

# Obligatoriske oppgave 3, MAT-1005

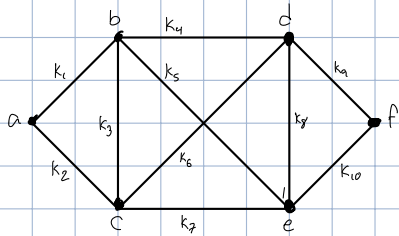
Eskil Bjørnbakk Heines

## Oppgave 1.1)

En Eulerskrets til en graf  $G$ , er en krets som går gjennom alle kanter i grafen nøyaktig én gang. Kravet for en Eulerskrets er at alle grader er partall, og at start og slutt punkt er det samme ( $v_0 = v_n$ ).

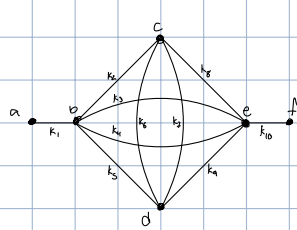
## Oppgave 1.2)

Eulerkrets:



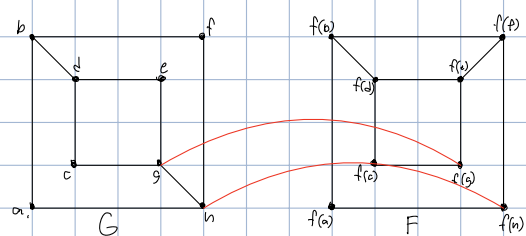
a k<sub>1</sub> b k<sub>3</sub> c k<sub>6</sub> d k<sub>4</sub> b k<sub>5</sub> e k<sub>9</sub> d k<sub>8</sub> f k<sub>10</sub> e k<sub>7</sub> c k<sub>2</sub> a  
Vi ser at denne Eulerkretsen går gjennom alle kanter nøyaktig én gang, og slutter der den starter (i a).

Ikke Eulerkrets



Vi ser at grafen ikke er en Eulersgraf siden vi ikke kan gå gjennom alle kanter nøyaktig én gang, og da gå gjennom alle. Vi har 4 noder med oddetall grader, og kan da ikke ha Eulerkrets eller Eulersti.

## Oppgave 1.3)



g er nabo med h.  
f(g) er ikke nabo med f(h)

Når vi jobber med isomorfisme, jobber vi med en biaktiv funksjon. Altså en funksjon hvor alt i definisjonsmengden treffer noe i verdismengden. Begge grafene har 8 noder, altså hver node kan treffe en node i den andre grafen. Problemet med grafene er at naboene er forskjellige. Hvis  $G$  og  $F$  er isomorf vil naboene  $a$  og  $b$  i  $G$ , være naboene  $f(a)$  og  $f(b)$  i  $F$ . I vår graf  $G$  er  $g$  og  $h$  naboer, men i  $F$  er ikke  $f(g)$  og  $f(h)$  naboer. Derfor kan vi konkludere med at  $F$  og  $G$  ikke er isomorfe grafen.



## Oppgave 2.1)

$$n = 221 = 13 \cdot 17 \Rightarrow p = 13 \text{ og } q = 17$$

$$e = 269$$

$$c = 76 \equiv m^e \pmod{n}$$

$$76 \equiv m^{269} \pmod{221} \Rightarrow \begin{array}{l} 76 \equiv m^{269} \pmod{13} \\ 76 \equiv m^{269} \pmod{17} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 11 \equiv m^{269} \pmod{13} \\ 5 \equiv m^{269} \pmod{17} \end{array}$$

$$e \cdot d \pmod{\phi(n)} = 1$$

$$\phi = (p-1)(q-1) = 12 \cdot 16 = 192$$

$$269d \pmod{192} = 1 \Rightarrow 77d \pmod{192} = 1$$

E.A.,

$$192 = 77 \cdot 2 + 38$$

$$77 = 38 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 77 - 38 \cdot 2$$

$$= 77 - (192 - 77 \cdot 2) \cdot 2$$

$$= 77 - 192 \cdot 2 + 77 \cdot 4$$

$$= 77 \cdot 5 - 192 \cdot 2 \quad \text{— jobber i mod 192 så kan stryke } 192 \cdot 2$$

$$77 \cdot 5 \pmod{192} = 1 \Rightarrow d = 5$$

$$m = c^d \pmod{n} = 76^5 \pmod{221} \\ = (76)^4 + (76)' \pmod{221}$$

$$76' \equiv 76 \pmod{221}$$

$$76^2 = 5776 \equiv 30 \pmod{221}$$

$$76^4 = (76^2)^2 = 30^2 = 900 \equiv 16 \pmod{221}$$

$$76^4 \cdot 76' = 16 \cdot 76 = 1216 \equiv 111 \pmod{221}$$

$$\underline{\underline{m = 111}}$$

## Oppgave 2.2)

Vi løser systemet av kongruensene:

$$4x \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 4x \equiv 5 \pmod{9}$$

$$2x \equiv -1 \pmod{7} \quad 2x \equiv 6 \pmod{7}$$

For å løse systemet må vi gjøre  $4x$  og  $2x$  om til bare  $x$  og  $x$ . Da må vi finne den inverse ved hjelp av E.A.:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

$$1 = 9 - 2 \cdot 4$$

$-2$  er invers til  $4x$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$-2$  er invers til  $2x$

Da for v. kongruenser:

$$-2 \cdot 4x \equiv -2 \cdot 5 \pmod{9}$$

$$-8 \equiv 10 \pmod{9}$$

$$-10 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$-2 \cdot 2x \equiv (-1) \cdot (-2) \pmod{7}$$

$$-4 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$2 \equiv 9 \pmod{7}$$

$$x \equiv -10 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$x \equiv -4 \equiv 3 \pmod{7}$$

Vi løber vi med systemet

$$x \equiv a \pmod{m} \quad x \equiv b \pmod{n}$$

$$x \equiv 8 \pmod{9} \quad x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\text{GCD}(m, n) = \text{GCD}(9, 7) = 1$$

Det finnes  $u, v \in \mathbb{Z}$ , slik at

$$mu \equiv 0 \pmod{m} \quad nv \equiv 1 \pmod{m}$$

$$mu \equiv 1 \pmod{n} \quad nv \equiv 0 \pmod{n}$$

Vi finner  $c$  ved:

$$c = a \cdot n \cdot v + b \cdot m \cdot u$$

Finner  $v$  og  $u$  v.h.a. E.A. på 7 og 9

$$7 \cdot v + 9 \cdot u = 1$$

$$7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3) = 1 \quad \Rightarrow \quad v = 4 \quad \text{og} \quad u = -3$$

$$c = 8 \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot 9 \cdot (-3)$$

$$= 224 + (-81)$$

$$= 143$$

Vi vet fra formel at  $x \equiv c \pmod{mn}$

$$x \equiv 143 \pmod{63}$$

$$x \equiv 143 \pmod{63}$$

$$x \equiv 17 \pmod{63}$$

Sjekker 17 med originale kongruenser

$$4 \cdot 17 = 68 \equiv 5 \pmod{9} \quad 2 \cdot 17 = 34 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$9 \cdot 7 + 5 \equiv 5 \pmod{9} \quad 7 \cdot 5 - 1 \equiv -1 \pmod{7}$$

Ser at  $x = 17$  løser begge kongruensene og er da det minste positive heltallet som tilfredsstiller systemet.

$17 + 63k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  er formel for alle løsningene til systemet.

### Oppgave 3.1)

$$n = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq n\}$$

$$f: [2022] \rightarrow [1011] \text{ ved } f(x)=y \text{ h.b.h. } x \equiv y \pmod{1011}$$

Løser  $f(x)=y$  for de gitte verdiene til  $x$ :

$$f(1)=1 \quad \text{siden} \quad 1 \equiv 1 \pmod{1011}$$

$$f(2)=2 \quad \text{siden} \quad 2 \equiv 2 \pmod{1011}$$

$$f(1011)=0 \quad \text{siden} \quad 1011 \equiv 0 \pmod{1011}$$

$$f(2022)=0 \quad \text{siden} \quad 2022 \equiv 0 \pmod{1011}$$

### Oppgave 3.2)

Er funksjonen  $f$  injektiv?

Hvis  $f$  er injektiv, sier da definisjonen at for  $x, y \in A$

og  $x \neq y$  impliser det at  $f(x) \neq f(y)$ .

I vår funksjon kan vi teste med 1 og 1012.

$$1 \neq 1012, \text{ men } f(1) = f(1012)$$

$$\text{siden } 1 \equiv 1 \pmod{1011}$$

$$\text{og } 1012 \equiv 1 \pmod{1011}.$$

Vi ser da at  $f$  ikke er injektiv.



### Oppgave 3.3)

Er funksjonen  $f$  surjektiv?

Etter definisjonen er en funksjon  $f: A \rightarrow B$  surjektiv hvis

det for alle  $y \in B$ , finnes en  $x \in A$  slik at  $f(x)=y$ .

I vår funksjon vil da for alle  $y \in [1011]$ , finnes en  $x \in [2022]$

slik at  $f(x)=y$ .

Hvis  $y=1011$ , finnes  $x=0$  og  $x=1011$  siden

$$f(0)=1011 \text{ og } f(1011)=1011$$

$$\text{fordi } f(x)=y \text{ h.b.h. } x \equiv y \pmod{1011} \text{ og}$$

$$0 \equiv 1011 \pmod{1011} \text{ og}$$

$$1011 \equiv 1011 \pmod{1011}.$$

Vi ser at definisjonsområdet  $[2022]$  er dobbelt så stort som verdiansrådet  $[1011]$ .

Siden  $x \in [2022]$  og  $y \in [1011]$  og  $f(x)=y$  h.b.h.  $x \equiv y \pmod{1011}$

Så for hver  $y$  finnes det 2  $x$  som løser funksjonen, f.eks.

$$f(1)=f(1012)=1$$

$$f(10)=f(1021)=10$$

$$f(1011)=f(2022)=0$$

Vi konkluderer med at  $f$  er surjektiv.



### Oppgave 3.4)

Definerer en relasjon  $R: [011] \rightarrow [2022]$  ved  $(x,y) \in R$

h.b.h.  $x \equiv y \pmod{2022}$

Er relasjonen  $R$  en funksjon?

$(x,y) \in R$  betyr at  $x \in [011]$  og  $y \in [2022]$ , som vi kan skrive som  $xRy$ .

Kravet er at  $x \equiv y \pmod{2022}$ .

Alltså vil f.eks.:

$(1,1) \in R$  siden  $1 \equiv 1 \pmod{2022}$

$(1,2) \notin R$  siden  $1 \not\equiv 2 \pmod{2022}$

Vi vet fra definisjonen av funksjoner at grafen  $f: A \rightarrow B$  er "settet av ordnet par  $(a,b)$  slik at  $b=f(a)$ ". Siden  $f$  er et "subset" av  $A \times B$ , er det en relasjon fra  $A$  til  $B$ . Dette tilsier også at hvert element i  $A$  er startelement i nøyaktig ett par.

Vi kan oversette dette til vår funksjon  $f$ .

Vi har  $f: [2022] \rightarrow [011]$  ved  $f(x)=y$  h.b.h.  $x \equiv y \pmod{1011}$ .

Relasjonen  $R: [011] \rightarrow [2022]$  ved  $(x,y) \in R$  h.b.h.  $x \equiv y \pmod{2022}$

er en funksjon siden hvert element i  $[011]$  er ikke et startpunkt i

nøyaktig ett par. Vi sjekker:

$x=1$ ,  $1 \equiv 1 \pmod{2022}$

$(1,1)$  er et par

$x=1011$ ,  $1011 \equiv 1011 \pmod{2022}$

$(1011,1011)$  er et par.

Konkluderer med at relasjonen  $R$  er en funksjon.

### Oppgave 4.1)

La  $A$  være en mengde og  $\preceq$  være en partill ordning på  $A$ .

Sier at  $\preceq$  er rettet hvis for alle  $a$  og  $b$  i  $A$ , det finnes et medlem  $c$  i  $A$  slik at  $a \preceq c$  og  $b \preceq c$ .

$(\preceq \text{ er rettet}) \rightarrow (\forall a, b \in A) (\exists c \in A) (a \preceq c \wedge b \preceq c)$

## Oppgave 5.1)

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^+) (1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1)$$

$$P(n) = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1$$

Basisteg:  $P(1) = 1 \cdot (1!) = (1+1)! - 1 = 0 \quad \checkmark$

$$P(3) = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) = (3+1)! - 1$$

$$= 1 + 4 + 18 = 24 - 1$$

$$= 23 = 23 \quad \checkmark$$

Induktjonssteg: Antar at  $P(k) = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + k \cdot (k!) = (k+1)! - 1$   
er sant for en vilkårlig  $k$ .

$$1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + k \cdot (k!) + (k+1) \cdot ((k+1)!) = ((k+1)+1)! - 1$$

$$1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + k \cdot (k!) + (k+1) \cdot ((k+1)!) = (k+2)! - 1$$

$$(k+1)! - 1 + (k+1) \cdot ((k+1)!) = (k+2)! - 1$$

$$(k+1)! + (k+1) \cdot ((k+1)!) - 1 = (k+2)! - 1$$

$$(1 + (k+1)) \cdot ((k+1)!) - 1 = (k+2)! - 1$$

$$(k+2) \cdot ((k+1)!) - 1 = (k+2)! - 1$$

$$(k+2) \cdot ((k+1)!) - 1 = (k+2) \cdot ((k+1)!) - 1$$

Vi ser at begge sidene er lik for  $P(k+1)$ , og  
konkluderer med at påstanden er sann.

## Oppgave 5.2)

Hvor mange 5-tupler av positive heltall  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  oppfyller  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ ?

Siden det er 5-tupler vet vi at rekkefølgen på tallen er viktig, og at samme tall kan forekomme i tupelen flere ganger.

Vi ser på muligheter, og legger til antall muligheter i ordne den

$$10 = (10, 0, 0, 0, 0) - 5 = 5 \quad 5 = (5, 2, 1, 1, 1) - 5 \cdot 4 = 20 \quad 3 = (3, 3, 2, 1, 1) - 5 \cdot 6 = 30$$

$$(5, 2, 2, 1, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad (3, 2, 2, 2, 1) - 5 \cdot 4 = 20$$

$$9 = (9, 1, 0, 0, 0) - 5 \cdot 4 = 20 \quad (5, 3, 1, 1, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad (3, 3, 3, 1, 0) - 5 \cdot 4 = 20$$

$$(5, 3, 2, 0, 0) - 5 \cdot 12 = 60$$

$$8 = (8, 1, 1, 0, 0) - 5 \cdot 6 = 30 \quad (5, 4, 1, 0, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad 2 = (2, 2, 2, 2, 2) - 1 = 1$$

$$(8, 2, 0, 0, 0) - 5 \cdot 4 = 20 \quad (5, 5, 0, 0, 0) - 5 \cdot 2 = 10$$

$$7 = (7, 1, 1, 1, 0) - 5 \cdot 4 = 20 \quad 4 = (4, 2, 2, 1, 1) - 5 \cdot 6 = 30$$

$$\text{Sum} = \underline{\underline{941}}$$

$$(7, 2, 1, 0, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad (4, 2, 2, 2, 0) - 5 \cdot 4 = 20$$

$$(7, 3, 0, 0, 0) - 5 \cdot 4 = 20 \quad (4, 3, 2, 1, 0) - 5 \cdot 12 = 60$$

$$(4, 3, 3, 0, 0) - 5 \cdot 6 = 30$$

$$6 = (6, 1, 1, 1, 1) - 5 = 5 \quad (4, 3, 1, 1, 1) - 5 \cdot 4 = 20$$

$$(6, 2, 1, 1, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad (4, 4, 1, 1, 0) - 5 \cdot 6 = 30$$

$$(6, 3, 1, 0, 0) - 5 \cdot 12 = 60 \quad (4, 4, 2, 0, 0) - 5 \cdot 6 = 30$$

$$(6, 4, 0, 0, 0) - 5 \cdot 4 = 20$$

Så adderer vi alle de forskjellige mulighetene og får da  
at det er 941 mulige 5-tupler som faller inn under om sum=10.