Oppgave 2.1 a)

Førsteordens:

Når vi snakker om orden til en differensiallikning snakker vi som oftest om den høyeste ordens deriverte av den ukjente funksjonen som forekommer i likningen. Hvis den høyeste ordens deriverte bare er deriverte én gang er det en Første ordens differensiallikning, og om den er derivert to gang er det en Andre ordens differensiallikning.

Initialbetingelse:

Initialbetingelse kan også kalles for en startbetingelse, og er svaret til *y(0)* i likningen.

Separabel:

En separabel differensiallikning er en likning som skrives på formen $\frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$. Funksjonen *g* i likningen er en funksjon av variabelen *y*, som igjen er en funksjon av variabelen *x*. Da kan funksjonen *g* skrives på forme *g = g(y(x))*.

Integrerende faktor:

Vet en differensiallikning på formen $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$, kan vi regne ut $\rho(t) = e^{\int P(t)dt}$. Dette kalles for den integrerende faktor. Hvis vi ganger begge sidene av likningen med det integrerende faktor, ser vi at vi kan utføre produktregelen baklengs for å få likningen på formen $\frac{d}{dt}[\rho(t) \cdot y(t)] = Q(t) \cdot \rho(t)$. Da kan vi integrere begge sidene med hensyn på *t*. Da får vi en likning som vi kan løse med hensyn på *y(t)* for å få løsningen til differensiallikningen.

Oppgave 2.1 b)

Løsning ved integrerende faktor:

$$y' + P(t)y = Q(t)$$

$$P(t) = 2$$

$$Q(t) = 3$$

$$y' + 2y = 3$$

Integrerende faktor:

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\rho(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 2\,dt} = e^{2t} \quad , \quad C = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3$$

$$e^{2t} \cdot \frac{dy}{dt} + 2e^{2t} \cdot y = 3e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y] = 3e^{2t} \longrightarrow \frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y(t)] = 2e^{2t} \cdot y(t) + e^{2t} \cdot y'(t)$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{2t} \cdot y] = \int 3e^{2t}\,dt$$

$$e^{2t} \cdot y = \frac{3}{2}e^{2t} + C \quad \Big| : e^{2t}$$

$$\underline{\underline{y = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}}}$$

Løsning ved separabel likning:

$y' + 2y = 3 \Rightarrow y' = (-2y+3)\cdot 1$

$g(y) = -2y+3$

$f(t) = 1$

$y' = \frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \quad | : g(y)$

$\frac{dy}{dt\,g(y)} = f(t) \quad | \cdot dt$

$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt$

$\int \frac{1}{-2y+3}\,dy = \int 1\,dt$

$-\frac{1}{2}\cdot \ln(|-2y+3|) = t + C$

$e^{-\frac{1}{2}}(-2y+3) = e^{t} + C$

$-2y+3 = \frac{e^{t}}{e^{-\frac{1}{2}}} + C$

$-2y = e^{\frac{1}{2}t} + C \quad , \quad C-3 = C$ siden C bare er en konstant

$$\underline{\underline{y = \frac{(e^{\frac{1}{2}t}+C)}{-2}}}$$

Vi løser altså likningen $y' + 2y = 3$

Vi kan løse den ved hjelp av integrerende faktor og få løsningen:

$y = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}$

Det er også en seperabel diff. likning som gir løsningen:

$y = \frac{(e^{\frac{1}{2}t}+C)}{-2}$

$y' + 2y = 3$ er altså et eksempel på en differensiallikning som kan løses både ved integrerende faktor og som en seperabel likning.