9x}{5} \cdot \left(\frac{30x^4 - 17x^2 + 1}{8}\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{15x^3 - 7x}{6}\right) \\ &= \frac{270x^5 - 153x^3 + 9x}{40} - \frac{15x^3 - 7x}{30} \\ &= \frac{3 \cdot (270x^5 - 153x^3 + 9x) - 4 \cdot (15x^3 - 7x)}{120} \\ &= \frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120} \end{aligned}$$

$n = 5$

$$\begin{aligned} P_6(x) &= \frac{2 \cdot 5 + 1}{5+1} \cdot x \cdot P_5(x) - \frac{1}{5+1} \cdot P_4(x) \\ &= \frac{11x}{6} \cdot \left(\frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{30x^4 - 17x^2 + 1}{8}\right) \\ &= \frac{8910x^6 - 5709x^4 + 605x^2}{720} - \frac{(30x^4 - 17x^2 + 1)}{48} \\ &= \frac{8910x^6 - 5709x^4 + 605x^2 - 15 \cdot (30x^4 - 17x^2 + 1)}{720} \\ &= \frac{8910x^6 - 5709x^4 + 605x^2 - 450x^4 + 255x^2 - 15}{720} \\ &= \frac{8910x^6 - 6159x^4 + 860x^2 - 15}{720} \end{aligned}$$

$n = 6$

$$\begin{aligned} P_7(x) &= \frac{2 \cdot 6 + 1}{6+1} \cdot x \cdot P_6(x) - \frac{1}{6+1} \cdot P_5(x) \\ &= \frac{13x}{7} \cdot \left(\frac{8910x^6 - 6159x^4 + 860x^2 - 15}{720}\right) - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120}\right) \\ &= \frac{13x \cdot (8910x^6 - 6159x^4 + 860x^2 - 15)}{5040} - \frac{6 \cdot (810x^5 - 519x^3 + 55x)}{6 \cdot 840} \\ &= \frac{(115830x^7 - 80067x^5 + 11180x^3 - 195x) - (4860x^5 - 3114x^3 + 330x)}{5040} \\ &= \frac{115830x^7 - 84927x^5 + 14294x^3 - 525x}{5040} \end{aligned}$$

b) Bruker "Nullpunkt(Polynom)"-funksjon i Geogebra til å finne nullpunktene til polynomene. (Se graf)

Vi ser at f.eks. $P_3(x)$ har 3 nullpunkter og at $P_5(x)$ har 5 nullpunkter i intervallet $[-1, 1]$.
Altså vil $P_n(x)$ ha n antall nullpunkter.

Nullpunktene til $P_n(x)$ for $n = 2, 3, \ldots, 6$:

$P_3(x)$: $x_1 = -0{,}68$, $x_2 = 0{,}68$, $x_3 = 0$

$P_4(x)$: $x_1 = -0{,}71$, $x_2 = -0{,}26$, $x_3 = 0{,}26$, $x_4 = 0{,}71$

$P_5(x)$: $x_1 = -0{,}71$, $x_2 = -0{,}37$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}37$, $x_5 = 0{,}71$

$P_6(x)$: $x_1 = -0{,}71$, $x_2 = -0{,}4$, $x_3 = -0{,}14$, $x_4 = 0{,}14$, $x_5 = 0{,}4$, $x_6 = 0{,}71$

$P_7(x)$: $x_1 = -0{,}71$, $x_2 = -0{,}42$, $x_3 = -0{,}23$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0{,}23$, $x_6 = 0{,}42$, $x_7 = 0{,}71$

c) $P_3(x) = \frac{15x^3 - 7x}{6}$ $\qquad$ $P_3'(x) = \frac{45x^2 - 7}{6}$

$P_4(x) = \frac{30x^4 - 17x^2 + 1}{8}$ $\qquad$ $P_4'(x) = \frac{120x^3 - 34x}{8}$

$P_5(x) = \frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120}$ $\qquad$ $P_5'(x) \frac{4050x^4 - 1557x^2 + 55}{120}$

$P_6(x) = \frac{8910x^6 - 6159x^4 + 860x^2 - 15}{720}$ $\qquad$ $P_6'(x) = \frac{53460x^5 - 24636x^3 + 1720x}{720}$

$P_7(x) = \frac{115830x^7 - 84927x^5 + 14294x^3 - 525x}{5040}$ $\qquad$ $P_7'(x) = \frac{810810x^6 - 424635x^4 + 42882x^2 - 525}{5040}$

Har implementert $P_n'(x)$ i Geogebra, se graf

d) Likt i b) ser vi at f.eks $P_4'(x)$ har 3 nullpunkter og at $P_7'(x)$ har 6 nullpunkter i intervallet $[-1, 1]$

Når vi deriverer polynomene går vi fra x^t til x^{t-1}, $t \in \mathbb{Z}$, etter definisjon av derivasjon: $x^{a}{}' = a \cdot x^{a-1}$.
Då går vi også ned i antall nullpunkt og $P_n'(x)$ vil da ha $(n-1)$ antall nullpunkter.

e) $f(x) = \begin{cases} P_3(x) & \text{for } -1 \leq x < 0 \\ P_5(x) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{15x^3 - 7x}{6} & \text{for } -1 \leq x < 0 \\ \frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120} & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$D_f = [-1, 1]$

i) Er $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$?
$f(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ hvis og bare hvis
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$f(0) = \frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120} = \frac{810 \cdot 0^5 - 519 \cdot 0^3 + 55 \cdot 0}{120} = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{810x^5 - 519x^3 + 55x}{120} = \frac{810 \cdot 0^5 - 519 \cdot 0^3 + 55 \cdot 0}{120} = 0$

Altså $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, og $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$.

ii) Er $f(x)$ deriverbar i $x = 0$?
Vi vet fra teorem om deriverbarhet at en funksjon $f(x)$ er deriverbar i et punkt $x = a$ hvis:
1. Funksjonen er deriverbar i $x = a$
2. $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$

Ettersom vi allerede har vist at $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$, og at siden $a = 0$ vil $a^- = a^+$ siden $\pm 0 = 0$.
Vi konkluderer dermed at $f(x)$ er deriverbar i $x = 0$.

iii) Last til grafen under.