

# Gruppe B-Mo2: Abschlussprotokoll des Praktikums

Yuchan Bian, Jiaqi Qin, E. Boateng

**Abstract:** Das vorliegende Protokoll beschreibt das Vorgehen des Praktikums Konzept der Regelungstechnik. Im Praktikum wird an einem 3-DOF Helikopter eine Regelungsaufgabe systematisch gelöst. Der Helikopter muss eine Trajektorie mit Beschränkungen wie Mindesthöhe abfliegen und eine Last von einem Landepunkt anderen transportieren. Die Modellierung des Systems erfolgte mithilfe des Drallsatzes. Das resultierende nichtlineare Modell wird um einen Arbeitspunkt linearisiert. Mittels des linearisierten Modells wird ein LQI-Regler entworfen. Die Erfüllung der Hauptaufgabe wird dann mit einer geplanten Solltrajektorie durchgeführt. Abschließend wurden die Reglerparameter optimiert, um ein gutes Ergebnis zu erzielen.

## 1. EINLEITUNG

Dieses Protokoll ist die Zusammenfassung der durchgeführten Schritte zur erfolgreichen Absolvierung des Praktikums im Wintersemester 2020/21. Im ersten Kapitel wird die Aufgabestellung und der Versuchsaufbau vorgestellt. Anschließend wird die Modellierung und die Auslegung des Reglers beschrieben. Zuletzt wird das Ergebnis gezeigt.

### 1.1 Aufgabenstellung

Ziel des Praktikums ist, wie in Abbildung 1 dargestellt, einen automatisierten Lastentransport zu realisieren. Der Helikopter soll die Aufgabe automatisch lösen können und dabei Mindesthöhen einhalten.

### 1.2 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 2 dargestellt. Darin wird das Koordinatensystem und die dazugehörigen Winkel definiert. Die Drehung um die  $x$ -Achse (Schwenkwinkel),  $y$ -Achse (Steigwinkel) und  $z$ -Achse (Nickwinkel) sind jeweils mit  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bezeichnet. Der Helikopter verfügt über die zwei einzeln ansteuerbare Motoren (Frontmotor und Heckmotor). Die zugehörigen Spannungen werden entsprechend mit  $U_F$  und  $U_B$  bezeichnet.

## 2. MODELLIERUNG

Der Reglerentwurf erfolgte anhand eine modellierte system des Helikopters. Folgenden Annahmen wurden verwendet, um die Komplexitätsgrad zu reduzieren vereinfachten Modell.

- (1) Alle Lager werden als ideal angenommen.
- (2) Die Geometrien der einzelnen Komponenten werden als starr und ideal angesehen
- (3) Alle Massen drehen sich symmetrisch um die verschiedenen Drehachsen
- (4) Die Rotation aller Massen erfolgt um den Schwerpunkt

Unter Anwendung des Drehimpulssatzes auf die Achsen a, b und c wurde folgenden Gleichungen abgeleitet

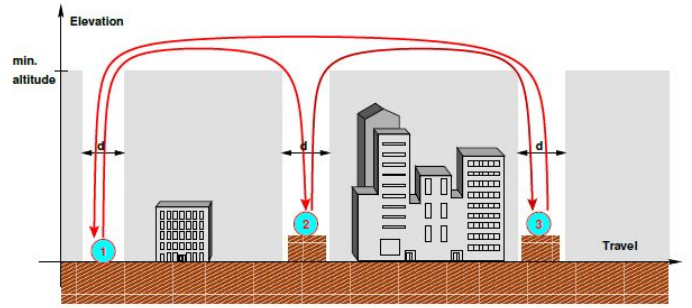


Fig. 1. Flugbahn der Hauptaufgabe

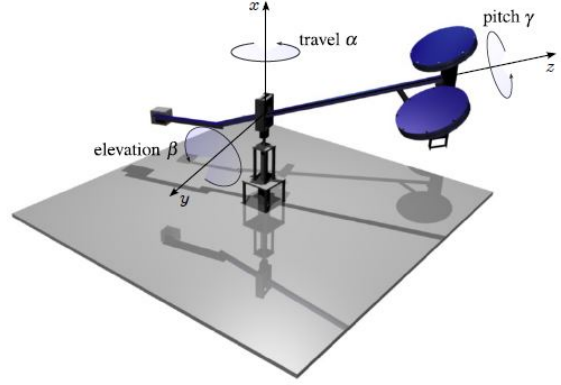


Fig. 2. Darstellung des Versuchsaufbaus

$$\Theta_a \ddot{\alpha} = -\cos(\beta)L_2 \sin(\gamma)(F_f + F_b) \quad (1)$$

$$\Theta_b \ddot{\beta} = \cos(\gamma)L_2(F_f + F_b) - \cos(\beta)(mL_1 - mL_2)g \quad (2)$$

$$\Theta_c \ddot{\gamma} = \frac{L_3}{2}(F_f - F_b) \quad (3)$$

Mit

$$\Theta_a = mL_1^2 + ML_2^2 \quad (4)$$

$$\Theta_b = mL_1^2 + ML_2^2 \quad (5)$$

$$\Theta_c = \frac{mL_3^2}{24} \quad (6)$$

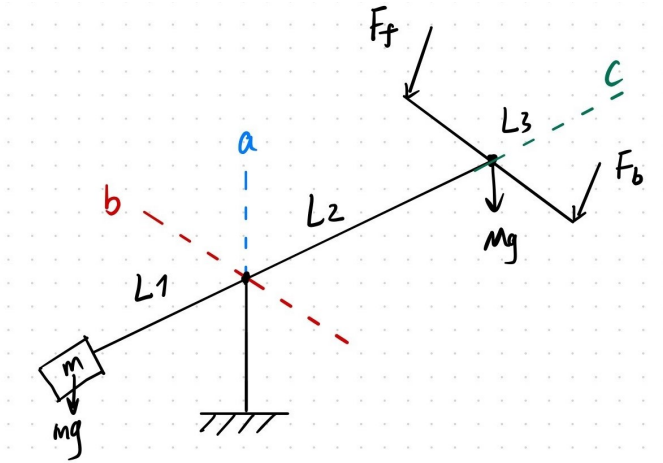


Fig. 3. vereinfachtes Modell des Hubschraubers

Der Zustandsvektor  $x = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$  und der Eingangsvektor  $u = [F_f \ F_b]^T$ . Es folgt daraus dass,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \frac{-\cos(\beta)L_2 \sin(\gamma)(F_f + F_b)}{mL_1^2 + ML_2^2} \\ \frac{\cos(\gamma)L_2(F_f + F_b) - \cos(\beta)(mL_1 - ML_2)g}{mL_1^2 + ML_2^2} \\ \frac{12(F_f - F_b)}{mL_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Die bereitgestellte Helikopterdaten stellte die Beziehung zwischen der Spannung und der entsprechenden Änderung des Deltas der Massen dar. Mithilfe der Kurvenanpassungsbefehl *polyfit* in Matlab konnte die Parameter der Kurve ermittelt. Die berechnete Koeffizienten lautet:

$$F_f(U) = 6.156 * 10^{-3} \quad (8)$$

$$F_b(U) = 4.704 * 10^{-3} \quad (9)$$

Unter Verwendung der Gleichungen des vereinfachten physikalischen Modells des Hubschraubers, die in bereits diskutiert wurde, wird das Zustandsraummodell der Regelstrecke abgeleitet.

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} & & O_{3,3} & & I_3 \\ 0 & 0 & \frac{0.887L_2(F_f - F_b)}{\sigma_1} & & \\ 0 & \frac{0.462ML_2g - mL_1g}{\sigma_1} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \quad O_{3,3}$$

mit  $\sigma_1 = mL_1^2 + ML_2^2$

$$B_{lin} = \begin{pmatrix} & O_{4,2} \\ \frac{L_2}{mL_1^2 + ML_2^2} & \frac{L_2}{mL_1^2 + ML_2^2} \\ \frac{12.0}{mL_3} & -\frac{12.0}{mL_3} \end{pmatrix}$$

### 2.1 Systemeigenschachften

Beobachtbarkeit: Die linearisierten Matrizen (A, C) des Modells weisen einen vollen Rang auf. Dies deutet auf die Beobachtbarkeit der verschiedenen Zustandsmodi hin.

Steuerbarkeit: Die linearisierten Matrizen von (A, B) des Modells weisen ebenfalls einen Rang n = 6 auf. Dies zeigt an, dass unser Modell steuerbar ist.

## 3. REGLERENTWURF

### 3.1 Reglerauswahl

Durch die Aufgabenstellung der Trajektorien leiten sich die Zielvorgaben des Reglerentwurfs ab. Der Helikopter soll nicht nur stabilisiert werden sondern einer Trajektorienvorgabe möglichst robust und ohne Sollwertabweichung folgen. Zur Erfüllung der Aufgabenstellung werden an den Regler folgende Anforderung gestellt:

- Der geschlossene Kreis soll stabil sein.
- Die bleibende Regelabweichung von  $\alpha$  und  $\beta$  soll so gering sein, dass der Helikopter entlang einer vorgegebenen Trajektorie fliegen kann.
- Der Helikopter kann die vorgegebene Position schnell erreichen.

Ein LQR-Regler vereint diese Eigenschaften. Erweitert um einen I-Anteil, der eine Sollwertabweichung der Trajektorie minimiert, ist hier ein Ansatz zu einem LQI-Reglerentwurf beschrieben. Deshalb haben wir uns für einen LQI-Regler ausgewählt.

### 3.2 Linearisierung

Der Zustandsvektor x, die Schubkraft der Rotoren als Eingangsvektor u und der Ausgang y lauten wie folgend:

$$x = [\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}]^T \quad (10)$$

$$u = \begin{bmatrix} F_f \\ F_b \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

Um das System leichter zu analysieren und die Basis fuer eine spaetere Reglerauslegung zu generieren, wird das System um eine Ruhelage linearisiert. Als Linearisierungspunkt wird

$$\bar{x} = [0, -3^\circ, 0, 0, 0, 0]^T \quad (13)$$

gewaehlt. Auf Basis des Arbeitspunktes wird die Schubkraft als Eingang fuer die Ruhelage bestimmt.

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0.5873 \\ 0.5873 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Für die Systemmatrix A ergibt sich durch Ableiten nach dem Zustandsvektor  $x$  und einsetzen des Linearisierungspunktes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.6921 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0359 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Eingangsmatrix B ergibt sich durch Jacobi-Matrix abgeleitet nach den Eingangsgrößen und einsetzen des Linearisierungspunktes zu:

$$B = \begin{bmatrix} O_{4,2} \\ 0.5832 & 0.5832 \\ 5.5383 & -5.5383 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Die Ausgangsmatrix C ergibt sich zu

$$C = \begin{bmatrix} I_3 & O_{3,3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Die Durchgriffsmatrix D ergibt sich zu Null und ist mit folgender Dimension durch

$$D = O_{3,2} \quad (18)$$

gegeben.

Bei weiteren Untersuchungen eines Beobachters und der Regelauslegung ist darauf zu achten, dass das linearisierte Modell nun mit den Abweichungen  $\Delta x$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta y$  der Größen arbeitet.

$$\Delta x = x - \bar{x}, \Delta u = u - \bar{u}, \Delta y = y - \bar{y} \quad (19)$$

Das linearisierte System ist vollständig gegeben durch:

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \quad \Delta y = C\Delta x + D\Delta u \quad (20)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta x(0) = x(0) - \bar{x} \quad (21)$$

### 3.3 LQI-Regelstruktur

Die Regelkreisstruktur des linearisierten Systems stellt sich wie folgend dar (Abbildung 4):

Die Reglerstruktur für das nichtlineare Modell und Black Box Modell stellt sich wie folgend dar (Abbildung 5):

Der LQI Regler wird mittels Matlab Befehl "lqi" angewendet. Für eine Strecke mit den Zustandsraumgleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta r - \Delta y \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_{neu} & 0 \end{bmatrix}}_{A_{LQI}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x_i \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{LQI}} \Delta u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Delta r \end{aligned} \quad (22)$$

$\Delta x \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  und  $\Delta x_i$  ist der Integratorausgang für Fehler  $e \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

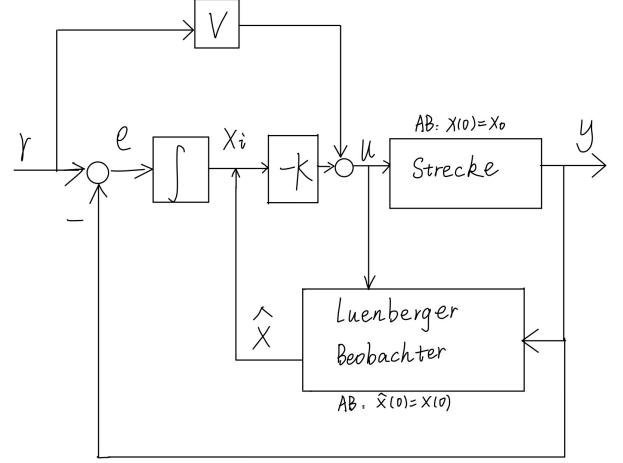


Fig. 4. Regelstruktur des linearisierten Systems

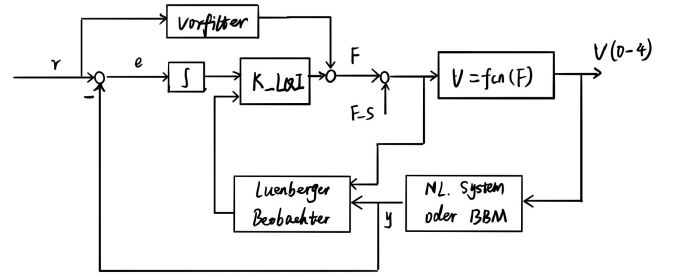


Fig. 5. Reglerstruktur für das nichtlineare Modell und Black Box Modell

$$y_{neu} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (23)$$

Die neue Matrix  $A_{LQI}$  in jetzigen System lautet:

$$A_{LQI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6921 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Die Eingangsmatrix  $B_{LQI}$ :

$$B_{LQI} = \begin{bmatrix} O_{4,2} \\ 0.5832 & 0.5832 \\ 5.5383 & -5.5383 \\ O_{2,2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Die neue Ausgangsmatrix C ergibt sich zu

$$C_{neu} = [I_2 \ O_{2,3}] \quad (26)$$

Die Matrix D lautet gleich wie früher:

$$D = O_{3,2} \quad (27)$$

Denn wir brauchen nur die  $\alpha$  und  $\beta$  für Trajektorie, das bedeutet,

$$r = \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{bmatrix} \quad (28)$$

Die Zustandsrückkopplungssteuerung hat die Form

$$\Delta u = -K[\Delta x; \Delta x_i] \quad (29)$$

Und  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 8}$ .

Das resultierende Gain  $K_{LQI}(K_{LQR}, K_I)$  ist:

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} -17.92 & 8.33 & 6.21 & -17.49 & 4.10 & 1.27 \\ 17.92 & 8.33 & -6.21 & 17.49 & 4.10 & -1.27 \end{bmatrix}$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 6.3246 & -3.1623 \\ -6.3246 & -3.1623 \end{bmatrix}$$

Und der Vorfilter  $V = -(C_{neu}(A - BK_{LQR})^{-1}B)^{-1}$  ist:

$$V = \begin{bmatrix} -17.9241 & 8.3613 \\ 17.9241 & 8.3613 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises ergeben sich zu:

$$EW = \begin{bmatrix} -7.7685 \\ -0.4861 + 0.7260i \\ -0.4861 - 0.7260i \\ -0.9196 + 0.2243i \\ -0.9196 - 0.2243i \\ -0.6375 + 0.7327i \\ -0.6375 - 0.7327i \\ -0.8754 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Die negativen Realteile der Eigenwerte zeigen alles asymptotisch stabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises.

Der LQI-Regler wird durch Matlab-Befehl "lqi" angewendet. Dieses Steuergesetz stellt sicher, dass die Ausgabe  $y$  die Referenztrajektorie  $r$  gut verfolgt. Bei MIMO-Systemen entspricht die Anzahl der Integratoren der Dimension der Ausgabe  $y$ .  $[K, S, e] = \text{lqi}(\text{SYS}, Q, R, N)$  berechnet die optimale Verstärkungsmatrix  $K$  unter Berücksichtigung eines Zustandsraummodells  $\text{SYS}$  für die Matrizen  $Q, R, N$  (In unseren System wählen wir  $N=0$ ).  $u$  und  $y$  sind absolute Werte für das linearisierte Modell. Aber  $\Delta u$  und  $\Delta y$  sollen für das nichtlinearisierte Modell angewendet werden.

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

### 3.4 Beobachterentwurf

Da die Winkelgeschwindigkeiten des Helikopters nicht messbar sind, ist ein Beobachter erforderlich, welcher diese fehlenden Zustände schätzt. Der Luenberger Beobachter wird angewendet, um die Zustände zu rekonstruieren. Die

Pole des Beobachters wurden nach diese Befehl:  $p = \min(\text{real}(EW)) * 3$  ausgewählt. Die Pole  $p$  des Systems lautet:

$$p = [-23, -23.1, -23.2, -23.3, -23.4, -23.5]^T \quad (33)$$

Und das resultierende Gain  $L$  vom Beobachter ist:

$$L = \begin{bmatrix} 46.9000 & 0 & 0 \\ 0 & 46.3000 & 0 \\ 0 & 0 & 46.3000 \\ 549.9000 & 0 & -0.6921 \\ 0 & 535.8841 & 0 \\ 0 & 0 & 535.9000 \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 4. REFERENZTRAJEKTORIE

Um die Aufgabe zu absolvieren, ist es notwendig, die Referenzsignale zu definieren. Diese Signale muss die vorgegebene Anforderungen erfüllen. Die Hauptaufgabe lassen sich wie Tabelle 1 definieren.

Table 1. Hauptaufgabe

Subtask	Point	$\alpha$	$\beta$
Start	1	$0^\circ$	approx. $-27^\circ$
Cargo pick-up	2	$90^\circ$	approx. $-22^\circ$
Cargo deposition	3	$450^\circ$	approx. $-22^\circ$
Finish(landing)	1	$0^\circ$	approx. $-27^\circ$

Außerdem ist die Mindestflughöhe von Steigwinkel  $\beta$  gleich  $-7.5^\circ$ . Weil der Nickwinkel  $\gamma$  nicht berücksichtigt wird, ist es nur notwendig, Referenzsignale für Schwenkwinkel  $\alpha$  und Steigwinkel  $\beta$  zu definieren. Die Trajektorie soll in einige Abschnitte unterteilt werden, in denen jeweils ein Zustand verändert wird. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie z.B. Sprünge, Rampen, trigonometrische Funktionen (wie  $\sin$  und  $\cos$ ) oder Polynome  $n$ -ten Grades, um die Zustandsänderung bei jedem Abschnitt darzustellen. Hier wurden Sinus-Funktionen mit verschiedenen Zeitpunkten implementiert. Durch Phasenverschiebung ( $\pi/2$ ) können die steigenden Sinus-Signale und die fallenden Sinus-Signale unterscheidet werden. Die steigenden Signale werden durch

$$S_{steig} = Z \pm Z \sin\left(\frac{2\pi(t - T_{start})}{2(T_{end} - T_{start})} - \pi/2\right) \quad (35)$$

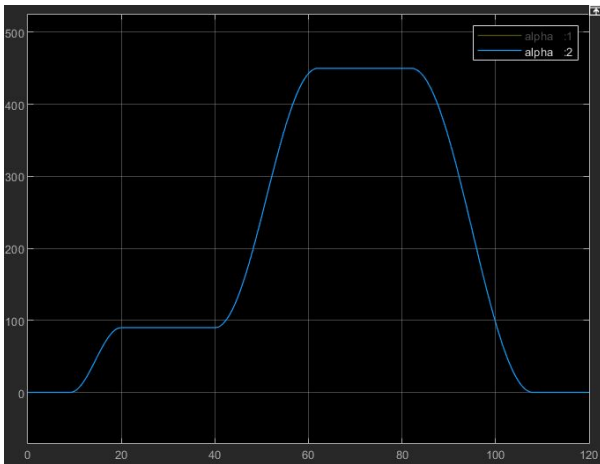
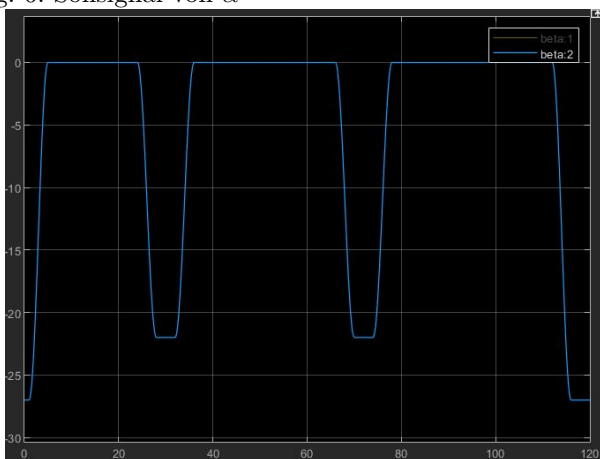
gegeben. Die fallende Signale werden durch

$$S_{fall} = Z \pm Z \sin\left(\frac{2\pi(t - T_{start})}{2(T_{end} - T_{start})} + \pi/2\right) \quad (36)$$

gegeben.  $Z$  ist die Amplitude bei jeder Abschnitt.  $T_{start}$  ist der Startzeitpunkt von jedem Abschnitt.  $T_{end}$  ist der Endzeitpunkt. Die Abschnitte lassen sich wie in Tabelle 2 definieren.

Table 2. Trajektorieabschnitte

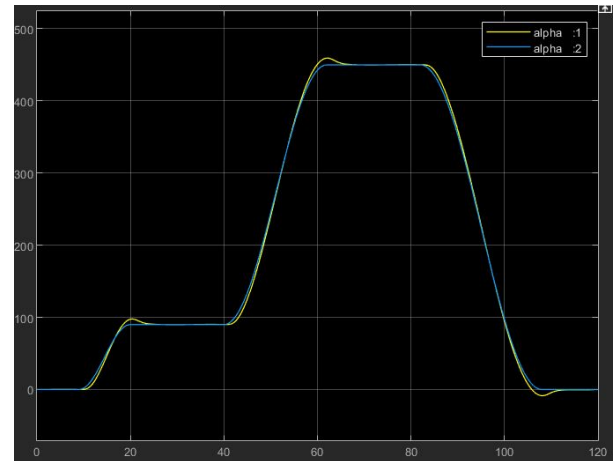
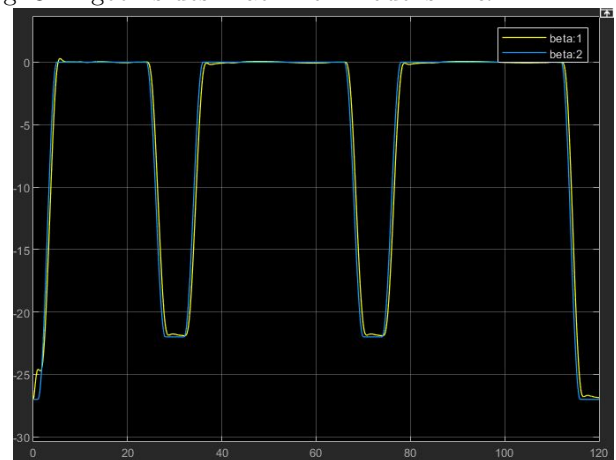
Abschnitt	$\alpha$	$\beta$	Aufgabe
1	$0^\circ$	$-27^\circ$	Start
2	$0^\circ$	$-27^\circ \rightarrow 0^\circ$	/
3	$0^\circ$	$0^\circ$	/
4	$0^\circ \rightarrow 90^\circ$	$0^\circ$	/
5	$90^\circ$	$0^\circ$	/
6	$90^\circ$	$0^\circ \rightarrow -22^\circ$	/
7	$90^\circ$	$-22^\circ$	Cargo Pick-up
8	$90^\circ$	$-22^\circ \rightarrow 0^\circ$	/
9	$90^\circ$	$0^\circ$	/
10	$90^\circ \rightarrow 450^\circ$	$0^\circ$	/
11	$450^\circ$	$0^\circ$	/
12	$450^\circ$	$0^\circ \rightarrow -22^\circ$	/
13	$450^\circ$	$-22^\circ$	Cargo deposition
14	$450^\circ$	$-22^\circ \rightarrow 0^\circ$	/
15	$450^\circ$	$0^\circ$	/
16	$450^\circ \rightarrow 0^\circ$	$0^\circ$	/
17	$0^\circ$	$0^\circ$	/
18	$0^\circ$	$0^\circ \rightarrow -27^\circ$	/
19	$0^\circ$	$-27^\circ$	Finish(landing)

Fig. 6 und 7 zeigen die Solltrajektorie in  $\alpha$  und  $\beta$  Richtung.Fig. 6. Sollsignal von  $\alpha$ Fig. 7. Sollsignal von  $\beta$ 

## 5. SIMULATIONSERGEBNISSE

Nach dem Entwurf des Reglers wurde das System mit dem Black Box Modell getestet. Bei dem Black Box

Modell musste die Vorzeichen von  $\alpha$ ,  $\beta$ , und  $\gamma$  beachtet. Wenn das Vorzeichen falsch sind, funktioniert der Regler schlecht. Die Solltrajektorie wurde an das System in Simulink angeschlossen, um die Funktion des Reglers zu prüfen. Nach Auswahl passender Parameter könnte die Gesamtaufgabe unter 120s gelöst werden. In Fig.8 und 9 sind die Verläufe des Schwenkwinkelsignals( $\alpha$ ) und des Steigwinkelsignals( $\beta$ ). Der Signalverlauf der Solltrajektorie sind in den Abbildungen mit blau gekennzeichnet, während die geregelte Strecke in gelb gekennzeichnet ist. Aus den Abbildungen sieht man deutlich, dass das Verhalten des Reglers ausgezeichnet ist.

Fig. 8. Ergebnis des Black Box Modells in  $\alpha$ Fig. 9. Ergebnis des Black Box Modells in  $\beta$ 

## 6. FAZIT

Entscheidende Schritte in der Reglerentwurf waren die Modellierung des Systems, die Wahl der Regelstruktur und des eigentlichen Reglertyps und schließlich die Implementierung und Validierung des entworfenen Reglers. Außerdem ist eine ordentliche Dokumentation von Ergebnissen auch wichtig, da diese eine Richtlinie sind. Die Betreuung der Tutoren während des Praktikums war sehr hilfreich. Zusammengefasst, wir haben viele praktische Erfahrungen sammeln können, die wir auf weitere Aspekte im Studium sowie im Berufsleben anwenden können.

## REFERENCES

- [1] Handbook Control of a 3-DOF Helicopter  
IST, University of Stuttgart, Germany  
Corona Edition Winter term 2020/21
- [2] Regelkreisstrukturen  
IST, University of Stuttgart, Germany