Prosjekt 3 MAT-0001

Oppg. 2

a) $\int x(x^2+1)\,dx = \int x^3 + x\,dx$

$= \int x^3 dx + \int x\,dx$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

b) $\int t^2 \cdot e^t\,dt$

Delvis integrasjon

$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$

$u(t) = t^2$, $u'(t) = 2t$

$v'(t) = e^t$, $v(t) = e^t$

$t^2 e^t - \int e^t \cdot 2t\,dt = t^2 e^t - 2 \cdot \int e^t t\,dt =$

$t^2 e^t - 2\left(t e^t - \int e^t dt\right)$

$= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C$

c) $\int t e^{t^2} dt$ $\qquad e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$g(x) = t^2$

$e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$e^{t^2} \cdot 2t \qquad y = e^{t^2}$

$\int \cancel{t} \cancel{e^{t^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{e^{t^2}} \cdot 2\cancel{t}} = \int \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} e^{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{t^2}}{1}$

$= \frac{e^{t^2}}{2} + C$

d) $\int_a^{a+b} h\,dx$, $a, b, h \in \mathbb{R}$

$\boxed{f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$

$\int h\,dx = hx \Big|_a^{a+b}$

$h \cdot (a+b) - h \cdot a$

$\cancel{ah} + bh - \cancel{ah}$

$= \underline{\underline{bh}}$

e) $\int_{\ln(2\pi)}^{\ln(3\pi)} e^x \sin(e^x)\,dx =$

$= \int e^x \sin(e^x)\,dx = \int \cancel{e^x} \cdot \sin(e^x) \cdot \frac{1}{\cancel{e^x}}\,dx$

$= \int \sin(e^x) \quad y = e^x, \int \sin(y) = -\cos(y) = -\cos(e^x)$

$-\cos(e^x) \Big|_{\ln(2\pi)}^{\ln(3\pi)}$

$\boxed{f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b)}$

$-\cos(e^{\ln(3\pi)}) - (-\cos^{\ln(2\pi)})$

$-\cos(3\pi) + \cos(2\pi)$

$-(-1) + \cos(2\pi)$

$1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

3) $\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-x^3}\,dx$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t)$$

$$f(t) = e^{-t^3} = \frac{1}{e^{t^3}}$$

Fra fundamental teoremet fra kalk.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Oppgave 3

masse = m , avhengig av tid $m = m(t)$
Legemehastighet = V, ——— 11 ——— $V = V(t)$
Partikler som løser = u, ——— 11 ——— $u = u(t)$
Akselerasjon = $V'(t)$, hastighet = $u(t)$ = konstant
endringsgraden i legemevekt = $m'(t)$

$mv' + um' = 0$ og $mv' + mg + um' = 0$

a) $mv' + um' = 0$

$mv' = -um' \quad : m$

$v' = \frac{u}{m} m'$

$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m} \frac{dm}{dt} = \int 1 \frac{dv}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = -\int \frac{u}{m} \frac{dm}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$

$\int 1 dv = -\int \frac{u}{m} dm$

$V = -u \int \frac{1}{m} dm$

$V = -u \cdot \ln|m| + C$

$\boxed{\text{Spesielle integrasjoner} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$

b) $mv' + mg + um' = 0$

$mv' = -mg - um' \quad |: m$

$v' = -g - \frac{u}{m} m'$

$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{m} \frac{dm}{dt}$

$\int 1 \frac{dv}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = -\int g dt -$

$\int \frac{u}{m} \frac{dm}{\cancel{dt}} dt$

oppg. 3

$$\int 1\,dv = -\int g\,dt - u\int \frac{1}{m}\,dm$$

$$\underline{\underline{v = -gt - u\cdot\ln|m| + c}}$$

$$\boxed{\int k\,dt = kt + c}$$

Oppg. 4

$|y| = e^{-\frac{k^2}{2}} C \quad , \quad e^c = C$

$|y| = C e^{-\frac{k^2}{2}}$

$y = Ce^{-\frac{k^2}{2}}$ og $y = -e^{-\frac{k^2}{2}}$

$\frac{d}{dk}(0) = -k \cdot 0$

$0 = 0$

$y = 0$ er en løsning

$\boxed{|y| = \pm y(t)}$

$y'(t) = -ky(t)$

$\frac{1}{y(t)} y' = -k = \int \frac{1}{y(t)} y' \overset{dy}{dk} = -\int k dk$

$= y'(t) \cdot \ln|y(t)| = -\frac{1}{2}k^2 + C \qquad y'(t) = A$

$e^{A \ln|y(t)|} = e^{-\frac{1}{2} + C}$

$A \cdot y(t) = e^{-\frac{1}{2}k^2} + C$

$y(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}k^2}}{A} + C$

$e^y = y$

$e^c = C$

$\frac{C}{y} = C$

Oppgave 4

1) $y(t)$ er medisinmengden i kroppen målt i milligram etter t timer.

a) $y'(t)$ er mengden medisin bestemt etter konstant k som er halveringstiden

$y'(t) = -ky(t)$, $k>0$

Vi må anta at diff. likningen er proporsjonal og at det finnes en konstant $k \neq 0$ som tilfredstiller

b) $y'(t) = -ky(t)$

$y'(t) = \frac{dy}{dk}$

$\frac{dy}{dk} = -ky \quad | \cdot dk$

$dy = -ky\,dk$

$\frac{1}{2}dy = -k\,dk$, $y \neq 0$

$\int \frac{1}{y} dy = \int -k\,dk$

$\ln|y| + c = \int -k\,dt$

$\ln|y| + c_1 = -\frac{k^2}{2} + c_2$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$

Siden c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter, bytter de ut med konstant c.

$\ln|y| = -\frac{k^2}{2} + c$

$\boxed{\ln|x| = b \Rightarrow x = e^b}$

$|y| = e^{-\frac{k^2}{2} + c}$

$\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$

$|y| = e^{-\frac{k^2}{2}} \cdot e^c$