

1 Rekursion

1.1 Binomialkoeffizient

Zuerst definieren wir eine μ -rekursive Fakultätsfunktion $fak : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned} fak(0) &= c_1^0 \\ fak(n+1) &= mult \circ (succ(\Pi_1^2), \Pi_2^2)(n, fak(n)) \end{aligned}$$

Da die zur Definition verwendete $mult$ -Funktion als μ -rekursiv angenommen werden kann, und alle weiteren Bestandteile Inhalt der Klasse der primitiv rekursiven Funktionen sind, ist die Funktion fak somit auch μ -rekursiv.

Mithilfe dieser Fakultätsfunktion können wir nun die μ -rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit:

$$g(n, k) = div \circ (fak \circ \Pi_1^2, mult \circ (fak \circ \Pi_2^2, fak \circ sub(\Pi_1^2, \Pi_2^2)))(n, k)$$

definieren.

Da wir vorher gezeigt haben, dass die Funktion fak μ -rekursiv ist, und jede Funktion, die durch Einsetzung/Komposition von μ -rekursiven Funktionen entsteht, auch μ -rekursiv ist, ist die Funktion g selbst μ -rekursiv.

1.2

Die geschlossene Formel für $f(1, x, y)$ für $y \leq x$ lautet:

$$2^x * \frac{x!}{y! * (x-y)!}$$

Beweis:

Wir führen Induktion über x :

Induktionsanfang: Für $x = 0$ gilt $y = 0$, da $y \leq x$ und

$$f(1, 0, 0) = 1 = 2^0 * \frac{0!}{0! * (0-0)!}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$f(1, x, y) = 2^x * \frac{x!}{y! * (x-y)!}$$

Induktionsbehauptung:

$$f(1, x+1, y) = 2^{x+1} * \frac{(x+1)!}{y! * ((x+1)-y)!}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
 f(1, x+1, y) &= f(0, f(1, x, y-1), f(1, x, y)) \\
 &= 2 * f(1, x, y-1) + 2 * f(1, x, y) \\
 &= 2 * 2^x * \frac{x!}{(y-1)! * (x-(y-1))!} + 2 * 2^x * \frac{x!}{y! * (x-y)!} \\
 &= 2^{x+1} * \left(\frac{x!}{(y-1)! * (x-(y-1))!} + \frac{x!}{y! * (x-y)!} \right) \\
 &= 2^{x+1} * \left(\binom{x}{y-1} + \binom{x}{y} \right) \\
 &= 2^{x+1} * \binom{x+1}{y} \\
 &= 2^{x+1} * \frac{(x+1)!}{y! * ((x+1)-y)!}
 \end{aligned}$$

Wir führen Induktion über y:

Induktionsanfang: Für y = 0 gilt:

$$\begin{aligned}
 f(1, x, 0) &= f(0, 0, f(1, x-1, 0)) \\
 &= 2 * f(1, x-1, 0) \\
 &= \dots \\
 &= 2^x * f(1, 0, 0) \\
 &= 2^x * 1 \\
 &= 2^x * \frac{x!}{x!} \\
 &= 2^x * \frac{x!}{0! * (x-0)!}
 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$f(1, x, y) = 2^x * \frac{x!}{y! * (x-y)!}$$

Induktionsbehauptung:

$$f(1, x, y+1) = 2^x * \frac{(x)!}{(y+1)! * ((x)-(y+1))!}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
 f(1, x, y+1) &= f(0, f(1, x-1, y), f(1, x-1, y+1)) \\
 &= 2 * f(1, x-1, y) + 2 * f(1, x-1, y+1) \\
 &= 2 * 2^{x-1} * \frac{(x-1)!}{y! * ((x-1)-y)!} + 2 * 2^{x-1} * \frac{(x-1)!}{(y+1)! * ((x-1)-(y+1))!} \\
 &= 2^x * \left(\frac{(x-1)!}{y! * ((x-1)-y)!} + \frac{(x-1)!}{(y+1)! * ((x-1)-(y+1))!} \right) \\
 &= 2^x * \left(\binom{x-1}{y} + \binom{x-1}{y+1} \right) \\
 &= 2^x * \binom{x}{y+1} \\
 &= 2^x * \frac{(x)!}{(y+1)! * ((x)-(y+1))!}
 \end{aligned}$$

Aus den beiden durchgeführten Induktionsbeweisen folgt, dass die Formel

$$2^x * \frac{x!}{y! * (x-y)!}$$

für $f(1, x, y)$ für $y \leq x$ gilt.

2 Simulation

Simulation von WHILE durch LOOP*

Hinweis Zeigen Sie zunächst, dass LOOP-Programme mit dem zusätzlichen Konstrukt Turing-mächtig sind.

LOOP-Programme sind mithilfe des zusätzlichen Konstruktes *DO P WHILE $x_i \neq 0$ END* Turing-mächtig, da jedes WHILE-Programm *WHILE $x_i \neq 0$ DO P END* durch das folgende LOOP-Programm (mit Konstrukt) simuliert werden kann:

```
IF  $x_i \neq 0$  THEN
  DO P WHILE  $x_i \neq 0$  END;
END
```

Im Folgenden wird gezeigt, dass LOOP*-Programme Turing-mächtig sind, indem bewiesen wird, wie jedes WHILE-Programm durch ein LOOP*-Programm simuliert werden kann.

Definition Hilfskonstrukt Zunächst soll ein Hilfskonstrukt eingeführt werden, welches durch ein LOOP-Programm simuliert werden kann.

IF $x_i \neq 0$ THEN P END $\hat{=}$ $x_i := 0$; LOOP x_i DO $x_j := 1$ END; LOOP x_j DO P END;

Beweis

Ein jedes WHILE-Programm *WHILE $x_i \neq 0$ DO P END* kann durch das folgende LOOP*-Programm simuliert werden:

```
IF  $x_i \neq 0$  THEN
   $x_{N_P} := x_0$ ;
  MAKE P BREAK
  IF  $x_i \neq 0$  THEN
     $x_0 := 0$ ;
  END;
END;
 $x_0 := x_{N_P}$ 
END;
```

Durch die IF-Anweisung in der ersten Zeile wird sichergestellt, dass der *MAKE*-Block nur dann ausgeführt wird, wenn $x_i \neq 0$ ist. Das ist wichtig, da bei WHILE-Programmen die Bedingung auch zuerst überprüft wird, bevor der Block das erste Mal ausgeführt wird.

Die Zuweisung des Wertes von x_0 an x_{N_P} vor dem *MAKE*-Block und wieder zurück nach Ausführung des *MAKE*-Blocks stellt sicher, dass der zuvor in x_0 gespeicherte Wert nicht verloren geht. Da zum Speichern des Wertes von x_0 die Variable x_{N_P} verwendet wird, ist sichergestellt, dass keine in P benutzte Variable überschrieben wird.

3 Unentscheidbarkeit

Sei

$$P := \{m_1 \# m_2 \# w \mid \exists M_1 : m_1 = \langle M_1 \rangle, \exists M_2 : m_2 = \langle M_2 \rangle \text{ und } M_1 \text{ und } M_2 \text{ verhalten sich unterschiedlich auf Eingabewort } w\}$$

die Menge aller Wörter, welche die Frage „Verhalten sich M und M' bei Eingabewort w unterschiedlich?“ mit „Ja“ beantworten.

Wir zeigen, dass P nicht entscheidbar ist, indem wir zeigen, dass

$$K = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$$

auf P reduzierbar ist.

Zu zeigen ist $K \leq P$.

Sei $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1, \#\}^*$ mit: $f(w) = w'$, wobei $M_{w'}$ eine Turing-Maschine ist, welche eine Turing-Maschine M_w (nachfolgend als M_{w_1} bezeichnet) und eine zweite Turing-Maschine M_w (nachfolgend als M_{w_2} bezeichnet) abwechselnd auf Eingabe w simuliert. Wenn sowohl M_{w_1} und M_{w_2} halten und die Eingabe (nicht) akzeptieren, wechselt $M_{w'}$ in eine Endlosschleife.

Dann ist $f^{-1}(P) = K$.

f ist total, da nach Definition M_w für jedes w eine Turing-Maschine M_w existiert. f ist berechenbar, da nach der Vorlesung M_w berechenbar ist, eine universelle Turing-Maschine und eine Turing-Maschine die das Band löscht existieren und die Kodierung einer Turing-Maschine berechenbar ist. Wenn des weiteren

$$w \in K \Leftrightarrow f(w) \in P$$

gilt, ist die Reduktion gezeigt.

Hinrichtung: Sei $w \in K$ bel.

Dann hält M_w auf Eingabe w . Dann wird $M_{w'}$ nicht halten, da die Turing-Maschine in eine Endlosschleife gewechselt hat, da sowohl M_{w_1} als auch M_{w_2} die Eingabe .

Wenn also K entscheidbar wäre, dann müsste auch P entscheidbar sein. Da dies nicht der Fall ist, ist auch P nicht entscheidbar.

4 Ackermann-Funktion

An der rekursiven Definition der gegebenen Funktion $c(m, n)$ an der Stelle $m = 1$ und $n \geq 0$, die mindestens einmal ausgeführt werden muss, erkennt man, dass $c(m, n)$ größer ist als die Ackermann-Funktion $a(m, n)$ nach Rózsa Péter (Tutorium 7).

Ausgehend der Annahme, dass $c(m, n) > a(m, n)$ lässt sich folgendes schließen:

In Tutorium 7 Folie 9 wurde bewiesen, dass $a(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} - 3$, wobei der Turm $n + 3$ mal die 2 enthält.

Für $m = 4$ und $n = 4$ gilt:

$$a(4, 4) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} - 3 > d(4) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}$$

da der Turm bei $a(4, 4) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} - 3$ sieben mal die 2 enthält und der Turm bei $d(4) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}$ nur sechs mal.

Daraus folgt:

$$c(4, 4) > a(4, 4) > d(4)$$

Weiterhin gilt, dass $c(m, n) > c(m - 1, n)$. Betrachten wir nun ein beliebiges $n' \geq 4$. So kann man herleiten, dass $c(n', n') > d(n')$, da $c(n', n') \geq c(4, n') > d(n')$.

Damit wurde gezeigt, dass mit $n = 4$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass die Bedingung gilt.