I oppgaver der det eksplisitt står at en skal vise mellomregninger, vil korrekt svar ikke bli godkjent dersom mellomregninger mangler.

Det brukes desimalpunktum i oppgavesettet.

Oppgavesettet består av 10 delpunkter som teller likt ved bedømming.

Oppgave 1

En fiskefordelingsbedrift produserer seifilet som sendes ut i standardpakninger som skal veie ca 1000 gram. Pakkemaskinen er innstillt på den vekta (μ) en ønsker pakningene skal ha. Maskinen er ikke helt nøyaktig slik at vi får et standardavvik på σ gram.

Vi antar at vekta X av pakningne er normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavvik σ. Standardavviket er oppgitt til å være 20 gram, dette gjelder for hele oppgaven.

Bedriften innstiller maskinen slik at $\mu = 1000$ gram.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pakning

- veier mindre enn 1010 gram?

  Løsningsforslag:
  $P(X < 1010) = G(\frac{1010-1000}{20}) = G(0.5) = 0.6915$

- veier mellom 980 og 1010 gram?

  Løsningsforslag:
  $P(980 < X < 1010) = P(X < 1010)) - P(X \leq 980)) = 0.6915 - G(\frac{980-1000}{20}) = 0.6915 - G(-1.0) = 0.6915 - 0.1587 = 0.5328$

b) 10 pakninger velges tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittsvekten er større enn 1010 gram?

Løsningsforslag:
$n = 10$,
$P(\bar{X} > 1010) = 1 - G(\frac{1010-1000}{\frac{20}{\sqrt{10}}}) = 1 - G(1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0571$

Bedriften vil gå ut med en garanti om at 99% av filetpakningene skal veie med enn 1000 gram. For å oppfylle dette gravet må de endre innstillingen av maskinen.

c) Hvilke verdi av μ må de stille inn maskinen på for å oppfylle garantien?

Løsningsforslag:
Finn μ slik at $P(X > 1000) = 0.99$.

Dvs $P(X \leq 1000) = 0.01$

$P(X \leq 1000) = G(\frac{1000-\mu}{20}) = G(-2.326) = 0.01$

$\frac{1000-\mu}{20} = -2.326$

De må stille inn maskinen på minst $\mu = 1000 + 2.326 \cdot 20 = 1046.52$

Bedriften bestemmer seg for å fortsette å bruke $\mu = 1000$ gram. Men de har en misstanke om at maskinen er litt skevinnstillt slik at gjennomsnittsvekta av paknuingene er mindre enn 1000 gram. De tar derfor ut 10 tilfeldige paktninger fra produksjonen og kontrollveier disse. Resultatet ble:

990 1005 987 993 975 1005 987 956 984 1024

d)
- Vis med mellomregninger at $\bar{X} = 990.6$.

  Løsningsforslag:
  $\bar{X} = \frac{990+1005+987+993+975+1005+987+956+984+1024}{10} = \frac{9906}{10} = 990.6$

- Finn medianen.

  Løsningsforslag:
  Ordner observasjonene fra minste til største verdi:
  956, 975, 984, 987, 987, 990, 993, 1005, 1005, 1024

  Fordi det er et like antall observasjoner, er medianen gjennomsnittet av de to midterste: $\frac{987+990}{2} = 988.5$

- Regn ut s.

  Løsningsforslag:
  $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 990.6)^2 = (990 - 990.6)^2 + \cdots (1024 - 990.6)^2 = (-0.6)^2 + (14.4)^2 + (-3.6)^2 + (2.4)^2 + (-15.6)^2 + (14.4)^2 + (-3.6)^2 + (-34.6)^2 + (-6.6)^2 + (33.4)^2 = 3046.4$

  $s = \sqrt{\frac{3046.4}{9}} \approx 18.4$

e) Gir disse målingene grunn til å påstå at maskinen gir lavere gjennomsnittsvekt enn 1000 gram? Formulér hypoteser og utfør testen med 5% signifikansnivå.

Løsningsforslag:
$H_0 : \mu \geq 1000$ vs $H_0 : \mu < 1000$
Det er opplyst først i oppgaven at standardavvik $\sigma = 20$ skal brukes gjennom hele oppgaven.
I Z-test forkaster vi nullhypotesen på 5% nivå, dersom $Z \leq -1.645$.

Testobservator for dette datamaterialet er: $Z = \frac{990.6-1000}{\frac{20}{\sqrt{10}}} = -1.49$.

Verdien av testobervatoren er ikke mindre enn -1.645 og nullhypotesen forkastes ikke.

Det er ikke grunnlag i datamaterialet til å si at maskinen gir lavere gjennomsnittsvekt enn 1000 gram.

Etterat ledelsen har sett resultatet av testen, lurer de på om de kan benytte det i markedsføringen mot butikk-kjedene. De vil gjerne kunne si at testen deres med 80% sannsynlighet vil ha oppdaget en vektnedgang på 10 gram.

f)
- Er dette en korrekt påstand? Begrunn svaret.

  Løsningsforslag: Påstanden er ikke korrekt. Her ønsker bedriften at styrken til testen skal være 80% for 10 gram vektreduksjon.
  $\gamma(990) = G(\frac{10\sqrt{n}}{\sigma} - 1.645) = G(\frac{10\sqrt{10}}{20} - 1.645) = G(-0.06) = 0.4761$. Styrken er mye mindre enn 0.80.

- Hvor mange pakninger skulle fiskeforedlingsbedriften ha brukt i testen for at dette skulle vært oppfyllt?

  Løsningsforslag: Nødvendig utvalgsstørrelse er:
  $n = (1.645 + z_{0.2})^2(\frac{\sigma}{10})^2 = (1.645 + 0.84)^2(\frac{20}{10})^2 = 24.7$
  En må bruke minst 25 pakninger i testen for å oppfylle kravet til 80% styrke.

Oppgave 2

En mekanisk bedrift ønsker å undersøke levetiden til et bestemt type verktøy. De kjøper inn seks slike verktøy fra hver av tre produsenter. Testresultatet ble:

Levetid av verktøy i timer		
Produsent 1	Produsent 2	Produsent 3
51	43	38
53	45	64
45	49	48
52	42	53
50	39	59
48	41	51
$\bar{y}_1 = 49.83$	$\bar{y}_2 = 43.17$	$\bar{y}_3 = 52.17$
$s_1 = 2.93$	$s_2 = 3.49$	$s_3 = 9.02$

Resultatet fra R-funksjonen anova(lm(...)) er oppsummert i ANOVA-tabellen:

	Kvadratsum	Frihetsgrader	Varians	F-verdi	p-verdi
Mellom gruppene	261.78	?	?	?	0.045
Innad i gruppene	?	?	34.03		
Totalt	772.28	17			

a) - Regn ut de manglende tallene i ANOVA-tabellen (der det står "?").

Løsningsforslag:

Kvadratsum	Frihetsgrader	Varians	F-verdi
261.78	$k-1=2$	$\frac{261.78}{2} = 130.89$	$\frac{130.89}{34.03} = 3.85$
$772.28 - 261.78 = 510.50$	$18-3=15$	34.03	
772.28	17		

- Undersøk med hypotesetest om vektøy fra de tre produsentene har ulik forventet levetid. Bruk 5% signifikansnivå.

Løsningsforslag:
Testobservatoren er $F = 3.85$ og har p-verdi 0.045. Fordi p-verdien er mindre enn signifikansnivået 0.05, forkastes nullhypotesen. Verktøy fra minst to av de tre produsentene har ulik forventet levetid.

b) Lag et 95% konfidensintervall for forskjellen i forventet levetid mellom verktøy fra produsent 2 og 3.

Her kan du bruke kvadratroten av varians innad i gruppene S_E^2 og tilhørende frihetsgrader (fra ANOVA-tabellen) som hhv. S_P og frihetsgrader i konfidensintervallet.

Løsningsforslag:
Estimert forventet forskjell er: $\bar{y}_3 - \bar{y}_2 = 52.17 - 43.17 = 9.00$ timer.

Bruker 15 frihetsgrader fordi dette er frihetsgradene til S_E^2.
Da finner vi at $t_{0.025} = 2.131$

NG: $\bar{y}_3 - \bar{y}_2 - 2.131 \cdot \sqrt{34.03}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 9.00 - 7.18 = 1.72$ (Regel 8.2)

ØG: $\bar{y}_3 - \bar{y}_2 + 2.131 \cdot \sqrt{34.03}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 9.00 + 7.18 = 16.18$

Et 95% konfidensintervall for $\mu_3 - \mu_2$:

$$[1.72, \quad 16.18]$$

Oppgave 3

I en boks er det 20 bordtennisballer, 10 hvite og 10 oransje. Vi trekker tre baller uten tilbakelegging. La X = antall hvite baller som trekkes.

Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{120}{1140}$	$\frac{450}{1140}$	$\frac{450}{1140}$	$\frac{120}{1140}$

a)
- Forklar hvorfor dette er ei sannsynlighetsfordeling.

  Løsningsforslag:
  Dette er ei sannsynlighetsfordeling fordi sannsynlighetene summeres til 1
  $\frac{120}{1140} + \frac{450}{1140} + \frac{450}{1140} + \frac{120}{1140} = \frac{1140}{1140}$
  Et annet krav er at all sannsynligheter må være positive ≥ 0

- Finn $P(1 \leq X \leq 2)$

  Løsningsforslag:
  $P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{450}{1140} + \frac{450}{1140} \approx 0.789$

b) Regn ut forventningen (μ) og standardavviket (σ) for denne sannsynlighetsfordelingen.

Løsningsforslag:
$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{120}{1140} + 1 \cdot \frac{450}{1140} + 2 \cdot \frac{450}{1140} + 3 \cdot \frac{120}{1140} = 1.5$

Til variansen σ^2 trenger vi
$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{120}{1140} + 1^2 \cdot \frac{450}{1140} + 2^2 \cdot \frac{450}{1140} + 3^3 \cdot \frac{120}{1140} = \frac{333}{114} \approx 2.92$

$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{333}{114} - (1.5)^2 \approx 2.92 - 2.25 = 0.67$

Da vet vi at $\sigma = \sqrt{0.67} \approx 0.82$

PS. Dette er en hypergeometrisk fordeling med $N = 20, M = 10, n = 3$
og andelen $p = \frac{M}{N} = 0.5$.

Da er $\mu = n \cdot p = 1.5$ og $\sigma = \sqrt{np(1-p)\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{51}{76}} \approx 0.82$