Oblig 1 Løsningsforslag

Oppgave 1: ~~Vi viser~~ La p, q, og r være utsagnslogiske variabler. Vi viser at

(a) $p \leftrightarrow q$ og $\neg p \leftrightarrow \neg q$ er logisk ekvivalente ved å lage en sannhetsverditabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Samme sannhetsverdi i hver rad.

Siden ~~kol~~ kolonner for $p \leftrightarrow q$ og $\neg p \leftrightarrow \neg q$ har det samme sannhetsverdier i hver mulige valuasjon (hver rad) beslutter vi at de er logiske ekvivalente.

(b) $p \to q$ og $(p \vee r) \to q$ er ikke logiske ekvivalente:

p	q	r	$p \vee r$	$p \to q$	$(p \vee r) \to q$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1

denne eksempel! er nok.

Utsagn $(p \vee r) \to q$ og $p \to q$ er ikke logiske ekvivalente siden valuasjonen med $p=0$ $q=0$ $r=1$ gjør $p \to q$ sann men $(p \vee r) \to q$ usann, siden $p \vee r = 1$ og $q = 0$ i dette tilfelle.

Oppgave 2:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\big((x \neq 0 \wedge y \neq 0) \leftrightarrow xy \neq 0\big)$

eller

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\Big(\big((x \neq 0 \wedge y \neq 0) \rightarrow xy \neq 0\big) \wedge \big(xy \neq 0 \rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)\big)\Big)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{Z}^+)(\forall y \in \mathbb{Z}^+)(x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$

eller:

$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\big((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)\big)$

Oppgave 3:

(a). Let S be the relation on $\mathbb{N}$ given by $(x,y) \in S$ iff $x \geq y$ and let R be the relation on $\mathbb{N}$ given by $(x,y) \in R$ iff $x \leq y$. We show $S^{-1} = R$.

Recall that $(x,y) \in S^{-1}$ iff $(y,x) \in S$ by definition of inverse.

Claim: $R = S^{-1}$

Proof: We give a proof by checking $R \subseteq S^{-1}$ and $S^{-1} \subseteq R$.

First let $(x,y) \in R$. Hence $x \leq y$. Hence $(y,x) \in S$, and so $(x,y) \in S^{-1}$. We conclude $R \subseteq S^{-1}$.

Now let $(x,y) \in S^{-1}$, in other words $(y,x) \in S$ or $y \geq x$. This means exactly that $x \leq y$ or $(x,y) \in R$. Hence $S^{-1} \subseteq R$.

We conclude that $R = S^{-1}$. ∎

~~Alternatively:~~ $\cancel{R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\} = \{(x,y) \mid y \geq x\}}$

$\cancel{= \{(x,y}$

3b: We show $R \circ S = \mathbb{N}^2$ by showing both $R \circ S \subseteq \mathbb{N}^2$ and $\mathbb{N}^2 \subseteq R \circ S$.

First, since by definition $R \circ S$ is a relation from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$, it is a subset of $\mathbb{N}^2$. Hence $R \circ S \subseteq \mathbb{N}^2$.

We now show that $\mathbb{N}^2 \subseteq R \circ S$. Let $(a,\overset{c}{\cancel{b}}) \in \mathbb{N}^2$. To show $(a,c) \in R \circ S$ we must find $b \in \mathbb{N}$ for which $(a,b) \in S$ and $(b,c) \in R$. That is, we must find b for which: $a \geq b$ and $b \leq c$.

We construct b in two cases:

(1) if $a \geq c$, pick $b = c$, since then both

$a \geq c = b$ and $\underbrace{\cancel{c \geq c = b}}_{b = c \leq c}$ hold.

(2) Assume now $a < c$. We then pick $b = a$, since then

$a \geq a = b$ and $b = a \leq c$ hold.

In every case of $(a,c) \in \mathbb{N}^2$, we have constructed a $b \in \mathbb{N}$ for which $(a,b) \in S$ and $(b,c) \in R$. Hence $(a,c) \in R \circ S$ and we have shown $\mathbb{N}^2 \subseteq R \circ S$.

Finally, we conclude $R \circ S = \mathbb{N}^2$. $\boxtimes$

Oppgave 4: Påstand: ~~$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! k \in \mathbb{Z}$~~
$(\forall n \in \mathbb{Z})\left(2 \nmid n \rightarrow (\exists! k \in \mathbb{Z})(n = (k-2)+(k+3))\right)$.

Bevis: La n vaere et oddeheltall. Det finnes et tall $q \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2q+1$, etter definisjon av oddetall.
Merk at $n = 2q+1 = (q-2)+(q+3)$. Hvis vi tar $k=q$, har vi funnet et heltall slik at $n = (k-2)+(k+3)$.
Vi viser nå at tallet er unikt. La k_1 og k_2 vaere heltall slik at $n = (k_1-2)+(k_1+3)$ og $n = (k_2-2)+(k_2+3)$.
Altså:

$$(k_1-2)+(k_1+3) = (k_2-2)+(k_2+3).$$

$$2k_1+1 = 2k_2+1 \quad \text{(aritmetikk)}$$

$$2k_1 = 2k_2 \quad \text{(trekke 1 fra begge sider)}$$

$$k_1 = k_2 \quad \text{(dele med 2).}$$

eller kansellere 2.

Vi beslutter at det finnes en entydig løsning til $n = (k-2)+(k+3)$ hvis n er et oddetall.

$\boxtimes$

Oppgave 5: Definer en funksjon $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n\}$ slik:

$$f(n) = \begin{cases} 4n & \text{hvis } n \geq 0. \\ -4n-2 & \text{hvis } n < 0. \end{cases}$$

Jeg skal vise at f er bijektiv, ~~derfor +~~ og så kan vi konkludere $|\mathbb{Z}| = |\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n\}|$.

f er injektiv: La $n, m \in \mathbb{Z}$ og anta $n \neq m$. Vi sjekker tilfeller:

(1) Hvis $n \geq 0$ og $m < 0$. Da er $f(n) = 4n$, $f(m) = -4m-2$.

Hvis $f(n)=f(m)$, får vi $4n=-4m-2$, slik at

$$4(n+m)=2$$

som viser $4\mid 2$ — en motsigelse. Altså, vi må ha $f(n)\neq f(m)$ i tilfellet.

(2). Hvis $n\geq 0$ og ~~...~~ $m\geq 0$ og $n\neq m$, må vi ha $4n\neq 4m$ slik at $f(n)=4n\neq 4m=f(m)$. Altså $f(n)\neq f(m)$.

(3) Hvis $n<0$ og $m<0$ og $n\neq m$, ser vi at $-4n\neq -4m$ og så $-4n-2\neq -4m-2$, altså $f(n)\neq f(m)$.

(4). Hvis $n<0$ og $m\geq 0$, men dette tilfellet er det samme som (1), bare ~~med~~ bytte symboler n og m.

Så har vi vist at f er injektiv.

f er surjektiv.

La $n\in\mathbb{N}$ slik at $2\mid n$. Det finnes $q\in\mathbb{N}$ slik at $n=2q$.

(1) Hvis $2\mid q$, det finnes $m\in\mathbb{N}$ slik at $q=2m$, og så er $n=2q=2(2m)=4m$. Da er $n=f(m)$.

(2) Hvis $2\nmid q$ er q et oddetall. Det finnes $m\in\mathbb{N}$ slik at $q=2m+1$. Så regner vi at:

$$\begin{aligned} n=2(2m+1)=4m+2 &= 4(m+1)-4+2 \\ &= 4(m+1)-2 \\ &= -4(-(m+1))-2 \\ &= f(-(m+1)). \end{aligned}$$

Merk at $m\geq 0$, så er $m+1\geq 1$ og $-(m+1)<0$. $\square$