MAT1140, H-16

Tillegg til kapittel 11: Mer om relasjoner

I læreboken blir ekvivalensrelasjoner trukket frem som en viktig relasjonstype. I dette tillegget skal vi se på en annen type relasjoner som dukker opp i alle deler av matematikken, nemlige *ordningene*. Den vanligste ordningen er "mindre enn eller lik"-relasjonen $\leq$ på de reelle tallene, men det finnes mange andre, f.eks. delmengderelasjonen $A \subseteq B$. Men la oss begynne med definisjonene.

1 Partielle og totale ordninger

Definisjon 1 *En* partiell ordning *på en mengde X er en relasjon $\leq$ på X som tilfredsstiller følgende krav:*

(i) Refleksivitet: $x \leq x$ *for alle* $x \in X$.

(ii) Antisymmetri: *Hvis* $x \leq y$ *og* $y \leq x$*, så er* $x = y$.

(iii) Transitivitet: *Hvis* $x \leq y$ *og* $y \leq z$*, så er* $x \leq z$.

Vi skriver ofte $y \geq x$ istedenfor $x \leq y$ der det passer bedre.

Overfladisk sett ligner ordningene på ekvivalensrelasjonene siden den eneste forskjellen på definisjonene er at symmetrikravet for ekvivalensrelasjoner er byttet ut med et antisymmetrikrav, men det er nok til å gi ordningene en helt annen karakter enn ekvivalensrelasjonene.

La oss sjekke at eksemplene i innledningen virkelig er ordninger:

Eksempel 1 Relasjonen $\leq$ på $\mathbb{R}$ oppfyller åpenbart kravene overfor.

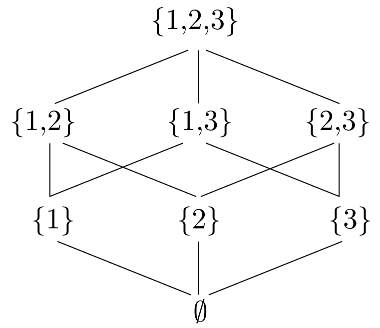
Eksempel 2 Anta at X er en ikke-tom mengde. Vi definerer en relasjon på potensmengden $\mathcal{P}(X)$ ved $A \subseteq B$ (det vil si at A står i relasjon til B dersom $A \subseteq B$). Det er lett å sjekke at $\subseteq$ tilfredsstiller kravene til en ordning (du må selvfølgelig erstatte $\leq$ med $\subseteq$ når du sjekker).

Det er en viktig forskjell på de to ordningene i eksemplene: Dersom $x, y \in \mathbb{R}$, vil vi alltid ha enten $x \leq y$ eller $y \leq x$. To elementer i $\mathbb{R}$ er altså alltid sammenlignbare. Det er ikke tilfellet med $\subseteq$ – dersom X har mer enn ett element, vil det alltid finnes $A, B \in \mathcal{P}(X)$ slik at vi hverken har $A \subseteq B$ eller $B \subseteq A$ (dette er faktisk den vanligste situasjonen). Denne forskjellen gjenspeiles i den neste definisjonen – $\leq$ er en total ordning mens $\subseteq$ ikke er det.

Definisjon 2 *En partiell ordning er* total *dersom uansett hvilke elementer* x, y *vi velger i* X*, så er enten* $x \leq y$ *eller* $y \leq x$*. Totale ordninger kalles også* lineære *ordninger. Dersom ordningen ikke er total, finnes det elementer* x, y *slik at hverken* $x \leq y$ *eller* $y \leq x$*. Slike elementer kalles* ikke sammenlignbare*.*

Bemerkning: Legg merke til at alle totale ordninger også er partielle ordninger. Dette er litt merkelig terminologibruk, men den er så utbredt at det neppe er mulig å endre den.

Det kan være nyttig å se nærmere på en partiell ordning som ikke er total. For at den ikke skal bli for stor, setter vi $X = \{1, 2, 3\}$ og ser på delmengderelasjonen $\subseteq$ på $\mathcal{P}(X)$. Figuren nedenfor presenterer den på en oversiktlig måte.



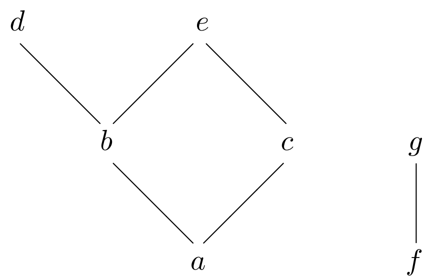
Figur 1: Ordningen $\subseteq$ på $\{1, 2, 3\}$.

I dette diagrammet er en mengde A "mindre enn" en mengde B (dvs. $A \subseteq B$) dersom man kan følge strekene *oppover* fra A til B. Slike diagrammer kalles gjerne *Hasse-diagrammer*, og de er nyttige hjelpemidler for å få oversikt over partielle ordninger på endelige mengder. Legg merke til at strekene i et Hasse-diagram bare forbinder et element med dets *umiddelbare* etterfølgere – det er f.eks. ikke noen direkte linje fra $\emptyset$ til $\{1, 2\}$ selv om $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$. Grunnen er at vi ønsker å ha et diagram som er så oversiktlig som mulig.

Av og til er det greit å bruke Hasse-diagrammer til å definere ordninger på endelige mengder. Figur 2 viser en partiell ordning på mengden $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Med mengdenotasjon kan denne ordningen skrives

$$\begin{aligned}\leq = \{&(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),\\&(c,c),(c,e),(d,d),(e,e),(f,f),(f,g),(g,g)\}\end{aligned}$$

noe som ikke er spesielt oversiktlig.



Figur 2: En partiell ordningen av $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Akkurat som for den vanlige ordningen på $\mathbb{R}$ kan vi innføre en skarp versjon $<$ av en generell ordning $\leq$ ved å sette

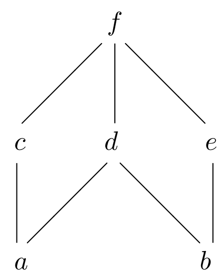
$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ og } x \neq y$$

Oppgaver til seksjon 1

1. Vis at relasjonen i eksempel 1 virkelig er en partiell ordning.
2. En ordning $\leq$ på $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ er gitt ved

   $$\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4), (5,5)\}$$

   Tegn et Hasse-diagram for $\leq$.
3. En ordning $\leq$ på $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ har Hasse-diagram

   Beskriv $\leq$ som en delmengde av X^2.
4. La X være mengden av alle funksjoner $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ og definer en relasjon på X ved

   $$f \leq g \Longleftrightarrow f(i) \leq g(i) \text{ for alle } i \in \{1, 2, 3\}$$

   Tegn et Hasse-diagram for denne ordningen.
5. Vis at en partiell ordning $\leq$ er total hvis og bare hvis vi for alle $x, y \in X$ har enten $x < y$, $x = y$ eller $x > y$.

6. La X være en ikke-tom mengde. Vis at $=$ er både en ekvivalensrelasjon og en partiell ordning på X. Vis så at $=$ er den *eneste* relasjonen på X som både er en ekvivalensrelasjon og en partiell ordning.

7. Definer en relasjon $\leq$ på $\mathbb{N}$ ved

$$x \leq y \Longleftrightarrow y \text{ er delelig med } x$$

   a) Vis at $\leq$ er en partiell ordning.

   b) Tegn nok av Hasse-diagrammet til $\leq$ til at du skjønner hvordan det er bygget opp (siden $\mathbb{N}$ er uendelig, blir du aldri ferdig med hele diagrammet).

8. Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X. Anta at A er ikke-tom delmengde av X, og la $\leq_A$ være relasjonen på A definert ved

$$x \leq_A y \Longleftrightarrow x, y \in A \text{ og } x \leq y$$

   Vis at $\leq_A$ er en partiell ordning på A.

9. Anta at $\leq$ er en total ordning på en endelig mengde X med n elementer. Vis at da har vi $x_1 < x_2$, $x_2 < x_3, \ldots, x_{n-1} < x_n$ der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er alle elementene i X.

10. Anta at X, Y er to ikke-tomme mengder, og la $\leq_1$ være en partiell ordning på X og $\leq_2$ en partiell ordning på Y.

    a) Definer en relasjon $\leq$ på $X \times Y$ ved

$$(x, y) \leq (u, v) \Longleftrightarrow x <_1 u \text{ eller } x = u \text{ og } y \leq_2 v$$

    Vis at $\leq$ er en partiell ordning på $X \times Y$ (dette kalles den *leksikografiske ordningen* generert av $\leq_1$ og $\leq_2$).

    b) Definer en relasjon $\leq$ på $X \times Y$ ved

$$(x, y) \leq (u, v) \Longleftrightarrow x \leq_1 u \text{ og } y \leq_2 v$$

    Vis at $\leq$ er en partiell ordning på $X \times Y$ (dette kalles *produktordningen* generert av $\leq_1$ og $\leq_2$).

11. La $\leq$ være en partiell ordning på en ikke-tom mengde X, og la $<$ være den tilhørende strenge ordningen.

    a) Vis at $<$ har følgende egenskaper:

       (i) For ingen x er $x < x$.

       (ii) Hvis $x < y$, så er ikke $y < x$.

       (iii) Hvis $x < y$ og $y < z$, så er $x < z$,

    b) Anta at $<$ er en hvilken som helst relasjon på X som tilfredsstiller betingelsene (i)-(iii) ovenfor. Definer en ny relasjon $\leq$ på X ved

$$x \leq y \Longleftrightarrow x < y \text{ eller } x = y$$

    Vis at $\leq$ er en partiell ordning.

2 Største og minste elementer

I partielle ordninger må vi være litt nøyere med begrepene *største, minste, maksimale, og minimale* enn det vi er vant til. Vi begynner med definisjonene:

Definisjon 3 *Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X. Da sier vi at $a \in X$ er*

a) et største *element dersom $a \geq b$ for alle $b \in X$.*

b) et minste *element for dersom $a \leq b$ for alle $b \in X$.*

c) et maksimalt *element dersom det ikke finnes noen $b \in X$ slik at $b > a$.*

d) et minimalt *element dersom det ikke finnes noen $b \in X$ slik at $b < a$.*

Hvis du går tilbake til figur 2, vil du se forskjellen på disse begrepene. I denne ordningen er d, e og g maksimale elementer, men ingen av dem er et største element. Tilsvarende er a og f minimale elementer, men ingen av dem er et minste element. I ordningen på figur 1 er $\{1, 2, 3\}$ både et maksimalt og et største element, mens $\emptyset$ er både et minimalt og et minste element. I den vanlige ordningen på $\mathbb{R}$ finnes det hverken største, minste, maksimale eller minimale elementer.

La oss prøve å få orden på disse begrepene. Vi vet fra figur 2 at en ordning godt kan ha mange minimale og maksimale elementer. Slik er det ikke med største og minste elementer.

Setning 4 *En partiell ordning kan ha høyst ett største og ett minste element.*

Bevis: Anta at a og b begge er et største element. Da har vi at $a \geq b$ og $b \geq a$, og følgelig er $a = b$. Et helt tilsvarende argument gjelder for minste elementer. □

Vi vet fra ordningen i figur 2 at et maksimalt element ikke behøver å være et største element, men i motsatt retning har vi:

Setning 5 *I en partiell ordning er et største element også et maksimalt element. Tilsvarende er et minste element også et minimalt element.*

Bevis: Anta for motsigelse at a er et største element som ikke er maksimalt. Siden a ikke er maksimalt, finnes det en $b \neq a$ slik at $b \geq a$. Siden a er et største element, er $a \geq b$. Dermed har vi $b \neq a$, $b \geq a$ og $a \geq b$, og det er umulig siden en ordning er antisymmetrisk. Beviset for minste elementer er tilsvarende. □

Anta nå at A er en delmengde av X. Et element $b \in X$ kalles en *øvre skranke* for A dersom $b \geq a$ for alle $a \in A$. Vi sier at $c \in X$ er en *minste øvre skranke* for A dersom c er en øvre skranke for A, og $c < b$ for alle andre øvre skranker b. Nedre skranker og største nedre skranker er definert tilsvarende. Du har sannsynligvis vært borti i begrepet minste øvre skranke (eller *supremum*) tidligere i forbindelse med kompletthetsegenskapen for reelle tall.

La oss gå tilbake til ordningen i figur 2, og la $A = \{a, b\}$. Da er både b, d og e øvre skranker for A, men bare b er en minste øvre skranke. Dette illustrerer et generelt fenomen – en mengde kan ha høyst én minste øvre skranke og høyst én største nedre skranke (bevis det!).

En delmengde A av X kallles *oppad begrenset* dersom den har en øvre skranke og *nedad begrenset* dersom den har en nedre skranke.

Definisjon 6 *En partiell ordning på X har* den minst øvre skranke egenskapen *dersom enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av X har en en minste øvre skranke. Tilsvarende har ordningen* den største nedre skranke egenskapen *dersom enhver ikke-tom, nedad begrenset delmengde har en en største nedre skranke.*

Det neste resultatet er langt fra opplagt.

Teorem 7 *En ordning som har den minste øvre skranke egenskapen har også den største nedre skranke egenskapen.*

Bevis: La A være en nedad begrenset delmengde av X. Vi må vise at A har en største nedre skranke. Siden alt vi vet er at ordningen har den minste øvre skranke egenskapen, må vi finne en (relevant) mengde å ta den minste øvre skranken til. Trikset er å innføre mengden

$$B = \{x \in X \mid x \text{ er en nedre skranke for } A\}$$

B er ikke-tom (siden A er nedad begrenset) og oppad begrenset siden ethvert element i A er en øvre skranke. Dette betyr at B har en minste øvre skranke c. Vi skal vise at c er største nedre skranke for A.

La oss først vise at c er en nedre skranke for A. Siden enhver $a \in A$ er en øvre skranke for B, og c er en minste øvre skranke, er $c \leq a$ – og følgelig er c en nedre skranke for A. Det gjenstår å vise at c er en *største* nedre skranke, men det er lett. Per definisjon er enhver nedre skranke b med i B, og dermed er $b \leq c$ siden c er en øvre skranke for B. $\square$

Oppgaver til seksjon 2

1. Gjennomfør beviset for setning 4 for minste elementer.
2. Gjennomfør beviset for setning 5 for minste/minimale elementer.

3. a) Finn en partiell ordning på en endelig mengde som ikke har den minste øvre skranke egenskapen.
   b) Vis at enhver total ordning på en endelig mengde har den minste øvre skranke egenskapen.

4. La X være en mengde. Vis at $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ har den minste øvre skranke egenskapen.

5. La X være en uendelig mengde og la $\mathcal{F}(X)$ være familien av alle *endelige* delmengder av X. Vis at den partielle ordningen $\subseteq$ på $\mathcal{F}(X)$ ikke har maksimale elementer.

6. Vis at i en total ordning er et maksimalt element alltid et største element.

7. Bevis at en mengde kan ha høyst én minste øvre skranke.

8. I denne oppgaven er $\mathcal{F}$ mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi definerer en relasjon $\preceq$ på $\mathcal{F}$ ved:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ for alle } x \in \mathbb{R}$$

   a) Vis at $\preceq$ er en partiell ordning.
   b) Vis at $\preceq$ hverken har et største eller et minste element.
   c) Vis at for alle $f, g \in \mathcal{F}$ har mengden $\{f, g\}$ en minste øvre skranke.

   En delmengde $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ kalles *punktvis begrenset* dersom det for hver $a \in \mathbb{R}$ finnes en konstant $M_a \in \mathbb{R}$ slik at $|g(a)| \leq M_a$ for alle $g \in \mathcal{G}$.

   d) Vis at en delmengde $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ har en minste øvre og en største nedre skranke hvis og bare hvis den er punktvis begrenset.

9. En partielt ordnet mengde $(X, \leq)$ kalles et *gitter* dersom alle mengder $\{x, y\} \subseteq X$ med to elementer har en minste øvre skranke (betegnet med $x \vee y$) og en største nedre skranke (betegnet med $x \wedge y$).

   a) Vis at $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$ er et gitter for alle mengder U (her er $\mathcal{P}(U)$ potensmengden til U).

   I resten av oppgaven er $(X, \leq)$ et gitter.

   b) Vis at i et gitter er alltid $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.
   c) Vis at for alle $x, y \in X$ er $x \vee (x \wedge y) = x$ og $x \wedge (x \vee y) = x$.
   d) Vis at alle endelige delmengder $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ av X har en minste øvre skranke.
   e) La X være familien av alle endelige delmengder av $\mathbb{N}$. Vis at $(X, \subseteq)$ er et gitter, men at det finnes delmengder av X som ikke har et største element.

10. I denne oppgaven er $\leq$ en total ordning på en ikke-tom mengde X. Hvis $a, b \in X$ og $a < b$, definerer vi det *åpne intervallet* (a, b) ved

$$(a, b) = \{x \in X \ : \ a < x < b\}$$

   a) Vis at dersom $c \leq a$ og $b \leq d$, så er $(a, b) \subseteq (c, d)$.

b) Anta at $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en voksende følge av åpne intervaller, dvs. at $a_{n+1} \leq a_n$ og $b_n \leq b_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Anta dessuten at det finnes elementer $c, d \in X$ slik at $c \leq a_n$ og $b_n \leq d$ for alle n. Vis at dersom $(X, \leq)$ har den minste øvre skranke egenskapen, så er $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$ et åpent intervall.

c) Vis ved et eksempel at konklusjonen i b) *ikke* behøver å gjelde når $(X, \leq)$ mangler den minste øvre skranke egenskapen.

11. I denne oppgaven er $\leq$ er en total ordning på en ikke-tom mengde X.

a) Vis at enhver endelig delmengde A av X har et største element c og et minste element d (dvs. det finnes elementer $c, d \in A$ slik at $d \leq a \leq c$ for alle $a \in A$).

En familie $\mathcal{T}$ av delmengder av X kalles en *topologi* dersom:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Unionen av en familie av mengder i $\mathcal{T}$ er alltid selv i $\mathcal{T}$, dvs. hvis $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$, så er $\bigcup_{O\in\mathcal{O}} O \in \mathcal{T}$.

(iii) Et endelig snitt av mengder i $\mathcal{T}$ er alltid selv i $\mathcal{T}$, dvs. hvis $O_1, O_2, \ldots, O_n$ er et endelig antall mengder i $\mathcal{T}$, så er $O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$.

b) Vi antar nå at ordningen $\leq$ ikke har noe største eller minste element, og vi definerer åpne intervaller i X på samme måte som i oppgave 3, dvs.

$$(a, b) = \{x \in X \ : \ a < x < b\}$$

når $a < b$. Vi kaller en mengde $O \subseteq X$ *åpen* dersom det for hver $x \in O$, finnes et åpent intervall (a, b) slik at $x \in (a, b) \subseteq O$ (vi regner også $\emptyset$ som åpen siden den ikke inneholder noen x). Vis at familien av alle åpne mengder er en topologi på X.

3 Forfininger

I denne seksjonen skal vi se på forholdet mellom relasjoner, spesielt hvordan én relasjon kan inneholde mer informasjon enn en annen. Det vil være nyttig å huske at en relasjon på X egentlig er en delmengde av X^2, f. eks. er

$$\leq = \{(x, y) \in X^2 \,|\, x \leq y\}$$

Vi bruker denne tenkemåten til å definere at en partiell relasjon $\leq_2$ på X er *finere* enn en annen partiell relasjon $\leq_1$ på X dersom $\leq_1 \subseteq \leq_2$. En ekvivalent måte å definere dette på, er å kreve at

$$x \leq_1 y \implies x \leq_2 y$$

Vi sier også at $\leq_2$ er en *forfining* av $\leq_1$.

Det er naturlig å spørre om enhver partiell ordning kan forfines til en total ordning.[1] Prøver man seg på noen enkle eksempler, ser at man at det i praksis ikke er så vanskelig å få til en slik forfining, men at det krever en viss systematikk og koordinering. Denne systematikken er bygget inn i beviset for den neste setningen.

Setning 8 *Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X, og at $x, y \in X$ ikke er sammenlignbare. Da finnes det en forfining $\leq_1$ av $\leq$ slik at $x \leq_1 y$.*

Bevis: Vi må åpenbart utvide $\leq$ (tenkt på ordningen som en mengde) med paret (x, y). Dette er imidlertid ikke nok siden en slik utvidelse normalt ikke vil være transitiv. For å få til en transitiv utvidelse viser det seg at vi må legge til alle par (u, v) der $u \leq x$ og $y \leq v$. Vi setter altså

$$\leq_1 = \leq \cup \{(u, v) \in X^2 \mid u \leq x \text{ og } y \leq v\}$$

Sagt på en annen måte, definerer vi

$$u \leq_1 v \iff \begin{cases} u \leq v & \text{(alternativ I)} \\ \text{eller} & \\ u \leq x \text{ og } y \leq v & \text{(alternativ II)} \end{cases}$$

Siden alternativ II holder for $u = x$, $v = y$, er $x \leq_1 y$. Vi må vise at $\leq_1$ tilfredsstiller de tre kravene til en partiell ordning.

Refleksivitet: Siden $u \leq u$, er åpenbart $u \leq_1 u$ for alle $u \in X$.

Antisymmetri: Anta at $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$. For å vise at $u = v$, må vi drøfte fire forskjellige muligheter avhengig av om $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$ etter alternativ I eller alternativ II.

a) Begge ulikhetene holder etter alternativ I, dvs. $u \leq v$ og $v \leq u$: Siden $\leq$ er antisymmetrisk, er $u = v$.

b) Den første ulikheten holder etter alternativ I og den andre etter alternativ II, dvs. $u \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq u$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq u$, $u \leq v$ og $v \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at denne situasjonen aldri oppstår.

[1] Dette er ikke et rent nysgjerrighetsspørsmål, men også en praktisk problemstilling som ofte dukker opp i informatikk. Tenk deg at du skal lage et stort program som skal utføre mange forskjellige oppgaver, og at disse oppgavene bygger på hverandre slik at noen må utføres før andre. Vi kan da innføre en relasjon R der aRb betyr at oppgave a må utføres før oppgave b. For å lage et program der alle oppgavene utføres etter hverandre i riktig rekkefølge, trenger vi en total ordning som forfiner R.

c) Dette er samme situasjon som b), bare med u og v byttet om. Den oppstår derfor aldri.

d) Begge ulikhetene holder etter alternativ II, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq u$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq u$ og $u \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at heller ikke denne muligheten oppstår.

Transitivitet: Anta at $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 w$. For å vise at $u \leq_1 w$, må vi igjen drøfte fire forskjellige muligheter avhengig av om $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 w$ etter alternativ I eller alternativ II.

a) Begge ulikhetene holder etter alternativ I, dvs. $u \leq v$ og $v \leq w$: Siden $\leq$ er transitiv, er da $u \leq w$ og dermed $u \leq_1 w$.

b) Den første ulikheten holder etter alternativ I og den andre etter alternativ II, dvs. $u \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $u \leq v$ og $v \leq x$, får vi $u \leq x$. Kombinert med $y \leq w$, gir dette $u \leq_1 w$.

c) Den første ulikheten holder etter alternativ II og den andre etter alternativ I, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$ og $v \leq w$, får vi $y \leq w$. Kombinert med $u \leq x$, gir dette $u \leq_1 w$.

d) Begge ulikhetene holder etter alternativ II, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$ og $v \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at denne muligheten aldri oppstår.

Dermed har vi vist at $\leq_1$ er en partiell ordning, og setningen følger. □

Vi kan nå vise det annonserte resultatet:

Teorem 9 *Dersom $\leq$ er en partiell ordning på en endelig mengde X, finnes det en total ordning som forfiner $\leq$.*

Bevis: Hvis $\leq$ er en total ordning, er det ingenting å vise. Hvis ikke, finnes det to elementer x_1, y_1 som ikke er sammenlignbare, og ifølge setningen ovenfor finnes det en forfining $\leq_1$ av $\leq$ slik at $x_1 \leq_1 y_1$. Hvis $\leq_1$ er en total ordning, er vi ferdig, hvis ikke finnes det to elementer x_2, y_2 som ikke er $\leq_1$-sammenlignbare. Ifølge setningen ovenfor kan vi finne en forfining $\leq_2$ av $\leq_1$ slik at $x_2 \leq_2 y_2$. Hvis denne ordningen er total, er vi ferdig, hvis ikke kan vi finne en forfining på samme måte som før osv. Siden X er endelig, finnes det bare endelige mange par (x, y), så før eller siden må prosessen stoppe opp fordi det ikke er flere ikke-sammenlignbare par igjen. Siden prosessen bare stopper når vi har nådd frem til en total ordning, har vi dermed vist at $\leq$ har en total forfining. $\square$

Teoremet holder også for ordninger på uendelige mengder, men hvis vi forsøker å benytte beviset ovenfor, har vi ingen garanti for at prosessen stopper opp etter et endelig antall skritt, og det er derfor fristende å fortsette utover det endelig. Dette går an, men for å beholde kontrollen over prosessen, trenger vi kjennskap til en utvidet tallrekke, de såkalte *ordinaltallene.* Vi har ikke tid til å komme inn på disse tallene her, så senere i kurset skal vi isteden se på en alternativ angrepsmåte basert på noe som kalles Zorns lemma.

Oppgaver til seksjon 3

1. Finn en total ordning som forfiner ordningen i figur 1.
2. Finn en total ordning som forfiner ordningen i figur 2.
3. Anta X er en ikke-tom mengde. En relasjon R på X kalles en *preordning* dersom den er

   (i) *Refleksiv:* xRx for alle $x \in X$.

   (ii) *Transitiv:* Hvis xRy og yRz, så er xRz.

   I resten av oppgaven antar vi at R er en preordning på X.

   a) Definér en ny relasjon $\sim$ på X ved

   $$x \sim x' \iff xRx' \text{ og } x'Rx$$

   Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

   b) Anta $x \sim x'$ og $y \sim y'$. Hvis at dersom xRy, så er $x'Ry'$.

   c) La $X/\sim$ være mengden av alle ekvivalensklasser, og la $[x]$ være ekvivalensklassen til x. Forklar at vi kan definere en relasjon $\leq$ på $X/\sim$ ved

   $$[x] \leq [y] \iff xRy$$

   d) Vis at $\leq$ er en partiell ordning på $X/\sim$.