Oppgave 1

$X \sim \mathcal{N}(2.1, 0.6)$.

a

$$P(X < 1.5) = G\left(\frac{1.5 - 2.1}{0.6}\right) = G(-1) = 0.1587$$

$$\begin{aligned} P(X > 2.7) &= 1 - P(X \leq 2.7) = 1 - G\left(\frac{2.7 - 2.1}{0.6}\right) \\ &= 1 - G(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

$$P(1.5 \leq X \leq 2.7) = P(X \leq 2.7) - P(X < 1.5) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

b

La $\bar{X}$ være gjennomsnittvekt av 10 røyer. Standard-avviket til $\bar{X}$ er $\sigma_{\bar{X}} = 0.6/\sqrt{10} = 0.1897$.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(2.1, 0.1897)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 1.91) &= G\left(\frac{1.91 - 2.1}{0.1897}\right) \\ &= G(-1.00) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 2.29) &= 1 - P(\bar{X} \leq 2.29) \\ &= 1 - G\left(\frac{2.29 - 2.1}{0.1897}\right) \\ &= 1 - G(1.00) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1.91 < \bar{X} < 2.29) &= P(\bar{X} < 2.29) - P(\bar{X} < 1.91) \\ &= 1 - 0.1587 - 0.1587 = 0.6826 \end{aligned}$$

Oppgave 2

La X_1 og X_2 være uavhengige tilfeldige variable, hver med forventning μ og varians σ^2. Vi ser på estimatorene

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}, \quad \hat{\mu}_2 = 3 + \frac{X_2}{5}, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

a

Beregn forventningsverdi for hver av estimatorene.

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mu}_1) &= E\left(\frac{2X_1 + 3X_2}{5}\right) \\
&= E\left(\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right) \\
&= E\left(\frac{2}{5}X_1\right) + E\left(\frac{3}{5}X_2\right) \\
&= \frac{2}{5}E\left(X_1\right) + \frac{3}{5}E\left(X_2\right) \\
&= \frac{2}{5}\mu + \frac{3}{5}\mu = \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mu}_2) &= E\left(3 + \frac{X_2}{5}\right) \\
&= 3 + \frac{1}{5}\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mu}_3) &= E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}E(X_1 + X_2) \\
&= \mu
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) &= \mathrm{Var}\left(\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{2}{5}X_1\right) + \mathrm{Var}\left(\frac{3}{5}X_2\right) \\
&= \frac{4}{25}\mathrm{Var}\left(X_1\right) + \frac{9}{25}\mathrm{Var}\left(X_2\right) \\
&= \frac{13}{25}\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) &= \mathrm{Var}\left(3 + \frac{X_2}{5}\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{X_2}{5}\right) \\
&= \sigma^2 \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_1 + X_2) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2
\end{aligned}$$

c

Estimatorene $\hat{\mu}_1$ og $\hat{\mu}_3$ er begge forventningsrett, mens $\hat{\mu}_2$ er ikke forventingsrett. Siden $\hat{\mu}_3$ (gjennomsnittet) har mindre varians enn $\hat{\mu}_1$ er gjennomsnittet den beste estimatoren av disse tre. (Vet også fra teorien at gjennomsnittet er den beste estimatoren).

Oppgave 3

La Y være antall seksere på fem terningkast.

a

i) $V_Y = \{0, 1, \ldots, 5\}$

ii) Binomisk med $n = 5$ og $p = 1/6$.

iii) $E(Y) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

b

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= (5/6)^5 = 0.4019 \\
P(Y = 1) &= 5(1/6)(5/6)^4 = (5/6)^5 = 0.4019 \\
P(Y > 1) &= 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 2 \times (5/6)^5 = 0.1962
\end{aligned}
$$

$P(Y > 1)$ er sannsynligheten for å flere enn 1 sekser på fem terningkast.

Oppgave 4

Det oppgis at

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1924, \quad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 828.4$$

der y_i er vekt, i gram, på sjokolade i. Det antas at dataene er normalfordelte.

a

La μ være forventet vekt, i gram, til sjokoladen Superduper.

$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq 200$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu < 200$$

Bruker en z-test siden standard-avviket antas kjent.
Velger $\alpha = 0.05$ som signifikansnivå.
Forkast H_0 hvis $Z < -z_{0.05} = -1.645$.

$$\bar{y} = 1924/10 = 192.4$$

Regner ut verdien av test-observator som er

$$z = \frac{\bar{y} - 200}{\sigma/\sqrt{10}} = -\frac{7.6}{10/\sqrt{10}} = -2.40$$

Forkaster nullhypotesen.

b

$$s^2 = \frac{828.4}{9} = 92.04$$

Et estimat for standardaviket er $s = \sqrt{\frac{828.4}{9}} = 9.59$.
Vi har $\alpha = 0.05$ og finner $t_{0.025}$ med 9 frihetsgrader i tabell, $t_{0.025} = 2.262$. Et 95 % konfidensintervall for forventet vekt (i gram) til sjokoladen Superduper er gitt ved

$$[192.4 - 2.262\, s/\sqrt{10}, 192.4 + 2.262\, s/\sqrt{10}] = [185.5, 199.3]$$

Oppgave 5

	Gjennomsnitt	Varians
Storfiskvatnet	$\bar{X} = 1.00$	$S_1^2 = 0.0057$
Lunsjvatnet	$\bar{Y} = 0.88$	$S_2^2 = 0.0158$

a

Anta normalfordelte data med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$, og utfør en passende hypotese-test med signifikans-nivå $\alpha = 0.05$

$$\text{H}_0 : \mu_1 = \mu_2, \text{ Like stor fisk i begge vann.}$$

$$\text{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2, \text{ Større fisk i et av vannene.}$$

Bruker en uparet t-test. Forkast H_0 hvis $|T| > 2.086$. Vi har $n_1 = n_2 = 11$ og

$$s_p^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2} = 0.01075$$

Verdien av test-observator er

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_p \sqrt{2/11}} = 2.71.$$

Forkast nullhypotesen på 5% signifikansnivå det er signifikant forskjell på fiskevektene i de to vannene.

b

Uparet Wilcoxon-test.

La m_1 og m_2 være medianvekten av fisk i hhv Storfiskvatnet og Lunsjvatnet.

Da blir hypotesene:
$H_0 : m_1 = m_2$
$H_1 : m_1 \neq m_2$

Forberedelser til beregning av testobservator:
Storfiskvatnet, rekkefølgenr i parentes

$$0.85(6) \quad 0.94(9.5) \quad 0.96(11) \quad 0.98(13) \quad 0.99(14) \quad 0.99(15)$$

$$1.00(16) \quad 1.02(17) \quad 1.04(18) \quad 1.10(21) \quad 1.13(22)$$

Lunsjvatnet, rekkefølgenr i parentes

$$0.65(1) \quad 0.75(2) \quad 0.79(3) \quad 0.84(4) \quad 0.84(5) \quad 0.88(7) \quad 0.88(8)$$

$$0.94(9.5) \quad 0.97(12) \quad 1.06(19) \quad 1.06(20)$$

Sum rekkefølgenummer Storfiskvatnet: $W = 162.5$
I tillegg trenger vi $E(W)$ og $Var(W)$

$$E(W) = 11 \times 23/2 = 126.5$$
$$\text{Var}(W) = 11^2 \times 23/12 = 231.9$$

Forkast H_0 hvis $|Z| > 1.96$.

Verdien av test-observator er

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{\text{Var}(W)}} = \frac{162.5 - 126.5}{\sqrt{231.9}} = 2.36$$

Samme konkulsjon som i a).