Oppgave 1

a

$X \sim \mathcal{N}(1.1, 0.2)$

$$P(X < 0.8) = G\left(\frac{0.8 - 1.1}{0.2}\right) = G(-1.5) = 0.0668$$

$$\begin{aligned} P(X > 1.2) &= 1 - P(X \leq 1.2) = 1 - G\left(\frac{1.2 - 1.1}{0.2}\right) \\ &= 1 - G(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \end{aligned}$$

$$P(0.8 \leq X \leq 1.2) = P(X \leq 1.2) - P(X < 0.8) = 1 - 0.3085 - 0.0668 = 0.6247$$

b

La $\bar{X}$ være gjennomsnittvekt av 10 ørreter. Standard-avviket til $\bar{X}$ er $\sigma_{\bar{X}} = 0.2/\sqrt{10} = 0.0632$.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(1.1, 0.0632)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 1.2) &= G\left(\frac{1.2 - 1.1}{0.0632}\right) \\ &= G(1.58) \\ &= 0.9429 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 1) &= 1 - P(\bar{X} \leq 1) \\ &= 1 - G\left(\frac{1 - 1.1}{0.0632}\right) \\ &= 1 - G(-1.58) \\ &= 0.9429 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < \bar{X} < 1.2) &= P(\bar{X} < 1.2) - P(\bar{X} < 1) \\ &= 0.9429 - (1 - 0.9429) \\ &= 0.8858 \end{aligned}$$

Oppgave 2

a

Sorterer tallene:

$$1.02 \quad 1.12 \quad 1.17 \quad 1.28 \quad 1.41$$

Medianen er 1.17 (det midterste tallet).

$$\bar{x} = \frac{1.02 + 1.12 + 1.17 + 1.28 + 1.41}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$s^2 = \frac{0.0902}{4} = 0.02255$$

b

Signifikansnivå $\alpha = 0.05$. La μ være gjennomsnittsvekta, i kg, til ørret-populasjonen i Litle Kjukkelvatn

$$\text{H}_0 : \text{Gjennomsnittsvekta til ørret-populasjonen er ikke større enn 1 kg, } \mu \leq 1$$

$$\text{H}_1 : \text{Gjennomsnittsvekta til ørret-populasjonen er større enn 1 kg, } \mu > 1$$

Bruker en t-test siden standard-avviket er ukjent. Finner $t_{0.05}$ med 4 frihetsgrader i tabell. Forkast H_0 hvis $T > t_{0.05} = 2.132$. Regner ut verdien av test-observator som er

$$t = \frac{\bar{x} - 1}{s/\sqrt{5}} = \frac{0.2}{s/\sqrt{5}} = 2.978$$

Forkaster nullhypotesen.

c

Et estimat for sigma er utvalgets standardavvik $s = 0.15$ (kg). Finn et 95 % konfidensintervall for σ.
Antall frihetsgrader er 4. Finner $\chi_{0.025} = 11.14$ og $\chi_{0.975} = 0.48$. Et 95% konfidensintervall (KI) for variansen σ^2 er gitt ved

$$\left[\frac{4 \cdot 0.02255}{11.14}, \frac{4 \cdot 0.02255}{0.48}\right] = [0.008, 0.1879].$$

Tar rota av øvre grense og nedre grense. Så et 95% KI for σ er gitt ved $[0.09, 0.43]$.

Oppgave 3

a

1. Hver dag har to mulige utfall: Får fisk eller får ikke fisk.

2. Sannsynligheten for å få fisk er den samme hver dag, $p = 0.3$.

3. Antar det å få fisk på forskjellige dager er uavhengige hendelser.

b

X binominsk med $n = 10$ og $p = 0.3$.

$$\mathbb{E}X = np = 10 \times 0.3 = 3$$

3 dager er forventet antall dager Ola får fisk.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.3^3 0.7^7 == 0.267$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.953 = 0.047$$

Her har vi funnet $P(X \leq 5)$ i tabell i boka. $P(X > 5)$ er sannsynligheten for at Ola får fisk på flere enn 5 dager.

Oppgave 4

Fra et tilfeldig utvalg av Finmarks befolkning svarer 450 at de er imot sammenslåing, mens 130 svarer at de er for sammenslåing.

a

La p være andelen av befolkningen i Finmark som er imot sammenslåingen. Beste gjetning på p er

$$\hat{p} = 450/580 = 0.776$$

Finner KI:

$$\alpha = 0.05$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$\left(0.776 - 1.96\sqrt{0.776(1 - 0.776)/580}, 0.776 + 1.96\sqrt{0.776(1 - 0.776)/580}\right)$$
$$= (0.742, 0.810)$$

Så et 95 % KI for p er gitt ved $(0.742, 0.810)$.

Ved å bruke konfidensintervallet, kan man forkaste nullhypotesen om at $p = 0.5$? Skriv ned alternativhypotese, signifikansnivå og begrunn kort konklusjonen.

$H_1 : p \neq 0.5$. Sign. nivå $\alpha = 0.05$. Forkaster nullhypotesen fordi 0.5 ikke er inneholdt i KI.

b

Signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

$$\mathrm{H}_0 : \text{Å være imot sammenslåing er uavhengig av fylke man bor i.}$$

H_1 : Det å være imot sammenslåing avhenger av fylke man bor i.

Finner 0.01-kvantilet i kjikvadrat-fordelingen med $(2-1)(2-1) = 1$ frihetsgrad, denne er 6.63.

Forkast H_0 hvis $Q > 6.63$.

Regner ut forventet antall som vi skriver inn i parentes i tabellen.

	Imot fylkes-sammenslåing	For fylkes-sammenslåing	Totalt
Finnmark	450 (417.8)	130 (162.2)	580
Troms	400 (432.2)	200 (167.8)	600
Totalt	850	330	1180

$$\begin{aligned} Q =& \sum \frac{(\text{observert-forventet})^2}{\text{forventet}} \\ =& \frac{(450-417.8)^2}{417.8} + \ldots + \frac{(200-167.8)^2}{167.8} \\ =& 17.45 \end{aligned}$$

Forkaster H_0.

Oppgave 5

B = personen vi hilser på er bonde. F = personen vi hilser på er fisker.

$$P(B) = 0.1, \quad P(F) = 0.15, \quad P(B \cap F) = 0.05$$

a

Hva er sannsynligheten for at vedkommende er bonde eller fisker ?

$$P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F) = 0.2$$

Gitt at personen vi hilser på er en fisker, hva er sannsynligheten for at vedkommende er bonde ?

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{3} \quad (= 0.33)$$

b

Vi kommer i prat med personen vi treffer, og vedkommende opplyser at han ikke er bonde. Hva er sannsynligheten for at han er fisker?

$$
\begin{aligned}
P(F|\bar{B}) &= \frac{P(F \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \\
&= \frac{P(F)P(\bar{B}|F)}{P(\bar{B})} \\
&= \frac{P(F)(1 - P(B|F))}{1 - P(B)} = \frac{1}{9} \quad (= 0.11)
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

$\hat{\sigma}^2$ er ikke en forventningsrett estimator for σ^2 fordi $\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}^2\right] \neq \sigma^2$.

Vis at S^2 er forventningsrett estimator for σ^2.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{5}{4}\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{5}{4}\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{5}{4}\frac{4}{5}\sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$