Oppgave 2.1 a)

Førsteordens:

Når vi snakker om orden til en differensiallikning snakker vi som oftest om den høyeste ordens deriverte av den ukjente funksjonen som forekommer i likningen. Hvis den høyeste ordens deriverte bare er deriverte én gang er det en Første ordens differensiallikning, og om den er derivert to gang er det en Andre ordens differensiallikning.

Initialbetingelse:

Initialbetingelse kan også kalles for en startbetingelse, og er svaret til *y(0)* i likningen.

Separabel:

En separabel differensiallikning er en likning som skrives på formen $\frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$. Funksjonen *g* i likningen er en funksjon av variabelen *y,* som igjen er en funksjon av variabelen *x*. Da kan funksjonen *g* skrives på forme *g* = *g(y(x))*.

Integrerende faktor:

Vet en differensiallikning på formen $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$, kan vi regne ut $\rho(t) = e^{\int P(t)dt}$. Dette kalles for den integrerende faktor. Hvis vi ganger begge sidene av likningen med det integrerende faktor, ser vi at vi kan utføre produktregelen baklengs for å få likningen på formen $\frac{d}{dt}[\rho(t) \cdot y(t)] = Q(t) \cdot \rho(t)$. Da kan vi integrere begge sidene med hensyn på *t*. Da får vi en likning som vi kan løse med hensyn på *y(t)* for å få løsningen til differensiallikningen.

Oppgave 2.1 b)

Løsning ved integrerende faktor:

$y' + P(t)y = Q(t)$

$P(t) = 2$

$Q(t) = 3$

$y' + 2y = 3$

$y' = \frac{dy}{dt}$

Integrerende faktor:

$\rho(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}, \quad C = 0$

$\frac{dy}{dt} + 2y = 3$

$e^{2t} \cdot \frac{dy}{dt} + 2e^{2t} \cdot y = 3e^{2t}$

$\frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y] = 3e^{2t} \longrightarrow \frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y(t)] = 2e^{2t} \cdot y(t) + e^{2t} \cdot y'(t)$

$\int \frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y] = \int 3e^{2t}\,dt$

$e^{2t} \cdot y = \frac{3}{2}e^{2t} + C \quad | : e^{2t}$

$\underline{\underline{y = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}}}$

Løsning ved separabel likning:

$$y' + 2y = 3 \Rightarrow y' = (-2y+3)\cdot 1$$

$$g(y) = -2y+3$$
$$f(t) = 1$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \quad \Big|: g(y)$$

$$\frac{dy}{dt\,g(y)} = f(t) \quad \Big|\cdot dt$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt$$

$$\int \frac{1}{-2y+3}\,dy = \int 1\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\cdot \ln(|-2y+3|) = t + C$$

$$e^{-\frac{1}{2}}(-2y+3) = e^{t} + C$$

$$-2y+3 = \frac{e^{t}}{e^{-\frac{1}{2}}} + C$$

$-2y = e^{\frac{1}{2}t} + C$, $C-3=C$ siden C bare er en konstant

$$\underline{\underline{y = \frac{(e^{\frac{1}{2}t}+C)}{-2}}}$$

Vi løser altså likningen $y'+2y=3$

Vi kan løse den ved hjelp av integrerende faktor og få løsningen:

$$y = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Det er også en seperabel diff. likning som gir løsningen:

$$y = \frac{(e^{\frac{1}{2}t}+C)}{-2}$$

$y'+2y=3$ er altså et eksempel på en differensiallikning som kan løses både ved integrerende faktor og som en seperabel likning.

$C = 1$

-5 5

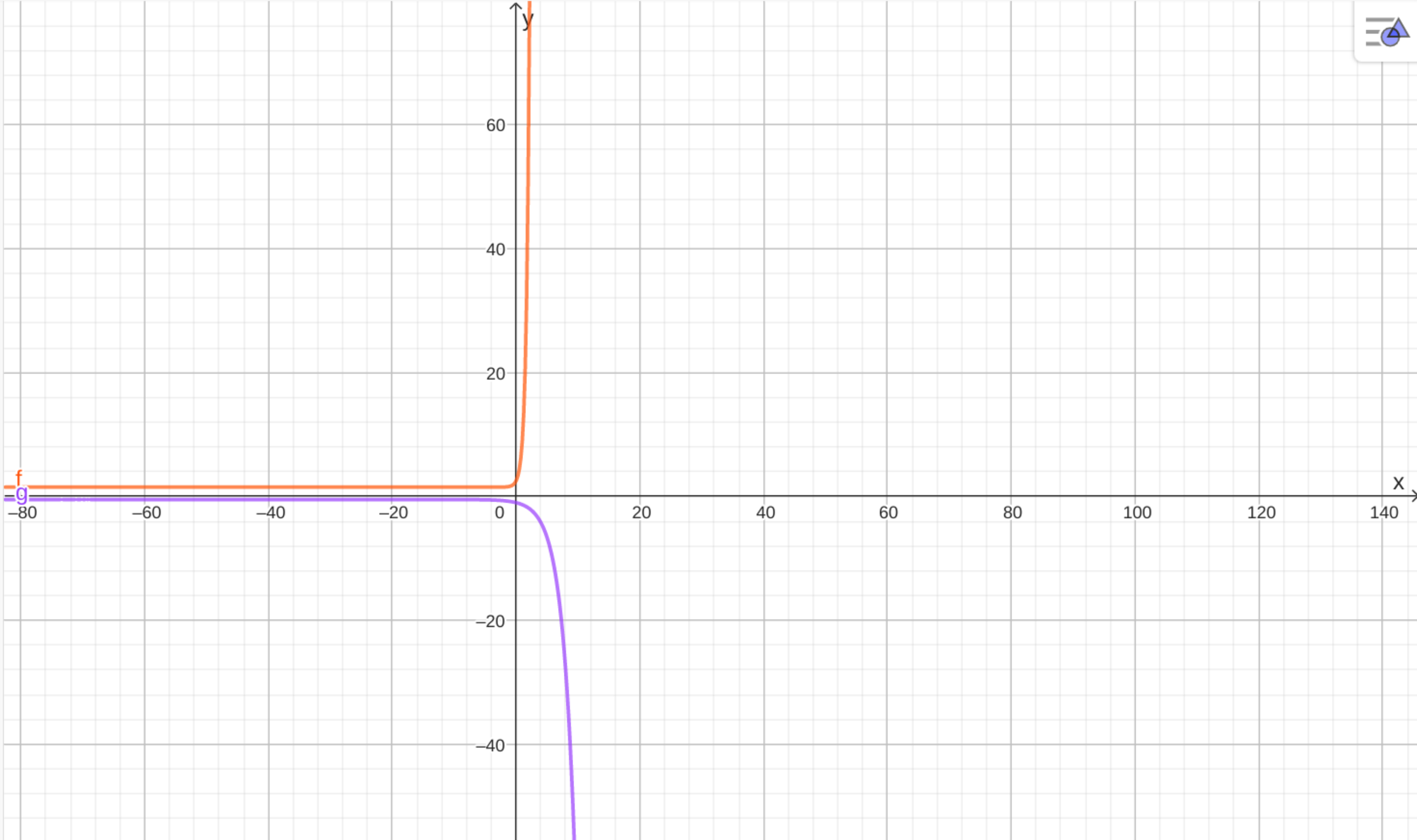
$$f(t) = C\, e^{2t} + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow 1\, e^{2t} + \frac{3}{2}$$

$$g(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t} + C}{-2}$$

$$\rightarrow \frac{e^{\frac{1}{2}t} + 1}{-2}$$

Skriv inn...



Oppgave 2.2)

$y'(x) = 2\sqrt{y(x)}$, Intervallet $(1,0)$

$f(t) = 2$

$g(y) = \sqrt{y}$

$y' = \frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = g(y)\,f(t) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int 2\,dt$

$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int 2\,dt$

$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2t + C$

$2\sqrt{y} = 2t + C$

$\sqrt{y} = t + C$

$\underline{\underline{y = (t + C)^2}}$

Vi har en teorem som sier at:

La f og g være funksjoner som er definert for alle reelle tall. Anta at f er kontinuerlig, og at g er deriverbar med kontinuerlig derivert. Betrakt differensiallikningen

$\frac{dy}{dt} = f(t)\,g(y)$

Gjennom hvert punkt (t_0, y_0) i ty-planet går det da nøyaktig én integralkurve.

Ved vår diffrensial likning er $g(y)$ ikke deriverbar i $y = 0$. Vi ser også at $C = 1$ og $C = -1$ gir samme svar i $y(0)$, tross det gir 2 forskjellige integralkurver som vist under.

$f(t) = (t+1)^2$

$g(t) = (t-1)^2$

$A = (0, 1)$

Skriv inn...