

# Estadística para Ciencias Sociales con R

*Eduardo Bologna*

*30 de octubre de 2019*



# Índice general

	<b>15</b>
<b>1 Materiales y herramientas</b>	<b>17</b>
1.1 Materiales . . . . .	17
1.2 Herramientas . . . . .	21
<b>2 Los datos estadísticos</b>	<b>29</b>
2.1 La selección de la información pertinente . . . . .	30
2.2 Los individuos . . . . .	35
2.3 Las variables . . . . .	36
2.4 Las categorías . . . . .	36
2.5 Los símbolos numéricos . . . . .	38
2.6 La medición . . . . .	40
2.7 Resumen de los niveles de medición . . . . .	50
2.8 Hacerlo en R . . . . .	51
<b>3 Distribuciones de frecuencia</b>	<b>57</b>
3.1 Tablas de distribución de frecuencia . . . . .	58
3.2 Recategorización . . . . .	65
3.3 La presentación gráfica de los resultados . . . . .	67
<b>4 La expresión resumida de la información</b>	<b>81</b>
4.1 Medidas de posición . . . . .	82
4.2 La forma de la distribución . . . . .	103

4.3	Box-plots . . . . .	113
4.4	Medidas de dispersión . . . . .	116
4.5	El individuo en relación a su grupo . . . . .	130
4.6	Resumen de medidas descriptivas . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Relación entre variables: los fundamentos</b>	<b>139</b>
5.1	Tablas de contingencia . . . . .	143
5.2	Frecuencias relativas . . . . .	145
5.3	Una clasificación en referencia al tiempo . . . . .	146
5.4	La dirección de la relación . . . . .	149
5.5	Concepto de riesgo relativo . . . . .	151
5.6	La intensidad . . . . .	153
5.7	El concepto de independencia estadística . . . . .	162
5.8	Hacerlo en R . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Relación entre variables: el análisis</b>	<b>171</b>
6.1	Variables nominales con más de dos categorías cada una . . . . .	171
6.2	Variables de nivel ordinal . . . . .	179
6.3	Nivel intervalar o proporcional . . . . .	184
6.4	Dicotomías reales y artificiales . . . . .	197
6.5	Niveles de medición combinados . . . . .	199
6.6	Resumen de coeficientes de asociación . . . . .	201
6.7	Matriz de correlaciones . . . . .	202
6.8	La forma de la relación . . . . .	204
6.9	La importancia de la visualización . . . . .	216
6.10	Hacerlo en R . . . . .	216
<b>7</b>	<b>Obtención de la muestra</b>	<b>231</b>
7.1	Población . . . . .	232
7.2	Muestreos probabilísticos . . . . .	236
7.3	Muestreos no probabilísticos . . . . .	247
7.4	Resumen de técnicas de muestreo . . . . .	253
7.5	Hacerlo en R . . . . .	253

<b>8 Probabilidad: los fundamentos</b>	<b>255</b>
8.1 El rol de la probabilidad en Estadística . . . . .	255
8.2 Formas para asignar probabilidades . . . . .	257
8.3 Operando con probabilidades . . . . .	263
8.4 El teorema de Bayes . . . . .	274
8.5 Variables aleatorias . . . . .	280
<b>9 Probabilidad: los modelos</b>	<b>283</b>
9.1 Concepto de modelización . . . . .	283
9.2 Distribución binomial . . . . .	285
9.3 Distribución normal . . . . .	290
9.4 La idea de grados de libertad . . . . .	307
9.5 La distribución ji cuadrado ( $\chi^2$ ) . . . . .	309
9.6 La distribución t de Student . . . . .	313
9.7 Hacerlo en R . . . . .	322
<b>10 Distribuciones en el muestreo</b>	<b>327</b>
10.1 Parámetros y estimadores . . . . .	327
10.2 Características de los estimadores . . . . .	332
10.3 Distribución de la media muestral . . . . .	336
10.4 Distribución de la proporción muestral . . . . .	348
10.5 Muestras pequeñas . . . . .	358
10.6 Distribución de la varianza . . . . .	359
10.7 Distribución del cociente de varianzas . . . . .	361
10.8 Resumen de la relación entre estimadores y parámetros . . . . .	362
10.9 Hacerlo en R . . . . .	362
<b>11 Estimación por intervalo</b>	<b>363</b>
11.1 Estimación puntual . . . . .	363
11.2 Intervalos de confianza . . . . .	364
11.3 La calidad de las estimaciones por intervalo . . . . .	379
11.4 Hacerlo en R . . . . .	386

<b>12 Prueba de hipótesis: la lógica</b>	<b>395</b>
12.1 El razonamiento de la prueba de hipótesis . . . . .	395
12.2 Los puntos críticos en términos del estimador . . . . .	409
12.3 Prueba sobre la proporción . . . . .	419
12.4 Tipos de error en las pruebas de hipótesis . . . . .	428
12.5 <i>ETII</i> : $\mu$ , $\alpha$ y $n$ . . . . .	430
12.6 Muestras pequeñas y pruebas $t$ . . . . .	445
12.7 Hacerlo en R . . . . .	447
12.8 Resumen de pruebas sobre una muestra . . . . .	451
<b>13 Prueba de hipótesis: las aplicaciones</b>	<b>453</b>
13.1 Muestras independientes . . . . .	456
13.2 Hacerlo en R . . . . .	481
<b>14 Cuando los supuestos no se cumplen</b>	<b>487</b>
14.1 Hacerlo en R . . . . .	499
<b>15 Apéndice: Tamaño del efecto</b>	<b>505</b>
15.1 Significación estadística y significación práctica . . . . .	505
15.2 Medidas de tamaño del efecto . . . . .	506
15.3 Análisis de la potencia . . . . .	508

# Índice de tablas

2.1	Área de trabajo preferida. . . . .	30
2.2	Área de trabajo preferida. . . . .	31
2.9	Nivel de educación alcanzado. . . . .	39
2.10	Distribución por sexos. . . . .	39
2.11	Satisfacción con el progreso en la carrera. . . . .	39
2.14	Ejemplos de codificación de variables nominales. . . . .	41
2.17	Ejemplo de codificación de una variable ordinal. . . . .	43
2.18	Ejemplo de una variable ordinal codificada. . . . .	43
2.19	Ejemplo de codificación de rangos de puntajes para una variable intervalar. . . . .	45
2.22	Ejemplos de variable proporcional discreta. . . . .	49
2.23	Ejemplo de recategorización de una variable discreta. . . . .	49
2.24	Ejemplo de recategorización de una variable continua . . . . .	50
3.1	Distribución por sexos. . . . .	58
3.2	Distribución por sexos (categorías rotuladas. . . . .	58
3.3	Distribución por sexos: frecuencia absoluta. . . . .	58
3.5	Distribución por sexos según sector de trabajo. . . . .	59
3.7	Distribución por sexos sector privado: frecuencias relativas. . . .	60
3.8	Condición laboral. . . . .	61
3.9	Condición laboral (categorías rotuladas). . . . .	61
3.11	Distribución por edades. . . . .	62
3.12	Distribución por edades: frecuencias acumuladas. . . . .	63

3.15	Categorización de la edad en intervalos de igual amplitud. . . . .	66
3.16	Categorización de la edad en intervalos proporcionales. . . . .	66
3.17	Categorización de la edad con un criterio teórico. . . . .	67
3.18	Distribución de los pesos al nacer categorizados en cuatro intervalos proporcionales. . . . .	74
5.4	Disposición de las frecuencias para el análisis de la relación entre dos variables. . . . .	144
5.5	Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar (organización de las frecuencias). . . . .	144
5.9	Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar, frecuencias relativas. . . . .	146
5.10	Departamento Capital, Provincia de Córdoba. Población por sexo según grupos de edad. Año 2001. . . . .	147
5.22	Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias absolutas . . . . .	154
5.23	Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución de su país y la intención de emigrar. Frecuencias absolutas . . . . .	154
5.24	Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias relativas al total . . . . .	155
5.25	Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias relativas por filas . . . . .	155
5.26	Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias absolutas, variables dicotomizadas . . . . .	157
5.28	Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de relación “perfecta” . . . . .	159
5.29	Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de relación “nula” . . . . .	160
5.30	Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de distribución “rincónal” . . . . .	162
5.31	Distribución de la condición laboral por sexos. Frecuencias absolutas . . . . .	163
5.32	Distribución de la condición laboral por sexos. Frecuencias relativas por columnas . . . . .	163
5.33	Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior . . . . .	164



5.34 Frecuencias relativas por columnas esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior . . . . .	166
5.35 Frecuencias relativas por columnas esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior . . . . .	166
5.36 Distribución conjunta de la condición de actividad y la edad en cuatro grupos . . . . .	167
6.1 Clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta (datos ficticios) . . . . .	172
6.2 Frecuencia relativas por columnas de la clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta . . . . .	173
6.3 Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia entre el tipo de violencia y el área donde se observa . . . . .	173
6.4 Ejemplo de expansión artificial del total de casos de la tabla de frecuencias observadas . . . . .	175
6.9 Distribución conjunta de las frecuencias del orden de mérito en el ingreso a una carrera universitaria y el nivel de educación de la madre. . . . .	180
6.11 Cálculo de las diferencias entre los rangos de dos variables ordinales	181
6.14 Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal . . . . .	184
6.15 Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (categorías agrupadas) .	185
7.3 Ilustración del procedimiento de muestreo sistemático. . . . .	238
8.1 Resultados posibles de la suma de los puntajes de dos dados. . .	258
8.2 Distribución de frecuencias del tipo de colegio del que provienen alumnos que ingresan a la universidad . . . . .	260
8.3 Frecuencias relativas correspondientes a una secuencia de diez lanzamientos de una moneda. . . . .	262
8.4 Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. . . . .	264
8.5 Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal $P(Crdoba)$ . . . . .	265
8.6 Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal $P(S)$ . . . . .	265

8.7	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad conjunta $P(RosarioyR)$ . . . . .	266
8.8	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(QoR)$ (eventos disjuntos). . . . .	267
8.9	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(CrdobaoRosario)$ (eventos disjuntos). . . . .	267
8.10	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(CrdobaoT)$ (eventos no disjuntos). . . . .	269
8.11	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional $P(S/Crdoba)$ . . . . .	269
8.12	Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional $P(Mendoza/R)$ . . . . .	270
12.7	Valores críticos usuales de la distribución normal . . . . .	420
14.2	Frecuencias conjuntas observadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó. . . . .	490
14.3	Frecuencias conjuntas esperadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó. . . . .	490

# Índice de figuras

1.1	Los cuatro paneles de RStudio . . . . .	24
2.1	Cuestionario 2019 . . . . .	32
2.2	Cuestionario 2019 . . . . .	33
3.1	Condición laboral: frecuencias absolutas (barras adyacentes). . .	68
3.2	Condición laboral: frecuencias absolutas (barras apiladas). . . .	69
3.3	Condición laboral: frecuencias relativas (barras apiladas). . . .	70
3.4	Condición laboral: frecuencias relativas (gráfico de sectores). . .	71
3.5	Histograma de edades. . . . .	72
3.6	Histograma de edades: categorías de 5 años. . . . .	73
3.7	Polígono de frecuencias de las edades sobre el histograma. . . .	74
3.8	Polígono de frecuencias de las edades. . . . .	75
3.9	Ojiva de las edades. . . . .	76
3.10	Ojiva de los pesos al nacer. . . . .	77
3.11	Estimación de la frecuencia acumulada para un valor del peso al nacer. . . . .	78
3.12	Identificación de los valores de la variable para determinadas frecuencias absolutas. . . . .	79
5.1	Relación hipotética entre dos factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión . . . . .	140
5.2	Relación hipotética entre dos factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión . . . . .	141

5.3	Relación hipotética entre la ayuda de los padres y el rendimiento escolar . . . . .	150
6.1	Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal . . . . .	186
6.2	Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación débil) . . . .	187
6.3	Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación intensa) . . .	188
6.4	Comparación de la forma de las nubes de puntos según la intensidad de la relación . . . . .	189
6.5	Diagrama de dispersión del número medio de consultas médicas anuales y la edad. . . . .	190
6.6	Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta creciente, por lo que $r = 1$ . . . . .	191
6.7	Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta decreciente, por lo que $r = -1$ . . . . .	192
6.8	Ejemplo de función lineal que aproxima los puntos con una tendencia creciente . . . . .	205
6.9	Ejemplos de funciones lineales con diferentes valores de la ordenada al origen . . . . .	206
6.10	Diagrama de dispersión de la relación entre el puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática y el número de ejercicios de matemática correctamente realizados y la recta de regresión que mejor ajusta los puntos . . . . .	210
6.11	Ubicación gráfica de la diferencia entre el valor observado de $y$ observado y su estimación $\hat{y}$ . . . . .	212
6.12	Ubicación gráfica de los alejamientos (desvíos) de $y$ observada y de $\hat{y}$ estimada, hasta la media de $y$ ( $\bar{y}$ ) . . . . .	213
7.1	En el muestreo estratificado se eligen muestras diferentes de cada uno de los subconjuntos definidos en la población. . . . .	239
7.2	Radios censales 2010 de la ciudad de Río Cuarto, provincia de Córdoba, Argentina. . . . .	244
7.3	Muestreo por conglomerados en dos etapas. . . . .	246
8.1	Efectos de extraer una ficha sin reponerla o reponiéndola, en las condiciones que quedan para la segunda extracción. . . . .	273

10.1 Distribución de probabilidades de $\bar{x}$ . . . . .	337
10.2 Distribución de probabilidades de $x$ . . . . .	338
10.3 Distribución de probabilidades de la variable $x = \textit{puntaje obtenido}$ <i>al tirar un dado</i> . . . . .	340
10.4 Distribución de probabilidades de $S = \textit{suma de puntajes obtenidos}$ <i>al tirar dos veces un dado</i> . . . . .	341
11.1 Distribución de las medias muestrales . . . . .	366
11.2 Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 95% de las posibles medias muestrales . . . . .	367
11.3 Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 99% de las posibles medias muestrales . . . . .	368
12.1 Distribución de las medias muestrales bajo la hipótesis nula . . .	402
12.2 Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0.05 . . . . .	403
12.3 Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0.10 . . . . .	406
12.4 Ubicación de la zona de rechazo de $H_0$ a un nivel de significación de 0.05, sobre puntajes estándar ( $z$ ), y del valor observado . . . .	411
12.5 Ubicación de la zona de rechazo de $H_0$ a un nivel de significación de 0.05, sobre valores de la variable $\bar{x}$ , y del valor observado . . .	412
12.6 Ubicación de la zona de rechazo de $H_0$ para una prueba unilateral derecha a un nivel de significación del 5% . . . . .	413
12.7 Región de rechazo unilateral derecha de $H_0 : \mu = 6,50$ a un nivel de significación del 5%, con una muestra de 100 casos y desviación estándar 0,60, y ubicación del valor observado del estimador . . .	415
12.8 Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de aceptación o rechazo, según sea $H_0$ verdadera o falsa ( $\alpha = 0,05$ )	431
12.9 Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de rechazo o no rechazo, según sea $H_0$ verdadera o falsa $\alpha = 0,01$ . . . . .	433
12.10 Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de aceptación o rechazo, según sea $H_0$ verdadera o falsa, de tres modos diferentes . . . . .	435
12.11 Curva de potencia con $\mu_0 = 6.50$ , $\alpha = 0.05$ y $n = 100$ . . . . .	439
12.12 Curva de potencia con $\mu_0 = 6.50$ , $\alpha = 0.05$ y $n = 200$ . . . . .	441
15.1 Relación efecto, muestra, potencia y significación . . . . .	509









# Capítulo 1

## Materiales y herramientas

### 1.1 Materiales

A lo largo del manual se usan datos para ejemplificar procedimientos. Algunos de ellos son ficticios y han sido contruidos especialmente para ilustrar algún aspecto de una distribución o del resultado de una técnica. Sin embargo, la mayoría de los ejemplos están realizados a partir de datos reales, provenientes de bases de datos de libre disponibilidad que hemos elegido teniendo en cuenta los intereses de los públicos a que nos dirigimos. Estas bases son las que se presentan a continuación, en el repositorio () se encuentra una descripción más detallada, así como los cuestionarios, las bases de datos correspondientes y los manuales de códigos para poner en correspondencia los nombres de las variables dados en la base, con los aspectos que se indagan de las unidades (hogares o personas).

#### 1.1.1 Encuesta Permanente de Hogares (eph.3.18)

La EPH es un programa nacional de producción permanente de indicadores sociales cuyo objetivo es conocer las características socioeconómicas de la población. Es realizada en forma conjunta por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) y las Direcciones Provinciales de Estadística (DPE) (?). Los datos se recogen por medio de dos cuestionarios; uno de ellos que pregunta por características del hogar y la vivienda y el otro por las personas individualmente.

### 1.1.2 Encuesta Nacional de Factores de Riesgo (ENFR2013)

La tercera ENFR es un estudio de corte transversal que permite vigilar la prevalencia de factores de riesgo de enfermedades no transmisibles y evaluar su evolución en comparación con las ediciones anteriores realizadas en los años 2005 y 2009. Es realizada conjuntamente entre el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) y el Ministerio de Salud de la Nación de la República Argentina.

La encuesta tiene por objetivos: Conocer la distribución de los factores de riesgo en la población de 18 años y más. Estimar su prevalencia. Determinar el perfil de la población bajo riesgo a través de sus características sociodemográficas, socioeconómicas, educativas y del entorno familiar social ?, ?

### 1.1.3 Latinobarómetro (latinob2017)

Latinobarómetro es un estudio de opinión pública que aplica anualmente alrededor de 20.000 entrevistas en 18 países de América Latina representando a más de 600 millones de habitantes.

Corporación Latinobarómetro es una ONG sin fines de lucro con sede en Santiago de Chile, única responsable de la producción y publicación de los datos.

La Corporación Latinobarómetro investiga el desarrollo de la democracia, la economía y la sociedad en su conjunto, usando indicadores de opinión pública que miden actitudes, valores y comportamientos. Los resultados son utilizados por los actores socio políticos de la región, actores internacionales, gubernamentales y medios de comunicación. Cita en <http://www.latinobarometro.org/lat.jsp>

### 1.1.4 Encuesta Nacional sobre Prevalencias de Consumo de Sustancias Psicoactivas (ENPreCoSP2011)

La encuesta produce datos sobre:

- La cantidad de personas que declararon haber consumido sustancias psicoactivas en diferentes períodos de referencia (prevalencias) y su incidencia en relación con la población total. Las sustancias psicoactivas comprenden: las drogas legales o sociales (tabaco, bebidas alcohólicas), ilegales (marihuana, cocaína, pasta base, éxtasis, opiáceos y anestésicos, crack, alucinógenos, inhalables y otras drogas) y fármacos (estimulantes, tranquilizantes, anorexígenos);
- Las características sociodemográficas, socioeconómicas, educativas y del entorno familiar social de la población de 16 a 65 años de edad que consume sustancias psicoactivas.

El objetivo general de esta Encuesta fue contribuir a actualizar el sistema de información sobre el consumo de sustancias psicoactivas a nivel nacional y, de esa manera, al diseño de políticas públicas más eficaces, orientadas a mejorar las condiciones de salud de la población.

### 1.1.5 Aplicación de la escala de Bayley

La base provista contienen 454 casos de niños evaluados en las subescalas mental y motora de la escala de Bayley.

La Escala Bayley de Desarrollo Infantil se aplica en niños de los 2 a los 36 meses de vida y ha sido adaptada a Córdoba en niños de 0 a 24 meses (Faas y colaboradores, 2005, 2006). Los dos primeros años de vida de un niño son momentos cruciales para inferir de manera temprana el estado de evolución de su desarrollo posterior (Papalia, 2000).

La prueba, de origen norteamericano, consta de varias versiones desde su creación por su autora Nancy Bayley en 1933, habiendo sido revisada en 1969, en 1977 y en 1993. Las escalas de Bayley (EBDI) fueron publicadas en el año 1969. En España aparecieron estandarizadas en el año 1977, y la revisión americana (las Bayley Scale of Infant Development-II o BSID II) fueron publicadas en 1993. El interés por disponer de unas escalas adecuadamente tipificadas como las Bayley creció a lo largo de la primera mitad del siglo XX, al ir aumentando el conocimiento de las capacidades infantiles, los cambios cerebrales durante la etapa posnatal y el estudio de cómo influyen los factores del medio, la familia y los individuos en el desarrollo temprano. Además, la proporción de niños prematuros ha ido aumentando considerablemente a lo largo de los años, con el consiguiente aumento de casos que nacen con el riesgo de presentar un retraso en el desarrollo.

El objetivo inicial de las escalas fue medir la inteligencia a edades muy tempranas. Los ítems que la componen están ordenados en una secuencia de dificultades que aumentan con la edad. En su forma actual, la EBDI permite medir el desarrollo mental, el desarrollo psicomotor y el comportamiento infantil.

El nivel de desarrollo mental tiene 163 ítems que miden el desarrollo por medio de una serie de habilidades. El nivel del desarrollo motor se compone de 81 ítems que representan tanto habilidades motoras finas como gruesas, y se centra principalmente en el grado de control del cuerpo y la coordinación de los movimientos. La distinción entre la escala mental y motora se justifica porque se parte de que la preplanificación y el razonamiento son componentes de las actividades mentales, pero no de las habilidades motoras. Por tanto, los ítems de las dos escalas son distintos, aunque en algunas ocasiones una misma habilidad este incluida en ambas escalas. El registro comportamental del niño complementa la información obtenida mediante las escalas mental y motora, proporciona una descripción del comportamiento infantil relativo al que se esperaría de cualquier niño que estuviera en el mismo estadio. Se dice que la escala de Bayley es una escala ecléctica, es decir los ítems no están agrupados

por áreas, factores o subescalas con puntuaciones determinadas para cada una de ellas. No obstante, las Bayley II intenta incluir ítems de las cinco áreas que la guía americana para la evaluación de los candidatos de servicios especiales requiere que sean evaluadas: desarrollo físico, cognitivo, lingüístico, psicosocial y autoayuda. Sin embargo continúa sin haber medidas para cada una de estas áreas calificadas.

Como se menciono anteriormente en 1993 se publicó una revisión de las escalas originales. Las Bayley II mantienen la misma estructura y objetivos que la anterior, pero introducen algunos cambios como resultado de los trabajos de investigación sobre el desarrollo del niño en los últimos años y para mejorar la adecuación de los datos y el material a la población infantil. Uno de los cambios importantes es que se amplía la edad de evaluación desde el 1º mes hasta los 42 meses. Además se han incorporado ítems cuyo estudio han demostrado tener una adecuada fiabilidad y validez; así los 163 ítems de la escala mental y los 81 de la escala motora de Bayley han pasado a ser 178 y 111 respectivamente en las Bayley II.

Actualmente se utiliza la versión correspondiente a 1993. Como su autora lo indica, el objetivo principal de esta prueba es diagnosticar demoras del desarrollo y planificar estrategias de intervención. Actualmente puede decirse que esta Escala constituye uno de los test más utilizados para evaluar el desarrollo neuroconductual durante los primeros meses de vida (Mayes et al., 1995), sin embargo es poco utilizada como herramienta de diagnóstico en nuestro medio. La misma está formada por tres Sub-Escalas:

- Escala Mental: Evalúa memoria, habituación, resolución de problemas, conceptualización numérica temprana, generalización, clasificación, vocalizaciones, lenguaje y habilidades sociales. Es decir estima aspectos relacionados con el desarrollo cognitivo y la capacidad de comunicación.
- Escala Motora: Evalúa el control de los músculos gruesos y finos del cuerpo. Esto incluye movimientos asociados con rodar, girar, encogerse y estirarse, sentarse, pararse, caminar, correr y saltar. Se evalúa también la manipulación motora fina implicada en la prensión, adecuado uso de elementos de escritura e imitación de movimientos de las manos. En definitiva, evalúa el grado de coordinación corporal, así como habilidades motrices finas en manos y dedos.
- Escala Comportamental: Evalúa aspectos cualitativos de la situación de examen como atención/alerta, orientación/interacción hacia la tarea, examinador y cuidador, regulación emocional y calidad del movimiento. De este modo permite analizar la naturaleza de las orientaciones sociales y objetivas hacia el entorno. La información de esta escala debe utilizarse para suplementar la información cuantitativa de las dos escalas anteriores.

El desarrollo infantil implica un proceso de continuos cambios, en el cual el niño va a experimentar diversas transformaciones y progresos. Estos cambios

no sólo se advierten en el plano motor e intelectual (esto es, en su capacidad para dominar movimientos y razonar), sino que además se pueden apreciar múltiples reorganizaciones en el plano emocional (su capacidad para sentir) y social (su capacidad para relacionarse con los demás). La adquisición de estas competencias variará en función de la madurez neurofisiológica, de las características individuales, y de la riqueza y calidad de los estímulos de su entorno. De allí, la importancia de este período para el niño, pues sentará la base para su desarrollo y crecimiento óptimo.

La escala asigna puntajes brutos en función de la cantidad de pruebas exitosamente pasadas para una determinada edad. Posteriormente, estos puntajes brutos son transformados en índices mentales o motores que permiten ubicar al niño en un nivel de desarrollo normal, levemente retrasado, significativamente retrasado o, si supera el normal, acelerado, para su edad. Cada índice de desarrollo mental (IDM) y motor (IDP), tiene una distribución con una media de 100 y una desviación estándar de 15. Un puntaje de 100 o más en cualquier escala indica el nivel promedio de performance de un niño en una edad dada. Puntajes de 85 y 115 corresponden a 1 DS por debajo y por encima de la media y puntajes de 70 y 130 a 2 DS. En una distribución normal 2/3 de los niños obtienen puntajes entre 85 y 115, 95% entre 70 y 130 y casi todos (99,9%) entre 55 y 145 (3 DS a cada lado de la media).

### 1.1.6 Adultos mayores

Ver si andrès tiene algo

## 1.2 Herramientas

### 1.2.1 La elección de R

Para realizar análisis de datos existen numerosos programas informáticos, que se ocupan de los procesos computacionales, de manera que el usuario solo deba decidir qué procedimiento aplicar, cuidar que se cumplan las condiciones que hacen válido al procedimiento (los supuestos) y realizar una lectura correcta y completa del resultado que se obtiene, sin involucrarse con las operaciones de cálculo. Estos programas o “paquetes estadísticos” reúnen en un entorno único las operaciones más frecuentemente usadas por investigadores y analistas de datos y las ponen al alcance del usuario no especializado. Algunos de uso muy común son SPSS, SAS, INFOTAT, STATA, STATISTICAL, etc. De la larga lista de opciones disponibles, este manual usa un software que se llama R, elección que se fundamenta en que R es varias cosas al mismo tiempo:

Es un software para análisis de datos: lo usan estadísticos y analistas de datos para extraer significado de información cuantitativa, descripciones e inferencias, visualización de datos y modelización predictiva.

Es un lenguaje de programación orientado a objetos, diseñado por estadísticos y para el uso de estadísticos: el análisis se hace escribiendo sentencias en este lenguaje, que provee objetos, operadores y funciones que hacen muy intuitivo el proceso de explorar, modelar y visualizar datos.

Es un ambiente para el análisis estadístico: en R hay funciones para prácticamente todo tipo de transformación de datos, de modelización y de representaciones gráficas que pueden hacer falta.

Es un proyecto de código abierto: esto significa no solo que se lo puede descargar y usar gratis, sino que el código es abierto y cualquiera puede inspeccionar o modificar las rutinas. Como sucede con otros proyectos de código abierto, como Linux, R ha mejorado sus códigos tras varios años de “muchos ojos mirando” y aportando soluciones. También como otros proyectos de código abierto, R tiene interfaces abiertas, por lo que se integra fácilmente a otras aplicaciones y sistemas.

Es una comunidad: R fue inicialmente desarrollado por Robert Gentleman y Ross Ithaka, del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland, en 1993 y desde entonces el grupo que dirige el proyecto ha crecido y se ha difundido por el mundo. Además, miles de otras personas han contribuido con funcionalidades adicionales por medio del aporte de “paquetes” que utilizan los 2 millones de usuarios de todo el mundo. Como resultado, existe una intensa comunidad de usuarios de R on-line, con muchos sitios que ofrecen recursos para principiantes y para expertos. A esa comunidad se puede recurrir para consultas y para salvar dificultades, son muy activas y dispuestas a ayudar.

R integra programas llamados paquetes, que sirven para realizar análisis específicos. Los paquetes son rutinas que realizan conjuntos de operaciones especializadas, y una de las potencialidades de R es que diferentes investigadores pueden desarrollar paquetes para determinados tipos de análisis y ponerlos a disposición de los demás usuarios. En la actualidad hay más de 7000 paquetes y el conjunto crece porque la comunidad R es muy activa y continuamente se hacen aportes.

Actualmente, los principales medios de comunicación usan R para expresar datos de manera gráfica.

No solo cuenta con los métodos estándar sino que, debido a que los principales avances en procedimientos estadísticos se realizan en R, las técnicas más actualizadas están usualmente primero disponibles en R, a los desarrolladores de paquetes comerciales les lleva más tiempo poner las actualizaciones al alcance de los usuarios. Y los usuarios a menudo deben pagar por las actualizaciones.

Permite la reproducción de los análisis por parte de cualquiera que conozca el código que se aplicó, por lo que aporta una herramienta necesaria en los proyectos de ciencia abierta, en especial para la reproducibilidad de los resultados.

Hay sitios web (como <https://rdr.io/snippets/>, por ejemplo) que permiten

ejecutar líneas de código on line, para situaciones en que no se cuenta con R instalado.

Por estas razones, R es uno de los lenguajes de programación que más uso tiene y se está convirtiendo en la lengua franca del análisis de datos

Como lenguaje, R tiene varias interfaces gráficas, que el modo en que un humano puede interactuar con él. R es el motor y del mismo modo en que, para manejar un auto no hace falta saber cómo funciona el motor, también aquí será suficiente contar con un buen conjunto de comandos (volante, pedales...) para hacer uso de la potencia de ese motor. De las interfaces existentes, hemos elegido RStudio que es un entorno de desarrollo integrado (IDE) de R para facilitar la edición de código que ofrece diversas herramientas para hacer muy accesible el uso de R por parte de quienes no se dedican a la programación, sino que son usuarios de procedimientos estadísticos.

### 1.2.2 Instalación de R y RStudio

En <http://cran.r-project.org> “Download R for [Linux, Mac o Windows]”, y luego “install R for the first time”. Una vez descargado, se instala siguiendo las instrucciones de las pantallas, aceptando las opciones por defecto que se ofrecen.

Una vez que R está instalado, se debe sumar RStudio. El lugar de descarga es <http://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>, Allí se elige la version gratis (free version) de RStudio Desktop y se baja hasta encontrar el sistema operativo y la version que corresponda a nuestro equipo. Luego se ejecuta el instalador de RStudio y se eligen las opciones por defecto. Cuando esté ya instalado, se accede por medio de RStudio; si al instalar R se creó un acceso directo a R en el escritorio, se lo puede eliminar. Al abrir RStudio, R es detectado automáticamente y desde allí operaremos.

### 1.2.3 Los componentes de RStudio

Cuando abrimos RStudio, vamos a encontrar tres paneles, uno a la izquierda, más grande, y dos a la derecha. En “file” se solicita un nuevo script, que se abre a la izquierda y ahora quedan cuatro paneles:

- Superior izquierdo es el script que se acaba de abrir, un documento editable en el que se escriben los comandos.
- Inferior izquierdo es la consola, donde se encuentra la ejecución de los comandos y, si corresponde, los resultados de operaciones solicitadas.
- Superior derecho es el entorno de trabajo, allí aparece cada uno de los objetos que se crean durante la sesión.

Figura 1.1: Los cuatro paneles de RStudio

- Inferior derecho, cuatro pestañas con los directorios de trabajo, los paquetes instalados, la ayuda (cuando se pide), los gráficos que se hagan.

### 1.2.4 Operaciones en el script

El script es un editor de textos en que se escriben comandos y se ejecutan, ya sea con el botón “run” o con una combinación de teclas que, según la configuración puede ser Ctrl+R o Ctrl+Enter. Los elementos que maneja R son objetos: un número, un vector, una base de datos, una tabla y muchos otros. Inicialmente, los que interesan a fin del análisis de datos son: vectores y matrices de datos. Un objeto numérico puede ser una constante, si definimos a x como el valor 3

```
x <- 3
```

En el panel superior derecho aparece este objeto. El signo <- que define el objeto es equivalente a = que da la idea de asignar a x el valor 3. Si se lo evoca, muestra su valor

```
x
```

```
## [1] 3
```

Este objeto es un número, lo que puede saberse si se pregunta de qué clase es este objeto:



```
class(x)
```

```
## [1] "numeric"
```

Es numérico.

Si hubiésemos definido el objeto:

```
t <- "a"  
class(t)
```

```
## [1] "character"
```

Es carácter, para que lo acepte, se debe poner entre comillas. Esta cualidad se puede usar cuando los números codifican categorías, como cuando se una 1 para varones y 2 para mujeres

```
u <- "1"  
class(u)
```

```
## [1] "character"
```

Allí se entiende al número como un código.

Otros tipos de objeto son lógicos

```
v <- TRUE  
class(v)
```

```
## [1] "logical"
```

Es lógico, esta clase de objeto puede tomar dos valores TRUE y FALSE.

Es posible transformar una clase de objeto en otra. Por ejemplo, si un valor numérico fue cargado como carácter, como el caso de u en el ejemplo anterior, se lo vuelve numérico pidiendo:

```
u <- as.numeric(u)  
class(u)
```

```
## [1] "numeric"
```

Pero si intentáramos eso con t, el resultado falla, porque no se interpreta un valor numérico.

Si el objeto es un número, se puede operar simplemente con él

```
5 * x
```

```
## [1] 15
```

Aquí no se creó ningún objeto nuevo, solo se hizo la operación y se mostró el resultado. Para crearlo, hace falta ponerle nombre:

```
y <- 5 * x
```

Y no veremos su valor hasta que no lo solicitemos

```
y
```

```
## [1] 15
```

Suma resta, multiplicación y división se hacen con los signos que conocemos, para elevar a una potencia se usa  $\wedge$ , para hacer dos a la tercera potencia, es:

```
2^3
```

```
## [1] 8
```

O  $x$  a la quinta potencia:

```
x^5
```

```
## [1] 243
```

Las raíces son potencias fraccionarias, por lo que puede conseguirse la raíz cuadrada de  $x$  así:

```
x^(1 / 2)
```

```
## [1] 1.732051
```

Como se usa a menudo, hay una función de biblioteca para eso:

```
sqrt(x)
```

```
## [1] 1.732051
```

El conjunto de valores que asume una variable es un objeto que se llama vector. Se lo genera con una letra `c` y paréntesis que indica concatenar valores.

Ejemplo: Los valores de PBI de cinco países son 10000, 3000, 7000, 4000 y 15000, se los puede concatenar así, definiendo el vector que los contiene:

```
pib5 <- c(10000, 3000, 7000, 4000, 15000)
```

Y se pueden hacer operaciones con él, por ejemplo, sumar sus valores

```
sum(pib5)
```

```
## [1] 39000
```

O sumarlos y dividir por 5, que va a dar el promedio:

```
sum(pib5) / 5
```

```
## [1] 7800
```

Pero veremos luego que para esto hay una función de biblioteca que calcula la media (promedio) directamente

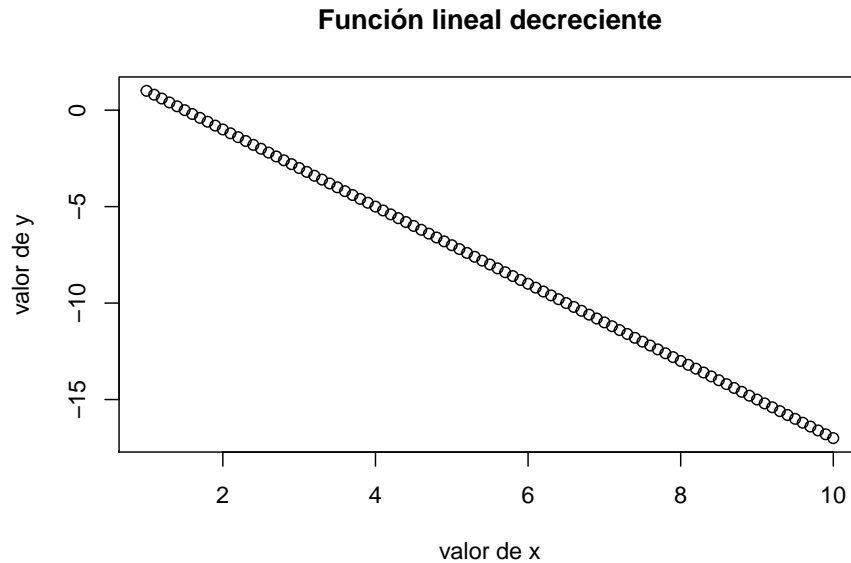
```
mean(pib5)
```

```
## [1] 7800
```

Una concatenación de varios vectores de la misma longitud, constituye una *data frame*, una matriz de datos. Será la materia prima del trabajo que realizaremos a continuación.

Para ver un ejemplo de gráfico básico, puede copiar y pegar el código que está más abajo en su script. Allí se define a  $x$  como una secuencia de números que va de 1 a 10 en intervalos de 0.1. Luego se define  $y$  como una función lineal de  $x$  ( $y = 3 - 2 * x$ ). El tercer comando indica que se grafiquen las dos variables y les pone nombre a los ejes y al título del gráfico.

```
x <- seq(1, 10, .1)
y <- 3 - 2 * x
plot(x, y,
     xlab = "valor de x", ylab = "valor de y",
     main = "Función lineal decreciente"
)
```



### 1.2.5 Instalación de paquetes

Cuando se descarga R y RStudio se cuenta con el sistema básico del lenguaje R. Las operaciones mencionadas en el apartado anterior y otras, están disponibles en esa base. Sin embargo, una gran cantidad de procedimientos están programados y ofrecidos como “paquetes”, que sirven para tareas específicas. Su creación y desarrollo es parte de la potencialidad de R, porque son aportes de la comunidad que los diseña y los ofrece continuamente. En la actualidad hay más de 10000 paquetes en la CRAN (Comprehensive R Archive Network) aplicables a una gran diversidad de procedimientos.

La instalación de paquetes de R puede hacerse desde la línea de comando con `install.packages("")` y el nombre del paquete.

A lo largo del curso y en la medida que sea necesario, se cargarán paquetes específicos.

## Capítulo 2

# Los datos estadísticos

En este capítulo se desarrollan procedimientos para presentar la información de manera accesible para que pueda ser analizada y luego interpretada. Para poder extraer significado de los datos recogidos es necesario primero dedicar un esfuerzo a organizarlos, a presentarlos de manera comprensible, una operación previa a la aplicación de las técnicas de análisis que se verán más adelante.

La ciencia se interesa por la producción de conocimiento validado, uno de cuyos requisitos es que pueda ser comunicado de manera inequívoca, que se confronten las conclusiones a que llegan y los métodos que usan diferentes investigadores. Esto implica la necesidad de usar un lenguaje que permita el intercambio entre investigadores y que dependa, en el menor grado posible, de las impresiones subjetivas o de las interpretaciones que cada investigador individual dé a los conceptos. Se busca un vocabulario tan unívoco como sea posible. Un modo de acercarse a lograr esta comunicabilidad de las ideas, de los métodos y de los resultados, es definir, de la manera más precisa posible, los elementos acerca de los que se habla.

Alguna vez hemos dado con expresiones como “esta persona es más inteligente que aquella”. ¿Qué se quiere decir exactamente con eso?, la afirmación podría provenir de algún evento en que se vio a esa persona actuando de manera que llamaríamos inteligente, aunque esto también puede confundirse con astucia: no es infrecuente usar el adjetivo inteligente para un estafador, alguien a quien le resulta fácil engañar a otros; y, a la inversa, sería poco inteligente quien se deja engañar con facilidad. O bien, a menudo decimos que alguien es inteligente porque obtiene buenos resultados en sus estudios. Esto es parte de la imprecisión en la definición de un concepto. Si se dispone de una definición de inteligencia, se puede saber cuándo aplicar esa idea a alguien, cuándo una conducta es inteligente, inclusive, cómo ayudar a desarrollar la inteligencia. Si se puede definir el concepto con el que se trabaja, se pueden indicar ciertas operaciones a realizar para evaluarlo y así conocer cuál es el nivel de inteligencia de un sujeto en particular.

Luego de definir el concepto con el que se trabaja, se requiere diseñar un instrumento que refleje esa definición y finalmente aplicar este instrumento a las personas que se evaluarán. Al hacer esto último se obtiene un resultado que, si se expresa de manera cuantitativa, permite hacer comparaciones del aspecto que representa ese concepto, entre personas, entre grupos, etc.

¿Pueden compararse personas? La respuesta es no, porque cada persona tiene una infinidad de aspectos que la caracterizan y la hacen única. Por el contrario lo que sí pueden compararse son características claramente definidas de las personas. Del mismo modo no se pueden comparar escuelas, ni hogares, ni países si no se especifica en qué aspecto se realiza la comparación. O dicho de otro modo, cuál es la característica que se compara, y cómo se mide esa característica.

Podemos decir que una persona tiene más escolarización formal que otra, indicando con eso que ha aprobado más años de la escuela o de la universidad. Podemos decir que un hogar es diferente a otro si uno se compone de una pareja sola y el otro incluye tres hijos. Un país puede tener más habitantes, un régimen político diferente, o mayor libertad de expresión que otro. En todos los casos especificamos una característica (un rasgo o un estado), sobre la base del cual hacemos la comparación.

## 2.1 La selección de la información pertinente

Cuando se ha decidido quienes son los sujetos de la observación; es decir, una vez que se sabe a quiénes se observará, deben elegirse ciertas características de esos sujetos para observar<sup>1</sup>. Cada unidad que resulta de interés para la investigación tiene un conjunto muy grande de características observables y siempre se realiza una selección de esas características. Se trata de un recorte que permite comprender mejor ciertos aspectos, dejando de lado otros. La información que seleccionamos para observar se denomina pertinente para la investigación.

Cuando se decide cuál es la información pertinente, se la puede recabar de varios individuos y cambiar la óptica desde el caso particular a la regularidad colectiva. Es un cambio desde el individuo hacia el grupo. La siguiente es una lista que indica el área en que les gustaría trabajar cuando se reciban, a nueve estudiantes de primer año de Psicología:

Tabla 2.1: Área de trabajo preferida.

Alumno	Área
Susana	Clínica

<sup>1</sup>La palabra observar aquí se utiliza en un sentido general, puede tratarse de una observación directa como la que se realiza al mirar (o filmar) un comportamiento, o bien de la presentación de preguntas que alguien debe responder.

Alumno	Área
Marcos	Laboral
Daniel	Clínica
Federico	Social
María	Clínica
Pedro	Educacional
Eugenia	Clínica
Mabel	Educacional
Francisco	Laboral

La lista los individualiza, los reconoce por su nombre, indica qué área le gustaría a cada uno y solo eso, no se sabe la edad de cada uno, ni sus intereses políticos ni el deporte favorito, solo se seleccionó como pertinente para este ejemplo, el área en que le gustaría trabajar. Si ahora se transforma esa lista en una tabla:

Tabla 2.2: Área de trabajo preferida.

Área	Casos
Clínica	4
Educacional	2
Laboral	2
Social	1

Se lee que Clínica es un área preferida por cuatro alumnos, Laboral y Educacional por dos y a Social solo la menciona uno. Las personas desaparecieron, ya no hay nombres, hemos abstraído para referirnos al área preferida, no a los alumnos. En la tabla se ve que lo más frecuente es que se prefiera Clínica, y que Social es poco frecuente. Se pasó de la lista de individuos a la tabla de valores. Nos despegamos de los casos a fin de buscar la regularidad en el conjunto. Más adelante diremos que se ha pasado de la matriz de datos a la distribución de frecuencias, que constituye una reducción o un primer resumen de la información disponible.

Consideremos el siguiente cuestionario, que se aplicó en 2019 a personas con edades 18 y 35 años.

Este instrumento de producción de datos que es el cuestionario, se dirige a una población definida: personas entre 18 y 35 años. En él se solicita información sobre un conjunto seleccionado de características; los ítems numerados desde P1 hasta P16. Se trata de unos pocos aspectos de cada persona los que interesan para esta investigación; no se tiene en cuenta, por ejemplo la opinión política de quienes responden, ni su estatura o la región en que viven. Estas últimas y muchas más son características de estas personas, pero están fuera del alcance de la investigación. Esto muestra a qué nos referimos con que la información

Figura 2.1: Cuestionario 2019





seleccionada constituye un recorte, es una parcialización de los individuos que responden, en la que se eligen solo los aspectos que son de interés para una investigación particular.

El cuestionario tiene 16 ítems, cada persona que lo responde marca una sola de las opciones indicadas en cada ítem. Una vez completados los cuestionarios, la información está “en bruto” y es necesario ordenarla para poder tener una visión de conjunto. Eso se logra organizando los datos recogidos en la *matriz de datos* que tiene, para el cuestionario mostrado, la siguiente forma:

```
##
##      1      2      3      4
##  974 2692  456  422

##
##      1      2      3      4
## 1610  479  581  254

##      sexo edad acceso.redes red.usada red.otra tiempo.red      con.q.vive
## 1 mujer   19             si Instagram  <NA>      120      con.otres
## 2 varón   29             si Facebook   <NA>      90      con.otres
## 3 mujer   31             si Facebook   <NA>      30      flia.nueva
## 4 mujer   28             si Otra      gmail    30      flia.nueva
## 5 mujer   22             si Instagram  <NA>      120  hermanes.o.amigues
## 6 varón   22             si Facebook   <NA>      240      solo

##      relacion.otros      q.aporta q.aporta.amigos edad.partida razon.partida
## 1      <NA> entre.amigos      2      19      estudio
## 2      primo entre.amigos      1      26      ganas
## 3      <NA> flia.nueva      NA      21      otras
## 4      <NA> flia.nueva      NA      18      ganas
## 5      <NA> entre.amigos      2      18      estudio
## 6      <NA> el.mismo      NA      18      estudio

##      razon.partida.otra calidad.sueño preocupacion golpeo robo cuanto.da
## 1      <NA>      4      4      1      1      30
## 2      <NA>      8      2      1      2      50
## 3      problemas flia      6      7      1      1      30
## 4      <NA>      9      5      1      2      100
## 5      <NA>      6      8      1      4      100
## 6      <NA>      6      5      3      2      75

##      comision
## 1      5
## 2      5
## 3      5
## 4      5
## 5      5
## 6      5
```

Este ordenamiento de la información tiene filas (horizontales) y columnas (verticales), en esta imagen solo se ven las primeras filas de la matriz, y además, porque no cabe horizontalmente, está subdividida en cuatro bloques de variables (columnas). Cada fila es un individuo y cada columna es un ítem. La primera fila (que continúa en los cuatro bloques) muestra los nombres de los ítems del cuestionario y las seis filas mostradas, las respuestas dadas por los encuestados. Así, la persona que respondió al primer cuestionario es una mujer, que tiene 19 años, tiene acceso a redes sociales y la que más usa es Instagram, como no respondió “otra”, en la columna siguiente tiene NA, que indica que no hay dato allí (Not Available), vive “con otros” y aportan entre amigos y así sigue toda la fila correspondiente a esa persona.

La matriz de datos contiene toda la información que será insumo de los análisis posteriores, luego será necesario definir qué es cada elemento que la constituye.

---

La matriz de datos es un arreglo en el que cada fila (horizontal) representa un individuo del cual proviene la información, cada columna (vertical) es un aspecto de los individuos, que se ha seleccionado para observar, y cada celda es el valor que tiene el individuo de la fila en el aspecto de la columna correspondiente.

---

## 2.2 Los individuos

Hemos dicho que cada fila representa un caso, un individuo al que se observa. Este individuo puede ser una persona como en este ejemplo, pero también una entidad colectiva: un hogar, una empresa, una escuela. Cada una de ellas se denomina *unidad de análisis*.

Es importante que las unidades de análisis estén claras para la interpretación de los resultados. Por ejemplo, si se afirma que “las personas de menores recursos acceden menos frecuentemente a la educación superior”, hablamos de personas, y éstas son las unidades de análisis. Y es muy diferente a decir que “en los países más pobres, es menor la proporción de personas que acceden a la educación superior”, porque aquí las unidades de análisis son los países.

---

Las **unidades de análisis** son los entes individuales acerca de los que se analizan sus cualidades.

---

Si las unidades de análisis fuesen escuelas, sus características, dependiendo de la investigación de que se trate, podrían ser: dependencia (estatal o privada), nivel (primaria, secundaria, ambas), cantidad de alumnos, turnos (mañana, tarde, ambos), etc. Si se tratara de hogares, puede observarse: cantidad de miembros, composición, actividad económica, etc.

## 2.3 Las variables

Cada columna de la matriz de datos es un ítem del cuestionario, es decir un aspecto seleccionado de las unidades de análisis sobre el que se llama la atención. Esos aspectos se denominan variables. Así, el sexo es una variable, como lo es con quién vive, cuánto daría en el experimento, etc. Cada ítem del cuestionario se constituye en una variable, a veces su expresión interrogativa en el cuestionario se transforma en algo más abreviado, como: “¿Cuánto tiempo (en minutos) estuviste conectado/a a las redes sociales en el día de ayer?” se vuela “tiempo.red”. Las variables son los aspectos de los individuos que se someterán al análisis. Su cualidad central es la que le da nombre: la de variar.

---

Una **variable** es una característica de las unidades de análisis que puede asumir diferentes valores en cada una de ellas.

---

Cada vez que se haga referencia a una variable, debe conocerse cuál es la unidad de análisis a la que se refiere, si no resulta claro, se debe indicar. Es diferente afirmar que un país es rico que decir que sus habitantes lo son.

## 2.4 Las categorías

El cuerpo de la matriz de datos tiene números que corresponden a las respuestas que cada respondente dio a cada ítem. El primer caso tiene un número 2 en la primera columna, que quiere decir que esa persona respondió que es una mujer. En esta pregunta, se podía elegir entre dos respuestas diferentes (varón, mujer), en el lenguaje que estamos introduciendo, diremos que esta variable (sexo) puede asumir dos *categorías* diferentes. Para el primer caso, la variable sexo asume la categoría 2. Las categorías son las “posibilidades” que tiene una variable, dentro de las cuales a todas las unidades de análisis les corresponde una y solo una.

---

Las **categorías** de una variable son los valores que ésta puede asumir.

---

Cada vez que se define una variable -es decir cada vez que se selecciona un aspecto de las unidades de análisis para observar-, debe indicarse también el conjunto de categorías que le corresponden, aunque a veces esto está implícito. Si la variable es nivel de escolaridad alcanzado, pueden considerarse las siguientes categorías: ninguno, primario incompleto, primario completo, secundario incompleto, secundario completo, terciario o universitario incompleto, terciario o universitario completo y postgrado. Si tratamos con la variable edad, sus categorías son valores numéricos, entre cero y un máximo de años que se fija según el caso.

Hay dos propiedades que debemos asegurar que cumplan las categorías que construyamos. La primera se llama *exclusión mutua*, es decir que cada categoría excluya a todas las demás. Dicho de otra manera, si a un individuo le corresponde una categoría, entonces sabemos que no le corresponde ninguna otra. Si analizamos hogares y a cada persona le preguntamos por su parentesco, sin indicar con quién, tendremos una categorización defectuosa, porque una persona del hogar puede al mismo tiempo ser hijo y hermano, o hijo y padre, si conviven tres generaciones. En cualquiera de los dos casos, a una misma persona le corresponderían dos categorías y se viola el requisito de exclusión mutua. Esto se resuelve estableciendo respecto de quién se declara el parentesco, y todos los integrantes del hogar lo refieren a la misma persona<sup>2</sup>.

Al analizar los tipos de lectura preferida, nos equivocaríamos si los categorizáramos como de ficción, de misterio, policiales, románticas, biográficas, de aventuras; ya que la categoría ficción puede incluir misterio, policiales, novelas románticas o de aventuras.

También se comete ese error si se clasifica a las escuelas como céntricas, parroquiales, urbanas y rurales. Dado que una escuela puede ser al mismo tiempo parroquial y urbana. Es necesario separar, para que quede claro, lo que interesa en el análisis: si lo que queremos distinguir son escuelas céntricas de barriales, entonces la variable será la ubicación geográfica y no importa si la escuela depende de una iglesia o del estado; es decir, identificar la variable y luego sus categorías.

---

Las categorías de una variable son **mutuamente excluyentes** si a cada individuo le corresponde no más de una categoría.

---

El segundo requisito que solicitaremos a las categorías de una variable es que agoten todas las posibilidades de variación, es decir, que todos los valores posibles estén contemplados. Esta cualidad se llama *exhaustividad*.

Veamos qué sucede si no respetamos este requisito. Si evaluamos la variable situación conyugal y ofrecemos como categorías: casado, soltero, divorciado, viudo; las personas que estén viviendo juntas sin estar casadas no encuentran un lugar donde ubicarse, como tampoco lo encuentran quienes están separados sin haberse divorciado. Para resolver esto es necesario, o bien incluir estas categorías explícitamente: casado, unido, soltero, separado, divorciado, viudo; ampliando así el número de categorías, o bien fusionarlas con las existentes: casado o unido, soltero, separado o divorciado, viudo. Con la edad, las categorías son valores numéricos que pueden ir del cero hasta el un máximo, pero ¿dónde fijarlo? Si se eligiera un límite como 100 años, algunas personas quedarían fuera, quizás sean pocas, pero no pueden quedar sin categoría donde incluirse. Por lo demás, puede haber solo una persona de 103 años, otra de 105, por lo que no se justifica seguir extendiendo categorías. Una solución frecuente es la de tomar una categoría

---

<sup>2</sup>Habitualmente denominado “Jefe de Hogar”.

“abierta final”, fijando como última categoría 100 y más, e incluir allí a todas las personas que declaren una edad de 100 años o superior. Puede verse que esta opción conlleva una pérdida de información, ya que no sabemos la edad exacta de quienes se ubican en esa categoría. Aceptamos esa pérdida a cambio de reducir el número de categorías de la variable, luego volveremos sobre eso.

Algunas preguntas de cuestionarios, luego de un conjunto de opciones para responder, incluyen una categoría que dice “Otro... especificar”. Se trata de casos de categorizaciones en las que no se sabe de antemano cuáles son todas las respuestas posibles; son frecuentes en las encuestas de opinión. Por ejemplo, si alguien declara que en las próximas elecciones va a votar en blanco y preguntamos por qué, podemos conocer de antemano algunas de las respuestas posibles, pero debemos dejar espacio para que los encuestados expresen razones que no habíamos previsto. De este modo aseguramos la exhaustividad de las categorías. En el cuestionario del ejemplo, la P7 tiene, en la opción 5, la posibilidad de otras alternativas de convivencia, aparte de las ofrecidas.

---

Las categorías de una variable son **exhaustivas** si todo individuo tiene alguna categoría que le corresponda.

---

En algunas situaciones, el número de categorías de una variable es parte de la decisión del investigador. Hay casos en que las categorías están establecidas de antemano: por ejemplo, en la variable sexo se tiende a usar como categorías las de varón y mujer; sin embargo, si estamos frente a un estudio que trate precisamente sobre orientación sexual de las personas, deberá considerarse un espectro más amplio de categorías, o bien ofrecer preguntas abiertas, sin establecer categorías de antemano. Como ha sido el caso de P2 en el cuestionario, que no ha sido cargada en la matriz de datos, porque requiere una codificación posterior.

Como se señaló, en la edad de las personas suele elegirse terminar las categorías con “100 y más”. De hecho, también se podrían mantener las edades exactas hasta 109 años y cerrar con 110 y más. Qué se elija depende de cuánta información y cuánta claridad se decida que tenga la clasificación; lamentablemente, no es posible lograr al mismo tiempo el máximo de información y de claridad en la presentación<sup>3</sup>.

## 2.5 Los símbolos numéricos

Las categorías pueden tener diferente naturaleza: algunas se expresan con números (como la edad) y otras con palabras (como la carrera que cursa), otras en graduaciones (como el grado de acuerdo); sin embargo es muy común representar con números a las categorías, aun cuando lo que se observe no

---

<sup>3</sup>A menudo que, en Estadística, es necesario llegar a puntos de equilibrio entre el grado de detalle de la información que se ofrece y la claridad con que esa información puede presentarse.

sea numérico. Así, en la variable nivel de educación, pueden codificarse las categorías de la siguiente manera:

Tabla 2.9: Nivel de educación alcanzado.

Código	Máximo nivel de educación formal alcanzado
1	ninguno
2	primario incompleto
3	primario completo
4	secundario incompleto
5	secundario completo
6	terciario o universitario incompleto
7	terciario o universitario completo
8	postgrado

Hemos usado números para referirnos a las categorías a fin de simplificar la notación.

De manera equivalente podemos codificar las categorías de otras variables:

Tabla 2.10: Distribución por sexos.

Código	Sexo
1	Varón
2	Mujer

Tabla 2.11: Satisfacción con el progreso en la carrera.

Código	Estoy muy satisfecho con el modo en que he progresado en mi carrera
1	Completamente en desacuerdo
2	En desacuerdo
3	Indiferente
4	De acuerdo
5	Completamente de acuerdo

En las variables cuyas categorías son numéricas, no es necesario hacer ninguna codificación. Así, la edad quedará expresada de manera numérica directamente por la cantidad de años, como sucede con la cantidad de materias aprobadas. En estos casos, la exclusión mutua y la exhaustividad se cumplen.

## 2.6 La medición

En Ciencias Sociales tiene plena vigencia el debate acerca de las posibilidades de medición de los fenómenos que se estudian. Buena parte de la discusión gira en torno a una definición de medición, ya que según qué sea lo que se considere como tal, se tratará de una medición o no. La posición más tradicional corresponde a lo que el sentido común trata como medición: la estatura, las distancias, el peso, etc. Esta definición demanda que los números que codifican a las categorías tengan algunas propiedades para considerarlos como mediciones. Se conoce como teoría clásica de la medición, y desde ese punto de vista sería muy difícil realizar mediciones sobre las variables que manejamos en Ciencias Sociales. Una definición menos restrictiva es la que propuso [Stevens \(1946\)](#), según la cual:

---

“medir es asignar números a los objetos según cierta regla, de manera que los números asignados en la medición, no representan propiamente cantidades, sino relaciones”.

---

Esta última definición, basada en la teoría representacional de la medición, es la que adoptaremos en este curso aunque la discusión sigue vigente. Desde esta definición, evaluar una variable para una unidad de análisis dada, equivale a medir esa unidad de análisis en el aspecto que la variable expresa.

Aun cuando se adopte una definición amplia de lo que es medir, podemos intuir que no se mide una opinión del mismo modo que se mide el salario o la estatura. Esto sugiere que, dentro de las variables de las que hemos hablado hasta aquí habrá que reconocer diferencias, y estas diferencias vendrán dadas por el significado que tengan los números que asignamos a las categorías, es decir, por las reglas que ligan los números con lo que se observa.

---

El **nivel de medición** de una variable está determinado por el significado que tengan los símbolos numéricos que se asignan a las categorías.

---

Existe una graduación en el significado que tienen los números, y por eso se habla de niveles, que pueden ser más altos o más bajos. En la variable sexo, haber elegido 1 para varones y 2 para mujeres es de una arbitrariedad total (de la que alguien podría quejarse). Si la codificación hubiese sido al revés, habría estado igual de bien, y también habría estado bien usar el número 25 para representar a los varones y el 38 para las mujeres, aunque esto resulta un poco incómodo. Por el contrario, en la variable edad, asignar el número 20 a quien tiene 20 años, parece totalmente “natural” ¿qué otro número podríamos haber asignado? ¿Qué sucede con el nivel de educación? En el ejemplo elegimos numerar las categorías del 1 al 8; habría habido otras opciones, por ejemplo usar solo números pares o números impares u otra secuencia arbitraria, pero algo importante es que



cualquier secuencia que se elija debe respetar el orden de las categorías de la variable, por lo que los números deben reflejarlo; no habría sido correcto usar números que no vayan aumentando, como lo hacen los niveles de educación.

Así entonces, hay grados diferentes en la libertad que existe para asignar los números a las categorías. Esas diferencias distinguen los niveles de medición de las variables.

### 2.6.1 Niveles de medición

Según la mayor o menor arbitrariedad que exista en la relación que liga los números a las categorías, hablaremos de diferentes niveles de medición: cuánta más restricción haya en la asignación de los números a las categorías, más alto será el nivel de medición de las variables. Si los números se asignan de manera totalmente arbitraria, el nivel de medición es el más bajo de todos y se llama *nivel nominal* (como en la variable sexo); si los números deben respetar el orden de las categorías (como en la educación), la variable se llama de *nivel ordinal*. Por ahora, nos detenemos en estos dos niveles.

#### 2.6.1.1 El nivel nominal

Es el nivel más elemental de medición: las variables de este nivel tienen categorías que son solo nombres (de allí que se llamen nominales). La asignación de códigos numéricos cumple la función de designar las categorías, es decir, de distinguirlas una de otras. Sexo, área de especialización preferida (UA = estudiantes de Psicología), carrera que cursa (UA = estudiantes universitarios); cuyas codificaciones podrían ser:

Tabla 2.14: Ejemplos de codificación de variables nominales.

Código	Carrera	Código	Área
1	Psicología	1	Clínica
2	Filosofía	2	Educacional
3	Medicina	3	Jurídica
4	Otras	4	Laboral
		5	Sanitaria
		6	Social
		7	Experimental
		8	Otra

Por comodidad, se empieza en el 1 y desde allí correlativamente, pero no hay ninguna prohibición para codificar con cualquier conjunto de números. Aun con esta amplia libertad para elegir los códigos numéricos, hay algo que no se

puede hacer: no es válido usar el mismo número más de una vez. Si hiciéramos esto, confundiríamos las categorías que corresponden a cada individuo. Así, a un estudiante de Psicología, le asignamos el valor 1 en la variable “carrera”, y no podría usarse ese mismo número en la misma variable también para alguien que estudia Medicina. Diremos que la condición que deben cumplir los números en este nivel de medición es que: a categorías diferentes correspondan números distintos.

Entonces, en este nivel de medición a cada categoría puede asignarse, de manera arbitraria, uno y solo un número. Esta forma de asignar los valores numéricos solo implica que éstos designan las categorías (que las distinguen a una de otra), por eso, no es posible tratarlos como números en cuanto a sus propiedades aritméticas. En particular no puede sumárselos: nada puede significar que se sumen los números 1 y 2 que codifican a las carreras de Psicología y Filosofía.

---

Una variable está medida a nivel **nominal** si los números que representan cada categoría son asignados de manera arbitraria y solo cumplen con la función de designar y distinguir categorías diferentes.

---

Para unidades de análisis medidas a través de una variable de nivel nominal, es posible saber si corresponden a la misma categoría o a una diferente, es decir si tienen la misma cualidad (o atributo) o una diferente.

En la tabla 2.14 si a un alumno le corresponde el número 1 y a otro también, solo podemos decir que coinciden en esta variable, ambos estudian la misma carrera (Psicología), si a uno le corresponde el 1 y a otro el 3, sabremos que el primero estudia Psicología y el otro Medicina. El hecho que el número 3 sea más grande que el 1, no tiene ninguna interpretación en este nivel de medición, no puede decirse que Psicología sea menos que Medicina. Como tampoco vale que 3 sea el triple de 1.

Si 1 y 2 son dos categorías de una variable medida a nivel nominal, el único tipo de relación que puede establecerse entre ellas es  $1 \neq 2$ , es decir que 1 es diferente de 2.

La regla de transformación de una escala nominal en otra es que cualquier número puede cambiarse por cualquiera a condición de no repetir ninguno. La escala nominal 1, 2, 3, 4 puede cambiarse por la 5, 8, 4, 2. Aunque no es obligatorio, en la práctica, lo más frecuente es usar los primeros números naturales para codificar las categorías.

### 2.6.1.2 El nivel ordinal

Aquí subimos un nivel, ya que a los números que solo tienen la propiedad de designar en las variables nominales, se agrega otra: la de reflejar el orden que existe entre las categorías. Simplemente ahora se trata de variables cuyas

categorías indican alguna cualidad de las unidades de análisis que crece en una dirección. Eso equivale a decir que se pueden hacer entre ellas, juicios de orden, tales como una categoría es mayor que otra, una categoría es menor que otra. El grado de escolarización cumple con ese requisito: efectivamente, el “primario incompleto” es un nivel de estudios superior a “ninguno”, pero inferior a “primario completo”. Los valores numéricos que representan las categorías rescatan ahora una propiedad adicional: el orden. Además de poder distinguir si dos sujetos tienen la misma característica analizada o una distinta como en el nivel nominal, ahora también podemos saber si un individuo tiene esa característica en mayor o menor grado. Así como “ninguno” es menor que “primario incompleto”, los números correspondientes cumplen con que 1 es menor que 2 y resulta más sencillo escribirlo como  $1 < 2$ .

---

Una variable está medida a nivel **ordinal** si los números que representan cada categoría son asignados de manera que respeten el orden según aumenta o disminuye la característica que la variable mide.

---

Estos números designan las categorías y son expresión de la jerarquía que hay entre ellas. Otro ejemplos de variable medida a nivel ordinal y su correspondiente codificación numérica es la pregunta ¿Alguna vez en tu vida golpeaste a alguien tan fuerte que necesitó atención médica u hospitalaria? (P14) del cuestionario, que fue codificada de manera creciente con la intensidad:

Tabla 2.17: Ejemplo de codificación de una variable ordinal.

Código	P14
1.	Nunca
2.	Una vez
3.	Dos o tres veces
4.	De cuatro a seis veces
5.	Más de seis veces

De aquí en adelante ya no usaremos una columna especial de la tabla para indicar el código, simplemente lo señalamos junto al nombre de la categoría, encabezado con el nombre abreviado de la variable:

Tabla 2.18: Ejemplo de una variable ordinal codificada.

Golpeo
1. Nunca
2. Una vez
3. Dos o tres veces
4. De cuatro a seis veces

Golpeo
5. Más de seis veces

Acerca del significado de los valores numéricos en las variables de nivel ordinal, si bien hemos agregado el orden, aun no es posible hacer operaciones con ellos. Es decir, no es posible sumar dos valores y que la suma tenga algún significado. Por ejemplo, en la última variable, no es cierto que  $3 = 2 + 1$ , porque no es cierto que “dos o tres veces” sea lo mismo que “nunca” más “una vez”. Tampoco es válido restarlos, veamos que la diferencia entre 1 y 2 es 1 y la diferencia entre 4 y 5 también es 1, pero eso no tiene un correlato entre las categorías: no es cierto que haya la misma distancia entre “nunca” y “una vez” que entre “de cuatro a seis” y “más de seis”, simplemente porque no tenemos definida la idea de *distancia* para esta variable.

Si 1 y 2 son dos categorías de una variable medida a nivel ordinal, se pueden establecer las relaciones:  $1 \neq 2$  y  $1 < 2$ , es decir que, uno es diferente que dos y que uno es menor que dos. A la relación de distinción que existe entre categorías de la escala nominal se agrega la relación de orden.

La regla de transformación de una escala ordinal en otra consiste en cambiar los números por cualquiera, a condición que no se repita ninguno (como en la nominal) y además, que sigan el mismo orden. La escala ordinal 1, 2, 3, 4 puede cambiarse por la 5, 8, 15, 23. Nuevamente, esto es poco común y suelen usarse números correlativos.

Los dos niveles (o escalas) de medición siguientes se llaman intervalares y proporcionales y usan las codificaciones numéricas con un significado un poco diferente al visto hasta aquí. La principal diferencia es que el grado de arbitrariedad para asignar los números se reduce sustancialmente. En primer lugar, las escalas intervalares conservan las distancias entre los valores. En las variables medidas a nivel proporcional, además de conservarse la distancia, se verifica la proporcionalidad de los valores: es decir que, recién en estas escalas, cuatro será el doble de dos.

### 2.6.1.3 El nivel intervalar

Veamos un ejemplo antes de definir este nivel. Cuando decimos que estamos en el año 2020, hacemos implícitamente una afirmación que supone una medición del tiempo transcurrido desde un determinado evento, cuya elección no es única. En cierto modo decimos “han transcurrido 2020 años desde el momento que se acordó usar como inicio de este calendario”. En culturas no cristianas, el origen en la medición de los tiempos puede ubicarse en otro momento y, en consecuencia, el año actual es otro. En el calendario judío, por ejemplo, el presente es el año 5780. Hay entonces cierto grado de arbitrariedad en la ubicación del punto desde donde empezar a contar los años. Lo que podría llamarse el “año cero”, no es

necesariamente el mismo. Sin embargo, el tiempo transcurrido entre 1975 y 2005 es de treinta años, como lo es el tiempo transcurrido entre 5735 y 5765. Es decir que la transformación que lleva los años de un calendario al otro, conserva las distancias. Independientemente de la escala con que hayamos medido el año, la diferencia entre dos años, se mantiene constante. Eso sucede porque las dos escalas (en este ejemplo, la medición del tiempo según las tradiciones cristiana y judía) se distinguen solo en la elección del origen (la posición del cero) pero no en la definición de lo que es un año. Para ambas escalas un año corresponde a una vuelta de la tierra al sol, por lo que la unidad de medición es la misma<sup>4</sup>. Si alguien tiene 30 años en el calendario cristiano, también tiene 30 años con el calendario judío; porque, aunque tanto el año de nacimiento como el actual sean diferentes en los dos calendarios, la diferencia (el tiempo transcurrido) entre las dos fechas es la misma. Ubicar el cero en un momento (en un determinado hecho histórico) o en otro es una elección; ese cero no indica la “ausencia de tiempo”. En este caso, cero no quiere decir “nada”, sino “origen elegido”.

Una forma de medir la inteligencia es la de observar cuántos problemas de una serie de dificultad creciente es cada uno capaz de resolver correctamente. Pero, ¿podría decirse que quien no resuelve ninguno de ellos tiene inteligencia cero?, esto es claramente incorrecto, porque la ubicación del cero no implica la ausencia de lo que estamos midiendo (ausencia de inteligencia en este caso).

Las escalas intervalares, mantienen las propiedades de las escalas ordinales y nominales, es decir, los números designan categorías y permiten ordenarlas; pero además permiten decir a qué distancia está una de otra, porque cada categoría se expresa también en sentido cuantitativo. La medición intervalar implica construir una escala en la que las categorías están proporcionalmente distanciadas entre sí. Esto permite especificar la distancia que separa a cada categoría de las demás. Este nivel de medición requiere que se establezca algún tipo de unidad de medida que pueda ser considerado por todos como una norma común y que sea repetible, esto es, que se pueda aplicar reiteradamente a los mismos individuos produciendo los mismos resultados.

La medición de los rendimientos individuales por medio de pruebas suele expresarse en puntajes que provienen del tiempo requerido para realizar una determinada tarea o de la cantidad de trabajo realizado. En este tipo de prueba, es común que los puntajes partan de un mínimo establecido (por ejemplo el mínimo tiempo posible de ejecución o la mínima cantidad de tareas que una persona puede realizar en una prueba) y esto constituye el puntaje mínimo o la categoría más baja. Los puntajes de las pruebas mentales varían de acuerdo con el rendimiento y un mayor rendimiento siempre significará un mayor puntaje. Por ejemplo, el manual original del Inventario de Depresión de Beck-II (Upton (2013)) establece niveles (ordinales) para los puntajes (intervalares) que resultan de la aplicación del instrumento:

---

<sup>4</sup>Si bien la corrección que se introduce cada año no es idéntica, por lo que el momento de cambio de año no es el mismo en las dos escalas.

Tabla 2.19: Ejemplo de codificación de rangos de puntajes para una variable intervalar.

Puntaje en la escala	Significado
0 - 13	depresión mínima
14 - 19	depresión leve
20 - 28	depresión moderada
29 - 63	depresión grave

De este modo se ha bajado el nivel de medición, de intervalar a ordinal.

A nivel intervalar, ya es posible expresar la regla de transformación de manera formal; así, si  $x$  e  $y$  representan la medición del mismo atributo en diferentes escalas, puede obtenerse  $y$  a partir de  $x$  a través de la siguiente operación:

$$y = b_0 + b_1 * x$$

Se usan los símbolos  $b_0$  y  $b_1$  para indicar dos números fijos elegidos arbitrariamente. El primero de ellos indica el desplazamiento en el origen de la escala: allí donde  $x$  valga 0,  $y$  tomará el valor de  $b_0$ . Por su parte,  $b_1$  es un factor de escala, que modifica el tamaño de la unidad de medida.

En el ejemplo de la medición del año según dos calendarios diferentes, si  $x$  es la medición en el calendario cristiano e  $y$  con el calendario judío, la relación es:

$$y = 3760 + x$$

En la que  $b_0$  se reemplazó por 3760 y  $b_1$  ha desaparecido, es decir que vale 1 (que no tiene efecto cuando multiplica a  $x$ ). El valor 3760 representa el cambio en el origen: cuando el calendario cristiano marcó cero (hipotéticamente, porque su implementación es posterior a esa época), el judío indicaba el año 3760. El 1 correspondiente a  $b_1$ , indica que no hay cambio en el tamaño de la unidad, como dijimos antes, ambas culturas acuerdan en que el año es una vuelta de la tierra al sol<sup>5</sup>.

---

Una variable está medida a nivel **intervalar** cuando las distancias entre las categorías son proporcionales.

---

Si 1, 2, 3 y 4 son categorías de una variable medida a nivel intervalar, se pueden establecer las relaciones:

$$1 \neq 2$$

---

<sup>5</sup>Con la salvedad indicada antes sobre la no coincidencia del momento de cambio de año.

$$1 < 2$$

$$2 - 1 = 4 - 3$$

Se agrega la conservación de las distancias a las propiedades que ya tenía la escala anterior.

#### 2.6.1.4 El nivel proporcional<sup>6</sup>

Este es el último nivel de medición que trataremos y es el más intuitivo, es el único nivel considerado efectivamente como medición por la teoría clásica, ya que en él se integran todas las propiedades de los niveles anteriores y además se agrega la proporcionalidad de los valores numéricos y el carácter absoluto del cero. Recién a este nivel, los números se comportan realmente como números, ya que se puede operar con ellos del modo al que estamos acostumbrados (sumarlos, multiplicarlos, etc.). ¿Qué variables pueden medirse a este nivel? Todas aquellas para las cuales tengan sentido las dos propiedades adicionales que esta escala incorpora: proporcionalidad de valores y cero absoluto. La cantidad de errores ortográficos cometidos en una prueba de dictado, admite el valor cero como correspondiente a “no errores”, es la ausencia de lo que se mide, se trata de un cero absoluto. Además, cometer 10 errores es el doble que cometer 5. Por eso, la variable Número de errores ortográficos cometidos es de nivel proporcional. El tiempo que una persona tarda en resolver una tarea, si se mide en minutos, admite considerar que 4 minutos es el doble de 2, por lo que estamos también en presencia de una escala proporcional, aunque el cero no sea un valor observable. También es proporcional la variable ingresos mensuales del hogar o el número de materias aprobadas.

En general, los valores que provengan de procesos de conteo (como el número de errores) serán siempre proporcionales, como también aquellos que hagan referencia a una unidad de medida estándar como el tiempo<sup>7</sup> o la distancia.

La expresión formal de la regla de transformación entre escalas proporcionales es, si  $x$  e  $y$  representan la medición del mismo atributo en diferentes escalas:

$$y = b_1 * x$$

En la que ahora solo tenemos un número fijo:  $b_1$ , que es el factor de escala, que modifica el tamaño de la unidad de medida. Esto simplemente significa que pueden cambiarse las unidades con que se miden las variables proporcionales. Por ejemplo para pasar de metros a centímetros:

<sup>6</sup>Este nivel de medición aparece mencionado en alguna bibliografía como “escalas de razón” se pueden tratar como sinónimos, ya que la razón se refiere al cociente de números, que permanece constante en el caso de valores proporcionales.

<sup>7</sup>El ejemplo de los calendarios judío y cristiano, aunque es una medición de tiempo, no es absoluta. Es diferente de la medición con un cronómetro, que establece un inicio de cuenta al momento en que se lo dispara y da lugar a una variable de nivel proporcional.

$$y = 100 * x$$

Donde  $x$  es la medida en metros e  $y$  la misma medida expresada en centímetros. Si  $x = 3$  metros entonces  $y = 300$  centímetros

De horas a minutos

$$y = 60 * x$$

El factor 60 transforma a las horas ( $x$ ) en minutos ( $y$ ). Si  $x = 2$  horas entonces  $y = 120$  minutos

Otro ejemplo, si el tiempo que tardan sujetos experimentales para reconocer una expresión facial se mide en milisegundos ( $x$ ), esa medición se puede pasar a segundos ( $y$ ), dividiendo por mil.

$$y = \frac{1}{1000} * x$$

Ninguna de esas transformaciones pueden modificar la posición del cero, porque en esta escala es absoluto: allí donde  $x$  valga cero,  $y$  deberá también valer cero, por eso no aparece el término  $b_0$  que estaba en las intervalares. Cero metros son también cero centímetros y cero horas son cero minutos.

---

Una variable está medida a nivel **proporcional** cuando sus valores respetan relaciones de proporcionalidad y, en consecuencia, el cero tiene un valor absoluto.

---

Si 1, 2, 3 y 4 son categorías de una variable medida a nivel proporcional, se pueden establecer las relaciones:

$$1 \neq 2$$

$$1 < 2$$

$$2 - 1 = 4 - 3$$

$$4 = 2 * 2$$

#### 2.6.1.4.1 Una subdivisión en las escalas proporcionales

Entre las variables medidas a nivel proporcional, debe hacerse una diferenciación, según los valores solo puedan ser números enteros o admitan números decimales, porque cambia la forma de presentación. El primer tipo es el que se llama variable **discreta**, los siguientes son ejemplos de ella:



Tabla 2.22: Ejemplos de variable proporcional discreta.

Cantidad de aplazos	Número de materias aprobadas
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
	7 o más

Aquí podría suceder que la variable tenga un gran número de valores. En el ejemplo de la cantidad de materias aprobadas, puede restringirse a las aprobadas por alumnos de primer año y en condición de regular, de modo que el máximo sea de 6. Pero si fueran alumnos de toda la carrera, la cantidad podría ir desde cero hasta el número total de materias. En esos casos, resultaría poco claro hacer la lista con todos los valores posibles.

Cuando una variable discreta tiene una cantidad grande de valores, el problema de la presentación de las categorías se resuelve agrupándolas. Esto se llama recategorización porque consiste en construir nuevas categorías (volver a categorizar) a partir de las originales de la variable, a fin de resumir la información. Por ejemplo, la primera categoría puede incluir a quienes aprobaron una materia o ninguna, la segunda a los que aprobaron dos o tres y así sucesivamente:

Tabla 2.23: Ejemplo de recategorización de una variable discreta.

Número de materias aprobadas
0-1
2-3
4-6

Cuando la variable admite números decimales se la llama **continua**, y allí el problema es mayor, porque el número de valores puede ser muy elevado<sup>8</sup> y la única opción es la de construir categorías.

<sup>8</sup>La cantidad de valores depende de la precisión con que se mida. Si se mide con precisión de un centímetro, en un metro caben 100 valores, pero si se mide al milímetro en el mismo intervalo de un metro se ubican 1000 categorías.

Tabla 2.24: Ejemplo de recategorización de una variable continua

Estatura (en metros)
hasta 1,55
1,55 - 1,65
1,65 - 1,75
1,75 - 1,85
1,85 - 1,95
1,95 - 2,05
más de 2,05

En el próximo capítulo nos detendremos en las formas de construir estos agrupamientos y despejaremos las dudas que provengan de la diferente cantidad de valores que se agruparon en la variable discreta de este ejemplo (las dos primera categorías contienen dos valores cada una, y la tercera tres) y la aparente superposición entre el inicio de una categoría y el fin de la anterior en el caso de la continua, que sería una violación de la exclusión mutua, porque alguien con una talla de 1,85 podría ir a la cuarta o a la quinta categoría.

## 2.7 Resumen de los niveles de medición

Nivel de medición	Significado de los símbolos numéricos	Condición para cambio de escala	Ubicación del cero
Nominal	Designan, distinguen	No repetir los números	Sin significado
Ordinal	Expresan orden	Respetar el orden ascendente o descendente	Sin significado
Intervalar	Proporcionalidad de distancias	$y = b_0 + b_1 * x$	Arbitrario
Proporcional	Proporcionalidad de valores	$y = b_1 * x$	Absoluto

Ejemplos de diferentes niveles de medición

- Nominales:

Valores (supervivencia vs autoexpresión, tradicionales vs racionales) [Inglehart \(2018\)](#), [Norris and Inglehart \(2011\)](#)

- Ordinales:

Las escalas de compromiso político, acuerdo partidario y consistencia ideológica (Doherty et al. (2016)), la pobreza medida según Línea de pobreza (INDEC (2016)), el grado de acuerdo en escalas de actitud Robinson (2014)

- Cuantitativas discretas:

Cantidad de partidos políticos, tipo de vivienda INDEC (2018), cantidad de palabras recordadas en una prueba de memoria

- Cuantitativas continuas:

Tiempo requerido para completar una tarea, ingreso per cápita familiar INDEC (2018), gasto total en campaña electoral Morales Quiroga and Pineiro Rodriguez (2010)

## 2.8 Hacerlo en R

### 2.8.1 Lectura de la base

Para operar sobre un conjunto de datos es necesario contar con la matriz de datos cargada en la sesión de trabajo; debe ser un objeto disponible para usarlo. Para ello, se elige el nombre que se dará a ese objeto y se le asigna (`=` o `<` o `<-`) la lectura de la base. La lectura debe hacerse desde el lugar donde se encuentra el archivo. Si no se conoce su ruta, el comando `"file.choose"` abre una ventana para llegar él. La respuesta de ese comando es la ruta completa que aparece en la consola de resultados. La lectura de los archivos `.txt` se puede realizar con varios comandos, que dependen de que el archivo tenga o no encabezado, del separador que se use para delimitar los campos, del separador de decimales, etc. El comando `read.table` es el más genérico y debe indicársele:

- El nombre del archivo a leer junto con la ruta para llegar a él: que se copia de la consola.
- Si el archivo tiene encabezado: este es el caso casi siempre, porque la primera fila de la matriz de datos tiene los nombres de las variables. Se indica: `header = TRUE`
- El separador de campos: suelen ser comas, punto y comas o pipe `|` (alt124 en windows). Si los campos están separados por comas. se indica `sep=","` y así con los demás separadores, siempre entrecomillados.

-Si a los casos perdidos se los ha codificado de algún modo particular, por ejemplo como 9999, debe indicarse `na.strings="9999"`.

Conviene mirar la base original, desde el archivo .txt, que puede abrirse con bloc de notas, para asegurarse qué separadores tiene.

Para leer la base de prueba, que se llama base2019.txt, que tiene los campos separados por punto y comas, primero se ubica la ruta del archivo:

```
file.choose()
```

Aquí se abre un explorador para llegar al archivo que se busca, cuando se lo selecciona, la respuesta es su ruta, que debe pegarse como argumento de read.table. Luego se pide su lectura, asignando el resultado al objeto base.ejemplo:

```
base.ejemplo=read.table("bases/archivostxt/base2019.txt",
                        header = TRUE, sep = ";", na.strings = "999")
```

Además del nombre y la ruta del archivo, en este caso indicamos que la primera fila contiene los nombres de las variables y que los casos perdidos están codificados como 999.

En el panel superior derecho ha aparecido este primer objeto, del que se indica el tipo, su tamaño, y las cantidades de observaciones y de variables.

El tipo de objeto se solicita:

```
class(base.ejemplo)
```

```
## [1] "data.frame"
```

Es una matriz de datos, como se esperaba y se la puede ver pidiendo:

```
View(base.ejemplo)
```

En esta exploración inicial, se pueden listar los nombres de las columnas (las variables):

```
names(base.ejemplo)
```

```
## [1] "caso"      "grupo"      "cuestionario" "nombre"
## [5] "P1"        "P2"         "P3"           "P4"
## [9] "P5"        "P5.otra"    "P6"           "P7"
## [13] "P7.otra"   "P8"         "P9"           "P10"
## [17] "P11"       "P11.otra"   "P12"          "P13"
## [21] "P14"       "P15"        "P16"          "comision"
```

Y pedir las primeras filas de la matriz:

```
head(base.ejemplo)
```

```
##   caso grupo cuestionario nombre P1      P2 P3 P4 P5 P5.otra P6 P7
## 1   .      .              .      . 2 femenino 19 1 1  <NA> 120 5
## 2   .      .              .      . 1 masculino 29 1 2  <NA> 90 5
## 3   .      .              .      . 2 femenino 31 1 2  <NA> 30 2
## 4   .      .              .      . 2 femenino 28 1 8  gmail 30 2
## 5   .      .              .      <NA> 2      f 22 1 1  <NA> 120 3
## 6   .      .              .      <NA> 1      m 22 1 2  <NA> 240 4
##   P7.otra P8 P9 P10 P11      P11.otra P12 P13 P14 P15 P16 comision
## 1   <NA> 4 2 19 1      <NA> 4 4 1 1 30      5
## 2   primo 4 1 26 3      <NA> 8 2 1 2 50      5
## 3   <NA> 3 NA 21 4 problemas flia 6 7 1 1 30      5
## 4   <NA> 3 NA 18 3      <NA> 9 5 1 2 100      5
## 5   <NA> 4 2 18 1      <NA> 6 8 1 4 100      5
## 6   <NA> 1 NA 18 1      <NA> 6 5 3 2 75      5
```

Por defecto muestra las seis primera filas, en todas las columnas (se usaron dos bloques porque no cabe horizontalmente).

Para tener más accesibles las variables, vamos a ponerle un nombre a cada columna:

```
names(base.ejemplo)=c("caso", "grupo", "n.cuest", "nombre","sexo", "genero",
                      "edad", "acceso.redes","red.usada","red.otra" ,
                      "tiempo.red", "con.q.vive", "relacion.otros",
                      "q.aporta","q.aporta.amigos" ,"edad.partida",
                      "razon.partida",
                      "razon.partida.otra","calidad.sueño",
                      "preocupacion","golpeo", "robo","cuanto.da", "comision")
```

Si pedimos nuevamente el encabezado, tenemos:

```
head(base.ejemplo)
```

```
##   caso grupo n.cuest nombre sexo      genero edad acceso.redes red.usada
## 1   .      .      .      .    2 femenino  19      1      1
## 2   .      .      .      .    1 masculino 29      1      2
## 3   .      .      .      .    2 femenino 31      1      2
## 4   .      .      .      .    2 femenino 28      1      8
## 5   .      .      .    <NA> 2      f    22      1      1
## 6   .      .      .    <NA> 1      m    22      1      2
##   red.otra tiempo.red con.q.vive relacion.otros q.aporta q.aporta.amigos
## 1   <NA>      120      5      <NA>      4      2
```

```
## 2      <NA>      90      5      primo      4      1
## 3      <NA>      30      2      <NA>      3      NA
## 4      gmail     30      2      <NA>      3      NA
## 5      <NA>     120      3      <NA>      4      2
## 6      <NA>     240      4      <NA>      1      NA
##      edad.partida razon.partida razon.partida.otra calidad.sueño preocupacion
## 1          19          1          <NA>          4          4
## 2          26          3          <NA>          8          2
## 3          21          4      problemas flia          6          7
## 4          18          3          <NA>          9          5
## 5          18          1          <NA>          6          8
## 6          18          1          <NA>          6          5
##      golpeo robo cuanto.da comision
## 1      1      1      30      5
## 2      1      2      50      5
## 3      1      1      30      5
## 4      1      2     100      5
## 5      1      4     100      5
## 6      3      2      75      5
```

Ahora hicieron falta cuatro bloques (cada uno numera del 1 al 6, las seis primeras filas), porque con los nuevos nombres la matriz quedó más ancha.

### 2.8.2 Las variables

Cada variable es una columna de la matriz, y para acceder a cada una y operar con ellas, se usa el signo “pesos” luego del nombre de la matriz. Por ejemplo la variable “sexo” La codificación numérica de la variable sexo (1 y 2 para varones y mujeres respectivamente), fue útil para la recolección y la carga de los datos, pero ahora necesitamos tratarla como lo que es. En efecto:

```
class(base.ejemplo$sexo)
```

```
## [1] "integer"
```

Esta almacenada como un número entero, pero es nominal, que en el lenguaje de R, se llama factor, y sus categorías, se llaman “niveles” o “niveles del factor”. Para transformarla a ese tipo de variable hay dos opciones:

- Redefinir la variable sexo, cambiándola por una que en lugar de entera sea nominal, o bien
- Crear una nueva variable en la matriz, a partir de sexo, con un nombre diferente.

Elegimos la primera opción, es decir que operamos sobre la misma variable sexo. Primero la volvemos factor:

```
base.ejemplo$sexo=as.factor(base.ejemplo$sexo)
```

Y le damos nombres a las categorías (los niveles del factor):

```
levels(base.ejemplo$sexo)=c("varones", "mujeres")
```

Repetimos estas operaciones sobre las otras preguntas del cuestionario:

```
base.ejemplo$con.q.vive=as.factor(base.ejemplo$con.q.vive)
levels(base.ejemplo$con.q.vive)=c("flia.origen", "flia.nueva",
                                   "hermanes.o.amigos", "solo",
                                   "con.otres")
base.ejemplo$q.aporta=as.factor(base.ejemplo$q.aporta)
levels(base.ejemplo$q.aporta)=c("el.mismo", "flia.origen",
                                 "flia.nueva", "entre.amigos")

base.ejemplo$acceso.redes=as.factor(base.ejemplo$acceso.redes)
levels(base.ejemplo$acceso.redes)=c("si", "no")

base.ejemplo$red.usada=as.factor(base.ejemplo$red.usada)
levels(base.ejemplo$red.usada)=c("Instagram", "Facebook", "Twitter",
                                  "Linkedin", "Tinder/Grindr/happn",
                                  "Snapchat", "Ninguna", "Otra")

base.ejemplo$razon.partida=as.factor(base.ejemplo$razon.partida)
levels(base.ejemplo$razon.partida)=c("estudio", "nueva.flia", "ganas", "otras")
```

La cantidad de casos es el número de filas de la matriz de datos. En el caso de una variable, es decir de una columna, la cantidad de observaciones es la longitud del vector que la representa. Para conocer cuántos casos tiene una variable en particular, el comando es length:

```
length(base.ejemplo$sexo)
```

```
## [1] 5003
```

Cuando se aplica a una matriz de datos, su longitud es el número de variables:

```
length(base.ejemplo)
```

```
## [1] 24
```

Los elementos de la matriz de datos pueden accederse por filas o por columnas. Unos corchetes puestos a continuación del nombre identifican filas (casos), columnas (variables) o elementos (categorías). El corchete tiene como argumento dos números separados por una coma; el primero se refiere a la fila, el segundo a la columna, ambos juntos determinan un valor.

El valor que está en la fila 254, columna 7 de `base.ejemplo` es 30, que es la edad (columna 7) de la persona que está en la fila 254

```
base.ejemplo[254,7]
```

```
## [1] 30
```

Si uno de los dos elementos del corchete se deja en blanco, toma todos los correspondientes de fila o de columna. No vamos a hacer el experimento, porque tendríamos, o bien los valores en cada una de las 24 variables de un sujeto, si pedimos una fila; o bien los 5003 valores de alguna variable, si pedimos una columna.

### 2.8.3 Los niveles de medición en R

Como se ha visto, en el lenguaje de R, el concepto de variable, se asimila a un vector. Es cada columna de la matriz de datos, compuesta por símbolos que pueden ser numéricos o no. En cuanto a sus tipos:

- Las que hemos llamado nominales son factores y sus categorías se llaman niveles.
- Las ordinales, son factores ordenados.
- Las cuantitativas (sin distinción entre intervalares y proporcionales) son:
  - numéricas las continuas y
  - enteras las discretas.



## Capítulo 3

# Distribuciones de frecuencia

Una vez identificadas las variables y reconocido su nivel de medición, es necesario darle a la matriz de datos un formato que permita hacer lecturas de los resultados, ya que es imposible observar una tabla que tenga gran cantidad de filas (casos) y muchas columnas (variables). El siguiente fragmento de matriz de datos:

##	ANO4	TRIMESTRE	AGLOMERADO	CH03	CH04
## 1	2018	3	2	1	2
## 2	2018	3	2	1	1
## 3	2018	3	2	6	2
## 4	2018	3	2	3	1
## 5	2018	3	2	1	1
## 6	2018	3	2	2	2

Muestra las primeras variables y primeros casos correspondiente a la aplicación del cuestionario individual de la Encuesta Permanente de Hogares [INDEC \(2018\)](#) del tercer trimestre de 2018, que tiene 56879 casos. Las variables están codificadas, tanto en su nombre como en sus categorías. Por ejemplo, CH06 es la edad y los números representan años cumplidos, CH04 es sexo y sus categorías son 1 = varones, 2 = mujeres. Esas codificaciones están en el documento *Diseño de Registro de la Base Usuario de la EPH* ?

Cada columna de la matriz de datos contiene los valores que se han observado en cada uno de los individuos (filas); si se observa verticalmente, cada columna es una secuencia de números, que algunos programas denominan vector. Para el caso de CH04 (sexo), los primeros 25 valores de esta columna son:

```
## [1] 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1
```

Así presentada, la secuencia se llama serie simple y solo puede analizarse cuando son muy pocos casos, sería imposible en este ejemplo, con 56879 filas.

El más elemental de los resúmenes consiste en contar, para una variable determinada, cuantas apariciones tiene cada categoría. En la columna encabezada CH04 (sexo) pueden contarse cuántos unos (1s) y cuántos doses (2s) hay en total.

### 3.1 Tablas de distribución de frecuencia

Las tablas resumen los recuentos, en este ejemplo:

Tabla 3.1: Distribución por sexos.

Var1	Freq
1	27219
2	29660
Total	56879

Cuando se rotulan la variable y sus categorías:

Tabla 3.2: Distribución por sexos (categorías rotuladas).

sexo	casos
varones	27219
mujeres	29660
Total	56879

A la cantidad de casos, que proviene del recuento del número de unos y doses en la columna de sexo, se lo llama técnicamente frecuencia absoluta simple y se la indica como  $f$ . La tabla resulta entonces:

Tabla 3.3: Distribución por sexos: frecuencia absoluta.

sexo	$f$
varones	27219
mujeres	29660
Total	56879

El total de 56879 casos resulta de la suma de todas las frecuencias absolutas

simples, de manera breve, esto se indica así:

$$\sum_{i=1}^k f_i = n$$

Que se lee “La sumatoria de las frecuencias (f) desde 1 hasta k es igual al total de observaciones (n)”. En esa expresión:

- $\sum$  es el símbolo de suma o sumatoria e indica la realización de esa operación (sumar).
- Las  $f_i$  son las frecuencias absolutas simples. El subíndice i va cambiando entre categorías.
- La expresión  $i = 1$  señala desde qué valor de i se inicia la suma, así como k señala la última categoría a sumar. En el ejemplo de las tablas, el valor de k es 2 (solo hay dos categorías), por lo que solo hay dos frecuencias a sumar:  $f_1$  y  $f_2$ , correspondientes a las cantidades de varones y de mujeres.
- n es el total de casos (observaciones).

Lo mismo puede indicarse como:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$$

Que, en el caso de la tabla anterior resulta simplemente:

$$f_1 + f_2 = 27219 + 29660 = 56879$$

---

La **frecuencia absoluta simple** de cada valor de la variable es el número de casos que asumen ese valor. Se indica  $f$ .

---

Si se quisieran comparar estas frecuencias con las de otra matriz de datos que tuviera un número total de casos diferente de 56879, sería inadecuado usar los valores absolutos aquí presentados. Por ejemplo, la comparación de la distribución por sexos entre las personas que trabajan en el sector estatal y en el sector privado.

Tabla 3.5: Distribución por sexos según sector de trabajo.

sexo (sector estatal)	f
1	2468

sexo (sector estatal)	f
2	2810
Total	5278

sexo (sector privado)	f
1	10618
2	7276
Total	17894

No es clara la comparación entre el número de mujeres en los dos sectores, porque la cantidad total de casos es muy diferente, por eso es necesario comparar el peso relativo de las mujeres respecto del total, y no su número absoluto, se trata de su contribución al total de casos.

Para calcularlo se divide el número de mujeres en el total general. En el ejemplo, para el sector estatal es 0.532 que es el 53.2% de los casos. Es decir que las mujeres constituyen una proporción de 0.532 o bien que representan el 53.2% del total. Mientras que en la segunda tabla, la proporción de mujeres es 0.407 que es el 40.7% de los casos.

Estas proporciones se denominan frecuencias relativas simples, se simbolizan como  $f'$  (efe prima), y se calculan dividiendo la frecuencia absoluta por el total. Ahora puede completarse la tabla anterior agregando otra columna.

Tabla 3.7: Distribución por sexos sector privado: frecuencias relativas.

sexo (sector privado)	f	f'
1	10618	0.59
2	7276	0.41
Total	17894	1

El valor 1 que resulta de sumar las dos frecuencias relativas corresponde al 100% de los casos, es decir a las 17894 observaciones. Usando la misma simbología que antes:

$$\sum_{i=1}^k f'_i = 1$$

Que afirma que la suma de las frecuencias relativas simples ( $f$ ) es igual a uno. La salida para la variable ESTADO tiene la siguiente forma:

Tabla 3.8: Condición laboral.

ESTADO	f'
0	0.00
1	0.41
2	0.03
3	0.41
4	0.15
Total	1.00

Cuando se codifica, queda:

Tabla 3.9: Condición laboral (categorías rotuladas).

ESTADO	f'
entrevista no realizada	0.00
ocupado	0.41
desocupado	0.03
inactivo	0.41
menor de 10 años	0.15
Total	1.00

Al construir estas tablas de distribución de frecuencias se renuncia a una parte de la información que estaba en la matriz de datos. En ella se podía seguir por la fila a cada individuo y describirlo en cada uno de sus aspectos relevados (variables). Por el contrario, la tabla de distribución de frecuencias de sexo solo dice que hay 27219 varones y 29660 mujeres o, en la tabla de ESTADO, que hay 23398 ocupados, 1870 desocupados, etc., pero no se informa quiénes son. Esta pérdida de información es parte inevitable del proceso en el que se resumen datos, cuanto más sintética sea la presentación, tanta más información habremos perdido. Esto puede visualizarse como el proceso en el que se “toma distancia” de los datos originales: cada vez se tiene una mejor visión de conjunto, pero al mismo tiempo se pierden detalles.

---

La **frecuencia relativa simple** de cada valor de la variable es la proporción de casos que asumen ese valor. Se indica  $f'$ .

---

Los dos ejemplos mostrados hasta aquí corresponden a variables medidas a nivel nominal, por lo que los números no son más que códigos, no representan orden ni puede considerarse la distancia entre ellos. ¿Qué cambia con un nivel de medición más elevado? Con el mismo principio usado para las variables nominales, la forma de la tabla de distribución de frecuencia para la edad (CH06)

de estudiantes universitarios sería:

Tabla 3.11: Distribución por edades.

edad	f	f'
17	8	0.00
18	247	0.07
19	355	0.09
20	377	0.10
21	372	0.10
22	364	0.10
23	331	0.09
24	241	0.06
25	237	0.06
26	188	0.05
27	156	0.04
28	134	0.04
29	98	0.03
30	84	0.02
31	76	0.02
32	65	0.02
33	61	0.02
34	36	0.01
35	46	0.01
36	44	0.01
37	20	0.01
38	21	0.01
39	27	0.01
40	21	0.01
41	18	0.00
42	14	0.00
43	19	0.01
44	18	0.00
45	4	0.00
46	10	0.00
47	7	0.00
48	8	0.00
49	4	0.00
50	6	0.00
51	7	0.00
52	10	0.00
53	3	0.00
54	5	0.00
Total	3742	1.00

Sobre esta tabla se pueden calcular otras frecuencias, que respondan a preguntas como ¿cuántos alumnos de menos de 20 años fueron encuestados? Para saber eso, hay que contar cuántos casos hay con edades menores a 20: con 17, 18 o 19 años hay 610 casos, que provienen de sumar las frecuencias de esas categorías ( $8+247+355$ ). Así, además de indicar cuántos casos (o qué porcentaje de ellos) tiene determinados valores de la variable, resulta de interés mostrar cuantos (y también que porcentaje) tienen valores iguales o menores a uno determinado. Esto va a ser indicado por las frecuencias acumuladas, que responden a la pregunta por la cantidad de casos que hay por debajo de una categoría de la variable. Pero solo para variables medidas a escala ordinal o superior, porque con variables nominales no se pueden hacer juicios de orden, como decir que una categoría es mayor o menor que otra. El cálculo de las frecuencias acumuladas consiste en contar las frecuencias de la categoría que interesa y sumarla a las frecuencias de las categorías anteriores a ella. En el ejemplo de la distribución de las edades de estudiantes universitarios resulta:

Tabla 3.12: Distribución por edades: frecuencias acumuladas.

edad	f	f'	F	F'
17	8	0.002	8	0.002
18	247	0.066	255	0.068
19	355	0.095	610	0.163
20	377	0.101	987	0.264
21	372	0.099	1359	0.363
22	364	0.097	1723	0.46
23	331	0.088	2054	0.548
24	241	0.064	2295	0.612
25	237	0.063	2532	0.675
26	188	0.050	2720	0.725
27	156	0.042	2876	0.767
28	134	0.036	3010	0.803
29	98	0.026	3108	0.829
30	84	0.022	3192	0.851
31	76	0.020	3268	0.871
32	65	0.017	3333	0.888
33	61	0.016	3394	0.904
34	36	0.010	3430	0.914
35	46	0.012	3476	0.926
36	44	0.012	3520	0.938
37	20	0.005	3540	0.943
38	21	0.006	3561	0.949
39	27	0.007	3588	0.956
40	21	0.006	3609	0.962
41	18	0.005	3627	0.967
42	14	0.004	3641	0.971
43	19	0.005	3660	0.976

edad	f	f'	F	F'
44	18	0.005	3678	0.981
45	4	0.001	3682	0.982
46	10	0.003	3692	0.985
47	7	0.002	3699	0.987
48	8	0.002	3707	0.989
49	4	0.001	3711	0.99
50	6	0.002	3717	0.992
51	7	0.002	3724	0.994
52	10	0.003	3734	0.997
53	3	0.001	3737	0.998
54	5	0.001	3742	1
Total	3742	1.000		

Se agregaron dos columnas más, las frecuencias acumuladas absolutas (F) y relativas (F'). Las primeras se obtuvieron sumando a la frecuencia absoluta de cada categoría, las frecuencias absolutas de las categorías anteriores a ella. Así, la primera categoría tiene frecuencia acumulada igual a la absoluta simple, porque no hay ningún caso por debajo de 17 años; la segunda es 255, que proviene de contar los 247 de la segunda categoría y sumarle los 8 de la anterior y del mismo modo se construyen las siguientes. La última categoría tiene por frecuencia absoluta acumulada al total de casos (en el ejemplo 3742), porque todos (los 3742) están en esa categoría o por debajo de ella, es decir, todos tienen de 54 años para abajo. La lectura que hacemos de estas frecuencias es que, por ejemplo, “hay 987 alumnos que tienen 20 años o menos.”

---

La **frecuencia absoluta acumulada** de cada valor de la variable es la cantidad de casos que asumen ese valor y todos los valores menores a él. Se indica  $F$ .

---

La última columna de la tabla es la transformación en relativas de las frecuencias absolutas acumuladas y se logra con el mismo procedimiento que se usó para las relativas simples; el de dividir por el total de casos. Se denominan frecuencias acumuladas relativas. La lectura de una de estas frecuencias es, por ejemplo, que el 46% de los alumnos que respondieron tiene 22 años o menos. Notemos la diferencia con la frecuencia relativa simple: el 9.7% de los alumnos tiene exactamente 22 años. La frecuencia relativa simple es la fracción de casos que tienen una determinada categoría (o valor) de la variable, la frecuencia relativa acumulada es la fracción de casos que tiene un valor de la variable o cualquiera de los anteriores a ese valor. Por eso la lectura del ejemplo es “22 años” en la simple y “22 años o menos” en la acumulada.



---

La **frecuencia relativa acumulada** de cada valor de la variable es la proporción de casos que asumen ese valor y todos los valores menores a él. Se indica  $F'$ .

---

## 3.2 Recategorización

Como se señaló al final del capítulo 1, hay dos situaciones en que se apela a la presentación de los valores de la variable en forma agrupada, es decir que se recategoriza la variable en intervalos: si se trata de una variable discreta con muchas categorías (como la edad) o si es una variable continua.

### 3.2.1 Variable discreta con muchas categorías

La construcción de intervalos es una elección; podríamos optar por mostrar todas las categorías, con lo que quedaría una tabla grande, pero muy detallada; o bien agrupar para ganar en sencillez de presentación. Es muy común optar por la construcción de intervalos, de manera de mantener la cantidad de categorías entre cinco y diez. En tablas en que se precisa mostrar mucho detalle, se opta por la enumeración de todas las categorías.

### 3.2.2 Variable continua

Si la variable es continua la recategorización es necesaria, porque no es posible mostrar “todas las categorías” de una variable continua, ya que éstas son, en teoría, infinitas<sup>1</sup>. Para resolver el problema de la exclusión mutua no es posible pasar de un valor al siguiente, por lo que se utiliza un criterio de intervalos abiertos o cerrados. Esto quiere decir que si una categoría es 1,75 - 1,85, se entiende que entran en el intervalo todos quienes tengan estatura superior a 1,75 (excluido este valor) hasta 1,85 (incluido). Se dice que este intervalo es abierto a la izquierda (excluye al valor inicial) y cerrado a la derecha (incluye al valor final). Una persona de 1,75 se contará en el intervalo anterior: 1,65 - 1,75, que sí incluye al 1,75 y excluye al 1,65. A continuación se usará la convención de intervalos abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha, eso se indica  $(L_i; L_s]$ .

Se utilizan tres criterios para recategorizar variables: intervalos iguales, intervalos proporcionales e intervalos teóricos.

---

<sup>1</sup>La cantidad de valores depende de la precisión con que se haga la medición.

**3.2.2.1 Intervalos iguales:**

Se organizan los valores de la variable para lograr que el campo de variación quede dividido en tantos intervalos como se desee siendo ellos de igual amplitud. Si es una variable discreta y la cantidad de categorías originales no es múltiplo de número de intervalos que se desean, la cantidad de valores en cada uno no será idéntica, sino aproximadamente igual. La variable edad, con cuatro categorías queda, según este criterio, así:

Tabla 3.15: Categorización de la edad en intervalos de igual amplitud.

EdadCat	f
(17,26.2]	2720
(26.2,35.5]	756
(35.5,44.8]	202
(44.8,54]	64

Los intervalos son de la misma amplitud, pero el primero de ellos tiene más del 70% de las observaciones, con lo que se pierde detalle de la distribución.

**3.2.2.2 Criterio proporcional**

Este criterio busca que los intervalos incluyan aproximadamente a la misma cantidad de casos, por lo que su amplitud puede ser diferente. En el capítulo siguiente se verá que los puntos para establecer los cortes de intervalos, se llaman percentiles. Por ahora interesa que con este criterio se logran grupos homogéneos en términos de cantidad de observaciones. la edad de los estudiantes, con cuatro intervalos resulta así categorizada:

Tabla 3.16: Categorización de la edad en intervalos proporcionales.

EdadCat	f
(17,20]	979
(20,23]	1067
(23,27]	822
(27,54]	866

Ahora la distribución está más equilibrada (hay alrededor de 1000 casos en cada una), y los intervalos tienen amplitud diferente. El último intervalo, de 26 años de amplitud, tiene casi la misma cantidad de casos que el primero, que cubre tres años.

### 3.2.2.3 Criterio teórico

Aquí la decisión por el lugar donde establecer los puntos de corte para definir los intervalos es del investigador y debe estar fundamentada. Si se considera que la edad esperada de los alumnos observados es entre 19 y 20 años, se pueden hacer cuatro intervalos con quienes tienen menos de esa edad, quienes tienen la edad esperada, los que tienen más de esa edad y los más mayores (superan los 40 años). Los intervalos resultan así:

Tabla 3.17: Categorización de la edad con un criterio teórico.

EdadCat	f
(17,18]	247
(18,20]	732
(20,40]	2622
(40,54]	133

El intervalo (18,20] incluye las edades de 19 y 20 años, porque es abierto a la izquierda.

## 3.3 La presentación gráfica de los resultados

En la misma dirección de ofrecer una presentación de los datos recogidos que sea accesible para la interpretación, se muestran a continuación las representaciones gráficas que más se usan para describir información cuantitativa. Nuevamente aquí se debe aceptar la pérdida de parte de la información que se muestra, en aras del impacto visual y facilidad de lectura que proveen los gráficos. Cuando se trata de variables nominales, normalmente con pocas categorías, son adecuados los *gráficos de barras*. Veamos un ejemplo para la tabla de la “ESTADO”:

La categoría NA (not available) reúne a quienes no respondieron al cuestionario y a los menores de 10 años, que no se les hace la pregunta.

O bien, en relativos:

Para variables categóricas también se usa el *gráfico de sectores*

Este gráfico solo es adecuado cuando la variable tiene pocas categorías (no más de cuatro) y además cuando las frecuencias difieren sustancialmente. De lo contrario, resulta muy difícil apreciar diferencias entre ángulos, éstas son mucho más claras entre alturas de barras. La opción de agregar una leyenda con los porcentajes resuelve este problema, pero hace perder parte de la claridad visual del gráfico.

La representación gráfica de la tabla de frecuencias de variables cuantitativas (categorizadas), se llama histograma:

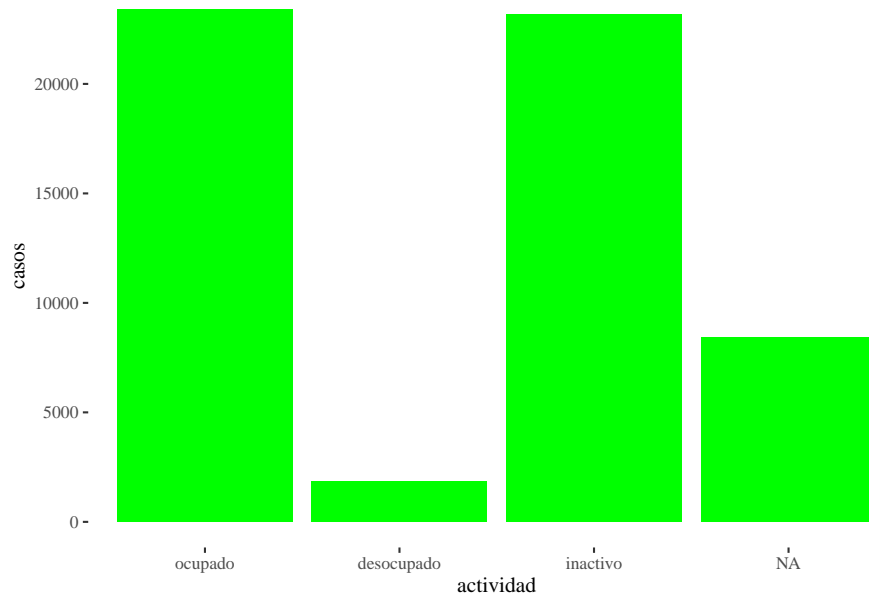


Figura 3.1: Condición laboral: frecuencias absolutas (barras adyacentes).

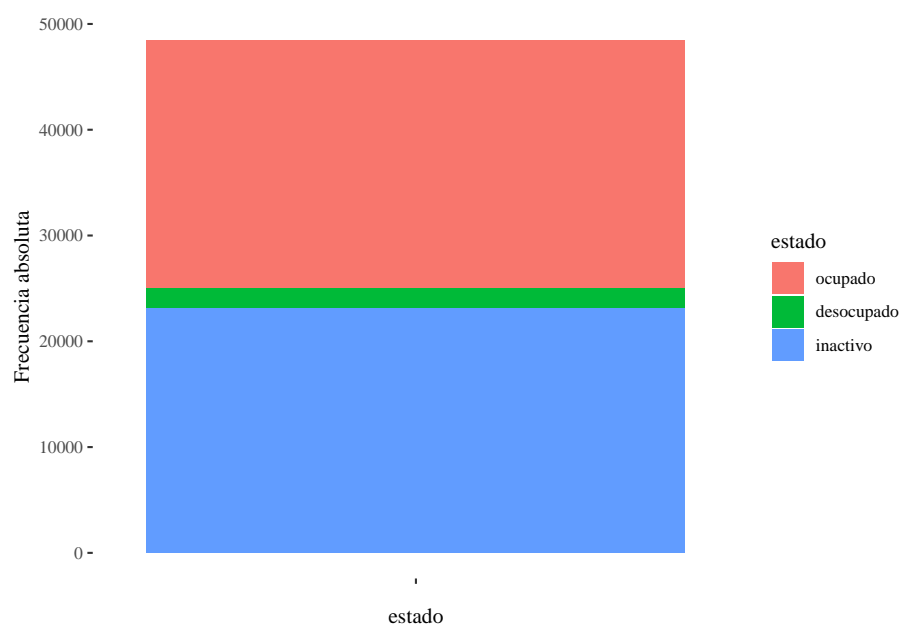


Figura 3.2: Condición laboral: frecuencias absolutas (barras apiladas).

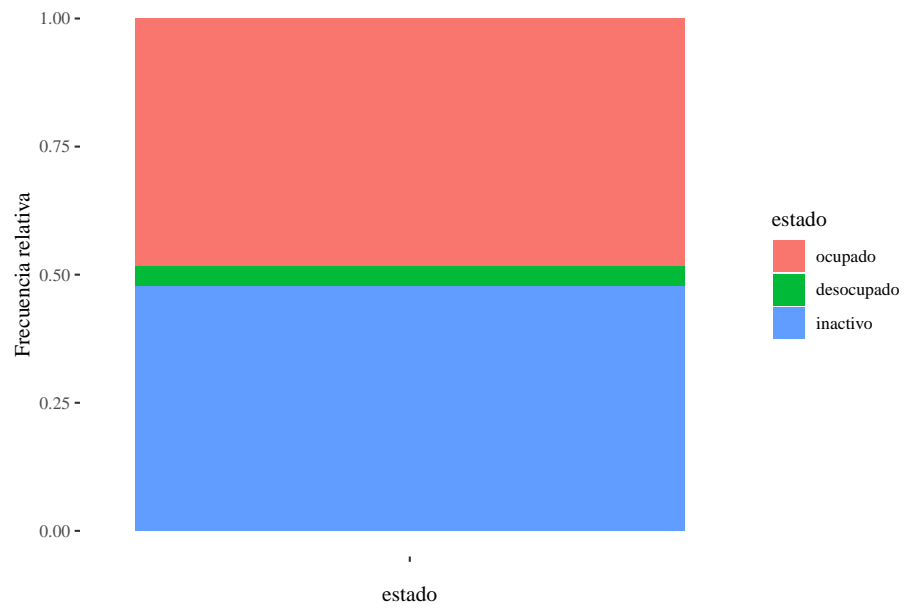


Figura 3.3: Condición laboral: frecuencias relativas (barras apiladas).

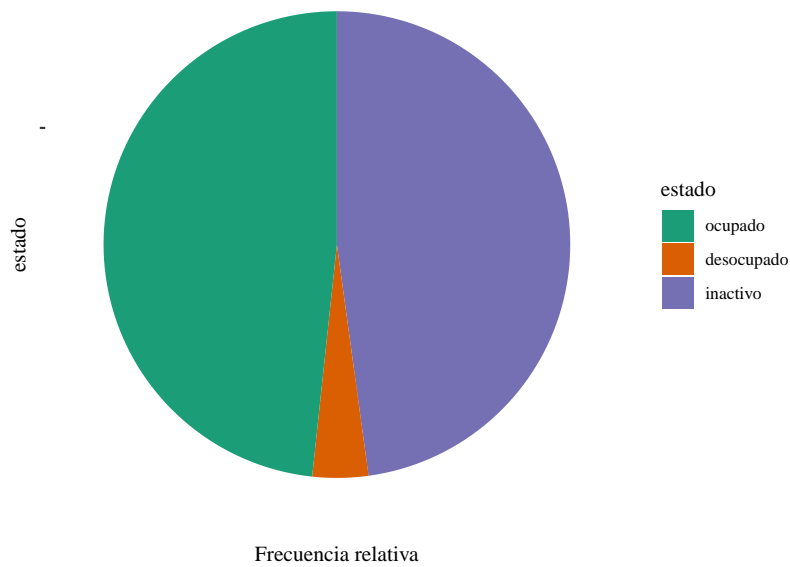


Figura 3.4: Condición laboral: frecuencias relativas (gráfico de sectores).

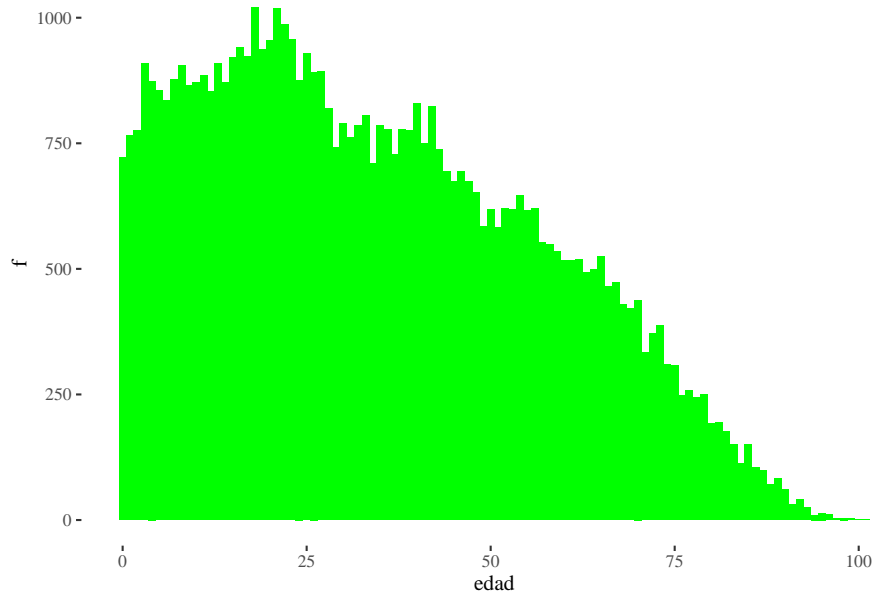


Figura 3.5: Histograma de edades.

El ancho de los rectángulos es la amplitud de las categorías que resultan de la categorización. Esta siempre se realiza con el criterio de intervalos iguales, que puede regularse, por ejemplo, si se toman intervalos de 5 años, el histograma queda:

Cuando estos rectángulos se unen en sus puntos medios por una poligonal, resulta el *polígono de frecuencias*:

En este gráfico se agregaron dos intervalos, uno anterior al primero y uno posterior al último, cuyas frecuencias son cero, con el objetivo de “cerrar” el polígono sobre el eje horizontal. El área que queda bajo este polígono es igual a la que encierran los rectángulos del histograma, y valdrá  $n$  si se grafican frecuencias absolutas ó 1 si son las relativas.

Si se muestra solo el polígono, se tiene una representación simplificada de la distribución que sirve para apreciar aspectos que se verán más adelante: forma, dispersión, simetría, etc. Además es preferible presentar en el eje vertical, frecuencias relativas antes que absolutas.

En variables cuantitativas es posible calcular frecuencias acumuladas, por lo que también ellas pueden representarse gráficamente. Si la variable es discreta, cada valor aporta su frecuencia, que “salta” en el valor siguiente, por eso el gráfico tiene forma escalonada. Nuevamente, con la variable edad (CH06) de la EPH



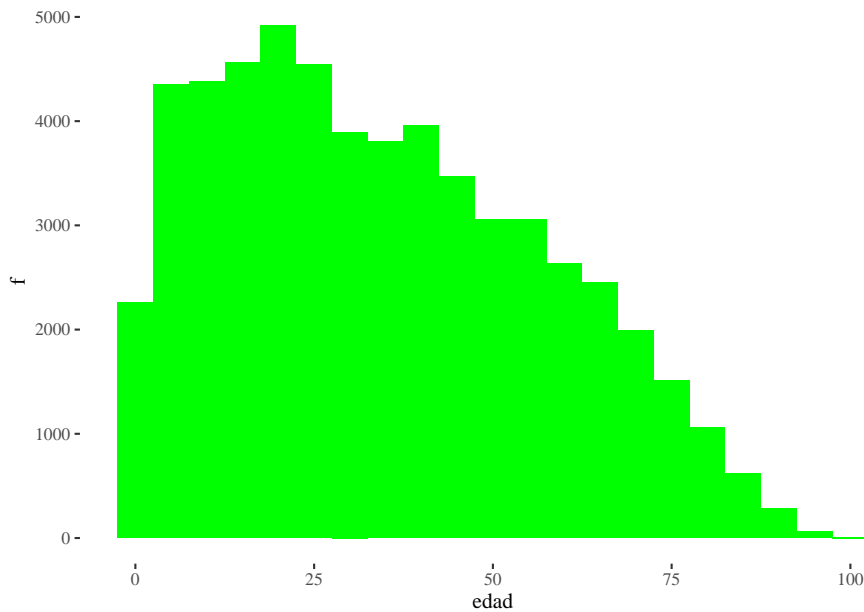


Figura 3.6: Histograma de edades: categorías de 5 años.

es:

En el que el eje horizontal se indican los valores de la variable discreta edad y en el vertical las frecuencias acumuladas de cada categoría (de cada valor discreto). Si la variable es continua, las frecuencias se van acumulando gradualmente a medida que aumenta el valor de la variable, el siguiente gráfico muestra las frecuencias acumuladas de los pesos de un conjunto grande de niños (de la base **bayley**):

Debido a que en la práctica las variables nunca son completamente continuas, siempre habra “escalones” cuyo tamaño es el de la minima medición posible de la variable (la apreciación del instrumento de medicion).

Este gráfico se llama ojiva de Galton y tiene otra virtud además de la claridad visual, ya que permite interpolar valores no observados, o que no aparecen en la tabla. Así, con el gráfico podemos responder a la pregunta ¿Qué proporción de niños tiene 2512 g o menos? La respuesta consiste en buscar el valor 2512 gramos en el eje x, e identificar la frecuencia acumulada que le corresponde.

En este ejemplo, la ordenada (valor en el eje vertical) correspondiente a los 2512 gramos es aproximadamente 0,17, este resultado se lee diciendo que, de esta muestra, el 17% de los niños nació con 2512 gramos o menos. En los capítulos siguientes veremos otras aplicaciones útiles de este procedimiento.

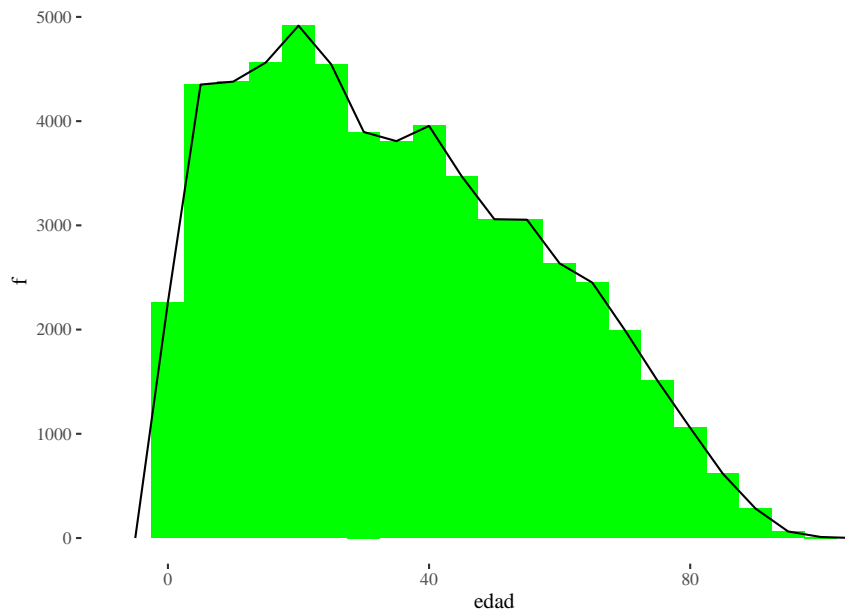


Figura 3.7: Polígono de frecuencias de las edades sobre el histograma.

Además, el establecimiento de los límites de los intervalos según el criterio proporcional, puede realizarse en base a este gráfico. Según cuántos intervalos se quiera construir, se ubican los puntos correspondientes a las frecuencias acumuladas en el eje vertical y se buscan los valores de la variable (eje horizontal), que delimitan los intervalos. Por ejemplo, para cuatro intervalos, cada uno debe contener aproximadamente el 25% de los casos, que corresponden a las frecuencias acumuladas de 25, 50 y 75%.

Los valores hallados corresponden a 2646, 2968 y 3320 gramos. Que quiere decir que un cuarto de los niños nació con pesos entre el mínimo y 2646, otro cuarto pesó entre 2646 y 2968 gramos, y así con los demás. La distribución de frecuencias de esta variable así categorizada resulta:

Tabla 3.18: Distribución de los pesos al nacer categorizados en cuatro intervalos proporcionales.

Peso.nacCat	f
(1302.5,2646.5]	113
(2646.5,2967.5]	113
(2967.5,3319.8]	113
(3319.8,4268.5]	114

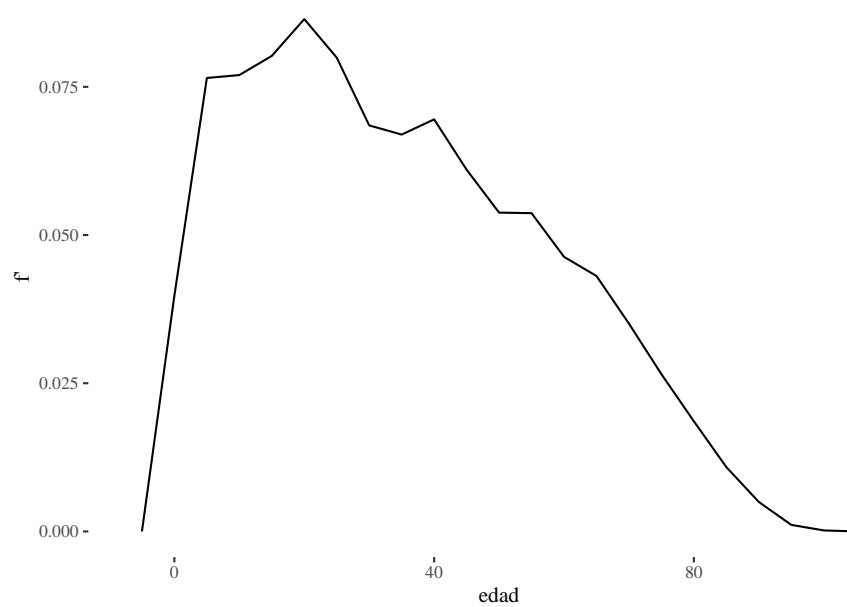


Figura 3.8: Polígono de frecuencias de las edades.

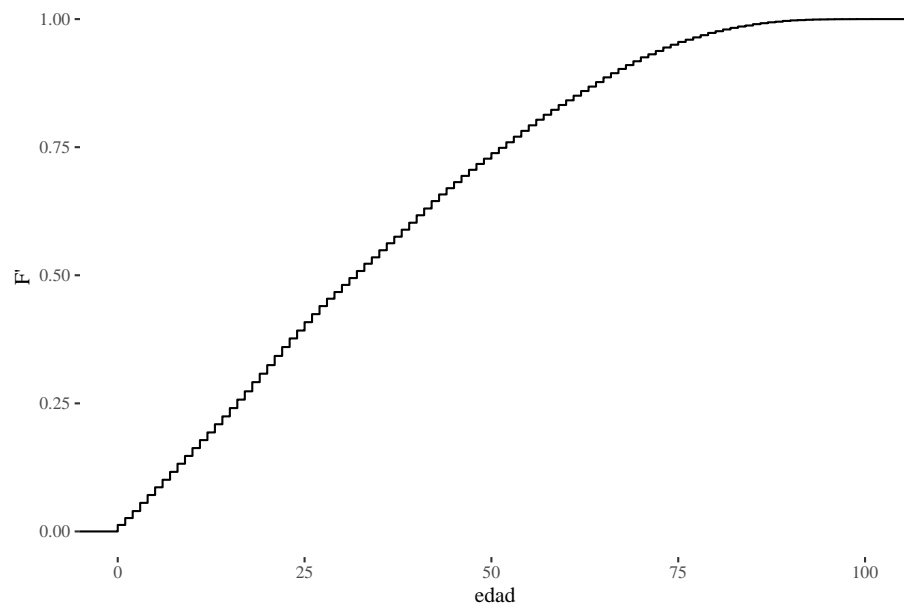


Figura 3.9: Ojiva de las edades.

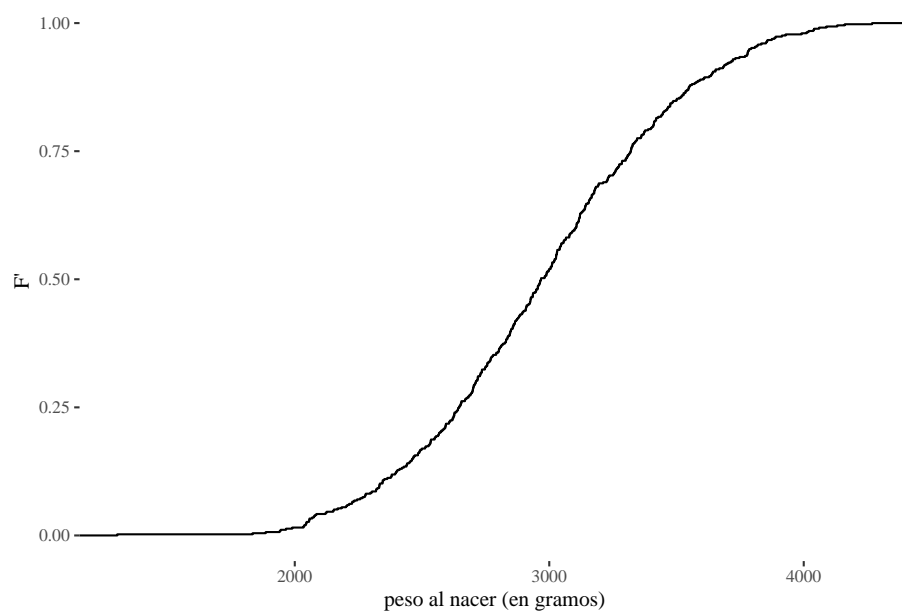


Figura 3.10: Ojiva de los pesos al nacer.

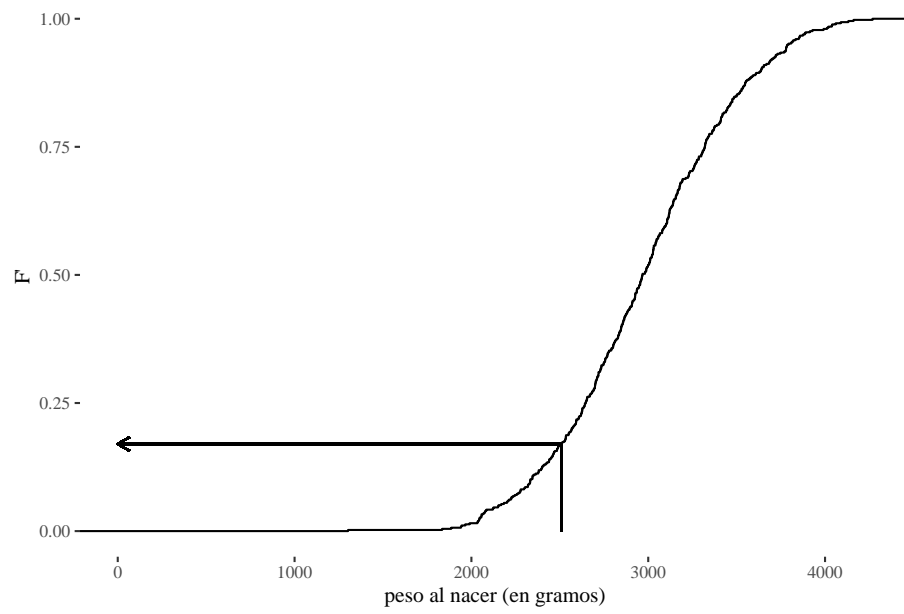


Figura 3.11: Estimación de la frecuencia acumulada para un valor del peso al nacer.

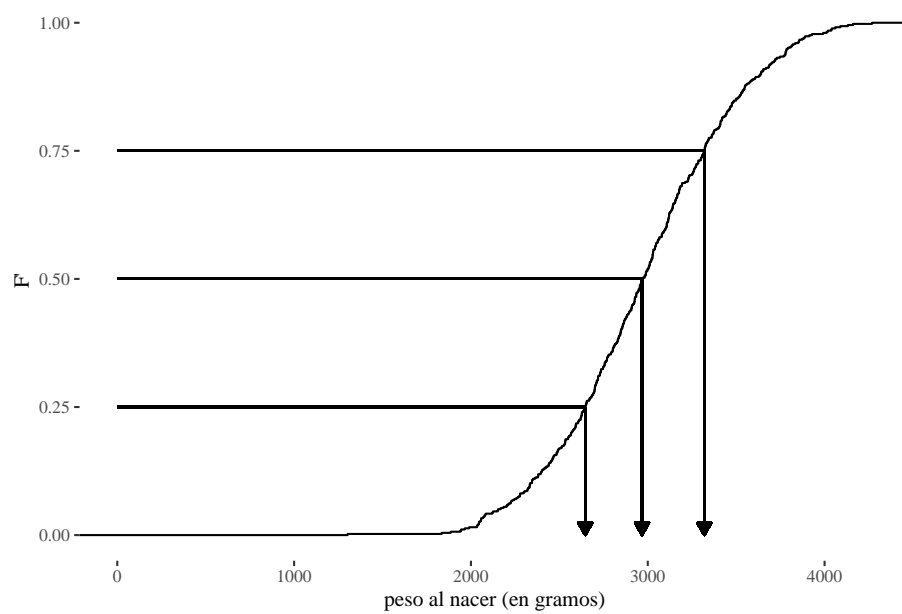


Figura 3.12: Identificación de los valores de la variable para determinadas frecuencias absolutas.





## Capítulo 4

# La expresión resumida de la información

La segunda etapa en la descripción de datos consiste en calcular medidas que los resuman, que los expresen de manera sintética. Esta etapa implica un nuevo alejamiento de la información bruta, ya que se pierde de vista no solo a los individuos -presentes en la matriz de datos-, sino también a las distribuciones de frecuencia. La ventaja de resumir es la posibilidad de presentar la información de modo muy sintético; con unas pocas medidas descriptivas se ofrece bastante información sobre los datos que se observan.

Estas medidas requieren operaciones de diferente nivel de complejidad, por lo que apelan a diferentes propiedades de las escalas de medición, entonces no serán las mismas las medidas que se puedan calcular en una escala nominal que en una ordinal, intervalar o proporcional.

El objetivo de describir el conjunto de datos se logrará indicando tres tipos diferentes de medidas. En primer lugar, haremos referencia a las medidas de **posición**. Estas medidas indican en torno a qué valores se distribuyen las observaciones. En segundo lugar, mencionaremos las medidas de **dispersión** (conocidas también como de **variabilidad**), que muestran si los datos están concentrados alrededor de las medidas de centralidad o si están alejados de esas medidas centrales. En tercer lugar, se describe la **forma** que toma la distribución, medida con dos indicadores: **simetría** y **curtosis**.

A los fines de la notación usada para referirse a cada una de estas medidas descriptivas, asumiremos que trabajamos sobre datos provenientes de una muestra, de la que  $n$  representa la cantidad de casos observados.

## 4.1 Medidas de posición

Como las operaciones que pueda hacerse entre las categorías dependen del nivel de medición de las variables, las medidas que se puedan calcular también dependerán del nivel de medición. Por eso las presentaremos separadamente para cada nivel, siempre recordando que las operaciones que son válidas a un determinado nivel de medición también son válidas para niveles más altos. Por ejemplo: lo que pueda hacerse con variables nominales, vale también para ordinales y métricas, con los ajustes de casa caso.

### 4.1.1 Variables nominales: proporciones

Cuando se trabaja con una variable de nivel nominal, una manera sintética de presentar la información que ofrece la tabla de distribución de frecuencias es indicando la **proporción** de casos que se encuentran en una determinada categoría. Se trata de la frecuencia relativa simple ( $f'$ ) de una categoría particular. La siguiente es la distribución de las respuestas a la pregunta “¿Con cuál de las siguientes frases está Ud. más de acuerdo?” (P8STGBS), proveniente de la base latinobarómetro:

¿Con qué frase está más de acuerdo?	f	f'
Se puede confiar en la mayoría de las personas	0.143	14.3
Uno nunca es lo suficientemente cuidadoso en el trato con los demás	0.857	85.7
Total	1	100

Podemos indicar la proporción de personas que respondió que se puede confiar caso como 0.143, que puede también expresarse como 14.3%. La elección de cuál categoría se elige para indicar la proporción depende de los objetivos de la descripción. Al elegir una categoría se llama la atención sobre ella, se la destaca, ya que la proporción restante incluye a todas las demás categorías, los “otros”. Esa proporción restante se obtiene restando de 1 (uno) la proporción indicada, o restando de 100 (cien) si ha expresado como porcentaje. En este ejemplo, diremos que 0.857 (que proviene de hacer 0.857) es la proporción de quienes no creen que se pueda confiar, o bien que éstos representan el 85.7% (85.7).

---

La **proporción** es la frecuencia relativa correspondiente a una categoría particular. Usualmente se expresa como porcentaje. Se indica como  $p$ .

---

Esta medida descriptiva se usa a menudo cuando la variable nominal tiene solo dos categorías (variable dicotómica), ya que se presenta la proporción de una de ellas e inmediatamente se sabe que el complemento es la proporción de la otra.

Esta medida ya apareció al definir la proporción como el cociente entre la

frecuencia propia de la categoría y el total de casos. Esta proporción puede también indicarse en variables de nivel de medición superior al nominal, pero no resulta de interés cuando hay gran cantidad de categorías. Así, por ejemplo, si se trata de la distribución de las notas de un parcial, no resulta útil indicar cuál es la proporción de cada calificación e indicar algo como “el 20% sacó 8” (lo que se vería en una tabla de distribución de frecuencias de las notas). Por el contrario, es común construir variables nominales a partir de las notas y, si es de mucho interés indicar, por ejemplo, la proporción de *promocionados*, o la proporción de quienes *quedaron libres*, luego de haber categorizado las notas con un criterio teórico (el que define quiénes son los promocionados, regulares y libres)

#### 4.1.2 Variables nominales: tasas

Se define habitualmente como **tasa** a la frecuencia relativa de un fenómeno en referencia a una población total, con la característica de tener en cuenta un período de tiempo. También es común el uso del término cuando se trata de hechos de poca incidencia, es decir que su frecuencia es pequeña. En esos casos se la suele expresar cada 1.000, cada 10.000, o inclusive cada 100.000 casos, en lugar de por ciento. Por ejemplo, la tasa de desocupación en Argentina se define como la proporción de personas desocupadas, respecto del total de personas activas. Estas últimas son quienes tienen una ocupación o que sin tenerla la están buscando activamente. Está compuesta por la población ocupada más la población desocupada arroba INDEC2018.

Las tasas de mortalidad por causas, indican la proporción de muertes ocurridas en un período de tiempo (usualmente un año), en un espacio geográfico (país, provincia, etc) por una determinada causa, respecto del total de la población que vivía a la mitad de ese año.

#### 4.1.3 Variables nominales: razones

La palabra **razones** se usa a menudo para referirse a cocientes calculados entre conjuntos que no tienen elementos en común. Por ejemplo, se llama razón de masculinidad a la cantidad de hombres por cada 100 mujeres que hay en una población. Se obtiene dividiendo el total de varones por el total de mujeres (y luego multiplicando por 100), que son dos conjuntos que no se superponen. Esta medida se conoce también como índice de masculinidad.

Según el censo de 2010, la siguiente es la distribución por sexos de la población de Argentina en ese momento:

sexo	personas	prop.sexos
varones	19523766	0.487

sexo	personas	prop.sexos
mujeres	20593330	0.513
Total	40117096	1.000

La proporción de varones es 48.7% y la de mujeres de 51.3%; se calculan respecto de la población total. La razón de feminidad se obtiene dividiendo el total de mujeres en el de varones y a la inversa para la de masculinidad. El cociente  $\frac{20593330}{19523766} * 100$ , que es 105.5 indica que hay en la población 105 mujeres por cada 100 varones.

La diferencia entre una razón y una tasa es que en la primera, el numerador no está incluido en el denominador. Las tasas a veces son llamadas **ratio**.

#### 4.1.4 Variables nominales: el modo

El **modo**, o **moda**, o **valor modal** es el valor de la variable (la categoría) que tiene la mayor frecuencia. Dicho de otra manera, el valor de la variable más frecuentemente observado<sup>1</sup>. Esta medida no requiere ningún cálculo, no exige ninguna propiedad de la escala de medición, por lo tanto se puede indicar en variables desde el nivel nominal, es decir en todos los niveles de medición.

Por ejemplo, la variable *carrera que cursa*, tiene la siguiente distribución:

carrera	f	f'
Educación	44	0.29
Psicología	48	0.32
Psicopedagogía	58	0.39
Total	150	1.00

El modo es Psicopedagogía, que es la categoría de mayor frecuencia. Debe cuidarse de no cometer el error de señalar la frecuencia 58 como el modo; el modo no es la frecuencia más alta, sino la categoría de la variable que tiene mayor frecuencia. Para hallarlo, se identifica la más alta de las frecuencias y se señala la categoría que le corresponde. Puede usarse la frecuencia absoluta o la relativa para determinar cuál es el modo de la distribución.

La pregunta “¿Con cuál de las siguientes frases está Ud. más de acuerdo?” (P8STGBS), procedente de la base Latinobarómetro, tiene la siguiente distribución de frecuencias:

<sup>1</sup>Esta es la idea que transmite el lenguaje coloquial: cuando algo es “la moda, es lo que más comúnmente (frecuentemente) se ve.

P8STGBS	f
La democracia es preferible a cualquier otra forma de gobierno	10785
En algunas circunstancias, un gobierno autoritario puede ser preferible a uno democrático	2526
A la gente como uno, nos da lo mismo un régimen democrático que uno no democrático	5075

Allí, la categoría modal es la que privilegia a la democracia como sistema de gobierno.

Si se trata de una variable de mayor nivel de medición, no hay ninguna diferencia. La variable *concepto que los docentes asignan a los alumnos* tiene la distribución de frecuencias siguiente:

concepto	f
Excelente	150
Muy bueno	350
Bueno	200
Satisfactorio	120
No satisfactorio	50
Total	870

En este ejemplo, 350 es la frecuencia más alta, por lo tanto, la categoría que a ella corresponde es el modo: el modo de la distribución es “Muy bueno”.

---

El **modo** es la categoría -o el valor- de la variable que tiene mayor frecuencia. Se indica  $M_o$ .

---

Cuando se trabaja sobre variables intervalares o proporcionales discretas no hay diferencia en la identificación del modo de la distribución. El *número de materias que tienen aprobadas alumnos que han terminado de cursar el primer año* de su carrera se distribuye así:

Cantidad de materias aprobadas	f
0	30
1	150
2	200
3	300
4	250
5	200
6	20
Total	1150

En esta distribución, el modo es 3 materias aprobadas ( $M_o = 3$ ), que es la categoría que tiene mayor frecuencia. Expresamos esto como “la mayor cantidad de alumnos que terminaron de cursar primer año han aprobado tres materias”.

Puede suceder que en una distribución no haya una única categoría de mayor frecuencia, sino que dos o más compartan la mayor frecuencia. Para 160 alumnos clasificados según la facultad en que cursan su carrera, tenemos:

Facultad a la que pertenece	f
Arquitectura	50
Ingeniería	40
Psicología	50
Sociales	20
Total	160

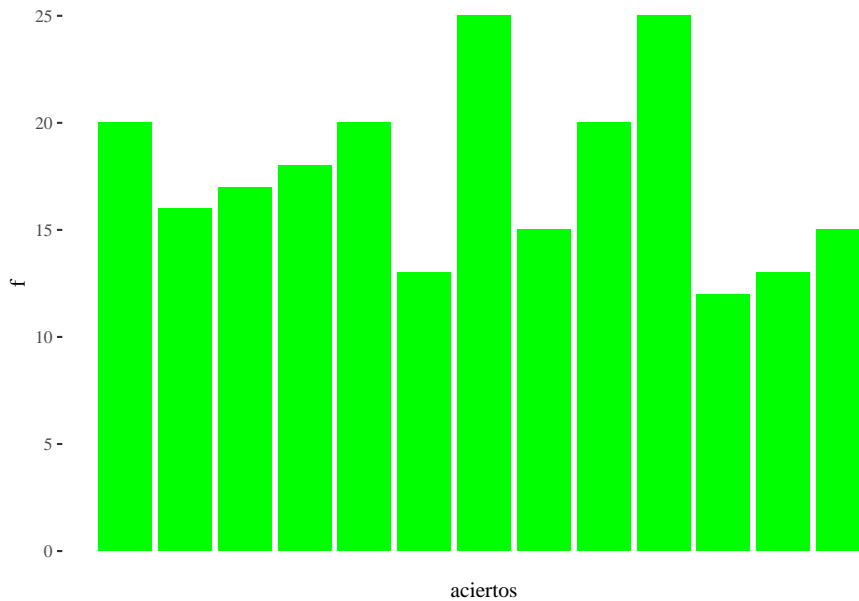
Vemos aquí que hay dos categorías que presentan la mayor frecuencia: Arquitectura y Psicología. Decimos en este caso que la distribución es **bimodal** que quiere decir que tiene dos modos.

---

Una distribución es **bimodal** cuando dos categorías tienen la mayor frecuencia. Si son más las categorías que comparten la mayor frecuencia, la distribución se denomina **multimodal**.

---

Una representación gráfica de una distribución bimodal, para la variable *número de respuestas correctas en una prueba de opción múltiple*, la siguiente:



Como modo en 6 y 9 aciertos, por eso se llama bimodal.

La moda tiene el inconveniente de ser independiente de la mayor parte de los datos, por lo que es sensible a cambios en los valores de la distribución. En efecto, las siguientes dos muestras de 130 escuelas tienen la misma moda ( $M_o = P\acute{b}lica$ ), aunque son muy dispares:

Gestión de la escuela	f	Gestión de la escuela	f
Pública	50	Pública	100
Privada laica	45	Privada laica	20
Privada confesional	35	Privada confesional	10
Total	130	Total	130

#### 4.1.5 Variables ordinales: percentiles

Como ya hemos visto, cuando las categorías de la variable están ordenadas pueden hacerse juicios como “mayor que” ( $>$ ) o “menor que” ( $<$ ), y el nivel de medición es ordinal. En este tipo de variables puede calcularse un conjunto de medidas de posición, que usan esa propiedad: la del orden entre categorías. Se trata de los **percentiles**, que se podrán también calcular para escalas superiores (intervalar y proporcional) pero no para escalas nominales, en las que el orden entre categorías no está presente. Los percentiles usan las frecuencias relativas acumuladas, por eso solo existen para variables de nivel superior al nominal. Veamos la presentación por medio de un ejemplo, con la tabla siguiente que

tiene calculadas las frecuencias acumuladas y se muestran solo ellas:

edad	F'
17	0.00
18	0.07
19	0.16
20	0.26
21	0.36
22	0.46
23	0.55
24	0.61
25	0.68
26	0.73
27	0.77
28	0.80
29	0.83
30	0.85
31	0.87
32	0.89
33	0.91
34	0.92
35	0.93
36	0.94
37	0.95
38	0.95
39	0.96
40	0.96
41	0.97
42	0.97
43	0.98
44	0.98
45	0.98
46	0.99
47	0.99
48	0.99
49	0.99
50	0.99
51	1.00
52	1.00
53	1.00
54	1.00

La frecuencia acumulada 0.26 indica que el 26% de los estudiantes tiene 20 años o menos. Se dice que el valor 20 años es el percentil 26 y se indica  $P_{26}$ . El



“percentil” en sí mismo no es una medida descriptiva, para que lo sea se debe especificar *qué* percentil es el que se calcula. En este ejemplo, cada frecuencia acumulada conduce a un percentil particular. El percentil 68 de la variable es 25 años, y se escribe  $P_{68} = 25$  años. Estas medidas se definen como el valor de la variable que deja por debajo un determinado porcentaje de observaciones.

Los percentiles tienen utilidad como medidas resumen cuando hay un volumen importante de observaciones, de lo contrario, es preferible mostrar la serie de datos. Su aplicación es que permiten describir cada valor de la variable de manera relativa al conjunto completo. Si la nota de un individuo corresponde al percentil 95, se sabe que es una nota alta, porque el 95% de todos los sujetos tiene una nota con esa o inferior. Eso puede expresarse diferente como: solo el 5% del conjunto tiene nota superior a la de él.

A continuación veremos algunas medidas que se definen del mismo modo que los percentiles; en base a las frecuencias relativas acumuladas.

#### 4.1.6 Variables ordinales: la mediana

La **mediana** es el percentil 50, es decir que se define como el valor de la variable que deja por debajo la mitad del total de observaciones. Es importante tener en cuenta que se trata de la mitad de los casos y no la mitad de las categorías. La siguiente distribución presenta en serie simple ordenada el número de sesiones de psicoterapia que recibieron 9 pacientes internados en un hospital:

2, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 19, 50

La mediana de estos datos es 7, porque es el valor que deja cuatro casos por debajo y también cuatro casos por encima. Atención a que la serie simple debe estar ordenada para poder identificar a la mediana.

Si la cantidad de observaciones fuera par como por ejemplo:

2, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 19

El punto de corte correspondiente a la mitad de las observaciones se ubica entre 5 y 7, en este caso, la mediana es el promedio entre los dos valores centrales, que es 6.

Cuando hay valores repetidos en la parte central no resulta posible indicar la mediana, por ejemplo si la serie fuera:

2, 3, 7, 7, 7, 10, 15, 19

No puede señalarse a 7 como la mediana, porque es superado por tres valores (10, 15 y 19) pero supera solo a dos (2 y 3).

La mediana es una medida muy adecuada cuando se necesitan resumir datos que provienen de escalas ordinales o de nivel superior. Sin embargo, su cálculo no aporta nada en series simples con pocos casos (como los que acabamos de ver) ya que allí es más sencillo mostrar el conjunto completo de datos y no usar medidas resumen. Los ejemplos sirven para ilustrar el concepto, pero no se usa en la práctica. Las operaciones de resumen se justifican cuando se tiene un conjunto grande de datos.

---

Se denomina **mediana** al valor de la variable que deja por debajo a la mitad de las observaciones. La mediana deja la misma cantidad de casos por debajo y por encima de ella. Se indica  $M_{dn}$ .

---

Veamos la forma de reconocer a la mediana cuando los datos están presentados en una distribución de frecuencias. La siguiente es una clasificación de hogares por nivel socioeconómico:

Nivel socioeconómico	f (número de hogares)	F
Marginal	40	40
Bajo	100	140
Medio-bajo	120	260
Medio	150	410
Alto	30	440
Total	440	

El valor de la variable que acumula el 50% de los casos, es el que ocupa el lugar 220, que es mitad de los 440 casos del total. La serie ordenada de esta distribución, coloca a los 40 hogares marginales en los primeros 40 lugares, pero indistintamente, porque no hay orden entre los hogares al interior de la categoría. Según la tabla, hasta la categoría “medio-bajo” se acumulan 260 hogares y hasta la categoría anterior hay 140 acumulados. De manera que el hogar que ocupa el lugar 220 (de la serie ordenada) es uno de los que se encuentran en la categoría “medio-bajo”. Diremos así que la mediana de esta distribución es “medio-bajo”. Como puede verse, esta categoría no acumula exactamente la mitad de las observaciones, pero es la que contiene a la observación que supera a la mitad y es superada por la otra mitad. Por esa razón la leemos como la mediana, diciendo que la mitad de los hogares tiene un nivel socioeconómico medio-bajo o inferior a ese. Decir que el que acumula 220 casos es “uno de los hogares de la categoría medio-bajo” es impreciso, porque todos los hogares son equivalentes en su nivel socioeconómico al interior de la categoría.

Esta imprecisión también aparece si se trata de una variable cuantitativa discreta. Si la variable es el *número de síntomas* a partir de los cuales fueron

diagnosticados de esquizofrenia un conjunto de pacientes<sup>2</sup>:

Cantidad de síntomas	f (número de pacientes)	F
2	30	30
3	60	90
4	70	160
5	90	250
Total	250	

La mitad del número total de casos es de 125 ( $250/2$  ó  $(1/2) * 250$ ), ¿cuál es el caso que ocupa ese lugar? Vemos que hasta 3 síntomas se acumulan 90 pacientes y 160 hasta los 4. El paciente que ocupa el puesto 125 en la serie simple ordenada es uno de los que fueron diagnosticados a partir de 4 síntomas. Por esa razón indicamos a la mediana con ese valor: 4,  $M_{dn} = 4$ . Nuevamente encontramos que no es exactamente el valor que acumula la mitad, sino uno de los que están en la categoría dentro de la cual se acumula la mitad de los casos. La primera categoría que tenga una frecuencia acumulada superior al 50% será la que contenga a la mediana. Es así porque la clase anterior no alcanza a acumular la mitad de las observaciones. La lectura del resultado es que la mitad de los pacientes fue diagnosticada de esquizofrenia en presencia de cuatro síntomas o menos.

Sea la variable *número de materias aprobadas*:

Número de materias aprobadas	f	F
0	30	30
1	150	180
2	200	380
3	300	680
4	250	930
5	200	1130
6	20	1150
Total	1150	

La mitad de 1150 es 575, la primera frecuencia acumulada que supera a 575 es 680, que corresponde al valor 3. La mediana de esta distribución es entonces tres materias aprobadas y diremos que el 50% de los alumnos aprobó tres materias o menos.

Cuando se trata de variables de nivel intervalar o proporcional y con categorías

<sup>2</sup>El manual DSM IV indica como síntomas característicos a dos (o más) de los siguientes, cada uno de ellos presente durante una parte significativa de un período de 1 mes: ideas delirantes, alucinaciones, lenguaje desorganizado (p. ej., descarrilamiento frecuente o incoherencia), comportamiento catatónico o gravemente desorganizado, síntomas negativos, por ejemplo, aplanamiento afectivo, alogia o abulia.

agrupadas, el cálculo anterior puede refinarse. Así, primero se identifica la categoría (el intervalo) en que se encuentra la mediana, igual que en los dos ejemplos anteriores y luego se interpola dentro del intervalo para encontrar su valor exacto.

Tiempo de reacción (en segundos)	f	F
1.0 - 1.5	5	5
1.5 - 2.0	7	12
2.0 - 2.5	6	18
2.5 - 3.0	3	21
3.0 - 3.5	8	29
3.5 - 4.0	5	34
Total	34	

La mitad de las 34 observaciones es 17, por lo que debe encontrarse una observación que tenga frecuencia acumulada de 17. Ese valor no aparece en la F, el primero que lo supera es 18, entonces la mediana estará en el intervalo 2,0-2,5. Esto es así porque hasta 2,0 se acumulan 12 casos (la F de la categoría anterior) y hasta 2,5 se acumulan 18. Nuestros 17 casos se acumulan para un valor de la variable que está entre 2,0 y 2,5.

Debemos ahora encontrar qué valor exactamente es la mediana, dentro del intervalo 2,0-2,5. La fórmula para este procedimiento es la siguiente:

$$M_{dn} = l_i + i * \left( \frac{\frac{n}{2} - F_d}{f_p} \right)$$

En la que:

- $l_i$  indica el límite inferior del intervalo en que se encuentra la mediana, en este caso es 2.0.
- $i$  es la amplitud del intervalo, es decir la diferencia entre los límites 2.5 – 2.0 = 0.5.
- $\frac{n}{2}$  es la mitad del número total de observaciones, es este caso, 17.
- $F_d$  es la frecuencia acumulada por debajo de la categoría que contiene la mediana, en esta tabla es 12.
- $f_p$  es la frecuencia propia del intervalo en que se encuentra la mediana. Es la frecuencia absoluta (no la acumulada), en este ejemplo es 6.

Reemplazando resulta:

$$M_{dn} = 2.0 + 0.5 * \left( \frac{17 - 12}{6} \right) = 2.0 + 0.5 * \left( \frac{5}{6} \right) = 2.42$$

Conviene detenerse en el orden en que se realizaron las operaciones. El signo más (+) separa términos, por lo que debe primero resolverse el segundo de ellos y luego recién sumar 2.0. Un error frecuente es el de sumar  $2.0 + 0.5$  y luego multiplicar por el resultado del paréntesis, eso es incorrecto.

Por cierto que debe verificarse que el valor encontrado se ubique dentro del intervalo; en este ejemplo, la mediana no podría ser menor que 2.0 ni mayor que 2.5. Observemos también que el número de categorías de la variable, que es de 6, no participa en el cálculo de la mediana, de ningún modo se trata de una categoría que esté “al medio”.

El resultado obtenido nos dice, según la definición de la mediana que “el 50% de los sujetos experimentales reaccionó en un tiempo de 2.42 segundos o inferior”. Es muy importante la última parte de la lectura, porque cuando decimos “o inferior” incluimos los valores por debajo del indicado. De lo contrario, si se omite “o menos” se estaría diciendo que la mitad de los sujetos tardó *exactamente* 2.42 segundos.

La mediana encontrada, de 2.42, es un valor razonable a partir de la observación de la tabla: la categoría de la mediana acumulaba 18 casos, que es apenas más que la mitad de las observaciones (17), por lo que era de esperar que la mediana apareciera cerca del límite superior del intervalo, que es lo que sucedió.

Este procedimiento para calcular la mediana es imperfecto, porque supone que los valores están distribuidos de manera uniforme dentro de cada intervalo. Si los 6 valores que contiene el intervalo 2.0 – 2.5, fueran todos iguales a 2.01, por ejemplo, la mediana sería un número bastante menor al que se calculó con este método. El uso de la interpolación solo se justifica en situaciones en que la única información disponible es la tabla con los valores agrupados; por el contrario, si se cuenta con la matriz de datos, el cálculo debe hacerse usando todos los valores observados de la variable. Como esto es largo para hacer manualmente, se solicita a un software especializado.

#### *Variables métricas: la media o promedio*

Si se ha alcanzado un nivel de medición intervalar o proporcional, es posible hacer uso de las propiedades<sup>3</sup> que estas escalas tienen. Recordemos que además de designar y ordenar, las escalas intervalares conservan las distancias entre observaciones, y las proporcionales agregan la proporcionalidad de los valores absolutos y el carácter absoluto del cero. En este nivel los números que representan las categorías (o valores) pueden tratarse como tales y se puede operar con ellos. Antes de dar una definición de la media o promedio, veamos la idea intuitiva que tenemos, ya que se trata de una medida de mucho

<sup>3</sup>Propiedades que se agregan a las de las escalas de menor nivel, por lo que modo y mediana pueden calcularse e interpretarse también en las escalas métricas.

uso. Cuando queremos calcular un promedio “sumamos y dividimos por la cantidad de casos”. Así, si tres personas cometen 5, 8 y 12 errores cada uno, el promedio de esa variable (número de errores) es  $\frac{5+8+12}{3} = \frac{25}{3} = 8.33$ . Usaremos la expresión  $\bar{x}$  para referirnos a la media, con lo que el resultado se escribe:  $\bar{x} = 8.33$  errores.

¿Cómo extenderemos esta forma de cálculo al caso en que la variable no está presentada en serie simple sino en distribución de frecuencias? Recordando que la frecuencia indica la cantidad de veces que cada valor se repite, por lo que habrá que considerar cada valor tantas veces como lo indique su frecuencia absoluta simple. Veamos un ejemplo en el que se cuenta el número de materias aprobadas:

Número de materias aprobadas	f
0	30
1	150
2	200
3	300
4	250
5	200
6	20
Total	1150

El valor 0 (cero) está repetido 30 veces, lo que indica que hay 30 alumnos que no han aprobado aún ninguna materia. Del mismo modo, 150 alumnos aprobaron 1 materia, etc., por lo que si estuvieran presentados en serie simple, se sumarían los 1150 valores (30 veces el 0, 150 veces el 1, etc.) y esa suma se dividiría por 1150. Para hacerlo sobre la distribución de frecuencia, se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia (que es equivalente a sumarlo tantas veces como aparece) y se divide por el total de casos. Resulta:

$$\bar{x} = \frac{0 * 30 + 1 * 150 + 2 * 200 + 3 * 300 + 4 * 250 + 5 * 200 + 6 * 20}{1150} = 3.10$$

La expresión formal de este cálculo es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i * f_i}{n}$$

En la que  $x_i$  es cada valor de la variable,  $f_i$  es su frecuencia absoluta simple,  $k$  es el número de categorías y  $n$  es el total de observaciones. La fórmula indica que cada valor de la variable ( $x_i$ ) se multiplica por su frecuencia ( $f_i$ ), se suman desde el primero ( $i = 1$ ) hasta el último ( $k$ ) y el resultado se divide por el total de casos ( $n$ ).

Veamos que no se trató como podríamos haber pensado rápidamente, de sumar desde el cero hasta el seis y dividir por siete. Haber hecho eso habría implicado dos errores: el primero es el de no considerar cuántas veces está repetido cada valor (su frecuencia absoluta simple), el segundo es el de confundir el número de casos (1150) con el número de categorías (7). Este último error puede provenir de una confusión entre la presentación en serie simple o en distribución de frecuencias. Cuando se observa una serie simple, los valores “sueltos” de la variable coinciden con sus categorías, pero cuando se agrupa, cada categoría incluye cierta cantidad de casos que tienen el mismo valor, lo cual está indicado en la frecuencia de cada categoría.

En el ejemplo anterior entonces, el número promedio de materias aprobadas es 3.10. Este número no es entero y no es un valor que se pueda observar; nadie tiene 3.10 materias aprobadas. Sin embargo, es valioso para caracterizar a la distribución completa y para hacer comparaciones. Por ejemplo, si en un grupo de alumnos la media es de 3,10 materias aprobadas y en otro de 3.90; puede decirse que en el segundo grupo los alumnos han aprobado -en promedio-, más materias; aunque ninguno haya aprobado 3.10 ni 3.90 materias.

Por el momento ofreceremos una definición operacional de la media, más adelante podrá darse una definición conceptual, basada en sus propiedades.

---

La **media** (o promedio) es un valor de la variable obtenido sumando todas las observaciones multiplicadas por su frecuencia absoluta y dividiendo el resultado en el número total de casos. Se indica como  $\bar{x}$  (equis media).

---

Cuando la distribución de frecuencias presenta los datos agrupados, aparece el problema de no tener un único valor en cada categoría. Por ejemplo y nuevamente en el caso de los tiempos de reacción:

Tiempo de reacción (en segundos)	f
1.0 - 1.5	5
1.5 - 2.0	7
2.0 - 2.5	6
2.5 - 3.0	3
3.0 - 3.5	8
3.5 - 4.0	5
Total	34

Aquí no hay un valor único en cada categoría, sino un intervalo que incluye diferentes valores. Esto se resuelve considerando, para cada intervalo, su **marca de clase** (el punto medio), que es el promedio de los extremos de cada intervalo. La siguiente tabla agrega las marcas de clase de cada intervalo, indicadas como  $x'$ :

Tiempo de reacción (en segundos)	x'	f
1.0 - 1.5	1.25	5
1.5 - 2.0	1.75	7
2.0 - 2.5	2.25	6
2.5 - 3.0	2.75	3
3.0 - 3.5	3.25	8
3.5 - 4.0	3.75	5
Total		34

Ahora puede usarse el método anterior para calcular la media, tomando las marcas de clase como los valores de la variable:

$$\bar{x} = \frac{1.25 * 5 + 1.75 * 7 + 2.25 * 6 + 2.75 * 3 + 3.25 * 8 + 3.75 * 5}{34} = 2.5$$

Resulta así que el tiempo promedio de reacción es de 2.5 segundos. Este procedimiento es impreciso, porque asigna a todos los casos que están dentro de cada categoría el mismo valor (el centro del intervalo) y se justifica en situaciones en que la única información disponible es la tabla con los valores agrupados; si se cuenta con la matriz de datos, el cálculo debe hacerse usando todos los valores observados de la variable, recurriendo a un software especializado cuando sean muchos datos.

Si bien la media es una medida muy valiosa para resumir un conjunto de datos, a veces se hace un uso abusivo de ella, al aplicarla a variables que no tienen el nivel de medición adecuado para autorizar su uso. Un ejemplo de esto es el caso de las calificaciones escolares, que solo permiten ordenar a los alumnos según los resultados, pero que no implican la proporcionalidad de los valores (quien obtiene 10 no sabe el doble que quien obtiene 5). Aun así, es habitual que se calcule incorrectamente el “promedio de las notas”.

#### 4.1.7 Los cuartiles

Si la variable tiene un nivel de medición ordinal o superior, entonces podemos usar el mismo razonamiento con el que definimos la mediana para hacer cortes más finos en una distribución de frecuencia. Así, si la mediana nos indica el valor de la variable que deja por debajo la mitad de los casos, es lícito preguntar también por el valor que deja por debajo un cuarto de los casos, o también el que deja por debajo las tres cuartas partes de las observaciones. Estos puntos de corte se denominan respectivamente: primer cuartil y tercer cuartil.

El primer cuartil es el valor de la variable que deja por debajo un cuarto, o el 25% del total de observaciones.

El tercer cuartil es el valor que deja por debajo las tres cuartas partes o el 75% del total de observaciones. Como se ve, tanto el modo de cálculo como la



interpretación son análogos a la mediana. Veamos su aplicación a los ejemplos anteriores:

Número de materias aprobadas	f	F
0	30	30
1	150	180
2	200	380
3	300	680
4	250	930
5	200	1130
6	20	1150
Total	1150	

Para encontrar el primer cuartil será ahora necesario buscar un cuarto del total de casos:  $287.5$  ( $\frac{1}{4} * 1150$ ). La pregunta ahora es ¿cuál es la primera frecuencia acumulada que supera a  $287.5$ ? se trata de  $380$ , que corresponde al valor  $2$  y éste es entonces el primer cuartil. Leemos así que un cuarto del total de alumnos tiene dos materias aprobadas o menos. También puede decirse que el  $25\%$  de los alumnos aprobó dos materias o menos. Si se toma la cantidad de materias aprobadas como un indicador del ritmo más rápido o más lento de avance en la carrera, aquí se lee que el  $25\%$  que avanza con más lentitud no llegó a aprobar tres materias

---

El **primer cuartil** es el valor de la variable que deja un cuarto ( $25\%$ ) de los casos por debajo y tres cuartos ( $75\%$ ) por encima. Se indica  $Q_1$ .

---

Idéntico razonamiento seguimos para calcular el tercer cuartil: las tres cuartas partes del total es  $862.5$  ( $\frac{3}{4} * 1150$ ). Buscamos luego la primera frecuencia acumulada que supera a ese valor y hallamos que es  $930$  y que su categoría correspondiente es  $4$ . Entonces el tercer cuartil es  $4$  materias aprobadas. La lectura será: las tres cuartas partes (o el  $75\%$ ) de los alumnos aprobó cuatro materias o menos. Esto último implica que el  $25\%$  restante aprobó más de cuatro materias. Así, el grupo que avanza más rápido en la carrera aprobó más de cuatro materias en su primer año.

---

El **tercer cuartil** es el valor de la variable que deja tres cuartos ( $75\%$ ) de los casos por debajo y un cuarto ( $25\%$ ) por encima. Se indica  $Q_3$ .

---

Cuando se trata de distribuciones con categorías agrupadas, procedemos como antes con una leve modificación en la fórmula:

Tiempo de reacción (en segundos)	f	F
1.0 - 1.5	5	5
1.5 - 2.0	7	12
2.0 - 2.5	6	18
2.5 - 3.0	3	21
3.0 - 3.5	8	29
3.5 - 4.0	5	34
Total	34	

Para el primer cuartil debe hallarse la primera frecuencia que supera a un cuarto de las observaciones, de las 34, un cuarto es 8.5 y la primera frecuencia mayor que ese número es 12, por lo que el primer cuartil se encuentra en la categoría 1.5-2.0. Para interpolar en valor exacto usamos una expresión equivalente a la de la mediana:

$$Q_1 = l_i + i * \left( \frac{\frac{n}{4} - f_d}{f_p} \right)$$

En la que se cambia  $\frac{n}{2}$  por  $\frac{n}{4}$  y lo demás mantiene el mismo significado. Aplicándola a estos datos resulta:

$$Q_1 = 1.5 + 0.5 * \left( \frac{8.5 - 5}{7} \right) = 1.5 + 0.5 * (0.5) = 1.75$$

Leemos en resultado como: el 25% de los sujetos reaccionó en un tiempo de 1.75s o menos.

Para el tercer cuartil la fórmula se transforma en:

$$Q_3 = l_i + i * \left( \frac{\frac{3*n}{4} - f_d}{f_p} \right)$$

Cuyo cambio consiste en que va  $\frac{3*n}{4}$  en lugar de  $\frac{n}{4}$  y manteniendo el resto de los símbolos con el mismo significado.

Usando esta expresión, verifique el lector que para la distribución de los tiempos de reacción, el tercer cuartil es 3.28.

No hemos hecho mención a un “segundo cuartil”, que sería el valor de la variable que acumula las dos cuartas partes de los casos, pero como las dos cuartas partes es la mitad, se trata simplemente de la mediana  $Q_2 = M_{dn}$ .

### 4.1.8 Los percentiles

Por el mismo camino pueden definirse cortes en otros puntos de la distribución, los más frecuentemente usados, por su generalidad, se conocen como percentiles. Se trata de valores de la variable que dejan por debajo (acumulan) distintos porcentajes de casos.

---

El **percentil**  $r$  de una distribución es el valor de la variable que deja el  $r$  por ciento de los casos por debajo de él y  $(1 - r)$  por ciento de los casos por encima. Se indica  $P_r$ .

---

Así por ejemplo, el percentil 10 (indicado como  $P_{10}$ ) es el valor de la variable que acumula el 10% de las observaciones. Se representa de modo general un percentil dado como  $P_r$  en el que  $r$  indica el porcentaje del que se trata. La expresión para el cálculo de cualquier percentil es:

$$P_r = l_i + i * \left( \frac{\frac{r}{100} * n - f_d}{f_p} \right)$$

Son fáciles de observar las siguientes equivalencias:

$$Q_1 = P_{25}$$

$$M_{dn} = P_{50}$$

$$Q_3 = P_{75}$$

También suelen mencionarse, en algunas publicaciones, otros puntos de corte, como por ejemplo los quintiles, muy comunes para establecer cortes en los niveles de ingreso. Esta medida representa valores que acumulan quintos (20%) de la distribución. La equivalencia es la siguiente:

Quintil:	Equivale a:
Primero	$P_{20}$
Segundo	$P_{40}$
Tercero	$P_{60}$
Cuarto	$P_{80}$

Así, el primer quintil de ingresos representa el valor de ingreso que deja por debajo al 20% de menores ingresos,

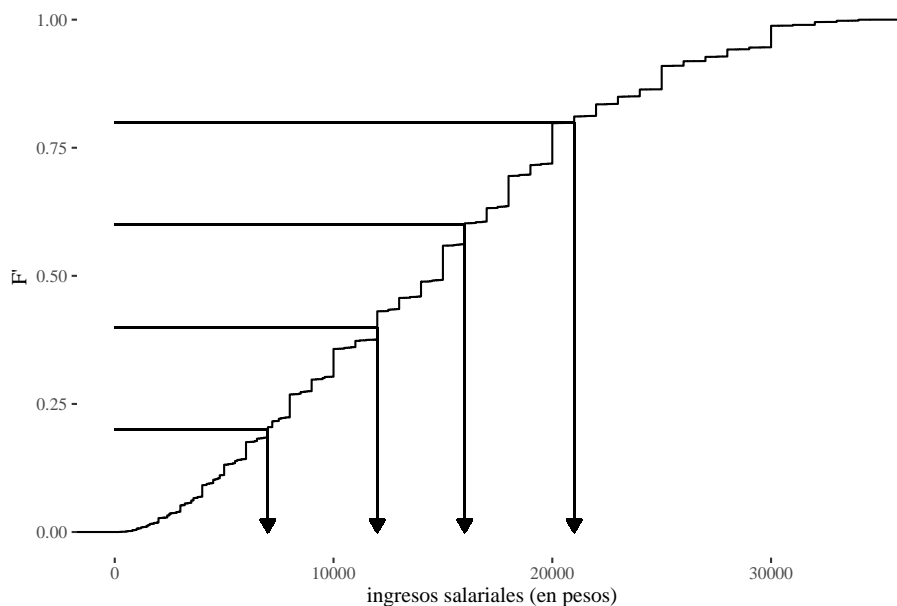
Para los cálculos con la fórmula de interpolación se reemplaza el  $\frac{n}{2}$  de la mediana por  $\frac{r}{100}$  para el percentil  $r$ . Esta manera de calcular los percentiles tiene la misma limitación mencionada para la mediana.

Resulta entonces que la mediana, los muartiles y los quintiles son solo casos particulares de un conjunto de medidas general: los percentiles. Estas medidas tienen en cuenta el orden de las categorías y se calculan en base a la frecuencia acumulada (absoluta o relativa). Por el contrario, la media tiene en cuenta los valores de la variable y las frecuencias simples (absolutas o relativas).

Para ser precisos, debe decirse que los percentiles son también casos particulares, de los llamados *cuantiles*, que son valores de la variable que acumulan una proporción dada de la distribución. La particularidad de los percentiles es que hacen los cortes en 100. No existe por ejemplo, el percentil 22.5, solo el 22 o el 23; el valor que acumula 22.5% de los casos se llama cuantil .225. Debido a que no usamos cortes tan precisos, nos quedaremos con los percentiles como los más finos.

#### 4.1.8.1 Obtención gráfica de los percentiles

Todas las medidas que hacen uso de las frecuencias acumuladas (mediana, cuartiles, quintiles, percentiles) pueden obtenerse de manera aproximada a través del gráfico de frecuencias acumuladas, la ojiva de Galton. Veamos el recorte de los niveles de ingresos salariales en cinco grupos, por medio de los quintiles:



Los quintiles de esta distribución son los siguientes:

- $P_{20} = 7000$

- $P_{40} = 12000$
- $P_{60} = 16000$
- $P_{80} = 21000$

Y representan valores de ingreso salarial que contienen un quinto de los asalariados cada uno.

#### 4.1.9 Hacerlo en R

Los nombres de las medidas descriptivas en R están en inglés, por lo que hay que recordarlas. Para el caso de la variable ingreso salarial (PP08D1 en los microdatos de la EPH), hemos generado una base nueva que solo contiene personas que trabajan como obreros o empleados (son asalariados), sobre ella, las medidas de posición se piden así:

```
attach(eph.3.18.asal)
length(PP08D1) # cantidad de casos (n)
```

```
## [1] 13410
```

```
mean(PP08D1) # la media
```

```
## [1] 14586.19
```

```
median(PP08D1) # la mediana
```

```
## [1] 15000
```

Para los percentiles, se debe especificar cuál o cuáles *cuantiles* se piden:

```
quantile(PP08D1, .2) # percentil 20
```

```
## 20%
## 7000
```

```
quantile(PP08D1, .05) # percentil 5
```

```
## 5%
## 3000
```

```
quantile(PP08D1, .95) # percentil 95
```

```
## 95%
## 30000
```

```
quantile(PP08D1, .5) # percentil 50, coincide con la mediana
```

```
## 50%
## 15000
```

Si se necesitan varios juntos, por ejemplo los quintiles, se usa el comando `c`, para “concatenar” los valores:

```
quantile(PP08D1, c(.2, .4, .6, .8))
```

```
## 20% 40% 60% 80%
## 7000 12000 16000 21000
```

Esta descripción de los datos se lee: En la muestra de 13410 personas que trabajan como obreros o empleados, el salario promedio es de 14586.19. El 50% tiene salario de 15000, el 20% de más bajos salarios está de 7000 para abajo y el 5% de los menores salarios son de 3000 o menos. El 95% tiene salario de 30000 o menos; que es lo mismo que decir que el 5% de los salarios superan los 30000.

Para realizar la categorización con los tres criterios vistos antes, se cuenta en R con la función `cut` que se aplica sobre una variable cuantitativa y se controla la cantidad de intervalos y la forma de construirlos en el argumento “breaks”. Por ejemplo, para categorizar la edad de la base EPH en cuatro intervalos de igual amplitud, se indica ese número en el argumento. El resultado de esa categorización se guarda en una nueva variable a la que llamamos `z` y luego se solicita su distribución de frecuencia:

```
z <- cut(eph.3.18$CH06, breaks = 4)
table(z)
```

```
## z
## (-0.101,25.2] (25.2,50.5] (50.5,75.8] (75.8,101]
##          23233          18769          12342          2535
```

El límite inferior del primer intervalo es negativo por la aplicación de una fórmula de cálculo de las amplitudes, cuando se edita para presentarla, ese número debe ser cero.

La otra opción del argumento “breaks” es indicarle un vector con los límites de los intervalos que se desea. La categorización con criterio proporcional debe indicar que los puntos de corte sean los percentiles correspondientes a la cantidad requerida, para cuatro intervalos, se indica el mínimo de la variable como inicio, luego los cuartiles y termina en el máximo:

```
t <- cut(eph.3.18$CH06, breaks = c(
  min(eph.3.18$CH06),
  quantile(eph.3.18$CH06, .25),
  quantile(eph.3.18$CH06, .5),
  quantile(eph.3.18$CH06, .75),
  max(eph.3.18$CH06)
))
table(t)
```

```
## t
##   (0,16]  (16,32]  (32,52]  (52,101]
##    13913    14280    14292    13673
```

Con estos cortes, los grupos tienen cantidades de casos similares.

Si el criterio es teórico, se eligen los puntos de corte y se indican en “breaks”. Para hacer cuatro grupos de: hasta 14 años, de 15 a 44, de 45 a 64 y 65 o más, se solicita:

```
u <- cut(eph.3.18$CH06, breaks = c(
  min(eph.3.18$CH06),
  14,
  44,
  64,
  max(eph.3.18$CH06)
))
table(u)
```

```
## u
##   (0,14]  (14,44]  (44,64]  (64,101]
##    12052    25333    11780     6993
```

## 4.2 La forma de la distribución

La media es una medida muy completa como resumen de los datos, ya que los considera a todos con la frecuencia de cada uno. Opera como un punto de equilibrio en un conjunto de datos. Sin embargo esto puede ser una dificultad en algunos tipos de distribución. Consideremos el siguiente ejemplo simple:

x	f
3	16
4	7
5	5
6	6
10	3
Total	37

Estos datos muestran una marcada concentración en el valor 3, donde se encuentra la mitad de las observaciones. El resto de los valores son superiores y hay uno extremo, el 10, que tiene poca frecuencia: hay solo tres observaciones con ese valor. Veamos cuál es el efecto de esta forma de distribuirse de los datos. La media es:

## [1] 4.51

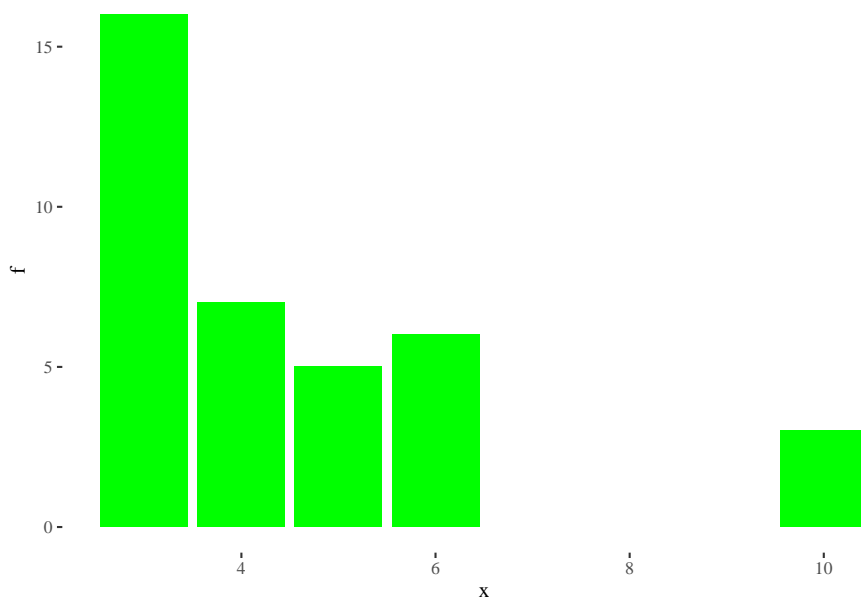
$$\bar{x} = \frac{3 * 16 + 4 * 7 + 5 * 5 + 6 * 6 + 10 * 3}{37} = 4.51$$

A pesar de la concentración en 3 que se observa, la media es superior a 4, que es un resultado contrario a lo que intuitivamente esperaríamos, porque habríamos supuesto que se ubicaría más cerca de 3, ya que 3 parece ser un valor muy “representativo” de esta distribución, sin embargo, la media da un número bastante más grande. Esto se debe a la presencia de valores extremos, en este ejemplo el 10. Aunque este número tiene poca frecuencia, su efecto es de “tirar de la media” hacia valores más grandes. Esto sucede siempre con la media y proviene de su característica de tener en cuenta todos los valores de la distribución. Por esa razón, cuando la distribución se presenta como la anterior, la media no es una buena medida de centralidad.

Este inconveniente de la media aparece a menudo en las discusiones salariales por sectores. A menudo se escucha que no se justifica un aumento porque el salario promedio de todos los empleados del sector es de  $X$  pesos. Argumento al que se contrapone (expresado de diferentes maneras) que ese promedio incluye al personal que tiene salarios muy altos. Se trata de distribuciones asimétricas, que tienen la mayor parte de los casos con salarios bajos o intermedios y unos pocos casos con salarios muy superiores, por eso cuando se calcula la media se obtiene un resultado que representa mal al conjunto de datos.

El histograma siguiente muestra la forma de la distribución anterior:





En el gráfico se ve el carácter atípico del valor 10, que aparece muy alejado de la parte principal de la distribución. Decimos en este caso que la distribución es **asimétrica**.

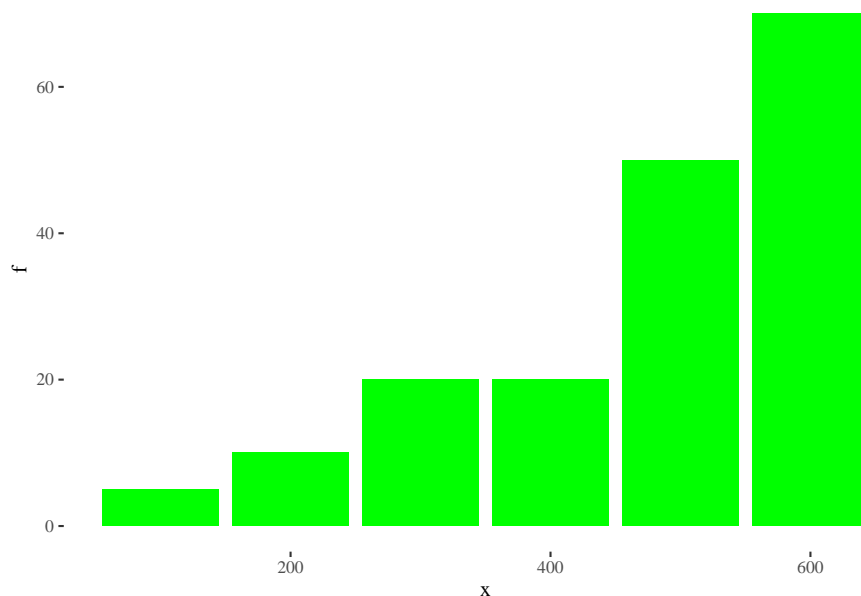
### 4.2.1 Asimetría

La **asimetría** de una distribución se indica señalando hacia dónde se sitúan los valores extremos. Si, como en este ejemplo, los valores extremos son mayores que la mayor parte de los datos, la asimetría es **hacia la derecha**.

La asimetría puede ser en sentido opuesto, si hay observaciones particularmente pequeñas y en ese caso se tratará de una distribución **asimétrica hacia la izquierda**. Como en el ejemplo siguiente:

X	F
100	5
200	10
300	20
400	20
500	50
600	70
Total	175

Cuyo histograma es:



Aquí los valores extremos se encuentran por debajo del grupo principal de datos y la media se inclinará hacia los valores más pequeños. Así, aunque la mayoría de los casos se encuentra entre 500 y 600, la media es:

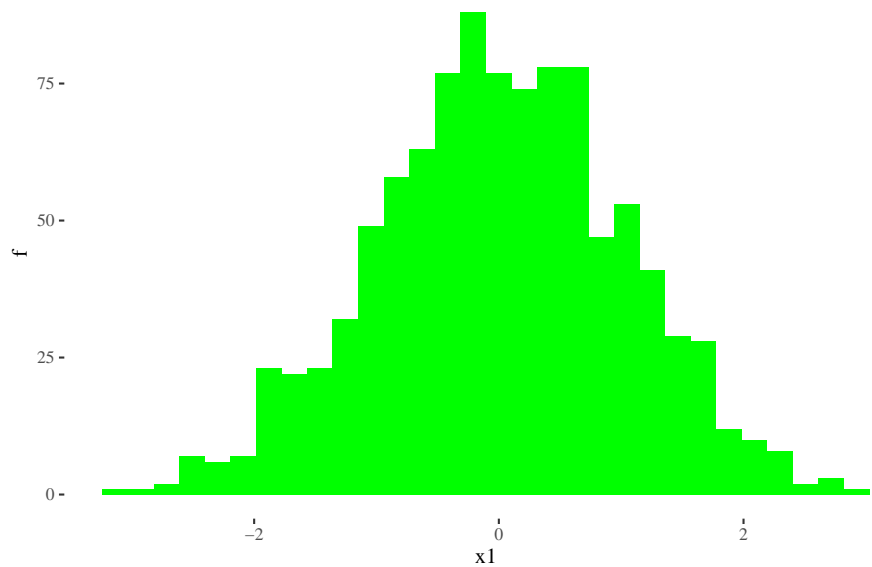
```
## [1] 477.14
```

$$\bar{x} = \frac{100 * 5 + 200 * 10 + 300 * 20 + 400 * 20 + 500 * 50 + 600 * 70}{175} = 477,14$$

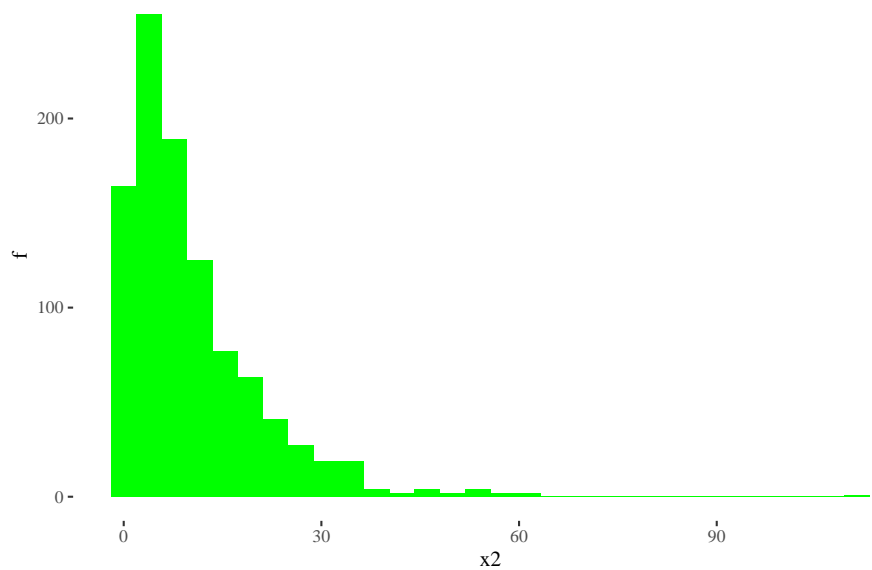
Un resultado que está por debajo de esos valores que concentran muchos casos. Decimos ahora que la asimetría es hacia la izquierda.

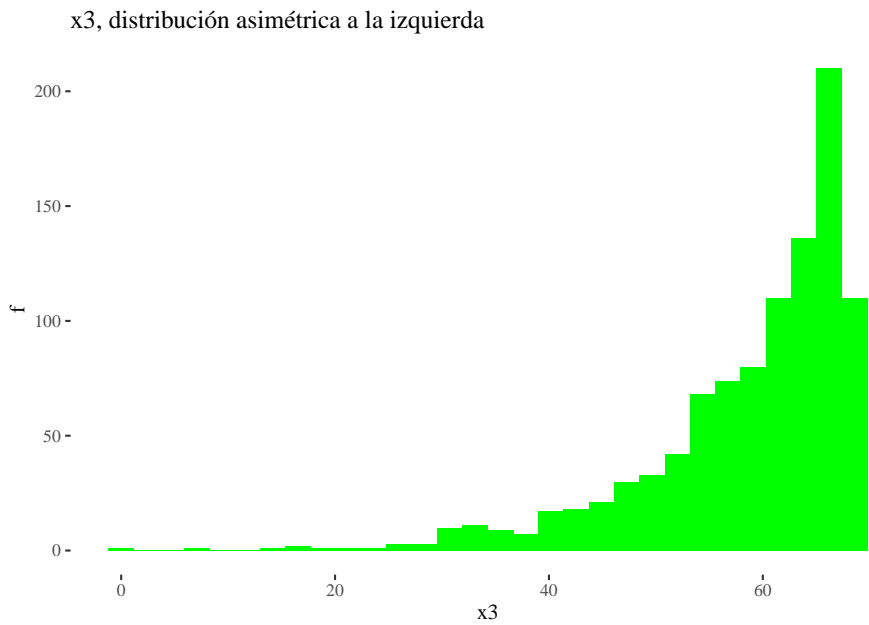
Los siguientes histogramas, son ejemplos de formas posibles en cuanto a simetría:

x1, distribución simétrica



x2, distribución asimétrica a la derecha





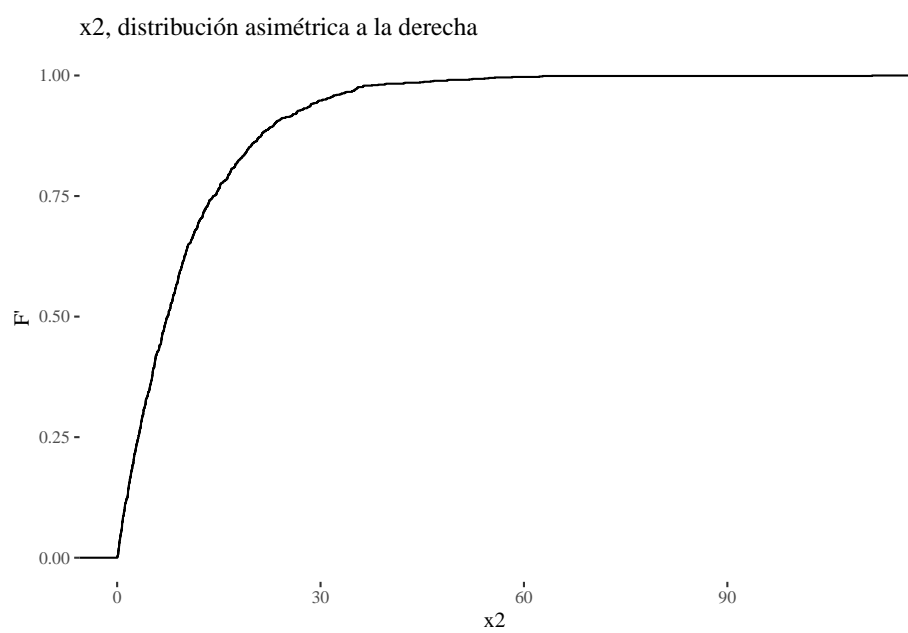
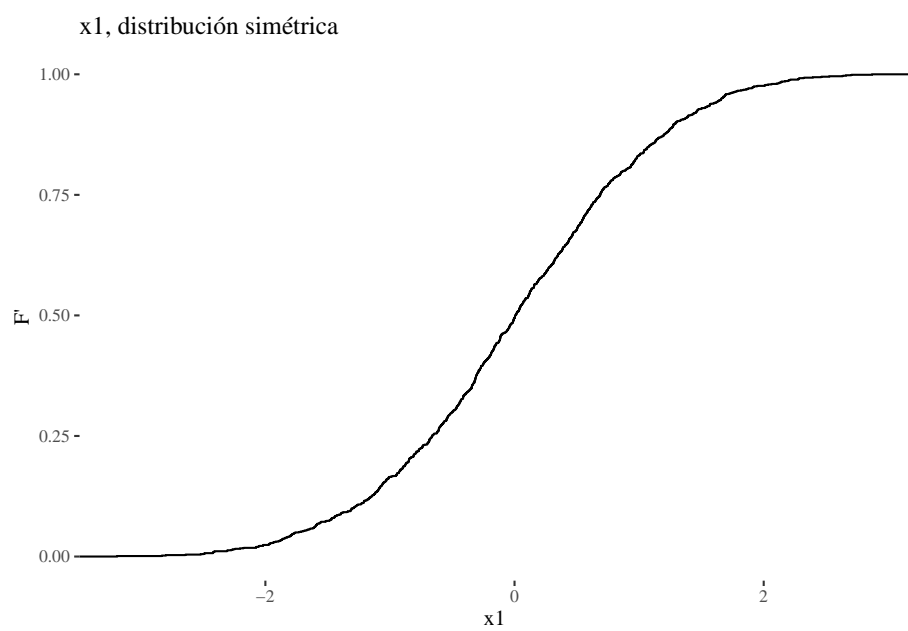
La asimetría puede evaluarse directamente a partir de las medidas de centralidad, ya que la posición relativa de la media y la mediana indican hacia dónde ésta sucede. Cuando la media y la mediana coinciden, la distribución es simétrica, es decir carece de asimetría. Si la media supera a la mediana, se trata de una distribución asimétrica a la derecha y si la media es menor que la mediana, la asimetría será hacia la izquierda.

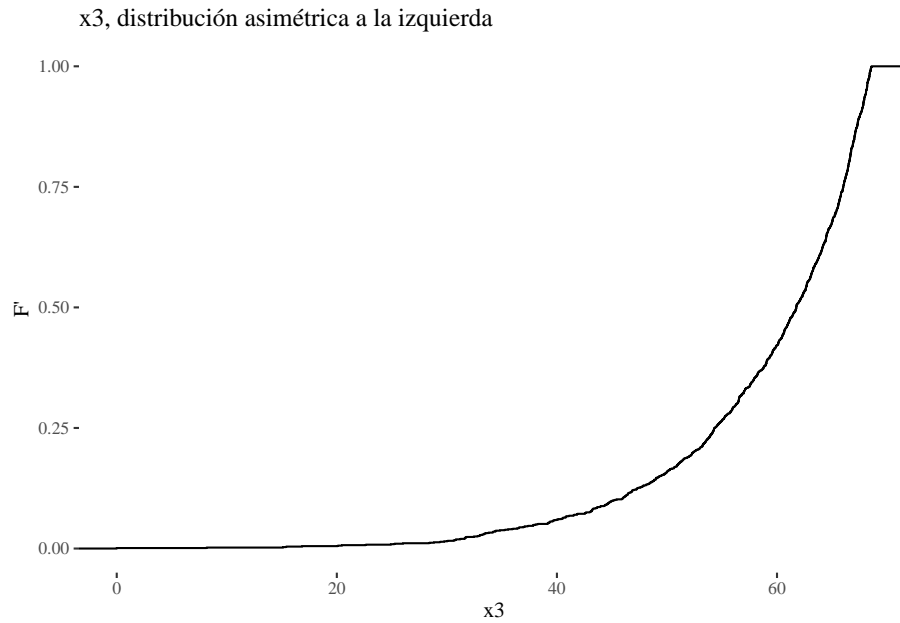
En estas distribuciones las medias y medianas son:

- x1: media = 0.0095716, mediana = 0.0061682
- x2: media = 10.3625202, mediana = 7.4364779
- x3: media = 58.6815715, mediana = 61.7529703

Posición relativa de la media y la mediana:	Asimetría de la Distribución:
$\bar{x} = M_{dn}$	Simétrica
$\bar{x} > M_{dn}$	Asimétrica a la derecha
$\bar{x} < M_{dn}$	Asimétrica a la izquierda

Una distribución es **simétrica** si la media coincide con la mediana. La distribución se llama asimétrica a la derecha si la media es mayor que la mediana, y asimétrica a la izquierda si la media es menor que la mediana.





La evaluación cuantitativa de la asimetría de una distribución permite la comparación entre distribuciones en cuanto al grado de asimetría, para indicar cuando una distribución es más asimétrica que otra. Para hacerlo se usan los *coeficientes de asimetría*. Estos coeficientes miden dos aspectos de la asimetría: hacia qué lado sucede y cuán acentuada es. Su signo positivo indica asimetría hacia la derecha y negativo hacia la izquierda. El valor absoluto del coeficiente indica si es muy asimétrica o poco. Por ejemplo, una distribución cuya asimetría vale 1,5 es más asimétrica que una con coeficiente 1,2, y ambas son asimétricas hacia la derecha. Cuando la distribución es simétrica, el coeficiente vale cero, no es positivo ni negativo. Uno de los más frecuentemente usados es el coeficiente de asimetría de Fisher<sup>4</sup>, que se calcula como:

$$g_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 * f_i}{n * s^3}$$

Y cuya interpretación es:

- $g_1 = 0$  La distribución es simétrica.
- $g_1 > 0$  Asimétrica hacia la derecha.
- $g_1 < 0$  Asimétrica hacia la izquierda.

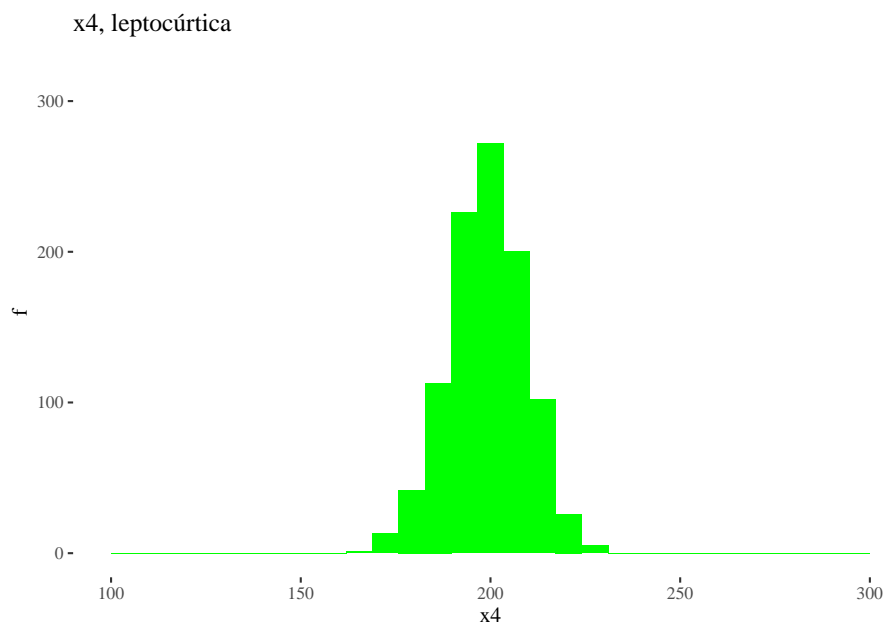
---

<sup>4</sup>Otros coeficientes de asimetría son: el de Pearson, que compara la ubicación de la media y del modo, y el de Bowley, que compara los cuartiles y la mediana.

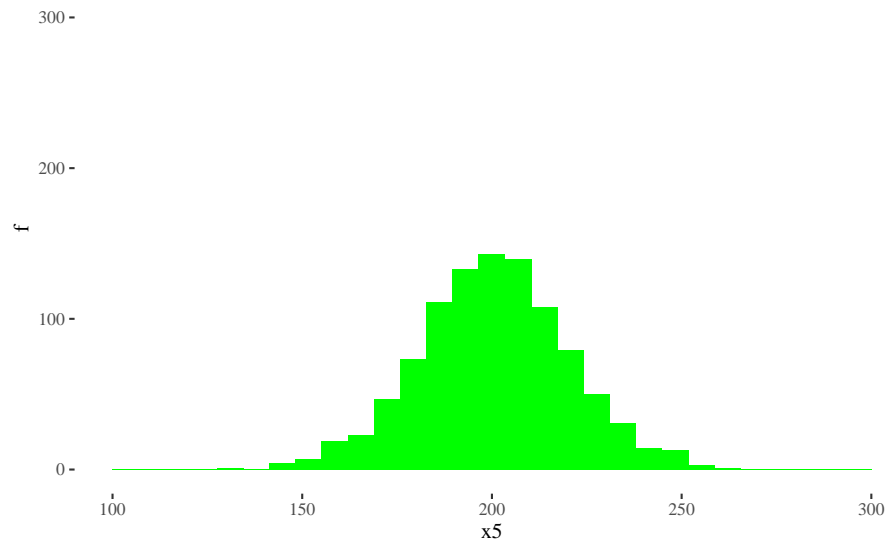
En la práctica, es improbable que el coeficiente valga exactamente cero, por lo que se considera simétrica a una distribución cuyo coeficiente esté entre -0,5 y 0,5.

### 4.2.2 Curtosis

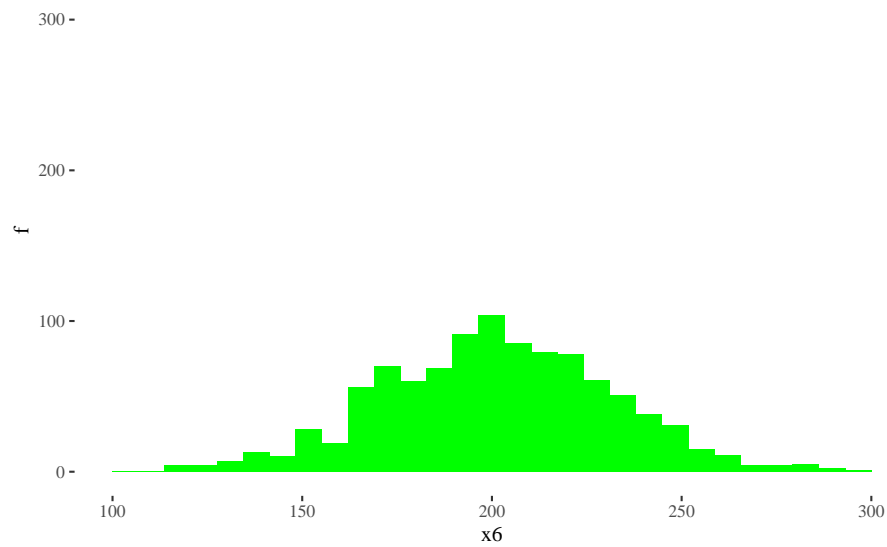
Además de la simetría, disponemos de otro indicador de la forma de la distribución, una medida de cuán “puntiaguda” es la curva, se denomina curtosis y distingue distribuciones con forma estrecha y elevada de que tienen forma amplia y baja. Como en los siguientes gráficos:



x5, mesocúrtica



x6, platicúrtica



Estos tres ejemplos corresponden a distribuciones simétricas, pero también pueden ser asimétricas.

La curtosis se mide con un coeficiente específico, que vale cero para distribuciones mesocúrticas, es negativo para las platicúrticas y positivo para las leptocúrticas. Su cálculo es:



$$g_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 * f_i}{n * s^4} - 3$$

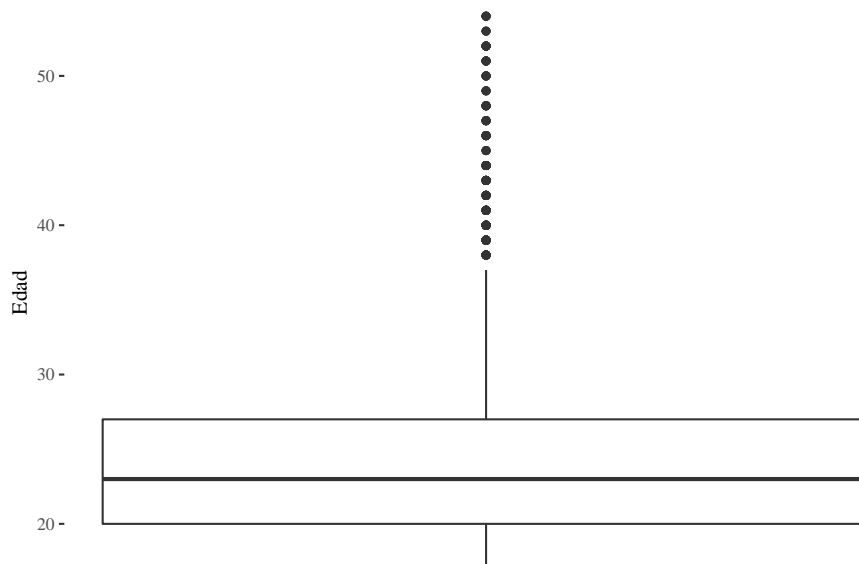
Su interpretación es:

- $g_2 = 0$  La distribución es mesocúrtica
- $g_2 > 0$  Leptocúrtica
- $g_2 < 0$  Platicúrtica

Con datos reales, muy raramente el valor será exactamente cero, por lo que se trata como mesocúrtica a una distribución cuyo coeficiente se encuentre entre -0,5 y 0,5.

### 4.3 Box-plots

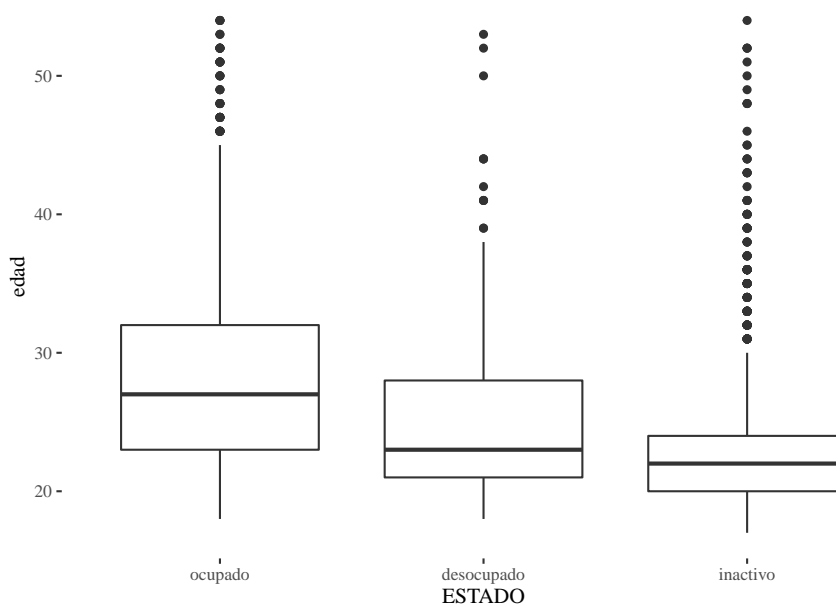
Un gráfico que puede resumir de manera muy compacta la información sobre una distribución de frecuencias es el que se llama **diagrama de caja**, o también **diagrama de caja y bigotes** o **box-plot**, que fue propuesto por John Tukey en 1977. Aplicado a las edades de estudiantes universitarios de la EPH genera:



Este gráfico representa sobre el eje vertical los valores de la variable y muestra una “caja” delimitada por los cuartiles 1 y 3. Según la definición de los cuartiles,

esa caja contiene al 50% central de los casos. Dentro de la caja se muestra la mediana en la línea horizontal. Se aprecia la concentración de casos en los valores bajos de la variable y unos pocos casos extremos que acusan la asimetría hacia la derecha de la distribución.

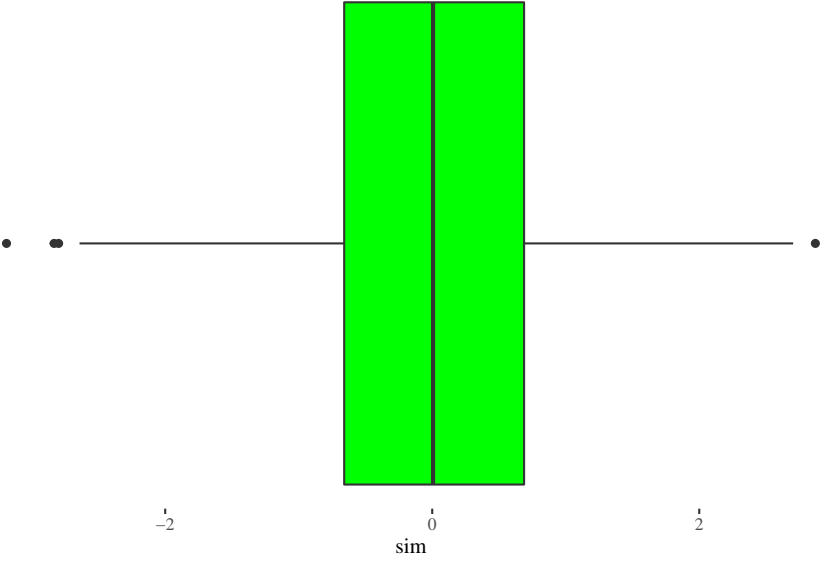
El box-plot es adecuado para comparar grupos, en este ejemplo, se puede incluir la condición de actividad de los estudiantes y obtener:



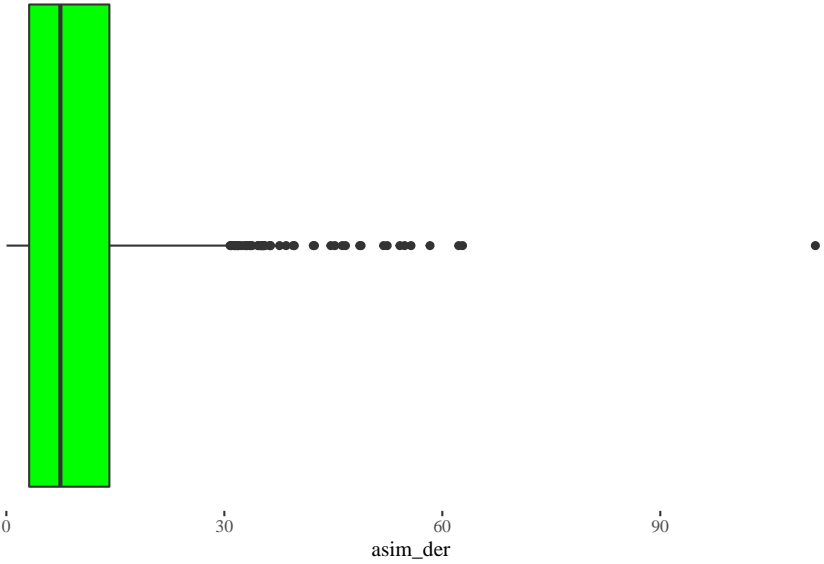
Se observa que, aunque en todos los grupos hay estudiantes con edades altas, los inactivos (que no trabajan ni buscan trabajo) son los que se concentran en la edades más bajas.

Además de la caja, se ven dos segmentos que se extienden hasta los valores máximo y mínimo de la distribución. La longitud de estos segmentos (llamados a veces “bigotes”) depende de una característica de la distribución que se trata en el apartado siguiente: la dispersión.

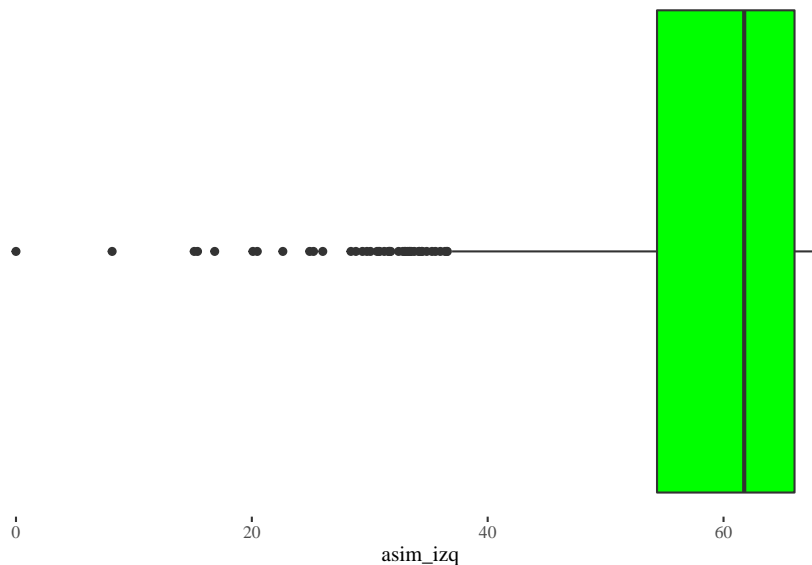
x1, distribución simétrica



x2, distribución asimétrica a la derecha



x3, distribución asimétrica a la izquierda



## 4.4 Medidas de dispersión

Además de indicar alrededor de qué valores se distribuyen los datos, también es necesario indicar si se encuentran concentrados alrededor de esos valores (si son cercanos a ellos) o dispersos (si están alejados). Por ejemplo, un promedio de 20 sesiones de psicoterapia puede provenir de cuatro casos que utilizaron 18, 19, 21 y 22 sesiones o de otros cuatro que hayan insumido 5, 10, 30 y 35 sesiones. En la primera situación las cuatro observaciones son cercanas entre sí, están concentradas, mientras que en la segunda están lejos, dispersas. Diremos que en el primer caso la distribución es homogénea o que presenta poca dispersión y en el segundo que es heterogénea o que presenta mucha dispersión.

Conocer esto tiene importancia para poder evaluar la calidad de las medidas de centralidad, en particular de la media. Esto es así porque en una distribución muy dispersa, la media será un promedio de valores muy diferentes entre sí y no será tan fiel a los datos como si estos valores fueran similares. La media de 20 sesiones del primer ejemplo es una mejor medida resumen que la misma media de 20 del segundo, porque la primera representa mejor los datos de origen. Debido a esto, decimos que en la primera de las situaciones del ejemplo, la media es más *representativa* de los datos de los que proviene.

Nos ocuparemos ahora del modo en que puede medirse esa dispersión, cómo transformarla en una medida resumen que indique brevemente si los datos están dispersos o concentrados.

### 4.4.1 Recorrido

Una primera aproximación al problema es la de considerar la distancia que hay entre los valores extremos, entre el más pequeño y el más grande. Si usamos este procedimiento en el ejemplo anterior vemos que en la primera distribución hay 4 unidades entre la primera y la última observación (de 18 a 22) y en la segunda hay 30 unidades de extremo a extremo (de 5 a 35). Por lo que ésta sería una medida de la dispersión. Esta medida se llama recorrido, se indica con la letra  $R$  y la expresión formal de su cálculo es:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Donde  $x_{\max}$  y  $x_{\min}$  representan a los valores máximo y mínimo respectivamente. En las distribuciones del ejemplo, los recorridos son  $R = 4$  y  $R = 30$  respectivamente, que resumen la mayor dispersión de la segunda.

---

Se llama **recorrido** de una distribución a la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la variable. Se indica  $R$ .

---

Cuando la distribución tiene más casos, el recorrido es insuficiente como medida de dispersión, ya que está determinado solo por los valores extremos. Por ejemplo, las dos siguientes series tienen la misma media, igual a 8:

$$2, 8, 8, 8, 8, 8, 14$$

$$7, 8, 8, 8, 8, 8, 9$$

El recorrido vale 12 para la primera ( $R = 142$ ) y 2 para la segunda ( $R = 97$ ) es una diferencia muy acentuada aunque las dos distribuciones solo difieren en los valores extremos. Dicho de otra manera, si sucede que hay un caso (o unos pocos) que tiene un valor excepcionalmente alto (o bajo), el recorrido dará un valor alto, indicando gran dispersión, lo que nos puede hacer pensar que todos los datos están dispersos. Por esa razón se dice que es una medida “gruesa” de la variabilidad de los datos.

### 4.4.2 Amplitud intercuartílica

Un modo de afinar la calidad de esta medida es la de tomar la distancia que hay, no ya entre los valores extremos, sino entre los cuartiles primero y tercero. La medida que usa esta distancia se llama amplitud intercuartílica y es simplemente la diferencia entre el tercer cuartil y el primero:

$$AIQ = Q_3 - Q_1$$

Si bien tampoco es ésta una medida que considere todas las observaciones -ya que solo tiene en cuenta los dos cuartiles-, es mejor que el recorrido, porque deja de lado los valores extremos, aquellos que pertenecen al 25% más bajo y al 25% más alto de la distribución.

---

La **amplitud intercuartílica** es la diferencia entre los cuartiles tercero y primero. Se indica *AIQ*.

---

Gráficamente, esta medida es la altura de la caja del Box-plot. Algunos autores prefieren informar como medida de dispersión a la mitad de la distancia entre los cuartiles 1 y 3, a la que se denomina *semi recorrido intercuartilar*, y se abrevia *SRIC*. No tiene diferencia conceptual con la *AIQ*, porque ambas consideran distancia entre cuartiles, solo difieren en la convención de informar la distancia completa (*AIC*) o su mitad (*SRIC*).

---

El **semi recorrido intercuartilar** es la mitad de la amplitud intercuartílica. Se indica *SRIC*.

---

Que en el Box-plot representa al mitad de la altura de la caja.

$$SRIC = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

#### 4.4.3 Medidas de dispersión basadas en la media

Las medidas de variabilidad que más se usan son las que tienen en cuenta todas las observaciones, es decir aquellas que están basadas en la media. Una manera de ver si el conjunto de datos está concentrado o disperso, consiste en observar la distancia de la media a la que se encuentra cada observación, luego esas distancias individuales pueden promediarse y tener una idea global de qué tan lejos están los casos del promedio. Intentemos hacer eso y veamos qué limitación aparece.

Tomemos un conjunto pequeño de datos, presentado en serie simple:

5, 7, 9, 11

La media es 8, como lo es la mediana. Aunque no hay modo, ya que todos los valores tienen frecuencia igual a uno, la distribución es simétrica. Hemos elegido así el ejemplo solo para darle simplicidad, no es una condición necesaria para lo que sigue.

Consideremos las distancias desde cada observación hasta la media, restando a cada una de ellas el valor 8 (la media):

$x_i$	$x_i - \bar{x}$
5	-3
7	-1
9	1
11	3

Las distancias positivas corresponden a valores superiores a la media y las negativas a los inferiores, si un valor acertara en la media, su distancia sería cero. Si sumamos todas las diferencias  $x_i - \bar{x}$ , el resultado es cero ( $-3 - 1 + 1 + 3 = 0$ ); además, éstas son simétricas, como efecto de la forma de la distribución original. Pero el hecho que la suma sea cero no depende de la distribución, sino que es una propiedad de la media. Por ser la media un punto de equilibrio entre las observaciones, las que se distancian por encima de ella están compensadas por las que lo hacen por debajo<sup>5</sup>.

Los valores  $x_i - \bar{x}$  se llaman desvíos, que indican cuánto se aleja cada observación de la media. Como vemos pueden ser positivos o negativos según se trate de observaciones que superen a la media o que estén por debajo de ella. Acabamos de ver también que su suma vale cero, es decir que  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$  y que esta es una cualidad de la media, que no depende de los datos<sup>6</sup>.

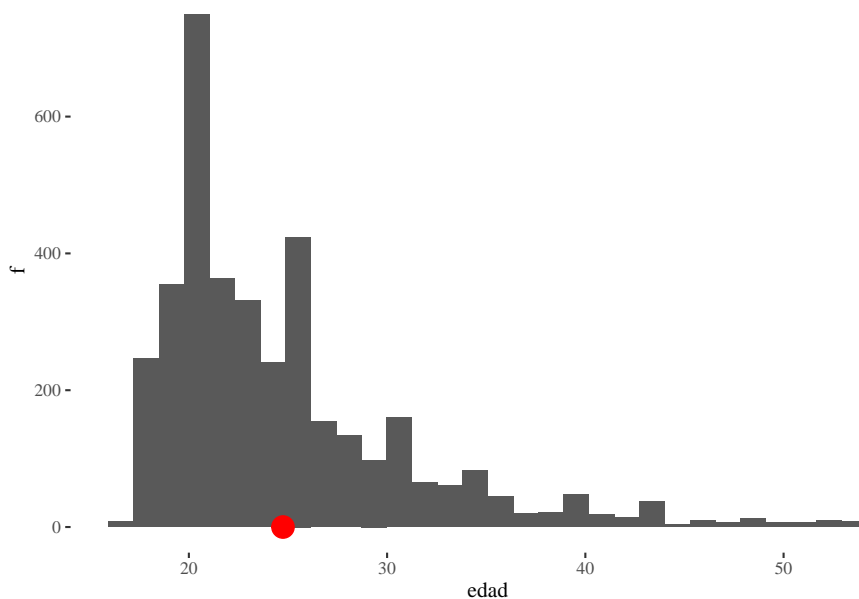
La representación gráfica de esta propiedad puede verse pensando en una analogía física; como si cada caso graficado en el histograma fuese un bloque de cierto peso, situado en el valor de la variable. Con esa idea, la ubicación de la media es el punto donde habría que apoyar el histograma para que éste quede en equilibrio:

<sup>5</sup>Para ver esto, comparemos con el caso de la serie: 3, 4, 6, 7, 23, 45 con media 14,7. Las diferencias entre cada observación y la media son las siguientes:

$x$	3	4	6	7	23	45
$x_i - \bar{x}$	-11,7	-10,7	-8,7	-7,7	8,3	30,3

En este caso las diferencias no son simétricas, pero es igualmente cierto que su suma es igual a cero, es decir que están compensadas las diferencias por encima y por debajo de la media.

<sup>6</sup>Puede verse que es así haciendo:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}$ , como  $\bar{x}$  es una constante, el segundo término es  $n * \bar{x}$ , igual que el primero, según la definición operativa de la media. Por lo tanto la diferencia es cero, cualquiera sea el conjunto de datos.



El punto (triángulo) del gráfico equivale al punto de apoyo que permite el equilibrio de ese “objeto”.

Tan importante es esta propiedad que la usaremos para dar una definición más completa de la media:

---

La **media** es el valor de la variable que anula la suma de los desvíos en torno suyo.

---

El tema que nos ocupa en este momento, es el de medición de la variabilidad del conjunto de casos, y entonces, la consecuencia de esta propiedad es que no será posible usar la suma de los desvíos como indicador de dispersión, ya que da siempre cero, con datos homogéneos o heterogéneos.

A fin de resolver este problema vamos a eliminar el signo, usando el hecho que todo número elevado a una potencia par es positivo, sin importar el signo que haya tenido el número. Elevaremos entonces al cuadrado cada una de los desvíos y así se perderá su signo y ya no será cero la suma de todos ellos.

#### 4.4.4 Varianza

Usando ese recurso, definimos la varianza<sup>7</sup>, a la que simbolizaremos como  $V(x)$  o más frecuentemente como  $s^2$  de la siguiente forma:

---

<sup>7</sup>En este punto aparece la primera diferencia entre cálculos hechos sobre datos de una muestra o de una población. Si estuviésemos trabajando sobre toda la población, la varianza



$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

---

Se llama **varianza** de una distribución a la suma de los cuadrados de los desvíos alrededor de la media, dividida por el total de observaciones menos uno. Se indica  $s^2$ .

---

Es una medida muy valiosa de la dispersión que tiene un conjunto de datos, cuanto mayor es, tanto más dispersos éstos se encuentran, es decir, son más heterogéneos. No puede ser negativa, porque es una suma de cuadrados y solo es cero si todos los desvíos son cero, es decir si todas las observaciones coinciden con la media<sup>8</sup>.

Hay tres propiedades de la varianza que señalaremos porque serán necesarias más adelante:

-La varianza de una constante es cero. Esto resulta claro ya que la varianza mide la dispersión y si todas las observaciones son iguales no hay dispersión:

$$V(k) = 0$$

-La varianza de una constante que multiplica a una variable es la constante elevada al cuadrado multiplicada por la varianza de la variable:

$$V(k * x) = k^2 * V(x)$$

-La varianza de la suma de dos variables independientes es la suma de las varianzas de cada una de ellas:

$$V(x + y) = V(x) + V(y)$$

A los fines de la interpretación, la varianza presenta dos inconvenientes. Uno es que sus unidades están elevadas al cuadrado; por lo que, si medimos *número de errores*, la varianza quedará expresada en *número de errores al cuadrado* una entidad que no tiene significado, como tampoco lo tienen *hijos al cuadrado* para la fecundidad, *pesos al cuadrado* para ingresos o *segundos al cuadrado* para los tiempos de reacción.

---

(a la que indicaríamos con otra letra) tendría denominador  $n$ , en lugar de  $n - 1$ . No podemos explicar la razón de esto aún, habrá que esperar al capítulo de estimación. En algunos manuales, a la varianza calculada con denominador  $n - 1$  se la llama *cuasivarianza* o también *seudovarianza*.

<sup>8</sup>En este caso no hay variabilidad, y en consecuencia, no hay variable, porque el valor asumido es siempre el mismo. Se trata de una constante.

El otro inconveniente es que no tiene límite superior, puede ser muy grande y no tenemos con qué compararla para saber si indica una gran variabilidad o si es grande porque los valores de la variable lo son.

#### 4.4.5 Desviación estándar

Para resolver el primer inconveniente, definiremos una medida derivada de la varianza, que se denomina desviación estándar (en algunos textos y programas de análisis de datos es llamada desviación típica). Esta medida, indicada con la letra  $s$  es la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

O más simplemente:

$$s = \sqrt{s^2}$$

---

La **desviación estándar** es la raíz cuadrada de la varianza. Se indica  $s$ .

---

Ahora, por el sencillo trámite de introducir una raíz cuadrada, las unidades de  $s$  son las mismas que las de la variable original y no hay problemas con la interpretación del valor.

#### 4.4.6 Coeficiente de variación

Para hacer frente al problema de la magnitud de la varianza y de la comparación de la dispersión entre medidas expresadas en diferentes unidades -que sigue siéndolo para la desviación estándar-, definimos una medida relativa de la dispersión: el coeficiente de variación, indicado como CV como el cociente entre la desviación estándar y la media:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100$$

Esta medida carece de unidades, porque la media tiene las mismas que las de la desviación estándar, por lo que se trata de una medida relativa de la dispersión. Indica la importancia relativa de la desviación estándar respecto de la media. El factor 100 que acompaña al cociente cumple la función de expresarlo como porcentaje, por comodidad para la lectura.

---

El **coeficiente de variación** expresa de manera relativa la dispersión, midiendo el peso de la desviación estándar comparado con la media. Se indica *CV*.

---

Conocer la dispersión de una distribución de frecuencias es muy necesario para poder decidir si la media es una medida adecuada para resumir los datos, y esto no sucede si hay mucha dispersión. Para aclarar esto veamos un ejemplo: sea un grupo de seis alumnos que hacen una prueba y que obtienen las siguientes notas: 2, 2, 2, 2, 10, 10. Si calculamos la media obtenemos 4.6666667 4,7. Este número no representa lo que sucede con los seis alumnos, quienes tuvieron resultados muy dispares: cuatro de ellos obtuvieron 2 y los otros dos, 10. Si calculamos el CV, resultado es 88.5253336 100%, un valor muy elevado, indicativo que la media no es una medida adecuada para sintetizar al conjunto de datos.

Muchas de las críticas mal fundadas hacia la Estadística se equivocan por ignorancia, porque calculan la media cuando no corresponde usarla.

En la práctica se considera que si el coeficiente de variación es menor al 10% (algunas referencias ponen como límite al 15%), la distribución tiene poca dispersión y entonces podemos confiar en la media como medida de centralidad y tratarla como representativa de los datos que resume. Si el CV supera estos valores, la media no alcanza para resumir los datos y es necesario acompañarla de otras medidas, como la mediana, los cuartiles, el mínimo y máximo.

Calcularemos por única vez las medidas de dispersión de manera manual para un pequeño conjunto de datos, a fin de seguir de cerca las operaciones que involucra. Se trata de seis pacientes diagnosticados de depresión a partir de cinco o más de los síntomas que indica el manual DSM IV<sup>9</sup> y que para cada uno de ellos observamos (como variable) el número de síntomas que llevaron al diagnóstico:

---

<sup>9</sup>Presencia de cinco (o más) de los siguientes síntomas durante un período de 2 semanas, que representan un cambio respecto a la actividad previa; uno de los síntomas debe ser:

1. Estado de ánimo depresivo la mayor parte del día, casi cada día según lo indica el propio sujeto (p. ej., se siente triste o vacío) o la observación realizada por otros (p. ej., llanto). En los niños y adolescentes el estado de ánimo puede ser irritable

2. Disminución acusada del interés o de la capacidad para el placer en todas o casi todas las actividades, la mayor parte del día, casi cada día (según refiere el propio sujeto u observan los demás)

3. Pérdida importante de peso sin hacer régimen o aumento de peso ( p. ej., un cambio de más del 5% del peso corporal en 1 mes), o pérdida o aumento del apetito casi cada día. Nota: En niños hay que valorar el fracaso en lograr los aumentos de peso esperables

4. Insomnio o hipersomnia (sueño excesivo) casi cada día.

5. Agitación o enlentecimiento psicomotores casi cada día (observable por los demás, no meras sensaciones de inquietud o de estar enlentecido)

6. Fatiga o pérdida de energía casi cada día

7. Sentimientos de inutilidad o de culpa excesivos o inapropiados (que pueden ser delirantes) casi cada día (no los simples autorreproches o culpabilidad por el hecho de estar enfermo)

8. Disminución de la capacidad para pensar o concentrarse, o indecisión, casi cada día (ya sea una atribución subjetiva o una observación ajena)

9. Pensamientos recurrentes de muerte (no sólo temor a la muerte), ideación suicida recurrente sin un plan específico o una tentativa de suicidio o un plan específico para suicidarse

	$x_i$ (número de Paciente síntomas)	$x_i - \bar{x}$ (desvíos)	$(x_i - \bar{x})^2$ (cuadrados de los desvíos)
1	5	-2	4
2	6	-1	1
3	6	-1	1
4	8	1	1
5	8	1	1
6	9	2	4

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 6 + 8 + 8 + 9}{6} = 7$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 12$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{12}{6 - 1} = 2,4$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,4} = 1,55$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100 = \frac{1,55}{7} * 100 = 22,13\%$$

La lectura de este resultado es que para el conjunto de seis personas a las que se observa, el número promedio de síntomas a través de los cuales es diagnosticada la depresión es de siete. Sin embargo este número de síntomas es bastante variable según los pacientes y, seguramente también según los terapeutas.

#### 4.4.7 Hacerlo en R

La solicitud de estas medidas es directa en R, para la base de la aplicación del test de Bayley, los pesos al nacer tienen las siguientes medidas de dispersión:

```
attach(bayley)
R <- max(peso.nac) - min(peso.nac)
names(R) <- "R"
round(R, 2)
```

```
##          R
## 3078.56
```

```
AIQ <- quantile(peso.nac, .75) - quantile(peso.nac, .25)
names(AIQ) <- "AIQ"
round(AIQ, 2)
```

```
##      AIQ
## 660.82
```

```
SRIC <- (quantile(peso.nac, .75) - quantile(peso.nac, .25)) / 2
names(SRIC) <- "SRIC"
round(SRIC, 2)
```

```
##      SRIC
## 330.41
```

```
var <- var(peso.nac)
names(var) <- "s2"
round(var, 2)
```

```
##      s2
## 250641.9
```

```
s <- sd(peso.nac)
names(s) <- "s"
round(s, 2)
```

```
##      s
## 500.64
```

```
CV <- sd(peso.nac) / mean(peso.nac) * 100
names(CV) <- "CV"
round(CV, 2)
```

```
##      CV
## 16.62
```

La medida relativa de la variabilidad (el *CV*) es adecuada para comparar variables que tienen diferentes unidades, por ejemplo para responder ¿qué es más variable, el peso o la estatura de los niños? Es decir, ¿en cuál de esas dos medidas se diferencian más? Las siguientes son las salidas descriptivas

```
c(
  summary(peso.nac),
  s = sd(peso.nac),
  CV = sd(peso.nac) / mean(peso.nac) * 100
)
```

```
##      Min.    1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
## 1338.54612 2694.23792 2996.67572 3011.78179 3355.05345 4417.10653
##           s          CV
##   500.64151   16.62277
```

```
c(
  summary(long.nac),
  s = sd(long.nac),
  CV = sd(long.nac) / mean(long.nac) * 100
)
```

```
##      Min.    1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.      s
##  -8.69347  47.08004  72.12837  69.62115  89.98179 144.67646 31.50275
##           CV
##   45.24882
```

Se trata los 454 niños y niñas, evaluados en dos aspectos; su peso y su talla al nacer, el primero en gramos y la segunda en centímetros. La comparación de las desviaciones estándar no da información sobre la diferente variabilidad, porque dependen de esas unidades de medida; una está expresada en gramos y la otra en centímetros. Por el contrario, los coeficientes de variación, (17% para el peso y 719% para la talla) indican que hay más diferencias entre las longitudes de los recién nacidos que entre los pesos al nacer.

#### 4.4.8 Box-plots y dispersión

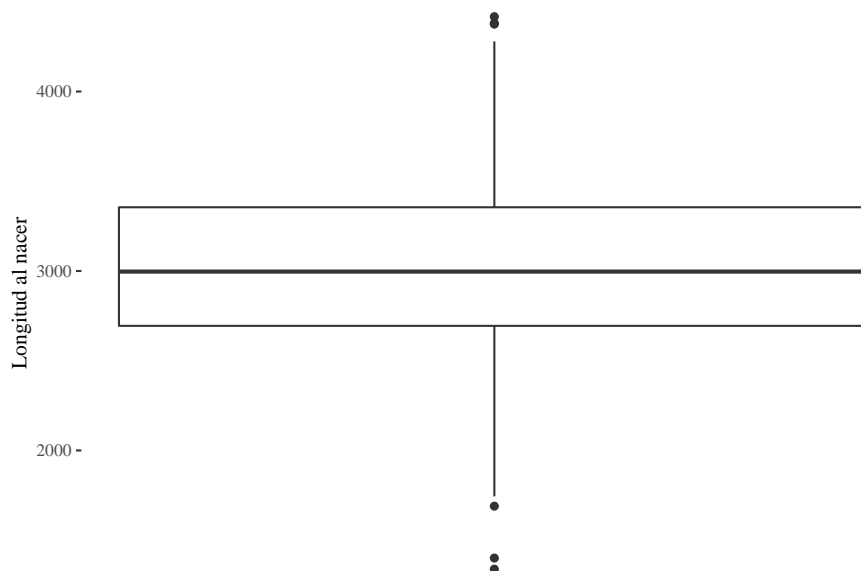
La observación del diagrama de caja (box-plot) nos da también indicios acerca de la dispersión de la variable que se analiza. Cuando la caja es larga estamos en presencia de distribuciones muy dispersas en la parte central, los cuartiles están lejanos, hay mucha amplitud intercuartilar. Mientras que si la caja es corta, se trata de una concentración de datos de la parte central de la distribución. La longitud de los bigotes señala la mayor o menor concentración de los datos en las zonas extremas. Como dijimos antes, el box-plot es un gráfico que ayuda a explorar los datos, a hacerse una idea inicial de la distribución y esto puede ser muy valioso cuando se trata de interpretarlos, porque permite sugerir hipótesis que expliquen la distribución que se observa.

Haciendo uso de la amplitud intercuartílica estableceremos criterios para detectar valores que destaquen por alejarse sustancialmente del grupo mayoritario. Se trata de mediciones atípicas o excepcionalmente extremas, porque sean excesivamente grandes o excesivamente pequeñas. La identificación de estos valores es importante en la etapa exploratoria de los datos porque obliga a mirarlos en detalle. Puede tratarse de un error de medición o bien de un sujeto (o unos pocos) que se aparta de manera excepcional del grupo y que merece un análisis más detallado y particularizado.

Tukey (1977) analiza la distancia de los casos a los cuartiles y sugiere tratar como “lejanas” a las observaciones que se encuentren a más de una amplitud intercuartílica y media ( $1.5 * AIQ$ ) por debajo del primer cuartil o por encima del tercero, pero a menos de tres veces la amplitud intercuartílica ( $3 * AIQ$ ). Además, aquellas observaciones que estén más allá de tres  $AIQ$  por debajo del primer cuartil o por encima del tercero se denominan “muy lejanas”. Este criterio determina entonces zonas en las que pueden hallarse las observaciones y según en cuál de ellas se encuentren, se las identifica como “cercanas”, “lejanas” o “muy lejanas”. Las zonas son las siguientes:

- Cercanas: Entre  $Q_1$  y  $Q_1 - 1.5 * AIQ$  o bien entre  $Q_3$  y  $Q_3 + 1.5 * AIQ$
- Lejanas: Entre  $Q_1 - 1.5 * AIQ$  y  $Q_1 - 3 * AIQ$  o entre  $Q_3 + 1.5 * AIQ$  y  $Q_3 + 3 * AIQ$
- Muy lejanas: Menores que  $Q_1 - 3 * AIQ$  o mayores que  $Q_3 + 3 * AIQ$

La división en zonas puede verse más claramente en un box-plot. En ese gráfico se toma la distancia entre los cuartiles tercero y primero (la amplitud intercuartílica) como unidad de medida, luego se calcula una vez y media esa medida ( $1.5 * AIQ$ ) y tres veces esa medida ( $3 * AIQ$ ) como puntos de corte para decidir cuándo una observación se aleja excepcionalmente del grupo. Los segmentos del box plot se cortan si se alcanza el máximo de la distribución (hacia arriba) o el mínimo (hacia abajo). Así, los segmentos tienen una longitud que es o bien  $1.5 * AIQ$  o bien la distancia hasta el máximo o mínimo.



#### 4.4.9 Medida de la dispersión cuando no hay distancias

Todo lo indicado hasta el momento acerca de la variabilidad ha necesitado de la medición de la distancia entre las observaciones: desde el comienzo hablamos de cercanía o lejanía entre los datos. Por lo tanto estas medidas, desde el recorrido hasta el coeficiente de variación, solo tienen sentido si la variable es de nivel intervalar o proporcional. Si la variable tiene nivel nominal u ordinal habrá que medir su variabilidad de otra forma. En estos casos cambia un poco el significado de la variabilidad, ya que estaremos en presencia de una variable más dispersa cuanto más *equitativamente* se distribuya el total de observaciones entre las distintas categorías. Por ejemplo, si 100 individuos son clasificados según cómo sea su rendimiento en: muy bueno, bueno, regular, insatisfactorio; la distribución tendrá más dispersión si 25 de ellos se encuentran en cada categoría que si la gran mayoría está en una sola. La distribución:

Rendimiento	f	f'
Muy bueno	25	0.25
Bueno	25	0.25
Regular	25	0.25
Insatisfactorio	25	0.25
Total	100	1.00



Tiene más dispersión que esta otra:

Rendimiento	f	f'
Muy bueno	5	0.05
Bueno	80	0.80
Regular	5	0.05
Insatisfactorio	10	0.10
Total	100	1.00

¿Por qué? Porque en la segunda, los casos están muy concentrados en una categoría (bueno), mientras que en la primera se dispersan entre todas.

Notemos que ahora habrá más dispersión cuanto más parecidas sean las frecuencias entre sí. Esto puede parecer contradictorio con lo indicado para variables cuantitativas, pero allí la mayor dispersión viene dada por la mayor disparidad entre los valores de las variables, que no puede evaluarse con variables nominales u ordinales.

Esta forma de considerar la dispersión equivale a la idea de incertidumbre. Supongamos que conocemos que la distribución del rendimiento es como lo muestra la primera tabla y que debemos “adivinar” cuál es el rendimiento de una persona elegida al azar. No tenemos ninguna razón para creer de manera preferencial que la persona sea de rendimiento muy bueno, bueno, regular o insatisfactorio; ya que todos son igualmente posibles. En esta situación, la incertidumbre es completa. Por el contrario, si supiéramos que la distribución es la que muestra la segunda tabla, tenderíamos con justa razón a creer que hay más chances que la persona elegida al azar tenga rendimiento bueno, ya que es bastante más probable que pertenezca a esa categoría que a otra. Diremos que aquí tenemos menos incertidumbre.

La medida para expresar de manera sintética esta dispersión es:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^k f'_i * \log f'_i$$

El cálculo consiste en multiplicar cada frecuencia relativa por su propio logaritmo y sumar para todas las categorías. El resultado de la sumatoria siempre es negativo, por lo que la fórmula incluye un signo menos para volverlo positivo. Este coeficiente expresa en un solo número la magnitud de la dispersión. Cuanto más pequeña sea esta medida, tanto menos dispersa (o más concentrada) será la distribución de la variable que se analiza.

Aplicado a las dos tablas de más arriba resulta, para la primera:

$$H(x) = -(0.25*\log 0.25 + 0.25*\log 0.25 + 0.25*\log 0.25 + 0.25*\log 0.25) = -(-0.60) = 0.60$$

Y, para la segunda:

$$H(x) = -(0.05 \cdot \log 0.05 + 0.80 \cdot \log 0.80 + 0.05 \cdot \log 0.05 + 0.10 \cdot \log 0.10) = -(-0.31) = 0.31$$

Así, a la distribución en la que las frecuencias están más concentradas, es decir la que tiene menor dispersión, le corresponde un menor valor de  $H(x)$ .

Cuando la variable tiene solo dos categorías, la proporción de casos en una de ellas es el complemento a uno de la otra, si en una categoría la proporción es  $p$  en la otra será  $1 - p$ . La máxima concentración se da cuando todos los casos están en una sola categoría,  $p = 1$  y  $1 - p = 0$ , allí la dispersión vale cero, porque se trata de una constante: a todos los individuos les corresponde el mismo valor de la variable. La máxima dispersión sucede cuando la distribución entre las dos categorías es equitativa, es decir cuando la mitad de los casos está en cada una:  $p = 0.5$  y  $1 - p = 0.5$ . La medida de esta variabilidad también se llama varianza, pero su cálculo es muy diferente del caso de variables cuantitativas. Para una variable nominal de dos categorías (dicotómica), la varianza es:

$$s^2 = p * (1 - p)$$

La desviación estándar es:

$$s = \sqrt{p * (1 - p)}$$

Que alcanza su mínimo en cero cuando todos los casos están en una sola categoría y su máximo en .25 cuando se distribuyen mitad en cada una.

## 4.5 El individuo en relación a su grupo

Un uso muy frecuente de las medidas que acabamos de ver es que permiten decidir si un *valor particular* está cerca o lejos del promedio, o bien si se sitúa o no en los extremos de una distribución. Un valor particular en este caso se refiere al valor de la variable en un *caso*, en un *individuo*, por ejemplo, el puntaje que un sujeto obtiene en una prueba, el ingreso de un hogar, la PBI per cápita de un país. Así formulado el problema puede parecer muy elemental, porque puede “verse” si un número está cerca o lejos de otro. Si sabemos que una persona tiene dos metros de estatura, no necesitamos hacer cuentas para saber que es alto, más alto que la mayoría de las personas. Sin embargo, en el caso de medidas menos familiares, a veces resulta difícil hacer juicios de distancia sobre valores absolutos. Si un país tiene PBI per cápita de U\$S20000, hace falta conocer más datos para evaluarlo como alto o bajo,

Si sabemos que en una prueba de memoria con un puntaje máximo de 100 puntos, una persona logró 80 puntos, ¿estamos autorizados para decir que obtuvo un

puntaje alto? La respuesta es no, porque no sabemos qué puntajes obtuvieron las demás personas que hicieron la prueba. Si la media del grupo completo hubiese sido 60 puntos, entonces 80 sería un valor elevado, pero si la media hubiese sido de 85, entonces el caso que estamos considerando se encontraría por debajo del promedio. Más aún, si el promedio fuese 60 y la mayoría de los evaluados hubiese obtenido puntajes cercanos a 60 (poca variabilidad), entonces el valor 80 podría considerarse como muy elevado. Solo conocer su puntaje individual no nos dice nada acerca de la posición de un sujeto particular. Dos ejemplos:

- Nos informan que un niño obtuvo un puntaje bruto de 85 en la escala de desarrollo infantil de Bayley (?), no tenemos, en principio ningún criterio para decidir si ese puntaje es alto o bajo.
- El Índice de Democracia (?) de un país es 7.5. ¿Dónde se ubica este país en el conjunto de democracias del mundo? ¿Es alto, medio...?

Para situaciones como éstas, muy frecuentes en evaluaciones cuantitativas, será necesario conocer cuál es la posición *relativa* que un puntaje ocupa respecto del conjunto completo de observaciones.

Supongamos que se aplica una prueba de ortografía a una muestra de alumnos de tercer grado y que el promedio de errores es 10 ( $\bar{x} = 10$  errores) y que la desviación estándar es de 4 ( $s = 4$  errores). Si un alumno comete 6 errores ( $x = 6$  errores), podemos decir que cometió menos errores que el promedio del grupo. El cálculo de la diferencia entre  $x$  y  $\bar{x}$  da  $-4$  errores ( $x - \bar{x} = 6 - 10 = -4$ ), este resultado nos informa que este alumno se ubica a 4 errores por debajo del promedio (por debajo queda expresado en el signo menos el resultado). Ésta es una medida concreta, ya que expresa el número de errores que separan al alumno del comportamiento resumido del grupo (expresado en la media); dicho de otra manera, estamos considerando los valores absolutos. Si ahora a esta diferencia la dividimos por la desviación estándar obtenemos  $-1$  (procedente de  $\frac{-4}{4}$ ), que ya no tiene unidades, es un número abstracto. Como la desviación estándar es de 4 puntos y el alumno se encuentra a cuatro puntos de la media, esto equivale a decir que el alumno se encuentra “a una desviación estándar por debajo del promedio”.

La operación que hemos hecho ha sido la de restar al valor particular (de ese alumno) la media y dividir el resultado en la desviación estándar, hemos calculado lo siguiente:

$$\frac{x - \bar{x}}{s}$$

Este número, que como dijimos no tiene unidades, es diferente para cada valor de  $x$ , y mide la distancia a la que se encuentra una observación particular ( $x$ ) de la media ( $\bar{x}$ ), expresada como fracción de la desviación estándar ( $s$ ). Decimos que

se trata de una medida *estandarizada* del alejamiento que tiene una observación particular del promedio del conjunto de observaciones.

Hemos así expresado la posición del alumno respecto del grupo al que pertenece de manera relativa, en términos de desviaciones estándar.

La variable que resulta de esta operación se llama **desvío estándar**, ya que se trata de un desvío (calculado en la diferencia  $x - \bar{x}$ ) expresado como cantidad de desviaciones estándar. Se utiliza la letra  $z$  para indicarla, así:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Debido a que la letra  $z$  se utiliza de manera universal para indicar este o **puntaje  $z$**  o **puntuación  $z$** . Esta nueva variable tiene media igual a cero y desviación estándar igual a uno<sup>10</sup>.

Volvamos sobre el ejemplo del número de síntomas en que se basa el diagnóstico de depresión, cuya media fue de 7 y su desviación estándar de 1,55.

Paciente	$x_i$ (número de síntomas)	$x_i - \bar{x}$ (desvíos)	$z$ (desvíos estándar)
1	5	-2	-1.29
2	6	-1	-0.65
3	6	-1	-0.65
4	8	1	0.65
5	8	1	0.65
6	9	2	1.29

La última columna proviene de haber dividido cada desvío en la desviación estándar (1.55). Los desvíos indican a cuántas unidades de la variable (en este caso *número de síntomas*) se ubica cada caso del promedio. Los desvíos estándar indican a cuántas desviaciones estándar se encuentra cada caso del promedio. El primer paciente está 1.29 desviaciones estándar por debajo del promedio, el tercero está a 0.65 desviaciones estándar por debajo del promedio, etc.

Para variables nominales, se procede de la misma manera, solo cambia el cálculo de la desviación estándar:

<sup>10</sup>Dado que  $\bar{x}$  y  $s$  son constantes, aplicando las propiedades de la media, resulta:

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)} = \frac{\bar{x} - \bar{x}}{s} = 0$$

También haciendo uso de las propiedades de la varianza, la de  $z$  es:

$$V(z) = V\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right) = \frac{1}{s^2} (V(x) - V(\bar{x})) = \frac{1}{s^2} (V(x) - 0) = \frac{1}{s^2} V(x) = 1$$

ya que la media es constante por lo que tiene varianza nula, y  $V(x) = s^2$ .

Si en un país “A” se encuentra que el 12.5% de los ciudadanos cree que da lo mismo un gobierno autoritario que uno democrático (pregunta P8STGBS de Latinobarómetro) ¿es mucho o poco? Para saberlo necesitamos conocer el porcentaje general de esta respuesta en el conjunto de países que se observaron: este valor es, para los países que participan del estudio, 27.6%. Ahora se sabe que en el país “A” la proporción de los que creen que da lo mismo el tipo de gobierno es más baja que en el conjunto de países de la región. ¿Cuánto más baja? Se requiere indicar su posición relativa, y eso se hace en términos de puntaje  $z$ . La varianza esta variable se calcula como  $p*(1-p) = .276*(1-.276) = 0.1998$  y la desviación estándar como  $\sqrt{0.1998} = .447$ . Entonces  $z = \frac{0.125-0.276}{0.447} = -0.34$ .

Que indica que ese país esta *levemente* por debajo del conjunto. En los próximos capítulos avanzaremos en el análisis de los puntajes  $z$ .

Cuando se trata de variables de nivel ordinal también es posible ubicar de manera relativa cada valor de la variable, aunque no puedan medirse distancias. Es así porque en esas variables podemos calcular percentiles e indicar a qué percentil corresponde cada valor. Antes vimos el modo de señalar gráficamente la ubicación de los percentiles, allí buscamos de identificar el valor de la variable que corresponde, por ejemplo, al percentil 90 ó a cualquier otro. Podemos hacer también el recorrido inverso: dado un valor de la variable ¿a qué percentil corresponde?

Consideremos los siguientes puntajes brutos obtenidos en una prueba psicológica administrada a una muestra de 310 personas:

x	f	F	F'
20-29	0	0	0
30-39	10	10	0.03
40-49	30	40	0.13
50-59	50	90	0.29
60-69	70	160	0.52
70-79	90	250	0.81
80-89	40	290	0.94
90-99	10	300	0.97
100-109	5	305	0.98
110-119	5	310	1
Total	310		

Algunos percentiles de esta distribución, por ejemplo,  $P_{20}$ ,  $P_{60}$  y  $P_{90}$ , cuando se piden a R, dan:

```
## P20 P60 P90
## 54.5 74.5 84.5
```

Procediendo del mismo modo, se realiza la siguiente correspondencia de puntajes

brutos a percentiles:

Percentil	X
10	47.0
20	54.5
30	60.4
40	64.9
50	69.3
60	74.5
70	76.3
80	79.8
90	84.5

La tabla nos informa sobre los valores de la variable donde se divide cada 10% del total de casos. Usando la definición de los percentiles diremos que:

- El 10% de los sujetos obtuvo 47 puntos o menos.
- El 20% obtuvo 54.5 puntos o menos y así para el resto.

Con esta información sabemos que si una persona obtuvo 50 puntos, tiene un puntaje muy bajo, porque supera a menos del 20% del grupo. O dicho de otra manera, más del 80% de las personas alcanzaron puntajes más altos que él. Por el contrario si alguien obtuvo 88 puntos, tiene un puntaje muy alto, ya que supera al percentil 90, con lo que menos del 10% del grupo lo supera. O bien, él supera a más del 90%.

De este modo, la construcción de una tabla en la que se indica el valor de la variable (el puntaje en la prueba) correspondiente a cada percentil, permite conocer si un puntaje dado se ubica en algún extremo de la distribución (si es excepcionalmente elevado o bajo) o si es un valor intermedio.

Estas tablas de correspondencia entre valores absolutos (o puntajes brutos) y los correspondientes valores relativos pueden también construirse a partir de los desvíos estándar, para lo que se debe transformar cada valor observado en su puntuación  $z$ . Para el ejemplo anterior se debe calcular la media y la desviación estándar, que dan:  $\bar{x} = 68.4$  y  $s = 15.7$ . Con esto se indican los puntajes  $z$  que corresponden a cada puntaje bruto, con la transformación  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ .

Para la marca de clase del primer puntaje bruto (25), el puntaje  $z$  que le corresponde es:

$$z = \frac{25 - 68.4}{15.7} = -2.8.$$

Al repetir esta operación para cada puntaje bruto se obtiene la tabla de correspondencias:

Intervalo de puntajes brutos	Puntaje $z$
20-29	-2.8
30-39	-2.1
40-49	-1.5
50-59	-0.9
60-69	-0.2
70-79	0.4
80-89	1.1
90-99	1.7
100-109	2.3
110-119	3.0

Una tabla de ese tipo (ya sea construida a partir de los percentiles o bien de los puntajes  $z$ ) se conoce como **baremo** y es absolutamente necesario para cualquier tipo de evaluación psicológica o educativa ya que posibilita decidir en qué lugar se encuentra un sujeto dado, respecto de su grupo de referencia. Esto se requiere porque, por ejemplo, para una prueba de inteligencia, un puntaje que es normal para la edad de 13 años, no lo es para los 16; los puntajes de alguien de 13 años se comparan con los puntajes de otras personas de 13 años. El baremo provee la transformación de puntajes absolutos en puntajes relativos.

---

Un **baremo** es una tabla de valores transformados que permiten ubicar a un sujeto en relación a su grupo de referencia.

---

El signo del puntaje  $z$  indica si un valor particular está por encima (si es positivo) o por debajo de la media (si negativo). El valor absoluto de  $z$  señala cuán lejos o cerca está la observación de la media. Para evaluar esta distancia, contamos con un resultado general, que es válido cualquiera sea la forma de la distribución. Ese resultado establece que a una distancia de hasta un número ( $k$ ) determinado de desviaciones estándar se concentra no menos de  $1 - \frac{1}{k^2}$  de los casos. Si  $k = 2$  este resultado indica que a una distancia de hasta dos desviaciones estándar de la media se concentra por lo menos la fracción  $1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = .75$  de las observaciones. Dicho de otra manera, el intervalo que va desde la media menos dos desviaciones estándar y la media más dos desviaciones estándar contiene al menos al 75% de los casos. Si  $k = 3$ , la proporción de casos que allí se encuentra es por lo menos 89% (que resulta de  $1 - \frac{1}{3^2}$ ). Ese resultado se conoce como desigualdad de Chebycheff

$$P(|x - media| < k * s) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

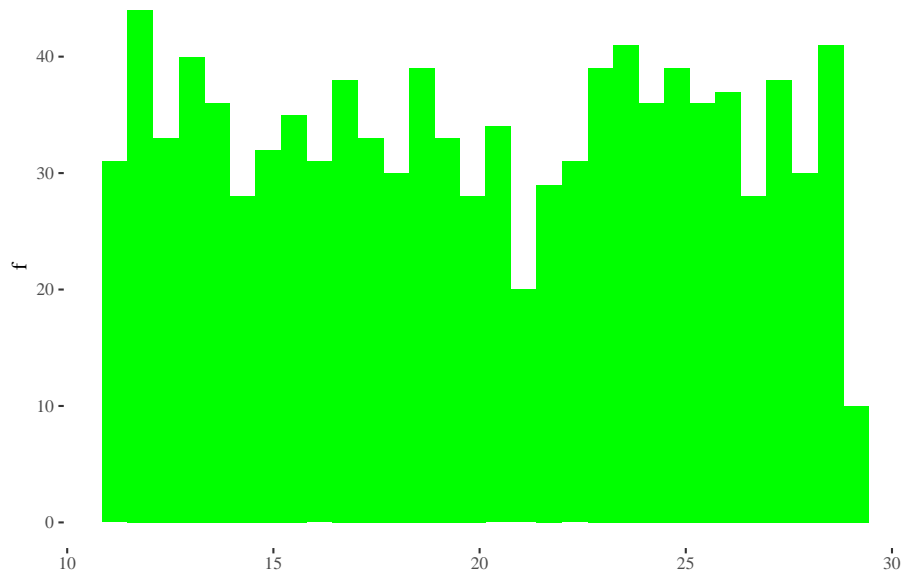
En esta expresión leemos por ahora que la proporción de casos que se encuentran a una distancia de la media menor a  $k$  desviaciones estándar es mayor o igual

a uno menos uno sobre  $k$  cuadrado. Cuando se asigna a  $k$  un valor, se puede calcular esa proporción para una distancia concreta a la media.

Si se cumple que la distribución es unimodal y aproximadamente simétrica, esta regla se puede simplificar del siguiente modo: en el intervalo de **una** desviación estándar de la media se encuentra aproximadamente el 68% de los casos, a **dos** desviaciones el 95 y a **tres**, el 99%.

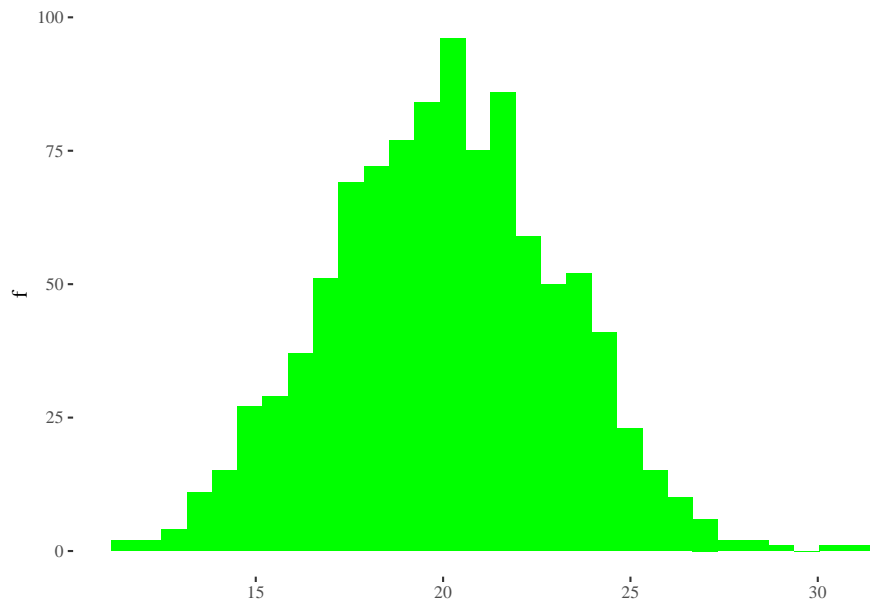
Con estos criterios, podemos evaluar los valores de la variable como pertenecientes al conjunto más frecuente o a los extremos, menos frecuentes, de la distribución. Por ejemplo, si en una distribución simétrica, a un caso le corresponde un puntaje  $z = 3$  se trata de un caso excepcionalmente elevado, porque pertenece a una distancia que solo es superada por el .5% del total de observaciones. Usaremos el criterio de considerar a los casos que estén a menos de dos desviaciones por encima o por debajo de la media como “esperables”, porque están en la región de mayor frecuencia. Los casos que estén entre dos y tres desviaciones estándar serán valores “elevados” si  $z > 0$  y “bajos” si  $z < 0$ . Los casos que se ubican a tres o más desviaciones estándar ( $|z| \geq 3$ ) serán considerados “excepcionalmente” altos o bajos según el signo de  $z$ .

El gráfico siguiente muestra el intervalo de dos desviaciones estándar para una distribución no cumple los supuestos mencionados, a la que se aplica la desigualdad de Chebycheff.



Mientras que la siguiente distribución es unimodal y aproximadamente simétrica, por lo que es válida la regla empírica.





Volveremos sobre este tema con más detalle cuando tratemos una distribución teórica que se llama distribución normal.

## 4.6 Resumen de medidas descriptivas

### 4.6.1 Medidas de posición

Nivel de medición mínimo requerido		
Centrales	Modo	Nominal
	Mediana	Ordinal
	Media	Intervalar
No centrales	Cuartiles	Ordinal
	Quintiles	Ordinal
	Percentiles	Ordinal

### 4.6.2 Medidas de dispersión

Nivel de medición mínimo requerido		
Entre extremos	Recorrido	Intervalar
Basada en el orden	Amplitud intercuartílica	Intervalar

		Nivel de medición mínimo requerido
Basadas en la media	Varianza	Intervalar
	Desviación estándar	Intervalar
	Coefficiente de variación	Intervalar
De incertidumbre	Coefficiente de incertidumbre	Nominal

## Capítulo 5

# Relación entre variables: los fundamentos

Hasta este punto se han descrito variables observadas o medidas a través de instrumentos de una por vez. Ahora, el objetivo se acerca más al modo de hacer investigación en Ciencias Sociales. Es así porque en este capítulo y el siguiente se trata con relaciones entre variables: no ya describir cada variable por separado sino reunir las en relaciones de dos como mínimo, pero que puede incluir a una gran cantidad. Buscar relaciones entre variables es comenzar a transitar el camino de la explicación de los fenómenos que observamos.

Si nos preguntamos, por ejemplo: ¿por qué un tratamiento es exitoso con algunos pacientes diagnosticados de depresión y con otros no? A partir de antecedentes que existan sobre el tema, formularemos hipótesis sobre la respuesta: quizás la edad influya, puede suceder que con pacientes más jóvenes se obtenga mejor resultado que con los de más edad. Razonando así, introducimos otra variable, la edad, que aportaría a explicar la razón de los diferentes resultados del tratamiento. La hipótesis está formulada como una relación entre dos variables: se trata de indagar por el efecto que la edad (primera variable) tendría sobre el resultado del tratamiento (segunda variable). La edad podría ser un factor explicativo del resultado del tratamiento.

Dentro del mismo ejemplo, también podemos sospechar que quienes han sido diagnosticados más precozmente pueden aprovechar el tratamiento mejor que quienes traen una dolencia de larga data. Aquí la variable que viene a explicar el resultado es el tiempo de evolución de la enfermedad. Ahora el tiempo de evolución de la enfermedad podría ser otro factor explicativo del resultado del tratamiento. Notemos el acento en “podría ser”: estas relaciones son hipotéticas, nuestro objetivo será analizar la evidencia que haya a su favor o en su contra. Esquemáticamente la relación se plantea de la siguiente manera:

Estas dos variables son parte de la hipótesis para explicar las diferencias

Figura 5.1: Relación hipotética entre dos factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión

en los resultados que ofrece un determinado tratamiento sobre pacientes diagnosticados de depresión. Puede haber más variables: la gravedad de la depresión, el sexo del paciente (quizás el resultado no sea igual en mujeres que en hombres), el apoyo familiar que el paciente reciba, etc.

Jamás agotaremos el conjunto de todos los factores explicativos de un fenómeno, porque en última instancia cada caso es único. Los fenómenos que observamos son multicausados, por lo que no puede decirse que una variable  $X$  sea la causa de otra variable  $Y$ <sup>1</sup>. Pero lo que sí puede hacerse es analizar la importancia relativa de los diferentes factores explicativos; saber en qué grado aporta cada uno a las diferencias que se observan.

Ilustremos esto con otro ejemplo: el resultado escolar que alcanzan los alumnos. No hay dudas que cada niño tiene una trayectoria única, que depende de su historia, de su contexto familiar, etc. Supongamos que analizamos el resultado escolar obtenido en primer grado y observamos que algunos cursos tienen docentes tradicionales, que usan los mismos métodos estandarizados de enseñanza desde hace muchos años. Otros cursos tienen docentes que invitan a los alumnos participar, que innovan en los métodos de enseñanza. Luego comparamos el rendimiento de los alumnos en los dos cursos y vemos que los alumnos del primer grupo aprenden más lentamente que los del segundo y que además, los primeros dicen que se aburren yendo a la escuela y los otros no. Esto no sucede con todos los niños: habrá en el primer grupo algunos que aprenden más rápido y que se divierten, así como algunos del segundo grupo tardarán más en aprender. Pero, en general, en promedio, podríamos hallar mejores resultados entre los alumnos que tienen docentes innovadores. Esto nos lleva a indicar que hay evidencia para creer que los docentes innovadores

---

<sup>1</sup>Salvo en el caso de diseños experimentales que permitan tener control sobre el conjunto de variables que participan en el resultado que se observa.

Figura 5.2: Relación hipotética entre dos factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión

obtienen con sus alumnos mejores resultados que los docentes tradicionales. Pero esto no es para todos los alumnos, sino para la mayoría de ellos. De eso se trata la búsqueda de factores explicativos: en este ejemplo diremos que, de los múltiples factores que explican por qué a algunos chicos les va bien en la escuela y a otros les va mal, el tipo de docente es parte de la explicación.

Las hipótesis son respuestas tentativas a la pregunta formulada como problema de la investigación. Como tales, consisten en el planteamiento de una relación entre, al menos, dos variables. Recordemos que las hipótesis constituyen afirmaciones que se derivan del modelo de análisis que el investigador ha propuesto para explicar una situación dada. Las hipótesis son consecuencias deductivas de la teoría, cuya verificación no es suficiente para validar la teoría, aunque sí para “aportar evidencia en su favor”. Además, las hipótesis como tales, rara vez pueden ponerse a prueba de manera directa, son sus consecuencias observables las que permiten la verificación empírica. En cualquier modelo explicativo hipotético participa un número de variables mayor a dos, sin embargo de las hipótesis pueden deducirse relaciones más simples, inicialmente solo de dos variables.

El siguiente esquema muestra la relación entre varias variables que aportarían (hipotéticamente) a explicar las diferencias en el rendimiento escolar, desde la perspectiva de las condiciones familiares (arrobaQuivy1992).

El esquema muestra una hipótesis según la cual, los padres con más educación tienden a tener ocupaciones de mayor jerarquía, lo que implica de mejores ingresos y esto puede ayudar a crear condiciones adecuadas para el estudio, como disponer de un lugar para estudiar o tener acceso a otras fuentes de

aprendizaje (visitas a museos, viajes, etc.). También los padres con mayor educación probablemente valoren más el estudio y así ofrezca mayor apoyo a sus hijos en la escuela. Por último, sería de esperar que los padres con más educación generen un ambiente con hábitos de lectura y discusiones que transmitan a sus hijos el valor de la educación.

Esto es más cercano a la realidad, en la que las variables se relacionan de manera más compleja que la simple  $x \rightarrow y$ . Sin embargo la base para analizar estas relaciones complejas, son las relaciones bivariadas, es decir, entre solo dos variables.

Establecer de manera hipotética una relación entre dos variables equivale a afirmar que, por alguna razón, los cambios de una de ellas van acompañados de cambios en la otra. Pero esto puede suceder de maneras muy diferentes, por ejemplo, el trueno sucede al relámpago, los síntomas de tuberculosis coinciden con la detección del bacilo de Koch, los movimientos sociales se incrementan en tiempos de deterioro económico, las personas abusadas en la infancia son más propensas a la depresión. En algunos de estos ejemplos puede identificarse una secuencia cronológica, señalando cuál de los dos eventos sucede primero, en otros esta distinción no es segura, a veces una variable es la que incide sobre la otra, otras veces es solo una contribución, por último, hay casos en que su ocurrencia conjunta o sucesiva se debe a otras razones. Evitaremos, por ahora hablar de relaciones de causalidad, llegaremos a este concepto hacia el final del capítulo y veremos que debe tratarse con suma cautela.

Con el objetivo de ordenar la gran variedad de formas que pueden asumir las relaciones entre variables, estableceremos algunos criterios de clasificación que, sin ser exhaustivos, nos ayudarán a verlas desde diferentes ópticas.

El modo más usado para observar relaciones entre dos variables consiste en presentar el comportamiento conjunto de ellas a través de tablas o gráficos. Las primeras son más adecuadas para variables con pocas categorías (usualmente nominales), mientras que los gráficos son más pertinentes para mostrar relaciones entre variables métricas. Veamos un ejemplo para ilustrar el primer modo de representación: creemos que los niños que han crecido en diferentes tipos de hogar (solo con su madre, solo con su padre, con ambos o con otros parientes) tienen diferentes formas de relacionarse con sus compañeros (con relaciones de liderazgo, sumisión o rebeldía). En el lenguaje de las relaciones entre variables, estaríamos proponiendo que existe asociación entre el tipo de hogar en que el niño crece (con las cuatro categorías mencionadas) y el tipo de relación que mantiene con sus pares. La presentación conjunta de esas dos variables es:

Disposición de las variables y sus categorías para analizar la relación entre dos variables

	Relación con los pares		
Tipo de hogar	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo

	Relación	con los	pares
Monoparental materno			
Monoparental paterno			
Nuclear			
Extendido			

## 5.1 Tablas de contingencia

Cuando se distribuyen los datos en las celdas, se obtiene una tabla bivariada (porque contiene dos variables), que también se llama tabla de contingencia o tabla de distribución conjunta o también tabla de doble entrada. Las celdas del interior de la tabla llevarán, cuando los datos sean recolectados, la cantidad de niños que se encuentren en cada coincidencia de categorías. Si nuestra hipótesis afirmara que los niños provenientes de hogares nucleares son más propensos a ser líderes, esperaríamos una concentración relativa de casos en la celda correspondiente a “hogar nuclear” - “liderazgo”, hipótesis que luego deberemos confrontar con la información recogida.

---

Una **tabla bivariada** o **tabla de contingencia** o **tabla de distribución conjunta** es un arreglo con tantas filas (horizontales) como categorías tenga una de las variables y tantas columnas (verticales) como categorías tenga la otra variable.

---

Por oposición, las tablas que se mostraron en los capítulos anteriores, así como las medidas descriptivas que se calcularon, se denominan univariadas.

A este arreglo se agrega una fila y una columna adicionales que corresponden a los totales de cada categoría. A los fines de usar un lenguaje común, en la tabla llamaremos filas a la líneas horizontales y columnas a las verticales e identificaremos la dimensión de la tabla indicando cuántas filas tiene y cuántas columnas, en este orden. En el ejemplo anterior, la dimensión de la tabla es cuatro por tres, porque tiene cuatro filas y tres columnas correspondientes a la cantidad de categorías de cada una de las dos variables.

---

La **dimensión** de la tabla se indica como  $fXc$ , donde  $f$  es el número de categorías de la variable que está en las filas y  $c$  es el número de categorías de la variable que está en las columnas.

---

La celda en la que, bajo la hipótesis indicada, esperaríamos una mayor concentración relativa de casos corresponde entonces a la tercera fila y tercera columna. Con  $f$  indicaremos la frecuencia y con el subíndice la celda a que

corresponde, así,  $f_{ij}$  será la cantidad de casos en la celda que corresponde a la fila  $i$  y a la columna  $j$  simultáneamente. La frecuencia de la celda de “nuclear-liderazgo” será indicada entonces como  $f_{33}$ . Para aclarar la presentación de la tabla, se agregan una fila y una columna en la que se indica el total de casos de cada una de ellas, que se llaman marginales de fila y de columna. La notación será:

$f_{i.}$  (“efe i-punto”) para los marginales de fila

$f_{.j}$  (“efe punto-jota”) para los de columnas

$f_{..}$  (“efe punto-punto”) para el total general.

Con esa notación,  $f_{3.}$  indica el total de niños que crecieron en hogares nucleares y  $f_{.2}$  el total de quienes se vinculan con rebeldía con sus compañeros, la tabla anterior resulta:

Tabla 5.4: Disposición de las frecuencias para el análisis de la relación entre dos variables.

	Relación	con los	pares	
<b>Tipo de hogar</b>	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	Total
Monoparental materno	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{1.}$
Monoparental paterno	$f_{21}$	$f_{22}$	$f_{23}$	$f_{2.}$
Nuclear	$f_{31}$	$f_{32}$	$f_{33}$	$f_{3.}$
Extendido	$f_{41}$	$f_{42}$	$f_{43}$	$f_{4.}$
Total	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$f_{.3}$	$f_{..}$

Si hemos recogido datos sobre estas características de los niños, la tabla podría quedar así:

Tabla 5.5: Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar (organización de las frecuencias).

	Relación	con los	pares	
<b>Tipo de hogar</b>	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	Total
Monoparental materno	20	30	50	100
Monoparental paterno	10	40	15	65
Nuclear	5	10	25	40
Extendido	30	20	10	60
Total	65	100	100	265

Esta tabla dice que se han observado un total de 265 niños y se ha registrado el tipo de hogar en que crecieron y la forma en que se relacionan con sus compañeros. De los 265:



- 100 provienen de hogares monoparentales maternos:  $f_{1.}$ ,
- 65 de monoparentales paternos:  $f_{2.}$ ,
- 40 de nucleares:  $f_{3.}$  y
- 60 de hogares extendidos:  $f_{4.}$ .

Los mismos niños se relacionan con sus compañeros:

- 65 de ellos con sumisión:  $f_{.1}$ ,
- 100 con rebeldía:  $f_{.2}$  y
- 100 con liderazgo:  $f_{.3}$ .

Todas estas son lecturas de las frecuencias marginales. Marginales de fila las del tipo de hogar y marginales de columna las de la forma de la relación.

---

Se llama **frecuencias marginales de fila** a las frecuencias absolutas de las categorías de la variable que se ubica en las filas.

---



---

Las **frecuencias marginales de columna** son las frecuencias absolutas de las categorías de la variable ubicada en las columnas.\*

---

Las frecuencias de las celdas, que se llaman **frecuencias conjuntas** se leen: 20 de los niños observados crecieron en hogares monoparentales maternos y se relacionan con sus compañeros con sumisión ( $f_{11}$ ), 30 niños se relacionan con liderazgo y provienen de hogares monoparentales maternos ( $f_{12}$ ), 10 se relacionan con rebeldía y provienen de hogares nucleares ( $f_{32}$ ) y del mismo modo el resto de las frecuencias conjuntas. Ellas indican la cantidad de casos que reúnen al mismo tiempo las dos condiciones que se indican en la fila y en la columna.

---

Las **frecuencias conjuntas** indican la cantidad de casos que corresponden simultáneamente a una determinada categoría de la variable de las filas y una categoría de la variable de columnas.

---

## 5.2 Frecuencias relativas

Del mismo modo en que trabajamos con las tablas de distribución de frecuencia de una sola variable, podemos transformar todas estas frecuencias absolutas en relativas, por el simple procedimiento de dividir las en el total general. Resulta así:

Tabla 5.9: Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar, frecuencias relativas.

	Relación con los pares			
<b>Tipo de hogar</b>	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	Total
Monoparental materno	0.08	0.11	0.19	<b>0.38</b>
Monoparental paterno	0.04	<b>0.15</b>	0.06	0.25
Nuclear	0.02	0.04	0.09	0.15
Extendido	0.11	0.08	0.04	0.23
Total	<b>0.25</b>	0.38	0.38	1

Leemos así las frecuencias que están destacadas en la tabla:

- El 15% del total de alumnos observados proviene de hogares monoparentales paternos y se relacionan con sus pares con rebeldía: Por ser una frecuencia relativa usamos la “prima” en la notación, entonces es  $f'_{22}$
- Un 25% del total se relaciona con sumisión, sin considerar el tipo de hogar del que provengan. Es  $f'_1$ .
- Un 38% proviene de hogares monoparentales maternos, sin tener en cuenta de qué manera se relacionan con sus pares. Es  $f'_{.1}$

La primera de estas frecuencias relativas es conjunta, las otras dos marginales. Verifique que queda bien clara la notación usada en cada caso y que pueden leerse las demás frecuencias relativas de la tabla.

### 5.3 Una clasificación en referencia al tiempo

Como señalamos al principio hay relaciones en las que resulta posible identificar a una de las variables como previa a la presencia de la otra, o a un evento como anterior a la ocurrencia del otro. Así, el trueno siempre sucede luego del relámpago, si tenemos la oportunidad de oírlo. Aun cuando no podamos establecer la causa de la relación entre los dos eventos, no tenemos dudas en señalar a uno como anterior al otro. Los malos tratos sufridos durante la niñez son anteriores (en la historia del sujeto) a la eventual manifestación adulta de conductas antisociales. De modo que si nos interrogáramos sobre la existencia de una relación entre estos dos eventos, ubicaríamos a los malos tratos como variable anterior, aunque solo fuera porque su manifestación es temporalmente previa. Así sucede también al buscar una relación entre los resultados de un examen de ingreso a la universidad y el rendimiento posterior de los alumnos.

Es importante indicar a esta altura que no estamos suponiendo que la relación exista, nos encontramos en el momento del planteo de las hipótesis; bien puede suceder que, luego del análisis de los datos, encontremos que la relación no es válida, que no se sostiene, en fin, que las observaciones no avalan una asociación entre malos tratos infantiles y conducta antisocial, o que el resultado de examen de ingreso no se relaciona con el desempeño posterior, pero esto no invalida que, en la relación que proponíamos, una variable sea tratada como anterior a la otra.

Así como en ciertos casos es posible anticipar el orden (sea lógico o cronológico) en que se presentan las variables que constituyen una relación, hay algunas situaciones en que esto es muy difícil, o imposible y otras en las que no tiene ningún interés. Una relación que ilustra el primer caso es la relación entre el comportamiento infantil y el trato que recibe de sus padres. Puede interpretarse a los niños revoltosos como respondiendo a la escasa atención que le brindan sus padres, o leer la forma en que los padres tratan a sus hijos como consecuencia de la mala conducta de estos últimos. En este ejemplo se ve que el orden en que se establezcan las variables que se busca relacionar está influido por la posición teórica que el investigador asuma.

Otros casos en los que no tiene interés mencionar qué variable es anterior y cual posterior son típicos de los estudios descriptivos, en los que interesa mostrar cómo se distribuyen ciertas variables, y no qué relación puede haber entre ellas. Así, una distribución de la población por sexo y edad como la de la tabla siguiente:

Tabla 5.10: Departamento Capital, Provincia de Córdoba.  
Población por sexo según grupos de edad. Año 2001.

Grupos de edad	Varones	Mujeres	Total
0-4	56913	55053	111966
5-9	57471	56073	113544
10-14	55564	54394	109958
15-19	55581	55834	111415
20-24	67519	69727	137246
25-29	53736	54667	108403
30-34	42209	43852	86061
35-39	36910	39894	76804
40-44	34681	38243	72924
45-49	31879	36634	68513
50-54	30780	36187	66967
55-59	24485	29448	53933
60-64	19914	25038	44952
65-69	16485	22387	38872
70-74	13858	20831	34689
75-79	8816	15318	24134

Grupos de edad	Varones	Mujeres	Total
80-84	4423	9471	13894
85-89	1827	5355	7182
90-94	600	1906	2506
95-99	120	448	568
100 y más	8	43	51
Total	613779	670803	1284582

Solo pretende describir a la población y no tiene sentido preguntar qué variable es prioritaria a la otra o cuál depende de cuál.

Las relaciones en que no es posible o no interesa señalar qué variable es anterior, se llaman *simétricas*<sup>2</sup> o de variación conjunta o de covariación, con ellas simplemente puede preguntarse si las variables están correlacionadas. Es decir si varían simultáneamente, sin preguntar cuál es la que podría preceder a la otra.

Otro ejemplo de este tipo de relaciones es la que puede plantearse entre las calificaciones que los alumnos obtienen en dos materias que cursan simultáneamente; si encontramos que a aquellos alumnos que les va bien en Epistemología también obtienen buenas notas en Biología, no creeremos que un resultado incida en el otro, solamente describiremos que varían conjuntamente. Si luego nos interesamos por avanzar en un estudio explicativo iremos a buscar otras variables que den cuenta de esta covariación.

---

Una relación entre dos variables es **simétrica** cuando es de variación conjunta y no puede identificarse a una variable como previa a la otra\*

---

Por el contrario, aquellas relaciones en las que puede identificarse a una variable como anterior a otra se denominan *asimétricas*, es decir, no es lo mismo planearlas en un sentido que en otro. Una de las variables (la anterior) se llama antecedente y la otra (posterior) consecuente. En el contexto del diseño experimental, estas variables se denominan, respectivamente independiente y dependiente.

Puede observarse que una variable cambia a continuación de la otra (en sentido temporal) pero esto no nos autoriza a decir que cambia a causa de la otra, como resulta claro en el ejemplo del relámpago y el trueno. Que la relación sea asimétrica no implica que una variable sea ni la causa, ni un factor explicativo, de la otra.

A la inversa, en los estudios explicativos la relación debe ser asimétrica, porque

---

<sup>2</sup> Atención, éste es un uso diferente de los términos simetría y asimetría. La simetría de una distribución (univariada) indica su forma, acá se refiere al tipo de relación entre dos variables. El primer uso caracteriza a una variable, el segundo a una relación.

se busca identificar factores que anticipen determinados eventos. Por eso decimos que la asimetría es una condición necesaria de la causalidad, pero no suficiente.

---

Una relación entre dos variables es **asimétrica** cuando una de las variables precede (lógica o cronológicamente) a la otra y puede identificarse a una como antecedente y a la otra como consecuente.

---

## 5.4 La dirección de la relación

Cuando las variables que se ponen en juego en una relación tienen un nivel de medición superior al nominal, resulta posible hacer juicios de orden entre sus categorías, con lo que es posible indicar si los valores van creciendo o decreciendo. Ya sea que se trate de una relación simétrica o asimétrica, si las variables tienen nivel ordinal o superior, resulta de interés plantear la *dirección* de la relación. Se trata de otro criterio para clasificar relaciones entre variables: si a cambios ascendentes (crecientes) de una variable se siguen cambios ascendentes de la otra, llamamos a la relación *directa*. Si, por el contrario, un crecimiento de una de las variables va acompañado de una disminución en los valores de la otra, la denominaremos *inversa*<sup>3</sup>. Cuando se espera que la relación entre dos variables sea directa o inversa para toda la serie de categorías, decimos que la relación es monótona.

Por ejemplo, puede plantearse, de manera hipotética, la relación entre los años de educación y el salario. Las personas que han asistido más años a instituciones educativas tienden, en promedio, a tener ingresos más altos que quienes asistieron menos tiempo. La hipótesis anticipa una relación directa entre la escolarización y los ingresos.

---

Una relación entre dos variables medidas a nivel ordinal o superior es **directa** si cuando los valores de una de ella aumentan, también aumentan los de la otra.

---

Análogamente:

---

Se llama **inversa** a la relación entre dos variables de nivel ordinal o superior en la que los incrementos en los valores de una de ellas van acompañados de disminuciones en los valores de la otra.

---

La clasificación solo tiene sentido si puede hablarse de aumento o disminución, es

---

<sup>3</sup>No es directamente o inversamente proporcional. La proporcionalidad es otra cosa. Aquí solo se trata de que cambien en la misma dirección (ambas aumentan o ambas disminuyen) o en dirección inversa (una aumenta y la otra disminuye).

Figura 5.3: Relación hipotética entre la ayuda de los padres y el rendimiento escolar

decir, si es factible realizar juicios de orden entre las categorías de las variables. Por eso es que este criterio requiere, para su aplicación, que ambas variables tengan por lo menos nivel ordinal.

Por ejemplo, la calificación que se obtiene en un examen (variable consecuente, de nivel ordinal) puede tener relación directa con las horas dedicadas a estudiarla (variable antecedente, de nivel proporcional). Lo que equivale a decir que quienes estudian más horas tenderían a obtener calificaciones más altas.

Si en otro ejemplo, se formula como hipótesis que el tipo de escuela secundaria (variable antecedente, de nivel nominal) a la que los alumnos asistieron tiene relación con el rendimiento que alcanzan en su carrera universitaria (variable consecuente, de nivel ordinal), no es posible establecer la dirección de esta relación, porque no se cumple que ambas variables sean al menos ordinales.

Ejemplo (datos ficticios): la expresión “si los padres los ayudan con las tareas, a los chicos les va mucho mejor en la escuela” equivale a decir que la ayuda que los padres les dan a sus hijos está relacionada con mucha intensidad con el rendimiento en la escuela. La primera variable, la ayuda es la antecedente, que puede ser de nivel nominal, con categorías: ayuda, no ayuda; o bien ordinal, con categorías: ayuda siempre, casi siempre, pocas veces, nunca. La segunda variable, el rendimiento, es la consecuente, y sus categorías podrían ser: rendimiento alto, medio, bajo. El esquema de la relación será:

Y la tabla que reúna los datos para verificar esta relación podrá tener dimensión  $2 \times 3$ , con forma:

Disposición de las variables para analizar la relación entre la ayuda que los padres dan a sus hijos y el rendimiento que alcanzan en la escuela

	Rendimiento			
<b>Ayuda</b>	Alto	Medio	Bajo	Total
Si				
No				
Total				

O bien, considerando a la ayuda como ordinal, en una tabla de  $4 \times 3$

Disposición de las variables para analizar la relación entre la ayuda que los padres dan a sus hijos y el rendimiento que alcanzan en la escuela

	Rendimiento			
<b>Ayuda</b>	Alto	Medio	Bajo	Total
Siempre				
Casi siempre				
Pocas veces				
Nunca				

Rendimiento
Total

Planteadas de este modo, se trata de una relación asimétrica, ya que suponemos que es la ayuda (antecedente) la que incide sobre el resultado (consecuente). Si vemos el último esquema, puede considerarse la dirección (en el anterior no ¿por qué?) y la formularíamos como directa, es decir que, cuanto mayor sea ayuda que los padres aportan, tanto mejores serán los resultados. Esto está dentro de la hipótesis, aún no hemos recogido datos para avalarla o refutarla. Llegar a conocer si la ayuda de los padres contribuye en gran medida o escasamente a los resultados en la escuela, es un problema de la intensidad de la relación, que solo podrá responderse a posteriori, una vez que los datos están recolectados.

## 5.5 Concepto de riesgo relativo

En las tablas de contingencia de dimensión  $2 \times 2$ , que plantean relaciones asimétricas se suele calcular una medida que resulta de muy accesible interpretación, denominada riesgo relativo. Se trata de un cociente entre la proporción de casos que se encuentran en una categoría de la variable consecuente bajo determinado escenario (una categoría de la variable antecedente) y la proporción de casos que se hallan en la misma, bajo el escenario complementario (la otra categoría de la variable antecedente). Es un término que tiene uso regular en epidemiología y tiene la ventaja de la claridad en la comunicación. Por ejemplo, un informe afirma que “El riesgo relativo de cardiopatía isquémica (CI) es 2,5 veces mayor en pacientes hipertensos.” Se interpreta que las personas que son hipertensas tienen dos veces y media mayores posibilidades de sufrir CI que quienes no lo son. El riesgo relativo se usa principalmente (pero no solo) en la relación entre dos variables dicotómicas; en este ejemplo las variables dicotómicas son: ser hipertenso y haber sufrido cardiopatía isquémica, ambas con categorías si - no, a las que denominamos: hip, nohip y card, nocard, respectivamente. La primera es el antecedente y la segunda el consecuente, porque interesa plantear el posible efecto de la hipertensión sobre la CI. A partir de los datos obtenidos en el estudio de arrobaRamonGonzalezJuanatey2001, la relación se plantea así:

	card	nocard	Total
hip	4022	6555	10577
nohip	2068	19406	21474
Total	6090	25961	32051

Las frecuencias relativas son:

	card	nocard	Total
hip	0.380	0.620	1
nohip	0.096	0.904	1
Total	0.190	0.810	1

La frecuencia relativa .380 es el riesgo de tener cardiopatía isquémica si se es hipertenso, mientras que .096 es el mismo riesgo para personas que no padecen hipertensión. La comparación de ellos es el riesgo relativo:

$$\frac{.380}{.096} = 3.96$$

Este cociente mide cuántas veces más grande es el numerador que el denominador, por lo que indica cuántas veces más riesgo hay de tener cardiopatía isquémica si se padece hipertensión, que si no es así.

Ejemplo (datos del Operativo Nacional de Evaluación Argentina 2000): interesados en el efecto que podría tener el hábito de lectura de los alumnos sobre su rendimiento en Lengua, usamos una pregunta de un cuestionario aplicado a estudiantes del último año del secundario, que dice: “Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?” Con categorías de respuesta si - no. Nos interesa analizar la relación de esta variable con el resultado que los alumnos obtienen en la prueba de lengua, para lo cual cortamos los puntajes de esta prueba en dos categorías: altos (50 puntos o más) y bajos (menos de 50 puntos). Para la provincia de Córdoba, en el año 2000 resulta la siguiente tabla:

Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?	Puntaje de la prueba	de la Lengua	Total
Si	2382	Altos	1029912681
No	3530	Altos	9821 13351
Total	5912	Altos	2012026032

A fin de comparar los puntajes que obtienen quienes leen con los que obtienen los que no leen (para ver si hay alguna diferencia), hacen falta frecuencias relativas. En este caso se calculan según las filas de la tabla:

Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?	Puntaje de la prueba	de la Lengua	Total
Si	18,8%	Altos	81,2%100%



Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?	Puntaje de prueba	de la Lengua
No	26,4%	73,6%100%
Total	22,7%	77,3%100%

En esta tabla se observa que menos de un cuarto (el 22,7%) obtuvo resultados bajos, pero que este porcentaje es diferente entre quienes lee y quienes no lo hacen: entre quienes dicen que leen, menos del 19% (el 18,8%) tiene bajo puntaje, mientras que entre quienes dicen que no leen, ese porcentaje sube a más del 26 (26,4%). Dado que el resultado bajo se considera como el evento desfavorable, puede hablarse del riesgo de obtenerlo. Así, el riesgo de obtener puntaje bajo en Lengua es 18,8% para quienes dicen que leen y de 26,4% para quienes dicen que no leen. Estos valores son los que se usan para calcular el riesgo relativo, el cociente entre 26,4 y 18,8 es 1,4, por lo que diremos que hay 1,4 veces más chances de obtener bajos resultados en Lengua entre alumnos que no leen que entre los que sí lo hacen.

## 5.6 La intensidad

Sea que se trate de relaciones simétricas o asimétricas y que pueda o no decidirse sobre la dirección, siempre es posible (y tiene mucho interés hacerlo) evaluar la intensidad en que se manifiesta la relación entre las variables a partir de los datos de nuestras observaciones. Esta medida de la relación se corresponde con la idea intuitiva de “X tiene mucha influencia en Y”, la idea de mucha o poca influencia, es la de intensidad de la relación. Cuando hay muchos factores explicativos para un fenómeno, interesa saber qué factores inciden en mayor o menor medida en el fenómeno y a eso se responde indicando la intensidad de cada relación.

La intensidad o grado de la relación puede también aplicarse a relaciones simétricas. En ese caso, la intensidad mide cuán a menudo los cambios de una de las variables se ven acompañados de cambios en la otra, y es un resultado descriptivo, no explicativo.

---

La **intensidad de una relación**<sup>4</sup> es una medida de la fuerza con que los cambios en una variable afectan los cambios en la otra (si es una relación asimétrica) o bien, de la frecuencia con que los cambios de una variable acompañan a los de la otra (si se trata de una relación simétrica).

---

<sup>4</sup>No es posible ofrecer una definición más precisa porque según el modo en que se mida la intensidad, es decir, según el coeficiente que se use, es diferente el aspecto de la relación que se tiene en cuenta.

La evaluación de esta intensidad puede lograrse, en una primera aproximación, observando la distribución conjunta de las dos variables. En la medida que cierta combinación de categorías de una y otra variable concentren la mayor parte de los casos, estaremos en presencia de relaciones más fuertes o de mayor intensidad. Los siguientes son resultados de un estudio que relaciona el tipo de docente con el rendimiento de sus alumnos:

Tabla 5.22: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias absolutas

tipo de docente	rendimiento			Total
	alto	medio	bajo	
Autoritario	5	35	50	90
Democrático	260	40	10	310
Total	265	75	60	400

Ejemplo: se compara la idea de emigrar entre quienes tienen diferente opinión sobre la evolución de su país. Para ellos se cruzan las siguientes variables de la edición 2017 de Latinobarómetro:

S11. ¿Ud. y su familia han pensado en la posibilidad concreta de ir a vivir a otro país?

1. Sí
2. No

P2ST. ¿Diría Ud. que este país...?

1. Está progresando
2. Está estancado
3. Está en retroceso

Tabla 5.23: Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución de su país y la intención de emigrar. Frecuencias absolutas

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar	Total
progresando	1126	3914	5040
estancado	2324	7221	9545
en retroceso	1521	3543	5064
Total	4971	14678	19649

En la que, la opinión sobre la evolución del país (en las filas) y los proyectos

migratorios (en las columnas) están codificados como las opciones de respuesta del cuestionario.

Al pedir las frecuencias relativas al total obtenemos:

Tabla 5.24: Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias relativas al total

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar	Total
progresando	5.7	19.9	25.7
estancado	11.8	36.7	48.6
en retroceso	7.7	18.0	25.8
Total	25.3	74.7	100.0

Leemos las frecuencias conjuntas y las marginales como en la tabla ref(tab:cual). Por ejemplo:

El 36.7% de los encuestados considera que su país está estancado *y* no considera la posibilidad de emigrar.

El 25.3% de los encuestados ha pensado en emigrar (sin importar su opinión sobre la evolución de su país).

El 25.7% cree que su país está mejorando (sin tener en cuenta su proyecto migratorio).

El análisis que se haga de la tabla depende del modo en que se formule la hipótesis sobre la relación. Si se plantea a la “opinión sobre la evolución del país” como uno de los posibles elementos que influiría a la decisión de emigrar, entonces, la opinión es antecedente de la decisión de migrar. Con esta formulación, el interés estaría en comparar la decisión de emigrar entre quienes tienen diferente opinión sobre la evolución del país. Para ello, generamos frecuencias relativas en dirección de la opinión (variable antecedente) y, por comodidad, expresamos esas frecuencias relativas como porcentajes:

Tabla 5.25: Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias relativas por filas

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar	Total
progresando	22.3	77.7	100
estancado	24.3	75.7	100
en retroceso	30.0	70.0	100

Ahora la lectura es por las filas, es decir, por las categorías de la opinión. Entre

quienes opinan que su país está mejorando, hay un 22.3% que ha pensado en emigrar, mientras que entre quienes creen que está empeorando, el porcentaje sube al 30%.

La ventaja de usar porcentajes (o frecuencias relativas) es que las comparaciones se hacen sobre los mismos totales, es “como si” hubiese 100 personas que opinan que el país está mejorando, 100 que está estancado y 100 que está empeorando.

Que haya cierta relación entre la opinión acerca de la evolución del país (antecedente) y la idea de emigrar (consecuente) no es equivalente a que la opinión sea “la causa” de las intenciones de emigrar. En la tabla se observa que la intención de emigrar es expresada por una minoría de los encuestados, solo que esa minoría es levemente mayor entre quienes opinan que el país está empeorando. Se puede afirmar que quienes opinan que el país está empeorando tienen “un poco más” de intenciones de emigrar que aquellos que opinan que está mejorando. La opinión sobre la evolución del país es uno de los muchos factores que pueden incidir en la intención de emigrar.

Al comparar la tabla 5.23 con la 5.24 vemos que aunque ambas ofrecen frecuencias relativas, la primera las calcula respecto del total general (los 19649 casos) mientras que en la segunda los totales son las frecuencias marginales de cada fila. Son dos resultados muy diferentes, en efecto, la frecuencia de la celda 1,1 en la tabla 5.24 es 0,057 e indica que el 5.7% del total de encuestados cree que su país está mejorando y han pensado en emigrar. La misma celda en la tabla 5.25 tiene frecuencia de 0,223 y se lee: de los encuestados que creen que su país está mejorando, el 22.3% ha pensado en emigrar.

Veamos que la primera de las frecuencias (relativa al total) contiene información simultánea sobre las dos variables, mientras que la segunda (relativa a los totales de fila), fija una categoría para una de las variables: al hablar de los encuestados que creen que su país está mejorando, estamos restringiendo el conjunto completo, ya no es un juicio sobre los 19649 encuestados del total, sino solo sobre los 5040 que cumplen con ese requisito. La frecuencia está condicionada por ese requisito. Esto equivale a decir que las frecuencias relativas cambian cuando se establece una condición como la mencionada. En general, la proporción de encuestados que piensa emigrar es 25.3% , pero si agregamos el dato que indica que estamos tratando solo con los que creen que el país está mejorando, entonces la proporción decae al 22.3%. La opinión sobre la evolución del país es una condición que imponemos cuando calculamos estas frecuencias relativas a los totales de fila.

El modo en que se calcularon las frecuencias relativas (o los porcentajes) en la segunda tabla fue tomando como total al número de encuestados que dieron cada opinión sobre el país. No es ésta la única opción posible, ¿por qué no lo hicimos dividiendo por los totales de cada nivel de la otra variable, la intención de emigrar? Es decir ¿qué hizo que eligiéramos en esta tabla las filas y no las columnas como totales para el cálculo de los porcentajes? Es porque se trata de una relación asimétrica, y en esos casos siempre elegiremos como denominador

a los totales de la variable antecedente, porque queremos ver qué diferencia hay entre los grupos que definen sus categorías. En el caso del ejemplo, el interés se centra en saber si la opinión sobre la evolución del país implica diferencia en la intención de emigrar. No es importante si la variable antecedente se ubica en las filas o en las columnas, aunque hay una práctica de ubicarla en las filas; en cualquier caso, son sus totales los que usaremos para el cálculo de los porcentajes.

Con el paso de las frecuencias simples a las relativas, hemos avanzado en la detección de la relación entre las dos variables, pero aun no podemos cuantificar su intensidad. Para ello existe una gran cantidad de coeficientes que se usan para reconocer si se trata de relaciones fuertes, débiles o simplemente inexistentes. Estos coeficientes varían según el nivel de medición de las variables, según el número de categorías, la simetría de la relación y, en especial, en el aspecto que analizan de la relación y el modo en que se interpretan. En este capítulo solo nos detendremos en uno de ellos que es de utilidad para tratar relaciones entre variables que tienen dos categorías cada una, es decir entre dos variables dicotómicas. En los próximos capítulos trataremos con otros coeficientes.

El coeficiente que usaremos para evaluar la intensidad de una relación entre dos variables dicotómicas se denomina Q de Kendall - Yule y en su cálculo tiene en cuenta el modo en que las frecuencias se distribuyen entre las cuatro celdas de la tabla.

Para ejemplificar el uso de este coeficiente, transformaremos la relación del caso anterior, dejando de lado a quienes opinan que el país está estancado. Es decir, conservamos las categorías extremas de la variable. Así, la tabla queda:

Tabla 5.26: Distribución conjunta de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Frecuencias absolutas, variables dicotomizadas

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar
progresando	1126	3914
en retroceso	1521	3543

La concentración de la mayoría de los casos en las celdas de una de las diagonales de la tabla se considera como señal de la asociación existente entre las dos variables. El coeficiente Q se calcula operando con esas frecuencias del siguiente modo:

$$Q = \frac{1126 * 3543 - 1521 * 3914}{1126 * 3543 + 1521 * 3914} = \frac{-1963776}{9942612} = -0,198$$

En el numerador, hemos multiplicado las frecuencias de una de las diagonales y le hemos restado el producto de las frecuencias de la otra diagonal. En el

denominador, hemos sumado los mismos dos productos. De manera simbólica, si representamos a las frecuencias de las celdas como A, B, C y D, tenemos

A	B
C	D

$$Q = \frac{AD - CB}{AD + CB}$$

El cálculo de este coeficiente da un número que puede ser positivo o negativo pero que siempre se encuentra entre -1 y 1.

$$-1 \leq Q \leq 1$$

En este coeficiente, el signo no tiene interpretación, se consideran iguales, por ejemplo, los valores 0,80 y -0,80. Esto se debe a que el signo que resulta depende del orden (arbitrariamente elegido) con que se hayan dispuesto las filas y las columnas.

Cuanto más próximo a uno (1) o a menos uno (-1) sea el coeficiente, tanto más intensa es la relación entre las dos variables. Los valores del coeficiente cercanos a cero indican una relación entre las variables que es débil o inexistente.

Por lo tanto, el valor obtenido en el ejemplo anterior señala una relación débil entre las dos variables, pudiendo llevarnos a afirmar que la opinión que se tenga sobre la evolución del país tiene, según estos datos, un efecto muy leve sobre la decisión de emigrar. Sin duda esta última es resultado de procesos complejos en los que intervienen muchos factores, entre ellos, la opinión que se tenga del país.

En el caso extremo que el coeficiente sea igual a uno (o a menos uno) diremos que la relación es perfecta. Se trata de un caso ideal, no factible de ser observado en la realidad, pero que sirve para establecer el valor límite del coeficiente. Un ejemplo en que esto sucedería es si las frecuencias de la tabla anterior fueran como las siguientes:

Tabla 5.28: Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de relación “perfecta”

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar
progresando	0	5040
en retroceso	5064	0

Aquí resulta que ninguno de los que opinan que el país está progresando pensó en emigrar, mientras que todos los que creen que está empeorando sí pensaron emigrar.

En esta tabla

$$Q = \frac{0 * 0 - 5040 * 5064}{0 * 0 + 5040 * 5064} = \frac{25522560}{25522560} = -1$$

El valor  $-1$  se interpreta entonces indicando que la relación entre la opinión y la intención de emigrar es perfecta.

El caso contrario es aquél en el que no haya relación alguna entre las variables, allí es cuando el coeficiente alcanza (en valor absoluto) su mínimo valor posible, cero. Otra vez se trata de un caso ideal, porque muy improbablemente se encontrarán en la realidad observaciones que lleven a un coeficiente que sea exactamente cero.

Modifiquemos nuevamente las frecuencias de nuestra tabla para ejemplificar esa situación ficticia:

Tabla 5.29: Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de relación “nula”

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar
progresando	1512	3528
en retroceso	1519	3545

En este caso los encuestados están distribuidos en las celdas del mismo modo si opinan que el país está ejorando o empeorando (verifique, calculando las frecuencias relativas por filas)

Se encuentra que un 30% de los encuestados ha pensado en emigrar, tanto entre los que opinan que el país está mejorando como entre los que creen que empeora.

El cálculo del coeficiente da ahora:

$$Q = \frac{1512 * 3545 - 1519 * 3528}{1512 * 545 + 1519 * 3528} = 0.00016$$

Este valor indica que no hay relación entre las variables, es decir que, según estos datos, la opinión no haría diferencia alguna sobre la intención de emigrar.

El coeficiente  $Q$  de Kendall - Yule mide la intensidad de la relación entre dos variables dicotómicas comparando la concentración de frecuencias en las diagonales. Alcanza su valor máximo cuando todos los casos se ubican sobre una diagonal y la relación es perfecta. Alcanza su mínimo valor cuando las frecuencias están distribuidas de manera proporcional entre las celdas y las variables son independientes.

Una limitación importante de este coeficiente aparece cuando la distribución de las frecuencias es “rinconal”. Esto quiere decir que una de las frecuencias es cero,



como sucedería si en las tablas anteriores, no se hubiesen encontrado casos de gente que opinara que el país está mejorando y hubiesen pensado emigrar:

Tabla 5.30: Distribución ficticia de la opinión sobre la evolución del propio país y la perspectiva de emigrar. Caso de distribución “rincónal”

	pensó emigrar	nunca pensó emigrar
progresando	0	5040
en retroceso	1519	3545

En este ejemplo -y siempre que una celda tenga frecuencia cero-, el coeficiente Q dará valor 1 (ó -1) y esto no debe interpretarse como una asociación perfecta, es una limitación del coeficiente, que no puede usarse en estos casos.

Terminaremos esta introducción a la relación entre variables con una referencia al problema de la causalidad. El hecho de haber encontrado que, en una relación asimétrica, existe una asociación intensa entre las variables, no nos lleva inmediatamente a suponer que la antecedente sea causa del consecuente. En toda explicación de un fenómeno, en especial de los fenómenos sociales, la causalidad es múltiple, es casi siempre imposible atribuir una causa única a la explicación de un hecho. Desde el sentido común es frecuente enunciar que “todo tiene una causa”, pero en el dominio de la investigación que involucra a sujetos humanos, los hechos que nos interesa analizar tienen múltiples causas, las cuales compiten entre sí en la explicación. Por lo tanto, descubriendo relaciones entre variables podemos aportar a la inclusión o exclusión de variables como factores explicativos de un fenómeno dado, pero no a “determinar su causa”. Podremos afirmar qué factores hacen más probable la aparición de un fenómeno dado, bajo qué condiciones su ocurrencia es más frecuente, o inclusive indicar cuáles son las variables más importantes para que el fenómeno suceda, pero muy difícilmente lleguemos a afirmaciones del tipo X es la causa de Y.

Pensemos por ejemplo en fenómenos psicosociales complejos, como la delincuencia juvenil. El tipo de hogar del que las personas provienen puede tener efecto, la relación con los padres, el abandono temprano de la escuela, la estructura familiar actual, y pueden seguir enumerándose factores que contribuirían a explicar que algunas personas desarrollen conductas delictivas y otras no. Pero no será posible alcanzar una explicación completa del fenómeno, en una expresión ingenua como “la causa de la delincuencia es...”

## 5.7 El concepto de independencia estadística

Formulemos ahora el problema de manera inversa, interrogándonos por las condiciones en que puede decirse que dos variables son independientes. Intuitivamente la independencia entre dos eventos equivale a que la ocurrencia de uno de ellos no tiene efecto en el del otro. Así, las oportunidades que un evento ocurra serán iguales tanto si el otro evento sucedió como si no lo hizo.

Cuando decimos que  $X$  no tiene efectos sobre  $Y$ , indicamos que  $Y$  sucede tanto si  $X$  está presente como si no lo está. La independencia de dos variables es equivalente a que no haya asociación entre ellas.

Consideremos ahora la distribución de la actividad económica por sexos según datos de la EPH.

Tabla 5.31: Distribución de la condición laboral por sexos.  
Frecuencias absolutas

	varones	mujeres	Total
ocupades	13202	10196	23398
desocupades	940	930	1870
inactives	8787	14380	23167
Total	22929	25506	48435

En este caso es más claro formular la pregunta sobre la relación entre variables, en términos de la diferencia entre grupos. ¿Se distribuyen del mismo modo mujeres y varones entre las condiciones de ocupade, desocupade e inactive? La relación es, como en el ejemplo anterior, asimétrica, donde la variable sexo es antecedente y condición laboral, la consecuente. Por esa razón las frecuencias relativas se calculan por columnas, donde se encuentra la variable antecedente.

Tabla 5.32: Distribución de la condición laboral por sexos.  
Frecuencias relativas por columnas

	varones	mujeres
ocupades	57.6	40.0
desocupades	4.1	3.6
inactives	38.3	56.4
Total	100.0	100.0

Se lee aquí que *del total de varones*, el 57.6% está ocupado, mientras que, de las mujeres, el 40.0% lo está.

Si la distribución de categorías laborales no tuviera ninguna relación con el hecho de ser hombre o mujer, se esperaría que haya igual proporción de personas ocupades, desocupades e inactives entre varones y mujeres. Si del total de personas, el 48.3% está ocupade, habría un 48.3% de varones ocupados y un 48.3% de mujeres ocupadas. De modo que, de los 22929 varones, 11077 (que constituyen aproximadamente el 48.3% de 22929) deberían estar ocupados. Análogamente, el 48.3% de 25506, (aproximadamente 12321 mujeres) son las que deberían estar ocupadas.

Las frecuencias de las demás celdas se obtienen replicando la frecuencia marginal

de desocupados e inactivos sobre los totales de varones y mujeres. Puede entonces construirse una nueva tabla con las frecuencias que se esperaría encontrar si las dos variables fueran independientes, es decir si el hecho de ser varones o mujeres no tuviese ningún efecto sobre la actividad laboral. Dicho de otro modo, si la actividad laboral fuera independiente del sexo.

Tabla 5.33: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior

	varones	mujeres	Total
ocupados	11077	12321	23398
desocupados	885	985	1870
inactivos	10967	12200	23167
Total	22929	25506	48435

Observemos algunos detalles de esta tabla. En primer lugar, las frecuencias marginales no han cambiado (salvo por algún efecto de redondeo), los totales son los mismos y solo se trata de un reordenamiento de las frecuencias conjuntas bajo la hipótesis de independencia de las dos variables<sup>5</sup>.

Tratemos ahora de formalizar las operaciones que condujeron a esta segunda tabla. Los valores 48.3%, 8.07% y 47.8% provienen de las proporciones de casos en cada una de las categorías de la variable condición de actividad, y se calcularon como  $\frac{23398}{48435}$ ,  $\frac{1870}{48435}$  y  $\frac{23167}{48435}$  respectivamente. Luego esas proporciones se multiplicaron por los totales de casos de cada categoría de la variable sexo. De esa operación obtuvimos 11077 como  $22929 * .483$  (salvo diferencias por redondeo), que daría lo mismo expresado como  $22929 * 23398/48435$ . De mismo modo el resto de las celdas.

De manera general entonces, obtenemos cada una de las frecuencias de la segunda tabla multiplicando la frecuencia marginal de su fila por la de su columna y dividiendo por el total general. En símbolos, las frecuencias esperadas son:

$$f_{ij}^e = \frac{f_i f_j}{n}$$

Si las dos variables fueran independientes (con más precisión se dice estadísticamente independientes), las frecuencias conjuntas que se esperaría

<sup>5</sup>Como consecuencia de ello, de las cuatro celdas solo es necesario calcular una frecuencia, ya que las demás pueden obtenerse restando de los totales de filas y de columnas. Una vez que sabemos que la frecuencia de la celda 1,1 es 120, podemos obtener 60 como lo que resta para llegar a 180 (de la primera fila), 80 como la diferencia con 200 (de la primera columna) y 40 como lo que le falta a 60 para llegar a 100 (segunda columna) o lo que le falta a 80 para alcanzar 120 (segunda fila).

encontrar serían como las que calculamos con este procedimiento. ¿Y qué sería en ese caso de las frecuencias relativas?

Tabla 5.34: Frecuencias relativas por columnas esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior

	varones	mujeres	Total
ocupades	0.4831000	0.4830628	0.4830804
desocupades	0.0385974	0.0386184	0.0386084
inactives	0.4783026	0.4783188	0.4783111

Que habría idéntica proporción de ocupades, desocupades e inactives entre varones y mujeres, que es la condición de independencia que estamos proponiendo.

La tabla de relativos respecto del total resulta así:

Tabla 5.35: Frecuencias relativas por columnas esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla anterior

	varones	mujeres	Total
ocupades	0.229	0.254	0.483
desocupades	0.018	0.020	0.039
inactives	0.226	0.252	0.478
Total	0.473	0.527	1.000

Puede llegarse directamente a las frecuencias relativas, porque la frecuencia absoluta de cada celda es:

$$f_{ij} = \frac{f_i f_j}{n}$$

Y relativa de esa celda:

$$f'_{ij} = \frac{f_{ij}}{n}$$

Si reemplazamos, nos queda:

$$f'_{ij} = \frac{f_{ij}}{n} = \frac{\left(\frac{f_i f_j}{n}\right)}{n} = \frac{f_i}{n} \frac{f_j}{n} = f'_i f'_j$$

Más brevemente:

$$f'_{ij} = f'_i f'_j$$

Es decir que, si las variables fueran independientes, cada frecuencia relativa será producto de las correspondientes frecuencias relativas marginales. Ahora podemos dar una definición de independencia estadística.

Dos variables son estadísticamente independientes si la frecuencia relativa de cada celda es igual al producto de las frecuencias relativas marginales de la fila y la columna a las que la celda pertenece.

En efecto, cada frecuencia conjunta de la tabla 14 es el producto de las marginales correspondientes.

En este capítulo solo se trató con variables nominales, y en un caso también ordinales, pero aún no se ha dicho nada sobre las variables intervalares y proporcionales. En las distribuciones univariadas se vio que una tabla de distribución de frecuencias no puede listar todas las categorías de una variable de estos niveles, sino que deben construirse intervalos de valores. Eso mismo puede hacerse para construir una tabla bivariada, cuando se analiza la relación entre variables intervalares y/o proporcionales. De ese modo resultaría la tabla que pone en relación la condición de actividad con la edad, categorizada en cuatro intervalos proporcionales:

Tabla 5.36: Distribución conjunta de la condición de actividad y la edad en cuatro grupos

	(0,16]	(16,32]	(32,52]	(52,101]	Total
ocupades	41	7163	11269	4925	23398
desocupades	8	1122	526	214	1870
inactives	6189	5975	2477	8526	23167
Total	6238	14260	14272	13665	48435

Pero en el próximo capítulo veremos que para variables de estos niveles de medición se cuenta con procedimientos más simples y más eficaces que permiten analizar con más detalle sus relaciones.

## 5.8 Hacerlo en R

La elaboración de las tablas en R requiere del comando `table` aplicado sobre las variables de la matriz de datos que se quiera cruzar:

```
table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO)
```

```
##
##      0      1      2      3      4
##  1  34 13202   940  8787  4256
```

```
##      2      26 10196      930 14380      4128
```

Los marginales deben pedirse explícitamente, con `addmargins`:

```
addmargins(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO))
```

```
##
##           0      1      2      3      4      Sum
##  1      34 13202      940  8787  4256 27219
##  2      26 10196      930 14380  4128 29660
##  Sum      60 23398     1870 23167   8384 56879
```

Así como las relativas, usando `prop.table`:

```
prop.table(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO))
```

```
##
##           0           1           2           3           4
##  1 0.0005977602 0.2321067529 0.0165263102 0.1544858384 0.0748255068
##  2 0.0004571107 0.1792577225 0.0163504984 0.2528173843 0.0725751156
```

Para reducir los decimales, se solicita redondeo a solo tres:

```
round(prop.table(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO)), 3)
```

```
##
##           0      1      2      3      4
##  1 0.001 0.232 0.017 0.154 0.075
##  2 0.000 0.179 0.016 0.253 0.073
```

Y para expresarlos como porcentajes, lo multiplicamos por 100:

```
round(prop.table(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO)), 3) * 100
```

```
##
##           0      1      2      3      4
##  1  0.1 23.2  1.7 15.4  7.5
##  2  0.0 17.9  1.6 25.3  7.3
```

Estas frecuencias relativas, lo son respecto del total, si se las quiere por filas, se indica en el argumento `1`



```
round(prop.table(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO), 1), 3) * 100
```

```
##
##           0      1      2      3      4
##    1  0.1 48.5   3.5 32.3 15.6
##    2  0.1 34.4   3.1 48.5 13.9
```

Para obtenerlas por columnas, se indica 2 en el argumento de `prop.table`:

```
round(prop.table(table(eph.3.18$CH04, eph.3.18$ESTADO), 2), 3) * 100
```

```
##
##           0      1      2      3      4
##    1 56.7 56.4 50.3 37.9 50.8
##    2 43.3 43.6 49.7 62.1 49.2
```

Para darles formato, una opción es llevar la tabla a una hoja de cálculo y allí rotular, centrar, etc. De lo contrario, R ofrece un entorno llamado R Markdown con muchas posibilidades de formato y exportación a pdf o html.



## Capítulo 6

# Relación entre variables: el análisis

En el capítulo anterior hemos tratado la relación entre dos variables en escalas nominales, y señalamos que si se trata de variables de nivel superior es posible crear categorías y tratarlas del mismo modo. En cuanto a la medida de la intensidad de la relación, nos hemos limitado al caso de dos variables dicotómicas, es decir, con dos categorías en cada una, con lo que la tabla resultante es de dos por dos y calculamos el coeficiente Q de Kendall - Yule. Ahora se amplía el dominio de nuestro análisis, incorporando herramientas que permiten poner a prueba la hipotética relación entre dos variables de nivel nominal con más de dos categorías cada una y variables de nivel superior (ordinales y métricas).

### 6.1 Variables nominales con más de dos categorías cada una

#### 6.1.1 La distancia entre frecuencias esperadas y observadas

Sobre el final del capítulo anterior presentamos el concepto de independencia estadística y vimos la manera de calcular las frecuencias de las celdas que se esperarían encontrar si las variables fueran independientes. Para hacer esto es suficiente multiplicar las frecuencias marginales correspondientes a cada celda y dividir el resultado por el total de casos. Sea el caso que interese analizar la relación del tipo de violencia<sup>1</sup> con el lugar donde sucede. Aunque

---

<sup>1</sup>Según la clasificación sugerida por el Informe Mundial sobre la Violencia y la Salud, Organización Panamericana de la Salud, 2003.

estadísticamente equivalente, no es adecuado preguntar si el lugar incide sobre el tipo de violencia, sino más bien si el tipo de violencia difiere según el lugar. Aquí es más pertinente el planteo del problema como una comparación de grupos (los definidos por los diferentes lugares) antes que como una relación entre variables. Lo mismo pasa cuando se comparan los resultados de un examen entre quienes cursan por la tarde o la mañana. Cuando hay control de variables, como en el diseño experimental o en la evaluación de impacto, el paralelismo entre las dos lecturas es más cercano. Así, preguntar si un grupo de niños que recibió un suplemento en su dieta, tiene mejor desarrollo que uno que no lo recibió (planteo en términos de comparación de grupos), equivale a preguntar si el suplemento dietario incide sobre el desarrollo (planteo en términos de relación entre variables). Las operaciones estadísticas que responden a las dos preguntas son las mismas, pero según el caso, una manera de formular el problema puede ser más adecuada que otra.

La investigación social apela continuamente a las comparaciones: el pasado y el presente, mujeres y varones, sociedades industriales y agrarias (arropaPescosolido1983), grupos minoritarios y población general, por eso es necesario contar con herramientas que permitan analizar la manera en que suceden estas diferencias y las relaciones entre variables que se asocian a ellas.

Cuando se busca evaluar el impacto de una política pública dirigida a reducir enfermedades parasitarias en niños, una estrategia consiste en comparar la prevalencia de esas enfermedades entre niños que han sido destinatarios de esa política, con niños que no lo fueron. La pregunta por la diferencia entre los dos grupos equivale a indagar sobre el efecto de la política.

Para el ejemplo de las diferencias en el tipo de violencia según área geográfica, una muestra de 500 casos provee la siguiente distribución conjunta:

Tabla 6.1: Clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta (datos ficticios)

	áreas rurales	ciudades grandes	ciudades pequeñas	Total
autoinfligida	15	100	35	150
colectiva	5	35	10	50
interpersonal	90	110	100	300
Total	110	245	145	500

Una primera aproximación consiste en calcular frecuencias relativas. Dado que nuestro interés está en comparar el tipo de violencia según las áreas, calcularemos los porcentajes según las columnas de la tabla 1 y resulta:

## 6.1. VARIABLES NOMINALES CON MÁS DE DOS CATEGORÍAS CADA UNA

Tabla 6.2: Frecuencia relativas por columnas de la clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta

	áreas rurales	ciudades grandes	ciudades pequeñas	Total
autoinfligida	13.6	40.8	24.1	30
colectiva	4.5	14.3	6.9	10
interpersonal	81.8	44.9	69.0	60
Total	100.0	100.0	100.0	100

Si no consideramos el área, se ve (en la columna de los totales) que la violencia interpersonal es la más frecuente (60%), seguida de la autoinfligida con el 30%. Este patrón de distribución en las distintas formas de violencia se mantiene en las diferentes áreas, pero en más acentuado en las rurales, donde la categoría modal (que sigue siendo interpersonal) alcanza el 82% del total del área. Por el contrario, la violencia autoinfligida, que es el 30% del total, sube al 41% en grandes ciudades y solo representa el 14% de las formas de violencia que se observan en áreas rurales. Así, parecería que hay diferencia en la distribución de los tipos de violencia según las áreas que están considerándose.

Buscaremos ahora de cuantificar la intensidad de esa relación, para lo que nos preguntaremos cuáles serían las frecuencias de las celdas si el tipo de violencia fuera independiente del área donde sucede, es decir, si se observara la misma proporción de los distintos tipos de violencia en todas las áreas. Usemos el concepto de independencia estadística para calcular las frecuencias esperadas correspondientes a la tabla 6.1.

Tabla 6.3: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia entre el tipo de violencia y el área donde se observa

	áreas rurales	ciudades grandes	ciudades pequeñas	Total
autoinfligida	33	74	44	151
colectiva	11	24	14	49
interpersonal	66	147	87	300
Total	110	245	145	500

Estas frecuencias están calculadas como indicamos en el capítulo anterior, haciendo:

$$f_{ij}^e = \frac{f_i * f_j}{n}$$

Por ejemplo, la frecuencia de la celda 1,2 resultó de  $f_{12}^e = \frac{151*245}{500} = 73,99$  que redondeamos a 74.

La tabla 6.3 muestra las frecuencias que esperaríamos encontrar si no hubiera relación entre las variables, si éstas fueran independientes. A ellas debemos compararlas con las que realmente hemos encontrado, las que se denominan frecuencias observadas.

Si halláramos que nuestras frecuencias observadas son muy similares a las que se esperan bajo la hipótesis de independencia, diríamos que las variables “están cerca” de ser independientes, o lo que es equivalente, que habría escasa relación entre ellas. Por el contrario, si las frecuencias observadas fueran muy diferentes de las esperadas, creeríamos que las variables “están lejos” de ser independientes, es decir, que habría alguna relación entre ellas. Para decidir, debemos comparar la tabla 6.1 con la 6.3.

Una opción para medir la distancia entre los dos conjuntos de frecuencias es la de restar las correspondientes de cada celda; pero si hacemos eso nos encontraremos con un problema parecido al que tuvimos cuando intentamos observar la dispersión restando los valores de la media: la suma da cero. Por única vez realizaremos esta operación de manera manual:

$$(15 - 33) + (100 - 74) + (35 - 44) + (5 - 11) + (35 - 24) + (10 - 14) + (90 - 66) + \\ (110 - 147) + (100 - 87) = 0$$

Obtenemos este resultado porque las frecuencias marginales son fijas y lo que una celda tiene de más, lo tiene otra de menos. Siempre sucederá así y por esa razón, no podemos saber si las observadas están cerca o lejos de las esperadas con el procedimiento directo de restarlas. Por el contrario, para medir la distancia entre los dos conjuntos de frecuencias (observadas y esperadas) se usa la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1; j=1}^{i=f; j=c} \frac{(f_{ij}^o - f_{ij}^e)^2}{f_{ij}^e}$$

La expresión nos dice que deben restarse cada una de las frecuencias esperadas de cada observada correspondiente, elevar esa diferencia al cuadrado<sup>2</sup> y dividir el resultado por cada una de las frecuencias esperadas. Los subíndices mantienen la notación del capítulo anterior:  $i$  es el índice de filas, que va desde la primera ( $i = 1$ ) hasta la última ( $f$  es el número total de filas);  $j$  es el índice de las columnas, que también empieza en 1 ( $j = 1$ ) y termina en  $c$ , que es el número total de columnas<sup>3</sup>. Vamos a aplicarla una vez, solo para ver su funcionamiento, luego la pediremos al programa:

<sup>2</sup>El mismo recurso que se usó cuando se definió la varianza y no era posible usar la suma de los desvíos porque daba cero. Nuevamente aquí, usamos el exponente 2 para volver positivos a los números negativos.

<sup>3</sup>Recordemos que, de manera general la dimensión de la tabla es  $fXc$ , filas por columnas.

$$\frac{(15-33)^2}{33} + \frac{(100-74)^2}{74} + \frac{(35-44)^2}{44} + \frac{(5-11)^2}{11} + \frac{(35-24)^2}{24} + \frac{(10-14)^2}{14} +$$

$$\frac{(90-66)^2}{66} + \frac{(110-147)^2}{147} + \frac{(100-87)^2}{87} = 50,18$$

El número que resulta de esta operación se llama puntaje chi cuadrado (o también ji cuadrado), se indica con el símbolo  $\chi^2$  y es una medida de la distancia a la que se encuentran las frecuencias observadas de las que se esperaba encontrar si las variables fueran independientes.

El puntaje  $\chi^2$  no puede ser negativo, ya que proviene de la suma de números elevados al cuadrado. Solo puede ser cero si todos los términos de la suma son cero, es decir, si cada frecuencia observada es exactamente igual a la esperada correspondiente. En ese caso no habría duda en decir que las variables son independientes, cumplirían exactamente con la definición de independencia estadística.

El puntaje  $\chi^2$  indica si las frecuencias observadas están cerca o lejos de las esperadas, pero ¿qué tan grande debe ser para que consideremos lejanas a las frecuencias?

Dos problemas que tiene este puntaje son:

- puede ser indefinidamente grande
- su valor depende del número de casos que se evalúan y de la dimensión de la tabla.

Así, por ejemplo, si multiplicamos por 10 todas las frecuencias de la tabla 6.1, obtenemos:

Tabla 6.4: Ejemplo de expansión artificial del total de casos de la tabla de frecuencias observadas

	áreas rurales	ciudades grandes	ciudades pequeñas	Total
autoinfligida	150	1000	350	1500
colectiva	50	350	100	500
interpersonal	900	1100	1000	3000
Total	1100	2450	1450	5000

Aunque los valores absolutos son diez veces más grandes, no hubo cambios en las frecuencias relativas, por ejemplo, en la celda 1,1:  $\frac{150}{1100} = 0,14$  (14%) lo mismo que había dado esa celda en la tabla original. Cualquiera sea la intensidad de la relación entre estas dos variables, ésta no ha cambiado porque hayamos

multiplicado todo por 10, sin embargo, si calculamos el puntaje  $\chi^2$  en la tabla 5 obtenemos 501.9, es decir un número 10 veces más grande. Entonces el puntaje  $\chi^2$  puede cambiar muy ampliamente sin que cambien las frecuencias relativas; esto nos dice que este puntaje no mide de manera directa la asociación entre dos variables, por ello:

---

Para comparar la intensidad de la asociación, el puntaje  $\chi^2$  solo es válido si las tablas tienen la misma dimensión y el mismo número de casos.

---

### 6.1.2 Coeficientes de asociación para variables nominales

Para medir la asociación, debe eliminarse el efecto de la cantidad de casos y también de la dimensión de la tabla. Calcularemos tres coeficientes que nos permitan evaluar el grado o intensidad de la relación y que tengan un límite superior de modo que podamos juzgarlos como elevados o bajos.

El primero de ellos es el **coeficiente**  $\varphi^4$ , válido para medir la asociación entre dos variables dicotómicas (o binarias), se calcula como:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Vale cero si las variables son independientes e indica mayor asociación cuando está más cerca de uno.

Ejemplo (datos ficticios): en el análisis de la calidad de ítems de un examen, se observa las veces que una pregunta es correctamente respondida por los alumnos que aprobaron el examen y por quienes no lo aprobaron. Para el caso de una pregunta a la que se llama #7745, que fue respondida por 100 alumnos (a quienes les tocó por azar), la información se presenta en una tabla de  $2 \times 2$ :

	correcta	incorrecta	Total
aprobó	50	15	65
no aprobó	10	25	35
Total	60	40	100

Para la que el puntaje  $\chi^2$  vale 22.16, y el coeficiente resulta en:

$$\varphi = \sqrt{\frac{22.16}{100}} = 0.47$$

---

<sup>4</sup>Ver Ekström, J. (2011) para las discusiones en torno a este coeficiente en el llamado “debate Pearson-Yule”.



### 6.1. VARIABLES NOMINALES CON MÁS DE DOS CATEGORÍAS CADA UNA 177

Como el cálculo del puntaje  $\chi^2$  es engorroso para hacer manualmente, existe una expresión alternativa para obtener el coeficiente  $\varphi$ , que solo usa las frecuencias observadas en la tabla. Si estas son:

a	b
c	d

La fórmula de cálculo del coeficiente  $\varphi$  es:

$$\varphi = \frac{(c * b) - (a * d)}{\sqrt{(a + b) * (c + d) * (a + c) * (b + d)}}$$

Aplicado a los datos del ejemplo da:

$$\varphi = \frac{(10 * 15) - (50 * 25)}{\sqrt{(50 + 15) * (10 + 25) * (50 + 10) * (15 + 25)}} = \frac{1100}{2337} = 0.47$$

Otra forma de medir la asociación entre dos variables, cuando alguna de ellas o las dos, tienen más de dos categorías, es el **coeficiente de contingencia**,  $C$  de Pearson, se calcula del siguiente modo a partir del puntaje  $\chi^2$ :

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Al igual que  $\varphi$ , este coeficiente no puede ser menor que cero (0) y solo toma ese valor si las variables son independientes (es decir cuando  $\chi^2 = 0$ ). Tampoco puede ser mayor que uno (1), pero su valor máximo depende de la dimensión de la tabla.

Solo en el caso particular en que la tabla sea cuadrada (misma cantidad de filas que de columnas), el valor máximo del coeficiente es:  $C_{\max} = \sqrt{\frac{f-1}{f}}$ , o lo que es lo mismo:  $C_{\max} = \sqrt{\frac{c-1}{c}}$

Porque nos referimos a tablas cuadradas, en las que  $f = c$ .

Si la tabla no es cuadrada, sino de dimensión  $f \times c$ , el valor máximo es:

$$C_{\max} = \sqrt{\frac{\min(f, c) - 1}{\min(f, c)}}$$

En la que  $\min(f, c)$  es el más chico de los dos números  $f$  o  $c$ .

De este modo se obtiene un coeficiente que indica el grado de la asociación entre dos variables que es apto para tablas de cualquier dimensión, no solo para las de  $2 \times 2$ , por lo que mejora lo que mide el coeficiente Q de Kendall - Yule. Reemplacemos los valores para el ejemplo anterior:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{50,19}{50,19 + 500}} = 0,30$$

Para decidir si este resultado es alto o bajo, es decir, si la relación es fuerte o débil, calculemos el máximo que podría haber alcanzado para una tabla de 3X3:

$$C_{\max} = \sqrt{\frac{f-1}{f}} = \sqrt{\frac{3-1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82$$

Entonces el valor que hemos encontrado es moderado, y nos indica que la relación entre el tipo de violencia y el tamaño de las ciudades no es intensa.

El tercer (y último) coeficiente que calcularemos para variables nominales está también basado en el puntaje  $\chi^2$  y tiene un valor máximo de 1 (uno). Se llama **coeficiente V de Cramer** y se calcula así:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n * \min(f-1, c-1)}}$$

La expresión  $\min(f-1, c-1)$ , tiene el mismo significado que en  $C_{\max}$ , es mínimo entre el número de filas menos uno y el número de columnas menos uno. Para obtenerlo se resta 1 al número de filas, luego se resta 1 al número de columnas y se elige el menor de los dos. Si la tabla es de  $3 \times 2$  se hace  $3-1=2$  y  $2-1=1$ , entre 2 y 1 el mínimo es 1 y ése es el número que ubicamos en el denominador, multiplicando a  $n$ . En este ejemplo, las filas y las columnas son tres, por lo que se toma el mínimo entre  $3-1$  y  $3-1$ , el resultado es 2, y el coeficiente V de Cramer resulta:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n * \min(f-1, c-1)}} = \sqrt{\frac{50,19}{500 * \min(3-1, 3-1)}} = \sqrt{\frac{50,19}{500 * 2}} = 0,22$$

Como el valor máximo que puede alcanzar este coeficiente es 1 (uno), en este caso se trata de una relación moderada entre las dos variables.

## 6.2 Variables de nivel ordinal

Si nuestro problema es el de describir la relación entre variables cuyas categorías están ordenadas, es decir variables ordinales, los coeficientes anteriores son válidos: pero como sucedió con las medidas descriptivas, el mayor nivel de medición permite calcular coeficientes más elaborados y que, por esa razón, informen más acerca de la relación entre las variables que se analizan. Un punto a tener en cuenta es que cuando se trata con dos variables, la del menor nivel de medición es la que manda. Así, para relacionar una ordinal y una nominal, debe usarse un coeficiente V o C, como si fueran las dos nominales.

Si las dos variables son ordinales o si una es ordinal y la otra intervalar o proporcional, es posible calcular un coeficiente que tiene en cuenta los “rangos” es decir la posición de cada categoría respecto de las demás, su carácter de primera, segunda, etc., es decir, el orden. Sea el problema de indagar por la relación que podría haber entre el resultado que obtienen los alumnos al rendir un examen de ingreso a una carrera y el nivel de educación de sus madres, consideraremos como variables *el nivel máximo de educación de la madre* de cada uno y *el orden de mérito alcanzado en el ingreso* a esa carrera; ambas variables son ordinales. Tratemos solo la situación de pocos casos por ahora. Si para el orden de mérito codificamos como 1, 2, 3, ..., el primer lugar en el ingreso, el segundo, etc. y para la educación de la madre usamos 1 = universitario completo, 2 = universitario incompleto, etc., entonces el fragmento de la matriz de datos para 8 observaciones tendría una forma como esta:

OM	educamadre
1	2
2	2
3	3
4	2
5	3
6	4
7	5
8	3

Que está ordenada según los valores de la primera variable (orden de mérito). A estos datos no conviene presentarlos en una tabla de doble entrada, porque cada orden de mérito corresponde a un único individuo, por lo que resultaría una tabla tan poco resumida como la siguiente:

Tabla 6.9: Distribución conjunta de las frecuencias del orden de mérito en el ingreso a una carrera universitaria y el nivel de educación de la madre.

	2	3	4	5
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0

Esta tabla no es útil, ya que tiene tantas filas como la matriz de datos (porque cada orden de mérito corresponde a una sola persona), hay solo un caso en cada celda no vacía y hay muchas celdas vacías (con frecuencia cero). Por eso, cuando se trata de variables de este nivel de medición, no se usan tablas de doble entrada para representar los datos, solo se calcula un coeficiente que indique la intensidad de la relación. Este coeficiente se llama coeficiente de **correlación por rangos, de Spearman** y para calcularlo hay que transformar los valores de las variables en rangos, de mayor a menor, de manera que al máximo valor de cada variable corresponda el 1, al siguiente el 2 y así sucesivamente.

En nuestro ejemplo, el orden de mérito ya está en rangos, uno para el primero, dos para el segundo y un rango para cada persona. No es así para el nivel de educación, ya que varias personas pueden tener el mismo, a esta variable la transformaremos en rangos. El mayor nivel de educación observado es 2 (universitario incompleto) a ese valor le correspondería el rango 1 (uno), pero hay tres madres con ese nivel de educación, ellas deberían llevar los rangos 1, 2 y 3, como están empatadas, les asignamos a todas el promedio de los tres rangos: 2. Luego sigue el nivel de educación 3 (secundario completo) a quien deberíamos asignar el rango 4, pero acá también hay empate entre tres casos, corresponderían los rangos 4, 5 y 6, nuevamente usamos el promedio de los tres rangos para asignar a los tres el mismo: 5. Sigue el nivel 4 (secundario incompleto), al que asignamos el rango siguiente: 7, ya que hay solo un caso aquí; y lo mismo pasa con el nivel 5 (primario completo) al que le toca rango 8.

Resumiendo entonces, la transformación de los valores de las variables en rangos resulta así:

Orden de mérito en el ingreso	Rango del orden de mérito	Educación de la madre	Rango de la educación de la madre
1	1	2	2

Orden de mérito en el ingreso	Rango del orden de mérito	Educación de la madre	Rango de la educación de la madre
2	2	2	2
3	3	3	5
4	4	2	2
5	5	3	5
6	6	4	7
7	7	5	8
8	8	3	5

No ha sido necesario transformar los valores del orden de mérito, porque ya correspondían uno a cada sujeto.

Una vez contruidos los rangos, se observa, para cada caso la diferencia entre el rango de una variable y de la otra, esas diferencias se llamarán  $d$ .

Tabla 6.11: Cálculo de las diferencias entre los rangos de dos variables ordinales

Rango del orden de mérito	Rango de la educación de la madre	$d$
1	2	-1
2	2	0
3	5	-2
4	2	2
5	5	0
6	7	-1
7	8	-1
8	5	3

Estas diferencias indican la distancia que hay entre los dos ordenamientos, si fueran ambos iguales (si el máximo de uno coincidiera con el máximo del otro y así en todas las categorías), tendríamos una asociación perfecta entre las dos variables. Por el contrario si el orden estuviese exactamente invertido (si el rango máximo de una variable coincidiera con el rango mínimo de la otra y así en las demás) la relación también sería perfecta, pero inversa.

La intensidad de la relación se mide entonces con el que hemos llamado coeficiente de Spearman, la expresión de su cálculo es la siguiente:

$$r_s = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n}$$

En la que:

- $d_i$  son las diferencias de rangos (calculadas en la última columna de la tabla de arriba) que en la fórmula van elevadas al cuadrado.
- La sumatoria indica que ésta va desde la primera de las diferencias ( $i = 1$ ) hasta la última ( $n$ ).
- $n$  es el número total de observaciones.

Este coeficiente puede ser positivo o negativo y tiene un campo de variación igual al del Q de Kendall - Yule, es decir, entre  $-1$  y  $1$ , es decir:

$$-1 \leq r_s \leq 1$$

Al igual que el coeficiente de Kendall - Yule, los valores próximos a  $1$  ó a  $-1$  se interpretan como propios de una asociación fuerte (intensa) y los cercanos a  $0$  (cero), sean positivos o negativos, corresponden a asociaciones débiles. Si un coeficiente vale  $1$  ó  $-1$  diremos que la asociación es perfecta, pero eso no es algo que suceda en la realidad, del mismo modo que si el coeficiente es exactamente  $0$  (cero), la asociación será nula y otra vez es muy poco común que eso suceda con datos reales.

A diferencia de los coeficientes usados para variables nominales, ahora el signo importa: cuando es positivo da cuenta de una relación directa entre las dos variables, una relación en la que cuando una aumenta, la otra también lo hace. Si el coeficiente es negativo indica relación inversa, el crecimiento de una variable se acompaña del decrecimiento de la otra. En este nivel de medición (ordinal) podemos hacer estos juicios, podemos decir “aumenta” o “disminuye”, porque las categorías están ordenadas, por esa razón podemos analizar no solo la intensidad de la relación, sino también si se trata de una relación directa o inversa.

Se trata de dos características independientes de cada relación: puede ser fuerte y directa; o fuerte e inversa; o bien débil y directa; o débil e inversa. Un error muy frecuente es creer que si el coeficiente es negativo, la relación es débil, no es así. Es débil si el coeficiente es cercano a  $0$  (cero), es igualmente débil si  $r_s = 0,03$  como si  $r_s = -0,03$ , el signo del coeficiente no aporta para saber si es fuerte o débil. Del mismo modo es igual de fuerte una relación en la que  $r_s = 0,96$  como una en la que  $r_s = -0,96$ .

Para obtener el valor del coeficiente en nuestro ejemplo, vamos primero a calcular las  $d_i^2$ :

Rango del orden de mérito	Rango de la educación de la madre	$d$	$d_i^2$
1	2	-1	1
2	2	0	0
3	5	-2	4
4	2	2	4
5	5	0	0

Rango del orden de mérito	Rango de la educación de la madre	$d$	$d_i^2$
6	7	-1	1
7	8	-1	1
8	5	3	9

Por lo que la suma de la última columna es 20. Al reemplazar los valores en la expresión de  $r_s$ , obtenemos:

$$r_s = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 * 20}{8^3 - 8} = 1 - \frac{120}{512 - 8} = 1 - \frac{120}{504} = 0,76$$

Este valor de  $r_s = 0,76$ , indica una asociación intensa y positiva entre la educación de la madre y los resultados del ingreso a la universidad. Que sea positiva quiere decir que los alumnos con madres de mayor educación obtienen mejores resultados en el ingreso a esa carrera. Como ya hemos señalado, esto no quiere decir causalidad, no significa que la causa del resultado en el ingreso sea la educación de la madre. El problema de la causalidad es teórico y depende del análisis que se hace de las relaciones entre los conceptos, en este ejemplo, la educación de la madre es uno de muchos de los factores interrelacionados, que inciden sobre el resultado que obtiene el alumno. Este coeficiente (como sucede con todos los coeficientes de asociación) no revelan la causalidad sino lo frecuente que resulta que los cambios de una variable se vean acompañados de cambios en la otra.

Para ilustrar con otros ejemplos de relaciones entre variables ordinales, sea que se pone en correspondencia el ranking de temas musicales de una semana con la frecuencia con que cada tema es reproducido en la radio, esperamos hallar que la relación sea muy fuerte y directa: los temas de mayor posición en el ranking son también los que más frecuentemente se pasan en la radio. Al revés, en la relación entre el rating de los programas de televisión y el contenido cultural que ofrecen esperamos una relación también fuerte, pero ahora inversa: los de mayor rating son habitualmente lo que menos contenido cultural tienen.

Este coeficiente es adecuado, no solo cuando las variables son ordinales, sino cuando son cuantitativas (intervalares o proporcionales) pero existen casos atípicos, que afectarían el cálculo de otro coeficiente que se verá a continuación. Para que la interpretación del coeficiente de Spearman sea correcta, es necesario de las variables guarden entre sí una relación directa o inversa, en todo su conjunto de valores, es decir, que la relación sea monótona creciente o decreciente.

### 6.3 Nivel intervalar o proporcional

Si tratamos con variables intervalares o proporcionales, podríamos usar los procedimientos que referimos antes para el cálculo de la intensidad de las relaciones entre variables nominales. Para ello, deberíamos construir intervalos y tratarlos como las categorías de las dos variables. De ese modo, perderíamos la información que provee una variable cuantitativa. Por ejemplo, si disponemos de un conjunto de personas adultas de las que sabemos la edad a la que cada una se casó (o unió) por primera vez y los años de escolarización, y nos interesamos por la relación entre estas dos variables. La matriz de datos para estas dos variables en 13 casos es:

edad.union	escolarizacion	edad.union.3	escolariz.3
18	10.0	(17,23]	(9.99,13.3]
17	12.0	(17,23]	(9.99,13.3]
25	10.5	(23,29]	(9.99,13.3]
19	11.5	(17,23]	(9.99,13.3]
23	18.0	(17,23]	(16.7,20]
20	14.0	(17,23]	(13.3,16.7]
18	15.5	(17,23]	(13.3,16.7]
20	12.0	(17,23]	(9.99,13.3]
24	13.0	(23,29]	(9.99,13.3]
24	15.0	(23,29]	(13.3,16.7]
26	16.0	(23,29]	(13.3,16.7]
30	18.0	(29,35]	(16.7,20]
35	20.0	(29,35]	(16.7,20]

Si se intenta construir una tabla de doble entrada para estas dos variables, el problema es aún mayor que con las ordinales, dado que habría un gran número de filas y de columnas, y resultaría casi imposible de leer. Además, muchas celdas estarían vacías y habría muy pocos casos en cada una de las restantes. Los trece datos de la matriz anterior quedarán, en una tabla de doble entrada, así:

Tabla 6.14: Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal

	10	10.5	11.5	12	13	14	15	15.5	16	18	20
17	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
24	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0



	10	10.5	11.5	12	13	14	15	15.5	16	18	20
25	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Nuevamente, esta no es una tabla adecuada para representar estos datos y sería más legible con las categorías agrupadas:

Tabla 6.15: Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (categorías agrupadas)

	(9.99,13.3]	(13.3,16.7]	(16.7,20]
(17,23]	4	2	1
(23,29]	2	2	0
(29,35]	0	0	2

Ahora la tabla se lee con más facilidad y podemos tratarla como hicimos antes, como si fueran nominales y calcular un puntaje chi cuadrado y coeficientes *C de Pearson* y *V de Cramer*, o bien, como los intervalos están ordenados, poner una ranking y calcular el coeficiente de Spearman. Sin embargo, al hacer esto, se trata como si se hubiesen unido a la misma edad todas las personas que están entre 18 y 23.7 años. Del mismo modo, se trata como iguales a quienes tienen escolarización entre 10 y 13 años, no se puede distinguir entre quienes estudiaron 11, 12, 13 años: al interior del intervalo todos son considerados iguales. Además de esto, se pierden las posibilidades de análisis que ofrecen las variables cuantitativas.

Para poder mantener las variables con sus verdaderos valores (sin agrupar) y tener al mismo tiempo una representación abreviada de los datos, existe un recurso muy valioso: una representación gráfica de los valores que se denomina **diagrama de dispersión**.

Este gráfico usa los ejes cartesianos para indicar los valores de las dos variables que estamos analizando y representa con un punto cada concordancia de dos categorías que puede corresponder a un caso o a varios. Cada punto es un par ordenado: el primer número son los años de escolarización y el segundo la edad a la que se unió por primera vez. Los ceros de la tabla 6.14 ya no aparecen en este diagrama. El primer punto de la izquierda corresponde a alguien que alcanzó 10 años de escolarización y se unió a los 18 años de edad.

Lo que eran filas y columnas en todas las tablas mostradas hasta aquí, son ahora ejes coordenados, porque ya no se trata con categorías separadas de

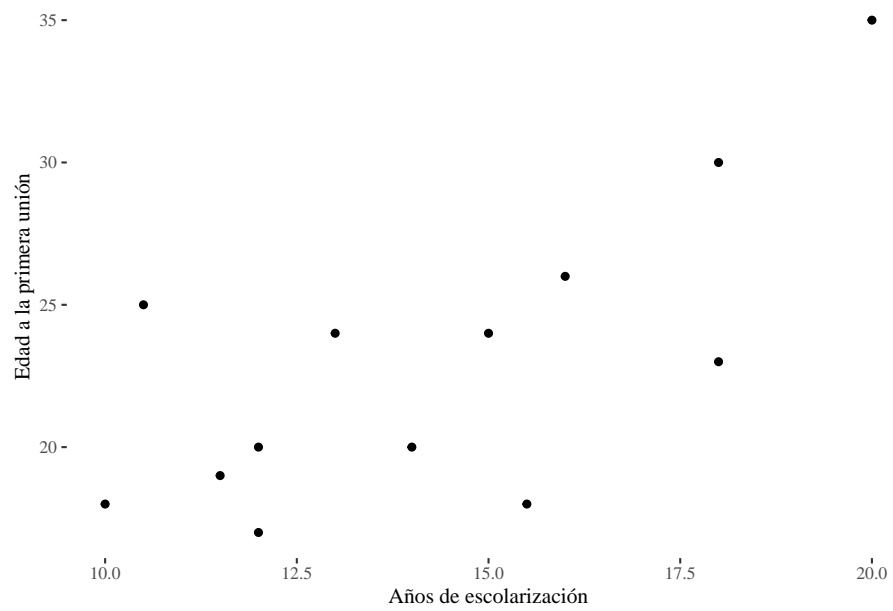


Figura 6.1: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal

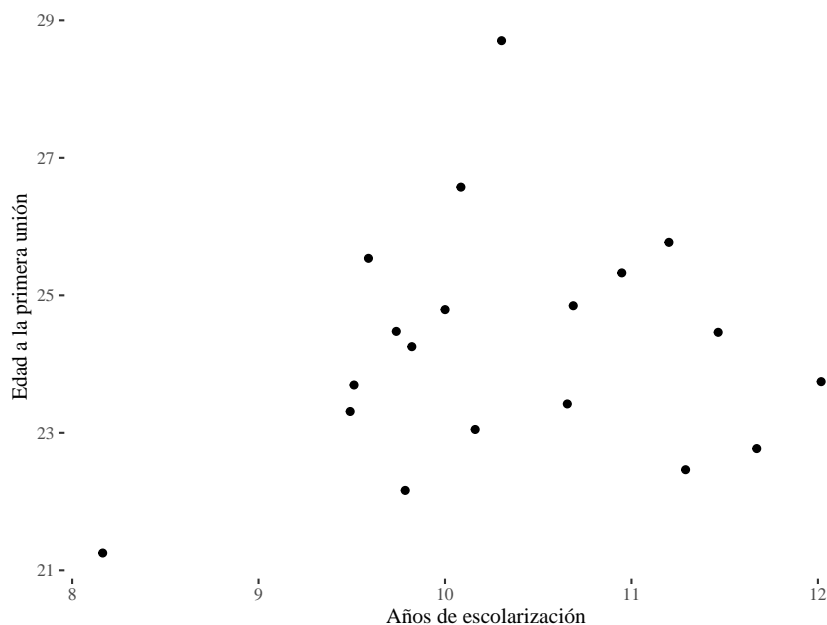


Figura 6.2: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación débil)

cada variable sino con valores cuantitativos de las variables que ahora son intervalares o proporcionales. Estos ejes se llaman **ordenadas** el vertical y **abscisas** el horizontal. En el ejemplo están representados los valores de los años de escolarización en el eje de las abscisas (primer elemento de cada par ordenado) y la edad a la primera unión en el eje de las ordenadas (segundo elemento de cada par).

La manera en que los puntos se distribuyen en el diagrama de dispersión nos da una primera aproximación a la relación entre las dos variables. Así, en el caso del ejemplo, hay una cierta tendencia creciente, en la que se vería que *globalmente*, las personas con más años de escolarización tenderían a unirse más tardíamente. Esta observación es equivalente a ver la concentración de casos en las celdas de la diagonal de una tabla bivariada.

Por el contrario, si los datos se dispersan de este otro modo:

No hay ninguna razón para creer que las variables estén relacionadas: los puntos no muestran una tendencia clara.

Una asociación más acentuada entre las mismas dos variables se observa en el siguiente diagrama de dispersión:

En el que la tendencia *lineal* es más clara, por lo que resulta más definido el

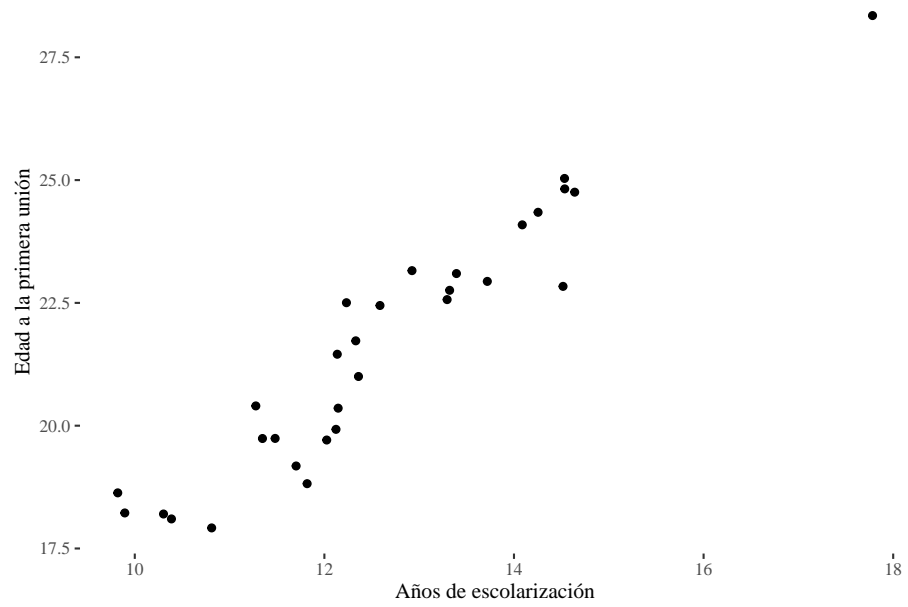


Figura 6.3: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación intensa)

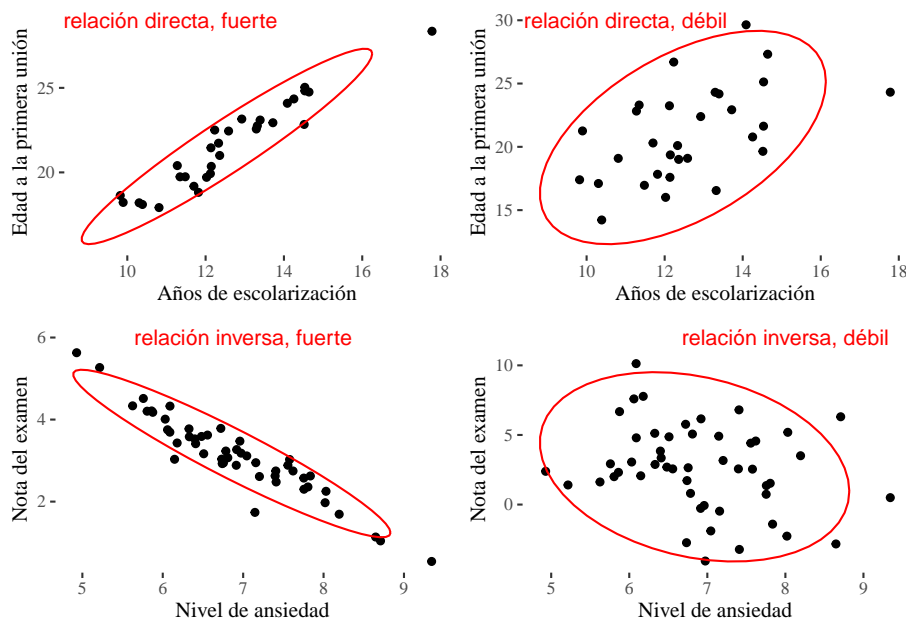


Figura 6.4: Comparación de la forma de las nubes de puntos según la intensidad de la relación

efecto de la escolarización sobre la edad a la que se produce la primera unión. Aquí, la nube de puntos está más aplanada que en el ejemplo anterior; en efecto, en el gráfico 6.2 la nube de puntos tiene forma más circular que en el 6.3, donde es más elíptica.

El ejemplo que hemos mostrado hasta aquí corresponde a una relación directa: más años de escolarización parecen asociarse con edades más tardías para la primera unión. De manera equivalente pueden representarse relaciones inversas. Consideremos el caso de la ansiedad frente a los exámenes y la calificación que se obtiene. En un estudio realizado por el Laboratorio de Evaluación Psicológica y Educativa (LEPE, Facultad de Psicología UNC) se observó que a mayor puntaje en una prueba de ansiedad ante los exámenes, menor rendimiento académico (arrobafurlán2014), por lo que la relación entre las variables es inversa.

Los esquemas siguientes muestran el achatamiento de la nube de puntos según la relación sea más fuerte o más débil y según sea directa o inversa.

La intensidad de la relación está vinculada al achatamiento de la elipse que rodea la nube de puntos y éste al grado de alineación que los puntos tengan. Luego volveremos sobre esta idea.

Solo nos ocuparemos de relaciones como las que acabamos de ejemplificar:

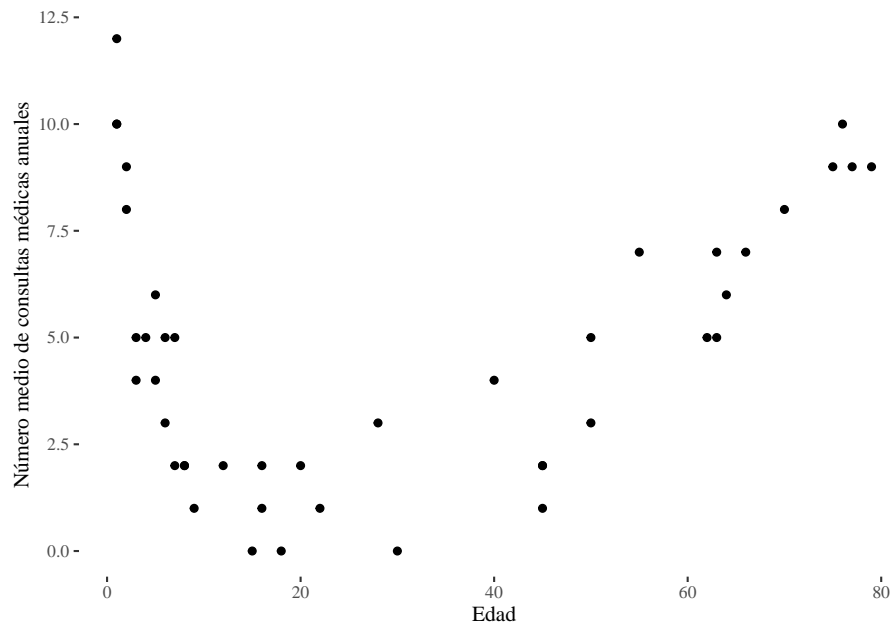


Figura 6.5: Diagrama de dispersión del número medio de consultas médicas anuales y la edad.

aquellas en las que la tendencia es creciente o decreciente, pero siempre siguiendo un camino parecido a una línea recta. Son las que llamaremos *relaciones lineales*. No son la únicas que existen; solo a modo de ilustración, veamos cómo se representa la relación entre la edad de las personas y la frecuencia con que consultan al médico. Estas dos variables son tales que, en términos muy generales y sin considerar situaciones específicas, para valores pequeños de la primera (en la infancia) las consultas son frecuentes, luego se reducen durante la adultez para volver a incrementarse en la vejez. Por eso el gráfico que las representa tiene la siguiente forma aproximada:

Este conjunto de puntos muestra una tendencia *no lineal*, eso no implica que las variables no estén relacionadas; por el contrario, la relación existe, pero no es lineal. Estos puntos, en lugar de ser aproximados por una línea recta, lo serían con una curva con forma de parábola. No nos ocuparemos aquí de relaciones no lineales. Limitaremos nuestro análisis a relaciones lineales, debido a que es muy frecuente usarlas como primera aproximación a la forma que tiene la relación entre dos variables y porque a menudo, cuando se trabaja con relaciones no lineales, es posible realizar transformaciones de las variables para lograr relaciones lineales.

Para analizar la intensidad de la relación lineal entre dos variables (ambas

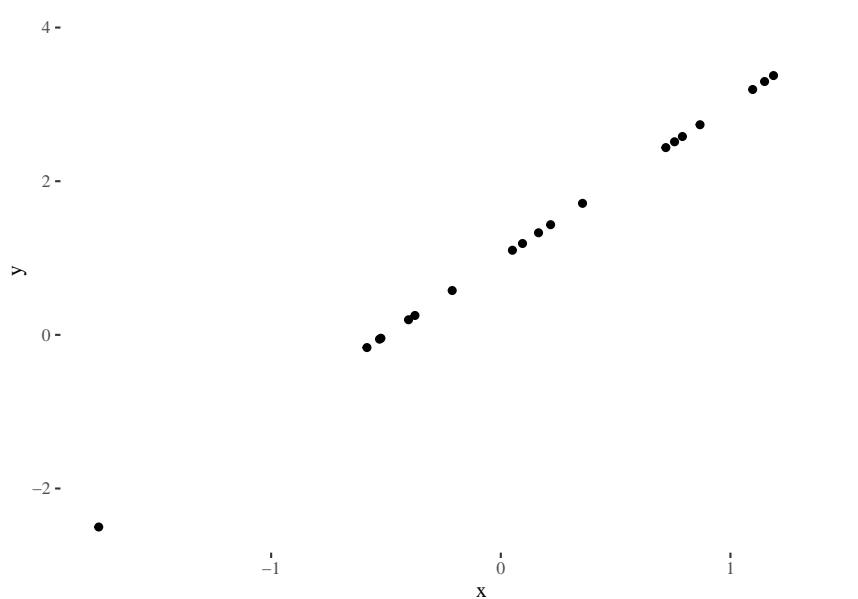


Figura 6.6: Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta creciente, por lo que  $r = 1$

medidas a nivel intervalar o proporcional) calcularemos un coeficiente comparable a los que hemos visto hasta aquí, que tendrá una interpretación similar a la del coeficiente de correlación por rangos de Spearman. Este coeficiente se llama **coeficiente de correlación  $r$  de Pearson** y es uno de los de mayor utilización cuando las variables que se analizan alcanzan el nivel de medición que autoriza su cálculo. Este coeficiente va a medir qué tan bien se puede aproximar el conjunto de puntos con una función lineal y va a depender de lo que antes llamamos el “achataamiento” de la elipse. Será grande (próximo a 1 ó a  $-1$ ) si las variables están muy relacionadas linealmente, es decir, si la nube de puntos se elonga hacia una línea; y será pequeño (próximo a cero) si las variables guardan poca relación lineal, es decir si la nube de puntos tiene forma redondeada. Será positivo y elevado (próximo a 1) si valores pequeños de una variable están acompañados de valores pequeños de la otra y valores grandes de una siguen a valores grandes de la otra, como sucedió en el ejemplo del gráfico 6.3. Será negativo y elevado (próximo a  $-1$ ) si los valores grandes de una de las variables acompañan a los pequeños de la otra y viceversa, como en el gráfico ref(fig:cual). La correlación será perfecta positiva ( $r = 1$ ) si todos los puntos se ubican sobre una recta creciente:

Y será perfecta negativa ( $r = -1$ ) si todos los puntos se ubican sobre una recta decreciente:

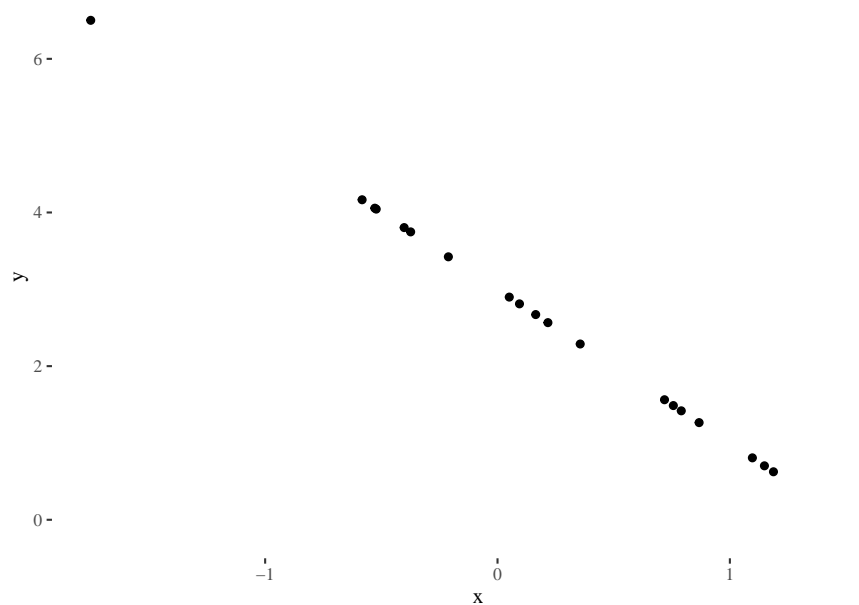


Figura 6.7: Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta decreciente, por lo que  $r = -1$



Ambas son situaciones ideales que no se encuentran en la realidad, constituyen el límite de la intensidad que pueden alcanzar las relaciones lineales directas o inversas.

Las unidades en que se miden las variables que se relacionan pueden ser muy diferentes, en el ejemplo de ansiedad y resultado de los exámenes, la primera se puede medir en una escala de cero a cien y la segunda de cero a diez, por lo que un valor elevado de la primera sería 95 y uno elevado de la segunda, 9. Esto impide que se comparen directamente los valores grandes con los grandes y los pequeños con los pequeños. Vamos a usar un recurso que ya fue presentado: las puntuaciones  $z$ , aquellas que indican a cuántas desviaciones estándar se encuentra cada observación de la media. Son los puntajes que permiten decidir si se trata de un valor grande (muy superior a la media) o pequeño (muy inferior a la media) o intermedio (semejante a la media), sin tener unidades, por lo que permite la comparación de elementos que pueden tener cualquier unidad de medida.

Recordemos que para los valores bajos de la variable (menores a la media), el puntaje  $z$  es negativo y es positivo para los valores altos (superiores a la media). Si dos variables están correlacionadas positivamente (altos con altos y bajos con bajos), entonces sus puntajes  $z$  se corresponderán positivos con positivos y negativos con negativos.

Si para cada sujeto multiplicamos los puntajes  $z$  de las dos variables que se relacionan, obtendremos siempre un resultado positivo, ya sea porque multiplicamos dos números positivos ( $+\times+=+$ ) o dos negativos ( $-\times- = +$ ). Si luego sumamos esos productos para todos los sujetos obtendremos un número alto positivo.

A la inversa, si dos variables se correlacionan negativamente los productos de sus puntajes  $z$  serán negativos, porque los valores altos de una irán con los bajos de la otra (que equivale a  $z$  positivos con  $z$  negativos, y  $+\times-= -$ ) y bajos con altos (que es lo mismo que  $z$  negativos con  $z$  positivos y  $-\times+= -$ ). Cuando sumemos estos productos para todos los casos tendremos un número alto y negativo.

Si las variables no estuvieran correlacionadas, habría casos en el que un valor alto de una variable se acompaña de uno alto de la otra y casos en que un valor alto va seguido de uno bajo, algunos productos de  $z$  serían positivos y otros negativos y entonces, al sumarlos, obtendríamos un número bajo, que puede ser positivo o negativo, pero será cercano a cero.

Entonces el producto de las puntuaciones  $z$  ofrece un resultado que será:

- alto y positivo si las variables tienen una correlación fuerte y directa
- alto y negativo si la correlación es fuerte e inversa
- cercano a cero si no están correlacionadas

Haciendo uso de este razonamiento, el coeficiente de correlación de Pearson se calcula como<sup>5</sup>:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n z_{x_i} * z_{y_i}}{n - 1}$$

Donde  $z$  representan los desvíos estándar de las variables  $x$  e  $y$ ,  $n$  es el total de observaciones y los subíndices  $i$  corresponden a cada una de ellas. El signo de suma señala que ésta debe extenderse desde el primer caso ( $i = 1$ ) hasta el último (cuando  $i = n$ ).

Como en el caso del coeficiente de Spearman, el campo de variación del coeficiente de Pearson es el intervalo  $-1, 1$ .

Para el cálculo del coeficiente de Pearson, no es necesario que las dos variables tengan las mismas unidades, porque se usan los puntajes  $z$ , que carecen de unidades. No hay inconveniente en correlacionar el peso (en kilogramos) con la talla (medida en centímetros).

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo calcular el coeficiente de correlación de Pearson para evaluar la relación entre dos variables. Las variables seleccionadas para el ejemplo son: 1) puntaje obtenido en una escala de inteligencia lógico-matemática y 2) cantidad de ejercicios correctamente realizados en una prueba de matemática. El fragmento de la matriz de datos correspondiente es el siguiente:

puntaje.escala	ejercic.corr
46	7
44	2
56	7
57	8
30	2
60	9
45	5
43	1
64	9
32	3

Una vez que se ha obtenido la media y desviación estándar de las medidas del puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática ( $\bar{x} = 47,7$   $s_x = 11,44$ ) y de cantidad de ejercicios matemáticos correctamente realizados ( $\bar{y} = 5,3$   $s_y =$

<sup>5</sup>Esta expresión puede encontrarse un poco diferente en algunos manuales. Si las desviaciones estándar, que se usan para calcular los puntajes  $z$ , se calcularan con denominador  $n$  (como si correspondieran a observaciones provenientes de toda la población), entonces la fórmula de  $r$  llevaría denominador  $n$  también. Aquí mantenemos el modo de cálculo de la desviación estándar muestral con denominador  $n-1$  y por eso esta fórmula lo lleva así también.

3,09), se deben convertir las observaciones brutas en puntuaciones  $z$ . Para ello se calcula la diferencia entre la puntuación bruta original y la media del grupo, y el resultado de esta operación se divide por la desviación estándar del grupo. La transformación a puntaje  $z$  se obtiene como vimos antes:

Para el puntaje en inteligencia lógico - matemática ( $x$ ),

$$z_x = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$

Para la cantidad de ejercicios correctamente realizados ( $y$ ),

$$z_y = \frac{y - \bar{y}}{s_y}$$

Entonces, el puntaje  $z$  del sujeto 1 para cada escala se obtiene de la siguiente manera:

$$z_{x_1} = \frac{46 - 47,7}{11,44} = -0,15$$

$$z_{y_1} = \frac{7 - 5,3}{3,09} = 0,55$$

Y del mismo modo para cada uno de los sujetos observados, para obtener la siguiente tabla:

Sujetos	Puntaje escala inteligencia lógico-matemática $z_x$	Ejercicios correctamente realizados $z_y$	$z_x * z_y$
1	-0.15	0.55	-0.08
2	-0.32	-1.07	0.35
3	0.73	0.55	0.40
4	0.81	0.87	0.71
5	-1.55	-1.07	1.65
6	1.08	1.20	1.29
7	-0.24	-0.10	0.02
8	-0.41	-1.39	0.57
9	1.42	1.20	1.70
10	-1.37	-0.74	1.02

El numerador del coeficiente  $r$  de Pearson se obtiene sumando la última columna:

$$\sum z_x * z_y = 7,63$$

y solo queda dividir este número por  $n - 1 = 10 - 1 = 9$  para obtener  $r = 0,85$ .

El coeficiente dio positivo, lo que indica que la relación es directa. Como se habría esperado: las personas con mayor puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática, son quienes tienen una mayor cantidad de ejercicios correctamente realizados.

Además, el valor 0,85 es elevado, lo que indica que la relación entre las dos variables es intensa.

La decisión acerca de considerar como grande o pequeño al valor de un coeficiente de asociación o de correlación depende del tipo de variable con que se esté trabajando y en especial de la forma en que son medidas esas variables. En buena medida, el uso de estos coeficientes es comparativo y puede ser muy valioso saber si una variable se asocia (o se correlaciona) más con una que con otra. Cuando tratamos de explicar un fenómeno y formulamos hipótesis sobre varios factores, es útil saber cuáles de ellos se asocian más intensamente con ese fenómeno.

Se han establecido algunos valores de referencia, según los cuales la correlación se considera nula si  $r < 0,10$ , pequeña si  $0,10 \leq r < 0,30$ , media si  $0,30 \leq r \leq 0,50$  y grande si  $r > 0,50$ . Coincidimos con Cohen(1988), en que estos criterios son un tanto arbitrarios y siempre debe considerarse al coeficiente de correlación en contexto.

Para poder interpretar el coeficiente de Pearson, se requiere que las variables guarden entre sí una relación lineal, de lo contrario, la interpretación como intensidad de la relación es incorrecta. Además, este coeficiente se ve afectado por valores extremos, es decir aquellos que se apartan de la tendencia mayoritaria, por lo que si éstos existen conviene calcular el coeficiente de Spearman. Ambas situaciones, tendencia lineal o no, y existencia o no de casos atípicos pueden verse en el diagrama de dispersión.

Cuando la relación entre dos variables es lineal, el coeficiente de Pearson da una interpretación más detallada de la incidencia de una variable sobre la otra. Cuando este coeficiente se eleva al cuadrado, se obtiene un número que se llama **coeficiente general de determinación**, que se indica como  $R^2$  y que mide la parte de la varianza que es compartida por las dos variables. Esta interpretación puede no ser clara en este momento, y volveremos sobre ella hacia el final del capítulo.

Cuando la relación es asimétrica y una variable opera como antecedente y la otra como consecuente, el coeficiente general de determinación mide la parte de la varianza de la variable consecuente que se explica por la antecedente. O bien la parte de la variabilidad de la variable dependiente que puede atribuirse a la variable independiente. Así, en nuestro ejemplo:  $R^2 = 0,85^2 = 0,72$ , lo podemos indicar como 72% y quiere decir que el 72% de la variabilidad total que aparece en el número de ejercicios correctamente realizados, se explica por el puntaje alcanzado en la escala de inteligencia lógico matemática. Así, con este

coeficiente identificamos la magnitud del aporte que una variable hace a explicar los cambios de la otra. Los hechos que se observan obedecen a una multiplicidad de factores explicativos, por esa razón es muy valioso disponer de un coeficiente como  $R^2$ , que mide qué parte de los cambios en lo observado pueden atribuirse a un determinado factor explicativo.

En el apartado siguiente volveremos sobre el coeficiente general de determinación en una aplicación más general.

## 6.4 Dicotomías reales y artificiales

Cuando se trabaja con variables dicotómicas, estas pueden tener dos orígenes diferentes; hay dicotomías reales y las hay artificiales. Las primeras son variables que por su construcción, solo admiten dos categorías, como turno (mañana - tarde), sexo (varón - mujer), grupo (experimental - control). Las segundas, provienen de haber recategorizado una variable continua en dos grupos, como puntaje (alto - bajo), ingresos medidos según línea de pobreza (pobre - no pobre), resultado de un examen (aprobado - no aprobado), posición política (izquierda - derecha). Esta situación es especialmente interesante en la medición de rasgos latentes a los que se considera continuos, pero que se miden de manera dicotómica. Por ejemplo, la actitud hacia la política, puede ir desde el desinterés completo hasta la participación activa, pudiendo identificarse graduaciones entre esos extremos. Si se usa la afiliación a un partido como indicador de participación, se toma una medida dicotómica (está afiliado - no está afiliado); esta dicotomización se considera artificial, porque se supone que es un punto de corte que define dos categorías en un continuo. La distinción entre alumnos que *promovieron* y que *no promovieron* es una dicotomización sobre una variable originalmente continua: el promedio de las notas. Clasificar a los países en *desarrollados* y *en vías de desarrollo*, implica cortar en dos (dicotomizar) un conjunto de indicadores de desarrollo, que son continuos (PIB per cápita, educación, etc.). Lo cual es diferente de distinguir países *con arsenal nuclear* y *sin arsenal nuclear*, porque aquí no hay graduación entre las categorías, esta última es una dicotomía real.

Cuando trata de dicotomías reales, el coeficiente  $\varphi$  que ya se mencionó, es adecuado. Por el contrario, en los análisis de la intensidad de la asociación entre dos variables que han sido dicotomizadas de manera artificial a partir de una variable que se considera continua, se usa una estimación del coeficiente de Pearson que habría resultado si las variables no hubieran sido dicotomizadas y hubiese entre ellas una relación lineal. El coeficiente para este caso se denomina **coeficiente de correlación tetracórica**, su cálculo requiere procedimientos matemáticos complejos, pero hay fórmulas aproximadas. Una de ellas es la siguiente

$$r_{tet} = \cos\left(\frac{\pi}{1 + \sqrt{\frac{a*d}{b*c}}}\right)$$

En la que a, b, c y d son las frecuencias absolutas de una tabla de  $2 \times 2$  dispuestas así:

a	b
c	d

El resultado de  $r_{tet}$  puede variar entre  $-1$  y  $1$ , los valores más cercanos a  $1$  o a  $-1$  indican mayor intensidad en la asociación. Respecto del signo, es más claro no considerarlo en el coeficiente y observar en qué sentido se da la relación a partir de las frecuencias relativas calculadas en la tabla.

Ejemplo a partir de la base bayley: para analizar la relación entre los puntajes en las subescalas mental y motora de la prueba de Bayley, se dicotomizan las dos variables en la media, asignando el valor 0 a quienes tienen puntajes inferiores a la media en cada subescala y uno a quienes superan a la media. Resulta así la tabla:

	0	1	Total
0	139	102	241
1	102	200	302
Total	241	302	543

El cálculo del coeficiente de correlación tetracórico para esa tabla es:

$$r_{tet} = \cos\left(\frac{\pi}{1 + \sqrt{\frac{139*200}{102*102}}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2.63}\right) = 0,37$$

Que indica una correlación moderada entre las variables. Como en este caso sí se dispone de los valores originales y la dicotomización se hizo a fines de ilustración, es posible calcularlo, su valor es 0,35. Pero si solo se hubiese contado con la dicotomía, el tetracórico es el único que puede calcularse.

El coeficiente de Kendall - Yule es otra aproximación al coeficiente tetracórico. En este caso da 0,45, que es de peor calidad que la que se obtiene con la expresión anterior.

Esta fórmula es aproximada, el cálculo exacto no puede hacerse manualmente, por lo que hay que usar programas informáticos.

## 6.5 Niveles de medición combinados

Las operaciones que pueden hacerse a un nivel de medición son también válidas para los niveles superiores, pero no a la inversa; Por eso cada vez que haya variables con niveles de medición diferente, habrá que tener en cuenta el nivel más bajo para decidir qué coeficiente corresponde usar. Por ejemplo, la correlación entre una variable ordinal y una continua debe hacerse con el coeficiente de Spearman, porque las operaciones que este requiere se puede realizar tanto con variables ordinales como con continuas. Por el contrario, el coeficiente de Pearson requiere operaciones que no son válidas cuando la variable es ordinal.

Sin embargo, hay algunos casos particulares que merecen mención.

### 6.5.1 Una variable dicotómica real y una proporcional

La comparación de los valores de una variable continua entre dos grupos se trata como la correlación entre una variable dicotómica real (que define los grupos) y una continua. Allí, los grupos se codifican como cero y uno, y se calcula el coeficiente de Pearson entre las dos variables.

Sin embargo, para esta situación existe un coeficiente específico, que se denomina **punto biserial** ( $r_{pb}$ ). Su fórmula de cálculo conduce al mismo resultado que el coeficiente de Pearson, pero tiene en cuenta las medias de la variable continua y la proporción de casos en cada grupo, junto con la desviación estándar de la variable continua:

$$r_{pb} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{s} * \sqrt{p * (1 - p) * \frac{n}{n - 1}}$$

Donde:

- $\bar{x}_1$  Es la media de la variable en el grupo codificado como uno
- $\bar{x}_0$  Es la media de la variable en el grupo codificado como cero
- $p$  Es la proporción de casos que hay en grupo codificado como uno
- $n$  Es el número total de observaciones y
- $s$  Es la desviación estándar de la variable continua

El signo de este coeficiente indica el sentido de la diferencia; es positivo cuando el grupo codificado como uno tiene valores más altos y negativo en el caso contrario. Su valor absoluto mide la magnitud de la relación entre las dos variables. Infostat® carece de un comando para solicitar este coeficiente, por

lo que deben codificarse las categorías de la variable dicotómica como cero y uno y solicitar el coeficiente de Pearson.

Ejemplo (datos ficticios): se comparan los puntajes alcanzados en una prueba por los individuos pertenecientes a los grupos experimental y control, y se obtienen estos valores:

grupo	puntaje
control	8.0
control	5.0
control	6.0
control	5.0
control	6.0
control	8.0
control	6.0
experimental	4.0
experimental	5.6
experimental	5.6
experimental	8.0
experimental	7.2
experimental	6.4
experimental	7.2
experimental	8.0
experimental	8.0
experimental	7.2

Se toma como grupo de referencia (grupo 1) al experimental y resulta:

- $\bar{x}_1 = 6.7$
- $\bar{x}_0 = 6.3$
- $p = 0.59$
- $n = 17$
- $s = 1.27$

La fórmula da:

$$r_{pb} = \frac{6.7 - 6.3}{1.27} * \sqrt{0.59 * (1 - 0.59) * \frac{17}{17 - 1}} = 0.1734$$

Que sea positivo indica que el grupo al que se codificó uno (el experimental) tiene puntajes medios más altos. Su valor absoluto señala una correlación pequeña entre la pertenencia a los grupos y los puntajes de la prueba.



### 6.5.2 Una variable continua dicotomizada y una proporcional

Si la variable dicotómica proviene de la recategorización de una continua que se dividió en dos categorías, es decir, si la dicotomía es artificial y se supone que hay una variable latente continua, entonces el coeficiente que corresponde calcular es el llamado **biserial**  $r_b$ . Como sucedió con el coeficiente de correlación tetracórico, se trata de una estimación del valor que tendría el coeficiente de Pearson si la variable no hubiese sido dicotomizada.

$$r_b = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{s} * \frac{p * (1 - p)}{y}$$

Con la misma notación que se usó para el coeficiente  $r_{pb}$ . Lo diferente es la  $y$  en el denominador, cuyo cálculo depende de la distribución normal, que se verá más adelante<sup>6</sup>.

## 6.6 Resumen de coeficientes de asociación

Nivel de medición de las variables	Coeficiente	Rango de variación	Lectura
Ambas dicotómicas reales	$\varphi$ (phi) de Yule	$[-1; 1]$	No importa el signo, la relación es fuerte si es cercano a 1 ó a -1 y débil si está cerca de 0
Ambas dicotómicas provenientes de dos continuas recategorizadas	tetracórico $r_{tet}$ o bien Q de Kendall - Yule	$[-1; 1]$	No importa el signo, la relación es fuerte si es cercano a 1 ó a -1 y débil si está cerca de 0
Ambas nominales	de contingencia, C	$[0; C_{max}]$ depende de la dimensión de la tabla	Más intensa si es próximo a $C_{max}$
Ambas nominales	V de Cramer	$[0; 1]$	Más intensa si es próximo a 1
Ambas ordinales o una ordinal y una proporcional	$r_s$ de Spearman	$[-1; 1]$	El signo indica la dirección, positivo es directa, negativo es inversa. Fuerte si es cercano a 1 ó a -1 y débil si está cerca de 0

<sup>6</sup>Es la ordenada correspondiente a un valor de  $z$  que deja a derecha e izquierda, en una distribución normal, proporciones del área bajo la curva iguales a  $p$  y  $1 - p$  respectivamente.

Nivel de medición de las variables	Coficiente	Rango de variación	Lectura
Ambas proporcionales	$r$ de Pearson	$[-1; 1]$	El signo indica la dirección, positivo es directa, negativo es inversa. Fuerte si es cercano a 1 ó a $-1$ y débil si está cerca de 0
Una dicotómica real y una proporcional	$r_{pb}$ punto biserial	$[-1; 1]$	Más intensa si es próximo a 1 o a $-1$
Una dicotómica proveniente de una continua recategorizada y otra proporcional	$r_b$ biserial	$[-1; 1]$	Más intensa si es próximo a 1 o a $-1$

## 6.7 Matriz de correlaciones

A menudo resulta de interés observar grados de asociación entre más de dos variables, para ello, una disposición adecuada es la matriz de correlaciones. Se trata de una organización de las variables que se correlacionan, en filas y columnas; las variables se repiten en la primera fila y la primera columna, por lo que la matriz de correlaciones es cuadrada. La diagonal de la matriz tiene unos (1s), que indican la correlación perfecta de cada variable consigo misma. Las celdas que se encuentran por encima y por debajo de la diagonal muestran los coeficientes de correlación entre cada par de variables. Porque esos valores son idénticos, la matriz se llama simétrica.

La matriz permite advertir patrones de asociación entre variables, es decir cuáles tienden a variar de manera más semejante.

El siguiente ejemplo correlaciona simultáneamente las siguientes preguntas de Latinobarómetro:

Para cada uno de los grupos, instituciones o personas de la lista ¿cuánta confianza tiene usted en ellas: mucha (1), algo (2), poca (3), ninguna (4) confianza en...?

- P14STGBS.A Las Fuerzas Armadas
- P14STGBS.B La policía/ Carabineros
- P14ST.C La Iglesia
- P14ST.D Congreso
- P14ST.E Gobierno
- P14ST.F Poder Judicial

- P14ST.G Los partidos políticos

	P14STGBS.A	P14STGBS.B	P14ST.C	P14ST.D	P14ST.E	P14ST.F	P14ST.G
P14STGBS.A	1.00	0.57	0.19	0.27	0.34	0.38	0.26
P14STGBS.B	0.57	1.00	0.18	0.35	0.42	0.44	0.35
P14ST.C	0.19	0.18	1.00	0.22	0.16	0.18	0.14
P14ST.D	0.27	0.35	0.22	1.00	0.54	0.49	0.49
P14ST.E	0.34	0.42	0.16	0.54	1.00	0.55	0.50
P14ST.F	0.38	0.44	0.18	0.49	0.55	1.00	0.48
P14ST.G	0.26	0.35	0.14	0.49	0.50	0.48	1.00

Esta matriz de correlaciones muestra simultáneamente los coeficientes de correlación entre las siete variables seleccionadas. De las 49 celdas de la matriz, 7 están ocupadas con los unos de la diagonal. Las 42 restantes muestran los 21 coeficientes de correlación, repetidos por encima y por debajo de la diagonal.

El coeficiente que se pidió es el de Spearman, porque los números codifican categorías ordinales.

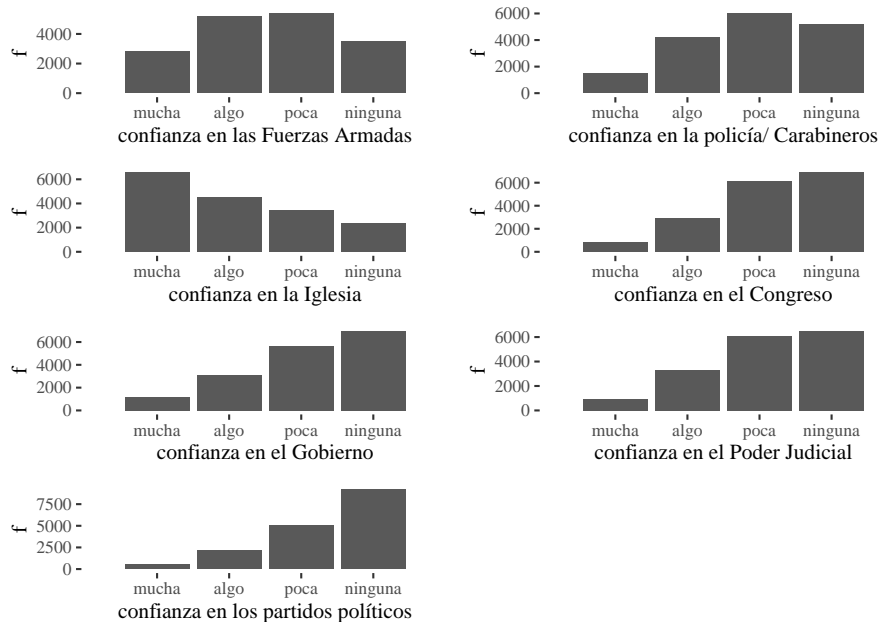
Esta matriz no es explicativa, no se identifican variables antecedentes y consecuentes, por eso se trata de una descripción del modo en que las respuestas a estas preguntas varían conjuntamente.

La lectura de la matriz puede empezar señalando que todos los coeficientes son positivos. Eso quiere decir que los encuestados tomaron posición similar respecto de las diferentes instituciones por las que se les consultó, o que dieron respuestas no opuestas a las diferentes preguntas; quienes dijeron tener mucha confianza en algunas instituciones también la tienen por otras y a la inversa, quienes no confían en algunas, tampoco lo hacen en otras. Por ser relaciones descriptivas, nos informan que el conjunto de encuestados se caracteriza porque algunas personas tienden a confiar en estas instituciones y otras tienden a desconfiar de ellas.

Nótese que este es un patrón posible, pero no el único. por ejemplo podría haber coeficientes negativos que indicarían que algunos pares de instituciones gozan de confianza inversa: quienes confían en unas, desconfían de otras.

En segundo lugar, puede leerse que el valor más elevado, que es 0.57 corresponde a la asociación entre las Fuerzas Armadas y Policía. La intensidad, comparativamente elevada, de esta asociación indica que la confianza en ambas “va pareja”, de manera gruesa, podríamos decir que quienes confían en una de las dos instituciones, tienden a confiar también en la otra e inversamente, quienes desconfían de una también lo hacen de la otra. De manera similar se pueden analizar los demás pares de variables. En el otro extremo, la más tenue de las relaciones, con coeficiente de 0.14 es la de La Iglesia y Los partidos políticos. En este caso hay poca relación entre la confianza que se tiene a una

y a la otra de estas dos instituciones. Se podría decir que son “relativamente independientes”.



muchacha (1), algo (2), poca (3), ninguna (4)

## 6.8 La forma de la relación

En este apartado vamos a concentrarnos en relaciones asimétricas: aquellas en las que es posible identificar a una de las variables como antecedente y a la otra como consecuente (o como independiente y dependiente, en el marco de un diseño experimental). Se trata de relaciones que se dirigen a explicar una variable (la consecuente) a partir de los valores de la otra (la antecedente). Por ejemplo, cuando preguntamos si una droga es efectiva para tratar la depresión, buscamos la relación entre las diferentes dosis de la droga y la reducción de síntomas de la depresión, por ejemplo a través del puntaje alcanzado en una prueba que la evalúa. O también, si preguntamos por el efecto del nivel de ansiedad (variable antecedente) sobre los resultados que se obtienen en un examen (variable consecuente, a explicar), o el impacto de una campaña de vacunación (variable antecedente) sobre la frecuencia de casos de gripe o el tamaño del arsenal de un país como factor explicativo del riesgo de conflictos.

Cuando las variables tienen nivel de medición proporcional, es posible representar la relación con un diagrama de dispersión y, como hemos visto, cuanto más intensa es la relación (coeficiente de correlación de Pearson cercano

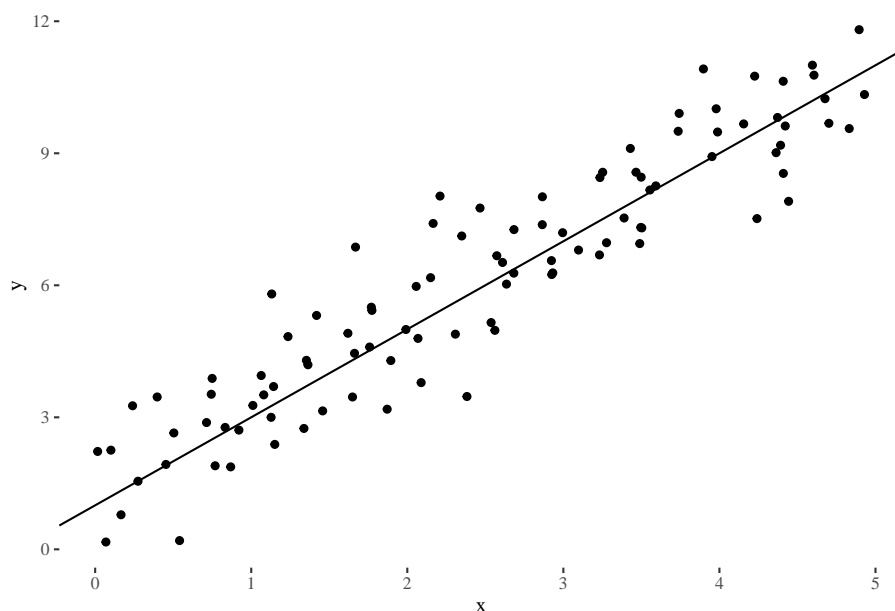


Figura 6.8: Ejemplo de función lineal que aproxima los puntos con una tendencia creciente

a 1), tanto más se aplana la nube de puntos, yendo hacia una tendencia lineal, aproximándose a una alineación a lo largo de una recta.

En este apartado avanzamos un paso más en el análisis de la relación entre variables: cuando los puntos del diagrama de dispersión tengan una disposición semejante a una recta (creciente, como en el gráfico 6.3 o decreciente, como en el ref(fig:cual)), podremos buscar la función lineal que mejor aproxima esos puntos. Usaremos a partir de aquí una notación general: llamaremos  $x$  a la variable antecedente (o independiente) e  $y$  a la consecuente (o dependiente). Porque la relación se supone asimétrica, esperamos que  $x$  tenga efectos sobre  $y$  (la dosis de droga sobre la depresión, o la ansiedad sobre los resultados del examen, la cobertura de la campaña de vacunación sobre la prevalencia de gripe, la cantidad de armas y el riesgo de conflicto, en los ejemplos mencionados). Se trata de modelar la nube de puntos a través de una recta, como en el gráfico siguiente:

Aquí, la recta que aproxima los puntos está trazada de modo que equilibre lo que los puntos se apartan de ella por encima y por debajo. La búsqueda de esa función lineal implica proponer un **modelo** para la forma de la relación entre las dos variables, veremos cuán realista resulta suponer que las dos variables se relacionan de manera lineal. Antes de eso será necesaria una breve referencia a

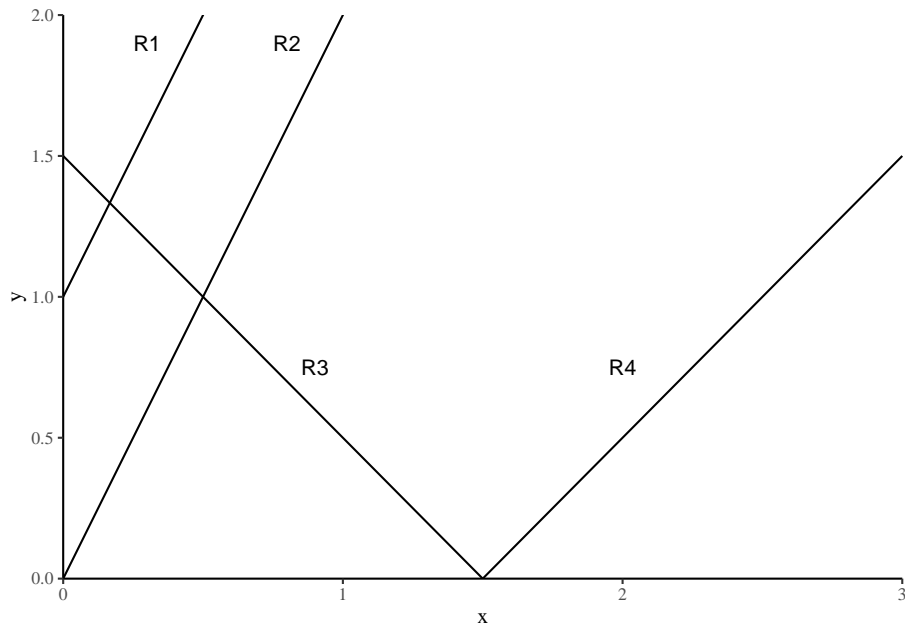


Figura 6.9: Ejemplos de funciones lineales con diferentes valores de la ordenada al origen

esta función.

La **función lineal** tiene una expresión matemática como la siguiente  $y = b_0 + b_1 * x$  en la que  $x$  e  $y$  son las variables cuya relación analizamos y los números  $b_0$  y  $b_1$  son valores fijos que determinan cuál es la recta de la que hablamos. Hallar la recta implica encontrar esos dos números  $b_0$  y  $b_1$ . Una vez que están determinados, se conoce la recta y se la puede trazar.

### 6.8.1 Ordenada al origen

El número  $b_0$  se llama ordenada al origen y representa el valor de  $y$  cuando  $x$  vale cero. Eso puede verse fácilmente en la expresión de la recta cuando se reemplaza a  $x$  por cero, así se obtiene:

$$y = b_0 + b_1 * x = b_0 + b_1 * 0 = b_0$$

Entonces, si  $x = 0$ , tendremos  $y = b_0$ . Como los ejes tienen el cero en el punto en que se cortan, gráficamente esta ordenada al origen se ubica sobre el eje  $y$  (por ser una ordenada), como indican las diferentes rectas en el gráfico siguiente.

Las rectas R1 y R3 tienen ordenada al origen positiva ( $b_0 > 0$ ). La ordenada al origen de R3 es mayor que la de R1, porque su  $b_0$  está más arriba en el eje de ordenadas. A los efectos de la ordenada al origen, no hay ninguna diferencia en que R1 vaya subiendo y R3 baje. La recta R2 pasa exactamente por el origen de coordenadas, por lo que su ordenada al origen es cero,  $b_0 = 0$ . La recta R4, si se prolonga para llegar a cortar al eje de ordenadas, lo hace en un valor negativo ( $b_0 < 0$ ).

Según las variables con que se trabaje, a veces  $b_0$  no tiene interés, porque no se consideran los valores negativos o bien porque no tiene sentido que la variable antecedente sea cero ( $x = 0$ ).

En los ejemplos que hemos mencionado hay diferentes situaciones con respecto al valor de  $b_0$ . En la relación *dosis droga-depresión*, el valor cero para la dosis es la no-administración de la misma. Aquellos sujetos que tienen  $x = 0$  son quienes no recibieron la droga y la ordenada al origen será el valor que hallemos en la escala de depresión (variable  $y$ ) para quienes no tomaron la droga (a dosis cero). Por el contrario, no es posible considerar un valor cero de la ansiedad en el segundo ejemplo, por lo que allí no nos interesamos por la ordenada al origen.

### 6.8.2 Pendiente

El otro número que determina de qué función lineal se trata, es  $b_1$  que se llama pendiente y gráficamente indica la inclinación de la recta: su valor es responsable de que la recta “suba” o “baje”, siempre mirándola de izquierda a derecha.

Las rectas R1, R2 y R4 son crecientes, van aumentando hacia la derecha (a medida que  $x$  crece), por eso la pendiente es positiva ( $b_1 > 0$ ).

La recta R3 desciende, es una función decreciente, porque a medida que  $x$  aumenta  $y$  disminuye y la pendiente es negativa ( $b_1 < 0$ ).

Vemos entonces que la pendiente depende de que sea una relación directa o inversa. Cuando es directa,  $x$  crece e  $y$  crece y la pendiente es positiva; cuando es inversa,  $x$  crece e  $y$  disminuye y la pendiente es negativa. Esto es lo mismo que sucede con el coeficiente de Pearson: positivo indica relación directa y negativo, inversa. Por esta razón,  $b_1$  (la pendiente de la recta) siempre tiene el mismo signo de  $r$ , porque en ambos casos el signo indica si se trata de una relación directa o inversa.

Además del gráfico, el significado analítico de la pendiente es muy importante, porque indica en cuánto varía  $y$  por cada unidad que aumenta  $x$ . El número  $b_1$  mide cuánto cambia la variable consecuente (dependiente), cuando la variable antecedente (independiente) cambia en una unidad. Como  $b_1$  puede ser positivo o negativo, el cambio en  $y$  puede ser en dirección de aumentar cuando  $x$  aumenta o de reducirse. En el ejemplo de la relación *dosis droga-depresión*, se esperaría que el valor de  $b_1$  fuera negativo, porque mide en cuánto se reduce la depresión (medida con el puntaje correspondiente a la escala que se use) por

cada unidad que se aumente la dosis. Del mismo modo con la *ansiedad* y el *resultado del examen*, se espera que los sujetos con mayor ansiedad alcancen resultados menores en el examen, por lo que la relación se espera que sea inversa, con pendiente negativa y que la recta sea decreciente.

Por el contrario, si observamos la relación entre las *horas dedicadas al estudio* -como variable antecedente- y el *resultado del examen* -como consecuente-, esperaríamos una relación directa, una pendiente positiva ( $b_1 > 0$ ), una recta creciente que indica cómo aumenta el resultado del examen a medida que se dedican más horas al estudio.

### 6.8.3 Obtención de la recta de regresión

Para encontrar  $b_0$  y  $b_1$  y determinar así la función lineal que corresponde a nuestra recta de regresión, deben usarse los puntos del diagrama, es decir los pares ordenados correspondientes a cada caso. Para hacerlo usaremos las fórmulas que mostramos a continuación pero, solo será para ver el modo de usarlas, luego lo pediremos a R.

Llamando  $x_i$  e  $y_i$  a cada valor de cada par ordenado y  $n$  al número total de observaciones, la expresión para calcular la pendiente de la recta es:

$$b_1 = \frac{n * \sum_{i=1}^n x_i * y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) * (\sum_{i=1}^n y_i)}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Una vez que conocemos la pendiente, se puede hallar la ordenada al origen haciendo:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x}$$

Donde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las medias de  $x$  y de  $y$  respectivamente.

Vamos a aplicar estas expresiones para encontrar la función lineal que mejor ajusta los puntos del ejemplo en el que relacionamos el *puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática* con el *número de ejercicios correctamente realizados*. Tratamos de manera asimétrica a esta relación y tomamos al puntaje de la escala de inteligencia lógico-matemática como antecedente ( $x$ ) y al número de aciertos como consecuente ( $y$ ). Es decir que en nuestro modelo estamos tratando de explicar el *número de aciertos* a partir del *puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática*.

Para facilitar el uso de la expresión del cálculo de la pendiente, agregamos dos columnas adicionales a los valores de las dos variables: la de los productos de cada  $x$  por cada  $y$ , y la de las  $x$  al cuadrado, del siguiente modo:



	$x_i$	$y_i$	$x_i * y_i$	$x_i^2$
	46	7	322	2116
	44	2	88	1936
	56	7	392	3136
	57	8	456	3249
	30	2	60	900
	60	9	540	3600
	45	5	225	2025
	43	1	43	1849
	64	9	576	4096
	32	3	96	1024
Sumas de las columnas	477	53	2798	23931

Tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 477$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 53$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i * y_i = 2789$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 23931$$

Reemplazando, obtenemos la pendiente de la recta:

$$b_1 = \frac{n * \sum_{i=1}^n x_i * y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) * (\sum_{i=1}^n y_i)}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{10 * 2798 - 477 * 53}{10 * 23931 - 477^2} = \frac{2699}{11781} = 0.23$$

Esta pendiente es positiva, como lo había sido  $r$ , y eso indica que la relación es directa. La pendiente además nos informa que por cada punto adicional en la variable antecedente (puntaje escala inteligencia lógico-matemática) se espera que se incremente en 0,23 el número de ejercicios bien resueltos.

Las medias de  $x$  y de  $y$  habían sido calculadas cuando las necesitamos para  $r$ :  $\bar{x} = 47,7$  e  $\bar{y} = 5,3$  por lo que la ordenada al origen de la recta es:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x} = 5.3 - 0.23 * 47.7 = -5.63$$

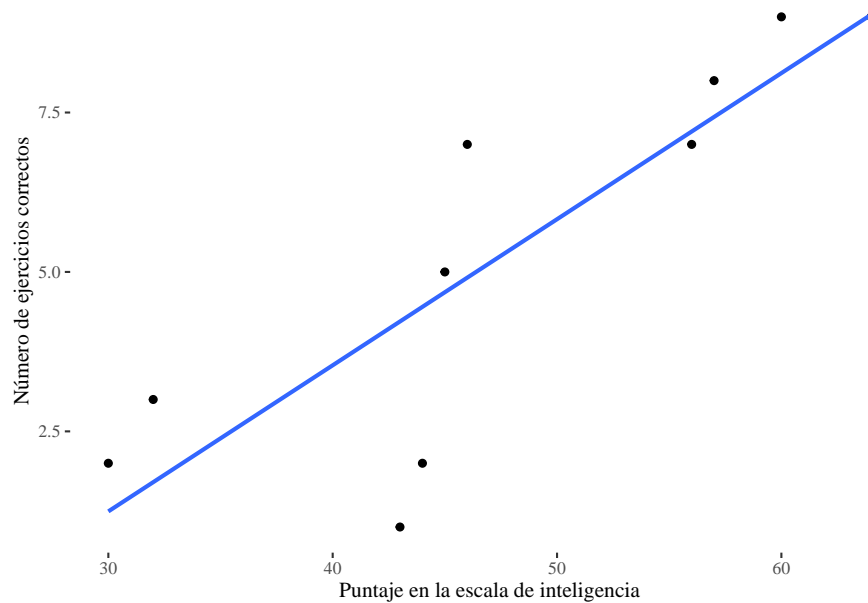


Figura 6.10: Diagrama de dispersión de la relación entre el puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática y el número de ejercicios de matemática correctamente realizados y la recta de regresión que mejor ajusta los puntos

El valor de la ordenada al origen no tiene interés en este ejemplo -salvo para el trazado de la recta-, porque sería el número de aciertos esperado (que resultan negativos, es decir sin interpretación posible) para alguien con puntaje cero en la escala de inteligencia, lo cual no está definido.

Conociendo la pendiente y la ordenada al origen, podemos escribir la ecuación de la recta:  $\hat{y} = -5,63 + 0,23 * x$ . Esta es la función lineal que describe los cambios de  $y$  a partir de los de  $x$ . Hemos escrito a  $y$  con una indicación especial, un circunflejo:  $\hat{y}$ , vamos a llamarla “ $y$  estimada” y es la que vamos a usar para trazar la recta:

La recta que hemos encontrado usando las fórmulas de arriba es la que hace mínimos los cuadrados de las distancias de cada punto a la recta<sup>7</sup>, por eso, a esta también se la llama **recta de mínimos cuadrados**.

Además de mostrarnos la forma del modelo, la recta de regresión sirve para hacer estimaciones de valores no observados, porque nos ofrece valores de  $\hat{y}$  para cada

<sup>7</sup>No es posible poner como condición que la recta haga mínimas las distancias porque hay puntos por encima y por debajo, por lo que la suma de las distancias se hace cero (igual a lo que sucedió con la suma de los desvíos alrededor de la media y que llevó a usar sus cuadrados para definir la varianza). Por esa razón se usan los cuadrados de las distancias.

$x$  que reemplacemos. Por ejemplo, si preguntamos por la cantidad de ejercicios bien resueltos que se esperan en alguien que alcanzó 55 puntos en la escala de inteligencia lógico-matemática, respondemos reemplazando en la función el valor de  $x = 55$  y resulta:

$$\hat{y} = -5,63 + 0,23 * x = -5,63 + 0,23 * 55 = 7,02$$

Que puede redondearse a 7. Este es el valor estimado del número de aciertos para alguien con 55 puntos en la escala de inteligencia lógico matemática.

Estas estimaciones son muy valiosas para hacer predicciones sobre valores que no han sido observados, por ejemplo hacia el futuro. Ejemplos muy útiles de esta aplicación son las proyecciones de población, y más específicamente las de proyección de matrícula escolar, que ofrecen estimaciones del volumen de alumnos que se prevé para años próximos. Si se conoce la relación entre el peso de la deuda como porcentaje del PBI y el riesgo de crisis económica, se puede predecir el riesgo de crisis conociendo el porcentaje del PBI que representa la deuda. Cuando se cuenta con un modelo que explica la relación entre el monto de una transferencia condicionada de renta (como la AUH, ) sobre la propensión a buscar empleo por parte de jefes y jefas de hogar, se puede estimar el monto que permite cumplir con la condición del programa (controles de salud, escolarización), pero no desincentiva la búsqueda de empleo. En general, si se tiene un modelo que explica el comportamiento de una variable en base a las variaciones de otra, entonces se puede predecir qué sucederá con la primera para diferentes valores de la segunda.

Los modelos que relacionan variables son diferentes según:

- la forma de la relación
- la cantidad de variables involucradas

La primera puede provenir de una teoría, o de la observación del diagrama de dispersión. La segunda depende de las hipótesis; de cuántas y cuáles son las variables que participan en la explicación del fenómeno o proceso bajo análisis (resumido en la variable consecuente).

Aquí nos ocuparemos por solo una de las formas posibles: el modelo lineal y solo del caso en que hay una sola variable explicativa (antecedente).

Cuando se reemplaza cada uno de los  $x$  observados en la función, se encuentran las estimaciones para cada uno de ellos. En la tabla siguiente indicamos cada uno de los pares ordenados como fueron observados y agregamos los valores de  $\hat{y}$  estimados a través de la función lineal<sup>8</sup>; por último, restamos los valores estimados de  $y$ , de los observados, para ver las diferencias entre los que la recta estima y los que hemos observado:

---

<sup>8</sup>Para calcular los valores de  $y$  estimado ( $\hat{y}$ ) hemos conservado más decimales en  $b_0$  y  $b_1$  que los mostrados.

Figura 6.11: Ubicación gráfica de la diferencia entre el valor observado de  $y$  observado y su estimación  $\hat{y}$

$x$	$y$	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$
46	7	4.91	2.09
44	2	4.45	-2.45
56	7	7.20	-0.20
57	8	7.43	0.57
30	2	1.24	0.76
60	9	8.12	0.88
45	5	4.68	0.32
43	1	4.22	-3.22
64	9	9.03	-0.03
32	3	1.70	1.30

La última columna mide la distancia que hay entre cada punto y la recta. Es un indicador de la calidad del ajuste que hace la función lineal de los puntos. Cuando esas distancias son pequeñas tenemos una recta que ajusta mejor los puntos que cuando las distancias son grandes. Como vemos, en este ejemplo hay algunas positivas, que corresponden a los puntos que están encima de la recta, y otras negativas, las de los puntos por debajo de la recta. Veamos en el gráfico siguiente la ubicación de uno de estos puntos, por ejemplo el que corresponde al par observado (43; 1), al que la recta estima con el valor  $\hat{y} = 4,22$ :

Este desvío es negativo porque el punto está debajo de la recta, la estimación  $\hat{y}$  es mayor que el valor observado,  $y$ .

La suma de todos estos desvíos es cero, por haber pedido a la recta la condición de equilibrar los puntos. Estas diferencias son los errores que se cometen al estimar a través de la función lineal. Para verlos como tales, observemos que si la correlación fuera perfecta (positiva o negativa) como en los gráficos 6.6 y 6.7 todos los puntos estarían sobre la recta y coincidirían los valores de  $y$  con los de  $\hat{y}$ , por lo que las diferencias de la última columna serían todas cero, no habría error en una relación perfecta. Como hemos dicho, esa es una situación

Figura 6.12: Ubicación gráfica de los alejamientos (desvíos) de  $y$  observada y de  $\hat{y}$  estimada, hasta la media de  $y$  ( $\bar{y}$ )

ideal, que no puede observarse en la realidad: en los casos reales siempre hay apartamientos de los puntos a la recta, que constituyen el error de estimación. Para llegar a una medida de la calidad de nuestro modelo, es decir una medida de qué tan bueno es el ajuste que la recta hace sobre los puntos realmente observados, trabajaremos sobre la dispersión, a través de la varianza.

En primer lugar, la variable tiene su varianza, que mide lo que los valores se apartan de la media, vamos a llamarla  $s_y^2$  (la varianza de  $y$ ). En segundo lugar, los  $\hat{y}$  también se apartan de la media y esas distancias pueden resumirse en otra varianza, la que mide las distancias desde los  $\hat{y}$  hasta la media de  $y$ , la llamaremos  $s_{\hat{y}}^2$  (la varianza de  $\hat{y}$ ). Así entonces resumimos los desvíos de la variable hasta la media, con la varianza de  $y$ , y los desvíos de las estimaciones hasta la media, con la varianza de  $\hat{y}$ . Si se traza una recta horizontal para ubicar a la media de  $y$  ( $\bar{y}$  en 5,3) y se recuerda que los valores de  $y$  son los que están en los puntos realmente observados, mientras que los de  $\hat{y}$  están sobre la recta de regresión, estos desvíos pueden verse gráficamente así:

Lo que cada observación se aleja de la media es la diferencia  $y - \bar{y}$ . Cuando se consideran todas ellas, su medida es la varianza de  $y$  (indicada  $s_y^2$ ).

Lo que se desvía la estimación (ubicada sobre la recta de regresión) de la media es  $\hat{y} - \bar{y}$ , que cuando se extiende a todos los puntos se resume en la varianza de  $\hat{y}$  (que indicamos como  $s_{\hat{y}}^2$ ).

La calidad del ajuste se aprecia en la proximidad que la recta tiene a los puntos, en el caso ideal (si  $r = 1$  o  $r = -1$ ), las distancias son todas cero. En una situación real, el ajuste será tanto mejor cuanto más cerca estén los puntos de la recta; es decir, cuanto más pequeñas sean esas distancias. Para medir esta calidad se usa el cociente entre las dos varianzas anteriores, que resulta ser el ya mencionado coeficiente general de determinación:  $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$ .

Al que ahora calculamos como la varianza de  $\hat{y}$  sobre la varianza de  $y$ , por lo que mide qué porción de la variabilidad total de  $y$  (el denominador) representa

la variabilidad de  $\hat{y}$ , puede leerse como la parte de toda la variabilidad de la variable dependiente que es explicada por el modelo lineal.

Este cociente no puede ser negativo ni mayor que 1, porque el numerador es menor o igual que el denominador. Solo vale 1 en el caso de una asociación perfecta, en que las varianzas son iguales -porque los puntos están sobre la recta-,  $r = 1$   $r = -1$  y, en consecuencia  $R^2 = 1$ .

El coeficiente general de determinación mide la proporción de los cambios de  $y$  (expresados con la varianza) que se explican a través de la función lineal. Por eso es muy valioso, porque cuantifica el peso relativo de la variable  $x$  (a través de la función lineal) en la explicación de  $y$ .

Podemos así decir que, por ejemplo, el 30% de las diferencias en el rendimiento escolar de los alumnos de primaria se explica por la educación de sus padres, o que el 60% de la disminución del puntaje en una prueba que evalúa la depresión se puede atribuir a la administración de una determinada droga. Se aprecia con estos ejemplos la gran potencialidad explicativa de este coeficiente.

Todo el análisis de regresión que hemos desarrollado hasta aquí puede hacerse de manera equivalente si la relación entre las variables no es lineal. En vez de obtener la ecuación de una recta, se obtendrá la de una parábola, una cúbica o cualquier otra función que aproxime adecuadamente los pares ordenados que se observan. La definición del coeficiente general de determinación que hemos

dado:  $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$  no cambia, pero los  $\hat{y}$  se calcularán con la función adecuada, no con la lineal que vimos.

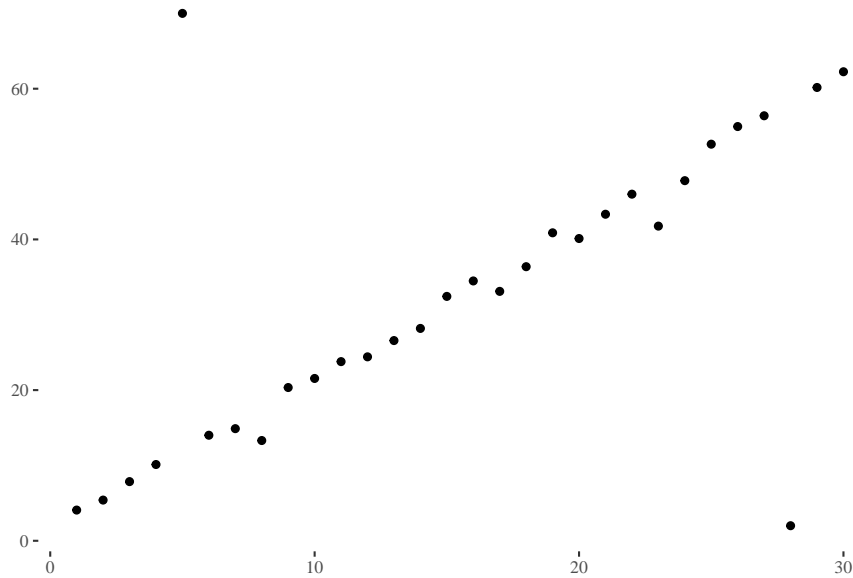
Sobre el coeficiente de correlación de Pearson, debe recordarse que solo es adecuado para evaluar la intensidad de la relación entre dos variables si ésta es lineal. En presencia de una relación de otro tipo, como la del gráfico 6.5, el coeficiente de Pearson dará un valor muy bajo, pero eso no quiere decir que la relación sea débil o inexistente, sino que el modelo lineal no es adecuado para describirla. Por ello, si se encuentra un coeficiente de Pearson muy bajo, debe explorarse la existencia de una relación no lineal, esto puede hacerse fácilmente observando cómo se disponen los puntos en el diagrama de dispersión.

Cuando la relación se modela con una función lineal -y solo en estos casos-, el coeficiente general de determinación ( $R^2$ ) se calcula directamente elevando al cuadrado al coeficiente de Pearson.

Hemos señalado que el coeficiente de Spearman es adecuado cuando una variable o ambas están medidas a nivel ordinal. Pero también es adecuado cuando no se puede suponer que las variables tengan, en la población, distribución normal, que es un requisito para el cálculo del coeficiente de Pearson. Una ventaja adicional del coeficiente de Spearman es que es poco sensible a valores extremos, es una situación similar a la relación entre la media y la mediana la que hay entre estos dos coeficientes. Cuando existen excepcionalmente altos o bajos, es conveniente calcular este coeficiente, aun cuando las variables sean ambas cuantitativas. Se dice que el coeficiente de Spearman es más “robusto” que es de Pearson, porque

se afecta menos por valores atípicos de la variable. El siguiente ejemplo con datos ficticios ilustra la diferencia.

Consideremos la siguiente relación



Los coeficientes resultan:

```
## [1] "coeficiente de Pearson: 0.662"
```

```
## [1] "coeficiente de Spearman: 0.694"
```

Se trata de una tendencia lineal, con un par de valores extremos que se apartan del grupo. Los coeficientes de Pearson y de Spearman dan 0.662 y 0.694 respectivamente. La diferencia se debe a que el coeficiente de Pearson tiene en cuenta cada uno de los valores de la variable, mientras que el de Spearman considera los “rangos”, el efecto de los valores aislados se detectado por el primero de los coeficientes y en menos medida por el segundo. El tratamiento de estas situaciones requiere atención. Por un lado, se debe repetir el análisis sin los valores extremos y comparar nuevamente los coeficientes; por el otro, observar qué hizo que esos casos tuvieran valores tan atípicos. La diferencia entre los dos coeficientes, da una señal para mirar más de cerca los datos.

## 6.9 La importancia de la visualización

Las medidas descriptivas que se mencionaron en los capítulos anteriores ofrecen un resumen de las variables individualmente; en estos dos últimos capítulos hemos recorrido un amplio conjunto de formas en que pueden suceder las relaciones entre dos variables y mucho de lo que se ha dicho, puede extrapolarse a modelos más complejos, con más de dos variables bajo análisis simultáneo y con relaciones que no son lineales. A modo de ilustración de la utilidad de las representaciones gráficas, existe un conjunto de datos producido a ese efecto por Francis Anscombe en la década de los setenta del siglo pasado (arobaanscombe1973, arrobatufte1989). Su autor muestra por este medio, tanto la importancia de la visualización de los datos, como el impacto que pueden tener los casos atípicos sobre las medidas descriptivas. Más adelante se analiza en detalle ese conjunto de datos, lo importante es que muestra que el conocimiento de medidas resumen como los descriptivos univariados, los coeficientes de correlación y aun los coeficientes de un modelo que ajuste la relación, pueden dar una idea equivocada de la manera en que los datos se organizan y que la visualización permite apreciarla mejor.

En la misma dirección, Steph Locke (arobadatasaurus2018, arabalocke2018) generó una matriz de datos, llamada “Datasaurus”, con 13 pares  $x - y$ , cada uno de los cuales tiene medidas descriptivas (media y desviación estándar de  $x$  y de  $y$ ), así como coeficientes de correlación entre  $x$  e  $y$ , muy similares, pero los diagramas de dispersión muestran las grandes diferencias entre los pares de datos. La idea, en línea con la de Anscombe, es la de llamar la atención sobre la importancia de la visualización de los datos para tener una descripción completa y que las medidas descriptivas pueden engañar.

## 6.10 Hacerlo en R

### 6.10.1 Distancia $\chi^2$

En el paquete base de R existe una función que realiza operaciones relacionadas con el puntaje  $\chi^2$ ; el comando es `chi.test` y se aplica sobre una tabla de contingencia. Estas operaciones constituyen lo que se denomina “prueba  $\chi^2$ ”, sobre la que trabajaremos más adelante. Por ahora, solo se usará una parte de los resultados de esta prueba.

La aplicación de la prueba a una tabla de contingencia da como resultado un objeto de clase “`htest`”, de ello, nos van a interesar sus componentes. A continuación llamamos “`tabla.viol`” a la que cruza los tipos de violencia con el tamaño de las ciudades y aplicamos la prueba a esa tabla. Al resultado de la prueba lo guardamos con el nombre “`jicu.viol`”. Luego preguntamos cuáles son los atributos de este objeto:



```

tabla.viol <- table(violencia$tipo, violencia$ciudades)
jicu.viol <- chisq.test(tabla.viol)
attributes(jicu.viol)

## $names
## [1] "statistic" "parameter" "p.value" "method" "data.name" "observed"
## [7] "expected" "residuals" "stdres"
##
## $class
## [1] "htest"

```

Los “nombres” indican lo que este objeto contiene en su interior, la “clase” es el tipo de objeto. De los nombres, por ahora nos interesan:

- `statistic` que es el valor de la distancia  $\chi^2$ .
- `observed` es la tabla de frecuencias original, las frecuencias observadas
- `expected` es la tabla de frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia

Para llegar a ellos, se usa el mismo procedimiento que para referirse a las variables de una matriz de datos. Así, la distancia  $\chi^2$  es:

```
jicu.viol$statistic
```

```
## X-squared
## 50.18553
```

La tabla de frecuencias observadas:

```
jicu.viol$observed
```

```
##
##      áreas rurales ciudades grandes ciudades pequeñas
## autoinfligida      15          100          35
## colectiva          5           35          10
## interpersonal      90          110          100
```

Y la de esperadas:

```
jicu.viol$expected
```

```
##
##          áreas rurales ciudades grandes ciudades pequeñas
## autoinfligida          33          73.5          43.5
## colectiva             11          24.5          14.5
## interpersonal          66          147.0          87.0
```

Los decimales de la última pueden quitarse redondeando:

```
round(jicu.viol$expected, 0)
```

```
##
##          áreas rurales ciudades grandes ciudades pequeñas
## autoinfligida          33          74          44
## colectiva             11          24          14
## interpersonal          66          147          87
```

El número total de observaciones no es uno de los elementos que la prueba da directamente. Hay que pedirlo a partir de la suma de las frecuencias de la tabla de observadas (o de esperadas, que totaliza lo mismo). Definimos como “n” al ese valor, porque lo vamos a necesitar para calcular los coeficientes:

```
n <- sum(jicu.viol$observed)
```

Del mismo modo, rotulamos el número de filas y de columnas:

```
f <- nrow(jicu.viol$observed)
c <- ncol(jicu.viol$observed)
```

Una vez que se cuenta con el puntaje  $\chi^2$ , se pueden calcular los coeficientes. Para tenerlo disponible más fácilmente, le vamos a asignar un nombre:

```
d.ji.cuad <- jicu.viol$statistic
```

Ahora d.ji.cuad es la distancia  $\chi^2$

## 6.10.2 Coeficientes

### 6.10.2.1 $\varphi$

Se calcula la raíz cuadrada de la distancia  $\chi^2$  dividida en el número de casos:

```
sqrt(d.ji.cuad / n)
```

```
## X-squared
## 0.3168139
```

### 6.10.2.2 C de Pearson

Como el anterior, sumando  $\chi^2$  a  $n$  en el denominador

```
sqrt(d.ji.cuad / (d.ji.cuad + n))
```

```
## X-squared
## 0.3020193
```

### 6.10.2.3 V de Cramer

Incluye al mínimo entre el número de filas menos uno y el número de columnas menos uno. `min` es una función de biblioteca de R base.

```
sqrt(d.ji.cuad / (n * min(c - 1, f - 1)))
```

```
## X-squared
## 0.2240213
```

### 6.10.2.4 Spearman

El comando para calcular coeficientes de correlación en R es `cor`, al cual en este caso deberá indicársele que estamos trabajando con variables ordinales, por lo que queremos el coeficiente de Spearman; de lo contrario, por defecto calcula el coeficiente de Pearson. La matriz de datos del ejemplo se llama `merito.educa.mad` y las variables son `OM` (orden de mérito) y `educamadre`. Así definidas, el pedido del coeficiente se hace indicando cuáles son las dos variables que se correlacionan y qué método debe usarse, en base a su nivel de medición:

```
cor(merito.educa.mad$OM, merito.educa.mad$educamadre, method = "spearman")
```

```
## [1] 0.7509393
```

### 6.10.2.5 Pearson

El comando `cor` devuelve, por defecto, el coeficiente de Pearson, por lo que no es necesario especificar el parámetro `method`.

Para el ejemplo que correlaciona el puntaje en la escala de inteligencia lógico matemática y el puntaje en una prueba, el cálculo se pide así:

```
cor(puntaje.escala, ejercic.corr)
```

```
## [1] 0.8474425
```

### 6.10.2.6 Dicotomías artificiales

Las dicotomías sobre variables continuas pueden hacerse con la función `cut` que se usó antes para construir categorías de variables cuantitativas, solo que ahora el corte se da solo en dos grupos. Para el caso de los puntajes de la subescala motora de la prueba de Bayley, si se quieren dos categorías que tengan la misma amplitud en los valores de la variable, se indican dos cortes. En este ejemplo, primero leemos la base “bayley”, luego introducimos la variable dicotomizada como una columna más de la matriz de datos y visualizamos el resultado pidiendo una tabla:

```
bayley <- read.csv("bases/archivostxt/bayley.txt", sep = ";")
bayley$motor.dic <- cut(bayley$baymotor, breaks = 2)
table(bayley$motor.dic)
```

```
##
## (63.9,107] (107,150]
##          257       197
```

El corte se realizó en 107 que es el centro de los valores de la variable (promedio entre el mínimo y el máximo).

Otra opción es cortar en la mediana, de modo que la cantidad de casos en las dos categorías sea similar. Para ello, hay que especificar todos los cortes que determinan los intervalos; el mínimo, la mediana y el máximo:

```
bayley$motor.dic.2 <- cut(bayley$baymotor, breaks = c(
  min(bayley$baymotor),
  median(bayley$baymotor),
  max(bayley$baymotor)
))
table(bayley$motor.dic.2)
```

```
##
## (64,105] (105,150]
##      231      222
```

Ahora el corte está en 105 y quedan cantidades más similares de casos en cada grupo.

La decisión sobre el mejor modo de hacer el corte es teórica, y con ella presente, puede denominarse “grupo bajo” y “grupo alto” a los dos resultantes de la dicotomización.

#### 6.10.2.7 Tetracórico

El paquete `psych` (arroba Revelle2018) cuenta con la función `tetrachoric`, cuyo argumento es la matriz de datos original y no la tabla de contingencia. Aquí se aplica al análisis de la relación entre los puntajes de las subescalas motora y mental de la prueba de Bayley, dicotomizadas.

Primero se carga el paquete

```
library("psych")
```

Y luego se aplica la función a la matriz de datos que solo contiene las dos variables dicotomizadas:

```
tetrachoric(compara.escalas.dic)
```

```
## Call: tetrachoric(x = compara.escalas.dic)
## tetrachoric correlation
##           sbscl.mt sbscl.mn
## subescala.motora 1.00
## subescala.mental 0.37      1.00
##
## with tau of
## subescala.motora subescala.mental
##           -0.14      -0.14
```

La salida muestra varias cosas, nos interesa la tabla con las dos variables en filas y columnas, con “unos” en la diagonal (correlación de cada variable consigo misma) y en la celda (2;1) (inferior izquierda), está el coeficiente solicitado, 0.37.

### 6.10.2.8 Punto biserial

Los grupos deben codificarse como cero y uno, para luego solicitar un coeficiente de Pearson. En este ejemplo, se crea la base de datos con siete casos en el grupo control y diez en el experimental. Se codifica a los grupos control y experimental como cero y uno respectivamente, y luego se solicita el coeficiente de correlación de Pearson entre la variable dicotómica que codifica los grupos, y los puntajes.

```
grupo <- c(rep("control", 7), rep("experimental", 10))
puntaje <- c(8, 5, 6, 5, 6, 8, 6, 4, 5.6, 5.6, 8, 7.2, 6.4, 7.2, 8, 8, 7.2)
grupo.cod <- c(rep(0, 7), rep(1, 10))
compara.grupos <- data.frame(grupo, puntaje, grupo.cod)

cor(x = compara.grupos$puntaje, compara.grupos$grupo.cod)
```

```
## [1] 0.1734252
```

### 6.10.3 Modelo lineal

El ajuste de una variable como función (lineal en el caso que nos interesa) de otra (u otras) constituye un objeto en R. Lo denominaremos “modelo.1”. El comando para construir ese objeto es `lm` (modelo lineal) y usaremos como argumento la variable consecuente (o dependiente o a explicar) relacionada por medio del signo `~` (alt + 126 en windows) con la variable antecedente (o independiente o factor explicativo). El orden entre estas dos variables es determinante para el modelo, por lo que debe cuidarse, si  $x$  es antecedente e  $y$  consecuente y la relación se plantea

$$X \rightarrow Y$$

entonces el argumento de `lm` es

$$Y \sim X$$

El modelo se construye así:

```
modelo.1 <- lm(ejercic.corr ~ puntaje.escala)
```

El objeto que resulta tiene como atributos:

```
attributes(modelo.1)
```

```
## $names
## [1] "coefficients" "residuals"      "effects"      "rank"
## [5] "fitted.values" "assign"          "qr"           "df.residual"
## [9] "xlevels"       "call"           "terms"        "model"
##
## $class
## [1] "lm"
```

La clase es `lm`, modelo lineal, un tipo particular de objeto R. De los nombres, por ahora solo nos interesan los coeficientes, a los que evocamos del mismo modo que a las variables de una matriz de datos:

```
modelo.1$coefficients
```

```
##      (Intercept) puntaje.escala
##      -5.6279603      0.2290977
```

Estos son:

- `intercept`: la intersección con el eje  $y$ , es decir, la ordenada al origen.
- `puntaje.escala`: el nombre de la variable antecedente, es la pendiente de la recta.

Cada uno de estos valores puede accederse separadamente, así:

```
modelo.1$coefficients[1]
```

```
## (Intercept)
##      -5.62796
```

```
modelo.1$coefficients[2]
```

```
## puntaje.escala
##      0.2290977
```

Y luego usarse para calcular un valor de  $y$  (aciertos estimados) para un valor elegido de  $x$  (puntaje en la escala). El ejemplo hecho manualmente antes resulta ahora:

```
modelo.1$coefficients[1] + modelo.1$coefficients[2] * 55
```

```
## (Intercept)
##      6.972413
```

Que se diferencia del obtenido antes por el redondeo y sigue siendo un promedio de siete errores esperados para quienes tienen puntaje 55 en la escala.

También es posible crear una función para que calcule automáticamente valores de  $y$  para cualquier  $x$  que se elija:

```
yest <- function(x) {
  modelo.1$coefficients[1] + modelo.1$coefficients[2] * x
}
```

Para usarla, damos a esta nueva función un valor de  $x$ :

```
yest(55)
```

```
## (Intercept)
##      6.972413
```

```
yest(75)
```

```
## (Intercept)
##     11.55437
```

#### 6.10.4 Cuarteto de Anscombe

El cuarteto de Anscombe, es una matriz de datos de once casos en cuatro pares variables y viene cargado en R. Se lo puede ver, llamándolo por su nombre:

```
anscombe
```

```
##      x1 x2 x3 x4      y1      y2      y3      y4
## 1  10 10 10  8  8.04  9.14  7.46  6.58
## 2   8  8  8  8  6.95  8.14  6.77  5.76
## 3  13 13 13  8  7.58  8.74 12.74  7.71
## 4   9  9  9  8  8.81  8.77  7.11  8.84
## 5  11 11 11  8  8.33  9.26  7.81  8.47
## 6  14 14 14  8  9.96  8.10  8.84  7.04
## 7   6  6  6  8  7.24  6.13  6.08  5.25
## 8   4  4  4 19  4.26  3.10  5.39 12.50
## 9  12 12 12  8 10.84  9.13  8.15  5.56
## 10  7  7  7  8  4.82  7.26  6.42  7.91
## 11  5  5  5  8  5.68  4.74  5.73  6.89
```



Para ver las medidas descriptivas, se solicita el resumen completo de la matriz de datos, ya que son pocas variables:

```
# summary(anscombe)
apply(anscombe, 2, summary)
```

##	x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	y4
## Min.	4.0	4.0	4.0	8	4.260000	3.100000	5.39	5.250000
## 1st Qu.	6.5	6.5	6.5	8	6.315000	6.695000	6.25	6.170000
## Median	9.0	9.0	9.0	8	7.580000	8.140000	7.11	7.040000
## Mean	9.0	9.0	9.0	9	7.500909	7.500909	7.50	7.500909
## 3rd Qu.	11.5	11.5	11.5	8	8.570000	8.950000	7.98	8.190000
## Max.	14.0	14.0	14.0	19	10.840000	9.260000	12.74	12.500000

Se observa la similitud de las medidas resumen de x1, x2, x3, x4 por un lado y de y1, y2, y3, y4 por otro.

Además, las correlaciones entre los pares son casi idénticas:

```
cor(anscombe$x1, anscombe$y1)
```

```
## [1] 0.8164205
```

```
cor(anscombe$x2, anscombe$y2)
```

```
## [1] 0.8162365
```

```
cor(anscombe$x3, anscombe$y3)
```

```
## [1] 0.8162867
```

```
cor(anscombe$x4, anscombe$y4)
```

```
## [1] 0.8165214
```

Y también son muy similares los modelos lineales que ajustan cada relación. Las ordenadas al origen:

```
lm(anscombe$y1 ~ anscombe$x1)$coefficients[1]
```

```
## (Intercept)
## 3.000091
```

```
lm(anscombe$y2 ~ anscombe$x2)$coefficients[1]
```

```
## (Intercept)
##      3.000909
```

```
lm(anscombe$y3 ~ anscombe$x3)$coefficients[1]
```

```
## (Intercept)
##      3.002455
```

```
lm(anscombe$y4 ~ anscombe$x4)$coefficients[1]
```

```
## (Intercept)
##      3.001727
```

Y las pendientes:

```
lm(anscombe$y1 ~ anscombe$x1)$coefficients[2]
```

```
## anscombe$x1
##      0.5000909
```

```
lm(anscombe$y2 ~ anscombe$x2)$coefficients[2]
```

```
## anscombe$x2
##           0.5
```

```
lm(anscombe$y3 ~ anscombe$x3)$coefficients[2]
```

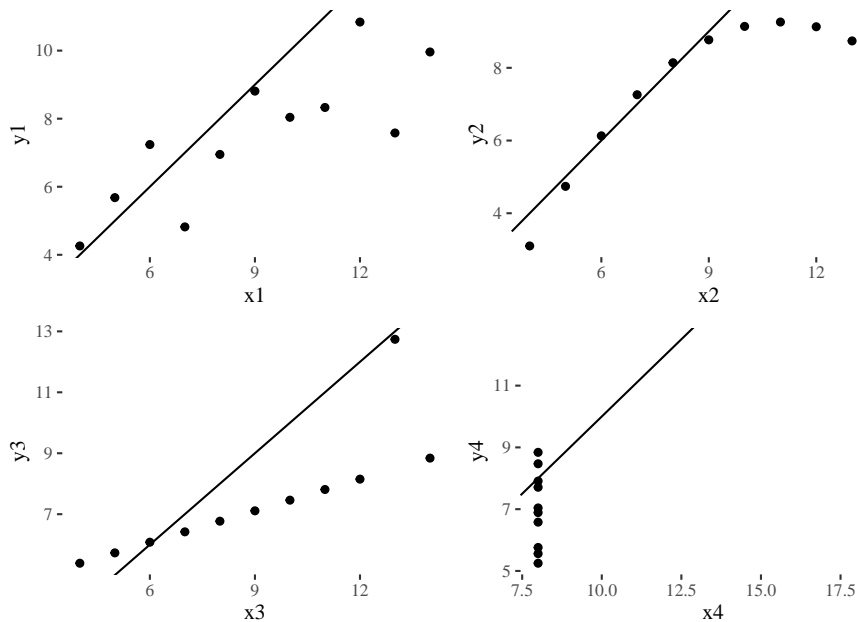
```
## anscombe$x3
##      0.4997273
```

```
lm(anscombe$y4 ~ anscombe$x4)$coefficients[2]
```

```
## anscombe$x4
##      0.4999091
```

Sin embargo, los diagramas de dispersión muestran que se trata de conjuntos muy diferentes entre sí:

```
p1 <- ggplot(anscombe) + geom_point(aes(x1, y1)) + geom_abline() + theme_tufte()
p2 <- ggplot(anscombe) + geom_point(aes(x2, y2)) + geom_abline() + theme_tufte()
p3 <- ggplot(anscombe) + geom_point(aes(x3, y3)) + geom_abline() + theme_tufte()
p4 <- ggplot(anscombe) + geom_point(aes(x4, y4)) + geom_abline() + theme_tufte()
grid.arrange(p1, p2, p3, p4, nrow = 2, ncol = 2)
```



Para usar el Datasaurus, se debe primero instalar el paquete y cargarlo en la sesión, la matriz de datos se llama `datasaurus_dozen`:

```
## # A tibble: 1,846 x 3
##   dataset      x      y
##   <chr>    <dbl> <dbl>
## 1 dino     55.4  97.2
## 2 dino     51.5  96.0
## 3 dino     46.2  94.5
## 4 dino     42.8  91.4
## 5 dino     40.8  88.3
## 6 dino     38.7  84.9
## 7 dino     35.6  79.9
## 8 dino     33.1  77.6
## 9 dino     29.0  74.5
## 10 dino    26.2  71.4
## # ... with 1,836 more rows
```

Los datos están organizados en tres columnas; la primera, que se llama `dataset` es el nombre del subconjunto, son 13 subconjuntos en total.

Luego cargamos el paquete `dplyr`, que facilita hacer las operaciones por grupos con la función `group_by`

```
library("dplyr")
```

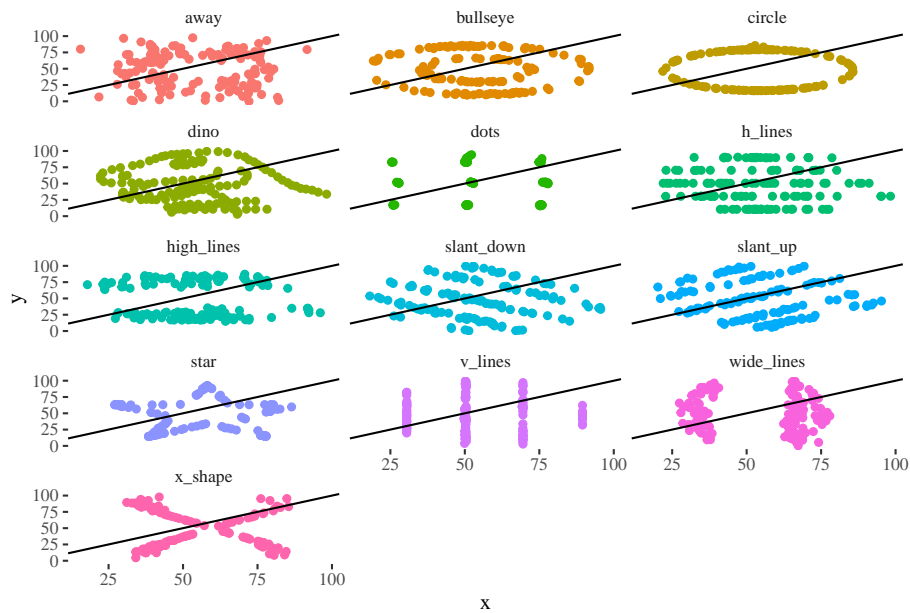
Y luego las aplicamos sucesivamente usando el operador `%>%` “pipe” (sobre la matriz `datasaurus_dozen`, agrupe por `dataset` y resuma, calculando las medidas indicadas).

```
datasaurus_dozen %>%
  group_by(dataset) %>%
  summarize(
    media_x = mean(x),
    media_y = mean(y),
    s_x = sd(x),
    s_y = sd(y),
    r_x_y = cor(x, y)
  )
```

```
## # A tibble: 13 x 6
##   dataset    media_x media_y    s_x    s_y    r_x_y
##   <chr>      <dbl>    <dbl> <dbl> <dbl>    <dbl>
## 1 away        54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0641
## 2 bullseye    54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0686
## 3 circle      54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0683
## 4 dino        54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0645
## 5 dots        54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0603
## 6 h_lines     54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0617
## 7 high_lines  54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0685
## 8 slant_down  54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0690
## 9 slant_up    54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0686
## 10 star       54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0630
## 11 v_lines    54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0694
## 12 wide_lines 54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0666
## 13 x_shape    54.3     47.8   16.8   26.9 -0.0656
```

Cada fila corresponde a un subconjunto de datos. En la tabla se observa la similitud de las  $x$  y de las  $y$  y también de las correlaciones entre ellas. Para completar la idea que se tiene de los subconjuntos de datos, construimos un diagrama de dispersión para cada uno de ellos:

```
ggplot(datasaurus_dozen) + # haremos un plot con los datos datasaurus_dozen
  geom_point(aes(x, y, col = dataset)) + # puntos x, y, con coloreados p/data
  geom_abline() + # agregamos una linea recta
  facet_wrap(~dataset, ncol = 3) + # separamos en subplots por data
  theme_tufte() + # fondo blanco
  theme(legend.position = "none") # eliminamos el legend
```



Aquí se mapeó el nombre de cada subconjunto al color de los puntos de los diagramas de dispersión y se agregó la función lineal que mejor los ajusta. Como con el cuarteto de Anscombe, los gráficos aportan una visión muy diferente de los conjuntos de datos, comparada con la que se tenía a partir de la observación solo de sus medidas descriptivas.



## Capítulo 7

# Obtención de la muestra

La estadística inferencial provee los procedimientos para estudiar un subconjunto de elementos y generalizar las conclusiones obtenidas un total; esto se debe a que estudiar uno o varios atributos o variables en todos los elementos, como se hace en los censos, requiere mucha inversión, de tiempo y de dinero. Por ello es que se procede estudiando tales variables en una muestra y se estiman por inferencia los valores de la población. Se reducen así los costos y se disminuye el tiempo necesario para llevar adelante las investigaciones, si se respetan los procedimientos de la estadística inferencial el error que proviene de trabajar sólo con una parte de la población puede ser conocido y controlado.

El muestreo es un conjunto de procedimientos mediante los cuales se selecciona, de un universo determinado, llamado población, un subconjunto que recibe el nombre de muestra, con el objetivo de llegar al conocimiento de determinadas características de los elementos de la población a través de la observación y generalización de esas características presentes en los elementos de la muestra.

Este recurso no es ajeno a la vida cotidiana, por ejemplo, cuando se considera a una persona “poco confiable” suele ser a partir de varias veces en que esa persona mintió. Al hacerlo, se extiende ese comportamiento (se generaliza) a situaciones que no han sido observadas, se espera que en el futuro, esa persona actúe de modo similar. Esta forma de generalizar tienen requisitos, ya que no es suficiente que haya mentido una vez para caracterizarlo como poco confiable, ni que haya mentido varias veces sobre un mismo asunto. Por el contrario, debe ser una conducta que se haya apreciado en diversidad de situaciones, la que permita hacer un juicio sobre la persona. Por la complejidad de los procesos que involucran a personas, el conocimiento que tengamos de ellos siempre será fragmentario, solo está a nuestro alcance conocer una porción de la infinidad de situaciones humanas posibles. Esos fragmentos constituyen nuestra experiencia cotidiana y necesitamos generalizar intuitivamente para orientarnos en el mundo, para tomar decisiones de todos los días. Pero cuando queremos dar a ese conocimiento un carácter tan validado como sea posible, debemos

poner bajo análisis crítico nuestras observaciones y el modo en que han sido seleccionadas. De eso se trata el muestreo; de elegir algunas observaciones que permitan generalizar parcialmente. No lograremos afirmaciones universales, pero sabremos cuáles son los límites de esas afirmaciones.

En la generalización estadística hay dos subprocesos. El primero es la selección, que consiste en operaciones mediante las cuales se incluyen algunos elementos de la población en la muestra. El segundo es la estimación, donde, a partir de lo observado en la muestra, ofrecemos una aproximación a los valores poblacionales. A su vez, la selección de la muestra implica decidir cuáles y cuántos casos seleccionar, es decir, la calidad del proceso de selección por un lado, y la cantidad de casos a seleccionar por otro. En este capítulo nos ocupamos de la primera de estas preguntas: de qué modo seleccionar individuos para que lo que se observe de ellos pueda extrapolarse a otros individuos no observados. El número de casos que deben seleccionarse, será tema de los capítulos posteriores.

Destaquemos aquí un punto importante: la calidad de la muestra es un requisito de base. Si la muestra está correctamente elegida, los procedimientos de inferencia son válidos, de lo contrario no lo son, es una clasificación dicotómica, por sí o por no. Por el contrario, el tamaño de la muestra incide gradualmente, veremos que si las muestras son más grandes se detectan mejor las diferencias y se reduce el error de estimación. Pero esto es cierto a condición que se cumpla la primera condición. Si la muestra no es adecuada, el aumento en el número de casos no mejora la estimación, e inclusive puede empeorarla.

## 7.1 Población

Utilizaremos la palabra **población** o, indistintamente, **universo**, para designar, de manera genérica, a un conjunto de unidades de análisis que son objeto de un estudio particular. Tal conjunto puede estar definido con precisión en el tiempo y el espacio o no, a él se referirán los resultados obtenidos en la investigación por muestreo. Ejemplos de estos son: los pacientes con trastornos alimenticios del hospital Misericordia de la ciudad de Córdoba en el año 2009, o los votantes en las elecciones para intendente de la ciudad de Río Cuarto en 2008, las escuelas primarias de la provincia de Córdoba, las carreras que se dictan en universidades en Argentina en 2017, los países representados en la ONU.

Las unidades de análisis antes mencionadas constituyen los elementos de la población, son entidades de diferente naturaleza: personas, hogares, instituciones, ciudades, países, etc.

El tamaño que tiene una población influye en el diseño de la muestra porque dependiendo de su tamaño, la población puede ser tratada como finita o infinita. Se dice que es finita si el número de elementos es limitado y se puede tener acceso a todos o casi todos los elementos, ejemplo de ello serían los alumnos de cuarto año del colegio Manuel Belgrano del ciclo lectivo 2020 o los pacientes



admitidos en el Hospital de Clínicas en mayo de 2017 o el conjunto de países representados en la ONU en 2015, los senadores electos en un país en un año determinado. Se habla de población infinita<sup>1</sup> cuando el número de elementos que integra la misma es elevado, por ejemplo, los automovilistas que circulan por rutas nacionales en una provincia, o alumnos de nivel inicial de la República Argentina. En ciertas ocasiones no se especifica con precisión el tiempo por lo que se habla de población hipotética, tal caso sería el de alumnos de primer año de la carrera de Psicología en UNC (sin especificar ciclo lectivo), por lo que no sólo se incluyen los elementos existentes hoy y en años anteriores, sino también los que en el futuro lo hagan. En este caso, la población no puede siquiera enumerarse. Así sucede también con estudios que plantean probar los efectos de un tipo de psicoterapia sobre pacientes diagnosticados como esquizofrénicos. En ese caso la “población” es la de las personas diagnosticadas como esquizofrénicas en la actualidad y también aquellas que lo serán en el futuro. Cuando se ensaya en una muestra una droga para la hipertensión, la generalización se espera válida para una población que no puede enumerarse: la de “los hipertensos”, tanto los ya diagnosticados como aquellos que lo serán en el futuro. En casos como estos no tenemos posibilidad de delimitar la población completa, decimos que se trata de **poblaciones hipotéticas**.

Para analizar características de las unidades de análisis, puede creerse que lo mejor sería realizar un **relevamiento exhaustivo** de las mismas. Este relevamiento consistiría en observar dicha característica (variable) en cada uno de los individuos de la población. Tal modo de recolectar la información se conoce con el nombre de **censo**.

Desde el punto de vista práctico, es frecuente realizar relevamientos exhaustivos cuando las poblaciones son de pequeño tamaño y están bien delimitadas en el tiempo y en el espacio. Un ejemplo de este caso sería la situación en que se pretende conocer la opinión de los alumnos de un curso acerca de su docente, aquí lo más adecuado es indagar (vía encuesta) a cada uno de ellos.

Sin embargo, la mayoría de las poblaciones de interés para la investigación social tienen dimensiones considerables (todos los alumnos de primer grado del país) o son inaccesibles (los consumidores de una marca de gaseosa, los practicantes del budismo) o son hipotéticas (las personas diagnosticadas de depresión, los ciudadanos con ideología de derecha).

Cuando se busca dar generalidad a los resultados alcanzados a través de experimentos, la población de referencia suele ser hipotética: los efectos de una droga sobre la depresión, la relación entre xenofobia y autoritarismo, la eficacia de una estrategia didáctica. Son casos que aspiran a generar resultados válidos para una población hipotética, por lo que el relevamiento completo es imposible y solo se puede observar a unos pocos casos. El modo en que seleccionemos esos pocos casos es de la máxima importancia para que los resultados también sean válidos para los casos que no son observados.

---

<sup>1</sup>La idea de infinito no es la de la matemática, sino que se refiere a una relación pequeña entre la cantidad de casos de muestra y los de la de la población. Ver nota 48.

Además de permitir economía de recursos, el muestreo permite profundizar los estudios que se realizan sobre los elementos de la muestra. En efecto, en los relevamientos exhaustivos de gran magnitud, como los censos nacionales o provinciales, no es posible profundizar con la indagación; por el contrario se deben hacer pocas preguntas a fin de alcanzar a una gran población en un tiempo aceptable. Si se trabaja con una muestra, se puede indagar con más detalle y profundidad, y luego, con los procedimientos adecuados, extender los hallazgos a la población de la cual la muestra proviene.

### 7.1.1 Muestra

Se llama **muestra** a un subconjunto de una población que comparte sus características en los aspectos de interés para la investigación. El concepto de muestra va ligado al de representatividad, es decir a su capacidad de actuar como “representante” de los elementos de la población que no han sido seleccionados. Tal representatividad no implica una identidad en todos los aspectos, son solamente aquellas características que se encuentran bajo análisis las que deben ser compartidas por la muestra y la población.

- Población de quienes votan en una ciudad → muestra de votantes para consulta de opinión política.
- Población de docentes universitarios → muestra de docentes para analizar la distribución de tiempo entre docencia, investigación y extensión.
- Población de hogares existentes en una ciudad → muestra de hogares para conocer sus condiciones de vida

Cuando se planifica la extracción de una muestra, no se conoce en detalle a la población, por lo que no es posible saber a priori cómo debe ser la muestra que la represente. Si se conoce algunas características de la población que estén relacionadas con el aspecto que se estudia, entonces corresponde reproducirlas en la muestra. En el primero de los ejemplos anteriores, la muestra de votantes debe respetar las proporciones de varones y mujeres que hay en la población, así como de los diferentes grupos de edad. Si se extrajera una muestra que solo tenga mujeres de 18 a 25 años sería una muestra sesgada, porque solo tomaría en cuenta un grupo que puede tener comportamiento electoral diferente al resto de la población. Una muestra así, sirve para estudiar el comportamiento de ese grupo particular (mujeres de 18 a 25 años), pero no se puede generalizar a la población.

En el segundo ejemplo, si sabemos que en la población de docentes universitarios, hay 60% de mujeres, y se espera que las respuestas que den las mujeres sean diferentes a las de los varones, entonces debe respetarse ese porcentaje en la muestra. Pero si el 70% de los docentes va a trabajar en auto y esto no tiene ninguna relación con la distribución de tiempo en las diferentes actividades, entonces ese porcentaje es irrelevante para el muestreo. Por otro lado, si la

dedicación (simple, semiexclusiva o exclusiva) incide en el tema de investigación, entonces, las diferentes categorías de dedicación deben estar representadas en la muestra.

La posibilidad de extrapolar los resultados muestrales a la población completa está ligada a la posibilidad de asignar probabilidades a cada una de las muestras que podrían seleccionarse de una población. De manera que sólo será lícito utilizar los resultados muestrales como estimación de valores poblacionales cuando sea posible conocer a priori cuál es la probabilidad que cada individuo (cada unidad de análisis definida) de la población tiene de ser incluido en la muestra. Las técnicas de muestreo que permiten asegurar este requisito se denominan de carácter **probabilístico**. Otras técnicas que no cumplen esta condición se llaman muestreos **no probabilísticos** y muchas veces son utilizadas con el objetivo de reducir tiempos y costos, pero los resultados obtenidos de ellas no pueden utilizarse para extraer conclusiones acerca de la población. Son adecuados en estudios que no buscan generalidad de sus conclusiones sino profundidad en el análisis de los casos observados. Sin embargo, hay investigaciones que usan muestras no probabilísticas para dar carácter general a los resultados que se obtienen. Cuando se hace esto, nunca hay certeza del grado de generalidad de lo que se concluye y hasta qué punto no se trata de características específicas de los individuos a los que se observó, porque no puede conocerse el margen de error de lo que se estima. Cuando las limitaciones prácticas hacen imposible la obtención de una muestra probabilística, se deben tomar recaudos para que la muestra sea heterogénea y que la inclusión de casos dependa lo menos posible de la voluntad de los participantes.

Para que sea posible asignar probabilidades a cada una de los individuos de formar parte de la muestra, el método por el cual los individuos son seleccionados debe excluir la elección voluntaria. Esto implica que el proceso de elección debe quedar estrictamente librado al azar, sin dejar margen para que se filtre la intencionalidad, no se trata de elegir a “cualquiera”. En consecuencia, caerán en la categoría de técnicas de muestreo no probabilísticas todos los procedimientos en que exista alguien que pueda tomar la decisión acerca de si una unidad va a ser o no incluida en una muestra.

---

**Muestreos probabilísticos:** las muestras obtenidas por estos procedimientos permiten generalizar los resultados obtenidos en ellas a toda la población de referencia. El requisito para que una muestra sea probabilística es que sus elementos hayan sido elegidos al azar (aleatoriamente), sin la participación voluntaria que decida a quién incluir y a quién excluir de la muestra.

---

---

**Muestreos no probabilísticos:** en estas muestras no se cumple el requisito de aleatoriedad en la selección de los elementos que la componen. Los resultados no se pueden generalizar de manera probabilística más allá de los casos observados.

---

## 7.2 Muestreos probabilísticos

Cuando se pretende que los resultados obtenidos en una muestra puedan ser generalizados a la población de la cual ésta proviene, se hace necesario recurrir a muestreos de tipo probabilísticos. Se trata de diseños que requieren más cuidado en su elaboración y de manera concomitante son más costosos. Señalamos a continuación los tipos puros de muestreos probabilísticos y luego veremos algunas combinaciones de ellos que se usan a menudo.

### 7.2.1 Muestreo irrestricto aleatorio o aleatorio simple

Se trata de una técnica que asigna igual probabilidad de pertenecer a la muestra a todos los individuos de la población. Para su realización se requiere contar con una lista de los elementos de la población. Este listado es lo que se denomina el **marco de la muestra**. Dicho marco debe cumplir con los requisitos de exhaustividad (es decir, que sea completo) y debe cuidarse que no existan duplicaciones. La tarea de depuración de un listado puede insumir bastante tiempo según el tamaño de la población y el tipo de marco muestral de que se trate. Es diferente el caso de un registro electoral, del total de historias clínicas de un gran hospital o del listado de todos los alumnos de una facultad, o los diputados de la cámara).

Su realización consiste en numerar los elementos del listado y elegir aleatoriamente una cantidad  $n$  de ellos (el tamaño de la muestra). La aleatoriedad de la elección queda garantizada por el uso de una tabla de números aleatorios o de un generador electrónico de los mismos, algunas calculadoras de los teléfonos disponen de esta opción en la tecla *#RAN* (por random, aleatorio).

La exigencia de contar con el listado de los elementos de la población es una limitación importante para este tipo de muestreo por lo que, como se verá más adelante, a menudo se lo utiliza en combinación con otros procedimientos. Además, puede ocurrir que los elementos elegidos en la muestra se encuentren dispersos geográficamente de manera que resulte notablemente costoso ubicar a cada uno de ellos para entrevistarlos.

Una ventaja importante es que no exige que se conozca a priori ninguna característica de la población. Desde el punto de vista estrictamente estadístico,

resulta más fácil acotar el error de muestreo ya que las distribuciones de probabilidad subyacentes son bien conocidas para este tipo de muestreo.

### 7.2.2 Muestreo sistemático

Un procedimiento alternativo al muestreo irrestricto aleatorio lo constituye el muestreo sistemático. En este caso solo se selecciona un elemento aleatoriamente y, comenzando por él, se recorre el marco de la muestra tomando los elementos siguientes a intervalos regulares. El primer paso consiste en determinar el número de veces que se incluye la muestra en la población. Ese valor es el que resulta de dividir el tamaño de la población en el tamaño de la muestra:

$$r = \frac{N}{n}$$

Donde:

$r$  representa a las veces que la población contiene a la muestra,

$N$ : tamaño de la población,

$n$ : tamaño de la muestra.

Luego se genera un número aleatorio entre 1 y  $r$ , éste constituye el primer elemento de la muestra al que llamaremos “a”. A continuación se selecciona el elemento que se encuentra  $r$  unidades más adelante en la lista (el elemento que ocupa el lugar  $a + r$ ) y así sucesivamente hasta recorrer la lista completa, lo cual ocurrirá cuando se haya alcanzado al enésimo y último elemento de la muestra.

El gráfico siguiente ilustra este procedimiento, las flechas a la derecha señalan los primeros elementos que constituyen la muestra; el procedimiento prosigue de idéntica manera hasta la última unidad de la muestra.

Esta técnica tiene, en principio, los mismos requerimientos que el muestreo irrestricto aleatorio, en cuanto a la necesidad de disponer del marco de la muestra, pero puede adaptarse cuando no se cuenta con la lista.

Su uso se justifica por dos razones. La primera es que si la lista no presenta ninguna tendencia especial, el muestreo sistemático facilita la extracción de la muestra, simplifica la operación, ya que la elección de todos los números aleatoriamente puede ser lenta por la aparición de elementos repetidos que deben descartarse. La segunda razón es que puede ocurrir que el listado este ordenado según algún criterio (por fechas, o por edades de los individuos, etc.), de ser así, existe el riesgo que una muestra irrestricta aleatoria concentre los elementos elegidos en alguna “zona” de la lista, sobre-representando de esta manera a los individuos que tienen alguna característica en común. En este caso el muestreo sistemático asegura que el marco de la muestra sea recorrido completamente a intervalos iguales.

Tabla 7.3: Ilustración del procedimiento de muestreo sistemático.

1
...
→ a
...
...
→ a + r
...
...
→ a + 2r
...
...
N

Por otra parte, existen situaciones en que el muestreo sistemático es desaconsejado: diremos que la población presenta un comportamiento cíclico si cierta característica se repite regularmente cada cierta cantidad fija de casos. Un ejemplo de esto es una muestra a lo largo del tiempo, en que algunos “momentos”, tales como inicios o finales de mes, determinados días de la semana, etc., se repiten periódicamente en el año. Sea que tratamos de estimar los ingresos a un hospital y elegimos, de manera sistemática, los días que constituirán la muestra. Si el valor de  $r$  fuera 7 ó un múltiplo de él, la muestra contendría siempre al mismo día de la semana y sería un sesgo grave, porque los ingresos al hospital pueden ser muy diferentes en los diferentes días de la semana. Aun cuando el ejemplo va más allá de lo realista, su utilidad está en alertar contra el uso de procedimientos sistemáticos cuando se sospecha de la existencia de una tendencia cíclica en el listado con que se cuenta.

Por último, hay casos en que el muestreo sistemático se usa para prescindir del marco de la muestra. Es cuando se seleccionan casos a partir de poblaciones en movimiento: la cola para entrar al cine es un caso. Otro caso frecuente son las encuestas “boca de urna” en las que se pregunta por quién votó a personas que salen del lugar de votación. Allí no hay listado al que recurrir, es a la gente que está físicamente presente que debemos encuestar. El recurso consiste en elegir a una persona cada  $r$ , buscando que la muestra incluya a personas que llegaron temprano y que llegaron tarde, que votaron a la mañana y a la tarde, es decir que recorramos la “fila” alcanzando a quienes están en los primeros lugares y también a quienes están al final.

Figura 7.1: En el muestreo estratificado se eligen muestras diferentes de cada uno de los subconjuntos definidos en la población.

### 7.2.3 Muestreo estratificado

El procedimiento consiste en extraer muestras de subconjuntos de la población llamados estratos. Se espera que tales estratos sean homogéneos en su interior con respecto a alguna característica conocida a priori. Dicha característica se denomina criterio de estratificación.

Un ejemplo puede aclarar esta idea: supongamos que se requiere estimar el consumo de bebidas alcohólicas de los jóvenes. Como se supone que esa variable está influida por el nivel socioeconómico, puede utilizarse este último como criterio para estratificar a la población, dividiéndola en subconjuntos en los que el nivel socioeconómico sea homogéneo. La cantidad de estratos que puedan definirse de esta manera dependerá del grado de precisión con que pueda medirse el nivel socioeconómico. Si estratificamos con categorías nivel socioeconómico alto, medio y bajo, entonces será  $k = 3$  y seleccionaremos jóvenes de cada uno de los tres estratos.

Es de destacar que la división de la población en estratos demanda cierta información acerca de ella (en este ejemplo el nivel socioeconómico). Cuanta más precisión se pretenda lograr con la estratificación, tanto mayor será la información necesaria a priori.

A veces los estratos están dados de manera más inmediata, como sucede con los alumnos de una carrera universitaria. Si se busca una muestra que represente a los estudiantes de la carrera, es conveniente estratificar por año de cursado, de modo de incluir en ella alumnos de todos los años.

Este procedimiento de muestreo se utiliza cuando se busca aumentar la precisión de la estimación sobre la población total o bien para mejorar la precisión sobre los estratos individuales. Se obtendrá tanto mayor ganancia en

la estimación cuanto más homogéneos sean los estratos en su interior y más diferentes (heterogéneos) sean entre ellos. Veremos en detalle las razones de esto cuando presentemos el error en la estimación por intervalo.

### 7.2.3.1 Muestreo estratificado con afijación igual o uniforme

Se llama afijación a la modalidad que se utilice para distribuir la muestra sobre los estratos definidos. Según la información con que se cuente a priori, se podrán utilizar diferentes formas de afijar, la primera que tratamos es la afijación igual o uniforme.

Ésta se aplica cuando no existe información alguna acerca de los estratos y no hay razón para ponderar especialmente alguno de ellos. El procedimiento es simplemente extraer la misma cantidad de casos de cada estrato. Las muestras tienen así el mismo tamaño que resulta:

$$n_i = \frac{n}{k}$$

Donde:

$n_i$  es el tamaño de las muestras extraídas de cada estrato

$n$  es el tamaño de la muestra total.

$k$  representa el número de estratos en que fue dividida la población.

En el ejemplo sobre el consumo de bebidas alcohólicas, si se trata de una muestra de 600 jóvenes, con este tipo de afijación, y como son tres estratos, extraeremos 200 casos de cada estrato.

### 7.2.3.2 Muestreo estratificado con afijación proporcional

Consiste en extraer de cada estrato una muestra cuyo tamaño resulte proporcional al estrato del que proviene. Para ello, primero calculamos  $f$  que es la proporción de población que integra la muestra:

$$f = \frac{n}{N}$$

Este cociente se llama **fracción de muestreo**, en su cálculo:

$n$  es el tamaño de la muestra total.

$N$  representa el tamaño de la población.

Una vez que conocemos la fracción de muestreo, la aplicamos a cada uno de los estratos para obtener la cantidad de casos que deben extraerse de cada uno:



$$n_i = f * N_i$$

Donde:

$N_i$ : es la cantidad de casos en el estrato  $i$ -ésimo (en la población),

$n_i$ : es la cantidad de casos que se extraerán del estrato  $i$ -ésimo,

$f$ : es la fracción de muestreo que calculamos antes.

Para usar este tipo de afijación en el ejemplo del consumo de bebidas alcohólicas necesitaríamos conocer la cantidad de jóvenes que hay en cada estrato, es decir cuántos jóvenes de nivel socioeconómico alto, medio y bajo hay en la población. Este dato usualmente es desconocido.

Veamos un ejemplo con datos reales: en el año 2008 en Psicología, la siguiente era la distribución de alumnos según el año en que habían ingresado a la carrera (considerando solo a los ingresados a partir del año 2000).

Año de ingreso a la carrera	Cantidad de alumnos
2008	1357
2007	1113
2006	1001
2005	807
2004	859
2003	764
2002	700
2001	483
2000	399
total	7483

*Fuente:* Anuario estadístico 2008, UNC.

Si queremos una muestra de 200 alumnos de esa población, la fracción de muestreo será:  $f = \frac{200}{7483} = 0,027$  que redondeamos a 0,03. Aplicaremos esta fracción a cada estrato, es decir multiplicamos por esa fracción a la cantidad de casos que hay en cada estrato y redondeamos al entero más próximo.

Año de ingreso a la carrera	Cantidad de alumnos	Casos a seleccionar
2008	1357	41
2007	1113	33
2006	1001	30
2005	807	24
2004	859	26
2003	764	23
2002	700	21
2001	483	14
2000	399	12
total	7483	

Entonces, para la muestra debemos elegir 41 alumnos que hayan ingresado en 2008, luego 33 del 2007 y así sucesivamente. A esa selección la hacemos aleatoria, ya que es posible contar con el marco de la muestra que es el registro de alumnos que tiene la facultad.

Existen otras formas de afijación, más complejas, que tienen en cuenta más información acerca de la población. Por ejemplo, la afijación óptima tiene en cuenta la heterogeneidad de cada estrato para elegir la cantidad de casos que se extraen de cada uno. Ya que cuando los elementos son muy homogéneos, bastan unos pocos casos para tener una imagen adecuada del conjunto completo, por el contrario, cuanto más dispares (heterogéneos) sean los elementos de la población, tantas más observaciones serán necesarias para hacer estimaciones de buena calidad. Este es el criterio que se usa en el procedimiento llamado afijación óptima. Si se dispone de suficiente información, es posible incluir el costo de acceso a los casos pertenecientes a diferentes estratos y realizar una afijación que minimice el costo global del muestreo, para más detalles sugerimos arrobaMendenhall1971.

Solo nos ocuparemos de las dos formas de afijación que hemos mencionado: igual y proporcional.

Dos puntos que deben recordarse para decidir el uso del muestreo estratificado:

- Cada criterio de estratificación demanda información acerca de la población. Esa información debe provenir de un conocimiento anterior al muestreo.
- El muestreo estratificado implica un aumento de la calidad de la estimación bajo la condición que los elementos que están en un mismo estrato sean homogéneos entre sí y que los estratos sean diferentes unos de otros (heterogéneos entre sí).

### 7.2.4 Muestreo por conglomerados

Se denomina conglomerado a una unidad de muestreo que está constituida, en su interior, por varios elementos de la población. Para un diseño por conglomerado deben definirse unidades primarias de muestreo (conocidas como PSU por sus siglas en inglés) que contengan en su interior a las unidades elementales.

Un ejemplo clásico de este tipo de muestreo lo constituye el caso en que se requiere extraer una muestra de hogares en una ciudad. Se trata de una situación en la que resulta imposible contar con un listado de las unidades primarias (los hogares). Un muestreo por conglomerados permite resolver este problema tomando como unidad de selección a los radios censales. Numerando estas unidades sobre un plano de la ciudad (o del área que se pretenda relevar) se selecciona aleatoriamente un número  $n$  de ellas. Una vez identificadas las unidades primarias que constituirán la muestra (los radios censales) se relevan todos los hogares (unidades elementales) que residen en cada una de ellos.

Otro ejemplo es aquel en el que necesitamos una muestra de 100 alumnos de primer grado de escuelas municipales la ciudad de Córdoba. Tenemos dos problemas: el primero es que no hay una lista de estudiantes, no contamos con un marco muestral. El segundo es que, aunque la tuviéramos, tendríamos que ir a buscar a cada uno de los 100 alumnos muestreados al lugar donde viven, lo que tendría un costo muy elevado. En este caso, el conglomerado (o unidad primaria) que se elige es la escuela: en lugar de elegir 100 alumnos al azar, se eligen, por ejemplo 10 escuelas al azar del listado de ellas, que sí existe. Luego, en cada escuela elegimos 10 alumnos, también al azar, a partir del listado de alumnos de primer grado, que sí está disponible en cada escuela.

Los requisitos para la efectividad de este tipo de muestreo pueden ser resumidos como sigue:

- Las unidades primarias de muestreo deben ser homogéneas entre sí, de tal manera que cada unidad sea intercambiable con otra.
- Cada unidad primaria debe contener, en su interior, la heterogeneidad propia de la población que se releva.

Volviendo al ejemplo anterior en que las unidades primarias son los radios censales, se espera que cada radio sea similar a los vecinos en cuanto a su composición (dentro de un área geográfica dada, se trata de un supuesto válido). Además, cada radio dispondrá, en su interior, de la variedad que sea propia del área en cuestión (en términos de su composición: proporción de hogares particulares, comercios, escuelas, etc.).

Además del ejemplo de los radios censales como unidad primaria previa a los hogares, otros conglomerados utilizados son: establecimientos educativos, para muestrear a su interior docentes o estudiantes, empresas, identificando luego trabajadores, organizaciones religiosas, etc. En general, todo conjunto

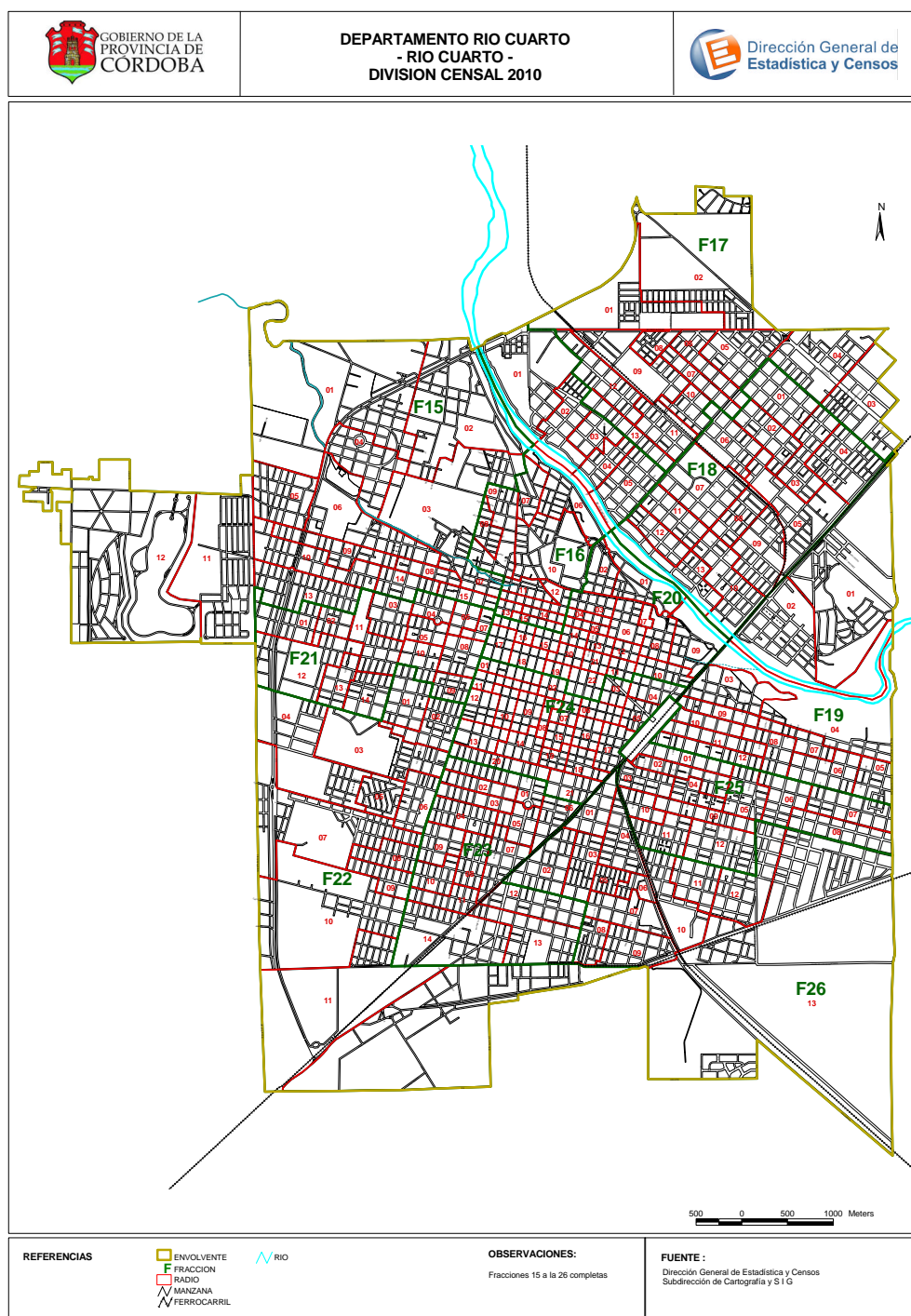


Figura 7.2: Radios censales 2010 de la ciudad de Río Cuarto, provincia de Córdoba, Argentina.

que contenga en su interior a las unidades elementales, puede elegirse como conglomerado.

### 7.2.5 Método de Kish

Es un procedimiento para seleccionar aleatoriamente un individuo entre los que residen en un hogar, que es independiente del método de muestreo utilizado para seleccionar los hogares. Solo depende de la composición del hogar y se usa para controlar el sesgo que se pueda producir si el encuestador elige quién encuestar o encuesta al que tiene más accesible. Se trata de ordenar a los integrantes del hogar, asignando un número a cada uno de acuerdo a su sexo y edad. El Centro de Control de Enfermedades de Estados Unidos sugiere asignar el número 1 a la persona de mayor edad y sucesivamente a los demás miembros. En el caso que hubiese dos personas de la misma edad, se puede usar la fecha de cumpleaños para decidir cuál va primero. Luego se consulta una planilla que el encuestador lleva consigo, donde tiene impresos números aleatorios entre 1 y el total de personas que habitan en el hogar.

La planilla tiene cada fila para identificar el número de hogar al que se está encuestando, que es el número de cuestionario que se va a aplicar. Cada columna de la planilla tiene la cantidad de integrantes que hay en el hogar. Por ejemplo: si es el quinto hogar que el encuestador visita y en él viven seis personas adultas, luego de enumerarlas según edad, de acuerdo a la siguiente tabla, debe aplicar el cuestionario a la persona que tiene el número 3.

hogar	Cantidad de integrantes											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	
1	1	1	3	4	4	4	4	4	8	3	7	
2	1	2	2	4	5	3	3	7	4	7	8	
3	1	2	1	4	5	1	1	5	6	5	1	
4	1	1	1	2	4	2	5	3	9	6	6	
5	1	1	3	4	4	**3**	7	3	5	7	9	
6	1	1	3	4	2	2	2	3	5	4	7	
7	1	2	2	1	3	5	3	7	3	6	10	
8	1	2	1	1	2	3	5	2	5	9	4	

Las encuestas de salud, como la Encuesta Nacional de Factores de Riesgo de Argentina, usan este método. Ver [https://www.who.int/ncds/surveillance/steps/Parte2\\_Seccion2.pdf](https://www.who.int/ncds/surveillance/steps/Parte2_Seccion2.pdf) y <https://www.cdc.gov/Spanish/EncuestasSR/disenom/muestreo2.html> para las recomendaciones de la Organización Mundial de la Salud y del Centro de Control de Enfermedades.

Figura 7.3: Muestreo por conglomerados en dos etapas.

### 7.2.6 Uso combinado de técnicas de muestreo

Las modalidades de muestreo presentadas pueden combinarse de varias formas para resolver problemas particulares.

En el muestreo por conglomerados puede usarse una segunda etapa posterior a la selección de las unidades primarias consistente en la incorporación en la muestra sólo de algunas de las unidades elementales contenidas en ellas. Tal elección puede realizarse por un diseño aleatorio irrestricto o sistemático.

Aplicando este concepto al ejemplo anterior, la situación consistirá en la elección de algunos hogares dentro de los radios seleccionados (en lugar de relevarlos a todos). Para lograr esta muestra, se instruye a los encuestadores para que, recorriendo un circuito establecido de antemano, entrevisten a un hogar cada una cantidad dada (uno cada diez por ejemplo para contar con una muestra del 10% de los hogares del radio).

O bien, en el ejemplo de los alumnos de primer grado, se trataría de seleccionar a 10 de ellos en cada escuela de manera aleatoria.

La obtención de una muestra en una situación real implica la combinación de varios de estos procedimientos. Por ejemplo, para un sondeo de opinión sobre la población adulta de una ciudad, el primer paso es estratificar a la población (los adultos residentes en la ciudad), según nivel socioeconómico, porque esta es una variable que suele hacer diferencias marcadas en opinión política o en pautas de consumo. Un dato que puede tenerse sobre el nivel socioeconómico de los habitantes, es el provisto por el censo de población, que incluye preguntas que permiten hacer una caracterización de los hogares según esta variable. Sin embargo, el censo se hace cada diez años y se vuelve desactualizada al poco tiempo. Por eso suele usarse, como aproximación al nivel socioeconómico, el área de residencia. Si bien no es absoluta, la división puede aproximarse con barrios habitados mayoritariamente por hogares con nivel socioeconómico más alto y

más bajo. Así, en un primer momento es posible dividir la ciudad en estratos, determinados por grandes áreas que aproximan el nivel socioeconómico. Con los datos del censo se conoce la cantidad de habitantes de cada una de esas áreas (según los cercanos que sea el último censo, este dato será más o menos certero), por lo que el muestreo estratificado se puede hacer con estratificación proporcional.

En la etapa siguiente, en lugar de seleccionar a las personas que responderán a la encuesta, se seleccionan unidades geográficas más pequeñas que los barrios: los radios censales. Éstos son enumerados dentro de cada estrato (barrio) y se selecciona aleatoriamente la cantidad de radios que sea necesaria para el tamaño de muestra establecido. Una vez seleccionados los radios, a cada encuestador se le indica que recorra el que le tocó según un circuito establecido de antemano y que llame a la puerta en un domicilio cada  $k$ . En cada domicilio seleccionado se debe preguntar por las personas adultas que viven allí y se debe seleccionar aleatoriamente a una de ellas, por el método de Kish, quien será finalmente la que responda a nuestro cuestionario.

A este esquema general deben agregarse precisiones para casos particulares, como el rechazo a responder o la falta de gente en el domicilio seleccionado. Lo usual es volver dos veces luego de un rechazo y si se fracasa las dos veces, entonces ese domicilio se reemplaza por otro, según una regla establecida de antemano. También hay que aclarar desde el principio qué hacer en los casos de edificios, barrios cerrados, etc.

Para los sondeos de opinión, en una ciudad mediana, se estila usar 400 casos en 20 conglomerados de 20 casos cada uno.

Como se ve, lo que se busca es dejar el menor margen posible para improvisar, para evitar que la selección sea voluntaria. Esto se hace para asegurar que la muestra sea aleatoria y por tanto probabilística.

Si se busca una muestra de pacientes internados en centros de salud de una determinada región, se empezará por el listado de esos centros, a los cuales es posible estratificar según su dependencia pública o privada, según su tamaño, o según otra característica de interés. Una vez establecida la estratificación, se seleccionan al azar una cierta cantidad de centros de salud de cada estrato y, en cada centro será necesario contar con el registro de pacientes internados, aquí se introducirán las restricciones propias de cada investigación, el período durante el cual nos interesan los datos, las patologías que fueron motivo de la internación, etc. La selección de casos (historias clínicas de los pacientes internados) puede realizarse de manera irrestricta aleatoria si se dispone del listado.

### 7.3 Muestreos no probabilísticos

Los procedimientos que pretenden estimar valores de la población a partir de resultados muestrales sólo pueden aplicarse cuando es posible asignar

probabilidades a priori a los individuos de ser parte de la muestra. Aun cuando no cumplen con este requisito, las técnicas de muestreo no probabilísticas se utilizan en situaciones en que se pretende adquirir un conocimiento inicial de un problema que se encuentra escasamente delimitado, como sucede en los estudios de tipo exploratorio. También es frecuente su uso cuando no se pretende un conocimiento acabado sobre la población completa sino que el objetivo es profundizar sobre algunos casos en particular (estudios de casos) a través de entrevistas en profundidad que reconstruyan la historia de vida de algunas personas solamente. Un tercer uso es el de aproximar los resultados que se obtendrían con muestras probabilísticas. Como señalamos antes, deben tenerse recaudos con la generalidad de las conclusiones provenientes de este tipo de muestreo.

Una clasificación útil para este tipo de muestreo toma en consideración su definición, esto es que la elección no depende del azar sino de la voluntad de alguien. De esta manera los muestreos no probabilísticos pueden clasificarse según quien sea el responsable de la elección en: muestreo por cuotas, de juicio o intencional, autoelegido y accidental. Una combinación de estos procedimientos es el muestro por bola de nieve.

### 7.3.1 Muestreo por cuotas

En este muestreo se busca reproducir de la manera lo más ajustada posible las características de la población en la muestra. Se llama cuotas a las fracciones de la muestra con las distintas características. Este muestreo se usa cuando se conocen algunas características de la población y se busca reproducirlas en la muestra. Por ejemplo, si la muestra contiene una proporción de varones y mujeres igual a la que hay en la población y además respeta las proporciones de diferentes grupos de edad, decimos que usamos cuotas de sexo y edad. A estos criterios suele agregarse otros, según los objetivos de la investigación, por ejemplo, en las encuestas políticas, es frecuente establecer cuotas de acuerdo al voto en las elecciones pasadas. Los ejemplos que indicamos antes, como reproducir la proporción de varones y mujeres entre los docentes primarios, o de las diferentes proporciones de niveles educativos de la población en la muestra, son casos de muestreo por cuotas.

En la práctica, se encarga a los encuestadores una cantidad especificada de casos a relevar, sin indicar quiénes serán esos casos ni cómo hallarlos, esto le da el carácter de no probabilístico, pero respetando las cantidades de casos en cada cuota. El entrevistador elige a “cualquiera”, según su comodidad o preferencias, es decir que no es posible conocer a priori qué probabilidad tienen los elementos de la población de caer en la muestra, pero esa elección está limitada por la exigencia que los elementos reúnan ciertas características.

Un ejemplo es en el que se indica a un encuestador que complete 10 entrevistas a médicos que trabajen en relación de dependencia en la ciudad de Córdoba que



tengan hasta diez años de egresados; a otro, que entreviste a 15 médicos también en relación de dependencia, pero que tengan más de diez años de egresados. Si bien en este caso los entrevistadores pueden elegir según su preferencia cuáles serán los médicos a los que entrevistará, sus posibilidades de elección están restringidas a cumplir la cuota asignada.

En las encuestas políticas, el encuestador puede verse limitado a elegir personas de sexo femenino, de 45 años, que en las elecciones pasadas hayan votado por el partido X (mientras que a otros encuestadores se les encargarán otras cuotas). No hay azar, porque el encuestador elegirá a quienes prefiera o tenga más a su alcance, pero deberá respetar las cantidades que le fueron indicadas.

Atención: una muestra construida por cuotas, es evidentemente representativa de los criterios correspondientes de las cuotas con los que fue elaborada (sexo, edad, ocupación, región, ...). Pero no hay ningún medio para saber si es representativa de aquello para lo cual fue construida, es decir, el tema de la investigación: la opinión, los rendimientos académicos, las actitudes, etc.

### 7.3.2 Muestreo de juicio o intencional

En este tipo de muestreo, conocido también como “selección experta”, es el investigador quien decide qué elementos son los más adecuados para realizar la investigación. La elección se basa en la apreciación subjetiva del investigador sobre la representatividad de los elementos que muestrea. En algunos ámbitos de la investigación, suele solicitarse a expertos que seleccionen los elementos de la población que consideren más adecuados para construir la muestra, esta selección se apoya en la experiencia de los consultados.

Un primer uso de este tipo de muestreo es aquel en el que el interés no se centra en la representatividad sino en la riqueza de contenidos que pueden ofrecer algunos individuos a diferencia de otros.

Si se pretende reconstruir la historia de un asentamiento urbano marginal, sería más adecuado elegir a personas que hayan residido en él por largo tiempo. Se espera que los pobladores más antiguos puedan dar mayor información acerca de la génesis y evolución que los que han arribado recientemente. En este caso, el investigador se preocupará primero por identificar a los residentes en el asentamiento y, a partir de ese conocimiento, decidirá a quiénes va a incluir en la muestra.

Aquí no se pretende la generalización de los resultados, ni se busca encontrar una historia típica en el sentido de que, en mayor o menor grado, la mayoría de los pobladores la comparta. Lo que se busca es profundizar el análisis a partir del testimonio de aquellos a los que consideramos como informantes más idóneos.

### 7.3.3 Muestreo autoelegido

Usado principalmente en razón de la reducción de costos que implica, cuando se usa este tipo de muestreo no se selecciona a los sujetos del estudio, sino que se solicita a las personas que participen voluntariamente. La decisión de formar parte o no de la muestra queda en manos de la persona invitada, por eso se llama autoelegido, es ella quien optará por participar o no hacerlo (por falta de interés, de tiempo, etc.).

Supongamos que se pretende estudiar el gasto por familia en actividades de recreación y para reducir costos, en lugar de enviar encuestadores, se envían por correo formularios anónimos a los domicilios de los hogares seleccionados aleatoriamente. Podría suceder que aquellos hogares que tienen gastos en recreación muy bajos contesten en proporción menor que los que más gastan. De esta manera, las respuestas resultantes darían un valor promedio por encima del verdadero por el hecho que, inadvertidamente, la muestra estaría representando en mayor medida a los hogares que tienen los más altos gastos en recreación.

En el estudio acerca del comportamiento sexual de las mujeres en Estados Unidos, el Informe Hite (1976) basó sus conclusiones sobre el 3% de mujeres que remitieron completos los cuestionarios que habían recibido por correo. Aun cuando el número de cuestionarios respondidos sea alto (gracias a una numerosa muestra inicial), resulta riesgoso extender las conclusiones a la población en general. Es así porque no se sabe si ese pequeño porcentaje de mujeres que respondieron tiene conductas semejantes o muy diferentes de aquellas que no lo hicieron.

En la actualidad ya no se envían formularios por correo postal para que la gente responda, pero sí se hacen encuestas por mail o se invita a expresar la opinión en encuestas en sitios web. A esas encuestas responde una fracción muy específica de la población: la que accede a internet, que visita esa página, que tiene tiempo e interés por responder a las preguntas que allí se hacen. No es posible saber qué recorte de la población es representado por esa muestra y es completamente inválido extender los resultados a toda la población, como lo es generalizar a los visitantes de esa página, ya que no todos tienen el tiempo ni el interés para responder. Se trata de un dato imposible de adjudicar a alguna población identificable, es simplemente “la opinión de los que opinaron”. Sin embargo a veces se tratan equivocadamente esos resultados como si representaran una tendencia de opinión.

El muestreo autoelegido tiene una aplicación en el campo de experimental cuando se trabaja con sujetos humanos. Allí, la selección de quienes participarán de los experimentos, muy raramente puede hacerse al azar, habitualmente resulta de la voluntad de personas que se prestan para los estudios. Sin embargo, es un requisito indispensable en los experimentos que se asignen las personas de manera aleatoria a los grupos experimental y control. Es decir, que se elija aleatoriamente a cuáles de las personas voluntarias se someterá a

los tratamientos que se ponen a prueba y a cuáles se tomará como controles. También es frecuente usar cuotas en la asignación de sujetos a los dos grupos de modo que estén equilibrados respecto de algunas variables, cuya determinación depende del estudio particular. En este caso las cuotas indican qué proporción de casos se requieren en cada categoría de las variables de interés, la selección de los sujetos que constituirán el grupo experimental y el grupo control se hace aleatoriamente. Este tema se desarrolla con detalle en Metodología de la Investigación.

#### 7.3.4 Muestreo accidental o según disponibilidad

Esta modalidad cuenta con sustancial difusión, en particular por los medios de comunicación, y consiste en entrevistar a los individuos que se encuentran accidentalmente en determinado lugar. La expresión “accidental” se presta a equívocos ya que puede confundirse con “aleatorio”. Si bien no resulta posible identificar a quien toma la decisión por la selección de la muestra, nos encontramos en una situación en que múltiples factores son los responsables de la misma. Algunos de estos factores son: la voluntad de los encuestados para prestarse o no a participar de la entrevista, la elección (consciente o no) que el entrevistador hace entre las personas que transitan, el lugar donde se hace la entrevista (ciertas personas difícilmente transitan por determinadas áreas de una ciudad), etc.

El hecho que se trate de la confluencia de múltiples factores fortuitos, lo que determina cuáles serán las personas que formarán parte de la muestra y quienes no, no puede considerarse sinónimo de aleatoriedad. Por lo tanto, no se trata de un muestreo probabilístico dado que no es posible asignar probabilidades a priori de pertenecer a la muestra a los elementos de la población.

En consecuencia, las conclusiones obtenidas a través de este tipo de relevamiento (porcentaje de opiniones a favor o en contra de un tema cualquiera, etc.) sólo pueden ser válidas para aquellas personas que fueron parte integrante de la muestra, no pudiendo generalizarse los resultados más allá de la misma.

Por el contrario cuando se lo utiliza en ámbitos académicos, suelen tomarse los resguardos mencionados antes para conseguir que sea tan representativo como sea posible. Para hacer esto se consideran en primer lugar las características conocidas de la población y se las reproduce en la muestra por ejemplo la proporción de varones y mujeres, los niveles de educación, como en el caso del muestreo por cuotas. Luego se busca la mayor heterogeneidad posible y un número elevado de casos. Con estos cuidados, este tipo de muestreo puede usarse, por ejemplo para la validación de escalas psicométricas.

### 7.3.5 Muestreo bola de nieve

Esta técnica fue publicada por primera vez por Leo Goodman (1961), de la Universidad de Chicago. Es adecuada cuando se debe estudiar una población infrecuente, poco representada en el total general y no hay un marco disponible para el muestreo. Estas situaciones se presentan, por ejemplo, si se requiere entrevistar a consumidores de drogas ilegales, personas afectadas por alguna enfermedad rara, trabajadores inmigrantes.

Comienza con la selección de una muestra inicial o básica de individuos y en cada entrevista se pregunta a qué otras personas de la población el entrevistado conoce. Luego se visita a esos casos referenciados por los primeros, repitiendo el procedimiento hasta que se completa la muestra. Así, al entrevistar a cada miembro de un grupo, se puede pedir que indique otros individuos en ese grupo que podrían dar información sobre el tema; o pedirle que mencione personas que compartan sus puntos de vista y a otras de opinión opuesta. De este modo se entrevistan nuevos individuos y se continúa del mismo modo hasta que no se encuentran nuevos puntos de vista. Cuando se llega a ese punto, se dice que se ha saturado el tema. Este es un buen método para recoger los distintos puntos de vista existentes en un grupo, o para alcanzar a persona que no son visibles en una comunidad, pero no ofrece información sobre la distribución de los casos en la población.

Si es posible, la primera selección se hace en forma probabilística, y los casos siguientes quedan determinados por las referencias que se van encontrando. Lo más frecuente es que se carezca de datos iniciales, por lo que la primera muestra deberá seleccionarse en forma intencional o estar constituida por voluntarios. En cualquier caso se trata de un muestreo no probabilístico, cuya ventaja es que puede asegurar una amplia cobertura, porque permite llegar a través de contactos personales, a individuos que de otro modo permanecerían invisibles. El carácter no representativo viene dado porque la probabilidad de entrevistar a una determinada persona depende de sus conexiones: aquellas muy conectadas tendrán más probabilidad de ser entrevistadas que las que estén aisladas, o tengan pocos conocidos.

Este método puede mejorarse para lograr que la muestra sea representativa de la población. Para eso se lo combina con un modelo matemático que da peso diferente a los casos teniendo en cuenta que han sido seleccionados de manera no aleatoria. La técnica que así resulta se llama “Muestreo Dirigido por el Respondente” y fue desarrollado por Douglas Heckathorn en 1997, como parte de un proyecto de investigación sobre prevención de VIH dirigido a consumidores de drogas inyectables en varias ciudades de Connecticut. Aplicando este procedimiento se logran muestras no sesgadas (representativas) aun cuando se haya partido, como generalmente sucede, con una muestra no probabilística. Para detalles sobre el modo de usarlo, puede consultarse <http://www.respondentdrivensampling.org/>, donde se encuentran abundantes ejemplos de aplicación.

## 7.4 Resumen de técnicas de muestreo

## 7.5 Hacerlo en R

### 7.5.1 Aleatorio simple

Una muestra aleatoria de casos de una matriz de datos, es una selección aleatoria de un número determinado de filas, manteniendo todas las columnas igual.

En primer lugar leeremos la base Encuesta Nacional de Factores de Riesgo con el nombre `enfr` y luego, extraeremos una submuestra aleatoria de 100 casos de ella a la que denominamos `enfr100`.

El corchete se refiere a los elementos de `enfr` que se van a seleccionar. De las filas (primer componente dentro del corchete, antes de la coma) se elige una muestra de 100 filas de `enfr`. Luego de la coma no se indica nada, con lo que se dejan todas las columnas de la base original. En el panel superior derecho se observa la aparición del nuevo objeto `enfr100`, con 100 casos y 204 variables, las mismas que tenía `enfr`.

### 7.5.2 Estratificado

#### 7.5.2.1 Afijación uniforme

Es necesario instalar un paquete específico y cargarlo en la sesión

Luego se define la nueva matriz `muestra.estrat.eph`, indicando la matriz de donde se extrae la muestra, el criterio de estratificación y la cantidad de casos. Pediremos 100 casos de cada nivel de educación:

Para ver el resultado, se puede pedir cualquier tabla, con los márgenes a fin de ver el total de casos en cada categoría:

```
##
##      1    2    3    4    5    6    7 Sum
##  1   55   46   53   37   39   44   55 329
##  2   45   54   47   63   61   56   45 371
## Sum 100  100  100  100  100  100  100 700
```

La muestra tiene 700 casos que son 100 de cada nivel de educación. También se puede pedir más de un criterio de estratificación, por ejemplo, educación y sexo:

```
##
##      1    2    3    4    5    6    7 Sum
```

##	1	100	100	100	100	100	100	100	700
##	2	100	100	100	100	100	100	100	700
##	Sum	200	200	200	200	200	200	200	1400

Ahora hay 1400 casos en total 100 en cada combinación de sexo y nivel de educación (2X7).

#### 7.5.2.2 Afijación proporcional

En lugar de especificar la cantidad de casos, se puede indicar la proporción de casos que se requieren de cada categoría, por ejemplo para el 10%:

##									
##		1	2	3	4	5	6	7	Sum
##	1	404	337	620	536	298	270	264	2729
##	2	428	391	559	561	344	407	270	2960
##	Sum	832	728	1179	1097	642	677	534	5689

La cantidad de casos en cada categoría depende de cuántos casos había en la matriz original.

## Capítulo 8

# Probabilidad: los fundamentos

### 8.1 El rol de la probabilidad en Estadística

Para hacer inferencias se requiere de la probabilidad porque se trabaja con situaciones inciertas, que no se conocen y que son difíciles de prever. Por eso se comienza aquí haciendo la distinción entre las preguntas que pueden responderse con certeza y las que no. De las primeras, son ejemplos: ¿cuándo será el próximo eclipse de sol? ¿Cómo varía el diámetro de la pupila luego del consumo de alcohol? Sobre estas preguntas tenemos, o bien un conocimiento profundo sobre el movimiento de los astros, o bien una gran cantidad de observaciones, que nos permiten dar una respuesta certera.

Por el contrario, si preguntamos ¿cuál es el efecto sobre la personalidad, de haber tenido figuras parentales autoritarias en la niñez? ¿Qué determina que algunos alumnos tengan éxito en la escuela y otros no? ¿Cómo afecta la estabilidad económica a la intención de voto?, solo podemos ofrecer respuestas parciales, tentativas, aproximadas. Se trata de hechos que dependen de muchos factores a los que no conocemos en su totalidad, por lo que el resultado es variable: algunas personas criadas en ambientes autoritarios desarrollan una personalidad autoritaria, otras no. En algunos alumnos, el hecho que sus padres tengan estudios elevados los ayuda a tener éxito en la escuela, pero también hay hijos de personas muy educadas que fracasan en la escuela. La estabilidad económica que favorecería una reelección, puede estar acompañada de mucha pobreza, o de corrupción; también eventos inesperados antes de las elecciones pueden cambiar decisiones a último momento. Hay razones más allá de nuestro alcance que inciden en la personalidad o en el resultado de la escuela, o la intención de voto. En estas situaciones, cuando no tenemos toda la información que hace falta para predecir el resultado, recurriremos a la probabilidad.

Ingresaremos al tema desde situaciones muy sencillas, desde el muy usado ejemplo de arrojar una moneda. Pero detengámonos un momento en él: si tuviéramos toda la información necesaria para predecir la trayectoria de la moneda en el aire (distancia desde donde se arroja, fuerza que se le aplica, el lugar de la moneda donde se aplica esa fuerza, eventuales corrientes de aire que puedan incidir en el desplazamiento de la moneda, etc.), podríamos predecir con certeza el resultado. Esa información no está disponible, el lado del que caiga la moneda está determinado por una multiplicidad de factores, por esa razón no podemos anticipar el resultado de la tirada. A esa ignorancia la resumimos diciendo que el resultado de la tirada de la moneda “depende del azar” y llamamos al experimento de tirar una moneda “experimento aleatorio”.

Es un paso muy largo ir desde este ejemplo a decir que el modo en que se desarrolle la personalidad de alguien que ha sido criado en una familia autoritaria depende del azar o que la distribución de votos en las próximas elecciones depende del azar. Sabemos que esos resultados no dependen del azar, dependen de muchos factores que ignoramos, por eso usaremos probabilidades en las disciplinas que tratan con sujetos humanos, por la imposibilidad de predecir con certeza los resultados. Podremos decir que un alumno cuyos padres valoran la educación tiene una probabilidad mayor de tener éxito en la escuela, pero no podremos asegurar que lo tendrá. Es razonable creer que si un gobierno logró estabilidad económica, tendrá más posibilidades de ser reelegido, pero no hay certeza sobre que lo será. Los tratamientos más exitosos encuentran casos en los que no logran resultados, por lo que su efectividad no puede garantizarse completamente, hay una componente impredecible en la evolución de la patología.

La probabilidad trata con la incertidumbre, con lo que hay entre la certeza en que algo ocurrirá y la certeza en que no ocurrirá.

Los eventos que no son azarosos no tienen que ver con probabilidades: no asignamos probabilidad a un eclipse porque hay conocimiento suficiente como para saber cuándo ocurrirá; pero sí se asigna probabilidad a una tormenta, porque no se conocen simultáneamente todos los factores que la determinan. Se asignan probabilidades a hechos de cuya ocurrencia no se tiene certeza. Con la probabilidad se cuantifica (se le asigna un número) a la expectativa sobre el fenómeno. Intuitivamente, cuando decimos que algo tiene “mucha probabilidad de suceder” es porque estamos bastante seguros que sucederá. Esta es la posición conocida como “azar epistemológico”, que considera azarosos o aleatorios a los eventos cuya ocurrencia no puede anticiparse con certeza. Desde esta posición, que sea azaroso o no, depende el conocimiento que se tenga sobre los determinantes del evento.

La cuantificación de la probabilidad implica que ésta se expresa con un número que está comprendido entre cero y uno. Que un evento tenga probabilidad cero significa que es imposible que suceda. Si un evento tiene probabilidad igual a uno, se llama “evento seguro”, y quiere decir que hay certeza en que sucederá.



## 8.2 Formas para asignar probabilidades

### 8.2.1 Asignación a priori

Podemos partir de esa idea intuitiva de probabilidad, ligada a procesos cuya ocurrencia no nos es conocida con certeza. Para evocar esta idea, el ejemplo que más a menudo se cita es el del lanzamiento de una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener “cara” al arrojar una moneda? Si la respuesta es  $1/2$  (o 0,50 ó 50 y 50), debe tenerse en cuenta que eso solo será cierto si la moneda está equilibrada, es decir si tiene iguales chances de salir de un lado que del otro. Si esto es cierto, efectivamente la probabilidad de obtener cara es  $1/2$  (ó 0,50). Con idéntica condición, la probabilidad de obtener un 5 al arrojar un dado es  $1/6$  (ó 0,17). Esta asignación de probabilidad a los resultados de un experimento es previa a su realización, no es necesario tirar realmente la moneda: es suficiente con que tengamos razones para *suponer* que está equilibrada, para poder afirmar que la probabilidad de cara es  $1/2$ . Diremos en este caso que asignamos la probabilidad *a priori*, es decir, antes de hacer el experimento.

De mismo modo sucede si el evento que nos interesa en un poco más complejo. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a cuatro si se tira un dado? Debido a que hay dos números mayores a cuatro (5 y 6), el evento tiene dos casos a su favor y hay seis resultados posibles, por lo que la probabilidad será:  $2/6$  (ó  $1/3$ , si se simplifica la fracción).

La expresión formal de esta asignación de probabilidades es.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

En la que  $\#A$  (que se lee “numeral de A”) indica el número de maneras en que puede suceder el evento A, y  $\#\Omega$  (numeral de omega) es el número total de resultados que se pueden obtener al realizar el experimento.  $\Omega$  es el conjunto de resultados posibles, es llamado *espacio muestral*. En el caso del ejemplo, el experimento es el de tirar el dado y buscar un número mayor que cuatro,  $\#A$  es 2 porque son las formas en que puede obtenerse un número mayor que cuatro, y  $\#\Omega$  es 6, que es el número total de resultados posibles al tirar un dado.

Con este mismo razonamiento, la probabilidad de obtener un número par es  $3/6$  ( $1/2$  después de simplificar), porque hay tres números pares (2, 4 y 6) en un dado.

Vamos a un caso más complejo: tiremos ahora dos dados y tomemos en cuenta la suma de los dos puntajes, a esa suma la llamaremos  $S$ . El mínimo número que puede resultar es dos (que ambos dados salgan uno) y el máximo es doce (ambos seis), entonces hay once resultados posibles de esta variable (que son:  $S = 2$ ,  $S = 3$ ,  $S = 4$ ,  $S = 5$ ,  $S = 6$ ,  $S = 7$ ,  $S = 8$ ,  $S = 9$ ,  $S = 10$ ,  $S = 11$  y  $S = 12$ ),

Tabla 8.1: Resultados posibles de la suma de los puntajes de dos dados.

		Primer dado					
		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Segundo dado	**1**	2	3	4	5	6	7
	**2**	3	4	5	6	7	8
	**3**	4	5	6	7	8	9
	**4**	5	6	7	8	9	10
	**5**	6	7	8	9	10	11
	**6**	7	8	9	10	11	12

algunos de los cuales pueden suceder de varias formas. Estos resultados posibles y sus formas de obtención se ven de manera esquemática a continuación:

Si bien los resultados posibles son 11, las formas en que estos pueden darse son 36; cada una de esas formas es un evento. El evento primer dado 5 y segundo dado 2 es diferente del evento primer dado 2 y segundo dado 5, aunque ambos conducen al mismo resultado de la suma:  $S = 7$ . Más precisamente, si indicamos los eventos con pares ordenados, los eventos  $(1, 6)$ ;  $(6, 1)$ ;  $(2, 5)$ ;  $(5, 2)$ ;  $(3, 4)$ ;  $(4, 3)$  son diferentes pero todos corresponden a  $S = 7$ .

Son entonces 36 los resultados posibles del experimento, por lo que  $\#\Omega = 36$ . Ahora podemos calcular probabilidades para diferentes resultados.

¿Cuál es la probabilidad que la suma sea 12?, lo que puede expresarse como: ¿cuál es  $P(S = 12)$ ? Como esta suma solo puede lograrse si ambos dados salen 6, hay una sola manera en que se produzca el evento que nos interesa (suma doce), por lo que el  $\#A$  es 1 y la probabilidad es entonces  $1/36$ .

$$\#A = 1, P(S = 12) = 1/36$$

		Primer dado					
		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Segundo dado	**1**	2	3	4	5	6	7
	**2**	3	4	5	6	7	8
	**3**	4	5	6	7	8	9
	**4**	5	6	7	8	9	10
	**5**	6	7	8	9	10	11
	**6**	7	8	9	10	11	**_12_**

En cambio, si la pregunta es por la probabilidad de obtener un tres, hay más de una manera de llegar a ese resultado (que  $S = 3$ ). La suma 3 puede resultar de  $2 + 1$  ó de  $1 + 2$ , es decir que, o bien el primer dado sale 2 y el segundo 1 ó bien el primero sale 1 y el segundo 2. Hay así dos formas posibles para el evento  $S = 3$ , y  $\#A$  es 2, por lo que la probabilidad es  $P(S = 3) = 2/36$ .

$$\#A = 2, P(S = 3) = 2/36$$

		Primer dado					
		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Segundo dado	**1**	2	**_3_**	4	5	6	7
	**2**	**_3_**	4	5	6	7	8
	**3**	4	5	6	7	8	9
	**4**	5	6	7	8	9	10
	**5**	6	7	8	9	10	11
	**6**	7	8	9	10	11	12

Otro ejemplo, sea  $P(S = 7)$ . La suma de siete puede obtenerse de muchas formas:  $1 + 6$ ,  $2 + 5$ ,  $3 + 4$ ,  $4 + 3$ ,  $5 + 2$  ó  $6 + 1$ . Hay seis combinaciones que conducen a  $S = 7$ , en consecuencia, la probabilidad es  $6/36$ .

$$\#A = 6, P(S = 7) = 6/36$$

		Primer dado					
		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Segundo dado	**1**	2	3	4	5	6	**_7_**
	**2**	3	4	5	6	**_7_**	8
	**3**	4	5	6	**_7_**	8	9
	**4**	5	6	**_7_**	8	9	10
	**5**	6	**_7_**	8	9	10	11
	**6**	**_7_**	8	9	10	11	12

### 8.2.2 Asignación a posteriori

Consideremos ahora una situación más cercana a la experiencia: supongamos que de un curso se selecciona un alumno al azar ¿Cuál es la probabilidad que

Tabla 8.2: Distribución de frecuencias del tipo de colegio del que provienen alumnos que ingresan a la universidad

	f	f'
Público	200	0,66
Privado laico	20	0,07
Privado religioso	80	0,27
Total	300	1,00

*Fuente:* datos ficticios para ejemplificación.

sea mujer? Aquí el supuesto de equilibrio no es válido a priori, en gran medida depende de la carrera de que se trata, las hay con muchas mujeres y con pocas. Por lo tanto no podemos suponer que es igualmente probable que resulte un varón o una mujer y no podemos asignar probabilidad  $1/2$  a cada resultado. Aunque el experimento tenga dos resultados posibles, éstos no son igualmente probables.

En otro ejemplo, si al alumno aleatoriamente seleccionado (por ejemplo, el que ocupa el lugar 98 en la lista de inscriptos) se le pregunta por el tipo de colegio del que egresó, con los resultados posibles: “público”, “privado laico”, “privado religioso”, el resultado que se obtenga también depende del azar, porque así fue elegido el alumno, la respuesta será una u otra según cuál sea el alumno elegido y esto depende del azar. Sin embargo, no podemos asignar una probabilidad igual a cada resultado, no es lícito decir que sea  $1/3$ , ya que puede haber más estudiantes que provengan de colegios públicos que de privados y, en consecuencia, que sea más probable encontrar alumnos provenientes de esos colegios que de los otros. En este caso no podemos asignar de antemano probabilidades a los diferentes resultados, porque no tenemos suficientes razones para suponer *la forma en que se distribuyen* las probabilidades. Si supiéramos que hay el doble de alumnos que vienen de colegios públicos, podríamos decir que el alumno elegido al azar tiene el doble de probabilidad de provenir de un colegio público que de otro tipo.

Encontramos así una relación entre la frecuencia y la probabilidad: si conocemos la distribución de frecuencias, tenemos razones para usarlas para asignar probabilidades a los resultados del experimento. Así, si una muestra de alumnos ofrece la siguiente distribución de frecuencias para el tipo de colegio del que provienen.

Estamos autorizados a decir que la probabilidad que el alumno elegido al azar provenga de un colegio público es 0,67, que es su frecuencia relativa. Esto será válido en la medida que el número de casos sea elevado; no es posible transformar una frecuencia relativa en probabilidad si tenemos muy pocas observaciones. Más adelante volveremos sobre esta importante limitación.

Cuando atribuimos probabilidades de este modo se trata de probabilidades *a posteriori*, es decir con posterioridad a haber hecho la experiencia, luego de

la observación de los resultados reales obtenidos. También se llama a estas probabilidades *empíricas*, para destacar que provienen de la experiencia.

¿Cuál es el significado del 1.00 que corresponde al total? Sin dudas, como frecuencia significa el 100% de los casos, pero como probabilidad indica que el conjunto completo de alternativas (público, privado laico, privado religioso) tiene probabilidad 1.00; o bien que es un *evento seguro*. La expresión coloquial para este valor es que cuando se selecciona un alumno al azar, éste debe provenir de alguno de los tres tipos de colegio indicados, entonces el valor uno responde a la pregunta “¿cuál es la probabilidad de encontrar un alumno que provenga de un colegio que sea público, privado laico o privado religioso?”, la respuesta es que es seguro que de alguno de esos tipos de colegio provendrá el alumno, porque no hay otras alternativas, es decir que las categorías son exhaustivas, como debe ser. En este caso,

$$\Omega = \{\text{publico}, \text{privado laico}, \text{privado religioso}\}$$

Como vimos más arriba, el evento seguro es el que tiene probabilidad 1, por lo que la expresión formal de este enunciado es:

$$P(\Omega) = 1$$

Donde  $\Omega$  indica el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, o el conjunto de todas las categorías de un variable, al que hemos llamado *espacio muestral*.

### 8.2.3 La relación entre asignación a priori y a posteriori

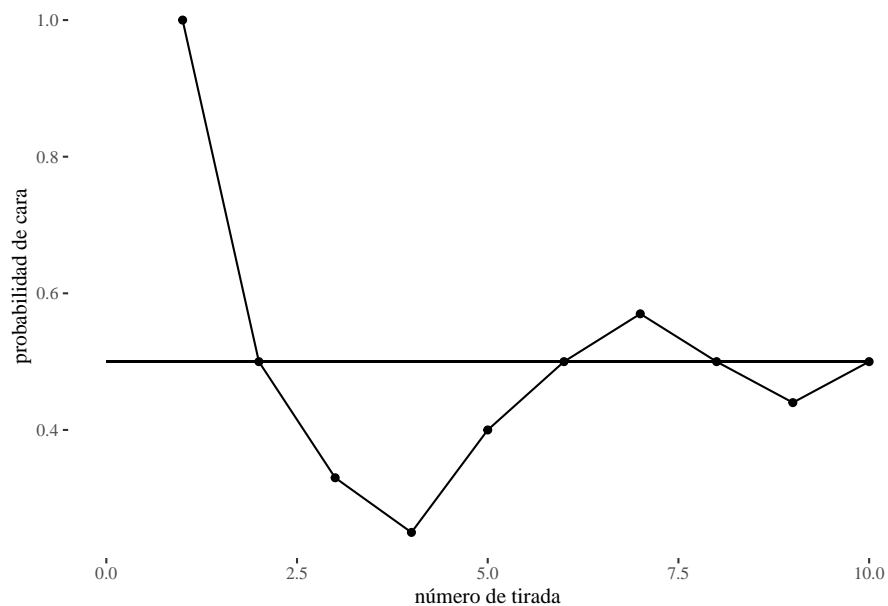
Volvamos al experimento simple de arrojar la moneda: si ésta se encuentra equilibrada será entonces correcto asignar probabilidad  $1/2$  (ó 0,50) a cada lado, lo que indica que esperamos que *a la larga* la moneda caiga la mitad de las veces cara y la mitad cruz. Destaquemos la expresión “a la larga”, que quiere decir “si se arroja muchas veces”. Hagamos el experimento realmente, busque usted una moneda y arrójela, digamos 10 veces. Yo lo hice y obtuve la siguiente secuencia de resultados: CXXXCCCXXC.

Elijamos nuestro lado favorito, que sea “cara” (C) y calculemos la frecuencia relativa de ese lado en cada tirada, presentamos los resultados resumidamente en la tabla . Cuando solo la he tirado una vez y como el primer resultado fue C, la frecuencia es 1 (una cara de un total de un resultado). A la segunda tirada, que es X, se obtiene  $1/2$  (una cara de dos tiradas). A la tercera, que otra vez sale X, la frecuencia de cara es  $1/3$  (una cara de tres tiradas) y así sigue:

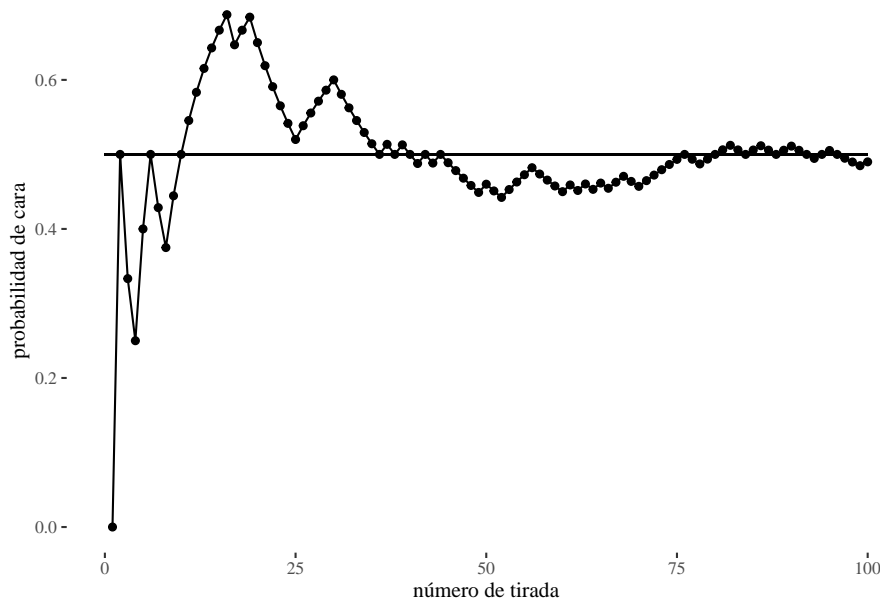
En la distribución vemos que la frecuencia relativa de C toma valores alrededor de 0,50; al principio más lejos y luego “se va acercando” a ese número cuando hemos hecho más tiradas. La representación gráfica de este proceso es la siguiente:

Tabla 8.3: Frecuencias relativas correspondientes a una secuencia de diez lanzamientos de una moneda.

Tirada	Cantidad de tiradas	Resultado	Cantidad de caras acumuladas	Frecuencia relativa del
Primera	1	C	1	$1/1 = 1,0$
Segunda	2	X	1	$1/2 = 0,5$
Tercera	3	X	1	$1/3 = 0,3$
Cuarta	4	X	1	$1/4 = 0,2$
Quinta	5	C	2	$2/5 = 0,4$
Sexta	6	C	3	$3/6 = 0,5$
Séptima	7	C	4	$4/7 = 0,5$
Octava	8	X	4	$4/8 = 0,5$
Novena	9	X	4	$4/9 = 0,4$
Décima	10	C	5	$5/10 = 0,5$



Donde hemos agregado una línea que muestra el valor 0,50 que es el que habíamos calculado antes de hacer el experimento. Se aprecia que la sucesión de frecuencias relativas es tal que éstas se van acercando a la probabilidad predicha. Si la moneda se hubiese tirado una cantidad mayor de veces (cien veces, por ejemplo), el gráfico tendría una forma como la siguiente:



Resulta entonces que, si se cumple que la moneda está equilibrada, entonces las frecuencias relativas de un resultado se irán acercando a la probabilidad asignada. Dicho de otra manera, la probabilidad a posteriori converge a la probabilidad a priori. Mucha atención a esto: solo en el caso que el supuesto inicial se cumpla, es decir que la moneda se comporte como esperamos (cayendo parejo de un lado y del otro).

Si por el contrario, la moneda estuviese desequilibrada -y que fuera más frecuente el lado X que el lado C-, podríamos obtener, en 500 tiradas, por ejemplo, 350 veces X y la probabilidad a posteriori será entonces  $P(C) = 350/500 = 0,70$  y no 0,50 como sería si estuviera equilibrada. En ese caso el supuesto inicial de moneda equilibrada se muestra falso, decimos que “el modelo no se sostiene”, en un momento veremos con más detalle el significado de esta expresión.

### 8.3 Operando con probabilidades

Cualquiera sea el modo a través del que se hayan asignado probabilidades a eventos, las probabilidades cumplen con ciertas propiedades generales, que trataremos a continuación y que permiten hacer operaciones con ellas.

En primer lugar, y con carácter de axiomas, las siguientes características son condición para que un número  $P(A)$  pueda ser considerado una probabilidad:

- La probabilidad es un número comprendido entre cero y uno:  $0 \leq P(A) \leq 1$

Tabla 8.4: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia.

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

- La probabilidad del conjunto completo de resultados posibles (del espacio muestral) es uno:  $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de la unión de dos eventos que se excluyen mutuamente es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La definición frecuencial (a posteriori), así como todos los modelos de asignación de probabilidad a priori que mencionamos cumplen con estas condiciones.

### 8.3.1 Con probabilidades frecuenciales

Sea una distribución conjunta de dos variables con asignación de probabilidades frecuenciales, es decir empíricas. Se trata de la relación entre la ciudad donde se vive y la intención de voto. Las categorías de la ciudad son: Córdoba, Rosario y Mendoza. Los partidos políticos son cuatro y los llamaremos Q, R, S y T. Supongamos que las siguientes son las frecuencias observadas luego de recoger los datos:

Calculemos algunas probabilidades a partir de las frecuencias relativas.

#### 8.3.1.1 Probabilidades marginales

Cuando se consideran las categorías de una variable sin tener en cuenta a la otra, usamos las frecuencias de los márgenes de la tabla, esas son las llamadas **frecuencias marginales**. La probabilidad que una persona elegida al azar viva en Córdoba (sin importar a qué partido piense votar) es  $650/1530$ . De manera equivalente, la probabilidad de encontrar por azar a alguien que piense votar al partido  $S$  (cualquiera sea su ciudad) es  $260/1530$ . Las escribimos simplemente  $P(Crdoba)$  y  $P(S)$  respectivamente. En las tablas singuientes están destacadas las frecuencias que participan en el cálculo de estas probabilidades.



Tabla 8.5: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal  $P(Crdoba)$ .

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	<b>**650**</b>
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	<b>**1530**</b>

Tabla 8.6: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal  $P(S)$ .

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	<b>**260**</b>	320	<b>**1530**</b>

### 8.3.1.2 Probabilidades conjuntas o de la intersección de eventos

Las usamos para hallar la probabilidad de ocurrencia simultánea de una categoría de cada variable. Por ejemplo ¿Cuál es la probabilidad de encontrar por azar a alguien que viva en Rosario años **y** que piense votar al partido R? La cantidad de individuos que cumplen **simultáneamente** las dos condiciones es de 150, por lo que la probabilidad se calcula como  $150/1530$ . Hemos destacado la conjunción “y”, junto al “simultáneamente” porque en este caso se piden dos condiciones juntas. Por eso estas son llamadas **probabilidades conjuntas**.

En teoría de conjuntos, corresponden a la intersección de dos conjuntos, que se indica con el signo  $\cap$ , por lo que el evento “vivir en Rosario” y al mismo tiempo “decir que se va a votar a R”, se escribe “ $Rosario \cap R$ ”.

Esa intersección puede verse gráficamente en el cruce de la fila con la columna correspondiente.

¿Qué sucede si aplicamos esta operación a dos eventos que corresponden a dos categorías de la misma variable?, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de encontrar a alguien que diga que votará a Q y a R? Esos eventos no pueden suceder juntos porque son incompatibles: solo uno de los dos puede suceder. La intersección entre ellos es imposible, por lo que la probabilidad es cero. Es el mismo caso de buscar a alguien que viva en Córdoba y también en Mendoza,

Tabla 8.7: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad conjunta  $P(Rosario \cap R)$ .

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	**150**	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	**1530**

es claro que no hay intersección entre estos conjuntos; dicho de otra forma, la intersección es el conjunto vacío. A estos eventos que no pueden suceder simultáneamente, los llamaremos mutuamente excluyentes. Como recordamos, esa es la condición que deben cumplir las categorías de cualquier variable.

Si dos eventos son mutuamente excluyentes entonces, su probabilidad conjunta es cero. En lenguaje de conjuntos:

$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ entonces } P(A \cap B) = 0$$

### 8.3.1.3 Probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes

Estas probabilidades sirven para analizar la ocurrencia de uno u otro de dos eventos, cuando éstos no pueden suceder simultáneamente. Por ejemplo: ¿qué probabilidad hay de encontrar a alguien que piense votar a Q o a R? Esto quiere decir “una cosa o la otra”, se trata de una disyunción, es decir, la unión de los dos eventos. En el lenguaje de la teoría de conjuntos la unión de dos conjuntos se indica con el símbolo  $\cup$ , por lo que decir “A o B” equivale a decir “ $A \cup B$ ”.

El total de quienes cumplen con la condición de votar a Q o a R (sin tener en cuenta la ciudad) es de 950 ( $350 + 600$ ), por lo que la probabilidad es de  $950/1530$ .

De modo equivalente, la probabilidad de seleccionar al azar a alguien que viva en Córdoba o en Rosario es de  $1030/1530$ , donde hemos sumado las dos primeras categorías (Córdoba y Rosario).

En estas probabilidades, admitimos que se cumpla cualquiera de las dos condiciones (Q o R en el primer caso, Córdoba o Rosario en el segundo). En los dos ejemplos se trata de eventos que no pueden suceder simultáneamente, por ser categorías de una de las variables, son mutuamente excluyentes, por lo que la probabilidad de su ocurrencia conjunta es cero. En estos casos, la probabilidad de la unión es simplemente la suma de las probabilidades de los dos eventos:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tabla 8.8: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad  $P(QoR)$  (eventos disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	**350**	**600**	260	320	**1530**

Tabla 8.9: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad  $P(CrdobaoRosario)$  (eventos disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	**650**
Rosario	100	150	60	70	**380**
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	**1530**

Aplicada a los ejemplos:

$$P(Q \cup R) = P(Q) + P(R)$$

$$P(Crdoba \cup Rosario) = P(Crdoba) + P(Rosario)$$

#### 8.3.1.4 Probabilidad de la unión de eventos no mutuamente excluyentes

Vamos ahora a incluir en la operación de unión de eventos, aquellos que no se excluyan mutuamente. Para el ejemplo con el que venimos trabajando, cambiamos las condiciones de esta unión de eventos: Ahora preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de hallar por azar a alguien que viva en Córdoba **o** que piense votar al partido T? Otra vez es una disyunción, por lo que admitimos cualquiera de los dos eventos: que viva en Córdoba (sin importar a quién piense votar) **o** que piense votar a T (cualquiera sea su ciudad). Si intentamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, deberíamos sumar las probabilidades:  $650/1530 + 320/1530$ , con solo observar la Tabla 8, vemos que los 50 individuos que cumplen las dos condiciones (viven en Córdoba y votarán a T), han sido contados dos veces: en los 650 y en los 320, por lo que deben descontarse del resultado haciendo  $650/1530 + 320/1530 - 50/1530$ .

¿Por qué sucedió esto?, porque los eventos cuya unión estamos considerando pueden ocurrir simultáneamente, tienen intersección y es esa intersección justamente la que aparece en el cálculo de las dos probabilidades que se suman. Esta última expresión tiene forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Y es la expresión más general para el cálculo de la probabilidad de la unión de conjuntos. Esta fórmula toma la forma simplificada que usamos antes  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  solo cuando A y B son disjuntos, es decir cuando se excluyen mutuamente como lo indica el tercer axioma.

Aplicada al ejemplo, el cálculo es:

$$P(Crdoba \cup T) = P(Crdoba) + P(T) - P(Crdoba \cap T) = \\ \frac{650}{1530} + \frac{320}{1530} - \frac{50}{1530} = \frac{920}{1530} = 0,60$$

Tabla 8.10: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad  $P(Crdoba \cap T)$  (eventos no disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	<b>**50**</b>	<b>**650**</b>
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	<b>**320**</b>	<b>**1530**</b>

Tabla 8.11: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional  $P(S/Crdoba)$ .

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	<b>**100**</b>	50	<b>**650**</b>
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

### 8.3.1.5 Probabilidad condicional

Este es el caso en que necesitamos calcular una probabilidad bajo una condición, que restringe el conjunto de resultado posibles. Se aplica cuando se cuenta con información adicional antes de calcular una probabilidad, por ejemplo que se sepa que la persona seleccionada al azar vive en Córdoba. ¿Cuál es la probabilidad que piense votar al partido S? El planteo es tal que preguntamos cuál es la probabilidad de votar a S si se sabe que vive en Córdoba. Vivir en Córdoba es la condición y se escribe:  $S/Crdoba$ , y lo leemos “S, dado que vive en Córdoba”.

En este caso, el dato “vive en Córdoba” es una restricción sobre el conjunto total, ya no debemos tener en cuenta a las 1530 personas del total, sino solo a los que cumplen con la condición de vivir en Córdoba. Entonces ahora, el nuevo total es de solo 650 personas, los que viven en Córdoba. De ellos, 100 piensan votar a S, por lo que la probabilidad que nos interesa es  $100/650$ .

Entonces:  $P(S/Crdoba) = \frac{100}{650} = 0,15$ .

Razonando del mismo modo, si se sabe que la persona elegida piensa votar a R, el total queda restringido a 600 casos (los que cumplen con esa condición). Si

Tabla 8.12: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional  $P(Mendoza/R)$ .

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	<b>**150**</b>	100	200	500
Total	350	<b>**600**</b>	260	320	1530

nos interesa la probabilidad que viva en Mendoza, bajo esa restricción resulta:  $150/600$ .

Entonces:  $P(Mendoza/R) = \frac{150}{600} = 0,25$

En estos dos últimos ejemplos, el cambio respecto de todos los anteriores es que el denominador de las probabilidades ya no es 1530 sino un número menor, que resulta de haber impuesto previamente una condición: que viva en Córdoba en el primer caso y que haya votado a R en el segundo. Como se ve, estas probabilidades condicionales no son conmutativas:

- Se selecciona una persona al azar entre quienes votarán a R, ¿Cuál es la probabilidad que viva en Mendoza? Se escribe  $P(Mendoza/R)$  y vale  $150/600$ .
- Se selecciona una persona al azar entre los que viven en Mendoza, ¿Cuál es la probabilidad que vaya a votar a R? Se escribe  $P(R/Mendoza)$  y vale  $150/500$ .

### 8.3.1.6 Relación entre probabilidades condicionales y conjuntas

Compararemos ahora la probabilidad de hallar alguien que vaya a votar a Q y que viva en Córdoba ( $P(Q \cap Crdoba)$ ) con la probabilidad que vaya a votarlo si se sabe que vive en Córdoba ( $P(Q/Crdoba)$ ).

$$P(Q \cap Crdoba) = \frac{200}{1503}$$

$$P(Q/Crdoba) = \frac{200}{650}$$

Si dividimos entre sí estas dos expresiones obtenemos:

$$\frac{P(Q \cap Crdoba)}{P(Q/Crdoba)} = \frac{\frac{200}{1503}}{\frac{200}{650}} = \frac{650}{1503}$$

El último cociente es la probabilidad marginal correspondiente a Córdoba, por lo que:

$$\frac{P(Q \cap Crdoba)}{P(Q/Crdoba)} = P(Crdoba)$$

Esta expresión, que es general, nos ofrece una relación muy útil entre las probabilidades condicional y conjunta. Una forma más frecuente de escribir esta relación, para dos eventos cualesquiera A y B es:

$$P(A \cap B) = P(B) * P(A/B)$$

Si escribimos la intersección en orden inverso<sup>1</sup>, tenemos:

$$P(B \cap A) = P(A) * P(B/A)$$

Como son iguales los primeros miembros de las dos expresiones anteriores, igualamos los segundos miembros, para obtener:

$$P(B) * P(A/B) = P(A) * P(B/A)$$

Esta igualdad relaciona las probabilidades condicionales en un orden o en el otro. Conociendo las probabilidades de A y B, esa igualdad nos permite pasar de  $P(A/B)$  a  $P(B/A)$ , veremos más adelante que se trata de un resultado muy valioso.

### 8.3.2 Con probabilidades a priori

Veamos el uso de estas operaciones con probabilidades usando ahora un experimento en el que asignamos probabilidades a priori. Sea una caja que contiene 4 fichas rojas y 3 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una roja en la primera extracción? Como  $\#Roja$  es 4 y  $\#\Omega$  es 7, la probabilidad vale 4/7. De mismo modo, la probabilidad de una azul es 3/7.

Hagamos ahora dos extracciones sucesivas de modo tal que no reponemos la primera ficha antes de sacar la segunda, este tipo de extracción se llama *sin reposición*. Saco la primera, veo su color y saco la segunda sin devolver la primera. ¿Cuál es la probabilidad que salga la segunda azul si la primera fue roja? En este

<sup>1</sup>La intersección de dos eventos es conmutativa:  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

caso, a la segunda extracción hay 3 azules sobre un total de 6 fichas (porque ya sacamos una), entonces  $\#Azul = 3$  y  $\#\Omega = 6$  y la probabilidad es  $P(A_2/R_1) = 3/6$  (ó  $1/2$ ).

Otro caso: ¿Cuál es la probabilidad que la segunda sea azul si la primera fue azul? Ahora quedan 2 azules, porque ya sacamos una, sobre un total de 6 fichas, por lo que la probabilidad es  $P(A_2/A_1) = 2/6$  (ó  $1/3$ ). Sucede entonces que la probabilidad de obtener una ficha azul a la segunda extracción *depende* de lo que haya resultado en la primera.

Otro problema: ¿cuál es la probabilidad de sacar dos rojas en dos extracciones sin reposición? Lo escribimos:  $P(R_1 R_2) = P(R_1 \cap R_2)$

Y aplicamos la relación que encontramos al final del apartado anterior:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) * P(R_2/R_1) = 4/7 * 3/6 = 2/7$$

Que es la probabilidad que salga roja la primera multiplicada por la probabilidad que salga roja la segunda condicionada a que ya haya salido roja la primera (es decir, con el espacio muestral restringido) .

Del mismo modo, la probabilidad de sacar dos azules es:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2/A_1) = 3/7 * 2/6 = 1/7$$

Nuevamente, es la probabilidad de azul la primera por la probabilidad de azul la segunda condicionada a que ya haya salido azul la primera.

Ahora preguntamos por la probabilidad de obtener una azul y una roja, en cualquier orden. Esto equivale a pedir azul la primera y roja la segunda o bien roja la primera y azul la segunda, por lo que:

$$\begin{aligned} P((A_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap A_2)) &= P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \\ &P(A_1) * P(R_2/A_1) + P(R_1) * P(A_2/R_1) \end{aligned}$$

Si cambiamos el experimento reponiendo ahora la primera ficha antes de extraer la segunda, llamamos al experimento *extracción con reposición*. De este modo se restaura el espacio muestral al estado inicial. Por esta razón, la probabilidad de la segunda extracción será la misma que la de la primera para cualquier evento. Por ejemplo,  $P(A_2/A_1)$  es  $3/7$ , como lo es también  $P(A_2/R_1)$ . Que la primera haya sido azul o roja no afecta la probabilidad de la segunda extracción, ya que se la repone: la segunda extracción no depende de la primera. En el caso de extracciones con reposición -en que la segunda extracción no se ve afectada por el resultado que haya dado la primera-, decimos que los eventos son **independientes** y resulta que, para dos eventos cualesquiera A y B:

$$P(A/B) = P(A)$$



Figura 8.1: Efectos de extraer una ficha sin reponerla o reponiéndola, en las condiciones que quedan para la segunda extracción.

Lo cual, dicho en lenguaje cotidiano nos indica que, para la ocurrencia del evento  $A$ , no importa que haya sucedido o no el evento  $B$ . Debido a esto, en nuestro ejemplo, la probabilidad de obtener dos rojas es:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) * P(R_2)$$

Este concepto de independencia entre eventos es muy valioso para analizar uno de nuestros más importantes problemas: las relaciones entre variables. Veamos su aplicación a la Tabla 2. Si la intención de voto fuera independiente de la ciudad donde se vive (quiere decir si votaran del mismo modo personas de las diferentes ciudades) la probabilidad de encontrar una persona que vote a R si vive en Córdoba sería simplemente la probabilidad de votar a R, es decir  $P(R/Crdoba) = P(R)$  y del mismo modo para los demás eventos. En nuestro ejemplo no se obtiene esa igualdad, ya que:

$$P(R/Crdoba) = 300/650 = 0,46, \text{ mientras que: } P(R) = 600/1530 = 0,39$$

Por lo que estos eventos no son independientes en sentido estadístico.

Cuando se trataron las relaciones entre variables, se discutió este problema, al calcular las frecuencias que se esperarían si las variables fueran independientes. Se concluyó que dos variables son independientes si la frecuencia relativa de cada celda resulta del producto de las frecuencias relativas marginales que le

corresponden. En el lenguaje de las probabilidades, encontramos ahora el mismo resultado y lo expresamos diciendo que si los eventos  $A$  y  $B$  son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

## 8.4 El teorema de Bayes

La aplicación que presentamos en este último apartado usa probabilidades condicionales para deducir la probabilidad que tiene un evento observado de provenir de diferentes eventos previos. Por esta razón se denomina también “teorema de las causas”<sup>2</sup>. Nos interesa porque es un resultado que permite “aprender de la experiencia”, lo que quiere decir que da los medios para usar la información disponible para modificar las probabilidades de determinados eventos. Tiene mucho valor en Ciencias de la Salud, porque es frecuente conocer cuál es la probabilidad a priori que un paciente tenga determinada patología (la prevalencia de la enfermedad) pero, una vez que se dispone de indicadores clínicos, esa probabilidad cambia. De manera equivalente, si se conoce cuál es la probabilidad que un alumno termine una carrera universitaria, esa probabilidad puede modificarse, una vez que se cuenta con información adicional, como el número de materias que ya ha aprobado.

De manera general, si  $B_1, B_2, \dots, B_k$  son eventos mutuamente excluyentes que completan el espacio muestral (es decir que la unión de todos esos eventos es  $\Omega$ ), y un evento  $A$  puede suceder en intersección con cualquiera de ellos (es decir que  $A$  puede suceder en intersección con  $B_1$ , o con  $B_2$ , etc.), lo esquematizaremos así:

Por ejemplo, los eventos  $B$  pueden ser los diferentes tipos de escuela secundaria de la que provienen los alumnos y el evento  $A$  es “terminar la carrera”. Hay quienes terminan la carrera (quienes están dentro de la elipse) y quienes no lo hacen (dentro del rectángulo pero fuera de la elipse), y tanto unos como otros pueden provenir de escuelas de cualquiera de los tipos  $B_1, B_2$  etc. La primera de las intersecciones (la grisada más oscura) representa a alumnos que cumplen simultáneamente  $A$  (haber terminado la carrera) y  $B_1$  (provenir de una escuela del tipo que ese grupo define).

Otro ejemplo es que los eventos  $B$  sean solo dos:

- $B_1$ : tener una determinada enfermedad
- $B_2$ : no tener esa enfermedad

Si el evento  $A$  es “una prueba diagnóstica dio positiva”, aparecen intersecciones entre el resultado de la prueba y la condición de las personas a quienes se aplica.

---

<sup>2</sup>Fue enunciado por Thomas Bayes (1702-1761), matemático inglés.



La primera es la zona dentro del círculo a la izquierda:  $(A \cap B_1)$ , son los casos correctamente diagnosticados. Los que quedan fuera del círculo a la izquierda representa casos en los que la prueba no indicó la enfermedad aun cuando se trataba de personas enfermas, se llaman “falsos negativos”. A la derecha, la pequeña parte de círculo es  $(A \cap B_2)$  e indica los casos en que la prueba dio positiva cuando fue aplicada a personas que no tenían la enfermedad, se llaman “falsos positivos”. Por último, la parte blanca del rectángulo a la derecha son los casos en que dio correctamente negativa en personas que no tenían la enfermedad.

Con esta notación y esa relación entre los eventos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  y  $A$ , el teorema de Bayes se expresa de la siguiente manera:

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j) * P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) * P(A/B_i)}$$

El valor de este teorema es que permite pasar de la probabilidad simple de uno de los eventos  $B$  (en general, del que llamamos  $B_j$ , a la probabilidad “corregida”, a partir de la información que aporta el evento  $A$ . Si se conoce inicialmente la probabilidad del evento  $B_j$ , el teorema permite calcular la probabilidad de  $B_j$ , luego de haber agregado la condición  $A$ .

Veamos un ejemplo sencillo: se dispone de dos frascos, el primero de ellos tiene 20 fichas azules y 10 rojas, el segundo contiene 20 azules y 20 rojas. Se elige un frasco al azar y luego se extrae de él una ficha, que resulta ser azul, nos preguntamos por la probabilidad que la ficha provenga del primer frasco. En ausencia de toda información, los dos frascos son igualmente probables, por lo que la probabilidad de cada uno es 0,50:  $P(F1) = 0,50$  y  $P(F2) = 0,50$ . Si la ficha fue extraída del primer frasco, la probabilidad de que sea azul es:  $P(A/F1) = 20/30 = 0,67$ , mientras que si proviene del segundo frasco es  $P(A/F2) = 20/40 = 0,50$ . La pregunta es por  $P(F1/A)$ , debemos invertir una probabilidad condicional, por lo que usaremos el teorema de Bayes:

$$P(F_1/A) = \frac{P(A/F_1) * P(F_1)}{P(A/F_1) * P(F_1) + P(A/F_2) * P(F_2)}$$

Reemplazando, tenemos:

$$P(F_1/A) = \frac{0,67 * 0,50}{0,67 * 0,50 + 0,50 * 0,50} = \frac{0,33}{0,58} = 0,57$$

Este resultado dice que, con el dato que la ficha extraída es azul, corregimos la probabilidad de provenir del primer frasco, que a priori era de 0,50; a 0,57. En este sentido la fórmula de Bayes nos permite usar la información para corregir probabilidades a priori.

En el ejemplo sobre la enfermedad y su diagnóstico, se dispone inicialmente de la probabilidad que tiene una persona cualquiera de padecer la enfermedad, esa es  $P(B_1)$ , luego esa probabilidad cambia cuando se agrega el dato que dice que a la persona la prueba le dio positiva.

Veamos un ejemplo que presentó Cohen (1994) en un artículo crítico hacia los procedimientos tradicionales de análisis estadístico. La aplicación ilustra el aporte del teorema a las interpretaciones de los resultados que arrojan las pruebas diagnósticas.

La prevalencia de esquizofrenia en adultos es de aproximadamente el 2%, que indica que aproximadamente 2 de cada 100 personas en la población general de adultos padece la enfermedad. Se dispone de un conjunto de pruebas diagnósticas del que se estima que tiene al menos un 95% de precisión al hacer diagnósticos positivos (sensibilidad) y aproximadamente 97% de precisión al declarar normalidad (especificidad).

Para expresar formalmente estos datos, tratamos por un lado, la situación real, la de ser esquizofrénico o no serlo. Llamamos  $E$  al evento “el paciente es esquizofrénico” y  $noE$  al evento “el paciente no es esquizofrénico”. Por lo que, elegida una persona al azar, y en ausencia de cualquier otra información, su probabilidad de ser esquizofrénico es  $P(E) = 0,02$ , la probabilidad que no lo sea es  $P(noE) = 0,98$ .

Por otro lado tenemos el resultado del conjunto de pruebas, que pueden dar positivas o negativas. La sensibilidad se escribe así:  $P(+/E) = 0,95$ , que quiere decir que, aplicada a sujetos esquizofrénicos, el 95% de las veces la prueba dará un resultado positivo, que conducirá al diagnóstico correcto de la enfermedad. El complemento de esa probabilidad, 5%, es la probabilidad de dar un resultado negativo ante un caso de alguien que sí es esquizofrénico, se denomina resultado “falso negativo” y solo puede identificarse ante pruebas posteriores más sensibles o por el desarrollo de otros síntomas, que dan más elementos para realizar el diagnóstico. Escribimos entonces que  $P(-/E) = 0,05$ .

Ante personas que no son esquizofrénicas, la prueba da, en el 97% de los casos resultado negativo (correctamente), es decir:  $P(-/noE) = 0,97$ . Su

complemento, del 3%, es la probabilidad de hallar un resultado positivo en alguien que no es esquizofrénico<sup>3</sup>, se denomina “falso positivo” y su probabilidad se escribe:  $P(+/noE) = 0,03$ .

Dado un sujeto cuyas pruebas dan un resultado positivo, nos preguntamos por la probabilidad que efectivamente sea esquizofrénico. Antes de conocer la respuesta al problema piénselo un momento por su cuenta y ofrezca un valor aproximado para esa probabilidad.

Este es un problema que requiere que se invierta una probabilidad condicional, ya que conocemos la probabilidad de obtener un resultado positivo si el individuo es esquizofrénico  $P(+/E)$ , y queremos saber la probabilidad que sea esquizofrénico dado que la prueba dio positiva, que es  $P(E/+)$ .

En la aplicación del teorema de Bayes, el universo está compuesto por un 98% de no esquizofrénicos y un 2% de esquizofrénicos y la prueba puede dar positiva tratándose de alguien enfermo (muy frecuentemente) o estando sano (con poca probabilidad). Reemplazamos en la expresión del teorema de Bayes y tenemos:

$$P(E/+) = \frac{P(+/E) * P(E)}{P(+/E) * P(E) + P(+/noE) * P(noE)} =$$

$$\frac{0,95 * 0,02}{0,95 * 0,02 + 0,03 * 0,98} = \frac{0,019}{0,019 + 0,029} = 0,396$$

Entonces, si a una persona estas pruebas le han dado resultado positivo, la probabilidad que efectivamente sea esquizofrénico es menos del 40%, que es mucho mayor que la prevalencia en la población general, del 2%, pero que no resulta concluyente para el diagnóstico, el cual debe completarse con otros procedimientos. Es posible que este resultado no esté cerca de la estimación intuitiva que uno haría y nos pone muy en alerta sobre la interpretación de pruebas de este tipo. El razonamiento intuitivo quizás nos habría llevado a creer que alguien a quien la prueba da positiva tiene muchas posibilidades de tener la enfermedad, pero no debemos confundir la probabilidad que la prueba da positiva si se tiene la enfermedad ( $P(+/E)$ ) con la probabilidad de tener la enfermedad si la prueba da positiva ( $P(E/+)$ ). Si una persona es esquizofrénica, la prueba le da positiva en el 95% de las veces; pero si da positiva, la probabilidad que sea esquizofrénica es menor al 40%.

Este resultado no debe conducir a creer que la prueba no sirva para el diagnóstico. Por el contrario, ante una persona de la que no se tiene ninguna información, la probabilidad que sea esquizofrénico es 0,02; cuando se agrega el dato que dice que el test dio positivo, la probabilidad que sea esquizofrénico asciende a 0,39. Nuevamente, se ve con claridad cómo este teorema permite usar los resultados de la experiencia para corregir probabilidades asignadas a priori.

---

<sup>3</sup>Nuevamente en este caso, esto puede conocerse a posteriori, luego de otras pruebas o del seguimiento del sujeto.

En este ejemplo, la probabilidad de ser esquizofrénico para alguien que obtuvo resultado positivo en las pruebas es tan baja debido a la baja frecuencia de la esquizofrenia en la población general (prevalencia), pero demuestra lo equivocado que puede estar si no se tienen en cuenta resultados falso positivo y falso negativo asociados a las pruebas diagnósticas.

Un abordaje alternativo a este problema es usando una tabla de contingencia. Suponiendo que aplicamos el conjunto de pruebas a un universo de un millón de personas y usando las probabilidades enunciadas antes:

Condición	Resultado de las pruebas		Total
	Positivo	Negativo	
Esquizofrénicos	19000	1000	20000
No esquizofrénicos	29400	950600	980000
Total	48400	951600	1000000

Queremos responder ¿cuál es la probabilidad que el sujeto sea esquizofrénico, si sabemos que la prueba le dio positiva? Para ello:

$$P(E/+) = \frac{19.000}{48.400} = 0,39$$

Que es el mismo resultado que obtuvimos aplicando el teorema de Bayes.

La ventaja de la presentación a través de una tabla de doble entrada es que permite distinguir dos conjuntos de eventos sobre los que tenemos diferente conocimiento:

- Un *estado de realidad*, que es la condición de esquizofrénico o no esquizofrénico del sujeto. Este estado nos es desconocido.
- La *evidencia observable*, que está dada por el resultado de la prueba que aplicamos, que conocemos.

Como las pruebas no son perfectas, los resultados deben leerse en términos probabilísticos y no determinísticos.

Cuando ingresemos a inferencia estadística veremos que ésta es la situación más frecuente: que dispongamos de cierta evidencia y debemos usarla para tomar una decisión acerca de un estado de realidad al que no conocemos.

El de Bayes es un teorema de gran importancia, por las consecuencias que tiene para muchas pruebas diagnósticas que se usan a menudo. Lo que hemos encontrado también implica el cuidado con que deben leerse los resultados de pruebas de cualquier tipo: diagnósticos, dosaje de productos prohibidos en deportistas, pruebas genéticas, etc. Para una correcta interpretación de los resultados de esas pruebas se deben conocer cuáles son los errores de tipo “falso positivo” y “falso negativo” que las acompañan.

## 8.5 Variables aleatorias

Es necesario hacer más explícita una parte del vocabulario que hemos usado. Al tratar con eventos aleatorios (resultados de experimentos aleatorios), en algunos hemos usado una notación más textual, como “que la moneda salga cara” y en otros una más numérica, por ejemplo “ $S = 4$ ”. De aquí en adelante trabajaremos con la segunda notación que tiene muchas ventajas. La razón es que pasamos a tratar a los experimentos como observación de variables, cuyas categorías (o valores) son los resultados del experimento. En la tirada de la moneda, no es difícil cuantificar los eventos, podemos elegir cara como lado preferido y definir la variable  $X =$  “número de caras que se obtienen al lanzar una moneda equilibrada”, los valores posibles son 0 (si sale cruz) y 1 (si sale cara). En la suma de los puntos de los dos dados,  $S$  asume valores discretos del 2 al 12. La descripción como distribución de frecuencias que hacíamos antes, se transforma ahora en distribución de probabilidades y, para los dos ejemplos citados, toma la forma:

$X =$ número de caras	$P(X)$
0	$1/2$
1	$1/2$
Total	1

$S =$ suma de puntos de dos dados	$P(S)$
2	0.028
3	0.056
4	0.083
5	0.111
6	0.139
7	0.167
8	0.139
9	0.111
10	0.083
11	0.056
12	0.028
Total	1.000

Estas variables se denominan **variables aleatorias**, porque sus valores dependen del azar y serán muy necesarias en todo lo que sigue de la materia. El aspecto de estas tablas de distribución de probabilidades es en un todo equivalente al de las de distribución de frecuencias: el total igual a uno indica



la probabilidad del espacio muestral ( $P(\Omega) = 1$ ). Sobre ellas pueden hacerse operaciones similares a las descripciones de variables ya vistas.

Cuando la variable aleatoria puede asumir valores continuos, ya no es posible asignar probabilidades individualmente y debe hacerse a través de intervalos. Es el mismo problema que hallamos en las distribuciones de frecuencia, y lo resolvemos del mismo modo. Se usan probabilidades acumuladas, ya sea entre valores de la variable o desde ciertos valores hacia los mayores o desde ciertos valores hacia los menores<sup>4</sup>.

También es posible, sobre distribuciones de probabilidad, calcular algunas medidas descriptivas, veamos en qué se transforma la media. El procedimiento para calcularla que hemos visto consiste en multiplicar cada valor de la variable por su frecuencia y dividir por el total de casos; para las variables aleatorias eso se hace de una sola vez, multiplicando cada valor por la probabilidad y se obtiene:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * P(x_i)$$

Que se llama **esperanza matemática**, la indicaremos  $E(x)$ . Aunque esta expresión proviene del cálculo de la media<sup>5</sup>, tiene una diferencia conceptual importante: la media es una medida resumen, por lo que describe hechos que han sido observados, puede decirse que hace referencia a algo que ya sucedió. Por el contrario la esperanza se refiere a eventos que pueden llegar a suceder, por eso tiene ese nombre, es la expectativa que tenemos sobre el devenir futuro de un experimento. Uno de los usos más difundidos de este concepto es la esperanza de vida, que mide el número promedio de años que viviría un conjunto de personas si a lo largo de toda su vida se mantuvieran las mismas tasas de mortalidad que en la actualidad (las tasas de mortalidad se usan para estimar las probabilidades de morir a cada edad). Un “promedio a futuro” es una descripción sobre algo que aún no sucedió, por eso se llama esperanza.

De manera análoga puede calcularse la varianza de una variable aleatoria, su fórmula es:

---

<sup>4</sup>Sin embargo hay algo importante que cambia; porque en lugar de sumar un número finito de valores discretos, cuando se trata de variables continuas se debe sumar una cantidad infinita de valores infinitesimales, ese cambio se refleja en que la operación de suma se transforma en otra operación que se llama integral. No disponemos de los elementos matemáticos suficientes para ir más allá de esta mención imprecisa del concepto, pero tampoco es necesario a los fines de este curso.

<sup>5</sup>Puede deducirse esto a partir del cálculo de la media, si se reemplazan las frecuencias relativas por las probabilidades de cada valor de la variable, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i * \frac{f_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i * f'_i = \sum_{i=1}^n x_i * P(x_i) = E(x)$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 * P(x_i)$$

Al referirse a una variable aleatoria, la interpretación de la varianza difiere levemente de aquella que se usó como medida descriptiva de la dispersión. Aquí indica el modo en que se alcanzará el valor de la esperanza. Una varianza grande indica un proceso aleatorio muy variable, con valores dispares que convergen lentamente al valor de la esperanza. Por el contrario, un valor pequeño de la varianza indica un proceso más estable en el que los valores difieren poco de un paso al siguiente y rápidamente se aproximan a la esperanza.

Un ejemplo común que ilustra el uso de estas medidas es el juego de la ruleta. En este juego, por cada ficha que se apuesta a un color se obtiene una de premio si sale ese color y, por cada ficha que se apuesta a un solo número, se obtienen 35 como premio. En ambos tipos de apuesta, la ganancia esperada<sup>6</sup> vale -0,027. Esto significa que, jugando indefinidamente, se espera perder (porque es negativa) 0,027 pesos por cada peso que se apueste; esa es la ganancia esperada del organizador del juego.

Sin embargo, las varianzas son diferentes; para las apuestas a color, vale poco menos de 1 y para la apuesta a número único es más de 34. Esto describe la dinámica del juego; mientras con la primera modalidad se gana y se pierde a menudo, con la segunda forma de apostar, se pierde muchas veces y cuando se gana es grande la recompensa. De todos modos en ambos tipos de apuesta, el balance entre ganancias y pérdidas es negativo, como lo indica la esperanza.

---

<sup>6</sup>Para el caso de ruletas con un solo cero, existen algunas que tienen además del cero el doble cero, en esos casos la esperanza de pérdida es mayor.

## Capítulo 9

# Probabilidad: los modelos

### 9.1 Concepto de modelización

La asignación a priori de probabilidades, presentada con los ejemplos elementales de la moneda o el dado es parte de una forma muy general de tratar con los fenómenos que dependen del azar. El supuesto inicial de probabilidad  $1/2$  a cada lado, constituye un *modelo de probabilidad*, es una anticipación acerca de lo que se espera que suceda. No es arbitrario, ya que deben tenerse razones para suponer que el modelo se sostiene, pero en todos los casos es una aproximación a lo que sucede en la realidad. Tratamos de modelar (o modelizar) lo que observamos a fin de simplificarlo, pero un modelo puede ser más o menos adecuado a la realidad, por eso dijimos que cabe la posibilidad que “el modelo no se sostenga”. La idea de simplificar está aquí utilizada en el sentido de elegir algunos aspectos de la realidad para construir un modelo que luego se usa para asignar probabilidades a los diferentes resultados posibles. La riqueza y complejidad de los fenómenos sociales no se menoscaba porque se usen modelos, salvo si se comete el error de confundir el modelo con la realidad. Disponer de un modelo de probabilidad permite calcular probabilidades de manera sencilla bajo ciertos supuestos, que deben explicitarse.

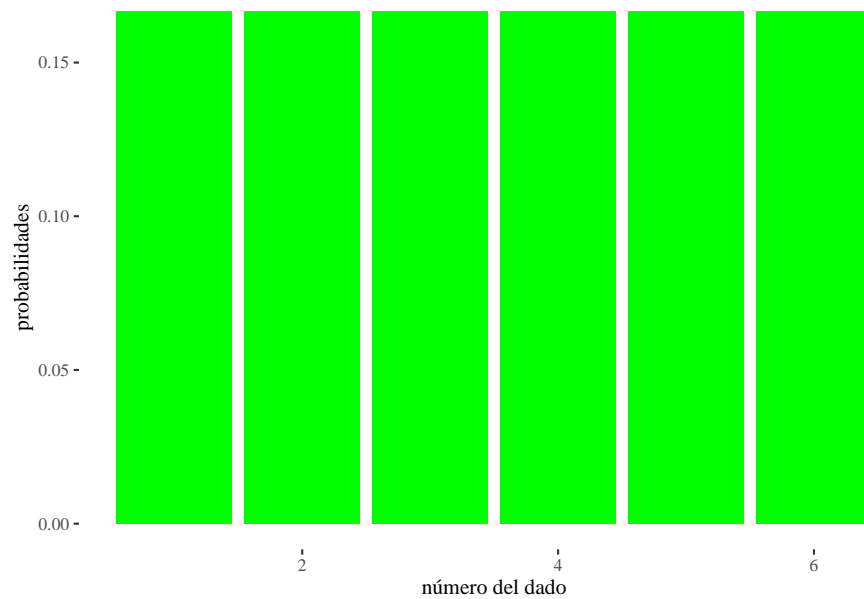
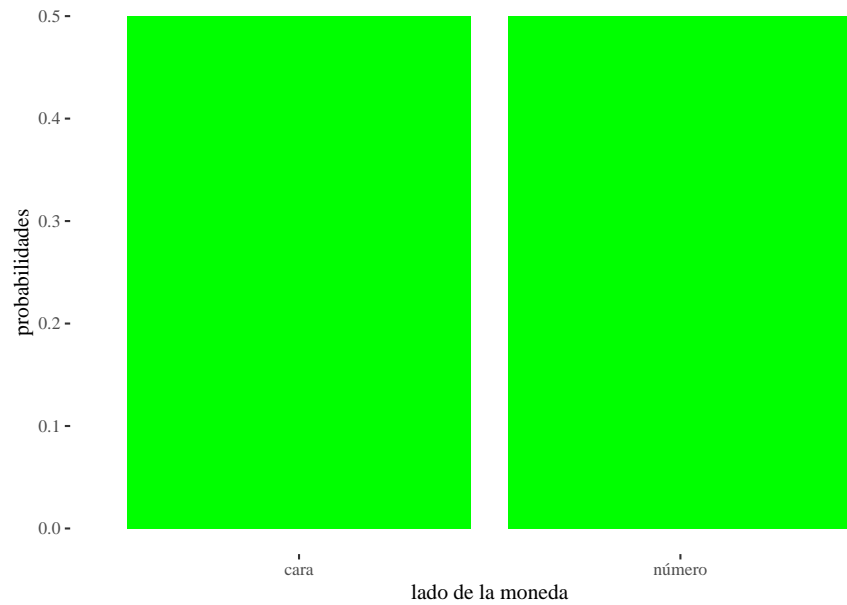
Para seguir con nuestra moneda, digamos que el modelo que resume el supuesto de iguales chances para todos los resultados, se llama *distribución uniforme*, es válido también para un dado, si está equilibrado, o para cualquier fenómeno aleatorio en el que se pueda suponer que los resultados son igualmente probables. La expresión formal de ese modelo es la siguiente:

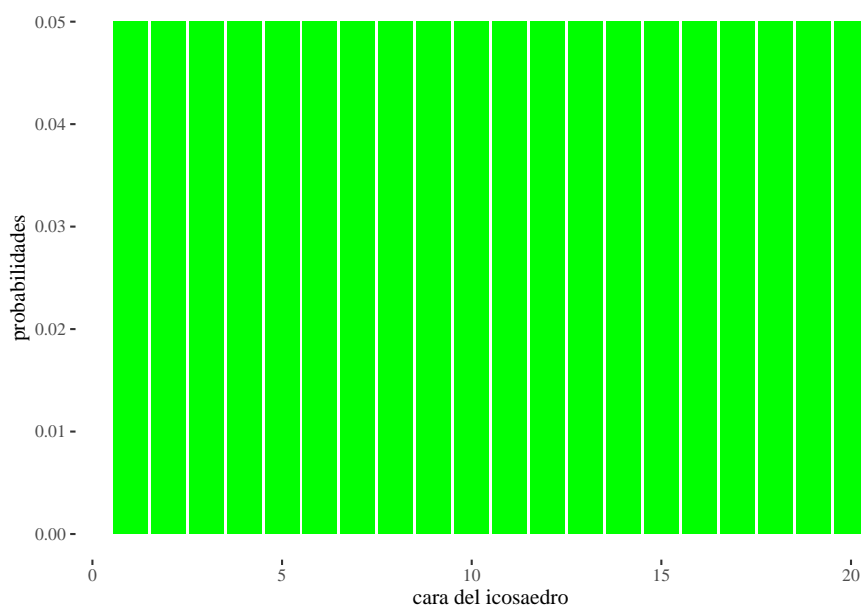
“Si un experimento aleatorio tiene distribución uniforme y  $k$  resultados posibles, entonces  $P(A_i) = \frac{1}{k}$ , donde  $A_i$  es uno cualquiera de los  $k$  resultados”

Por lo tanto si se trata de una moneda (2 caras) la probabilidad de cualesquiera de sus caras será  $1/2$ , si es un dado, cada lado tiene probabilidad  $1/6$ , y si es

un icosaedro regular (veinte caras iguales, parecido a un globo de espejos) cada cara tendrá probabilidad  $1/20$  de salir.

La representación gráfica de este modelo, es para cada uno de los ejemplos, la siguiente:





En estos gráficos, la idea de uniformidad (para todos los eventos la misma probabilidad) se transmite en la igual altura de todas las columnas.

Además de este modelo uniforme, en este capítulo presentaremos cinco modelos de probabilidad que serán necesarios para lo que sigue de nuestros contenidos; el primero para variables discretas y los demás para continuas. Hay una gran cantidad de modelos que permiten asignar probabilidades a priori a diferentes fenómenos observables. El tratamiento que haremos a continuación será de carácter utilitario, es decir estará centrado en el uso que podemos hacer de cada distribución teórica. Haremos las referencias matemáticas mínimas que sean necesarias para comprender las propiedades y condiciones de aplicación de los modelos.

## 9.2 Distribución binomial

Esta distribución se usa para modelar fenómenos aleatorios que pueden dar solo dos resultados, a los que se llama “éxito” y “fracaso”. La elección de cuál es éxito es arbitraria y corresponde a la categoría que el investigador toma como de interés. La variable aleatoria que se considera es el número de veces que se obtienen éxitos, o simplemente el número de éxitos que resultan luego de una cierta cantidad de repeticiones de la experiencia. La condición para que este modelo sea válido es que cada repetición sea independiente de las anteriores, es decir, que cada realización del experimento no incida sobre la siguiente.

Nuevamente con la moneda equilibrada que hemos tratado, este modelo va a

facilitar el cálculo de, por ejemplo, qué probabilidad hay de obtener 3 caras en 4 tiradas de la moneda. Resolvamos primero el problema de manera manual. En la tabla siguiente mostramos los resultados posibles de ese experimento (lanzar cuatro veces una moneda equilibrada) y el valor que corresponde a la variable aleatoria “número de caras”, a la que llamaremos  $x$ <sup>1</sup>.

Resultado del experimento	Valor de la variable “número de caras” $x$
XXXX	0
XXXC	1
XXCX	1
XXCC	2
XCXX	1
XCXC	2
XCCX	2
XCCC	3
CXXX	1
CXXC	2
CXCX	2
CXCC	3
CCXX	2
CCXC	3
CCCX	3
CCCC	4

Como estos 16 resultados son igualmente probables, le corresponde una probabilidad de  $1/16$  (0,0625) a cada uno, por lo que podemos calcular las probabilidades de cada valor sumando los que corresponden a las formas en que pueden lograrse. Por ejemplo, tres caras ( $x=3$ ) puede ser consecuencia de cualquiera de los eventos XCCC, CXCC, CCXC, CCCX, por lo que hay cuatro eventos a su favor y su probabilidad es  $4/16$ . Resumiendo entonces la tabla anterior, tenemos:

$x$	$P(x)$
0	$1/16$ (0,0625)
1	$4/16$ (0,25)
2	$6/16$ (0,375)
3	$4/16$ (0,25)
4	$1/16$ (0,0625)
Total	1

<sup>1</sup>Con lo que hemos elegido tomar como éxito el resultado *cara*

Como esperábamos, “lo más probable” es obtener dos caras, porque se espera que la moneda caiga cara la mitad de las veces, ahora sabemos también cuán probable es que caiga una cantidad diferente de veces cara. La respuesta a la pregunta que formulamos arriba es 0,25 y lo expresamos simplemente:

$$P(x = 3) = 0,25$$

Para construir la tabla y responder a la pregunta hemos usado como información:

- la cantidad de repeticiones del experimento ( $n = 4$ )
- la probabilidad del evento cada vez que se lo repite ( $p = 0,5$ )
- el número de veces cuya probabilidad calculamos (el número de éxitos) ( $x = 3$ )

Esta información es suficiente para aplicar el modelo binomial, que se va a escribir formalmente como

$$B(n, p, x)$$

. En la que la  $B$  es por binomial,  $n$  es el número de repeticiones,  $p$  es la probabilidad de éxito a cada repetición y  $x$  el número de éxitos cuya probabilidad se calcula.

Cuando se trata de variables discretas como en este ejemplo, los modelos admiten el cálculo de la probabilidad:

- de un valor particular de la variable, es decir un determinado número de éxitos:  $P(X = x)$

O bien

- de un conjunto de valores por debajo de un valor dado, es decir, la probabilidad acumulada:  $P(X \leq x)$

Si se requiere la probabilidad de los valores mayores a uno dado  $P(X > x)$ , se complementa (se resta de 1) la probabilidad acumulada.

Cuando se trata de variables continuas, las probabilidades exactas son cero, por lo que solo pueden calcularse la acumuladas:  $P(X \leq x)$  y su complemento a uno:  $P(X > x)$

Resulta claro que la realización manual de estas operaciones es larga y engorrosa, sobre todo en situaciones reales donde hay más observaciones que en la moneda. Por ejemplo, un examen consiste de 20 preguntas de opción múltiple con cinco opciones de respuesta cada una, una sola de las cuales es correcta. Para aprobar

el examen es necesario contestar bien al menos 12 de ellas (el 60%). Se pregunta: ¿Qué probabilidad tiene un estudiante de aprobar solo por azar? Es decir si responde a cada pregunta por sorteo. Es un problema de distribución binomial: hay 20 repeticiones (una por cada pregunta) de un experimento que tiene 0.20 ( $1/5$ ) de probabilidad de éxito. Para aprobar se necesitan al menos 12 éxitos. La resolución manual de este problema requiere considerar que para aprobar los éxitos pueden ser 12, 13, 14, etc. Y que cada cantidad de éxitos puede lograrse de varias formas. Doce aciertos pueden provenir de las doce primeras preguntas, o de las diez primeras y las dos últimas, o muchas otras combinaciones posibles.

Si bien existen fórmulas para simplificar estas operaciones, usaremos directamente el software para calcular la probabilidad bajo modelos dados, a condición que el modelo se adapte al problema y que se cumplan sus supuestos. En este caso, la expresión, para exactamente 12 éxitos es

$$B(20, .20, 12)$$

Pero para aprobar, 12 es el número mínimo de aciertos que se requieren, por lo que hará falta la probabilidad de 12 y de todos los valores siguientes, hasta 20.

En R disponemos de las rutinas para calcular probabilidades simples y acumuladas bajo diferentes modelos. Para la binomial, el comando `dbinom`, tiene como argumentos: el número de éxitos cuya probabilidad se solicita ( $x$ ), el número de repeticiones ( $n$ ) y la probabilidad de éxito a cada repetición ( $p$ ). La probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda equilibrada ( $p = 0.5$ ), dos veces es:

```
## [1] 0.5
```

Y la probabilidad de tres caras en cuatro lanzamientos de una moneda equilibrada ( $P(X = 3)$ ) es:

```
## [1] 0.25
```

El la que hemos pedido un redondeo a dos decimales.

Para pedir la probabilidad acumulada, como por ejemplo la de obtener tres caras o menos ( $P(X \leq 3)$ ) en cuatro lanzamientos, el comando es `pbinom`, con los mismos argumentos:

```
## [1] 0.9375
```

La respuesta al problema del examen se resuelve en dos pasos, porque para aprobar hacen falta 12 aciertos *o más*. Entonces, primero calculamos la probabilidad acumulada de 11 ( $P(X \leq 11)$ ), que es la probabilidad de no aprobar (obtener 11 aciertos o menos):



```
## [1] 0.9999
```

Y luego complementamos el resultado para obtener la probabilidad de superar los 11 aciertos

$$10 \times 10^{-5}.$$

$$P(X > 11) = 10 \times 10^{-5}.$$

Otro ejemplo es aquel en el que se elige una muestra aleatoria de 15 estudiantes de primer año de la carrera de Biología para un experimento. Si se sabe que la proporción de mujeres de primer año de esa carrera es del 70%, ¿Cuál es la probabilidad que en la muestra resulten todas mujeres?. Cada persona que se selecciona aleatoriamente es una repetición, en la que la probabilidad que esa persona sea mujer es 0.70, y se pregunta por la probabilidad de hallar 15 éxitos. El resultado es:

```
## [1] 0.004747562
```

Y el resultado se expresa así:

$$P(X = 15) = B(15, 15, .7) = 0.0047$$

Al final del capítulo veremos cómo pedir estas probabiidades a R.

### 9.2.1 Esperanza y varianza

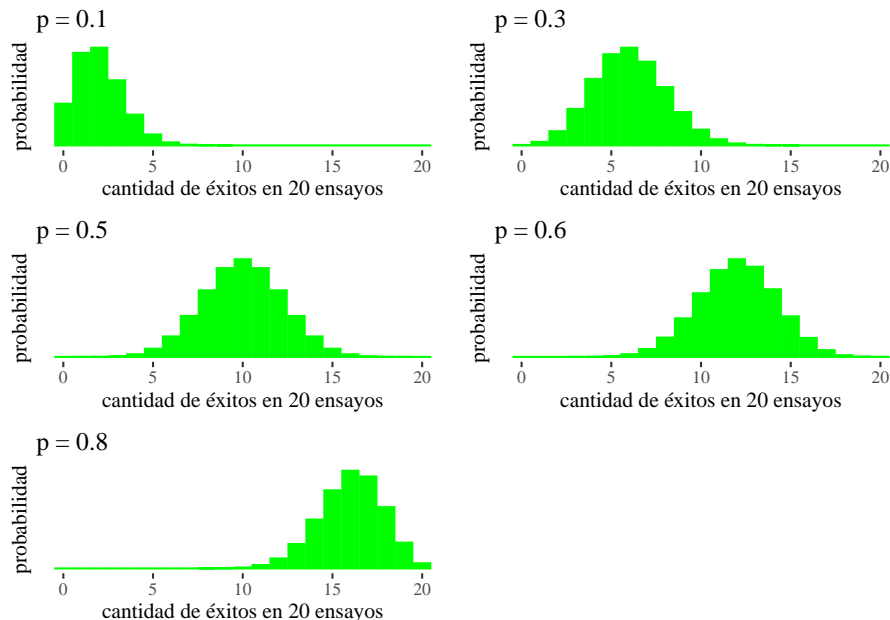
En este modelo de probabilidad, la esperanza es  $n * p$ , que representa el número esperado de casos favorables a obtener en  $n$  repeticiones. En el primer ejemplo, la esperanza es  $4 * 0,50 = 2$ , que quiere decir que en 4 tiradas de la moneda equilibrada, esperaríamos obtener 2 caras, como sabemos, esto es lo que sucede luego de un gran número de repeticiones del experimento. En el ejemplo de la selección de estudiantes, la esperanza es  $0,70 * 15 = 10,5$ , aunque este número decimal no es una cantidad posible de casos favorables (mujeres) a obtener en la muestra, es el promedio a futuro, luego de la realización reiterada de este experimento muchas veces. Es decir que esi el experimento de muestrear 15 estudiantes se repitiera muchas veces, en promedio se encontrarían entre 10 y 11 mujeres en cada muestra.

En el ejemplo del examen, la esperanza  $20 * .20 = 4$  indica que el número medio de aciertos que se espera lograr por puro azar es de 4.

La varianza de la distribución binomial es  $n * p * (1 - p)$ , que es una medida de la variabilidad del proceso. Más adelante volveremos sobre este tema.

El gráfico de esta distribución se construye calculando las probabilidades de los diferentes valores de  $x$ , que puede ir desde 0 hasta el número total de

repeticiones del experimento. El siguiente es el correspondiente a 20 repeticiones con diferentes valores de  $p$ :



Observemos la forma en que aparece representada la diferencia entre las varianzas de las distribuciones, la máxima ocurre con  $p = 0.50$ <sup>2</sup>.

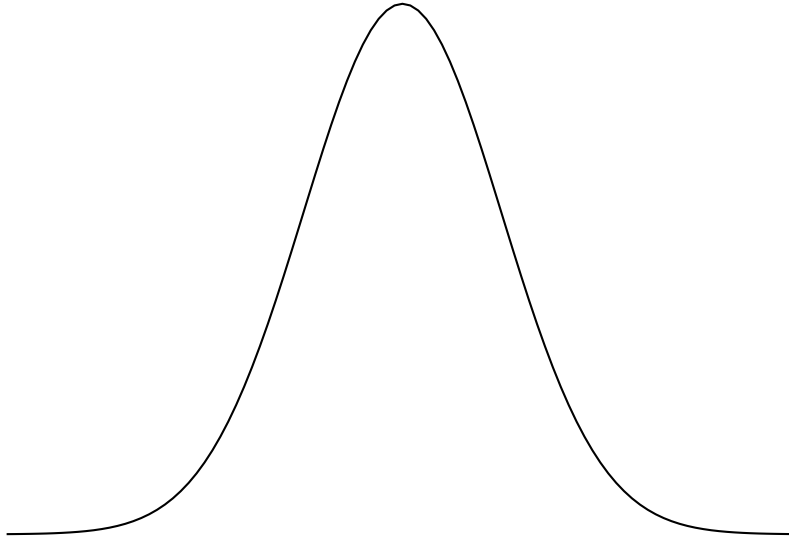
### 9.3 Distribución normal

La mayoría de los fenómenos naturales, sociales, psicológicos no tienen distribución uniforme, es decir, no es igualmente probable que resulte cualquiera de los resultados. Por ejemplo, para una determinada población, el peso de los niños al nacer tiene un valor promedio y cuando un niño nace se espera que tenga un peso cercano a ese valor medio. No es igualmente probable que un niño nazca con que con 5800. Son menos frecuentes los niños que nacen con pesos muy por encima o muy por debajo del promedio. De modo similar sucede con medidas psicológicas como el Cociente intelectual (CI); se hallan con mayor frecuencia valores cercanos al promedio y la probabilidad de encontrar personas muy por encima o muy por debajo de ese promedio es menor. Para este tipo de fenómeno, hay un modelo que suele ajustar bien las probabilidades, se llama distribución normal<sup>3</sup> y su representación gráfica, una curva unimodal,

<sup>2</sup>Para explicar la diferencia, considere los coeficientes de variación de las dos distribuciones.

<sup>3</sup>El nombre “normal” de este modelo no hace referencia al sentido coloquial del término, como juico acerca de la salud o el comportamiento humano, sino a un modelo de distribución en el que es más frecuente hallar valores cercanos al promedio y resultan igualmente infrecuentes

simétrica, de forma acampanada es llamada “campana de Gauss”<sup>4</sup> en referencia a Johann Carl Friedrich Gauss<sup>5</sup>.



Un primer elemento a tener en cuenta es que, a diferencia de los gráficos anteriores, ahora se trata de una curva con trazado continuo. Esto se debe a que esta distribución es adecuada para modelar variables continuas. Recordemos que cuando se construyeron las distribuciones de frecuencia, resultaba imposible enumerar todas las categorías de una variable de este tipo, ya que son infinitas. Dijimos en ese momento que no es posible indicar la frecuencia de un valor único de una variable continua. Lo mismo vale ahora para las probabilidades: no calculamos probabilidades para valores simples de variables continuas, sí calculamos probabilidades acumuladas y, como sucedía con las frecuencias acumuladas, éstas están representadas gráficamente en el área bajo la curva, pero en lugar de sumar las frecuencias de valores discretos, se realiza una operación que se llama integración<sup>6</sup>.

---

valores extremos mayores o menores.

<sup>4</sup>Este modelo tiene una expresión matemática más compleja que la primera que vimos, solo a título ilustrativo la mencionamos:

$$P(z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

jamás la usaremos para calcular probabilidades.

<sup>5</sup>1777-1855, matemático, astrónomo y físico alemán. El primero en expresar la función y calcular áreas fue Abraham De Moivre matemático francés que trabajó en Inglaterra junto a Newton y Halley (Tankard, 1984).

<sup>6</sup>El símbolo de esta operación es  $\int$ , una  $S$  estilizada, que indica su origen en una suma.

Dado que la curva que describe la distribución normal es unimodal y simétrica; el modo, la media y la mediana coinciden, el coeficiente de asimetría es cero ( $g_1 = 0$ ) y la distribución es mesocúrtica ( $g_2 = 0$ ).

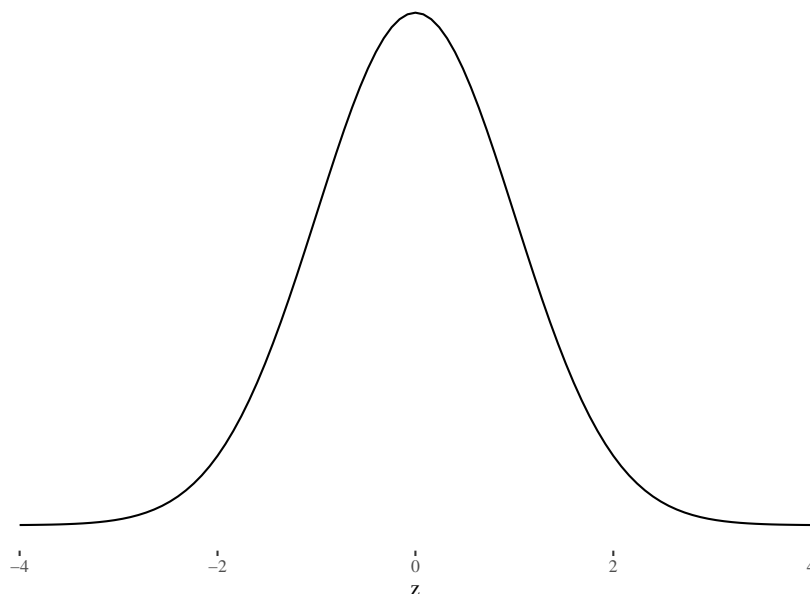
El cálculo de las probabilidades bajo el modelo normal -o, lo que es lo mismo, de las áreas bajo la curva-, es muy complejo, por lo que se encuentra tabulado, es decir, precalculado para algunos valores de la variable. ¿De qué variable?, hemos mencionado el peso al nacer, el IQ, ¿con qué método calcularemos probabilidades para fenómenos tan disímiles? Antes que se difundiera el uso de la computadora personal, se usaban tablas, ahora usamos cualquier hoja de cálculo, donde se indica la probabilidad acumulada para diferentes valores de una variable abstracta, sin unidades, adaptable a una diversidad de fenómenos. Se trata de la variable  $z$ , que ya fue definida y que mide el número de desviaciones estándar -contadas desde la media-, a las que se encuentra un caso individual. Una de las aplicaciones prácticas de esta variable es que permite comparar variables que miden cualidades muy diferentes. Sabemos ya que la cantidad de desviaciones estándar ( $z$ ) es una medida de lo cerca o lejos que un caso se encuentra del promedio. Si la variable en estudio es adecuadamente modelada con la distribución normal, entonces podremos conocer la probabilidad de hallar casos, por ejemplo a *más de dos desviaciones estándar de la media* y eso tendrá una inmediata traducción a valores de la variable.

Recordemos que la variable  $z$  está definida, para un valor particular de  $x$  como:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Y que tiene media igual a cero y desviación estándar igual a uno. Si  $x$  tiene una distribución normal con una media  $\bar{x}$  y una desviación estándar  $s$ , entonces  $z$  tiene distribución que se llama **normal estándar**.

Su gráfico está centrado en cero:

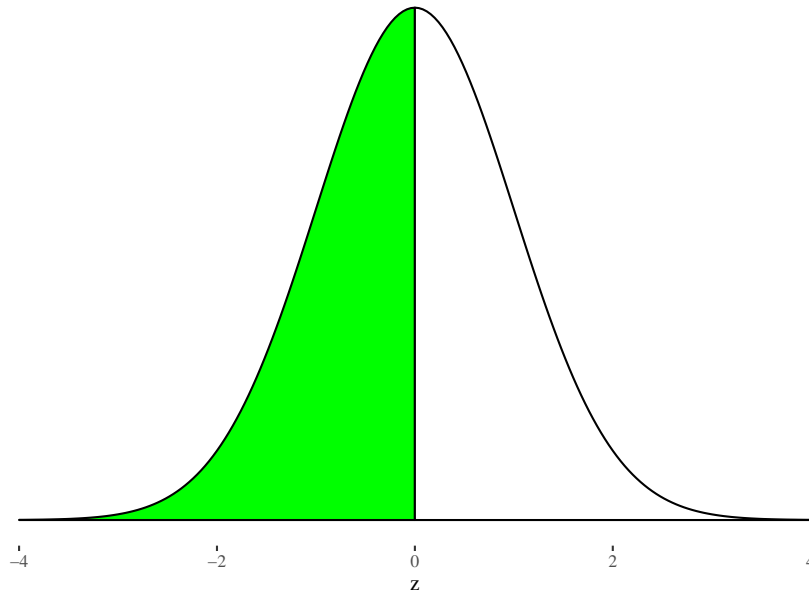


Cualquier hoja de cálculo (como OpenOfficeCalc o Excel) calcula las probabilidades (o áreas) bajo la curva normal. En R es muy directo, porque del mismo modo en que dispusimos de una función para la binomial acumulada (`pbinom`), tenemos ahora el comando `pnorm` para obtener probabilidades acumuladas ( $P(Z \leq z)$ ) bajo un modelo de distribución normal estándar. Y, al igual que con cualquier otra distribución, el valor de  $P(Z > z)$  se logra restando de 1, que es el área completa bajo la curva. Por ejemplo, el área acumulada por debajo de  $z = 0$  es la mitad de la campana,  $P(Z \leq 0) = 0.5$ , por lo que  $P(Z > z) = 0.5$ .

Si lo pedimos a R, el resultado es:

```
## [1] 0.5
```

Cuyo gráfico es:

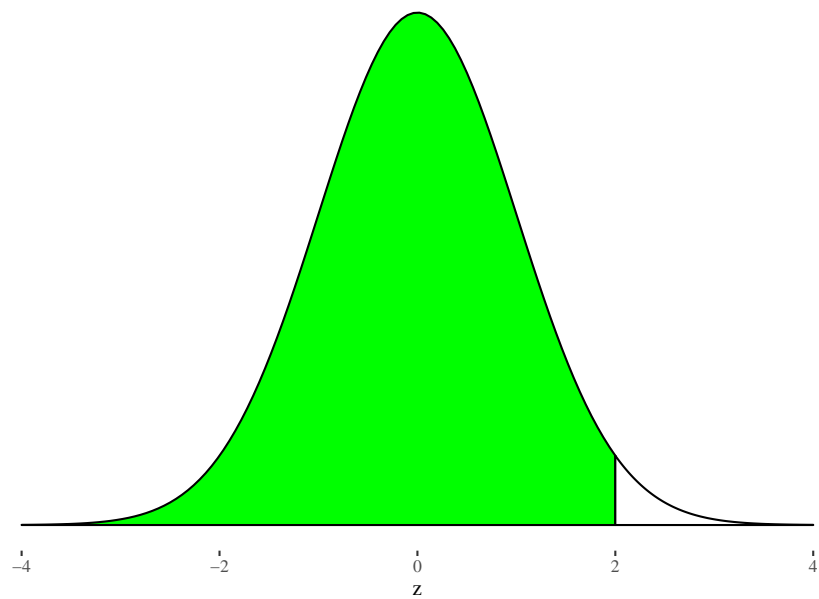


El área sombreada vale 0.50.

Para el área por debajo de  $z = 2$ , redondeado a cuatro decimales:

```
## [1] 0.9772
```

Y su representación:



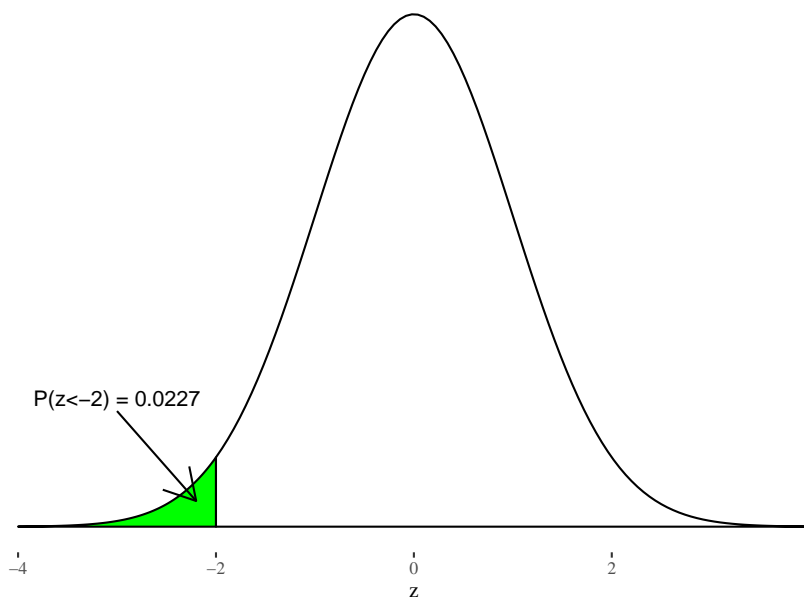
Queda delimitada por debajo de  $z = 2$  un área de 0.9772.  $P(z \leq 2) = 0.9772$ .

Si solicitamos las probabilidades acumuladas por debajo de diferentes valores de  $z$ , empezando con los negativos, pasando por el cero y siguiendo por los positivos, obtenemos lo siguiente:

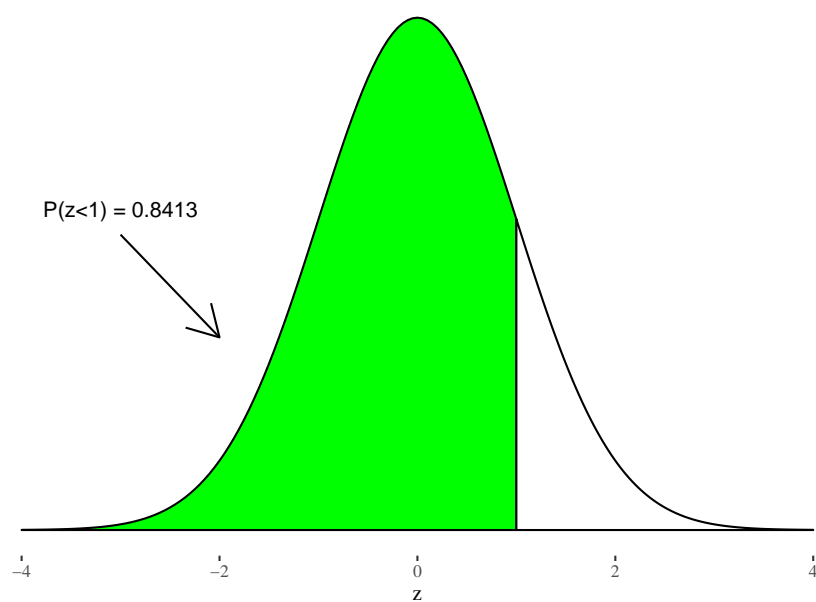
$z$	$P(<z)$	Ubicación	$z$	* $P(<z)$	*
-3,0	0,00135	{width="0.8188976377952756in" height="0.3937007874015748in" }	0	,0 0,50000	
-2,0	0,02275	{width="0.8188976377952756in" height="0.3937007874015748in" }	1	,0 0,84134	
-1,0	0,15866	{width="0.8188976377952756in" height="0.3937007874015748in" }	2	,0 0,97725	
			3,0	0,99865	

Las probabilidades acumuladas (es decir, las áreas a la izquierda) van creciendo desde casi cero en el valor más pequeño que pusimos ( $z = -4$ ) y llegan hasta casi uno en el máximo valor ( $z = 4$ ). En el modelo matemático,  $z$  tiene como campo de variación todos los valores, es decir, desde menos infinito hasta más infinito  $(-\infty; \infty)$ , pero como vemos, en la realidad, los valores -4 y 4 son muy extremos, en el sentido que las probabilidades acumuladas son **casi** cero y

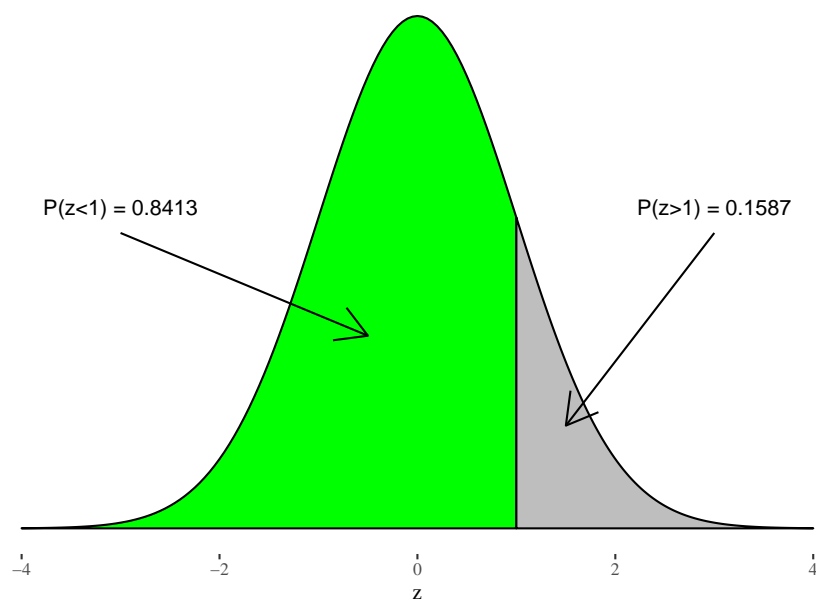
**casi** uno respectivamente. Aunque el modelo teórico tiene un comportamiento asintótico respecto del eje horizontal, en el gráfico, la curva se confunde con el eje para valores cercanos a 4. La notación para estos resultados es la siguiente (usando hasta cuatro decimales que es lo más frecuente), por ejemplo:  $P(z \leq -2) = 0.0227$  ó también  $P(z \leq 1) = 0,8413$ . Las representaciones gráficas de estas probabilidades son las siguientes:





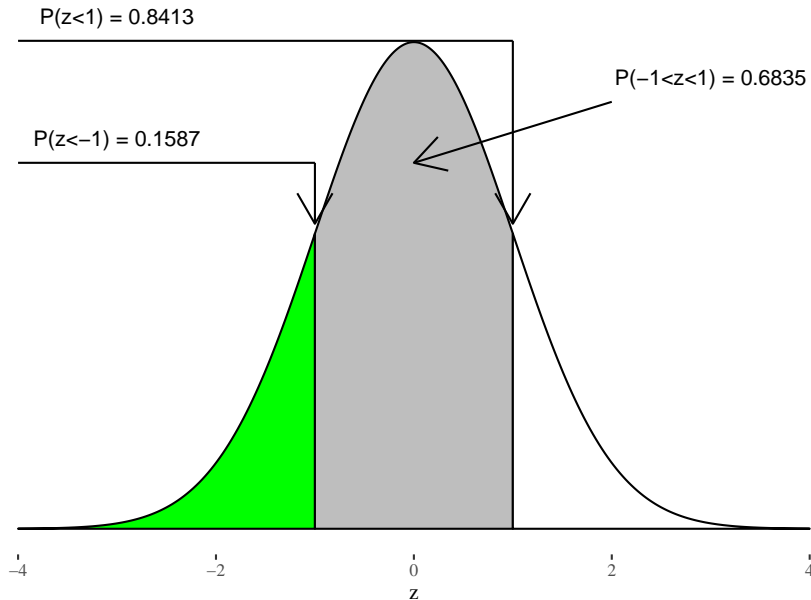


A continuación vemos la representación gráfica de la relación entre las probabilidades “por encima” y “por debajo” de  $z = 1$ , sabiendo que  $P(z \leq 1) + P(z > 1) = 1$ .



También se pueden identificar probabilidades **entre** valores de  $z$ , por ejemplo

cuál es el área entre -1 y 1 (es decir cuál es la probabilidad de encontrar a  $z$  entre esos valores). Esto se escribe así:  $P(-1 < z < 1)$ . Para calcularla solo usaremos la información sobre la probabilidad acumulada: el área por debajo de -1 vale 0,1587 y el área por debajo de 1 es 0,8413, si restamos esas dos áreas tendremos lo que queda entremedio:  $0,8413 - 0,1587 = 0,6835$ , gráficamente:



El área comprendida entre -2 y 2 se calcula del mismo modo, solicitado a R, se obtiene:

$$P(z < 2) = \text{r round}(\text{pnorm}(-2), 4)$$

$$P(z < -2) = \text{r round}(\text{pnorm}(2), 4)$$

$$P(-2 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < -2) = 0,9772 - 0,0228 = 0,9544$$

Y los valores  $\pm 3$  delimitan:

```
## [1] 0.9973
```

Es decir que:

$$P(-3 < z < 3) = P(z < 3) - P(z < -3) = 0,9986 - 0,0013 = 0,9973$$

La regla empírica que se mencionó en el capítulo , tiene aquí su origen. Ya que si la distribución es similar a la normal (unimodal y simétrica), entonces *aproximadamente* el 68% estará a menos de una desviación estándar de la media,

el 95% a menos de dos, y el 99,7 a una distancia no mayor a tres desviaciones estándar. Son los valores de  $z$ , que mide distancia a la media en términos de desviaciones estándar.

### 9.3.1 Percentiles

De mismo modo que con las distribuciones de frecuencia, los valores de la variable que acumulan una determinada probabilidad son los percentiles. El valor  $z = -1$  es el percentil 15.87 de la variable y  $z = 2$  es el percentil 97.72.

Para determinar ahora los valores de  $z$  que acumulan cierta probabilidad, se necesita la operación inversa a la que se realizó hasta aquí, porque hay que hallar cuál es el valor de la variable ( $z$ ) que deja por debajo una determinada probabilidad. Según la definición de percentiles, el percentil  $P_r$  de la variable es el valor por debajo del cual la probabilidad de hallarla es  $r\%$ . Gráficamente, se trataría de fijar el área ( $r\%$ ) y determinar cuál es el  $z$  que la acumula.

Nuevamente, recurrimos a R para solicitar este valor, que a partir de la probabilidad acumulada, devuelve el valor de  $z$ . Por ejemplo, el percentil 95 ( $P_{95}$ ) de la distribución normal es:

```
## [1] 1.6449
```

El valor 1.6449 acumula el 95% o bien  $P(z \leq 1.6449 = .95)$ . Y del mismo modo el percentil 99 es:

```
## [1] 2.3263
```

$$P_{99} = 2.3263$$

Por la simetría de la distribución, los percentiles complementarios son valores opuestos de la variable:

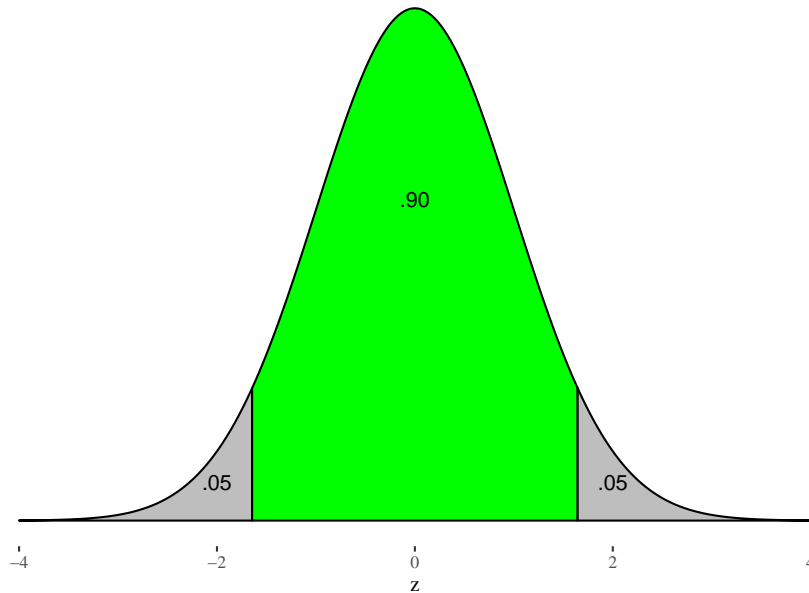
```
## [1] -1.6449
```

```
## [1] -2.3263
```

Con los que, bajo el modelo normal estándar:  $P_5 = -1.6449$  y  $P_1 = -2.3263$

Por el uso que haremos de la distribución normal hay algunos percentiles de mucha importancia y conviene recordar: son los que delimitan áreas centrales de probabilidad .90, .95 y .99.

Para determinarlos, hay que identificar a qué percentiles corresponden. Para el área central de .90, el área de .10 que queda fuera se reparte de manera simétrica en las dos colas de la distribución, a razón de .05 en cada una:



Entonces, hay que determinar los valores de  $z$  que acumulan .05 y .95, dicho de otro modo, hay que calcular  $P_5$  y  $P_{95}$ , que son:

```
## [1] -1.644854
```

```
## [1] 1.644854
```

Redondeados a dos decimales:

```
## [1] -1.64
```

```
## [1] 1.64
```

Con lo que los valores  $\pm 1.64$  delimitan un área central en la que hay una probabilidad .90 de encontrar a la variable normal estándar.

$$P(-1.64 < z < 1.64) = 0,90$$

Del mismo modo, para el área central de .95, el área complementaria de .05 se reparte en dos, y los percentiles que se requieren son:  $P_{2.5}$  y  $P_{97.5}$ , que son:

## [1] -1.96

## [1] 1.96

Así:

$$P(-1.96 < z < 1.96) = 0,95$$

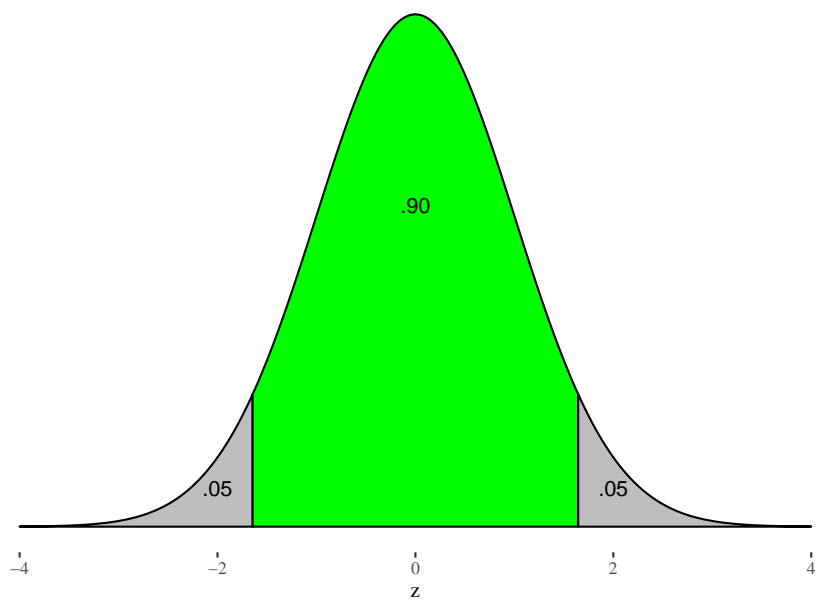
Y para .99, el .01 restante se divide en dos, por lo que los  $z$  que se buscan son los valores que acumulan .005 y .995, es decir:  $P_{.5}$  y  $P_{99.5}$ , que resultan:

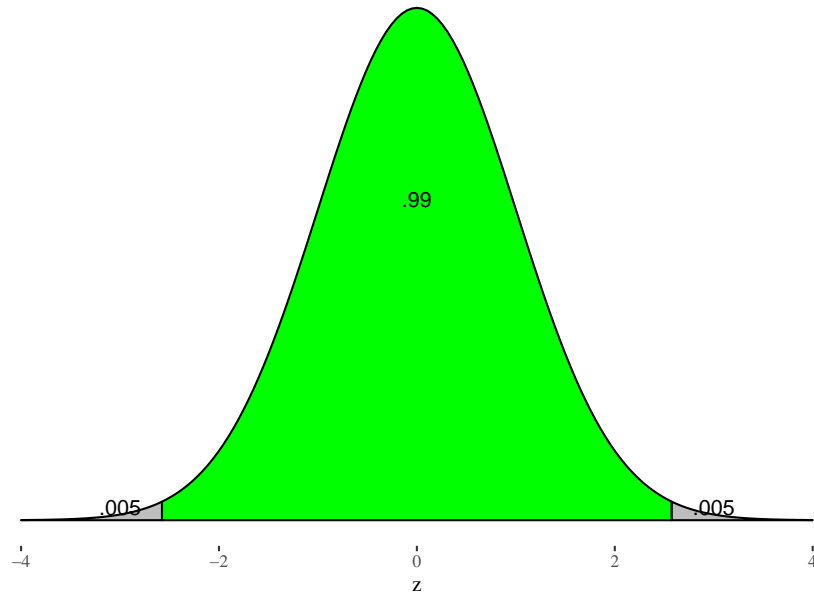
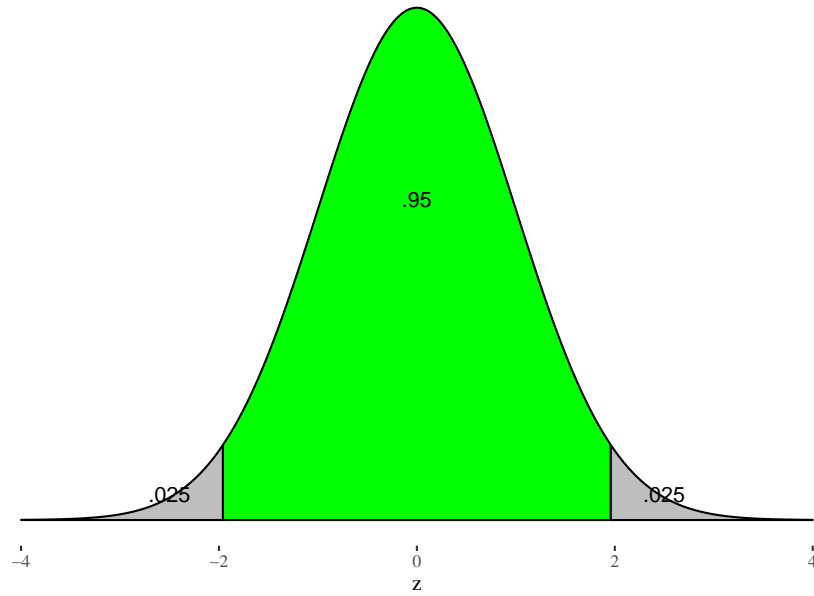
## [1] -2.58

## [1] 2.58

Entonces:

$$P(-2.58 < z < 2.58) = 0,99$$





### 9.3.1.1 Usos de la distribución normal

La distribución normal es muy valiosa, por muchas razones, de las cuales nos interesan dos.

La primera es que es adecuada para modelar muchos fenómenos observables, en especial variables biológicas como el *peso* de los niños al nacer, la *talla* para diferentes edades. Hay variables psicológicas como el *coeficiente intelectual*, para las que se elaboran instrumentos de medición cuyos puntajes se distribuyen de manera normal. Otras variables, como el *rendimiento en la escuela*, o las *actitudes* medidas con escalas numéricas, a menudo, pueden aproximarse de manera adecuada con un modelo normal.

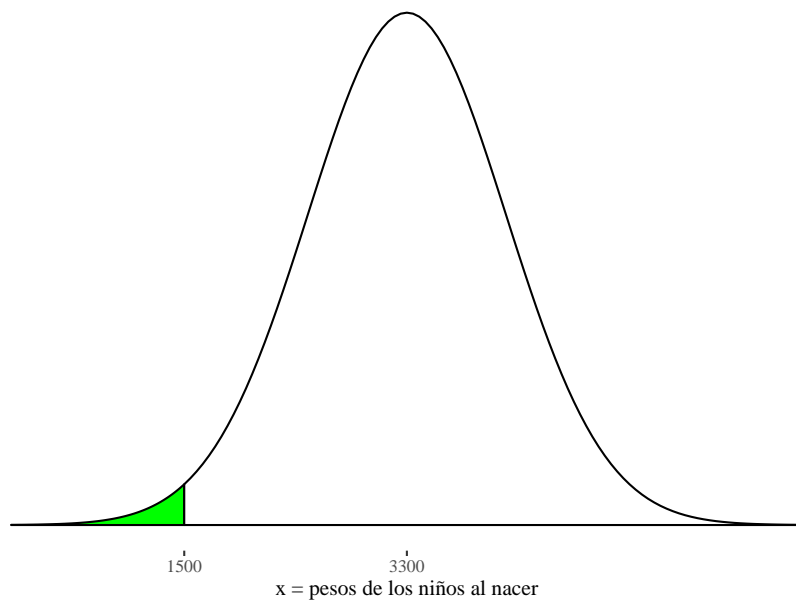
La segunda razón es que cuando se extraen muestras aleatorias de una población, algunas medidas que se calculan sobre esas muestras tienen una distribución que se aproxima a la normal a medida que las muestras tienen mayor tamaño. Eso será lo que nos permita realizar nuestras primeras estimaciones de valores poblacionales a partir de muestras.

Hasta este punto trabajamos con la distribución normal de una variable abstracta, sin unidades, a la que llamamos  $z$ , a cuyos valores pudimos asignar probabilidades. La función que describe la curva acampanada está expresada en términos de  $z$ . Pero cuando vamos a trabajar con una variable real, como las que mencionamos, por ejemplo, el peso de los niños cuando nacen o el CI, es necesario disponer de una variable concreta, a la que llamamos  $x$ . ¿Qué relación tiene esa variable, cuya distribución podría modelarse bien con una curva normal, con la  $z$ , que nos permite hallar las probabilidades bajo el modelo normal? Es decir, ¿qué relación tiene  $x$  con  $z$ ? Ya la conocemos, porque  $z$  es el desvío estándar que definimos en el capítulo , es:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Que cuenta la cantidad de desviaciones estándar ( $s$ ) a que se encuentra un valor ( $x$ ) de la media ( $\bar{x}$ ). Para encontrar probabilidades correspondientes a valores reales de una variable y no solo los  $z$  abstractos, debemos transformar esos valores en puntajes  $z$ , con la expresión de arriba.

Veamos esto en un ejemplo: a partir de las historias clínicas de varios años de un hospital materno infantil, conocemos que el peso medio en el momento de nacer (de niños varones, a término, con madre entre 20 y 29 años) es de 3300 gramos y que la desviación estándar es de 800 gramos. Además sabemos que la distribución normal es adecuada para describir la variable *peso al nacer*. Entonces podemos calcular la probabilidad que un niño al nacer tenga un peso por debajo de los 1500 gramos. El problema es averiguar el área sombreada en el siguiente gráfico:



Para calcular el área marcada -que corresponde a la probabilidad solicitada-, vamos a transformar el valor de  $x$  (1500) a puntaje  $z$ , haciendo:

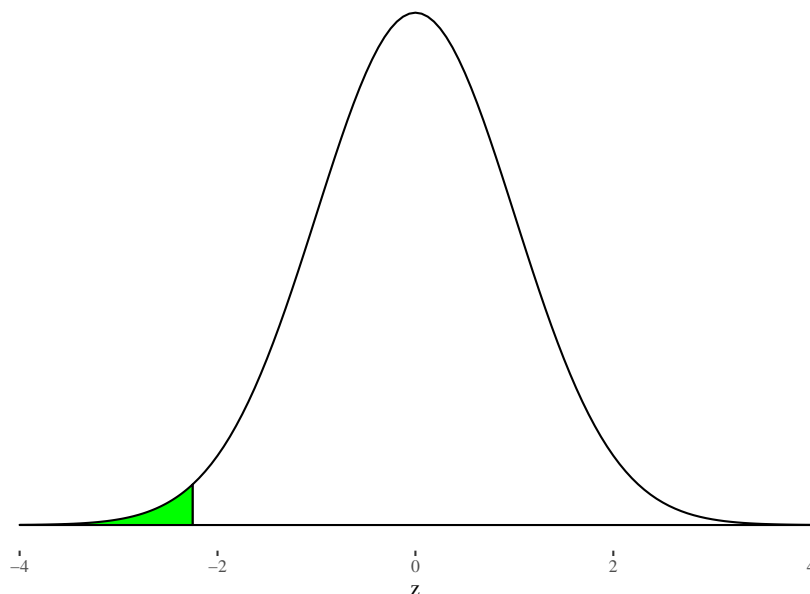
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1500 - 3300}{800} = -2.25$$

Ahora es equivalente solicitar la probabilidad de  $x$  menor que 1500 que la de  $z$  menor que -2,25, en símbolos:

$$P(x < 1500) = P(z < -2.25)$$

Y el gráfico anterior expresado en términos de  $z$  resulta:





Esta probabilidad es:

```
## [1] 0.01222447
```

Indica la probabilidad de hallar niños que al nacer tengan pesos inferiores a los 1500 gramos.

Del mismo modo podemos operar si nos interesa conocer la probabilidad de hallar niños que nazcan con peso comprendido entre 3500 y . Transformando cada uno de los valores se obtiene:

$$x = 3500 \rightarrow z = \frac{3500 - 3300}{800} = 0,25$$

$$x = 4500 \rightarrow z = \frac{4500 - 3300}{800} = 1,50$$

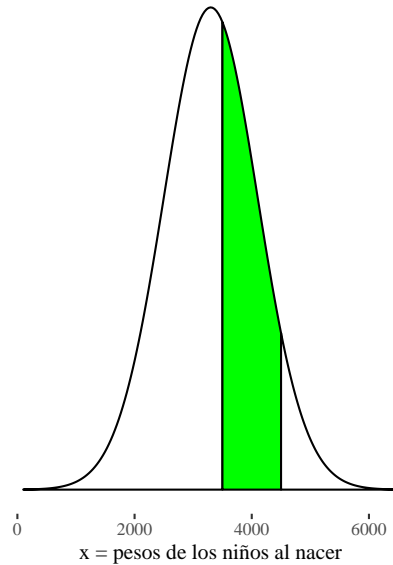
Entonces, que  $x$  (el peso de los niños al nacer) esté entre 3500 y equivale a que  $z$  (cantidad de desviaciones estándar) se encuentre entre 0,25 y 1,50. Esto se expresa simbólicamente así:

$$P(3500 < x < 4500) = P(0,25 < z < 1,50)$$

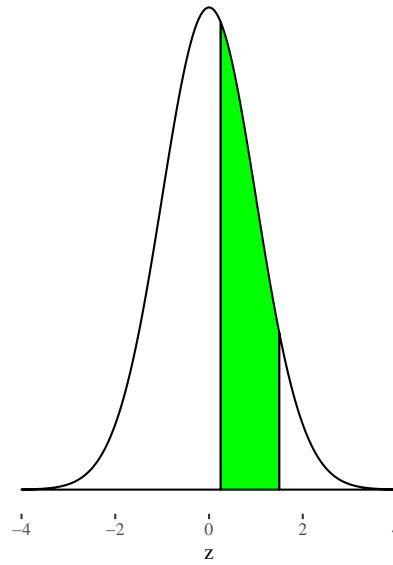
Y se representa gráficamente así:

En términos de:

la variable original  $x$



la variable transformada  $z$



Para calcular el área comprendida entre los dos puntos, es decir la probabilidad de hallar a  $x$  entre 3500 y 4500, restamos, a la probabilidad acumulada hasta  $z = 1.50$ , la acumulada hasta  $z = 0.25$ :

$$P(3500 < x < 4500) = P(0,25 < z < 1,50) = P(z < 1,50) - P(z < 0,25)$$

La última operación la solicitamos a R:

```
## [1] 0.3345
```

Leemos el resultado diciendo que la probabilidad de hallar a un niño que haya nacido con un peso comprendido entre los 3500 y los 4500 gramos es de 0.3345.

Toda variable que puede modelarse con una distribución normal puede transformarse a puntaje  $z$  y así hallar la probabilidad asociada a diferentes intervalos.

Hemos realizado las operaciones de este modo hasta aquí, porque es importante tener clara la relación entre las variable concreta que se mide u observa, con la variable abstracta,  $z$ . Sin embargo, es posible ingresar al comando de R directamente con los valores de la variable original e informar la media y la desviación estándar, para obtener las probabilidades correspondientes.

Veamos el modo de obtener el resultado de manera directa, sin pasar por  $z$ . La probabilidad que nos interesa es, como antes:

$$P(3500 < x < 4500)$$

Que se calcula como la diferencia entre la probabilidad acumulada hasta 4500 menos la acumulada hasta 3500.

$$P(3500 < x < 4500) = P(x < 4500) - P(x < 3500)$$

En R puede solicitarse la probabilidad directamente sobre  $x$  indicando los valores de la media y la desviación estándar, y se obtiene:

```
## [1] 0.3344865
```

Es el mismo resultado al que habíamos llegado a través de la transformación a puntaje  $z$ , pero ahora pidiéndola directamente desde  $x$ . Aunque éste sea el procedimiento más cómodo para calcular probabilidades, es necesario estar familiarizado con la distribución normal estándar (en  $z$ ), por los usos que haremos en los próximos capítulos.

Al final de capítulo veremos cómo pedir a R el cálculo.

La distribución normal tiene un uso muy amplio y varios campos de aplicación. Más adelante veremos que para aplicar algunos procedimientos de análisis, es necesario que los datos provengan de una distribución normal, y existen pruebas para verificar que esto se cumpla. Una primera aproximación para ver si un conjunto de datos tiene distribución cercana a la normal es observar el histograma y evaluar si su forma se aproxima a la normalidad: si es unimodal y aproximadamente simétrica, es decir si la mediana es semejante a la media. Luego se calculan los coeficientes de curtosis y asimetría y, si éstos están entre  $-0,50$  y  $+0,50$ , puede aceptarse, en primera instancia, la normalidad de los datos.

## 9.4 La idea de grados de libertad

Antes de avanzar hacia los otros modelos de probabilidad que presentaremos en este capítulo, es necesario tener una idea aproximada de un concepto que juega un papel de importancia en esas distribuciones, el de “grados de libertad”, un número que, como veremos enseguida, determina la forma de algunas distribuciones. Se trata de un concepto matemático complejo, al que vamos a definir como el número de observaciones linealmente independientes que existen en una suma de cuadrados<sup>7</sup>, pero del que haremos un uso exclusivamente instrumental. Su denominación es  $gl$  o bien  $df$  en inglés (degrees of freedom).

<sup>7</sup>Solo nos interesará contar con una idea intuitiva y ejemplos de aplicación.

Consideremos el caso del cálculo de la varianza, cuyo numerador es:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Que es la suma de  $n$  términos, cada uno de ellos elevado al cuadrado. Identificar los grados de libertad de esa expresión equivale a responder a ¿cuántos términos de esa suma no dependen del valor que asumen los demás? Supongamos que se conoce la media muestral; esto establece un número fijo para la suma de las  $n$  observaciones:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , por lo que solo  $n - 1$  de ellas pueden elegirse “libremente”, la última observación queda determinada.

Por ejemplo, si se trata de cuatro observaciones de las que sabemos que su media es cinco, entonces la suma de los cuatro números debe ser 20 ¿Cuáles son los valores posibles para las cuatro observaciones  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ? Hay infinitas combinaciones posibles que darían suma igual a 20, fijemos arbitrariamente algunos de los valores:  $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 4$ , estos tres números suman 11, por lo que el cuarto solo puede ser 9 (para lograr la suma de 20 y que entonces la media sea 5). Otra combinación posible de valores es  $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 10$ , con lo que  $x_4 = 1$  necesariamente. Cualquiera sea la elección que se haga, siempre serán tres de los cuatro valores los que puedan elegirse libremente; decimos entonces que los grados de libertad son tres.

En general, para este problema, los grados de libertad se calcularán como  $n - 1$ , donde  $n$  es el número de observaciones, diremos así que, de  $n$  observaciones,  $n - 1$  son independientes, si se fija el resultado de la suma.

Una situación diferente es cuando se trata con una tabla de doble entrada con frecuencias marginales fijas; allí los grados de libertad se interpretan de modo distinto. No están relacionados con el número de observaciones sino con la dimensión de la tabla. Veamos la siguiente tabla de dos por tres, con frecuencias marginales fijadas:

	A	B	C	Total
R				10
S				30
Total	5	10	25	40

En ella se relacionan dos variables cuyas categorías son  $A, B$  y  $C$  para la de las columnas y  $R$  y  $S$  para la de las filas. En la tabla, hemos fijado las frecuencias marginales. No hay dudas que hay infinitos valores posibles para las frecuencias conjuntas que podrían sumar lo que piden las marginales. Nos preguntamos ¿Cuántas de las frecuencias de las celdas (frecuencias conjuntas) pueden elegirse libremente? Si elegimos el valor 2 para la celda  $RA$ , queda determinado un 3 en la celda  $SA$  (para que cumpla con sumar 5 verticalmente). Si luego elegimos un 4 en la celda  $RB$ , la  $SB$  queda determinada a ser 6 (para sumar 10 en la segunda columna). Al mismo tiempo, la celda  $RC$  debe ser también 4 para sumar 10 en la primera fila y también se determina la celda  $SC$ , que no puede ser sino 21, para sumar 30 en la segunda fila y 25 en la tercera columna. La tabla queda

así completada, solo las celdas  $RA$  y  $RB$  fueron elegidas, las demás quedaron determinadas por la exigencia de respetar las frecuencias marginales.

	A	B	C	Total
R	2	4	4	10
S	3	6	21	30
Total	5	10	25	40

¿Cuántos serán los grados de libertad en este ejemplo?, de las seis celdas que debían completarse con frecuencias, solo 2 pudieron elegirse libremente. Éstos últimos son los grados de libertad: 2.

De manera general, para una tabla de dimensión  $f \times c$  (donde  $f$  es la cantidad de filas y  $c$  la de columnas, como antes), los grados de libertad se calculan multiplicando  $(f-1)$  por  $(c-1)$ . En la tabla que acabamos de usar como ejemplo, la dimensión es 2 por 3, por lo que los grados de libertad son  $(2-1) * (3-1) = 1 * 2 = 2$ , que son las dos celdas cuyas frecuencias pudimos fijar “libremente”.

A los fines de nuestro curso, esta introducción a la idea de grados de libertad es suficiente, el concepto es amplio y su tratamiento más profundo exigiría algunos conocimientos de álgebra lineal, que no necesitamos desarrollar aquí.

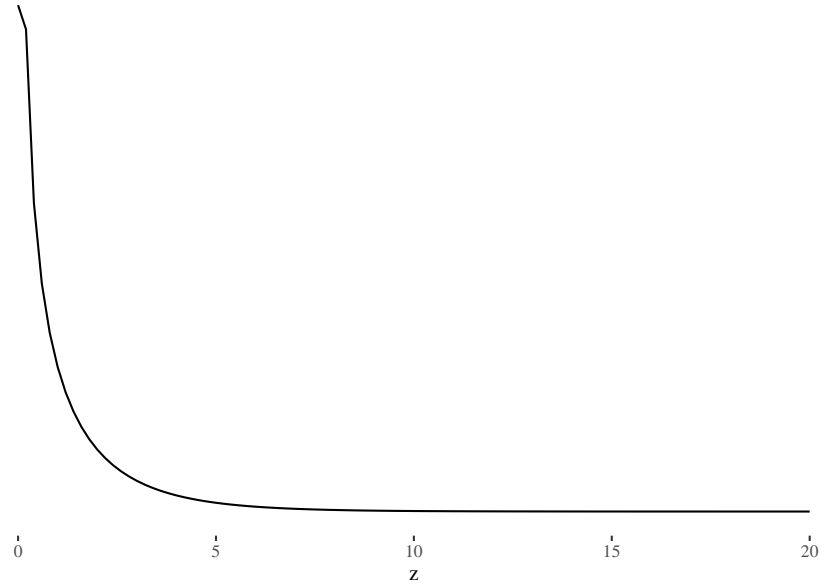
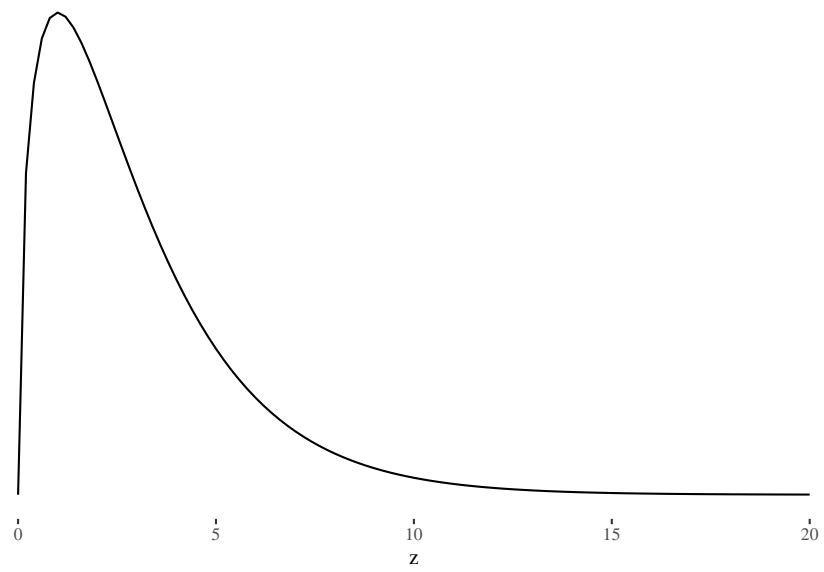
## 9.5 La distribución ji cuadrado ( $\chi^2$ )

Esta distribución es el primer modelo que veremos con forma asimétrica<sup>8</sup>. Una de sus aplicaciones es la estimación de la varianza, nosotros la utilizaremos más adelante, cuando tratemos sobre estadística no paramétrica, en especial para probar si una variable puede modelarse con cierta distribución (pruebas de bondad de ajuste) y también para analizar la independencia entre variables nominales.

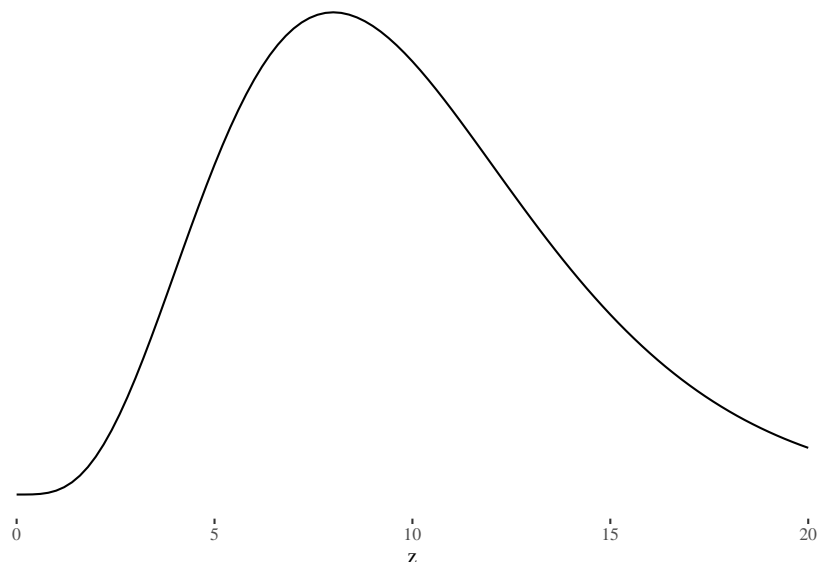
Del mismo modo en que tratamos a la distribución normal, no haremos uso de la fórmula para calcular probabilidades, sino que las pediremos a R. Además de la forma asimétrica, hay otra diferencia con la distribución normal, la  $\chi^2$  no es una distribución única: no es suficiente especificar un valor de la variable para conocer su probabilidad acumulada sino que la forma que tenga dependerá de los recientemente mencionados “grados de libertad”, los cuales en una primera aproximación tomaremos como  $n-1$ , donde  $n$  es el tamaño de la muestra.

Las siguientes son las formas diferentes que tiene la distribución  $\chi^2$  para diferentes valores de los  $gl$ , el eje horizontal indica los valores de la variable  $\chi^2$ . Como en la normal, las probabilidades se representan como áreas bajo la curva:

<sup>8</sup>La definición de la variable  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad es la suma de  $n$  variables aleatorias normales estándar elevadas al cuadrado:  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$ , en la que cada  $z$  es una variable distribuida normalmente con media cero y desviación estándar igual a uno.

$df = 1$  $df = 3$ 

df = 10

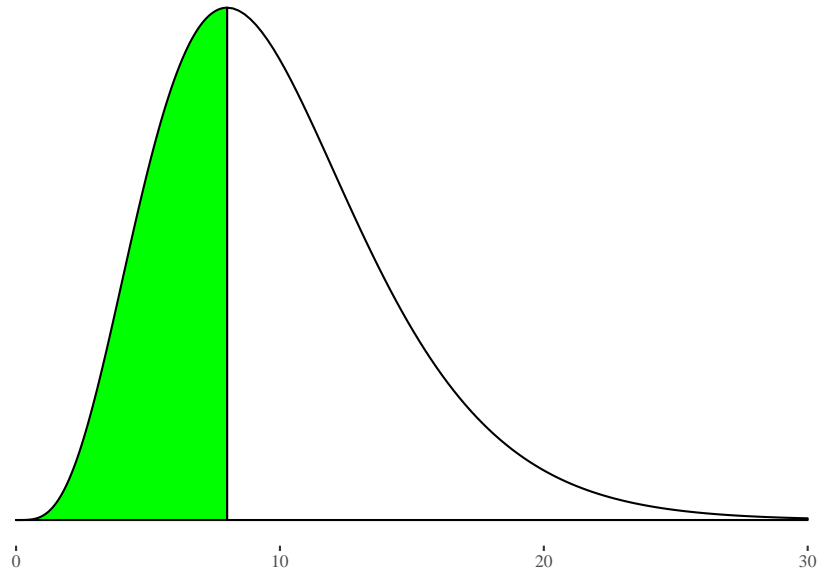


Los gráficos muestran que a medida que se incrementan los grados de libertad, la forma de la distribución gana en simetría y se asemeja a la distribución normal.

Para hallar las probabilidades correspondientes a valores de la variable, usaremos nuevamente el comando de R que provee probabilidades bajo modelos especificados; al final del capítulo veremos los comandos para hacerlo. Para hallar la probabilidad acumulada hasta el valor 8 bajo un modelo  $\chi^2$  con 10 grados de libertad, obtenemos:

```
## [1] 0.3711631
```

La información requerida para el cálculo (los argumentos) son el valor de la variable (8) y los grados de libertad del modelo (10). Gráficamente se ubica en:



Y se escribe:

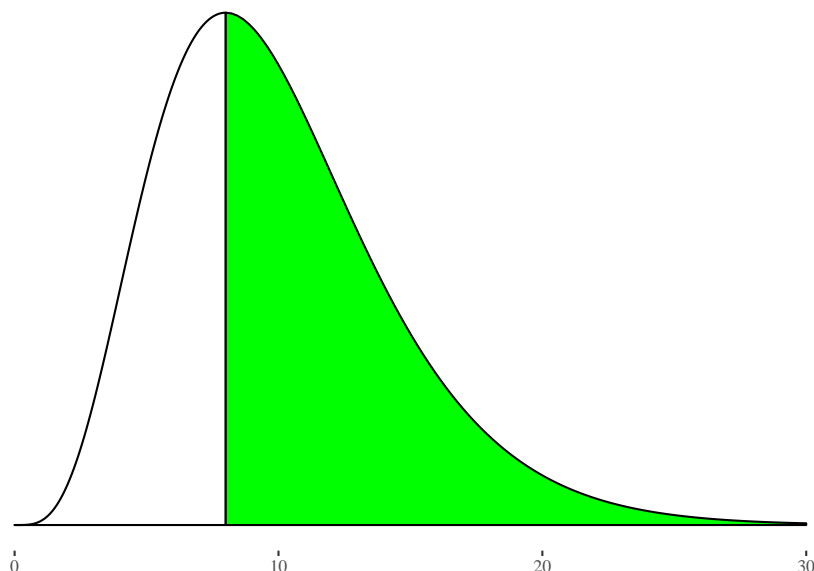
$$P(\chi_{10}^2 \leq 8) = 0.3712$$

Para el área superior a 8, se complementa la probabilidad acumulada.

$$P(\chi_{10}^2 > 8) = 1 - P(\chi_{10}^2 \leq 8) = 1 - 0.3712 = 0,6288$$

Que es la superficie sombreada en el gráfico siguiente.





Para encontrar percentiles bajo este modelo, se debe contar como argumentos: la probabilidad acumulada y los grados de libertad, el comando adecuado (ver al final del capítulo) devuelve el valor de la variable  $\chi^2$ . Por ejemplo, el percentil 95 de una distribución  $\chi^2$  con 15 grados de libertad es:

```
## [1] 24.99579
```

$$P_{95} = 24.99$$

Dicho de otra manera, el 5% de los valores de la variable  $\chi^2$  con 15 grados de libertad, supera al valor 24.99. O también, los valores superiores a 24.99 tienen probabilidad menor a 5% de obtenerse bajo este modelo.

La distribución  $\chi^2$  tiene muchas aplicaciones, una de las más frecuentes es para poner a prueba la independencia entre dos variables nominales. El vínculo entre esta distribución y el puntaje  $\chi^2$  que ya se mencionó, se verá más adelante.

## 9.6 La distribución t de Student

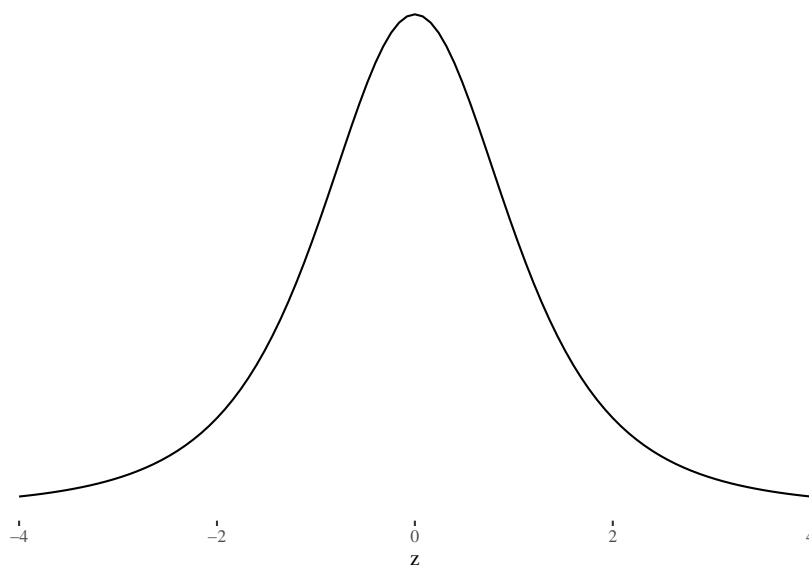
El tercer modelo especial de probabilidades para variables continuas que nos interesa describir es la distribución t, conocida como “de Student”, por el seudónimo que utilizaba quien la aplicó por primera vez, William Gosset<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Químico y Estadístico inglés (1876-1937), era empleado de la cervecería Guinness y allí desarrolló procedimientos adecuados para trabajar con pequeñas muestras. Una de las

Se trata de una distribución que, como la normal es simétrica y como la  $\chi^2$  depende de los grados de libertad<sup>10</sup>. Su forma es la siguiente, dependiendo de los grados de libertad:

Distribución t de Student con diferentes grados de libertad:

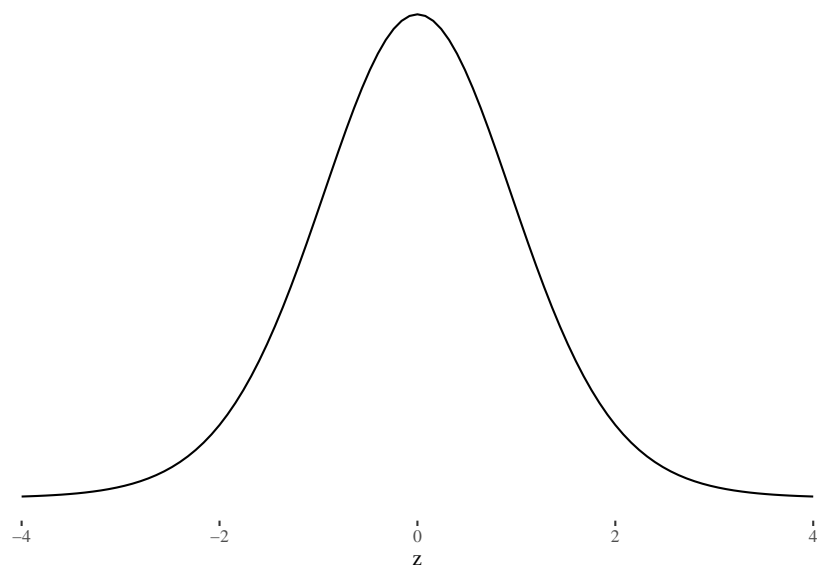
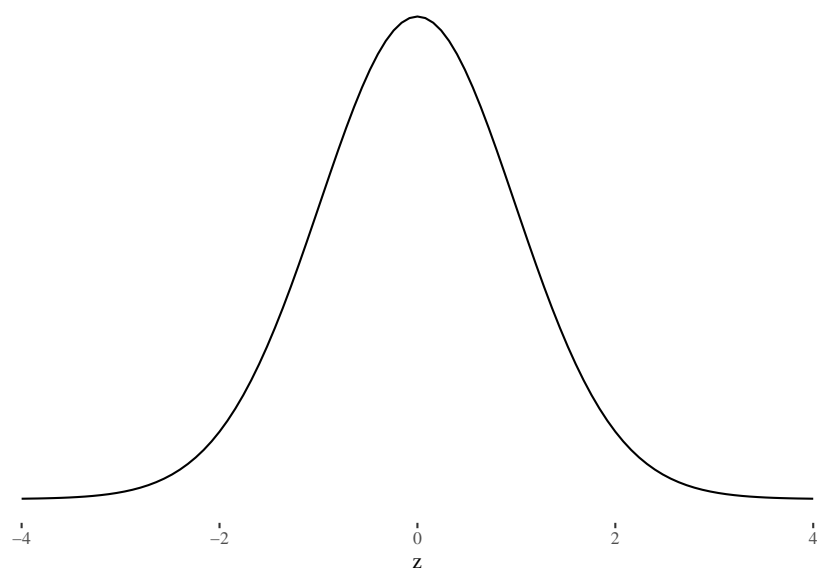
df = 3




---

versiones acerca de por qué publicó con el seudónimo Student es que la empresa temía que se revelaran secretos industriales.

<sup>10</sup>La definición de la variable con distribución  $t$  con  $n$  grados de libertad es el cociente entre una variable con distribución normal estándar y la raíz cuadrada de una  $\chi^2$  dividida por sus grados de libertad:  $t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ .

$df = 15$  $df = 60$ 

A partir de 30 grados de libertad, la distribución toma una forma que va haciéndose más similar a la normal. Las probabilidades acumuladas se buscan con R, con el comando `dt`, que tiene como argumentos el valor de la variable y los grados de libertad. La probabilidad que una variable con distribución  $t$  con *un* grado de libertad, esté por debajo del valor 2 se escribe:

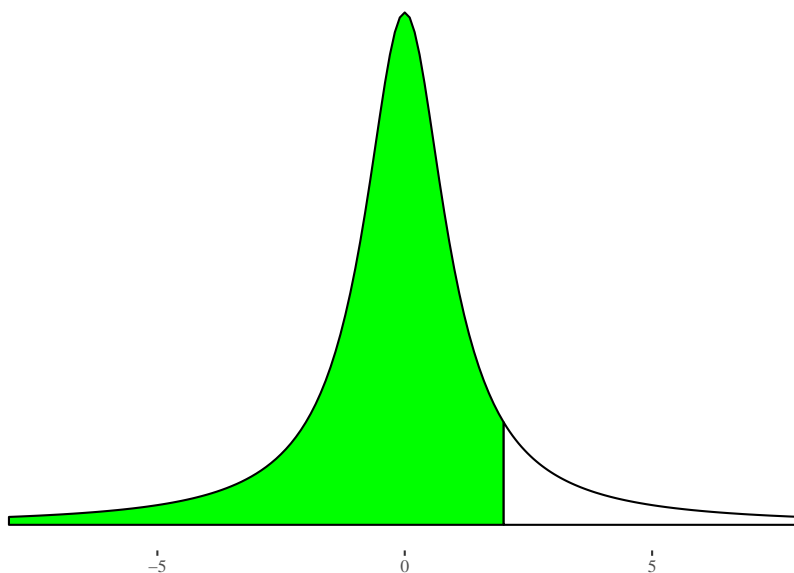
$$P(t_1 \leq 2)$$

Solicitado a R, se debe informar el valor de la variable (2) y los grados de libertad (1):

```
## [1] 0.8524164
```

Que dice que

$$P(t_1 \leq 2) = 0.8524$$



Su ubicación gráfica es:

Como en las otras distribuciones, el área superior se calcula como el complemento:

$$P(t_1 > 2) = 1 - P(t_1 \leq 2) = 1 - 0.8524 = 0.1476$$

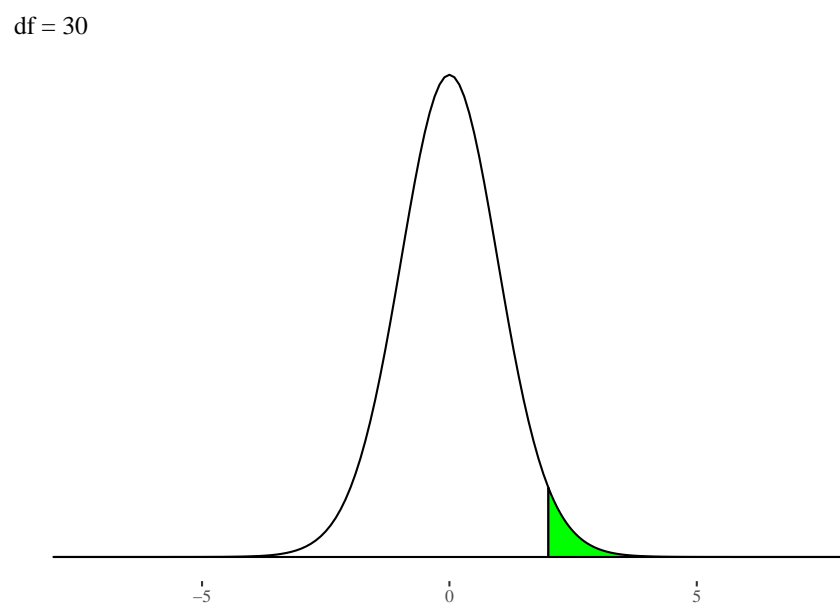
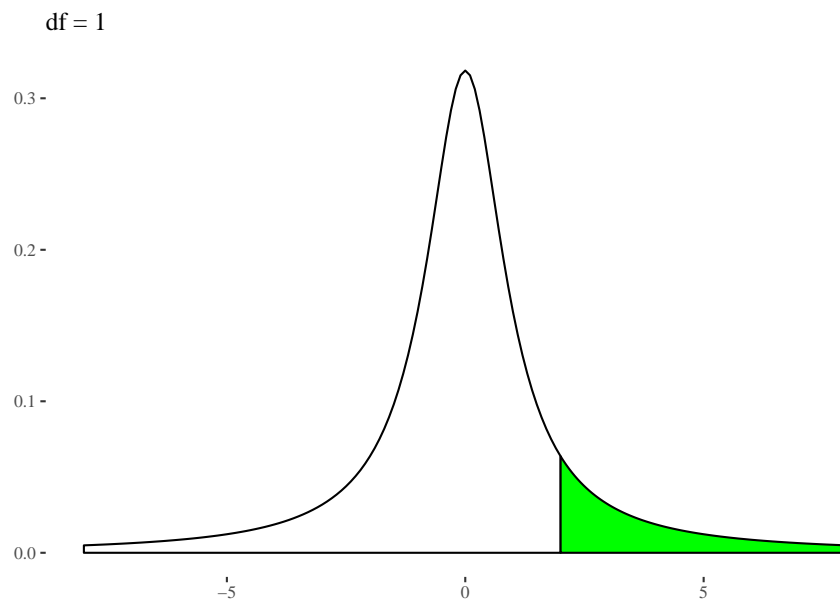
Para ver los efectos del cambio en los grados de libertad, vamos a comparar la probabilidad que una variable t con 30 grados de libertad supere a 2, es decir:

$$P(t_{30} > 2)$$

Pedido a R resulta:

```
## [1] 0.0273
```

Los dos resultados tienen estas representaciones gráficas;



En los gráficos y en los valores de las probabilidades se ve que el aumento de los grados de libertad en la distribución t tiene el efecto de reducir la probabilidad de los valores extremos.

Los percentiles de la distribución  $t$  se solicitan, si se conocen los grados de libertad y el percentil, por ejemplo, el percentil 95 bajo un modelo  $t$  con 1 grado de libertad es:

## [1] 6.3138

Y el mismo percentil, si la distribución tiene 30 grados de libertad es:

## [1] 1.6973

Esto quiere decir que un valor  $t$  como por ejemplo 3, se considerará extremo bajo una distribución con 30 grados de libertad, pero será un valor esperable si la distribución tiene 1 grado de libertad.

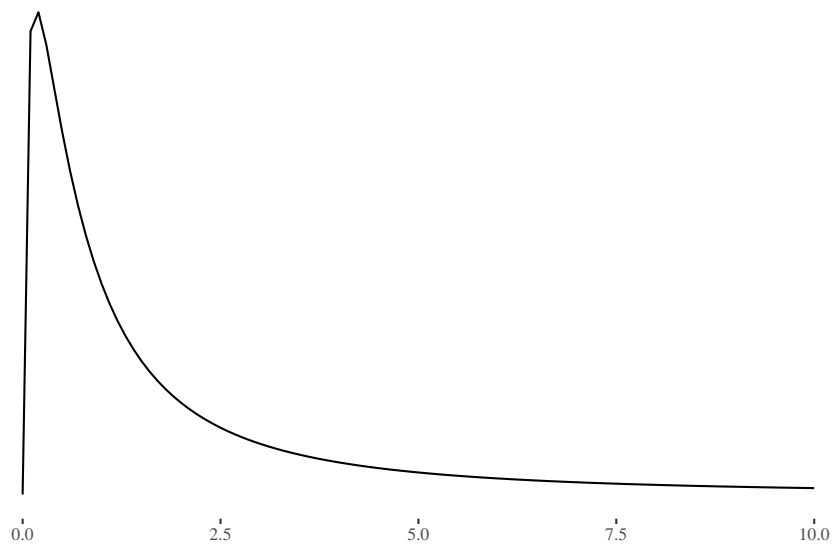
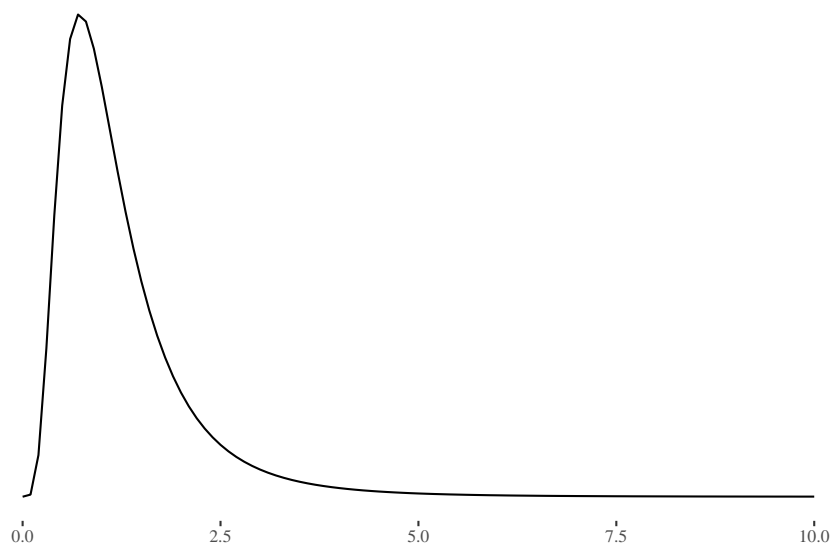
Cuando trabajemos con inferencia, veremos que la distribución  $t$  se aplica en reemplazo de la normal, cuando se trabaja con muestras pequeñas y que se va volviendo más equivalente a ella a medida que las muestras son de mayor tamaño.

### 9.6.1 La distribución F

El último de los modelos de probabilidad que necesitamos para usar en los próximos capítulos en la realización de inferencias, es la distribución F de Fisher. Es una distribución asimétrica, no negativa y su forma depende de los valores de los grados de libertad del numerador y del denominador<sup>11</sup>. Es una curva muy asimétrica a la derecha cuando los grados de libertad son pocos y tiende a la normalidad a medida que aumentan los  $gl$ . Veamos dos casos de combinaciones de grados de libertad en el numerador y en el denominador:

---

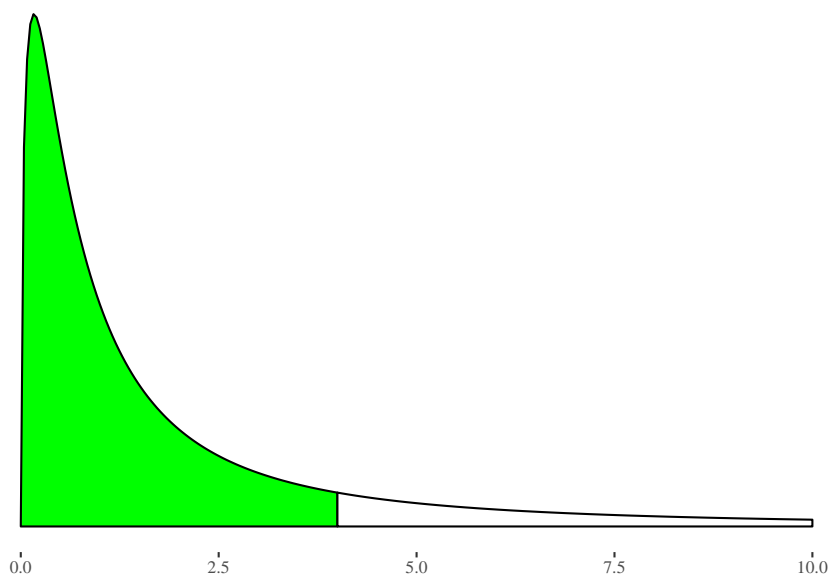
<sup>11</sup> Estos nombres para los grados de libertad se originan en que la  $F$  se define como el cociente de dos distribuciones  $\chi^2$ , cada una dividida por sus grados de libertad:  $F_{n_1, n_2} = \frac{\frac{\chi_1^2}{n_1}}{\frac{\chi_2^2}{n_2}}$ .

$df = 3,2$  $df = 15,10$ 

En el cálculo de las probabilidades, ahora debemos informar los grados de libertad del numerador y del denominador separadamente. Para solicitar, por ejemplo, la  $P(F_{3,2} \leq 4)$ , se indica el valor de la variable (4) y los grados de libertad del numerador y el denominador en ese orden (3,2):

```
## [1] 0.7936
```

Es decir:  $P(F_{3,2} \leq 4) = 0.7936$



Cuyo gráfico es:

El área superior es la diferencia a uno:

```
## [1] 0.2064
```

De modo que  $P(F_{3,2} > 4) = 0.2064$ .

El percentil 95 de una distribución F con 3 grados de libertad en el numerador y dos en el denominador es:

```
## [1] 19.1643
```

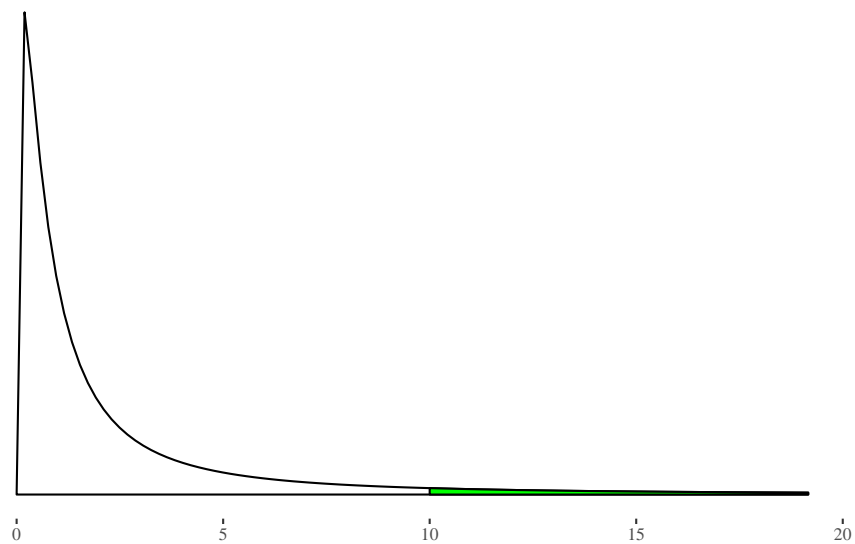
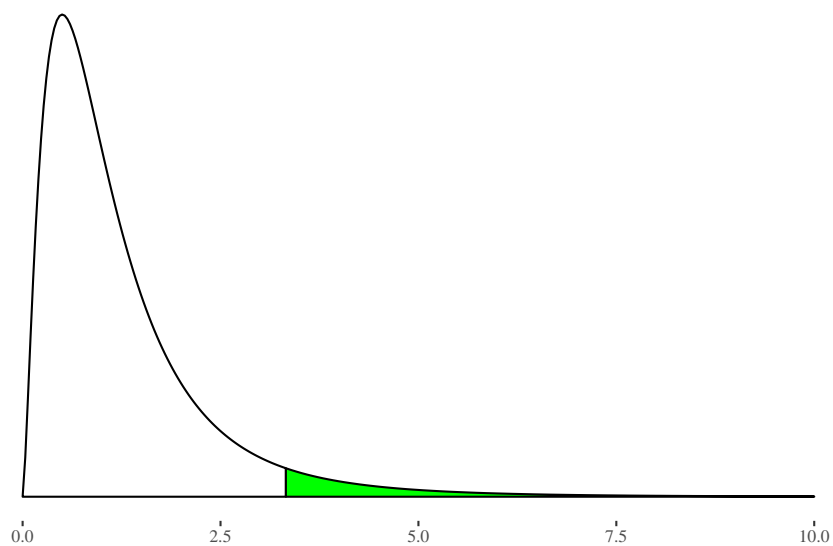
Que se lee indicando que el 5% de los valores de la variable  $F_{3,2}$  superan a 19.16.  
 $P(F_{3,2} > 19.16) = .05$

Cuando pedimos el mismo percentil de otra variable que tenga distribución  $F_{5,10}$ , se obtiene:

```
## [1] 3.3258
```

Los gráficos del  $P_{95}$  en las dos distribuciones son los siguientes:



$df = 3,2$  $df = 5,10$ 

También en esta distribución vemos que el aumento de los  $gl$  tiene el efecto de reducir la probabilidad de los valores extremos.

La distribución F es usada para comparar la dispersión de dos distribuciones, a través del cociente de las varianzas.

## 9.7 Hacerlo en R

### 9.7.1 Probabilidades

Para solicitar las probabilidades acumuladas hasta determinado valor ( $x$ ) de la variable, bajo diferentes modelos, los comandos llevan una  $p$  delante del nombre de la distribución: pbinom, pnorm, pchisq, pt, pf. Y según la distribución, deben indicarse los *parámetros* que la especifican:

- Binomial: pbinom(x, “cantidad de ensayos”, “probabilidad de éxito a cada ensayo”)
- Normal estándar: pnorm(z), la media vale cero y la desviación estándar, uno. No hace falta indicarlo.
- Normal: pnorm(x, “media”, “desviación estándar”)
- Ji cuadrado: pchisq(x, “grados de libertad”)
- t de Student: pt(x, “grados de libertad”)
- F de Fisher: pf(x, “grados de libertad del numerador”, “grados de libertad del denominador”)

#### 9.7.1.1 Ejemplos

##### 9.7.1.1.1 Normal estándar

$P(z < 1.5)$

```
pnorm(1.5)
```

```
## [1] 0.9331928
```

Redondeado a cuatro decimales:

```
round(pnorm(1.5),4)
```

```
## [1] 0.9332
```

$P(z > 2.3)$

```
round((1-pnorm(2.3)),4)
```

```
## [1] 0.0107
```

### 9.7.1.2 Normal

Si  $x$  tiene distribución normal con media 5 y desviación estándar 2, la  $P(x < 6.3)$

```
round(pnorm(6.3,5,2),4)
```

```
## [1] 0.7422
```

$P(6 < x < 8)$

```
round((pnorm(8,5,2)-pnorm(6,5,2)),4)
```

```
## [1] 0.2417
```

### 9.7.1.3 Chi cuadrado

$P(\chi_{15}^2 < 10)$

```
pchisq(10,15)
```

```
## [1] 0.1802601
```

Redondeado

```
round(pchisq(10,15),4)
```

```
## [1] 0.1803
```

### 9.7.1.4 t de Student

$P(t_{10} < 2.5)$

```
pt(2.5,10)
```

```
## [1] 0.9842766
```

O bien:

```
round(pt(2.5,10),4)
```

```
## [1] 0.9843
```

$P(t_{25} > 1.8)$

```
round((1-pt(1.8,25)),4)
```

```
## [1] 0.042
```

#### 9.7.1.5 F de Fisher

$P(F_{5,7} < 2.7)$

```
pf(2.7,5,7)
```

```
## [1] 0.8860769
```

Y el área por encima,  $P(F_{5,7} > 2.7)$ :

```
1-pf(2.7,5,7)
```

```
## [1] 0.1139231
```

### 9.7.2 Percentiles

Para hallar percentiles, los comandos tienen una  $q$  delante del nombre del modelo: qbinom, qnorm, qchisq, qt, qf. Y debe indicarse el percentil que se busca, junto a los parámetros que corresponden a cada distribución. Llamando  $r$  al percentil que interesa encontrar, la solicitud a R para cada modelo es:

- Binomial: qbinom( $r/100$ , “cantidad de ensayos”, “probabilidad de éxito a cada ensayo”)
- Normal estándar: qnorm ( $r/100$ ), la media vale cero y la desviación estándar, uno. No hace falta indicarlo.
- Normal: qnorm( $r/100$ , “media”, “desviación estándar” )
- Ji cuadrado: qchisq( $r/100$ , “grados de libertad”)
- t de Student: qt( $r/100$ , “grados de libertad”)
- F de Fisher: qf( $r/100$ , “grados de libertad del numerador”, “grados de libertad del denominador”)

### 9.7.3 Áreas centrales

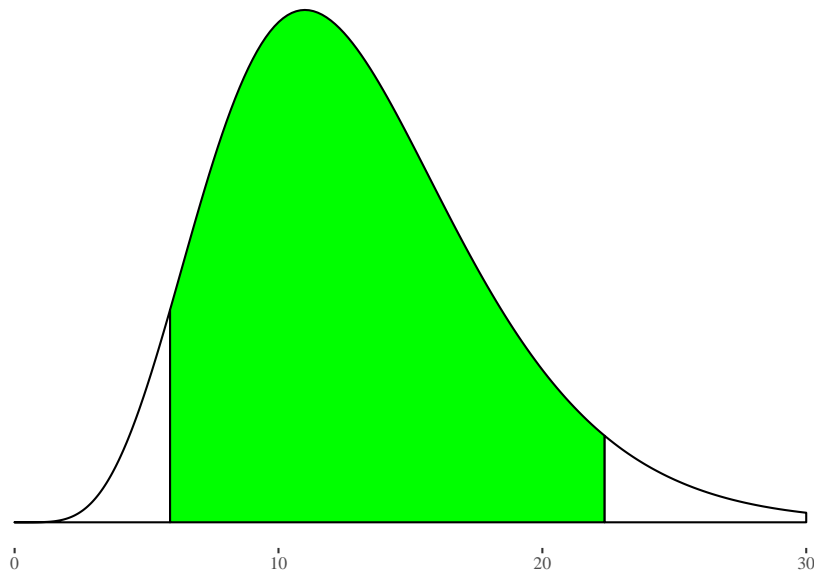
En lo que sigue será frecuente que se necesiten percentiles de la variable que delimitan determinadas áreas centrales de la distribución. Cualquiera sea el modelo de probabilidad que se use, suele denominarse  $1 - \alpha$  al área central, con lo que  $\alpha$  es el área que queda por fuera de la zona central, dividida en dos. Los percentiles que delimitan esa área central de  $1 - \alpha$  son  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Por ejemplo, para determinar cuáles son los valores de una distribución  $\chi^2$  con 13 grados de libertad que delimitan un 90% de área central, calculamos  $\alpha$ , que es el 10% restante y los percentiles son: 5 ( $\frac{\alpha}{2}$ ) y 95 ( $1 - \frac{\alpha}{2}$ ).

```
## [1] 5.891864
```

```
## [1] 22.36203
```

Que gráficamente se ve así:





## Capítulo 10

# Distribuciones en el muestreo

### 10.1 Parámetros y estimadores

En este capítulo se ligán los conceptos de muestreo y de probabilidad para establecer las bases de los procedimientos de inferencia estadística. La parte III tratará con datos que provienen de muestras probabilísticas, es decir, unidades de análisis que habrán sido seleccionadas usando alguno de los procedimientos de muestreo probabilístico. En consecuencia, las medidas que se calculen a partir de esos datos dependerán del azar<sup>1</sup>.

- El conjunto completo de estudiantes de Psicología en 2014 tenía una edad promedio de 26.8 años (UNC, 2014). Si ese año se hubiese extraído una muestra de 20 alumnos al azar, la edad promedio podría haber sido un número muy diferente de 26.8 años.
- En las elecciones de 2019 en la provincia de Córdoba, el candidato a gobernador que ganó, obtuvo 57% de los votos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 50 ciudadanos que hayan votado ese año, el porcentaje de quienes eligieron a ese candidato podría ser diferente a 57%

Recordemos que las muestras tienen carácter aleatorio, no podemos asegurar que la variable que estamos estudiando se asemeje en la muestra al valor que tiene en la población. Por eso, el resultado que obtengamos en la muestra depende

---

<sup>1</sup>Las fórmulas para hacer inferencias que aparecen en este capítulo y los siguientes, son correctas si el muestreo es irrestricto aleatorio, cuando se usen otros diseños de muestra (siempre probabilísticos), será necesario introducir ajustes; el texto de Scheaffer et al (1987) es una adecuada referencia para esas correcciones.

del azar: se trata de una variable aleatoria. Tanto la media muestral, en el ejemplo de las edades de los 20 estudiantes, como la proporción muestral, en el ejemplo de los 50 votantes, son medidas calculadas sobre los valores obtenidos en muestras aleatorias, son variables aleatorias, sus valores dependen de cuáles sean los casos que constituyen la muestra y esto depende del azar, que es lo que hemos pedido como requisito al procedimiento de muestreo.

Estamos entonces refiriéndonos a entidades diferentes cuando hablamos de la media poblacional y la media muestral, o cuando se distingue a la proporción muestral o poblacional. Aunque el procedimiento de cálculo sea el mismo, el valor poblacional es un valor que puede ser conocido, si hemos observado a toda la población por medio de un censo o si ya han sucedido las elecciones, o desconocido. Cuando hacemos estimaciones no sabemos cuánto vale la media o la proporción poblacionales, pero sí sabemos que es un número estable, fijo<sup>2</sup>. Por el contrario, la media y la proporción muestrales - porque dependen de los casos que hayan sido aleatoriamente seleccionados para constituir la muestra - dependen finalmente del azar, por eso son variables aleatorias.

Las medidas que se refieren a la población se denominan **parámetros** también llamados **parámetros poblacionales**, para acentuar que se trata de la población). Por ejemplo, el valor de 26,8 años que mencionamos más arriba es la media paramétrica o también media poblacional, porque fue calculada sobre todos los alumnos de Psicología. El 57% de votos que obtuvo el candidato ganador en Córdoba es la proporción paramétrica, porque proviene del recuento de todos los votos emitidos. Además de la media y la proporción, en los capítulos siguientes se harán estimaciones de la varianza, la desviación estándar, y de coeficientes de correlación (Pearson, Spearman). Todas las medidas que hemos mencionado hasta aquí pueden calcularse sobre la población completa si se hace un relevamiento completo (censo, elecciones), o bien sobre una muestra que debe ser aleatoria si se quiere luego hacer inferencias. En todos los casos que se trate de medidas que se refieran a la población completa, las llamaremos paramétricas. Solo podrían ser conocidas en aquellos casos en que la población íntegra fuera observada, es decir, si se hiciera un relevamiento exhaustivo; allí no hay inferencia.

Por eso, lo que interesa en estadística inferencial son las situaciones en que no conocemos los parámetros de una población, porque entonces deberemos **estimarlos** desde la muestra. Diremos que buscamos estimar diferentes parámetros. Ese es el tema que tratará el próximo capítulo: “Estimación de Parámetros”. También puede suceder que haya algún valor hipotético para un parámetro, al que necesitemos poner a prueba. En ese caso usaremos los datos de la muestra para **probar una hipótesis**, de eso trata un amplio campo que trataremos más adelante llamado “Pruebas de Hipótesis”.

---

<sup>2</sup>Considerar al valor poblacional como fijo o aleatorio depende de la concepción de azar que se adopte. El enfoque frecuencial, los toma como fijos, mientras que el enfoque bayesiano los toma como variables aleatorias, ya que trata como azaroso un proceso cuyo resultado no puede anticiparse con certeza. En lo que sigue, adoptaremos el enfoque frecuencial.



Las medidas calculadas sobre los datos de la muestra se denominan **estadísticos** también llamadas **estadísticos muestrales**, nuevamente para acentuar de dónde provienen. Hablaremos entonces de la media muestral, la proporción, la varianza o el coeficiente de correlación muestral. Los valores que de ellos obtengamos en la muestra permitirán estimar los correspondientes valores paramétricos. Por eso decimos que la media muestral es el estimador de la media poblacional y del mismo modo con la proporción, la varianza, la desviación estándar o los coeficientes de correlación. La media muestral es el promedio de la variable (cuantitativa) que se observa en la muestra de  $n$  casos seleccionados. Para calcular la proporción, se debe contar con una variable categórica (o categorizada) y seleccionar las categorías de interés, los que hemos llamado éxitos en la distribución binomial. Si se trata de varones y mujeres, puede elegirse la proporción de mujeres, si se hizo una encuesta de valores, puede estimarse la proporción de personas con ideología autoritaria, o con inclinaciones progresistas, o de religión católica, etc. La proporción es como sabemos, el cociente entre los casos que resultan en la categoría de interés y la cantidad total de casos.

Para distinguir entre las medidas calculadas sobre toda la población y las de la muestra usaremos diferentes símbolos. De manera general, las letras latinas se usarán para identificar medidas descriptivas obtenidas sobre datos muestrales, mientras que usaremos letras griegas para referirnos a los valores de la población. Pero esto no es siempre así, por razones de tradición en el uso, en el caso de la proporción se distingue la poblacional de la muestral usando  $P$  (mayúscula) para la primera y  $p$  (minúscula) para la segunda<sup>3</sup>. La siguiente es la notación que usamos y la correspondencia entre valores poblacionales y muestrales.

---

<sup>3</sup>Dado que puede haber confusión al escribir  $p$  o  $P$ , es frecuente usar  $\hat{p}$  para indicar la proporción muestral, con la misma notación que se usó en regresión para indicar el valor estimado de la variable dependiente.

	En la población	En la muestra
Cantidad de casos	$N$	$n$
Media	$\mu$	$\bar{x}$
	(mu)	
Proporción	$P$	$\hat{p}$
Varianza	$\sigma^2$	$s^2$
	(sigma cuadrado)	
Desviación Standard	$\sigma$	$s$
	(sigma)	
Diferencia de medias	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
Diferencia de proporciones	$P_1 - P_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$
Cociente de varianzas	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$
Coeficiente de correlación de Pearson	$\rho$	$r$
	(rho)	
Coeficiente de correlación de Spearman	$\rho_s$	$r_s$
	(rho ese)	
Pendiente de la recta de regresión	$\beta_1$	$b_1$
	(beta uno)	
Ordenada al origen de la recta de regresión	$\beta_0$	$b_0$
	(beta cero)	

Las operaciones que se realizan para calcular los estadísticos que hemos tratado hasta aquí son las mismas que para los parámetros, solo difieren los nombres de cada elemento. Así, para calcular  $\bar{x}$  debemos hacer como con  $\mu$ ; sumar todos los valores y dividir por el total de casos, pero en lugar de:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{n}$$

Escribiremos:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i * f_i}{N}$$

Que solo difiere en el nombre de la media y la cantidad de casos.

En el caso de la proporción, llamamos  $x$  a la cantidad de casos que se encuentran en la categoría de interés (la cantidad de éxitos):

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Mientras que en la población, si  $X$  es la cantidad de éxitos:

$$P = \frac{X}{N}$$

Una excepción a esto es el caso de la varianza, porque el modo de calcularla es levemente distinto si se trabaja con datos muestrales o poblacionales. Cuando es calculada sobre los elementos de la muestra, recordemos que la varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Pero cuando la varianza se calcula sobre los elementos de la población, su cálculo se realiza con la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

En esta última expresión cambiaron los nombres de los elementos con los que se opera ( $\mu$  en lugar de  $\bar{x}$ ,  $N$  en lugar de  $n$ ), y además se ha eliminado el  $-1$  del denominador. Ya no es el total de casos menos uno, sino el total de casos. El origen de esto es que esta última expresión (con denominador  $N$ ) es la definición original de la varianza, mientras que la que usada en la muestra ( $s^2$  con denominador  $n - 1$ ) es una corrección, que se hace para que sea un buen estimador de la varianza poblacional.<sup>4</sup>

Así, la característica poblacional que pretende conocerse se llama **parámetro** y a través del proceso de muestreo se seleccionan algunas unidades del universo que actuarán como representantes de la población completa. Esta muestra será toda la información disponible para realizar estimaciones acerca de los parámetros poblacionales. Los valores calculados sobre los datos muestrales son los que se utilizarán para realizar aproximaciones a los valores poblacionales; tales valores son denominados **estimadores puntuales**, o simplemente **estimadores**.

De una población se pueden obtener un número muy grande de muestras, dependiendo de su tamaño y del universo de donde se extraen, pero en un proceso de muestreo se toma una sola muestra de todas las posibles. Dado que las muestras se extraen al azar, cada una de ellas proveerá de una estimación diferente del parámetro. Para un parámetro elegido, habrá tantos valores estimados como muestras puedan extraerse de la población (con algunos resultados repetidos). Esta variación (casi) impredecible de los estimadores, hace que se comporten como variables aleatorias.

---

<sup>4</sup>Lo que se consigue con esa corrección es que, si se calculan las varianzas de todas las muestras que se saquen de una población dada, éstas promedien la varianza de la población, lo cual no sucede si se usa el denominador  $n$ . Se denomina insesgabilidad del estimador, por lo que podemos decir que el denominador de la varianza muestral se transforma en  $n - 1$  para lograr que sea un estimador insesgado de la varianza poblacional.

Es posible (aunque esperamos que sea poco probable) que el estimador se aleje notablemente del valor poblacional al que se pretende estimar. Así, si se busca estimar la edad promedio de los estudiantes de cierta carrera universitaria y no se cuenta con un registro de ellos, puede usarse una estimación a partir de una muestra extraída de todos los estudiantes. El promedio calculado sobre esos datos se tomará como estimación de la edad de todos los estudiantes; pero puede ocurrir que la muestra contenga, por azar, al grupo de mayor edad de toda la población, con lo cual el resultado así obtenido será una sobreestimación del verdadero valor poblacional. En un sondeo de opinión preelectoral, suponiendo que la verdadera proporción de personas que votaría a un candidato es 45%, puede suceder que, de las muchas muestras, alguna de ellas se aleje tanto del 45% como que en ella, la intención de voto llegue a 65%, por tratarse de una muestra es un resultado posible, pero veremos que es poco probable. Debe destacarse que estos hechos (que los valores muestrales se alejen mucho de los poblacionales) resultan completamente inadvertidos para el investigador. Con respecto a la ocurrencia de estos eventos que conducen a resultados engañosos, sólo será posible -bajo ciertas condiciones-, calcular sus probabilidades.

#### 10.1.0.1 Dos aspectos importantes para recordar cuando se usan muestras:

- La variabilidad de las muestras: las muestras difieren entre sí. Varias muestras extraídas de la misma población dan resultados diferentes.
- La representatividad de la muestra: No indica la similitud entre la muestra y la población, sino su obtención por un procedimiento adecuado que permita estimar valores de la población a partir de lo que se halle en la muestra.

## 10.2 Características de los estimadores

### 10.2.1 Insesgabilidad

Si fuera posible extraer todas las muestras de una población, se contaría con todos los estimadores de un parámetro dado. Cuando el promedio de todos los valores obtenidos en todas las muestras de un determinado tamaño para cierto parámetro es igual al valor de esa característica en la población, se dice que el estimador muestral es **insesgado**. Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre el promedio que alcanzaría sobre todas las muestras posibles y el verdadero valor del parámetro poblacional. En el caso de un estimador insesgado esta diferencia es igual a cero (sin sesgo).

### 10.2.2 Consistencia

Intuitivamente puede pensarse que el aumento en el tamaño de la muestra (número de elementos que la componen) mejora la calidad de la estimación. Esta característica, que se cumple para algunos estimadores, es denominada **consistencia**. Un aumento en el tamaño de la muestra no garantiza que se obtendrán resultados más próximos a los valores poblacionales: por grande que sea la muestra no resulta imposible que a ella pertenezcan los valores más extremos de la población. Veamos esto con un ejemplo. Supongamos que se quiere estimar la calificación promedio con que egresan los alumnos de una carrera dada y que se toma una muestra de 30 egresados. Puede ocurrir que la muestra (por azar) contenga a los treinta mejores promedios de la carrera, con lo que se obtendría una sobreestimación del verdadero promedio de toda la población. El concepto de consistencia expresa que si la muestra, en lugar de 30 elementos, contiene 100, la probabilidad de obtener una sobreestimación igualmente extrema es menor. Intuitivamente podemos ver que resulta más factible encontrar a los 30 mejores que a los 100 mejores.

No debe entenderse que el estimador alcance valores más próximos a los paramétricos a medida que la muestra aumenta de tamaño, sino que disminuye la probabilidad de obtener resultados muy lejos de los paramétricos a medida que la muestra crece. Esta idea parece un poco abstracta ahora, se aclarará cuando la usemos en casos aplicados.

### 10.2.3 Eficiencia

Esta es una característica relativa, es decir que sirve para comparar estimadores. La eficiencia será mayor cuanto más pequeña sea la varianza del estimador. Por ejemplo, la media es un estimador más eficiente que la mediana porque, extraídas en todas las muestras posibles de un tamaño dado, la varianza de las medias es menor que la de las medianas.

Una vez acordados los elementos con los que trabajaremos en este capítulo, debemos volver sobre el problema del carácter aleatorio de los estimadores (los estadísticos muestrales). Como variables aleatorias que son, tienen distribuciones de probabilidad asociadas y eso es lo que permite calcular la probabilidad de ocurrencia de sus diferentes valores. Conocer las distribuciones de probabilidad de los estadísticos muestrales sirve para ponerlos en relación con los parámetros a los que estiman: se usarán las distribuciones de probabilidad ya mencionadas para relacionar los estimadores (conocidos) con los parámetros (desconocidos). A fin de presentar el tema, haremos “como si” se conocieran los valores poblacionales, y veremos qué sucede con los estimadores.

### 10.2.3.1 Primera aproximación

El problema de las distribuciones muestrales se presenta aquí a través de un ejemplo que trata sobre una muy pequeña población ficticia. Supongamos que sea la población de tres pacientes de un hospital psiquiátrico que los tiene como únicos internados<sup>5</sup>. Llamaremos A, B y C a estos tres pacientes y consideraremos dos variables: el *tiempo que llevan desde su ingreso* (expresado en meses) y el *sexo*. La primera variable es cuantitativa, la segunda cualitativa. La siguiente es la matriz de datos para esta población ficticia y las variables indicadas.

Caso	Paciente	Meses desde el ingreso	Sexo
1	A	3	Varón
2	B	4	Mujer
3	C	5	Varón

Para describir esta población mostramos su (elemental) distribución de frecuencia e indicaremos la media y la varianza de la variable cuantitativa (meses desde el ingreso):

$x$	$f$
3	1
4	1
5	1
Total ( $N$ )	3

$$\mu = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{3 - 4^2 + 4 - 4^2 + 5 - 4^2}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Además, calcularemos -también sobre datos de la población completa- la proporción de mujeres<sup>6</sup>, codificando como 1 la presencia de un “éxito” y 0 su ausencia:

$$P = \frac{0 + 1 + 0}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$$

<sup>5</sup>Suponer que en el hospital solo hay tres internados es una gran simplificación, por cierto ficticia. Se usa con fines expositivos, para poder hacer intuitiva la comparación entre la población y las muestras.

<sup>6</sup>Esta categoría se eligió arbitrariamente, podría haber sido la otra y calcular la proporción de varones.

Estos valores ( $\mu$ ,  $\sigma^2$  y  $P$ )\$ son los que llamamos parámetros y caracterizan a las dos variables para la población completa.

Ahora veremos qué sucede cuando se muestrea. Para ello vamos a sacar todas las muestras posibles de tamaño dos (podrían haber sido de otro tamaño, lo elegimos para este ejemplo), y las muestras que extraigamos serán con reposición<sup>7</sup>. Así resultan las siguientes nueve muestras posibles:  $AA$ ,  $AB$ ,  $AC$ ,  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB$ ,  $CA$ ,  $CB$ ,  $CC$ . Como todas tienen la misma oportunidad, cada una tiene probabilidad  $1/9$  de ser seleccionada aleatoriamente.

En cada una de las muestras calcularemos la media del tiempo de internación ( $\bar{x}$ ) y la proporción de mujeres ( $\hat{p}$ ).

Muestra	Meses de internación	$\bar{x}$	Cantidad de mujeres	$\hat{p}$
AA	3-3	3,0	0	0,0
AB	3-4	3,5	1	0,5
AC	3-5	4,0	0	0,0
BA	4-3	3,5	1	0,5
BB	4-4	4,0	2	1,0
BC	4-5	4,5	1	0,5
CA	5-3	4,0	0	0,0
CB	5-4	4,5	1	0,5
CC	5-5	5,0	0	0,0

Antes de analizar estos resultados, los organizaremos mejor, presentando las distribuciones de frecuencia de las  $\bar{x}$  y de las  $\hat{p}$ :

$\bar{x}$	$f$	$f'$	$\bar{x}$	$f$	$f'$
3,0	1	0,11	0,0	4	0,44
3,5	2	0,22	0,5	4	0,44
4,0	3	0,33	1,0	1	0,11
4,5	2	0,22	Total	9	1,00
5,0	1	0,11			
Total	9	1,00			

<sup>7</sup>Nuevamente se trata de una simplificación expositiva. Esta forma de extraer una muestra no es la que se aplica en la práctica, porque no se permite elegir dos veces al mismo individuo. Sin embargo, este muestreo con reposición es una buena aproximación a los muestreos verdaderos (sin reposición) cuando se trabaja con poblaciones grandes. Es así porque la extracción de unos pocos casos, aunque sean sin reposición, altera poco la probabilidad de ser extraídos de los otros casos.

### 10.3 Distribución de la media muestral

Vamos a concentrarnos inicialmente en la distribución de  $\bar{x}$ . Lo primero que se observa en la tabla de distribución de frecuencias de  $\bar{x}$  es lo que significa que  $\bar{x}$  sea una variable: quiere decir que las diferentes muestras ofrecen valores diferentes de  $\bar{x}$ ; o bien, que el valor de  $\bar{x}$  varía dependiendo de cuál haya sido la muestra que se seleccionó al azar. En segundo lugar, estos valores no se refieren a casos individuales sino a promedios obtenidos en muestras de tamaño dos.

Si se usan las frecuencias relativas como aproximaciones a la probabilidad, leemos en la tabla que la probabilidad de obtener una muestra en la que el promedio sea de tres meses de internación es de 0,11. Expresamos estos simbólicamente así:

$$P\bar{x} = 3 = 0,11$$

Comparando las probabilidades de los diferentes valores de  $\bar{x}$ , se puede ver que resulta más probable hallar una media de 4 que de 3.5 ó de 3; porque  $P\bar{x} = 4 = 0,33$  mientras que  $P(\bar{x} = 3) = 0,11$ . Se trata de un resultado importante, porque la media de la población es 4, por lo que vemos que es más probable encontrar una media muestral cerca de la media poblacional que lejos de ella.

La representación gráfica de la distribución también nos aporta información sobre la relación entre  $\bar{x}$  y  $\mu$ .

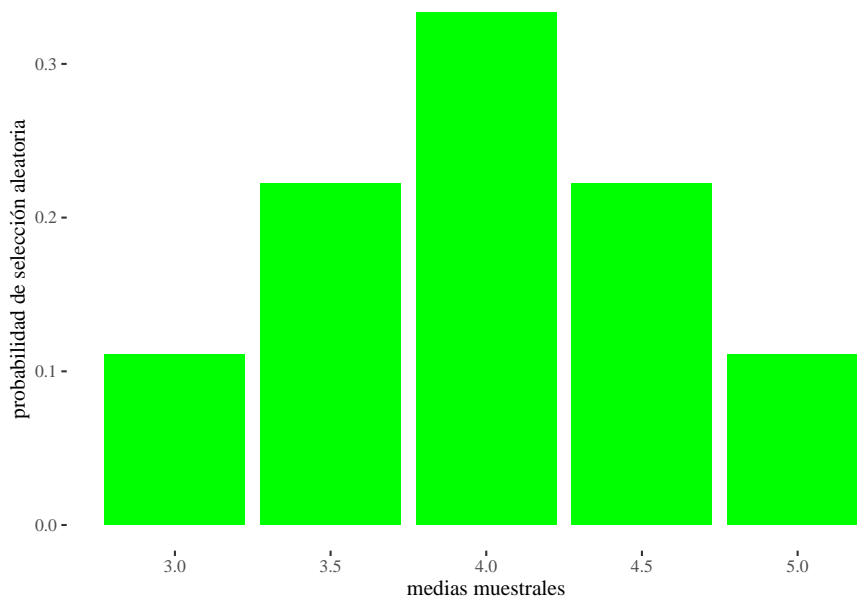
Se observa que  $\bar{x}$  asume valores cuya distribución es simétrica alrededor de 4, que es la media poblacional ( $\mu$ ). Resulta interesante comparar esta distribución con la que tiene la variable original, el número de meses de internación de cada paciente,  $x$ :

Observemos primero el nombre de los ejes: el 10.1 muestra la distribución de las  $\bar{x}$ : el promedio de los tiempos de internación de muestras de dos pacientes. Son nueve casos, cada uno es una muestra de tamaño 2. Sus valores están en el eje horizontal y sus probabilidades se indican como  $P(\bar{x})$  en el eje vertical.

El Gráfico 10.2, representa los valores de  $x$ : los tiempos de internación de cada paciente individualmente. Son tres casos, cada uno es un paciente. Esos son los valores que se ubican en el eje horizontal, las probabilidades del eje vertical son  $P(x)$ .

La del Gráfico 10.1 es la distribución en la población, en este caso es uniforme, pero podría tener cualquier otra forma. Por el contrario, la del Gráfico 10.2 es la distribución de las medias muestrales; es simétrica y va a tender a tener esta forma a medida que las muestras sean de mayor tamaño, independientemente de cuál sea la distribución que la variable tenga en la población. Luego volveremos sobre esta importante observación.



Figura 10.1: Distribución de probabilidades de  $\bar{x}$ 

Vamos ahora a describir esta nueva variable  $\bar{x}$ , a través de su esperanza y su varianza.

Calculemos primero la esperanza de  $\bar{x}$ , aunque, por la forma de la distribución, puede anticiparse:

$$E\bar{x} = 3 * 0,11 + 3,5 * 0,22 + 4 * 0,33 + 4,5 * 0,22 + 5 * 0,11 = 4$$

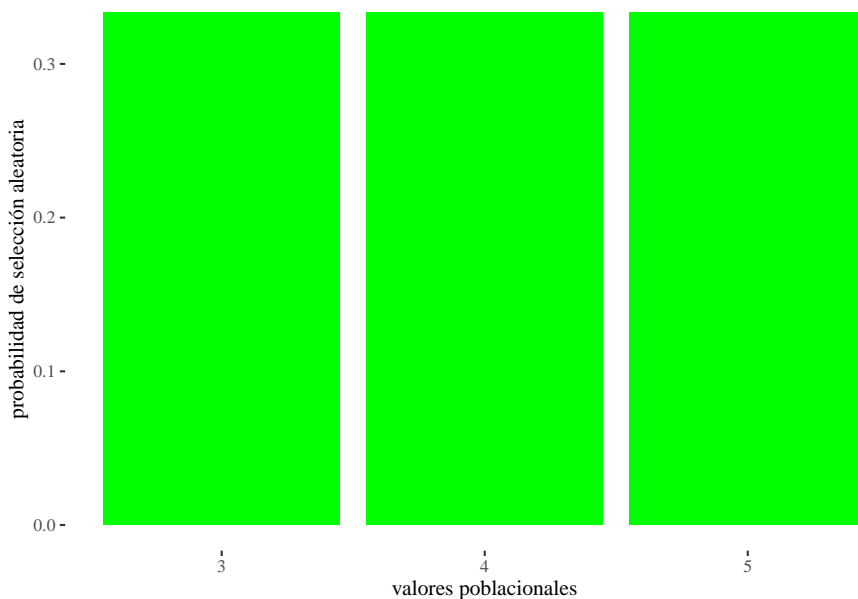
Se verifica que el valor esperado para las medias muestrales coincide con la media de la población. Este es el primer resultado que nos interesa retener de la relación entre  $\bar{x}$  y  $\mu$ ; la expresamos como:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

Que puede escribirse:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

Esto implica que, si de una población se extraen todas las muestras posibles de un determinado tamaño, y en cada una de ellas se calcula la media, el promedio

Figura 10.2: Distribución de probabilidades de  $x$ 

de esas medias muestrales coincide con la media de la población completa. Esta cualidad según la cual la esperanza del estimador es igual al parámetro, como ya hemos dicho, se llama insesgabilidad. Cuando un estimador cumple con esa condición (como sucede con  $\bar{x}$  como estimador de  $\mu$ ) se dice de él que es insesgado.

---

La media muestral ( $\bar{x}$ ) es un estimador **insesgado** de la media poblacional ( $\mu$ ).

---

Ahora vamos a calcular la varianza de  $\bar{x}$ :

$$V\bar{x} = 3-4^2*0,11+3,5-4^2*0,22+4-4^2*0,33+4,5-4^2*0,22+5-4^2*0,11 = 0,33$$

Este valor no es el mismo que el de  $\sigma^2$ , sino que es la mitad. Se trata nuevamente de un resultado que podemos generalizar y que depende del tamaño de la muestra. En el caso de este ejemplo, las muestras son de tamaño dos y por esa razón la varianza de la media muestral es la varianza poblacional dividida por dos. Si las muestras fuesen de tamaño 3, la varianza habría quedado reducida a la tercera parte. Para otro tamaño de muestra, la varianza de  $\bar{x}$  será diferente. De modo general, la varianza de  $\bar{x}$  se relaciona con la varianza de  $x$  ( $\sigma^2$ ) a través de:

$$V\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$$

De manera alternativa, indicamos a esta varianza como  $\sigma_{\bar{x}}^2$ , con lo que:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Esta fórmula indica que la varianza de las  $\bar{x}$  varía inversamente con el tamaño

---

La media muestral ( $\bar{x}$ ) es un estimador **consistente** de la media poblacional ( $\mu$ ).

---

De la varianza surge inmediatamente la desviación estándar de  $\bar{x}$  es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es común referirse a ella como el **error estándar de la media**, y suele abreviarse, en algunos programas de análisis de datos como EE.

Este es el segundo resultado de importancia sobre la relación entre  $\bar{x}$  y  $\mu$ .

En la práctica, fuera de este ejemplo simplificado, solo extraemos una muestra y en ella calculamos la media. Lo que hemos visto hasta aquí nos dice que la media muestral que se obtenga tiene más chances de estar cerca de la media poblacional cuanto más grande sea la muestra que tomemos. Esto es así porque a medida que aumenta el número de casos en la muestra ( $n$ ) disminuye la varianza y en consecuencia las medias muestrales tienen más probabilidad de estar cerca de la media poblacional. Por eso, será más probable que la única media que se obtiene en la muestra sea próxima al parámetro que se estima. No es seguro que la media muestral sea cercana a la poblacional, lo que se sabe es que es menos probable que esté lejos cuando la muestra es más grande.

La tercera característica de la distribución de la media muestral se refiere a su forma. En el Gráfico 10.1 se ve que las  $\bar{x}$  del ejemplo alcanzan una distribución unimodal y simétrica, sin importar que en la población la variable hubiese tenido una distribución uniforme. Este resultado también es general y es más amplio aun: a medida que aumenta el tamaño de las muestras, la distribución de las medias muestrales tiende a ser normal. La prueba de esta afirmación constituye el Teorema Central del Límite, cuyo enunciado puede resumirse como: una suma de  $n$  variables aleatorias tiende a tener distribución normal a medida que aumenta  $n$ , independientemente del modo en que esté distribuida esa variable. Para nuestro uso, la media es una suma de valores de una variable aleatoria (porque esos valores provienen de una muestra aleatoria) dividida en el total de casos. Por eso el teorema nos dice que si se trata de muestras grandes, puede tratarse a  $\bar{x}$  como teniendo una distribución normal.

Anteriormente se presentó el experimento de tirar un dado dos veces, contar la suma de los puntos obtenidos y definir la variable aleatoria  $S$  que resulta de la suma de dos variables aleatorias, porque cada tirada del dado da lugar a un resultado entre 1 y 6 que depende del azar. La variable que resulta de tirar una sola vez el dado tiene distribución uniforme: todos los números tienen la misma probabilidad  $1/6$ . La suma de puntos de los dos dados,  $S$ , ya no tiene distribución uniforme, porque es más probable obtener 7 (que puede resultar de

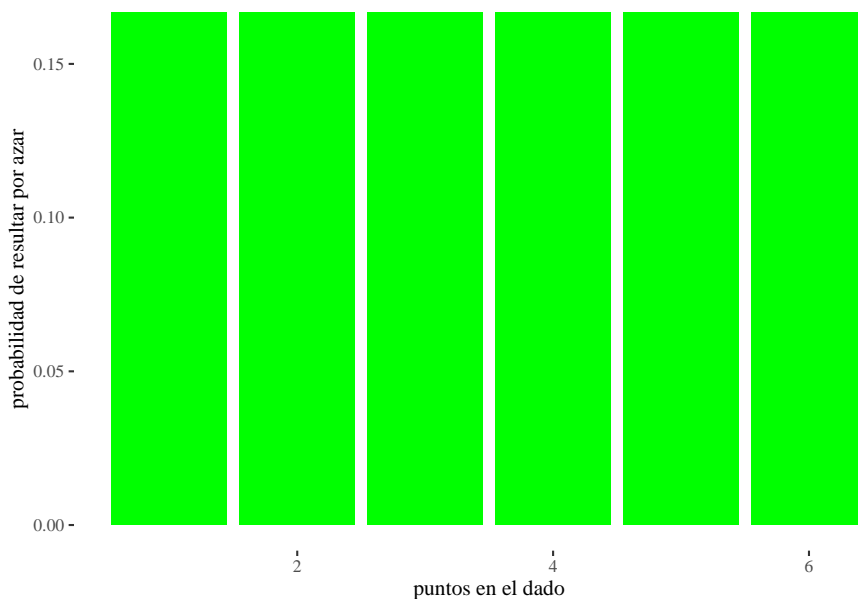


Figura 10.3: Distribución de probabilidades de la variable  $x = \text{puntaje obtenido al tirar un dado}$

6 + 1, 5 + 2, 4 + 3, 3 + 4, 2 + 5 ó 1 + 6) que 12 (que solo puede obtenerse con 6 + 6).

Si bien la distribución de esta variable no es normal, se aprecia la tendencia, “va camino a ser normal”. En este caso la muestra tiene solo dos casos (las dos tiradas del dado); cuando son más casos, la distribución va volviéndose más cercana a la normal.

Esto es lo que sucede cuando se extraen muestras de una población: la distribución de la variable en la población puede tener cualquier distribución (en el caso del dado es uniforme), pero a las medias muestrales les sucede lo mismo que a  $S$ , van tendiendo a tener una distribución normal a medida que se toman muestras de mayor tamaño. Éste es el tercer resultado que necesitamos para relacionar a la media muestral con la poblacional y poder hacer las primeras inferencias.

Resumimos en el recuadro siguiente los tres resultados mostrados hasta este punto.

- $E(\bar{x}) = \mu$  o  $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

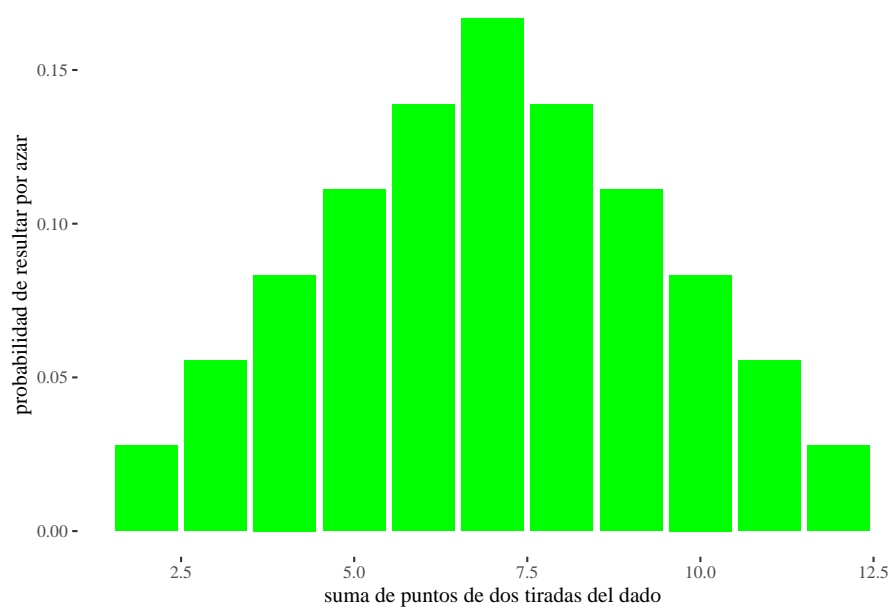


Figura 10.4: Distribución de probabilidades de  $S = \text{suma de puntajes obtenidos al tirar dos veces un dado}$

- $\bar{x} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

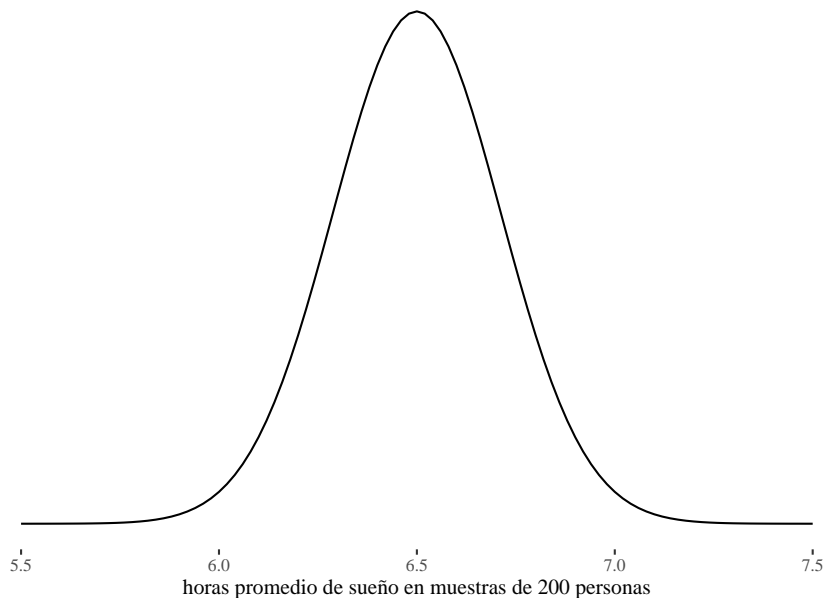
La última expresión sintetiza las anteriores y agrega que la distribución de  $\bar{x}$  es normal.

Entonces, del recuadro se lee que:

- La esperanza de  $\bar{x}$  es la media de la población (inesgabilidad).
- La varianza de  $\bar{x}$  es la varianza de la población dividida en el tamaño de la muestra<sup>8</sup> (consistencia).
- La media muestral tiende a tener una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ , cuando el tamaño de la muestra aumenta.

### 10.3.0.1 Ejemplo con datos ficticios

Supongamos que en la población de adultos la media de horas diarias de sueño es de 6,5 hs  $\mu = 6,5$  con varianza de 9 hs<sup>2</sup>  $\sigma^2 = 9$ . Si eligiéramos al azar muestras de 200 personas ( $n = 200$ ) y registraríamos el número promedio de horas de sueño en cada muestra, encontraríamos que la distribución de esas horas promedio sería como la siguiente:



<sup>8</sup>De modo equivalente, la desviación estándar de la media es la desviación estándar de la población dividida en la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Es conocida también como error estándar de la media.

En el eje horizontal están graficados los valores de las posibles  $\bar{x}$  que resultarían si sacáramos muestras aleatorias de esa población. La distribución normal está centrada en 6.50, que es la media de la población. El gráfico muestra con claridad que “lo más probable” es encontrar a  $\bar{x}$  en los alrededores de 6.50 y que, muestras de 200 personas que promedien valores superiores a 7 tendrían pocas posibilidades de ser seleccionadas.

Con la media y la desviación estándar de esta variable  $\bar{x}$  podemos calcular un puntaje  $z$ , lo que conocíamos como desvío estándar. Para llegar a la forma que tiene ahora  $z$ , recordemos que lo definimos como el número de desviaciones estándar a las que la variable se encuentra de la media, por eso era la diferencia entre el valor de la variable y el de la media, dividida en la desviación estándar:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

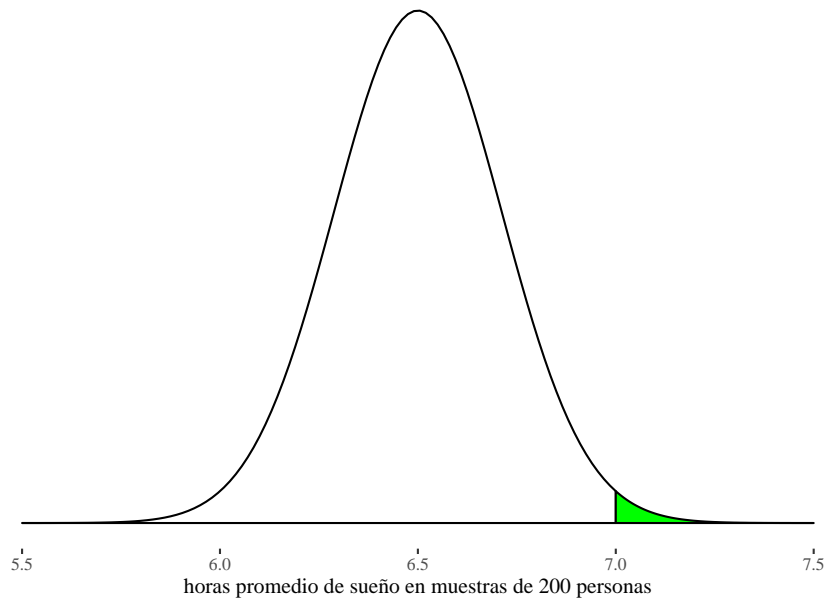
La diferencia ahora es que nuestra variable es  $\bar{x}$ , su media es  $\mu$  y su desviación estándar es el que hemos llamado error estándar de la media:  $\sigma_{\bar{x}}$ . Con lo que el puntaje  $z$  asociado a cada valor de  $\bar{x}$ , tiene ahora la forma:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Si se reemplaza el error estándar de la media por su valor, se obtiene:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si ahora nos preguntamos por la probabilidad de encontrar muestras de 200 personas cuyos promedios de horas de sueño superen las 7 horas, la representación gráfica será:



Y el valor de esa probabilidad se calcula observando a cuántas desviaciones estándar se encuentra de la media, es decir, calculando el puntaje  $z$  correspondiente a la media de 7 horas:

$$z = \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{200}}} = \frac{0,5}{0,21} = 2,38$$

Calculamos la probabilidad de superar este valor como el complemento de la acumulada<sup>9</sup>:  $1 - P(z \leq 2.38)$

```
## [1] 0.008656319
```

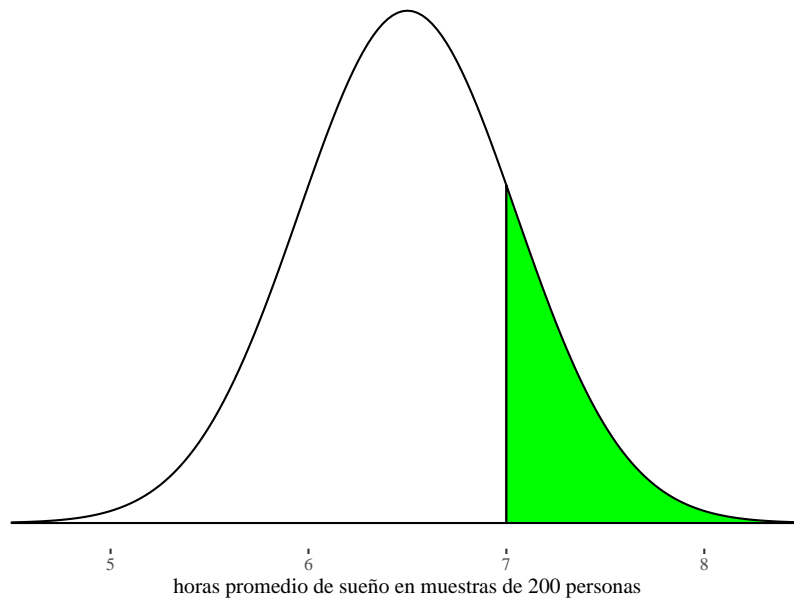
La lectura de este resultado es que solo el 0,9% de las muestras de tamaño 200 darán media muestral mayor a 7hs.

Para ver el efecto del tamaño de la muestra repetamos el cálculo con muestras de 30 casos<sup>10</sup>, cuyo gráfico es:

<sup>9</sup>Alternativamente podemos ingresar al calculador de InfoStat® con la media 6,5 y la desviación estándar 0,14 y obtener el mismo resultado sin pasar por  $z$ . Hicimos este recorrido porque necesitamos estar familiarizados con el puntaje  $z$  para los contenidos que veremos más adelante.

<sup>10</sup>Es el mínimo tamaño que podemos usar para que sea válida la aplicación de la distribución normal





En el que se observa la mayor varianza de las  $\bar{x}$ , debido al menor tamaño de muestra.

El puntaje  $z$  es ahora:

$$z = \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{30}}} = \frac{0,5}{0,55} = 0,91$$

## [1] 0.1814113

Es decir que el 18% de las muestras de tamaño 30 darán media que supere a 7hs. Esto indica que cuando las muestras son de mayor tamaño es menor la probabilidad de encontrar valores en los extremos de la distribución.

Para aclarar la relación entre valores poblacionales y muestrales, supongamos que la variable *horas de sueño* tiene distribución normal en la población y calculemos la probabilidad de encontrar personas que duerman más de 7 horas. Antes destaquemos la diferencia entre esta pregunta y las dos anteriores: las probabilidades que calculamos antes son las de hallar *muestras* de 200 personas o de 30 personas con promedio superior a 7 horas de sueño, ahora preguntamos por la probabilidad de encontrar *individuos* que tengan más horas de sueño que esa cifra. El puntaje  $z$  es ahora:

$$z = \frac{7 - 6,5}{3} = \frac{0,5}{3} = 0,17$$

La fórmula cambia porque la pregunta no es por medias muestrales sino por valores individuales, por eso no hay  $n$ <sup>11</sup>. La probabilidad es ahora:

```
## [1] 0.4325051
```

$$Pz > 0,17 = 0,432$$

Que leemos diciendo que el 43% de los individuos duerme 7 horas o más. Esto indica que es mucho más probable encontrar individuos que se alejen de la media, que grupos de 30 ó de 200 individuos cuyo promedio se aleje de la media. Cuando las muestras son de mayor tamaño, tanto más improbable resulta encontrarlas lejos de la media, eso es lo que está expresado cuando  $n$  aparece en el denominador de la desviación estándar: mayor  $n$  implica menor dispersión, y de ello se sigue que son menos probables los casos extremos.

### 10.3.0.2 Ejemplo con datos reales

Ahora trabajaremos sobre una base que contiene las notas de los tres parciales de Psicoestadística en 2009. En primer lugar damos una breve descripción de la población de las notas del tercer parcial:

##	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	NA's
##	1.000	4.000	6.000	5.779	7.000	10.000	265

Estas medidas están calculadas sobre la población completa, que es el total que alumnos que en 2009 hizo alguno de los tres parciales, como se ve, de ese total, hubo 265 que no hicieron el tercero. Por ser la población completa, se trata de parámetros, así:

$$\mu = 5.779$$

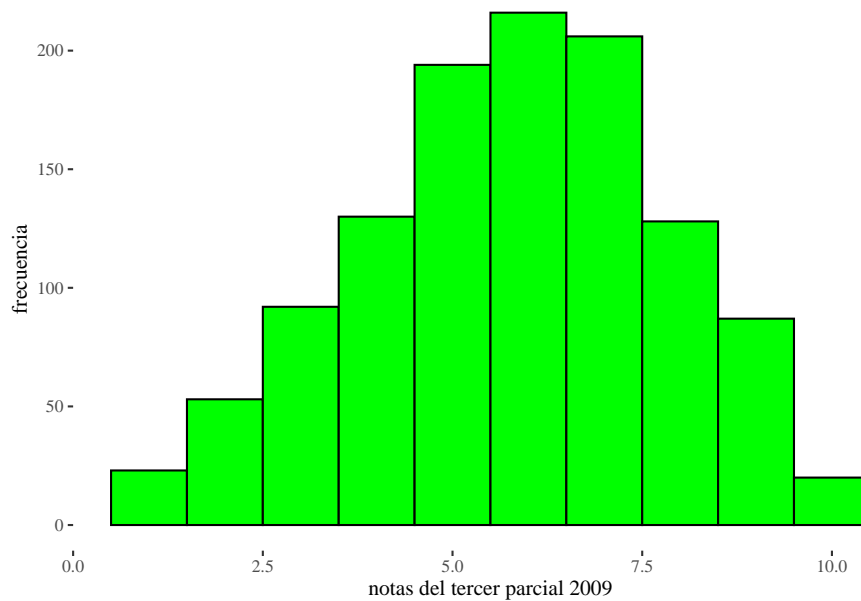
```
## [1] 4.120079
```

$$\sigma^2 = 4.12$$

El histograma de las notas del tercer parcial es:

---

<sup>11</sup>Aunque puede interpretarse como si los individuos constituyeran muestras de tamaño 1.



Ahora solicitamos a Infostat® que obtenga 200 muestras de 80 casos cada una y que en cada una de ellas calcule la media y la varianza muestral. No pedimos “todas las muestras posibles” ya que serían un número muy elevado, por eso, lo que tendremos será una aproximación a la relación entre estimadores y parámetros. Esa solicitud da lugar a una nueva tabla que contiene una media muestral y una varianza muestral para cada una de las 200 muestras calculadas. Cuando solicitamos un resumen de estas variables obtenemos:

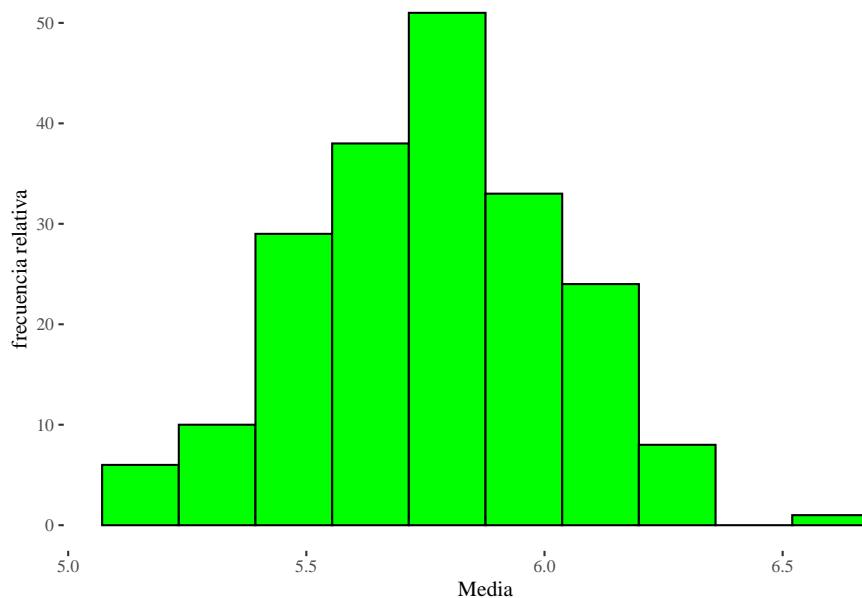
##	Media	Varianza
##	Min. :5.083	Min. :2.578
##	1st Qu.:5.594	1st Qu.:3.685
##	Median :5.759	Median :4.179
##	Mean :5.764	Mean :4.136
##	3rd Qu.:5.952	3rd Qu.:4.531
##	Max. :6.532	Max. :6.554

Observemos en detalle la salida:  $n=200$  es la cantidad de muestras que se extrajeron (y no el tamaño de cada muestra), ahora cada muestra representa un caso y las variables que se consideran son la media y la varianza de la nota de los 80 casos seleccionados en cada muestra. Se aprecia que el campo de variación de la variable original (nota del tercer parcial) iba de 1 a 10, mientras que la nueva variable (promedio de notas del tercer parcial de muestras de 80 alumnos) varía entre 5.01 y 6.35, es decir, es notablemente más restringido, tiene menos variabilidad.

El valor 5.78 es la media de todas las medias muestrales y como vemos coincide con la media poblacional. Del mismo modo, la media de todas las varianzas muestrales (4.12) coincide con la varianza poblacional. Eso quiere decir que la media y la varianza muestrales, son estimadores insesgados de la media y la varianza poblacionales.

Además, la salida muestra la varianza de las medias muestrales, que es 0.05. La relación de esta varianza con la varianza poblacional es:  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ , en la que  $n$  representa el tamaño de las muestras y no la cantidad de muestras solicitadas. Con los datos del tercer parcial es:  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{4.12}{80} = 0.05$

El histograma de las medias muestrales es:



En el que hemos usado la misma escala de 1 a 10 para que se vea con claridad la reducción en la dispersión de esta nueva variable.

## 10.4 Distribución de la proporción muestral

El razonamiento para llegar a la relación que hay entre el estimador  $\hat{p}$  y el parámetro correspondiente,  $P$  es completamente análogo al de la media, por lo que no recorreremos nuevamente los mismos pasos que llevaron a establecer la relación entre  $\bar{x}$  y  $\mu$ .

En primer lugar, y como sucede en el caso de la media,  $\hat{p}$  es un estimador insesgado de  $P$ .

---

La proporción muestral  $\hat{p}$  es un estimador **insesgado** de la proporción poblacional  $P$ .

---

Si extrajáramos todas las muestras posibles de una población y calculáramos en cada una la proporción de casos en una categoría de una variable, el promedio de todas esas proporciones muestrales, daría como resultado la proporción de casos que hay en esa categoría en la población. Por lo que podemos escribir que:

$$E\hat{p} = P$$

O de manera equivalente:

$$\mu_{\hat{p}} = P$$

Acerca de la dispersión que alcanzan las diferentes  $\hat{p}$  en las muestras, hay más diferencia con la media. En efecto, cuando se trata con variables cualitativas (nominales u ordinales) no hay distancias y en consecuencia no se puede usar una desviación estándar. La dispersión de una variable de este nivel se aprecia a través de la idea de incertidumbre: habrá tanto menos dispersión cuanto mayor sea la concentración de casos en una categoría de la variable. Así, la distribución:

candidato que votará	$f$
A	0.09
B	0.74
C	0.11
D	0.06
Total	1.00

Tiene menos dispersión que:

candidato que votará	$f$
A	0.23
B	0.31
C	0.26
D	0.20
Total	1.00

Porque si tuviéramos que “adivinar” quién va a ganar las elecciones, en el primer caso estaríamos más seguros de inclinarnos por el candidato B, que en el segundo. Aunque en ambas distribuciones el modo es el candidato B, en la primera la

concentración es mayor y menor es la incertidumbre, por lo que tenemos mayor certeza, menos dispersión.

Así es como se ha tratado el problema de la variabilidad en variables que no admiten la medición de distancias, en el capítulo . Pero en este caso, se está calculando  $\hat{p}$  como la proporción de una categoría, sin considerar cómo se distribuyen las otras, es decir que se trabaja con variables dicotómicas. Si se considera solo al candidato A, las dos tablas anteriores se reducen a:

candidato que votará	$f$
A	0.09
otro candidato	0.91
Total	1.00

candidato que votará	$f$
A	0.23
otro candidato	0.77
Total	1.00

¿Cuál de las dos distribuciones tiene mayor dispersión? La primera tiene una mayor concentración en la categoría “otro candidato” que la segunda, por lo que tiene menor dispersión. Por eso, en variables dicotómicas, la mayor diferencia entre las dos proporciones indica la mayor concentración y por ello, la menor dispersión.

Como lo vimos en el capítulo , La forma operativa de evaluar esto es multiplicando las dos frecuencias relativas:  $0.09 * 0.91$  en el primer caso, y  $0.23 * 0.77$  en el segundo. Esos productos dan 0.08 y 0.18 respectivamente; estos valores son indicadores de la menor dispersión de la primera distribución.

La operación de multiplicar a la proporción de casos de una categoría por la de la otra, que se escribe como  $P * (1 - P)$ , es la medida de la dispersión en variables nominales, que reemplaza a la varianza de las variables cuantitativas. Como sucedió con la media, la varianza de la proporción muestral es la varianza dividida el tamaño de la muestra:

$$V\hat{p} = \frac{P * (1 - P)}{n}$$

Como antes, muestras de mayor tamaño dan lugar a menor variabilidad. También puede expresarse la varianza de  $\hat{p}$  como  $\sigma_p^2$ , con lo que:

$$\sigma_p^2 = \frac{P * 1 - P}{n}$$

La desviación estándar de  $\hat{p}$  será:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P * 1 - P}{n}}$$

Esta expresión también se conoce como **error estándar de la proporción**.

Los dos últimos resultados (la esperanza y la varianza de  $\hat{p}$ ) se derivan de la distribución que rige el experimento de extraer  $n$  observaciones y contar la cantidad de casos que allí aparecen: se trata de la distribución binomial. Como vimos, si  $\hat{x}$  es la cantidad de casos en la categoría de interés en la muestra, entonces:

$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$$

Y, en consecuencia:

$$\hat{x} = n * \hat{p}$$

En el modelo binomial, la esperanza y la varianza de  $x$  (cantidad de casos en la categoría de interés) son:

$$E(\hat{x}) = n * P \quad (10.1)$$

$$V(\hat{x}) = n * P * (1 - P) \quad (10.2)$$

Remplazando  $x$  por su relación con  $\hat{p}$  y usando las propiedades de la esperanza y la varianza hallamos:

Para la esperanza de  $\hat{p}$  en (10.1):

$$E n * \hat{p} = n * P$$

$$n * E\hat{p} = n * P$$

$$E\hat{p} = P$$

Esta última igualdad muestra que, efectivamente  $\hat{p}$  es un estimador insesgado de  $P$ .

Para la varianza de  $\hat{p}$ , reemplazamos en (10.2):

$$Vn * \hat{p} = n * P * (1 - P)$$

$$n^2 * V\hat{p} = n * P * (1 - P)$$

$$V\hat{p} = \frac{P * (1 - P)}{n}$$

Y vemos que  $\hat{p}$  es un estimador consistente de  $P$ , porque a medida que aumenta el tamaño de la muestra, disminuye su varianza.

Para calcular la probabilidad de diferentes valores de  $\hat{p}$ , a partir de  $P$  y de un determinado tamaño de muestra, usamos la distribución binomial, en la que cambiamos la variable  $\hat{x}$  (número de casos en la categoría de interés) por  $\hat{p}$  (proporción de casos en esa categoría). Así, volviendo al último ejemplo que se vio en la distribución binomial, si en la población de estudiantes de Biología la proporción de mujeres es de 0,70; allí se preguntó por la probabilidad que, en una muestra de 15, fueran todas mujeres o bien, que  $\hat{x} = 15$  ahora puede plantearse en términos de proporciones: ¿Cuál es la probabilidad que, en una muestra de 15 estudiantes, el 100% sean mujeres? Aquí:

$$P = 0,70$$

$$n = 15$$

$$\hat{p} = 1$$

Usando el valor de  $\hat{p}$  y de  $n$ , calculamos  $x$ :

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 15 * 1 = 15$$

Esto quiere decir que pedir que la proporción muestral ( $\hat{p}$ ) sea 1 (100%) equivale a pedir 15 éxitos (mujeres) en la muestra, por lo que la probabilidad es:

$$P(\hat{p} = 1) = B(15; 15; 0,70)$$

## [1] 0.004747562



Es el mismo resultado obtenido antes, ahora ubicado en el contexto del muestreo.

Si la pregunta fuera ¿Cuál es la probabilidad que, si en la población la proporción es 0,70; en una muestra de 15 observaciones ésta sea 0,40? Respondemos del mismo modo, primero calculamos  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 15 * 0,40 = 6$$

Ahora la probabilidad es:

$$P\hat{p} = 0,40 = B6; 15; 0,70$$

## [1] 0.01159

De manera general, expresada en base a  $n$ ,  $\hat{p}$  y  $P$ , la probabilidad es:

$$P\hat{p} = B(n * \hat{p}; n; P)$$

Es posible, y se hace a menudo, aproximar estas probabilidades binomiales a través de un modelo normal. El fundamento de esta aproximación es el teorema de Laplace - De Moivre que dice que si  $x$  es una variable con distribución binomial, con esperanza  $n * P$  y varianza  $n * P * (1 - P)$ , entonces, cuando  $n$  tiende a infinito, la distribución de  $x$  tiende a ser normal, con la misma media (esperanza) y varianza. Por la condición “ $n$  tiende a infinito”, resulta claro que esto solo es válido<sup>12</sup> cuando  $n$  es grande y también debe cumplirse que  $P$  no está muy cerca de 0 ó de 1. La condición se solicita de manera sencilla exigiendo que

$$n * P \text{ y } n * (1 - P)$$

sean ambas mayores o iguales a 5. Si la variable sobre la que trabajamos no es  $x$  sino  $n * \hat{p}$ , entonces la esperanza y la varianza serán:

$$E(\hat{p}) = P \text{ y } V(\hat{p}) = \frac{P*(1-P)}{n}.$$

Si la condición de  $n * p$  y  $n * (1 - P)$  mayores o iguales a 5 se cumple, puede usarse esta aproximación y obtener un resultado análogo al de la media, que se resume así:

$$\bullet \hat{p} \rightarrow N(P, \frac{P*(1-P)}{n})$$

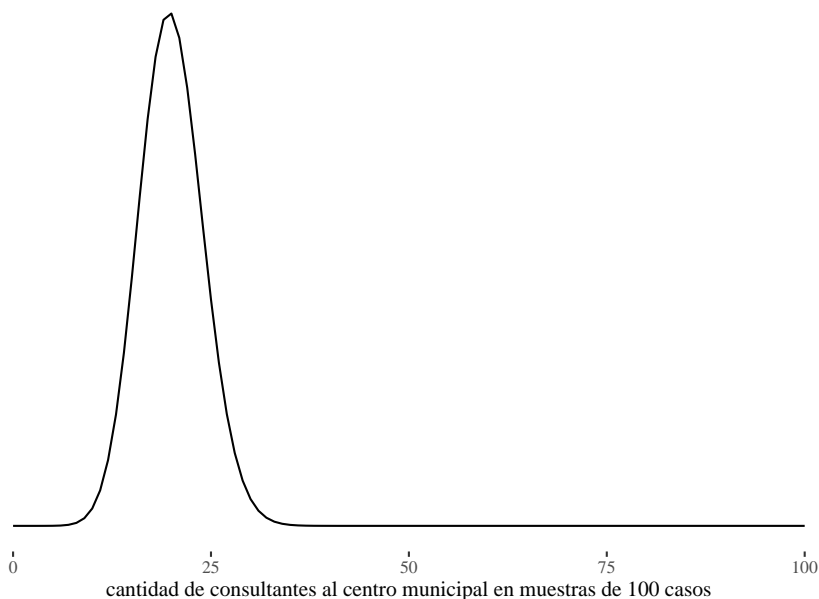
Si  $n$  tiene a  $\infty$  y  $n * P$  y  $n - (1 - P)$  son mayores a 5.

---

<sup>12</sup>Alvarado y Batanero sf., indican que “Respecto al valor de  $n$  requerido para una correcta aproximación de la distribución binomial, los textos no siempre están de acuerdo.” En algunos textos se solicita que  $n > 30$ , pero la calidad de la aproximación depende también de  $P$ .

### 10.4.0.1 Ejemplo con datos ficticios

Sea que para una localidad determinada, el 20% de los habitantes consultó al centro de salud municipal durante el año pasado. Si extraemos muestras de tamaño 100 y en cada una de ellas observamos la proporción de personas que consultaron a ese centro de salud durante el año pasado, el gráfico de la distribución binomial de la cantidad de consultantes en cada muestra será:



Este gráfico tiene un trazado continuo aunque se trata de una variable discreta. Eso se debe a que es un gran número de observaciones y la distancia entre ellas es pequeña. Cuantas más sean las observaciones, tanto más cercana a la continuidad será la sucesión de puntos.

El gráfico muestra las probabilidades asociadas a cada cantidad  $\hat{x}$  de éxitos que pueden resultar en la muestra, y cada valor de  $\hat{x}$  se corresponde con un valor de  $\hat{p}$  a través de:

$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$$

Por lo que el gráfico anterior puede tratarse a escala de  $\hat{p}$

Si nos interesamos por la probabilidad de obtener una proporción de 0,25 ó superior en la muestra, debemos transformarla a una cantidad de éxitos muestrales:

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 100 * 0,25 = 25$$



Entonces:

$$P\hat{p} \geq 0,25 = P\hat{x} \geq 25 = B(\hat{x} \geq 25; 100; 0,20)$$

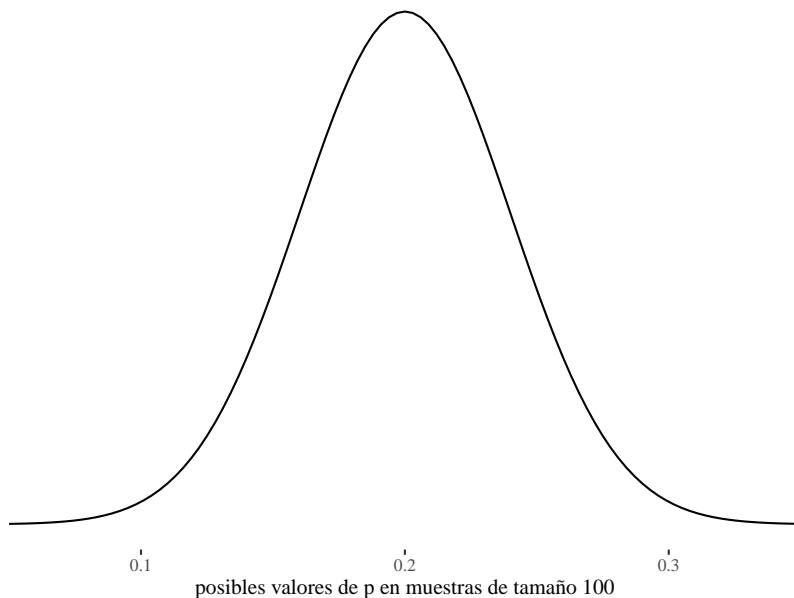
Al que solicitamos como complemento de la probabilidad acumulada de 24:

```
## [1] 0.1313532
```

$$P(\hat{x} \geq 25; 100; 0,20) = 0,1314$$

Interpretamos este resultado diciendo que, si en la población completa, la proporción de personas que consultan es del 20%, la probabilidad que en una muestra de 100 personas, hayan consultado el 25% ó más es de 0,1314. En otros términos, el 13% de las muestras de tamaño 100 que se extraigan de esa población, mostrarán una proporción de 0,25 ó mayor.

Dado que el número de casos en la muestra es elevado (100) y que  $n * P$  es 20 y  $n(1 - P)$  es 80, ambos mayores a 5, podemos usar la aproximación normal. Según esa aproximación, la distribución de los diferentes valores de  $\hat{p}$  es:



El eje horizontal de este gráfico representa todas las proporciones que pueden encontrarse en las diferentes muestras. La distribución está centrada en el parámetro  $P = 0,20$ .

Resolveremos la pregunta anterior transformando el valor  $\hat{p} \geq 0,25$  en un puntaje  $z$ . Conocemos la media y la varianza de  $\hat{p}$  por lo que haremos:

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sigma_{\hat{p}}}$$

Reemplazando por el error estándar de  $\hat{p}$ , tenemos:

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

Esta es la expresión con la que transformamos los valores de  $\hat{p}$  a puntajes  $z$ . Sin embargo es necesario hacer una corrección debido a que vamos a aproximar una distribución discreta (binomial) a través de una continua (normal)<sup>13</sup>, por lo que la expresión toma la forma:

$$z = \frac{\hat{p} - \frac{1}{2*n} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}} = \frac{0,25 - \frac{1}{200} - 0,20}{\sqrt{\frac{0,20*1-0,20}{100}}} = 1,125$$

$$P\hat{p} \geq 0,25 = Pz \geq 1,125$$

Que es el complemento de la probabilidad acumulada:

## [1] 0.1302945

$$Pz > 1,125 = 0,1303$$

Cuando anteriormente se usó la distribución binomial encontramos una probabilidad de 0,1314; por lo que ésta última es una buena aproximación.

A partir de los resultados encontrados en este capítulo podremos hacer estimaciones de la media y la proporción poblacionales a partir de los

<sup>13</sup>La distribución binomial tiene como variable discreta a  $\hat{x}$ , la cantidad de éxitos en la muestra, si nos interesa la probabilidad de los valores mayores o iguales a un  $\hat{x}$  dado, debemos tener en cuenta que al pasar a la normal, como es continua, no se pueden calcular probabilidades de valores exactos. Así, el conjunto  $\hat{x} \geq 3$ , debe transformarse en  $\hat{x} > 2,5$ ; dado que la probabilidad de  $\hat{x} = 3$  es cero cuando la tratamos como variable continua. De manera análoga, si buscáramos  $P(\hat{x} \leq 3)$ , deberemos tratarlo como  $P(\hat{x} < 3,5)$ . La corrección consiste entonces en tomar media unidad menos cuando calculamos probabilidades de valores mayores o iguales a uno dado, y media unidad más si se trata de la probabilidad de un valor menor o igual. Veamos el efecto que tiene esta corrección sobre  $\hat{p}$ . Dado que  $\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$ , cuando corregimos el número de éxitos en media unidad por debajo, nos queda  $\frac{\hat{x}-0,5}{n} = \frac{\hat{x}}{n} - \frac{0,5}{n} = \hat{p} - \frac{1}{2*n}$ . Cuando la corrección exija que se tome media unidad más, la corrección será  $\hat{p} + \frac{1}{2*n}$ .

respectivos valores muestrales. Hemos visto entonces que el carácter aleatorio de las muestras hace que las estimaciones sean inciertas, pero que, debido a que conocemos la distribución de probabilidades de los estimadores podemos establecer qué valores de ellos son más probables, así podremos hacer el camino inverso, que es el que más nos interesa: el de alcanzar a los parámetros a partir de los estimadores.

Usando la distribución normal como aproximación a la binomial, entonces, para los dos estimadores que hemos mencionado en este capítulo se cumple la relación:

$$z = \frac{E_s - P_a}{EEE}$$

En que resumimos:

- $P_a$  es el parámetro
- $E_s$  es el estimador
- $EEE$  el error estándar del estimador

Veremos en los próximos capítulos que esta expresión es válida para relacionar otros parámetros con sus correspondientes estimadores, mientras pueda usarse la distribución normal.

Con los contenidos vistos hasta este punto, en la expresión anterior, los componentes pueden ser:

- $P_a$ :  $\mu_1$  ó  $P$
- $E_s$ :  $\bar{x}$  ó  $\hat{p}$
- $EEE$ :  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ó  $\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

## 10.5 Muestras pequeñas

Las distribuciones de la media y la proporción muestral son asintóticamente modeladas por la distribución normal. Esto quiere decir que, a medida que el tamaño de las muestras crece, la distribución de estos estimadores va siendo más cercana a la curva del modelo normal. Sin embargo, cuando las muestras son pequeñas, se debe usar un modelo diferente. William Gosset (1908) desarrolló la distribución conocida como t de Student, que se adecua a describir la distribución de las medias muestrales cuando éstas provienen de muestras pequeñas. Expresado formalmente, si las muestras son pequeñas, entonces:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Tiene distribución  $t$  con  $n - 1$  grados de libertad. En el ejemplo de las horas de sueño, si las muestras fueran de tamaño 15 en lugar de 200, se debe usar la distribución  $t$ . Así, la pregunta ¿cuál es la probabilidad que en muestras de tamaño 15, la media de horas de sueño supere las 7 horas?, se responde usando la distribución  $t$  con 14 grados de libertad.

$$P(\bar{x} > 7) = P(t_{14} > \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{15}}}) = P(t_{14} > 3.87)$$

## [1] 0.0008496155

Cuando la muestra crece, la diferencia entre los modelos normal y  $t$ , se reduce. Si se repite la operación del ejemplo de las horas de sueño, con muestras de tamaño 200, usando la distribución  $t$ , resulta que:

## [1] 0.009128609

$$P(t_{199} > 2,38) = 0,009$$

Que es, hasta el tercer decimal, igual al que ofrece la distribución normal. A esto se refiere la idea que la distribución  $t$  converge a la normal: cuando las muestras son grandes, la distribución  $t$  da resultados muy parecidos a los de la normal. El criterio usual para decidir si corresponde usar una distribución  $t$  o una normal es de 30 casos. Sin embargo, a fin de ahorrar recursos, cuando se necesita hacer estimaciones que involucran a una u otra de estas distribuciones, los programas estadísticos usan siempre la distribución  $t$ .

## 10.6 Distribución de la varianza

La media y la proporción muestrales tienen distribuciones simétricas (normal o  $t$ ); por el contrario, la varianza muestral se distribuye de manera asimétrica, lo que puede ilustrarse con el ejemplo de las notas del tercer parcial. Si se solicitan 10000 muestras de tamaño 10, el siguiente es el histograma de las 10000 medias muestrales, con una curva normal superpuesta, para mostrar la calidad del ajuste:

Puede verse que el modelo normal “copia” muy adecuadamente la distribución real de las medias muestrales. Si se hace lo mismo con las varianzas muestrales, se obtiene:

Que muestra la asimetría de la distribución de las varianzas. Para este caso, el modelo adecuado es  $\chi^2$ . La relación entre la varianza muestral y la poblacional es:





$$\frac{n-1 * s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Que quiere decir que, dada una población con una determinada varianza  $\sigma^2$ , si se extraen todas las muestras posibles de un tamaño dado y en cada una de ellas se calcula la varianza muestral  $s^2$ , la expresión de arriba se distribuye con un modelo ji cuadrado con  $n-1$  grados de libertad.

El muestreo desde dos poblaciones, se utiliza para realizar comparaciones, entre medias, entre proporciones o entre varianzas, extrayendo una muestra de cada población, los tamaños de esas muestras se denominan  $n_1$  y  $n_2$ . Las medias y las proporciones se comparan por medio de la diferencia, mientras que con las varianzas, la comparación se hace por medio del cociente. Así, para comparar las medias de dos poblaciones, el parámetro es  $\mu_1 - \mu_2$  y su estimador  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ . Si se compara la proporción entre dos poblaciones, el parámetro es la diferencia de proporciones poblacionales:  $P_1 - P_2$  y su estimador, la diferencia de proporciones muestrales:  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ . Ambos estimadores (diferencia de medias y diferencia de proporciones) tienen distribución normal, o bien, en el caso de la media, distribución t, si se trata de muestras pequeñas.

## 10.7 Distribución del cociente de varianzas

Para comparar varianzas, el parámetro es el cociente de las varianzas poblacionales  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  y el estimador el cociente de las varianzas muestrales  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ . La relación entre estimador y parámetro es:

$$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Que indica que ese cociente es modelado por una distribución F con  $n_1-1$  grados de libertad en el numerador y  $n_2-1$  grados de libertad en el denominador.

## 10.8 Resumen de la relación entre estimadores y parámetros

Parámetro	Estimador	Estandarización del estimador
Media: $\mu$	$\bar{x}$	$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Media: $\mu$ (muestras pequeñas)	$\bar{x}$	$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Número de éxitos en la población X	$\hat{x}$	
Proporción de casos en una categoría: P (muestras grandes)	$\hat{p}$	$\frac{\hat{p}-P}{\frac{\sqrt{P(1-P)}}{\sqrt{n}}}$
Varianza: $\sigma^2$	$s^2$	$\frac{n-1*s^2}{\sigma^2}$
Cociente de varianzas: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$

## 10.9 Hacerlo en R

En este capítulo se ha recurrido a R solo para el cálculo de probabilidades, por lo que no hay nada nuevo. Agregamos solamente que la varianza que R calcula cuando se solicita `var(x)` es la varianza muestral, es decir, con denominador  $n - 1$ . Si se necesita calcular una varianza poblacional, se puede corregir esta varianza por medio de:

```
x <- c(2, 5, 6, 8, 5, 4, 7, 5, 8, 4, 7, 3)
var(x) * (length(x) - 1) / length(x)
```

```
## [1] 3.388889
```

Así se elimina el denominador  $n - 1$  de la varianza muestral y se reemplaza por  $n$ .

También puede definirse una función para que la calcule directamente:

```
var.p <- function(x) {
  var(x) * (length(x) - 1) / length(x)
}
```

## Capítulo 11

# Estimación por intervalo

Hemos llegado a este punto en el que haremos uso de casi todos los elementos que se presentaron hasta aquí. Se dedicó la Parte I a la descripción de datos provenientes de una muestra y luego, en la Parte II se ingresó al terreno de la incertidumbre. Solo resta integrar estos elementos en un procedimiento para realizar las estimaciones que interesen. Por esta razón se trata de un capítulo de plena aplicación práctica.

### 11.1 Estimación puntual

La media muestral  $\bar{x}$  es un estimador de la media poblacional, por lo que ya se cuenta con una primera estimación de ese parámetro  $\mu$ . De igual modo, la proporción muestral ( $\hat{p}$ ) estima a la proporción poblacional ( $P$ ). De modo que ya se conocen estimaciones de esos dos parámetros, son estimaciones puntuales. Se llaman así porque ofrecen un único valor como estimación del parámetro de interés. Por ejemplo si en una muestra de 50 psicólogos que egresaron en los últimos diez años se encuentra que han terminado la carrera con una nota promedio de  $\bar{x} = 6,50$ , disponemos de una media muestral; si ahora preguntamos por el promedio con que terminaron la carrera todos los psicólogos que egresaron en los últimos diez años, la respuesta es tentativa, diremos que “debe ser cercano a 6,50”. Con esta expresión imprecisa, hacemos una estimación de la media poblacional ( $\mu$ ). De igual modo, si en la misma muestra de 50 psicólogos, se ve que la proporción de mujeres es  $\hat{p} = 0,70$ , podremos decir que, del total de psicólogos egresados en los últimos diez años, “alrededor del 70% son mujeres”. Así hacemos una estimación de  $P$  a partir de  $\hat{p}$ . Pero estas estimaciones son deficientes, ya que no sabemos cuán cerca puede estar la verdadera nota promedio de 6,50 ó la verdadera proporción de mujeres del 70%. Estas son las que se denominan estimaciones puntuales.

La Encuesta Permanente de Hogares de Argentina da para el aglomerado Gran Córdoba, en el tercer trimestre de 2018, un ingreso salarial promedio de

## [1] 14979.02

Este es el resultado descriptivo que corresponde a los 754 asalariados que fueron encuestados en ese aglomerado. El ingreso salarial promedio de todos los trabajadores en relación de dependencia es un valor desconocido, que puede ser cercano al que se halló en la media, pero no puede asegurarse.

La encuesta Latinobarómetro 2017 da la siguiente distribución de frecuencias para las respuestas dadas a la pregunta si cree que se puede o no confiar en la gente.

Hablando en general, ¿Diría Ud. que...	$f$
Se puede confiar en la mayoría de las personas	2833
Uno nunca es lo suficientemente cuidadoso en el trato con los demás	16915
Sum	19748

La proporción de quienes creen que se puede confiar en la mayoría de las personas es  $\hat{p} = \frac{2833}{19748} = 0.142$ . De esto se puede leer que el 14.2% de los encuestados responde de esa manera, pero la generalización a la población de donde la muestra fue extraída solo puede hacerse de manera tentativa: alrededor del 14.2% del total opina que se puede confiar en la mayoría de las personas.

Así, la generalización a la población no es la simple transferencia del valor muestral a un conjunto más grande. Las leyes que rigen la relación entre la muestra y la población, son, como se indicó antes, probabilísticas; esas leyes son las que hay que usar para hacer la inferencia desde la muestra hacia la población.

## 11.2 Intervalos de confianza

Una estimación más completa de los parámetros mencionados, se denomina **estimación por intervalo**. Ella consiste en ofrecer no ya un número como en la estimación puntual, sino un intervalo, acerca del cual se tiene cierto grado de certeza (o se deposita cierta confianza) que contenga al parámetro. Así, en lugar de decir que el promedio con que egresa el total de psicólogos de esta facultad “debe ser cercano a 6.50, se construirá un intervalo, que dirá, por ejemplo,”hay una confianza del 95% en que el intervalo  $[6, 10; 6, 90]$  contiene al promedio con que egresan los psicólogos de esta facultad“. De manera equivalente, en lugar de “entre los que egresan hay alrededor del 70% de mujeres“, se afirmará algo como “con una confianza del 95%, el intervalo  $[68; 72]\%$  contiene a la proporción de mujeres sobre el total de egresados“. O que “con una confianza del 95%, el

ingreso salarial promedio de los trabajadores del aglomerado Gran Córdoba está entre 14300 y 15600. Y también que en la población de mayores de 18 años residentes en países de América Latina, hay una confianza de 90% que la proporción de quienes creen que se puede confiar en la mayoría de la gente, esté en el intervalo  $[14.20, 14.49]\%$ .

Vemos entonces que esta forma de estimar ofrece dos números, los límites de un intervalo, del que esperamos contenga al parámetro que estimamos. Decimos “esperamos que se contenga” porque no hay certeza absoluta de que se encuentre allí, hay una *confianza* que en estos ejemplos hemos fijado en el 95% o en 90%, y veremos que puede elegirse.

Veamos a continuación cómo construir estos intervalos de confianza para estimar los dos primeros parámetros que hemos tratado; la media y la proporción.

### 11.2.1 Estimación de la media

Vamos a hacer uso de lo que sabemos hasta el momento sobre las distribuciones en el muestreo para mejorar la calidad de las estimaciones puntuales y construir los intervalos de confianza. Para ello, empezaremos con la media. Debido a que la muestra ha sido obtenida de manera aleatoria, la media muestral es una variable aleatoria, cuya distribución tiene media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Además, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, esa distribución tiende a ser normal, es decir que será tanto más cercana a una distribución normal cuanto más grande sea  $n$ . A los fines prácticos, una muestra de 30 casos se considera “suficientemente grande” como para usar la distribución normal en la distribución de  $\bar{x}$ . Si la muestra es más pequeña que ese tamaño, no podemos usar inmediatamente la distribución normal, sino que deberemos apelar a la distribución  $t$  de Student. Trabajaremos primero suponiendo que se trata de muestras lo suficientemente grandes y usaremos la distribución normal. Los paquetes informáticos de análisis de datos usan la distribución  $t$  siempre, cualquiera sea el tamaño de la muestra, haciendo uso de la convergencia de esta distribución hacia la normal cuando  $n$  crece.

Con esa información, podemos calcular las probabilidades de los diferentes valores de  $\bar{x}$ . La representación gráfica de esta distribución es:

Ya sabemos que una variable que tenga distribución normal tiene probabilidad 0.95 de tomar un valor que diste menos de 1.96 desviaciones estándar de la media. Eso mismo, dicho en términos frecuenciales implica que, bajo el modelo normal, el 95% de los casos se encuentra entre 1.96 desviaciones estándar por debajo y 1.96 desviaciones estándar por encima de la media. Por lo cual, si extrajáramos todas las muestras de tamaño  $n$  posibles de esa población, el 95% de ellas estaría entre  $\mu - 1.96 * \sigma_{\bar{x}}$  y  $\mu + 1.96 * \sigma_{\bar{x}}$ , o lo que es lo mismo, entre  $\mu - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y  $\mu + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

De manera equivalente, como a 2.57 desviaciones estándar alrededor de la

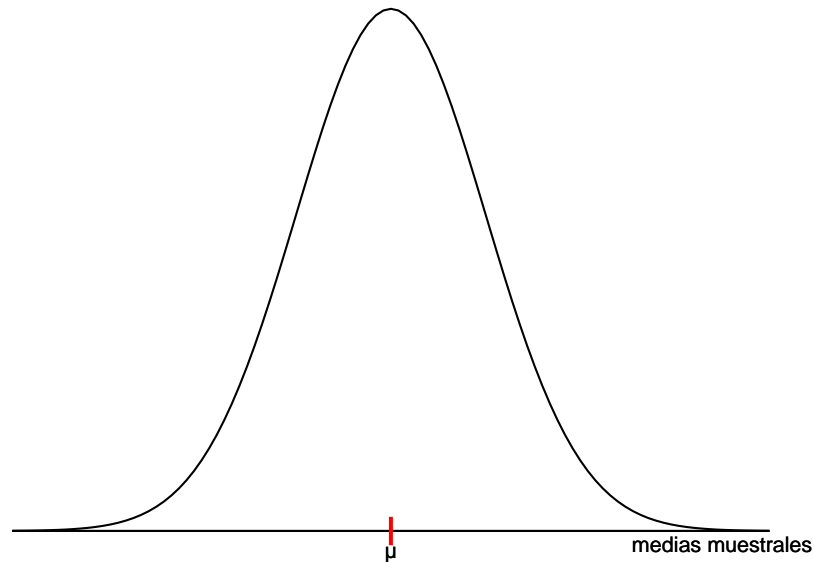


Figura 11.1: Distribución de las medias muestrales

media se encuentra el 99% de las observaciones, entonces el 99% de las medias muestrales estará entre  $\mu - 2.57 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y  $\mu + 2.57 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Este es el alcance más operativo de los resultados teóricos, ahora hay que ir al problema. Las curvas de arriba solo pueden dibujarse si se conoce  $\mu$  y es justamente el valor que trata de estimarse. Además, en el muestreo no se extraen “todas las muestras” sino solo una, y ella se usa para hacer la estimación. Lo que sabemos de esa muestra es que tiene una probabilidad del 0.95 de estar en la zona marcada en el gráfico 11.2 y una probabilidad 0,99 de estar donde indica el gráfico 11.3. Concentremos nuestra atención en el caso del gráfico 11.2, correspondiente a la zona donde se halla el 95% de todas las medias muestrales posibles.

Se extrae la muestra (probabilística, con todos los resguardos que corresponda para que admita la generalización de las conclusiones a que lleve), en esa muestra calculamos  $\bar{x}$ . Supongamos que la muestra da lugar a la media que está indicada en este gráfico.

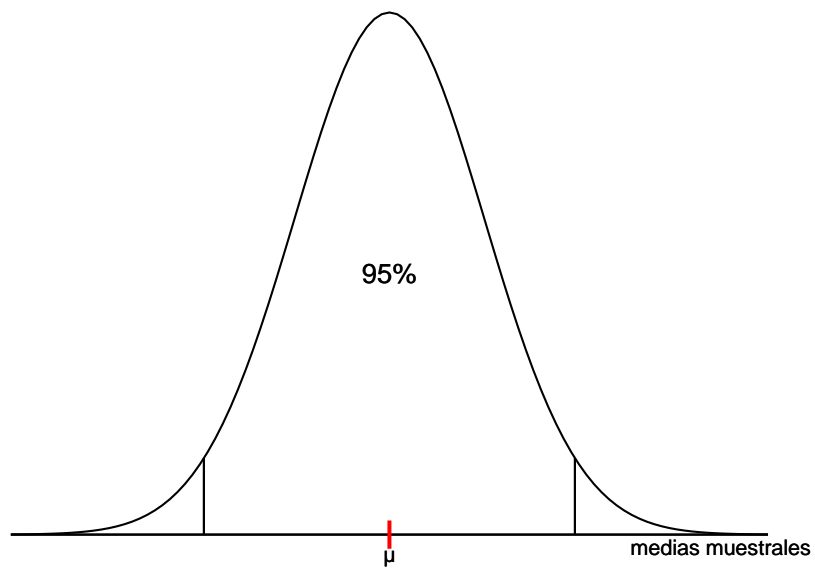


Figura 11.2: Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 95% de las posibles medias muestrales

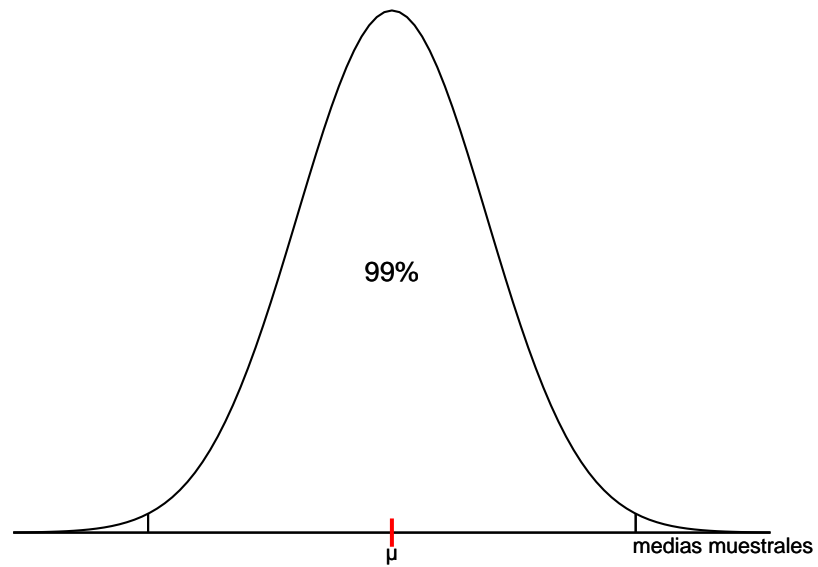
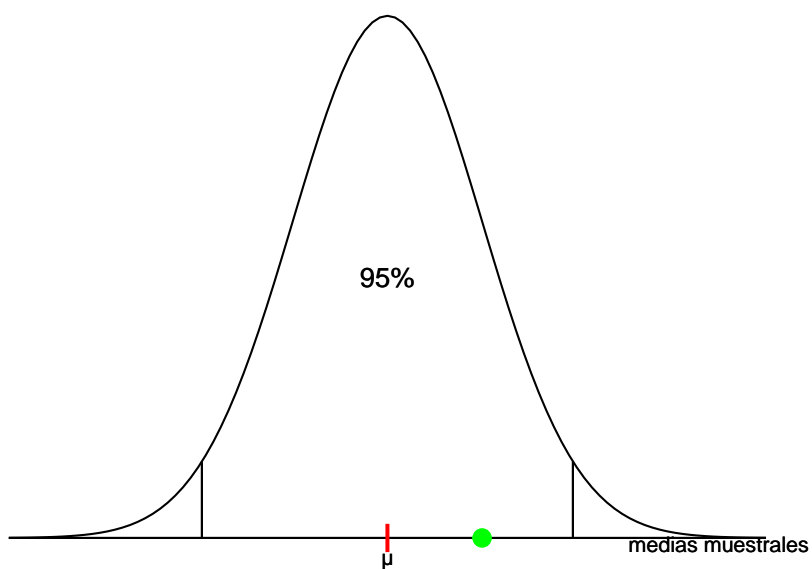
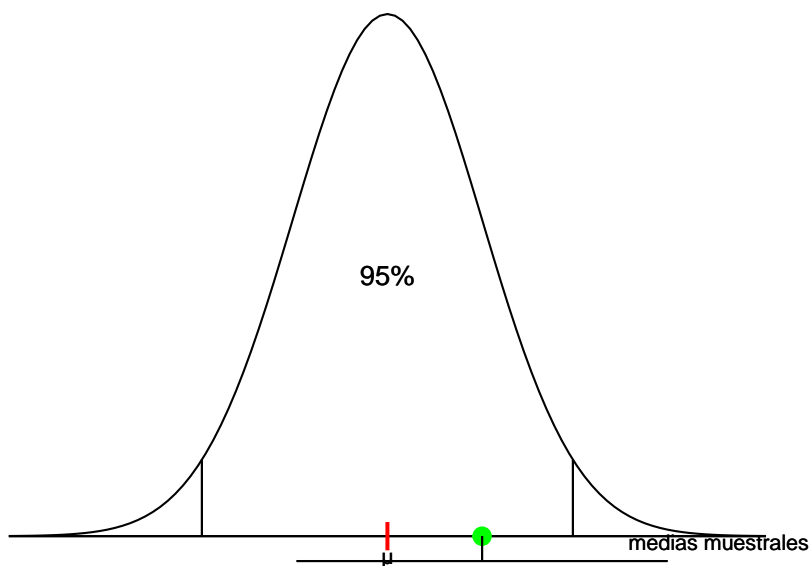


Figura 11.3: Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 99% de las posibles medias muestrales

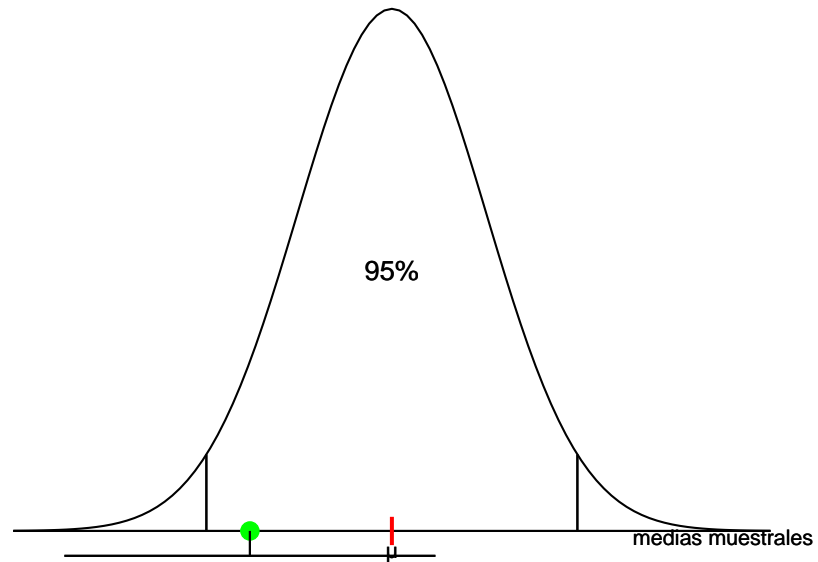




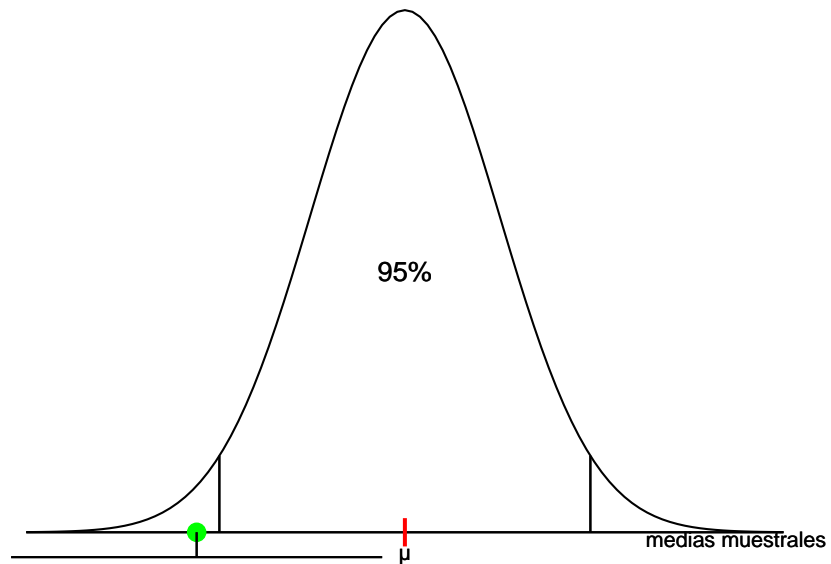
Si construimos un intervalo de la misma amplitud que el anterior, pero ahora centrado en  $\bar{x}$ , en vez de centrado en  $\mu$ , vemos que ese intervalo contiene a  $\mu$ .



Si la  $\bar{x}$  fuera la que está en el gráfico siguiente.



También un intervalo alrededor de ella contendría a  $\mu$ . Por el contrario en el caso siguiente:



El intervalo alrededor de  $\bar{x}$  no contiene a la media poblacional.

- ¿Qué condición debe cumplir  $\bar{x}$  para que el intervalo que se construya a su alrededor contenga a  $\mu$ ?
- Debe estar entre  $\mu - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y  $\mu + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ¿Qué proporción de las  $\bar{x}$  cumple esa condición?
- El 95% de ellas.

Así, el 95% de las  $\bar{x}$  posibles dará lugar a intervalos que contengan a  $\mu$ , el 5% restante de las  $\bar{x}$  producirá intervalos que no contienen a  $\mu$ .

Es importante señalar que no sabemos si nuestro intervalo contiene a  $\mu$  o no, solo sabemos que hay una probabilidad de 0,95 que la contenga. Es decir, es muy probable que el intervalo contenga a  $\mu$ , pero no es seguro.

¿Cuál es la expresión de ese intervalo?, dado que está centrado en  $\bar{x}$ , hay que sumar y restar a ese estimador lo mismo que sumamos y restamos a  $\mu$  para construir el intervalo anterior, por lo que resulta:

$$\bar{x} - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estos son dos números que constituyen los límites de un intervalo que tiene una probabilidad 0,95 de contener al parámetro  $\mu$ . De manera equivalente decimos que, de cada 100 intervalos que se construyan con este procedimiento, 95 contendrán a la media de la población. O bien que el 95% de las muestras aleatorias de tamaño  $n$  que se extraigan de la población, proveerán valores de  $\bar{x}$  que conducirán a intervalos que contengan a la media de la población.

Cuando logramos construir un intervalo así decimos que se ha estimado a  $\mu$  con un 95% de confianza. El primero valor de los indicados se llama límite inferior ( $L_i$ ) y el segundo, límite superior ( $L_s$ ). Así entonces:

$$L_i = \bar{x} - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$L_s = \bar{x} + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Podemos ahora mejorar la estimación puntual del ejemplo de los egresados de Psicología, encontramos que la nota promedio con que egresan es de 6,50 ( $\bar{x} = 6,50$ ). Si se conoce que la desviación estándar de la población es de 0,8 ( $\sigma = 0,8$ ), estimamos la nota promedio con que egresaron todos los psicólogos reemplazando:

$$L_i = 6.50 - 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{400}} = 6.42$$

$$L_s = 6.50 + 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{400}} = 6.58$$

Leemos este resultado diciendo que tenemos una confianza del 95% que el intervalo  $[6.42; 6.58]$  contiene a la media de las notas con que egresaron todos los psicólogos de esta facultad. La confianza del 95% está incluida en la construcción del intervalo en el número 1.96 que multiplica al error estándar de  $\bar{x}$ .

La notación general para los límites de este intervalo al 95% de confianza para la media puede abreviarse indicando de una sola vez ambos límites, si se escribe:

$$\bar{x} \pm 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Con lo que queremos indicar que a  $\bar{x}$  se le suma y se le resta la expresión  $1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

En el ejemplo, esto haría que escribamos el intervalo de manera alternativa como  $6.50 \pm 0.08$ , que indica cuál es la media muestral (el estimador puntual) y la cantidad que debe sumarse y restarse para llegar a los límites.

Si quisiéramos estar más seguros acerca de que el intervalo contiene a  $\mu$ , podríamos usar los puntos que delimitan el 99% del área. Para ello,  $z$  vale 2.57 y los límites del intervalo resultan:  $\bar{x} \pm 2.57 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para el ejemplo anterior, con una confianza del 99%, el intervalo es:

$$L_i = 6.50 - 2.57 * 0.04 = 6.50 - 0.10 = 6.40$$

$$L_s = 6.50 + 2.57 * 0.04 = 6.50 + 0.10 = 6.60$$

Con lo que ahora diremos que, con una confianza del 99%, el intervalo  $[6.40; 6.60]$  contiene a la media de las notas con que egresaron todos los psicólogos de esta facultad. Otra opción es la de escribir el intervalo como  $6.50 \pm 0.10$ , la media muestral es la misma y aumentó lo que debe alejarse de ella para llegar a los límites.

Notemos que este aumento en la confianza de la estimación, al pasar del 95 al 99%, tiene un costo, porque el intervalo es ahora más amplio: el límite inferior es menor que en el anterior y el superior, mayor. Antes el intervalo iba desde 6.42 hasta 6.58 y ahora va desde 6.40 hasta 6.60, el segundo intervalo empieza antes y termina después; es de mayor longitud. Más tarde volveremos sobre este punto.

De manera general, el intervalo se escribe como  $\bar{x} \pm z * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , dejando  $z$  como variable, que puede reemplazarse por el valor que corresponda según la confianza que se elija para la estimación (por ahora 1.96 para 95% y 2.57 para 99%)

Sin embargo, esta manera de calcular los límites del intervalo tiene un problema para usarse en la práctica, ya las fórmulas para calcular los límites, requieren que se conozca  $\sigma$ , la desviación estándar de la población. Pero como nuestros datos son muestrales, no conocemos  $\sigma$ , a cambio de ella usaremos la desviación estándar de la muestra, a la que podemos calcular a partir de los datos disponibles<sup>1</sup>. Con ese ajuste, la expresión para el cálculo de los límites del intervalo de confianza será:

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Que puede representarse gráficamente así:

En este gráfico solo podemos dibujar el segmento que representa al intervalo en torno a  $\bar{x}$ , pero no podemos dibujar la campana correspondiente a la distribución, ya que no conocemos  $\mu$  que es donde la campana se centra.

Ejemplo (datos reales): Se dispone de una muestra de 277 alumnos que rindieron el primer parcial, conocemos sus notas y queremos usarlas para hacer una estimación de la nota promedio de todo el curso (que cuenta con 1600 alumnos). Haremos esa estimación con una confianza del 95%.

De la muestra hemos obtenido  $\bar{x} = 6.63$  y  $s = 2.15$ , con lo que los límites resultan:

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6.63 \pm 1.96 * \frac{2.15}{\sqrt{277}} = 6.63 \pm 1.96 * 0.13 = 6.63 \pm 0.25$$

Usando primero el signo menos, obtenemos  $L_i = 6.38$  y luego sumando  $L_s = 6.88$ . Entonces podemos afirmar el intervalo  $[6.38; 6.88]$  contiene a la nota promedio del total de alumnos del curso, con una confianza del 95%.

Ejemplo (datos reales): Para estimar los ingresos salariales de los trabajadores del Gran Córdoba, se parte de los valores de media y desviación estándar que da la EPH:  $\bar{x} = 14979.02$ ,  $s = 9453.94$  y  $n = 754$  para reemplazar:

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}} = 14979.02 \pm 1.96 * \frac{9453.94}{\sqrt{754}} = 14979.02 \pm 1.96 * 344.29 = 14979.02 \pm 674.8$$

Así, hay una confianza de 95% que el intervalo  $[14304.2, 15653.8]$  contenga al promedio de ingresos salariales de toda la población que trabaja en relación de

---

<sup>1</sup>Esto es válido en la medida que se trate de muestras grandes ( $n > 30$ ), en caso contrario, la distribución que debemos usar es la  $t$  de Student. Cuando fijemos la confianza, ya no serán  $z$  los valores que multiplicarán a  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  sino puntajes  $t$ , cuyos grados de libertad se calculan como  $n - 1$ . Pero, para poder usar la distribución  $t$ , los valores de la muestra deben provenir de una distribución normal en la población. Si esto no se cumple, la estimación puede realizarse buscando los límites a partir de una reconstrucción de la distribución empírica, por un método de remuestreo llamado “bootstrap”.

dependencia y reside en el aglomerado Gran Córdoba, en el tercer trimestre de 2018.

Una representación gráfica de esta estimación es:

Para construir en intervalo con un nivel de confianza de 99%, reemplazamos el valor de  $z$  anterior de 1.96 por el de 2.57

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}} = 14979.02 \pm 2.57 * \frac{9453.94}{\sqrt{754}} = 14979.02 \pm 2.57 * 344.29 = 14979.02 \pm 884.8$$

Ahora hay una confianza de 99% que el intervalo [14094.2, 15863.8] contenga al parámetro que se está estimando. Comparada con la salida anterior, solo han cambiado los límites del intervalo, ya que son los mismos datos muestrales. El cambio en la confianza se realiza por un cambio en el valor de  $z$ , los percentiles de la distribución normal y eso hace que cambien los límites. El gráfico tiene ahora la forma:

Se observa que un aumento en la confianza incide en la amplitud del intervalo, éste último es más amplio que el primero construido, los límites están más lejos uno de otro. Más adelante trataremos esta relación con detalle.

### 11.2.2 Estimación de la proporción

Cuando trabajamos con variables cualitativas (nominales u ordinales) no es posible calcular la media ni la desviación estándar sino solo considerar la proporción de casos que hay en una categoría que elegimos. La proporción es la frecuencia relativa de la categoría que se elige, la cantidad de casos en esa categoría dividida el tamaño de la muestra. Cuando se trata de variables con solo dos categorías (dicotómicas) puede elegirse cualquiera de ellas. Por ejemplo si es el resultado de un examen y las categorías son aprobado – no aprobado, podemos interesarnos por la proporción de cualquiera de ellas, ya que la otra es el complemento (lo que le falta para llegar a uno). Si una es 0,70 (70%), la otra no puede sino ser 0,30 (30%). Es diferente si la variable tiene más de dos categorías, por ejemplo si se trata de la intención de voto para las elecciones presidenciales. Allí es usual que haya más de dos candidatos, por lo que la proporción de uno de ellos no nos dice mucho sobre la de cada uno de los otros: si hay cinco candidatos y uno se lleva el 40%, solo sabemos que el 60% restante se reparte entre los otros cuatro, pero no sabemos cuánto le corresponde a cada uno. A estos casos los trataremos como si fueran dicotómicos: una categoría será el candidato que nos interesa y la otra categoría estará formada por todos los demás. Así, si un candidato tiene una proporción de su favor, solo nos interesa que tiene una proporción de 0,60 que no está a su favor y no nos preocupamos por saber cómo se reparte ese 60% en los demás candidatos. Tratamos una categoría frente a todas las demás. De este modo es

que puede definirse la proporción de personas que usa anticonceptivos orales, frente a quienes usan todos los demás métodos; o la proporción de alumnos promocionados frente a regulares y libres; o la proporción de argentinos entre todos los estudiantes extranjeros que hay en España, sin interesarnos por el modo en que se distribuye la proporción entre las demás nacionalidades. Lo que hacemos con este procedimiento es simplemente llamar la atención sobre una categoría y confrontarla con el resto indiscriminado. La categoría elegida o categoría de referencia, se llama **éxito**, su frecuencia absoluta, **cantidad de éxitos** y su frecuencia relativa **proporción de éxitos**.

Por este procedimiento trataremos siempre con dos grupos, uno formado por los casos que son de nuestro interés y el otro por los demás casos.

Existen varios procedimientos para construir intervalos de confianza para la proporción, aquí mencionaremos el de Clopper-Pearson, el de Wald y el de Wilson.

### 11.2.2.1 Intervalo de Clopper-Pearson

El primer modo para construir un intervalo para estimar la proporción, es usar la distribución binomial. Para ello, partimos del estimador puntual y buscamos los dos valores de  $\hat{p}$  que delimiten el 95% central de la distribución.

Ejemplo (datos reales): a partir de la muestra de alumnos que rindieron el parcial se busca estimar, al 95% de confianza, la proporción de quienes lo aprobaron.

Sabemos que, de los 277 muestreados que rindieron, 255 lo aprobaron, en consecuencia la proporción de aprobados es, en la muestra<sup>2</sup>,  $\hat{p} = \frac{255}{277} = 0.920$ . Este es nuestro estimador puntual de la proporción de aprobados para todo el curso. La variable aleatorio “número de éxitos que se obtiene en cada muestra”, que es  $\hat{x}$ , tiene una distribución binomial con  $n = 277$  y  $p = 255/277$ , por lo tanto, los valores de  $\hat{p}$  resultan  $\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n} = \frac{\hat{x}}{277}$ . Se pueden encontrar los valores de  $\hat{x}$  que acumulan 2.5% (el percentil 0.025) y el 97.5% (percentil .975) de la distribución binomial (en lugar de 0.920, usamos el cociente de 255/277, así se evita la pérdida de decimales):

## [1] 246

## [1] 263

<sup>2</sup>Estos datos conducen a la distribución:

resultado	$f$	$f'$
aprobado	255	0,920
no aprobado	22	0,080
total	277	

Y luego llevarlos a  $\hat{p}$ , dividiendo por 277. Con lo que los límites del intervalo para estimar  $P$  al 95% son estas cantidades de éxitos ( $\hat{x}$ ) divididas el tamaño de la muestra:

```
## [1] 0.8880866
```

```
## [1] 0.9494585
```

Diremos entonces que, con una confianza del 95%, el intervalo [88.81; 94.95]% contiene a la proporción de alumnos que aprobaron, en toda la población.

Se puede solicitar de un solo paso, por medio de:

```
## [1] 88.81 94.95
```

Para el problema de la confianza en los demás, con los datos de Latinobarómetro, la tabla muestra que de 19748 personas que respondieron, 2833 creen que se puede confiar en la mayoría de las personas; es decir que, en la muestra, el 14.3% acuerda con esa afirmación. Para extrapolar ese resultado a la población a la que representa la encuesta procedemos como recién. Sea ahora la confianza del 99% (percentiles 0.005 y 0.995)

```
## [1] 13.71 14.84
```

Entonces, hay una confianza del 99% que el intervalo [13.7; 14.8]% contenga a la proporción de quienes creen que en general se puede confiar en las personas, en la población a la que se refiere el estudio Latinobarómetro.

Esta forma de construir el intervalo de confianza para la proporción -de Clopper-Pearson-, es la más antigua, se la conoce también como “método exacto”, porque no apela a aproximaciones para calcular los límites, sino que usa la distribución que corresponde al experimento: la binomial.

#### 11.2.2.2 Intervalo de Wald

Si se cumplen las condiciones para realizar una aproximación normal de la distribución binomial, el razonamiento que seguimos para la estimación de  $P$  será análogo al que seguimos para estimar  $\mu$ . La estructura de los límites del intervalo de confianza es ahora:

$$L_i = \hat{p} - z * \sigma_{\hat{p}}$$

$$L_s = \hat{p} + z * \sigma_{\hat{p}}$$



En la que:

$\hat{p}$  es la proporción de casos en la categoría que estimamos calculada sobre los datos de la muestra.

$z$  asume el valor de 1.96 si vamos a estimar con una confianza del 95%, ó de 2.57 si queremos una confianza del 99%.

$\sigma_{\hat{p}}$  es la desviación estándar del estimador:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$$

Pero, tal como pasó con la estimación de  $\bar{x}$ , en la que ignorábamos  $\sigma$  por tratarse de un valor poblacional, ahora desconocemos  $P$  (¡es exactamente lo que estamos tratando de estimar!), por lo que deberemos necesariamente reemplazarla por su estimador:  $\hat{p}$ <sup>3</sup>. Resultará:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

Y los límites del intervalo son:

$$\hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

Ejemplo (datos reales): la muestra de alumnos que rindieron el parcial a partir de la cual se busca estimar, al 95%, la proporción de quienes lo aprobaron. Sabemos que, de los 277 que rindieron, 255 lo aprobaron, en consecuencia la proporción de aprobados es  $\hat{p} = \frac{255}{277} = 0.920$ . Este es nuestro estimador puntual de la proporción de aprobados para todo el curso. Para hacer el intervalo, usamos la expresión anterior y resulta:

$$\hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0.920 \pm 1.96 * \sqrt{\frac{0.92 * 0.08}{277}} = 0.920 \pm 0.032$$

Cuando restamos, obtenemos el límite inferior del intervalo:

$$L_i = 0.920 - 0.032 = 0.892$$

y sumando:

$$L_s = 0.920 + 0.032 = 0.952$$

---

<sup>3</sup>Como antes hicimos reemplazando a  $\sigma$  por  $s$ .

Si se escribe de manera abreviada, la expresión toma la forma:

$$L_i = 0.920 \pm 0.032$$

Con el valor explícito de la proporción muestral que es el estimador puntual de  $P$ .

El resultado dice que hay una confianza del 95% que el intervalo [89.2; 95.2]% contenga a la proporción de aprobados de toda la población. El intervalo difiere un poco del hallado con el método exacto, porque es una aproximación.

La aplicación de este mismo método aproximado a la pregunta de Latinobarómetro, da por resultado, con una confianza de 99%:

## [1] 13.70 14.83

Que casi no difiere de la aplicación del método exacto

Esta forma de construir el intervalo de confianza para  $P$  resulta de calidad aceptable si el producto  $n * \hat{p} * (1 - \hat{p})$  es mayor a 5, y mejor aun si ese resultado es mayor a 10 (Canavos, 1988). Sin embargo, Cepeda-Cuervos y otros (2008) señalan evidencia sobre la inadecuación de esta estimación aun cuando la condición se cumple. Por esta razón se limita el uso de este modo de calcular el intervalo cuando el número de observaciones es mayor a cien<sup>4</sup>.

### 11.2.2.3 Intervalo de Wilson

Una mejora para la calidad de la estimación es propuesta por Newcombe y Merino (2006), con un intervalo llamado de *score* o de Wilson, cuyos límites son:

$$\hat{p} \pm \frac{z}{n} * \sqrt{\frac{(\hat{p} * (1 - \hat{p}) + \frac{z^2}{4*n})}{n}}$$

Este intervalo no colapsa para  $\hat{p} = 0$  ó  $\hat{p} = 1$  y tiene mejor calidad que el de Wald, es conveniente optar por esta alternativa si se trata de pequeñas muestras o de valores de  $\hat{p}$  próximos a cero o a uno. De todos modos, siempre es preferible utilizar la distribución binomial que es la adecuada para modelar el proceso.

---

<sup>4</sup>Pero si  $\hat{p}$  es muy pequeño, el límite inferior es negativo y si  $\hat{p}$  es muy cercano a uno, el límite superior puede superar a 1, decimos que en estos casos el intervalo colapsa.

### 11.3 La calidad de las estimaciones por intervalo

Intuitivamente, una estimación es de mejor calidad si es “ajustada”, es decir si el intervalo es pequeño. Por ejemplo, si estimamos la edad de una persona entre 28 y 30 años, tenemos una estimación de mejor calidad que si decimos que tiene entre 20 y 40 años. Eso es porque el primer intervalo es más pequeño, los límites están más cerca. La primera estimación nos da más información que la segunda, porque delimita el valor al que estima entre números más cercanos. En las estimaciones que hemos hecho hasta aquí, de la media y de la proporción, hemos partido del estimador puntual ( $\bar{x}$  y  $\hat{p}$ ) y desde él sumamos y restamos la misma cantidad para obtener los límites del intervalo.

Esa cantidad que sumamos y restamos determina la amplitud del intervalo: cuanto más grande sea, tanto mayor será el intervalo, es decir, tanto mayor será la distancia entre los límites inferior y superior. Esa cantidad se denomina **error de estimación**. Las estimaciones están siempre acompañadas de un error, es un componente intrínseco al proceso. No es error en el sentido de equivocación o de falla, sino de imprecisión, una imprecisión que no puede evitarse, que no puede hacerse igual a cero. Se calcula como la distancia que hay desde el centro del intervalo hasta cualquiera de los límites. En el ejemplo anterior, sobre la estimación intuitiva de la edad de alguien, el centro del primer intervalo es 29, por lo que el error es 1 año, por eso se puede también escribir como  $29 \pm 1$ . El segundo intervalo de este ejemplo tiene centro en 30 y el error es de 10 años, lo escribimos  $30 \pm 10$ . Independientemente que el centro de los intervalos difiera levemente, este segundo intervalo tiene un mayor error de estimación. Esto es equivalente a decir que tiene menos **precisión**.

---

Se llama **error de estimación** a la distancia que hay entre el estimador puntual y cualquiera de los límites del intervalo. Cuanto mayor es el error de estimación menor es su **precisión**.

---

En la estimación del promedio con que egresan los psicólogos, escribimos  $6.50 \pm 0.08$  al estimar al 95% de confianza y  $6.50 \pm 0.10$  cuando la confianza se pasó al 99%. Allí estábamos escribiendo el intervalo como el estimador más/menos el error de estimación. En el primer caso el error de estimación es de 0.08 y en el segundo de 0.10, por eso decimos que la primera estimación es más precisa, tiene menos error. Con la estimación de los ingresos salariales sucedió lo mismo, al 95% el error 675 fue y al 99% subió a 887. Del mismo modo, al estimar, con una confianza del 95%, la proporción de quienes aprobaron el parcial escribimos  $0.920 \pm 0.032$ , el error de estimación es en este caso de 0.032 (ó 3.2%). La estimación de la proporción de gente que cree que se puede confiar en los demás, hecha con el mismo nivel de confianza, arrojó un error de estimación de 0.0056, 0.56%.

### 11.3.0.1 El error de estimación en la media

En la expresión general de la estimación por intervalo de  $\mu$ , el error es el término que se suma y resta:  $z * \frac{s}{\sqrt{n}}$ . ¿De qué depende que ese término sea grande o chico?

Hay tres elementos en este término:  $z$ ,  $s$  y  $n$ . De ellos va a depender que haya más o menos error en la estimación o, dicho de otra manera, que la estimación sea más o menos precisa. Veamos el efecto de cada uno:

- $z$ : Es elegido por el investigador cuando establece la confianza. En los ejemplos que hemos visto, asumió el valor de 1,96 para un 95% de confianza o de 2,57 para una confianza de 99%. Cuanto más confianza o certeza queramos tener en nuestra estimación, más grande será  $z$  y, en consecuencia mayor será el error de estimación. Por lo tanto no se pueden tener las dos cosas: más confianza va acompañada de menos precisión. Si todos los demás elementos del error quedan fijos, los intervalos más amplios proveen menos información, pero mayor certeza en la inclusión del parámetro que se estima. Para elegir el nivel de confianza (y en consecuencia determinar  $z$ ) debe tomarse una decisión que equilibre la confianza y la precisión, ya que si una crece la otra disminuye. Si alguien intentara lograr precisión absoluta, es decir, error igual a cero, encontraría una confianza también igual a cero, es decir, ninguna certeza. A la inversa, intentar fijar la confianza en el 100%, lleva a un error infinito.
- $s$ : La desviación estándar en la muestra. Es la medida de la variabilidad de los datos que se observan, y es una estimación de la verdadera variabilidad que tiene la característica que estamos estudiando en la población. Incide negativamente sobre el error, cuanto más grande es  $s$  más error tenemos. Eso refleja el hecho que si la población es muy heterogénea respecto de la cualidad que queremos estimar, tendremos estimaciones de peor calidad que si es similar para los individuos de la población. Sobre  $s$  no podemos decidir, no tenemos control sobre su valor, si es grande, tendremos peores estimaciones que si es pequeña. El muestreo estratificado es una forma de enfrentar situaciones de mucha dispersión, construyendo subconjuntos (estratos) que contengan elementos homogéneos en su interior, es decir que tengan menos dispersión que el conjunto completo.
- $n$ : El tamaño de la muestra, se encuentra en el denominador del término del error, por lo que su aumento reduce el error. Cuanto más grande sea  $n$ , menor será el error, es decir que muestras de mayor tamaño dan mayor precisión. En principio, podemos elegir  $n$ , pero depende del presupuesto que se prevea para la investigación. Si se puede obtener una muestra grande siempre es preferible, porque se lograrán estimaciones con menos error, de mejor calidad.

Esto no debe confundirse con la calidad de la muestra. Todo lo mencionado sobre estimación, supone que se trata de muestras probabilísticas, es decir

muestras aleatorias, para las cuales rigen las leyes de probabilidad que hemos usado. Si la muestra no es aleatoria, no se pueden hacer estimaciones con estos procedimientos y; esto es muy importante: no se mejora una muestra tomando más casos. Si la muestra no es probabilística, la estimación no mejorará porque se tomen muchos casos.

La distribución  $t$  de Student tiene aplicación cuando se trata de muestras pequeñas, sin embargo, como se señaló antes, cuando los grados de libertad aumentan, esta distribución se aproxima a la normal. Por esta razón, al construir los intervalos, no hay inconveniente en calcular los percentiles que corresponden al nivel de confianza elegido, usando el modelo  $t$ . Si la muestra es suficientemente grande, el resultado será el mismo que con la normal. Así se evita decidir cada vez, en base al tamaño de la muestra, si se usa una distribución o la otra. Por esa razón, de aquí en adelante, calcularemos los percentiles necesarios para estimar la media, con la distribución  $t$  con  $n - 1$  grados de libertad.

Para ejemplificar los efectos de los diferentes elementos en el error de estimación, usaremos la base de la Encuesta Nacional sobre Prevalencias de Consumo de Sustancias Psicoactivas 2011. Con esos datos, estimaremos la edad promedio a la que los encuestados dicen que tomaron alcohol por primera vez en su vida. La variable se llama BIBA03 y corresponde a la siguiente pregunta del cuestionario:

¿Qué edad tenía cuando consumió bebidas alcohólicas por primera vez? (Edad en años) Cuya descripción es la siguiente:

medida	valor
media	18.07
mediana	17.00
desviación estándar	4.71
n	24949.00

Para el cálculo de los límites del intervalo, usamos media, desviación, tamaño de muestra y, para una confianza de 90% usamos los percentiles .05 y .95 de la distribución  $t$  con 24948 grados de libertad (que no difiere de la normal)

```
## [1] 18.02 18.12
```

El error es de:

```
## [1] 0.049
```

Variamos el nivel de confianza, primero al 95%:

```
## [1] 18.01 18.13
```

Con un error de estimación:

```
## [1] 0.058
```

Y luego al 99%

```
## [1] 17.99 18.15
```

que lleva el error de estimación a:

```
## [1] 0.077
```

Estas tres primeras estimaciones muestran cómo, sin cambiar el tamaño de la muestra ni la dispersión, el error aumenta (los intervalos se vuelven más amplios) cuando crece la confianza.

Ahora se seleccionan solo las respuestas dadas por mujeres, con lo que la descripción de la variable es:

medida	valor
media	18.97
mediana	18.00
desviación estándar	5.47
n	12196.00

El total de casos es de 12196, al construir el intervalo al 90%

```
## [1] 18.89 19.05
```

Cuyo error es:

```
## [1] 0.081
```

Bastante más grande que el que se obtuvo al mismo nivel de confianza, para la muestra completa.

### 11.3.1 El error de estimación en la proporción

En la construcción del intervalo de Wald, el término del error en la estimación de la proporción es:

$$z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

En él hay dos elementos en común con el error en la estimación de la media: los valores de  $z$  y de  $n$ . No agregaremos nada sobre ellos, porque el efecto es el mismo que en la media: un aumento de  $z$  por aumento de la confianza, da lugar a un incremento en el error de estimación, mientras que un aumento en el tamaño de la muestra, lo reduce.

Lo nuevo en este caso es que no hay  $s$ , por el contrario, lo que hay en su lugar es el producto de la proporción por su complemento  $\hat{p} * (1 - \hat{p})$ , que se encuentra afectado por la raíz, pero eso no interesa para analizar su efecto sobre la precisión.

Recordemos el problema de la medición de la dispersión para variables nominales. Se vio que una variable nominal tiene poca dispersión cuando una categoría “absorbe” a las otras, cuando muchos casos están en una sola categoría, o cuando una categoría tiene una frecuencia superior a todas las demás. Por el contrario, la dispersión es elevada cuando las frecuencias son similares, cuando la distribución de casos es “pareja” en todas las categorías. En la estimación de la proporción estamos tratando solo con dos categorías, por lo que la dispersión será máxima cuando las proporciones de ellas sean similares. Siendo solo dos, son iguales cuando cada una de ellas vale 0,50 ( $\hat{p} = 0,50$  y  $(1 - \hat{p}) = 0,50$ ), porque la mitad de los casos está en cada categoría. Por el contrario, la dispersión será menor cuanto más concentrados estén los casos en una de las categorías. Si, por ejemplo la proporción es 0,10 ( $\hat{p} = 0,10$  y  $(1 - \hat{p}) = 0,90$ ) tendremos concentración de casos en una categoría, es decir, poca dispersión. Eso está expresado en la variabilidad medida como el producto de  $\hat{p}$  por su complemento:  $\hat{p} * (1 - \hat{p})$

Cuando  $\hat{p} = 0,50$  y  $(1 - \hat{p}) = 0,50$ , entonces, el producto  $\hat{p} * (1 - \hat{p}) = 0,25$ . Por el contrario, cuando  $\hat{p} = 0,10$  y  $(1 - \hat{p}) = 0,90$ , entonces, el producto  $\hat{p} * (1 - \hat{p}) = 0,09$ .

Por eso, el producto  $\hat{p} * (1 - \hat{p})$  es una medida de la dispersión de la variable nominal y ocupa, dentro del término del error, un lugar equivalente al de la varianza en la estimación de la media.

¿Cómo incide esto en el error de estimación? Como con la media, cuando la dispersión es grande, el error también lo es, entonces el error será mayor cuanto más parecidas sean  $\hat{p}$  y  $(1 - \hat{p})$ , dicho de otra manera, cuando  $\hat{p}$  sea cercana a 0,50.

El razonamiento es el mismo que con la media, cuanto mayor sea la dispersión tanto más grande será el error y menos precisa la estimación. Pero en el caso de

la media, la dispersión está medida con la desviación estándar, mientras que en la proporción, viene dada por el producto  $\hat{p} * (1 - \hat{p})$ , que es máximo cuando  $\hat{p}$  es cercano a 0,50. Entonces, las peores condiciones para hacer una estimación de la proporción, serán aquellas en que la característica que se estima afecta a porciones cercanas a la mitad de la muestra, allí será máxima la dispersión y en consecuencia también el error de estimación.

Ejemplo: a partir de una encuesta, se estima la proporción de votos que tendrá un candidato en las próximas elecciones. La muestra es de 400 casos y 90 personas dijeron que votarán a ese candidato. Como 90 es el 22,5% de 400 (su frecuencia relativa), esa es la proporción que se halla en la muestra y la estimación por intervalo al 95% de confianza da:

$$\hat{p} \pm z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0.225 \pm 1.96 * \sqrt{\frac{0.225 * (1 - 0.225)}{400}} = 0.225 \pm 0.041$$

Los límites del intervalo son  $L_i = 0.1841$  y  $L_s = 0.2659$ . Para comunicarlo, diremos que el candidato tiene una intención de voto de entre el 18,41% y el 26,59%. Aunque la lectura correcta es que hay una confianza del 95% que el intervalo [18,41; 26,59]% contenga a la verdadera proporción de personas que dicen que votarán al candidato.

Repitamos el ejercicio, ahora suponiendo que la cantidad de personas que dice que lo votaría son 200 de los 400 encuestados, es decir si la proporción muestral hubiese sido del 50%. Siempre al 95% de confianza, la estimación es:

$$\hat{p} \pm z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0,50 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,50 * (1 - 0,50)}{400}} = 0,50 \pm 0,049$$

Vemos que el error de estimación ha pasado de 4,1% en el anterior a 4,9% ahora, sin que hayamos cambiado la confianza ni el tamaño de la muestra. Ese es el efecto de la proporción cuando es cercana al 50%.

Sobre la misma encuesta anterior, se estima la proporción de personas que dicen haber bebido alguna vez en su vida. La pregunta se llama BIBA01 y está formulada: ¿Ha consumido alguna bebida alcohólica, como por ejemplo vino, cerveza, whisky o similares, alguna vez en la vida? 1 Sí 2 No 9 Ns/nc

La tabla de distribución de frecuencias genera:

¿Ha consumido alguna bebida alcohólica, como por ejemplo vino, cerveza, whisky o similares, alguna
Sí
No
Ns/nc
Sum



Cuando se consideran solo los casos válidos, la tabla queda:

¿Ha consumido alguna bebida alcohólica, como por ejemplo vino, cerveza, whisky o similares, alguna vez en la vida?
Sí
No
Sum

A nivel de la muestra, quienes contestan que han bebido alguna vez son el 74.9% (25709/34330). Extendemos ese resultado a la población construyendo un intervalo al 95% y expresando el resultado en porcentajes:

```
## [1] 74.43 75.35
```

El error de estimación es 0.92% y, si aumenta la confianza al 99%:

```
## [1] 74.28 75.49
```

Con un error de 1.2

Vemos que al aumentar el nivel de confianza se reduce la precisión, ya que los límites se distancian, volviendo más amplio al intervalo, aumentando el error de estimación.

### 11.3.2 Probabilidad de cobertura

Un elemento adicional a considerar sobre la calidad de una estimación es la **probabilidad de cobertura**, que indica la probabilidad que tienen los límites de contener efectivamente al parámetro. En el caso de la media, se escribe  $P(L_i \leq \mu \leq L_s)$  y para la proporción, se escribe como  $P(L_i \leq P \leq L_s)$  en la que  $L_i$  y  $L_s$  son variables aleatorias que corresponden a los límites del intervalo. Esta probabilidad de cobertura puede ser igual, menor o mayor que la confianza, que es una cobertura nominal, es decir, la que predice la teoría. La probabilidad de cobertura se calcula por simulación.

Para el caso de la estimación de la proporción, Cepeda Cuervo et. al. (2008) muestran que el intervalo de Clopper-Pearson tiene una probabilidad de cobertura que supera a la nominal para todos los tamaños de muestra, por eso se lo considera conservador; ya que ofrece más certidumbre que la que se declara en la confianza. Al contrario, el intervalo de Wald muestra probabilidad de cobertura inferior a la nominal aun cuando se usen muestras grandes. El intervalo de Wilson ofrece una probabilidad de cobertura más cercana a la nominal que el de Wald y que el exacto.

Los siguientes esquemas provienen de <https://istats.shinyapps.io/ExploreCoverage/> y muestran la construcción de 100 intervalos para estimar:

- La proporción por dos métodos, el exacto de Clopper-Perason y el de Wald
- La media, para los dos casos de distribución simétrica o asimétrica en la población.

En los gráficos puede verse cuántos de los 100 intervalos contienen efectivamente al parámetro que se estima. La probabilidad de cobertura se refiere a esa proporción.

En este capítulo hemos puesto en juego lo visto en los anteriores para poder generalizar las observaciones muestrales a toda la población de referencia, vemos que el modo con el que se hace es a través de los intervalos de confianza, que formalizan una práctica a la que estamos acostumbrados cuando hacemos estimaciones sobre cantidades que desconocemos: indicamos entre qué valores es más probable hallarlas.

La estructura general de los intervalos es:

$$\text{estimador} \pm \text{error de estimacion}$$

Esa expresión ha tomado diferentes formas, ya sea para estimar la media de variables cuantitativas o la proporción de éxitos, para la que hay varios procedimientos de obtención de los límites.

En cualquiera de los casos, la lectura del intervalo obtenido se expresa:

Hay una confianza  $1 - \alpha$  que el intervalo obtenido contenga al parámetro.

## 11.4 Hacerlo en R

La construcción de intervalos puede realizarse aplicando los procedimientos descritos en el capítulo y dependiendo de cuál sea el origen de los datos.

### 11.4.1 Intervalo para la media

Para el ejemplo de los ingresos salariales, vamos a construir el intervalo de manera directa, teniendo en cuenta que los valores -1.96 y 1.96 provienen de las probabilidades acumuladas de 0.025 y 0.975, que son las que delimitan la probabilidad 0.95 central. De modo que esos dos valores que estamos escribiendo “de memoria”, pueden pedirse al momento de construir los límites del intervalo. Además, por la razón que mencionamos antes, puede usarse la distribución  $t$  con  $n - 1$  grados de libertad en todos los casos, ya que cuando la muestra es grande su valor coincide con el de la normal. Llamamos Li95 y Ls95 a esos límites y resulta:

```
Li95 <- mean(asalariados_cba$PP08D1) +
  qt(.025, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
Li95
```

```
## [1] 14303.13
```

```
Ls95 <- mean(asalariados_cba$PP08D1) +
  qt(.975, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
Ls95
```

```
## [1] 15654.9
```

- Límite inferior=  $1.4303132 \times 10^4$
- Límite superior=  $1.5654905 \times 10^4$

Observemos que las dos veces sumamos, el signo viene automático, porque el percentil 2.5 de  $z$  es negativo y el 97.5 positivo. Para escribirlo más compacto calculamos la media por un lado y el error de estimación, por otro:

```
mean(asalariados_cba$PP08D1)
```

```
## [1] 14979.02
```

```
qt(.025, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
```

```
## [1] -675.8864
```

```
qt(.975, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
```

```
## [1] 675.8864
```

Las dos operaciones dan el mismo valor absoluto, con el signo opuesto, entonces el resultado de la estimación se escribe:

$$14979 \pm 675$$

Para construir un intervalo con un nivel de confianza de 99%, usamos los percentiles 0.005 y 99.5 de la distribución  $t$  con 753 grados de libertad y llamamos Li99 y Ls99 a los límites:

```
Li99 <- mean(asalariados_cba$PP08D1) +
  qt(.005, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
Li99
```

```
## [1] 14089.93
```

```
Ls99 <- mean(asalariados_cba$PP08D1) +
  qt(.995, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
Ls99
```

```
## [1] 15868.11
```

- Límite inferior=  $1.4089928 \times 10^4$
- Límite superior=  $1.586811 \times 10^4$

Nuevamente para la notación abreviada, como la media es la misma y sabemos que lo que se suma es lo mismo que lo que se resta, solo calculamos:

```
qt(.995, 753) * sd(asalariados_cba$PP08D1) /
  sqrt(length(asalariados_cba$PP08D1))
```

```
## [1] 889.0909
```

Y la estimación se escribe:

$$14979 \pm 887$$

### 11.4.2 Intervalo para la proporción

Para estimar la proporción de inactivos a partir de la base de la EPH, hay que definir a esa categoría como la de referencia (1) en la variable ESTADO y asignar cero a las demás categorías. Para hacerlo, definimos “inactivos”, como una nueva variable de la base eph.3.18 cuyo valor dependerá del que tenga “ESTADO”. Si “ESTADO” vale:

- 3 (inactivo), entonces “inactivos” vale 1
- 0 o 4, “inactivos” no se cuenta, porque son entrevistas no realizadas, o menores de 10 años, corresponde NA
- 1 o 2 “inactivos” vale cero

Y con una tabla verificamos que el 1 de la nueva variable corresponda al 3 de “ESTADO” y que todos los demás valores de “ESTADO” tengan asociado un cero en “activos”.

```
eph.3.18$inactivos <- ifelse(
  eph.3.18$ESTADO == 3, 1, ifelse(
    eph.3.18$ESTADO == 0 | eph.3.18$ESTADO == 4, NA, 0
  )
)

addmargins(table(eph.3.18$ESTADO, eph.3.18$inactivos))
```

```
##
##           0      1    Sum
##  0           0      0      0
##  1    23398      0 23398
##  2     1870      0  1870
##  3          0 23167 23167
##  4          0      0      0
##  Sum 25268 23167 48435
```

El total de casos es ahora 48435, porque se quitaron los ceros y cuatros. Ahora la estimación al 95% de la proporción poblacional de inactivos, por método de Clopper-Pearson requiere que calculemos los percentiles .025 y .975 de la distribución binomial con  $n = 48435$  y  $p = 23167/48435 = 0.478 = 47.8\%$  y que los dividamos por el tamaño de la muestra.

```
Li <- qbinom(.025, 48435, .478) / 48435
Ls <- qbinom(.975, 48435, .478) / 48435
round(c(Li, Ls), 4) * 100
```

```
## [1] 47.35 48.24
```

Si tenemos en cuenta que es una muestra grande, puede usarse el método de Wald, con  $\hat{p} = 0.478$  con el que los límites resultan:

```
Li <- .478 + qnorm(.025) * sqrt(.478 * (1 - .478) /
  48435)
Ls <- .478 + qnorm(.975) * sqrt(.478 * (1 - .478) /
  48435)
kable(round(c(Li, Ls), 4) * 100,
  col.names = c("límites"))
)
```

límites

47.36

48.24

Efectivamente, con un tamaño de muestra grande, el método de Wald, que usa la distribución normal como aproximación a la binomial da un resultado casi idéntico.

### 11.4.3 Cobertura

Los siguientes comandos generan 20 intervalos para estimar la media de ingresos salariales de la EPH a partir de 20 muestras cada una de tamaño 30. Es una simulación, porque se trata a los datos de la EPH como si fuera una población y a la media de la EPH como si fuera el parámetro poblacional. El ejercicio sirve para observar el efecto, por ejemplo del tamaño de la muestra.

```
resultado <- data.frame(
  Limite_inferior = double(),
  Limite_superior = double(),
  contiene_al_parametro = integer()
)

for (i in 1:20) {
  x <- round(runif(30, 1, 754), 0)
  muestra <- asalariados_cba[x, ]
  resultado[i, 1] <- round(mean(muestra$PP08D1, na.rm = TRUE) +
    qt(.025, 29) * sd(muestra$PP08D1, na.rm = TRUE) / sqrt(length(muestra$PP08D1)), 1)
  resultado[i, 2] <- round(mean(muestra$PP08D1, na.rm = TRUE) +
    qt(.975, 29) * sd(muestra$PP08D1, na.rm = TRUE) / sqrt(length(muestra$PP08D1)), 1)
  resultado[i, 3] <- ifelse(mean(asalariados_cba$PP08D1, na.rm = TRUE) >= resultado[i,
    mean(asalariados_cba$PP08D1, na.rm = TRUE) <= resultado[i, 2], 1, 0)
}

kable(resultado)
```

Limite\_inferior

Limite\_superior

contiene\_al\_parametro

13282.4

20990.9

1

9979.1

17119.6

1

11920.1

17833.3

1

8808.0

17592.0

1

14672.3

23047.7

1

16968.9

25897.7

0

12168.3

18678.4

1

12552.9

20200.4

1

11016.4

18948.9

1

11931.4

18948.6

1

9030.1

14669.9

0

11057.5

19055.8

1

12226.0

20400.7

1

11649.4

19535.9

1

12612.7

20333.9

1

13848.8

23771.2

1

11631.8

18381.5

1

11782.6

17704.1

1

10976.4

17162.3

1

11223.4

17185.9

1

```
paste("cobertura real: ", 100 * round(mean(resultado$contiene_al_parametro), 3), "%")
```

```
## [1] "cobertura real: 90 %"
```



### 11.4.4 Operaciones sobre la base ENPreCoSP

Debido a que solo se dirige a quienes alguna vez en su vida tomaron alcohol, que representan el 75% del total de los encuestados, esta pregunta tiene 25% de casos “no corresponde”, que están codificados con un “.” y es necesario eliminarlos de esta parte del análisis, porque está limitado a las personas que alguna vez tomaron alcohol. Esto se hace reteniendo un subconjunto de la base original, aquel para el cual esa variable (BIBA03) no asuma el valor “.” Luego debe indicarse que esa variable es numérica, ya que por haber tenido ese código no numérico, fue reconocida como factor.

```
enprecosp_base <- read.csv("bases/archivostxt/Base.Usuario.ENPreCoSP.2011_A.txt", header = TRUE,
enprecosp <- subset(enprecosp_base, enprecosp_base$BIBA03 != ".")
enprecosp$BIBA03 <- as.numeric(as.character(enprecosp$BIBA03))
```

Luego de estas operaciones, podemos pedir un resumen, que incluya media, mediana, desviación estándar y cantidad de casos:

```
medida <- c("media", "mediana", "desviación estándar", "n")
valor <- round(c(mean(enprecosp$BIBA03), median(enprecosp$BIBA03), sd(enprecosp$BIBA03), length(enprecosp$BIBA03)), 2)
descr.BIBA03 <- data.frame(medida, valor)

library("kableExtra")

kable(descr.BIBA03)
```

medida

valor

media

18.07

mediana

17.00

desviación estándar

4.71

n

24949.00

Para retener solo el subconjunto de mujeres, que es el que tiene BHCH04 == 2.



## Capítulo 12

# Prueba de hipótesis: la lógica

En este capítulo ingresamos a uno de los procedimientos de mayor difusión en las investigaciones en Psicología: la prueba de hipótesis. Se basa en los mismos principios de estimación de parámetros que se usaron para la construcción de intervalos de confianza. Aunque no está exento de críticas, este procedimiento es básico para hacer inferencias sobre la población, y las propuestas que existen como técnicas alternativas, requieren que se tenga dominio de las pruebas de hipótesis.

### 12.1 El razonamiento de la prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis tiene como objetivo el de proveer argumentos para decidir en contextos de incertidumbre. A partir de lo que sabemos sobre las distribuciones en el muestreo, ése es el caso cuando necesitamos concluir acerca de una población, a partir de información que tenemos disponible en una muestra aleatoria. El resultado de la prueba permitirá decidir si lo que se observa en la muestra es compatible con una aseveración hipotética sobre la población. Nunca será posible decidir de manera taxativa que la hipótesis es verdadera, eso es algo que no podemos saber; por el contrario, podemos ver hasta qué punto lo que observamos en la muestra contradice -o no- lo que se afirma a escala poblacional. Es decir que podremos descartar una hipótesis por no ser compatible con lo que se observa, pero no a la inversa: no será posible “confirmar” una hipótesis, solo podremos concluir que la evidencia *no la contradice*, lo que también se expresa diciendo que *no hay evidencia para rechazarla*.

Empezaremos con ejemplos no muy cercanos a la estadística, a fin de ver que

esta forma de razonar no es ajena a lo cotidiano. Una prueba de hipótesis puede compararse con un juicio: el acusado no es condenado hasta que no hay evidencia suficiente para hacerlo. La evidencia (las pruebas, en el lenguaje de la justicia) rara vez son completas, se trata de información fragmentada, sujeta a interpretaciones diferentes. En el inicio del juicio, “el acusado es inocente”, en nuestra notación llamaremos a esa afirmación, **hipótesis nula**, y la indicaremos  $H_0$ . Esta expresión indica que se trata de un estado inicial: todos son inocentes hasta que se prueba lo contrario, por lo que la hipótesis nula señala que esta persona en particular (el acusado), no es diferente de cualquier ciudadano que no ha cometido delito. Mientras no haya pruebas suficientes, la hipótesis nula se considerará aceptada. En el juicio, el fiscal aportará pruebas en dirección contraria a esta hipótesis. Buscará información para probar que debe rechazarse la hipótesis nula y condenar al acusado. Difícilmente estarán a la vista todos los datos necesarios para reconstruir la situación y dar una respuesta absolutamente inequívoca, pero si hay suficiente evidencia, se dará la hipótesis nula por rechazada. La decisión de condenar al acusado solo se tomará cuando haya muy poco riesgo de equivocarse, cuando la probabilidad de decidir de manera errada sea muy pequeña.

En este ejemplo, la población es el conjunto completo de información necesaria para tomar la decisión de manera certera, sin error. Se trataría de un conjunto infinito de datos que permitiría la reconstrucción exacta de los hechos en los que participó el acusado. Por cierto, esa información nunca está disponible, por lo que la decisión debe tomarse a partir de un fragmento de información, que son las pruebas que han podido reunirse (la evidencia). En la analogía que hacemos con nuestros procedimientos, esta evidencia constituye la muestra a partir de la que se juzgará la hipótesis nula: aceptarla o rechazarla. La muestra constituye el fragmento de información disponible, solo que en el caso de la estimación, ésta es obtenida con procedimientos que buscan su representatividad.

Otro ejemplo: tenemos dudas sobre lo equilibrada que pueda estar una moneda que va a usarse en un juego de azar. Repitiendo la notación del ejemplo anterior, formularemos una hipótesis nula que dice que X sale con la misma frecuencia que C, que equivale a decir que hasta que no se pruebe lo contrario, X no tiene ninguna diferencia con C, la moneda está equilibrada. Esta hipótesis nula puede escribirse de manera formal, porque “salir con la misma frecuencia que C” equivale a decir que, “en infinitas tiradas, la mitad de la veces saldrá X”, por lo que escribiremos nuestra hipótesis nula así:  $H_0 : P = 1/2$ , a la que leeremos “la hipótesis nula afirma que la proporción de veces que saldrá cara es  $1/2$ ”. Como no es posible arrojar la moneda infinitas veces, generamos un conjunto de datos para hacer la prueba, tirando al moneda un número finito de veces, digamos cien veces, esa es la muestra de tiradas.

Al arrojarla 100 veces esperaríamos -si la hipótesis nula se sostiene-, que salga aproximadamente 50 veces X. Las 100 tiradas son una muestra de las infinitas tiradas de la moneda, por lo que posiblemente no salga exactamente 50 veces X, podría salir 51 veces ó 52 y serían resultados esperables, debido a fluctuaciones propias del azar. Pero si de las 100 tiradas sale 80 veces X, concluiremos con

pocas dudas que hay que rechazar la hipótesis nula. A la misma conclusión llegaríamos si, de 100 tiradas, solo sale 25 veces X. La pregunta que nos ayudará a responder el procedimiento de prueba de hipótesis es ¿cuántas más o menos veces que 50 debería salir X para que consideremos que tenemos “suficiente evidencia”, para creer que la moneda no está equilibrada?

La lógica de la prueba de hipótesis consiste en plantear el escenario en el que  $H_0$  es verdadera y observar qué tan probable es lo que hallamos en la muestra en ese caso. En el primer ejemplo el planteo es ¿qué tan probable sería haber hallado *estas pruebas* (las que lo involucran) contra el acusado, si éste fuera inocente? En el segundo preguntamos ¿qué tan probable habría sido hallar *esta cantidad de veces* que salió X, si la moneda estuviera equilibrada? De manera general la pregunta es ¿qué tan probable sería *éste resultado muestral* si la hipótesis nula fuera cierta?

Si la respuesta a esas preguntas es “muy probable”, la decisión será la de no rechazar la hipótesis nula, porque los resultados muestrales hallados serían esperables (muy probables) bajo  $H_0$ . Al contrario, si la respuesta es “muy poco probable” decidiremos rechazar  $H_0$ , ya que se trata de un resultado poco esperable si  $H_0$  fuera cierta.

En investigación, la prueba de hipótesis suele formularse de tal modo que rechazar  $H_0$  implica aportar un nuevo hallazgo, por el contrario, aceptar  $H_0$  equivale a que no hay cambios respecto de alguna situación inicial.

Algunos ejemplos de hipótesis nulas:

- Esta droga no produce ningún efecto sobre la memoria.
- La técnica terapéutica A es igualmente eficaz que la B.
- Los métodos A y B para enseñar a leer a los niños producen iguales resultados.
- La proporción de votos que obtendrá un candidato no ha variado respecto de las últimas elecciones.
- Un programa de potabilización de agua no reduce la diarrea infantil.
- La edad no hace diferencia en las orientaciones políticas de las personas.
- Un plan de capacitación para madres que se ha implementado no tiene efecto en el desarrollo de sus hijos.

En casi todos los casos, la expectativa del investigador está en rechazar la  $H_0$ , porque eso significa que ha hallado algo de interés: que la droga produce efectos, que hay técnicas terapéuticas mejores que otras y por tanto recomendables, que se pueden elegir mejores métodos para enseñar a leer, que el favor del electorado hacia un político es más o menos extendido, que el programa de potabilización

mejoró la salud infantil, que la edad es un factor explicativo de las diferencias ideológicas, que el plan de capacitación impactó (positivamente).

---

**La hipótesis nula es una afirmación sobre un parámetro que indica ausencia de diferencia.**

---

El sentido de esa diferencia difiere según el tipo de prueba, veremos que hay pruebas que confrontan con valores históricos o con promedios generales o bien que realizan comparaciones entre grupos. En todos los casos la hipótesis nula afirma algo que puede expresarse como “no hay diferencia”, o “no hay cambio” o “no hay relación”.

Hasta este punto se trata de la definición original de estas pruebas, desarrolladas inicialmente por Sir Ronald Fisher (1925) a las que llamó *pruebas de significación*. La idea básica es la de comparar los datos observados con la hipótesis que se pone a prueba. Fisher las ideó como manera de medir el grado de incompatibilidad de un conjunto de datos con la hipótesis nula, evaluando la probabilidad de hallar resultados como los observados o más extremos, si la hipótesis nula fuera cierta. Si esa probabilidad es muy pequeña, puede suceder que la muestra que se seleccionó haya sido excepcional, o bien que la afirmación hipotética sea falsa. Fisher argumentó que se trataba de un método objetivo para poner a prueba teorías y que puede ser usado en diferentes campos de conocimiento.

Con posterioridad a Fisher, Neyman y Pearson (1933) introducen dos cambios importantes en el procedimiento.

- El primero consiste en tratar a las pruebas no ya como métodos para validar teorías, sino como reglas de decisión, es decir, criterios que permiten decidir en las situaciones en que no se cuenta con toda la información necesaria.
- El segundo cambio consiste en oponer a la hipótesis nula, otra hipótesis, llamada hipótesis alternativa, a la que se indica como  $H_1$ , que es hacia la que se suma evidencia cuando se rechaza  $H_0$ .

Veamos la aplicación de este modelo, que es el que usaremos a partir de ahora. La afirmación “los niños cuyos padres tienen alto nivel de educación tienen rendimiento en la escuela superior al promedio general” es una hipótesis, porque pretende tener carácter general, hace referencia a la población de niños en la escuela, los que asisten ahora y los que asistirán en el futuro; no podemos observar a la población completa, por lo tanto la hipótesis no puede probarse de manera definitiva, solo puede hacerse a partir de una muestra. Para formalizar esa hipótesis, construiremos una  $H_0$  que niegue cualquier diferencia: “el rendimiento de niños con padres de alto nivel de educación es el mismo que el del promedio”. A esta hipótesis, opondremos otra, que afirme “los niños cuyos padres tienen alto nivel de educación tienen rendimiento superior al promedio”. A esta última llamaremos hipótesis alternativa,  $H_1$ . Así formalizamos el planteo del problema.

Supongamos ahora que conocemos ese rendimiento promedio, medido por el puntaje en las pruebas y que vale 60 puntos para la población completa de alumnos. De modo que podemos formular las hipótesis ahora así:

$H_0$ : “El rendimiento promedio de los niños con padres de alto nivel de educación es de 60 puntos”

$H_1$ : “El rendimiento promedio de los niños con padres de alto nivel de educación es superior a 60 puntos”

Para poner a prueba la hipótesis tomaremos una muestra de niños con padres de mucha educación y veremos si su rendimiento es superior a 60 puntos. Supongamos que en la muestra hallamos una media de 62 puntos, ¿estamos autorizados para rechazar la  $H_0$ ? La respuesta no es inmediata, porque, si bien 62 es mayor que 60, una diferencia de solo 2 puntos parece demasiado pequeña y podríamos atribuirle al azar. Aquí nos interesa evaluar la probabilidad de ocurrencia del resultado que se observa, si la hipótesis nula fuera cierta. En este caso será: “Si los hijos de padres con alto nivel de educación tuvieran el mismo rendimiento que el promedio ( $H_0$  verdadera), entonces una diferencia de 2 puntos en el promedio muestral es probable, es esperable, puede deberse a la variabilidad propia de los datos muestrales. En consecuencia, esa diferencia no es suficiente para rechazar la  $H_0$ ”. En otros términos: “Si los hijos de padres con alto nivel de educación tuvieran un rendimiento promedio de 60 puntos, no sería de extrañar que una muestra arroje un resultado de 62 puntos”. Dicho de otro modo: el resultado muestral no se aleja tanto de lo que esperaríamos si la  $H_0$  fuera cierta, por lo tanto, no podemos rechazarla y concluimos que los hijos de padres con mucha educación no difieren del promedio.

Un elemento de mucha importancia es recordar que la hipótesis hace referencia a la población, mientras que nuestra observación es muestral, y sabemos que los resultados muestrales difieren de los valores paramétricos porque los primeros son variables aleatorias.

¿Qué habría sucedido si hubiésemos observado que el grupo de los hijos de padres con mucha educación tiene un rendimiento promedio de 95 puntos? Este resultado se aleja mucho de 60 que es el que sostiene  $H_0$ , es decir, si el hipotético fuera verdadero, sería muy poco probable hallar una muestra que promedie 95 puntos. En consecuencia seguramente rechazaríamos la  $H_0$ .

Al realizar pruebas de hipótesis, en lugar de evaluar intuitivamente si un valor muestral está cerca o lejos del valor hipotético, lo que haremos será evaluar cuál sería la probabilidad de hallarlo si fuera cierta la hipótesis nula. Cuando esta probabilidad sea grande no habrá evidencia para rechazarla, cuando sea pequeña decidiremos rechazarla. ¿Cuán grande o pequeña? Es de lo que nos ocuparemos a continuación.

Para realizar una prueba de hipótesis, necesitamos calcular la probabilidad del valor observado, si  $H_0$  fuera cierta, es decir, si el parámetro tuviera ese valor (el que señala  $H_0$ ). Es una probabilidad condicional que podemos por ahora escribir así:



$$P(\text{observado}/\text{la hipotesis nula es verdadera})$$

Luego haremos más precisa esta expresión.

Comenzaremos con el ejemplo de una prueba de hipótesis sobre la media de una variable cuantitativa y luego acerca de la proporción para una categoría de una variable nominal.

### 12.1.1 Prueba sobre la media

Ejemplo (datos ficticios): para una determinada carrera universitaria, históricamente los alumnos han tardado para recibirse un promedio de 7.30 años. Decimos históricamente para indicar que son datos acumulados por largo tiempo y que provienen de los registros de la facultad de años atrás. Se ha introducido un cambio en el plan de estudios de la carrera y puede creerse que con ese cambio los alumnos tardarán un tiempo distinto en recibirse. Tenemos entonces un promedio de la población de quienes se recibieron en las anteriores condiciones (una media poblacional histórica), y queremos hacer inferencia sobre la media poblacional de los alumnos que cursan con el nuevo plan. Estos últimos no están todos accesibles, porque hay alumnos que están cursando y otros que lo harán en el futuro, por lo que de esa población solo puede conocerse a una muestra de los que ya han egresado y ver cuánto tiempo han tardado ellos en recibirse.

La hipótesis nula es:

$$H_0 : \mu = 7.30$$

A la que oponemos una hipótesis alternativa:

$$H_1 : \mu \neq 7.30$$

La hipótesis nula indica que la media poblacional de los alumnos que cursan con el nuevo plan es la misma que antes, que no hay diferencia, que no hay cambios. La hipótesis alternativa afirma lo contrario: que el tiempo promedio que tardan los alumnos en terminar la carrera con el nuevo plan es diferente a los 7.30 años históricos. No anticipamos si aumentó o disminuyó el tiempo para recibirse, solo que no es el mismo que con el plan viejo.

Ambas son afirmaciones sobre la población (sobre el parámetro media poblacional), por eso son hipótesis.

Si la hipótesis nula fuera cierta, por lo que sabemos sobre las distribuciones en el muestreo, la siguiente sería la distribución de las medias muestrales:

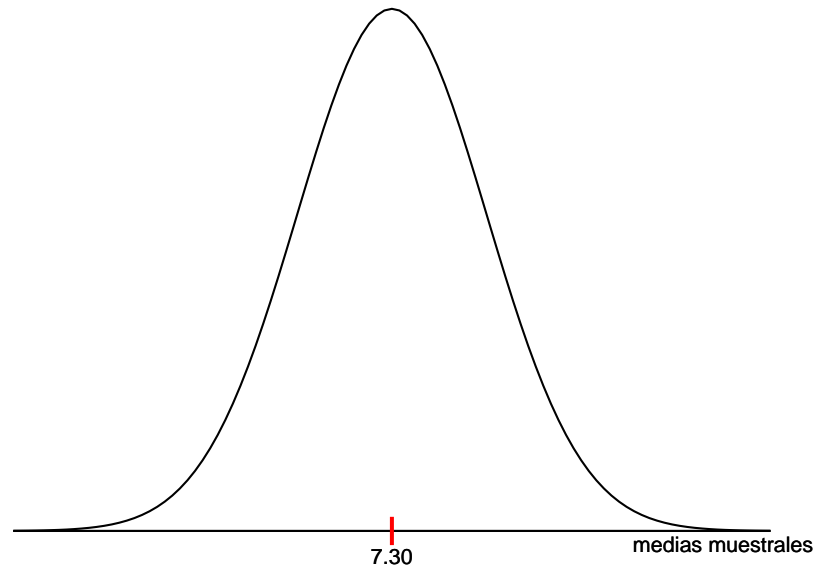


Figura 12.1: Distribución de las medias muestrales bajo la hipótesis nula

La campana está centrada en la media hipotética, que es el escenario en el que  $H_0$  es verdadera. La probabilidad que la curva asocia a las distintas  $\bar{x}$ , quiere decir que “lo más probable” sería hallar a la media muestral (la única que tendremos como dato) alrededor de 7.30. Hay poca probabilidad de encontrar valores muy lejanos a 7.30, como lo muestran las áreas decrecientes, a medida que nos alejamos de la media hipotética. Por esta razón, para decidir si un resultado muestral se aleja mucho o poco del valor paramétrico, deberemos determinar si es poco probable o muy probable. Será equivalente decir que un valor se aleja mucho de la media hipotética que decir que se trataría de un valor poco probable, si la media fuera la que propone la  $H_0$ .

---

Afirmar que un valor muestral **se aleja mucho del valor poblacional** equivale a decir que **sería muy poco probable si el valor poblacional fuera el hipotético**.

---

A fin de realizar la prueba de hipótesis debemos obtener una muestra. Supongamos que seleccionamos 100 egresados (usando un muestreo irrestricto aleatorio) y que encontramos un tiempo promedio para terminar la carrera de 7.50 años con una desviación estándar de 1.30 años ( $\bar{x} = 7.50$  y  $s = 1.30$ ). Debemos tener un criterio para decidir si este valor observado es compatible con la hipótesis nula ( $\mu = 7.30$ ) o si constituye evidencia suficiente para rechazarla en favor de la hipótesis alternativa ( $\mu \neq 7.30$ ). El criterio es el de ver cuán probable sería este valor observado si la hipótesis nula fuera cierta. En consecuencia, debemos calcular la probabilidad que tiene  $\bar{x}$  de asumir el valor observado. Sin embargo, no es posible hallar probabilidades para valores únicos de una variable continua, por lo que buscaremos la probabilidad de hallar valores como el observado ( $\bar{x} = 7.50$ ) o *más extremos que él*. Esto significa que nos preguntamos por la probabilidad que tiene la variable  $\bar{x}$  de asumir el valor 7.50 o *uno más extremo*, —es decir un valor que se aleje más de la media hipotética—, si  $H_0$  es verdadera. Tengamos muy presente que:

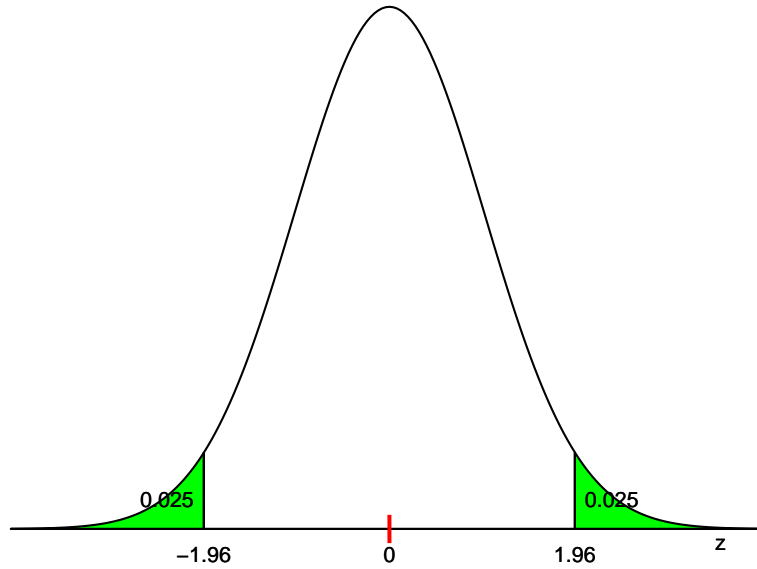


Figura 12.2: Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0.05

a priori, por ejemplo en 0.05. Eso indica que consideraremos a los resultados con probabilidad menor a 0.05 como muy improbables de hallar si  $H_0$  fuera cierta y nos conducirán a rechazarla. Por el contrario, si encontramos valores cuya probabilidad de ocurrencia es superior a 0.05, los trataremos como valores esperables y nos conducirán a no rechazar la  $H_0$ .

Como sabemos de la distribución normal, los valores de  $z = \pm 1.96$  delimitan un área central de 95%, es decir que dejan fuera un área de 5%. Los valores de  $z$  superiores a 1.96 ó inferiores a -1.96 tienen una probabilidad de ocurrencia de 0.05, repartida en las dos “colas” de la distribución normal.

Los valores de  $\bar{x}$  que correspondan a puntajes  $z$  que superen a 1.96 ó sean inferiores a -1.96 serán valores con probabilidad menor a 0.05, por lo que serán considerados como poco probables y conducirán a rechazar  $H_0$ . Por el contrario, los valores que tengan  $z$  comprendido entre -1.96 y 1.96 serán probables y llevarán a no rechazar  $H_0$ . Estos dos puntos (-1.96 y 1.96) se denominan **valores críticos** de  $z$  y se indican con un subíndice:  $z_c$ .

En nuestro ejemplo, el valor observado es  $\bar{x} = 7.50$ , de aquí en adelante lo llamaremos  $\bar{x}_{obs}$  (el valor de la media observado en la muestra). El puntaje  $z$  equivalente a ese  $\bar{x}_{obs}$  se llama  $z$  observado, se indica como  $z_{obs}$ , y vale:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7.50 - 7.30}{\frac{1.30}{\sqrt{100}}} = 1.54$$

Se trata de la transformación a puntaje  $z$  del valor observado de la media muestral. Se conoce con el nombre de **estadístico de prueba**.

Este puntaje no está en la zona extrema, porque no va más allá de 1.96; por el contrario, está entre -1.96 y 1.96 que pertenece a la parte de valores centrales de la distribución, los más probables. En consecuencia, la decisión es la de no rechazar  $H_0$  y concluir que no hay evidencia para creer que el tiempo que los alumnos tardan en completar la carrera haya cambiado respecto del valor histórico. Dicho de otra manera, el valor observado de  $\bar{x}_{obs} = 7.50$  es un resultado esperable si la media poblacional fuera de 7.30. Una media muestral de 7.50 es compatible con una media poblacional de 7.30

Por la forma en que hemos razonado y tomado la decisión, se comprende que a los valores de  $z$  comprendidos entre -1.96 y 1.96 se los denomine **zona de no rechazo de  $H_0$** . El otro conjunto de valores de  $z$ , los mayores a 1.96 junto a los menores a -1.96, constituyen la **zona de rechazo de  $H_0$** .

Luego de haber considerado a 0.05 como la probabilidad a la que llamamos “pequeña”, quedaron determinados los valores de  $z_c$  que indican las zonas de aceptación y de rechazo.

---

La **zona de rechazo de  $H_0$**  es el conjunto de valores extremos de la distribución, donde es poco probable encontrar los valores muestrales si  $H_0$  es verdadera.

---



---

La **zona de no rechazo de  $H_0$**  es el conjunto de valores centrales de la distribución, donde es más probable encontrar los valores muestrales si  $H_0$  es verdadera. Es el conjunto de valores muestrales que son compatibles con el valor paramétrico que sostiene la  $H_0$ .

---

Luego de eso, el procedimiento que seguimos fue: calcular el puntaje  $z$  que corresponde al valor observado de  $\bar{x}$ , y luego ver si éste se encuentra en la zona de rechazo o de no rechazo de  $H_0$ .

La probabilidad 0.05 como valor pequeño fue una elección y podría haber sido diferente; ese número tiene una larga tradición histórica, Fisher lo usaba regularmente, aunque aclarando que no era obligatorio y que no hay nada especial para elegirlo<sup>1</sup>. Se conoce como **nivel de significación** y se indica con

---

<sup>1</sup>En 1965, en *Statistical methods and scientific inference*, Fisher señaló: “Ningún investigador tiene un nivel de significación fijo, al cual año tras año y en toda circunstancia rechaza hipótesis; más bien entrega su mente a cada caso particular a la luz de la evidencia y

la letra  $\alpha$  (alfa). Es la probabilidad de hallar un valor como el observado o más extremo que él, si la hipótesis nula fuera cierta, por lo que es una probabilidad condicional que ahora escribimos como:

$$P(z \leq -1.96 \cup z \geq 1.96 / H_0 V) = 0.05$$

De esta expresión es importante recordar que  $\alpha$  mide la probabilidad de hallar a  $z$  en la región de rechazo (más allá de los puntos críticos) si  $H_0$  es verdadera.

El valor que elijamos para  $\alpha$  indica a qué valores vamos a considerar como poco probables: en este caso se trata de valores tan poco probables como el 5%. Puede usarse un nivel de significación diferente, por ejemplo del 10% y los valores críticos de  $z$  serán diferentes. En efecto los puntos que dejan un área extrema del 10% son  $z_c = \pm 1.64$ .

En ese caso escribiremos:

$$P(z \leq -1.64 \cup z \geq 1.64 / H_0 V) = 0.10$$

---

Se llama **nivel de significación** a la probabilidad de hallar al valor muestral en la zona de rechazo de  $H_0$ , si  $H_0$  es verdadera. Se indica como  $\alpha$ , y es elegido por el investigador.

---

Por lo que, si el nivel de significación es 0.10 ( $\alpha = 0.10$ ), la zona de no rechazo de  $H_0$  es el conjunto de valores  $z$  comprendidos entre -1.64 y 1.64 (centrales), mientras que la zona de rechazo de  $H_0$  son los  $z$  menores a -1.64 y los mayores a 1.64 (los valores extremos cuya probabilidad es el área sombreada en el gráfico). El valor muestral del ejemplo ( $z_{obs} = -1.54$ ) está también en la zona de no rechazo para este nivel, por lo que tampoco se rechaza la  $H_0$  a un nivel de significación de 0.10.

Otro nivel de significación que suele usarse es del 1%. Para él, los valores de  $z$  son  $\pm 2.56$ , por lo que la regla de decisión será: "si el valor de  $z$  correspondiente al valor observado de  $\bar{x}$  está entre -2.56 y 2.56 no se debe rechazar la  $H_0$ , mientras que si es menor a -2.56 o superior a 2.56 sí debe rechazarse la  $H_0$ ."

Expresamos la probabilidad condicional como:

$$P(z \leq -2.56 \cup z \geq 2.56 / H_0 V) = 0.01$$

Al igual que en los casos anteriores, cuando se expresan en términos de puntajes  $z$ , estos valores son fijos; no dependen de los resultados muestrales que se encuentren, constituyen una regla de decisión establecida a priori. Cuanto más de sus ideas".

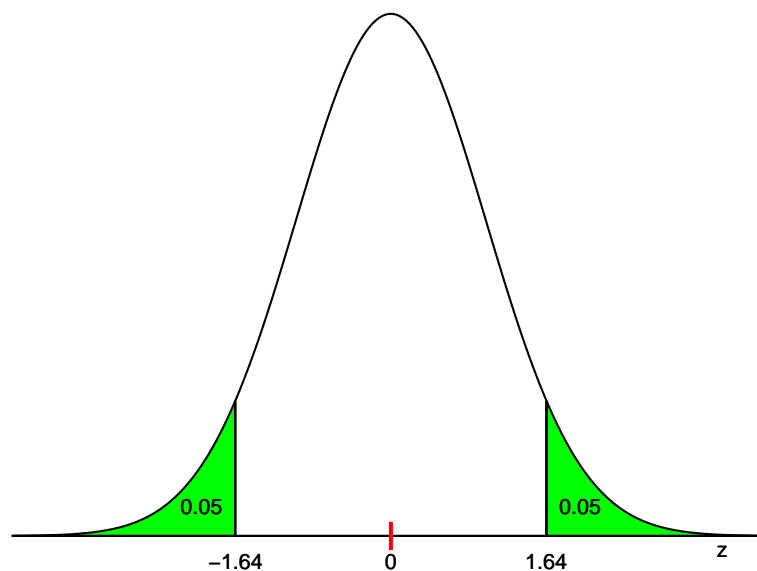
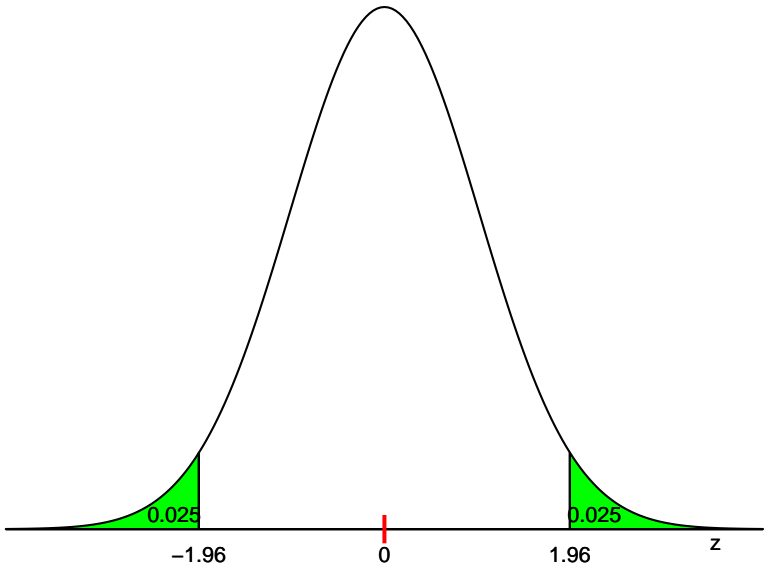
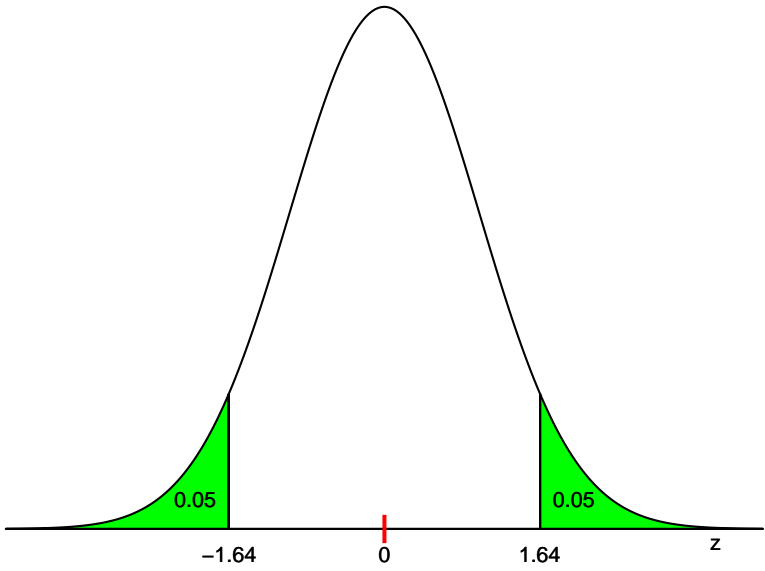


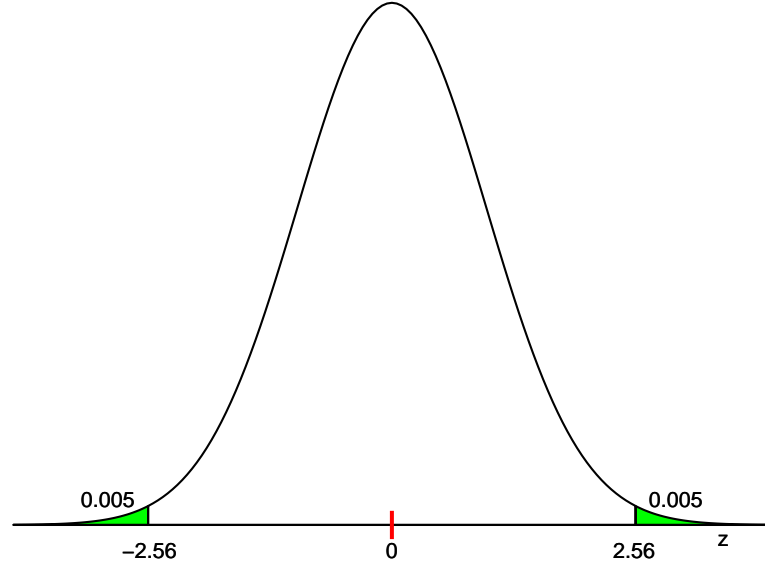
Figura 12.3: Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0.10

pequeño se elige  $\alpha$ , tanto más exigente es la prueba, en el sentido de que solo rechaza la hipótesis de no-diferencia si se observan valores muy alejados del hipotético.

De manera general, si llamamos  $z_{\alpha/2}$  al puntaje  $z$  que corresponde a un área acumulada de  $\alpha/2$  de la distribución normal estándar (el percentil  $\alpha/2$ ) y  $z_{(1-\alpha/2)}$  al percentil:  $(1 - \alpha/2)$ , la expresión queda:

$$P(z \leq z_{\alpha/2} \cup z \geq z_{(1-\alpha/2)} / H_0 V) = \alpha$$





Ejemplo (datos ficticios): para la misma carrera universitaria del ejemplo anterior, el promedio de calificación con que terminaban los estudios los alumnos era, según registros históricos, de 6.50. Nos preguntamos si, luego del cambio en el plan de estudios, esta nota promedio ha cambiado o sigue siendo la misma. El planteo de las hipótesis será ahora:

$$H_0 : \mu = 6.50$$

$$H_0 : \mu \neq 6.50$$

Por la misma razón que antes, no podemos analizar a la población completa, usaremos los datos obtenidos en una muestra. En ella encontramos, por ejemplo, que el promedio de los 100 egresados es de 6.65 con desviación estándar de 0.60, es decir:  $\bar{x} = 6,65$  y  $s = 0.60$ . A un nivel de significación del 5%, los puntos críticos vuelven a ser  $Z_c = \pm 1.96$ . Buscamos el estadístico de prueba transformando el valor observado de  $\bar{x}$  a puntaje  $z$  y encontramos:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6.65 - 6.50}{\frac{0.6}{\sqrt{100}}} = 2.50$$

El valor observado de  $\bar{x}$  corresponde entonces a un  $z$  que supera al punto crítico (que es  $z_c = 1.96$ ), por lo que está en la zona de rechazo de  $H_0$ . La decisión es rechazar  $H_0$  y concluir que el promedio de los alumnos es actualmente diferente del promedio histórico.



En los dos ejemplos vemos que la regla de decisión depende del nivel de significación. Cuando se fija en el 5% entonces se puede expresar como “si el valor de  $z$  correspondiente al valor observado de  $\bar{x}$  está entre -1.96 y 1.96 no se puede rechazar  $H_0$ , si es menor a -1.96 o superior a 1.96 se debe rechazar la  $H_0$ ”. Cuando el nivel de significación es del 10%, diremos que “si el valor  $z$  correspondiente al valor observado de  $\bar{x}$  está entre -1.64 y 1.64 no se puede rechazar  $H_0$ , si es menor a -1.64 o superior a 1.64 se debe rechazar  $H_0$ ”.

Veamos más en detalle el significado de esta probabilidad que hemos fijado en 0.05 y que puede también elegirse en 0.10 ó en 0.01 y que llamamos  $\alpha$ . Se trata de la probabilidad de hallar el valor observado en la muestra (o uno más extremo a él) si  $H_0$  fuera verdadera, por lo que cada vez que hallemos valores muestrales que se encuentran allí, tomaremos la decisión de rechazar  $H_0$ . Si la hipótesis nula fuera efectivamente verdadera, la decisión sería incorrecta, pero a eso no lo sabemos, porque nunca conocemos el verdadero valor del parámetro. Aunque sí podemos afirmar que al fijar  $\alpha$  en el 5%, ésas serán las chances de equivocarnos rechazando una hipótesis nula que era verdadera. En el segundo ejemplo, cuyo resultado fue el de rechazar  $H_0$ , es muy importante indicar a qué nivel de significación se toma la decisión, porque ese número (5%) indica la probabilidad de haber tomado la decisión erróneamente. Mide la probabilidad de haber encontrado el promedio muestral de 6.65 por azar. Como esa probabilidad es pequeña, decidimos rechazar  $H_0$ .

## 12.2 Los puntos críticos en términos del estimador

Hay una manera diferente de establecer las zonas de aceptación y rechazo, que consiste en fijar los puntos críticos en términos de  $\bar{x}$ , en lugar de hacerlo como puntajes  $z$ . Por lo que en lugar de determinar los dos  $z_c$ , hallaremos los dos valores críticos de  $\bar{x}$ , a los que llamaremos  $\bar{x}_c$ :

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

En el ejemplo sobre el tiempo que tardan los alumnos en terminar la carrera y a un nivel de significación de 5%, los valores de  $\bar{x}_c$  son:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 7.30 \pm 1.96 * \frac{1.30}{\sqrt{100}} = 7.30 \pm 0.25$$

Al sumar obtenemos 7.55 y al restar 7.05. Estos son los puntos críticos expresados en términos de la variable original. La regla de decisión es ahora “si se encuentra un valor de  $\bar{x}_{obs}$  comprendido entre 7.05 y 7.55 no se puede

rechazar la  $H_0$ . Si el valor observado de  $\bar{x}_{obs}$  es inferior a 7.05 ó superior a 7.55 se debe rechazar  $H_0$ .

Para expresarlo como probabilidad condicionada:

$$P((\bar{x} \leq 7.05 \cup \bar{x} \geq 7.55) / \mu = 7.30) = 0.05$$

Que afirma que la probabilidad de hallar a  $\bar{x}$  por debajo de 7.05 o por encima de 7.55 si la media de la población es 7.30, vale 0.05.

Al hacer la prueba, vemos que  $\bar{x}_{obs} = 7.50$ , que no va más allá de los puntos críticos, por lo que pertenece a la zona de no rechazo de  $H_0$ . Concluimos que no se rechaza  $H_0$  y que los alumnos no han cambiado el tiempo que tardan en terminar la carrera.

La regla de decisión es la misma que antes, solo que ahora está expresada en el lenguaje de  $\bar{x}$  y no de  $z$  y la conclusión también es la misma.

Volviendo ahora sobre el caso de los promedios con que egresan los estudiantes, para hallar los valores críticos de la media muestral hacemos:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6.50 \pm 1.96 * \frac{0.60}{\sqrt{100}} = 6.50 \pm 0.12$$

Y resultan: 6.38 y 6.62. El promedio observado fue de 6.65, que supera al punto crítico superior y se encuentra en la zona de rechazo. Concluimos que se rechaza la  $H_0$  y que los alumnos egresan en la actualidad, con un promedio que difiere del histórico. Nuevamente, es la misma conclusión que si se trabaja sobre  $z$ .

Comparemos los dos procedimientos:

A. Usando valores críticos de  $z$

1. Habiendo establecido el nivel de significación, determinar los valores  $z$  que dejan esa probabilidad en los extremos. Éstos son los  $z_c$ .
2. Para hallar el estadístico de prueba, transformar el valor observado de  $\bar{x}$  en puntaje  $z$  haciendo:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

3. Observar la posición de este valor transformado en la distribución de probabilidades  $z$

Para un nivel de significación de 0,05 (ó 5%), en el ejemplo:

B. Usando los valores críticos de  $\bar{x}$

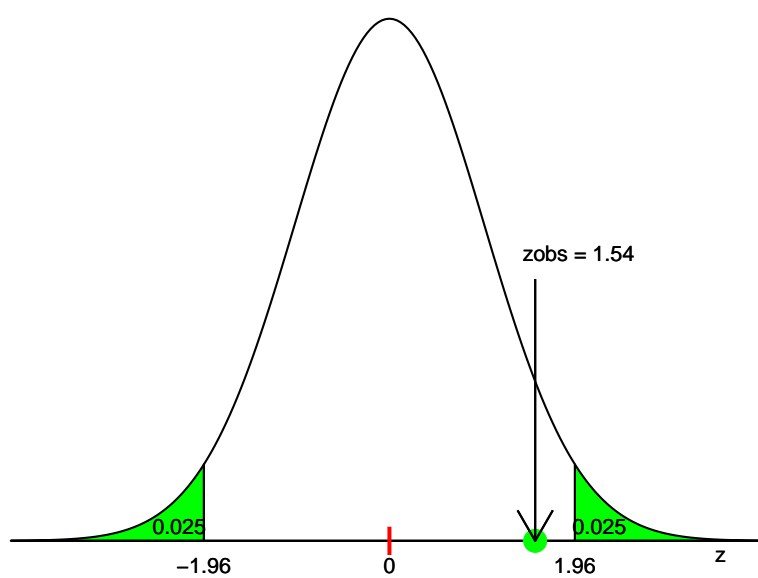


Figura 12.4: Ubicación de la zona de rechazo de  $H_0$  a un nivel de significación de 0.05, sobre puntajes estándar ( $z$ ), y del valor observado

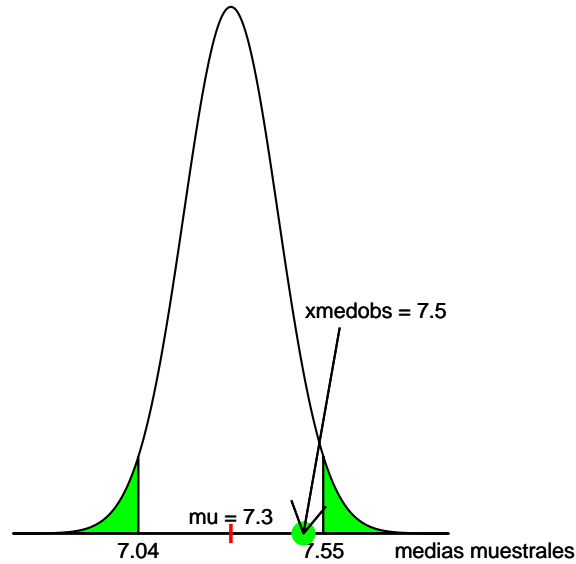


Figura 12.5: Ubicación de la zona de rechazo de  $H_0$  a un nivel de significación de 0.05, sobre valores de la variable  $\bar{x}$ , y del valor observado

1. Habiendo establecido el nivel de significación, determinar los valores  $z$  que dejan esa probabilidad en los extremos. Éstos son los  $z_c$ .
2. Usar los  $z_c$  para determinar los correspondientes  $\bar{x}_c$  haciendo:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

3. Ver la posición de  $\bar{x}_{obs}$  en la distribución de probabilidades de  $\bar{x}$ .

Para el nivel de significación de 0,05 y el mismo ejemplo, resulta:

La diferencia entre las dos formas de establecer los puntos críticos es que con la primera se determinan los valores de  $z - c$  a partir del nivel de significación y luego se transforma a puntaje  $z$  el valor muestral observado de  $\bar{x}_{obs}$ .

En el segundo modo, los  $z - c$  se transforman (al revés) en puntos críticos de  $\bar{x}_c$  y luego se compara el  $\bar{x}_{obs}$  directamente, sin transformarlo.

Los gráficos 12.4 y 12.5 expresan lo mismo, el primero en el lenguaje estandarizado de  $z$ , el segundo en el de  $\bar{x}$ . Los procedimientos son equivalentes y puede vérselos aplicados de manera indiferenciada.

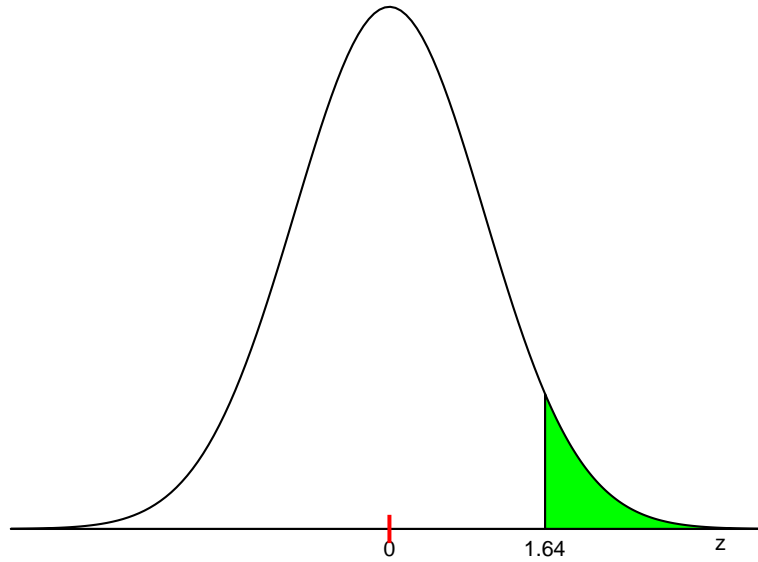


Figura 12.6: Ubicación de la zona de rechazo de  $H_0$  para una prueba unilateral derecha a un nivel de significación del 5%

### 12.2.1 Pruebas unilaterales

A menudo la hipótesis alternativa no expresa solo que la media difiera del valor hipotético, sino que indica en qué *dirección* se espera que difiera. Por ejemplo, puede esperarse, en el ejemplo anterior, que los alumnos egresen con promedio superior a 6.50, con lo que ahora la  $H_1$  dirá que  $\mu > 6.50$ . Se trata en este caso de una prueba unilateral y solo rechazaremos la  $H_0$  si encontramos valores sustancialmente *mayores* que 6.50. Para el mismo nivel de significación del 5%, el valor  $z$  que nos interesa es el que delimita un área *superior* de 0.05.

Notemos la diferencia con las pruebas que tratamos antes: al nivel de 5% buscábamos dos  $z$  que dejaban en total 0.05 de área extrema (por encima y por debajo) o lo que es lo mismo, los dos  $z$  que dejan el 95% del área central. Ahora, como la prueba es unilateral y solo nos interesan valores que se excedan, solo buscamos un  $z$ , el que deja al 5% por encima. Ese valor de  $z$  es 1.64.<sup>2</sup>

Por oposición a las anteriores, las pruebas unilaterales se llaman **pruebas de una cola**. Como vemos en el gráfico, el conjunto de valores  $z$  que conducen a

<sup>2</sup>Este número es el mismo que usamos al nivel del 10% en pruebas bilaterales. Esto se debe a que en ese caso el 10% extremo se reparte en 5% en cada cola; ahora nos interesa una sola cola, del 5%.

rechazar  $H_0$  se encuentran solo a la derecha.

Ejemplo (datos ficticios): en la situación en que nuestro interés esté en analizar si el promedio con que egresan ahora los estudiantes es *superior* al valor histórico (y no solo diferente a él), las hipótesis de la prueba se expresan:

$$H_0 : \mu = 6.50$$

$$H_1 : \mu > 6.50$$

Haremos la prueba sobre los valores de  $\bar{x}$ , a un nivel de significación del 5% entonces:

$$\bar{x}_c = \mu + z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6.50 + 1.64 * \frac{0.60}{\sqrt{100}} = 6.50 + 0.10$$

Al sumar obtenemos 6.60 que es el único punto crítico que nos interesa por tratarse de una prueba unilateral y hemos sumado porque la prueba es derecha. Con lo que resulta la siguiente región de rechazo de  $H_0$ :

El valor observado de  $\bar{x}$  había sido 6.65 que es mayor que el punto crítico, con lo que rechazamos la  $H_0$  y concluimos que los alumnos egresan con un promedio significativamente mayor al histórico.

Si hubiésemos planteado la regla de decisión sobre los valores de  $z$ , a un nivel de significación del 5%, corresponde observar el gráfico y obtener el puntaje  $z$  correspondiente al valor observado de la media muestral:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{x}_{\text{obs}} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6.65 - 6.50}{\frac{0.60}{\sqrt{100}}} = 2.5$$

Dado que este resultado supera al punto crítico del gráfico, concluimos nuevamente que los alumnos egresan con un promedio significativamente mayor al histórico.

En los párrafos anteriores hemos introducido una expresión nueva, que tiene un sentido preciso. Cuando decimos “significativamente mayor” no nos referimos al uso que suele darse en el lenguaje cotidiano, que es sinónimo de importante, de gran magnitud, grande, etc. Diremos que un valor es significativamente mayor o menor si se ha rechazado una prueba unilateral, o bien que es significativamente diferente o que la diferencia es significativa, si la  $H - 0$  que fue rechazada pertenece a una prueba bilateral. Además debe indicarse el nivel de significación de la prueba, por lo que diremos: según los datos observados y a un nivel del 5%, los alumnos egresan con un promedio significativamente superior al histórico.

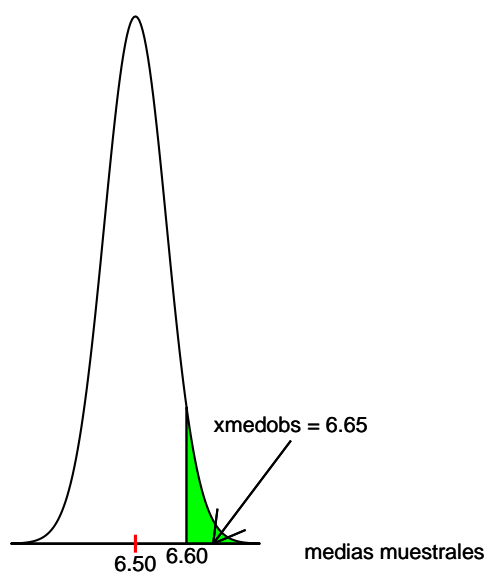


Figura 12.7: Región de rechazo unilateral derecha de  $H_0 : \mu = 6,50$  a un nivel de significación del 5%, con una muestra de 100 casos y desviación estándar 0,60, y ubicación del valor observado del estimador

---

Un resultado es **significativo** cuando conduce a rechazar una  $H_0$  a un determinado nivel de significación.

---

Un resultado puede ser significativo a un nivel y no serlo a otro. Por ejemplo, si en una prueba bilateral y luego de transformar el valor observado a puntaje  $z$ , se obtiene  $z = 2.3$ , este resultado conducirá a que se rechace  $H_0$  al 5% (porque 2.3 es mayor que 1.96) pero que no se rechace al 1% (porque 2.3 no es mayor que 2.56). En ese caso diremos que se obtienen resultados significativos al 5% pero no al 1%. Luego veremos que esta clasificación puede hacerse más precisa.

### 12.2.1.1 Otros ejemplos de prueba de hipótesis sobre la media

La investigación con sujetos animales en Psicología se basa en que distintas especies comparten mecanismos básicos, y los animales no humanos presentan un nivel de complejidad menor, lo que facilita la comprensión de complejos fenómenos en humanos. De hecho, los *modelos animales* han permitido avanzar en el conocimiento de mecanismos neurofisiológicos, cognitivos y comportamentales de seres humanos, siendo clave en el ámbito de la psicopatología y terapia psicológica.

En este contexto, alumnas de Psicología interesadas en la vulnerabilidad adolescente hacia el uso y abuso de drogas, recurrieron a un modelo animal para estudiar los efectos del alcohol<sup>3</sup>. Uno de los posibles factores que determinan las primeras aproximaciones a las drogas es la búsqueda de nuevas sensaciones, que se manifiesta en niveles elevados tanto en adolescentes humanos como no humanos, particularmente en roedores. En modelos animales, una manera de indagar el comportamiento de búsqueda de novedad es a través del uso de un objeto novedoso. Debido al escaso conocimiento sobre el comportamiento de los roedores ante tales objetos, las alumnas desarrollaron un estudio piloto. Concretamente, expusieron a 32 ratas Wistar<sup>4</sup> adolescentes (28 a 42 días de edad) a un objeto novedoso durante 3 minutos en distintos intervalos de tiempo.

A continuación, se retoman datos parciales del estudio piloto a los fines de exponer la modalidad de trabajo cuando se realiza una prueba de hipótesis sobre un valor determinado de la media. Primero ilustramos el caso de una prueba bilateral y luego unilateral.

Ejemplo (datos modificados<sup>5</sup>): en algunos estudios se ha observado que el tiempo

---

<sup>3</sup>Dziula y Reyna (2005)

<sup>4</sup>Se trata de una línea albina de la rata parda. Fue desarrollada en el Wistar Institute en 1906 para fines de investigación biomédica, se trata de la primera rata empleada como organismo modelo (anteriormente se trabajaba con el ratón).

<sup>5</sup>Algunos de los datos son ficticios debido a la falta de disponibilidad y a la necesidad de adaptar el ejemplo a nuestros fines. Se mantiene la temática del estudio de referencia, aunque los resultados mostrados no corresponden exactamente a él.



que tardan los roedores (en general) en contactar un objeto novedoso (llamado tiempo de latencia, o simplemente latencia) es de 150 seg. En función de ello, se indaga si la latencia de contacto con el objeto en ratas Wistar adolescentes es la misma o no en relación a la reportada previamente en otros trabajos con roedores. Las hipótesis formuladas son:

$$H_0 : \mu = 150$$

$$H_1 : \mu \neq 150$$

En la muestra utilizada, la latencia media de contacto con el objeto es de 138,42 seg. y la desviación estándar 42,98. Se establece un nivel de significación del 5%, por lo que los puntos críticos en puntajes  $z$  son  $z_c = \pm 1.96$

Luego, se transforma el valor de  $\bar{x}$  observado en puntaje  $z$  a través de la siguiente fórmula:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{x}_{\text{obs}} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{138.42 - 150}{\frac{42.98}{\sqrt{32}}} = \frac{-11.58}{7.59} = -1.52$$

Vemos que al valor de  $\bar{x}_{\text{obs}}$  le corresponde un valor  $z_{\text{obs}}$  que se encuentra entre los puntos críticos  $z_c = \pm 1.96$ , es decir que se halla en la zona de no rechazo de la  $H_0$ , por lo que concluimos que no hay evidencia que indique que la latencia media de contacto con un objeto novedoso en ratas Wistar es distinta a la latencia que manifiestan los roedores en general.

Se obtiene la misma conclusión si se utilizan los valores críticos de  $\bar{x}$ . Revisemos el procedimiento: luego de haber establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ( $\bar{x}_c$ ) a partir de los puntos críticos en puntajes  $z$  (los  $z_c$ ), a través de la siguiente fórmula<sup>6</sup>:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 150 \pm 1.96 * \frac{42.98}{\sqrt{32}} = 150 \pm 14.89$$

Entonces, los  $\bar{x}_c$  que delimitan las zonas de rechazo y no rechazo son 135.02 y 164.89, y el valor observado de  $\bar{x} = 138.42$  se encuentra comprendido entre ellos, por lo que no se rechaza la  $H_0$ .

Ejemplo (datos reales<sup>7</sup>): la literatura sobre comportamiento exploratorio en roedores (en general) indica que cuando los organismos son expuestos durante 180 seg a un objeto novedoso permanecen en contacto con el mismo (duración) 14 seg en promedio. Debido a las características del período adolescente, en este

<sup>6</sup>Sumamos y restamos para obtener dos puntos críticos, porque se trata de una prueba bilateral.

<sup>7</sup>Ver nota anterior

trabajo se formula una hipótesis que indica que las ratas adolescentes estarán más tiempo en contacto con el objeto. Las hipótesis formuladas son:

$$H_0 : \mu = 14$$

$$H_1 : \mu > 14$$

En los animales que comprenden la muestra bajo análisis, se observa que la duración de contacto con el objeto es de 17.43 seg y la desviación estándar 4.25. El nivel de significación se establece en el 5% y, dado que la prueba es unilateral derecha, el punto crítico en puntaje  $z$  es 1.64.

Luego, transformamos el valor de  $\bar{x}$  observado en puntaje  $z$ :

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{x}_{\text{obs}} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{17.43 - 14}{\frac{4.25}{\sqrt{32}}} = \frac{3.43}{0.75} = 4.57$$

Al valor de  $\bar{x}$  observado le corresponde un valor  $z = 4.57$ , que resulta superior al  $z_c = 1.64$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ , es decir que las ratas adolescentes muestran una duración mayor de contacto con un objeto novedoso que lo señalado por la literatura para roedores en general.

Obtenemos la misma conclusión si usamos los valores críticos de  $\bar{x}$ . Una vez establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ( $\bar{x}_c$ ) a partir de los puntos críticos en puntajes  $z$  ( $z_c$ )<sup>8</sup>:

$$\bar{x}_c = \mu + z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 14 + 1.64 * \frac{4.25}{\sqrt{32}} = 14 + 1.23 = 15.23$$

El valor observado de  $\bar{x} = 17.43$  resulta mayor a  $\bar{x}_c = 15.23$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ , y concluimos que la duración promedio de contacto con un objeto novedoso en ratas adolescentes es significativamente mayor a 14.

Ejemplo (datos reales): luego de haber evaluado la latencia de contacto con un objeto novedoso de los animales en repetidas ocasiones, los investigadores observan un valor promedio de 112.48 seg. Ahora, están interesados en indagar cuál será la latencia de contacto si las ratas son nuevamente expuestas al objeto novedoso, suponiendo que será menor debido a la disminución del carácter novedoso que hacía que los animales tardaran en contactar el objeto en las exposiciones iniciales. Las hipótesis formuladas son:

$$H_0 : \mu = 112.48$$

---

<sup>8</sup>Solo se suma para obtener el punto crítico de la derecha, porque se trata de una prueba unilateral derecha.

$$H_1 : \mu < 112.48$$

En la nueva exposición, la latencia promedio de contacto con el objeto es de 71.36 y la desviación estándar es de 45.77. El nivel de significación se establece en el 5% y, dado que la prueba es unilateral izquierda, el punto crítico en puntaje es  $z_c = -1.64$ .

Luego, transformamos el valor de  $\bar{x}_c$  observado en puntaje  $z$  con el estadístico de prueba:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{x}_{\text{obs}} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{71.36 - 112.48}{\frac{45.77}{\sqrt{32}}} = \frac{-41.12}{8.09} = -5.08$$

Vemos entonces que al valor de  $\bar{x}_c$  observado le corresponde un valor  $z = -5.08$ , que resulta inferior al  $z_c = -1.64$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ , es decir que se concluye que, a un nivel de significación del 5%, la latencia de contacto con el objeto novedoso en una nueva exposición es significativamente menor a 112.48 seg.

A la misma conclusión se arriba si se realizan los cálculos con los valores críticos de  $\bar{x}_c$ , que se obtienen a partir de los puntos críticos en puntajes  $z / z_c$ , a través de la siguiente fórmula<sup>9</sup>:

$$\bar{x}_c = \mu - z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 112.48 - 1.64 * \frac{45.77}{\sqrt{32}} = 112.48 - 13.27 = 99.21$$

El valor observado de  $\bar{x} = 71.36$  resulta menor a  $\bar{x}_c = 99.21$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ , la latencia promedio de contacto con el objeto novedoso en la nueva exposición es, al 5% de significación, significativamente menor a 112.48 seg.

Debemos recordar que el carácter unilateral o bilateral de la prueba no depende de la  $H_0$  sino de la  $H_1$ . En efecto, la  $H_0$  siempre indica un valor determinado para el parámetro (hasta aquí la media), mientras que la  $H_1$  puede indicar un valor diferente si la prueba es bilateral, o bien señalar la dirección de la diferencia hacia los mayores o menores y en esos casos, la prueba es unilateral. La decisión de hacer una prueba unilateral o bilateral depende de cada investigación concreta, de la pregunta que el investigador formula.

## 12.3 Prueba sobre la proporción

De modo equivalente a los intervalos de confianza, comenzaremos con la prueba de hipótesis sobre una proporción usando la distribución binomial, para luego

---

<sup>9</sup>Solo se resta para obtener el punto crítico izquierdo, porque es una prueba unilateral izquierda.

Tabla 12.7: Valores críticos usuales de la distribución normal

Significación	Puntaje z para prueba:		
	Bilateral	Unilateral derecha	Unilateral izquierda
0,10	$\pm 1,64$	+1,28	-1,28
0,05	$\pm 1,96$	+1,64	-1,64
0,01	$\pm 2,57$	+2,33	-2,33

usar la aproximación normal, si los supuestos se cumplen. El procedimiento conlleva los mismos pasos que cuando se trata de la media: se plantean, en primer lugar, las hipótesis nula y alternativa. La hipótesis nula afirma un valor para la proporción poblacional, mientras que la hipótesis alternativa puede, o bien solo indicar que el valor es diferente (prueba bilateral), o bien precisar si la diferencia se espera hacia valores mayores o menores que los indicados por la hipótesis nula (prueba unilateral). Una vez fijado el nivel de significación ( $\alpha$ ) y la lateralidad de la prueba, deben determinarse los valores de  $\hat{p}$  que dejan esa probabilidad por encima (en el caso de una prueba unilateral derecha), por debajo (unilateral izquierda), o bien repartida en ambas colas (si es una prueba bilateral). La determinación de esos puntos se realiza con la distribución binomial, por lo que es necesario transformar la variable *proporción de éxitos* ( $p$ ) al *número de éxitos* ( $x$ ). Esta transformación vale para la proporción hipotética ( $P$ ) y para la observada ( $\hat{p}$ ):

$$P = \frac{X}{n}$$

es decir

$$X = P * n$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \text{ es decir } \hat{x} = \hat{p} * n$$

Ejemplo (datos ficticios): un político tenía, hace tres meses una intención de voto equivalente al 30% del padrón. De acuerdo con algunas acciones de campaña, se cree que esta proporción pudo haber aumentado, por lo que el planteo de las hipótesis es:

$$H_0 : P = 0.30$$

$$H_1 : P > 0.30$$

Hipótesis que se pondrá a prueba sobre una muestra de 50 casos. Al igual que sucedió con la media, estos son valores que planteamos de manera hipotética acerca del parámetro, en este caso la proporción poblacional ( $P$ ). La  $H_0$  indica que la proporción de votos sigue siendo la misma. Se trata de una

prueba unilateral derecha, porque estamos interesados en encontrar un eventual aumento en la proporción de votantes que tiene el candidato, por eso la  $H_1$  indica una proporción mayor.

Se fija un nivel de significación de 5% y, para determinar los puntos críticos bajo un modelo binomial, se transforma el valor hipotético de  $P$  al correspondiente a  $X$  en la muestra dada:

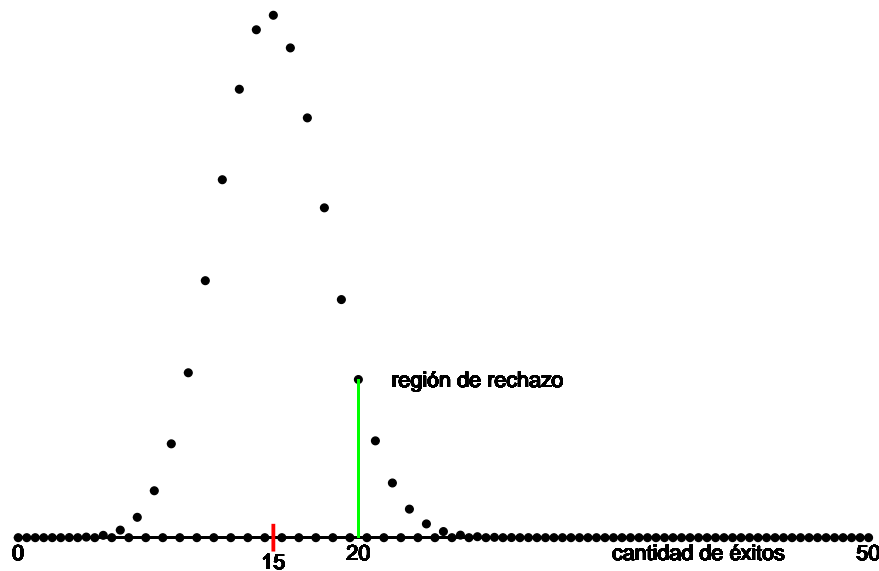
$$X = P * n = 0,30 * 50 = 15$$

Con lo que el punto crítico es el valor de  $\hat{x}$  que deja por encima (porque es una prueba unilateral derecha) al 5% de los valores posibles. Buscamos el percentil 95 de la distribución binomial correspondiente a los parámetros:  $n = 50$ ,  $P = 0.30$  y  $P(X > x) = 0.05$

La probabilidad es la de la cola derecha de la distribución, por ser una prueba unilateral derecha, y corresponde a una probabilidad acumulada de 0.95, de modo que el percentil es 95, que equivale a  $P(X \leq x) = 0.95$

## [1] 20

El número de éxitos es 20. Por lo que el valor de  $\hat{x}$  que es superado por el 5% de los valores muestrales posibles es 20. La representación gráfica es la siguiente:



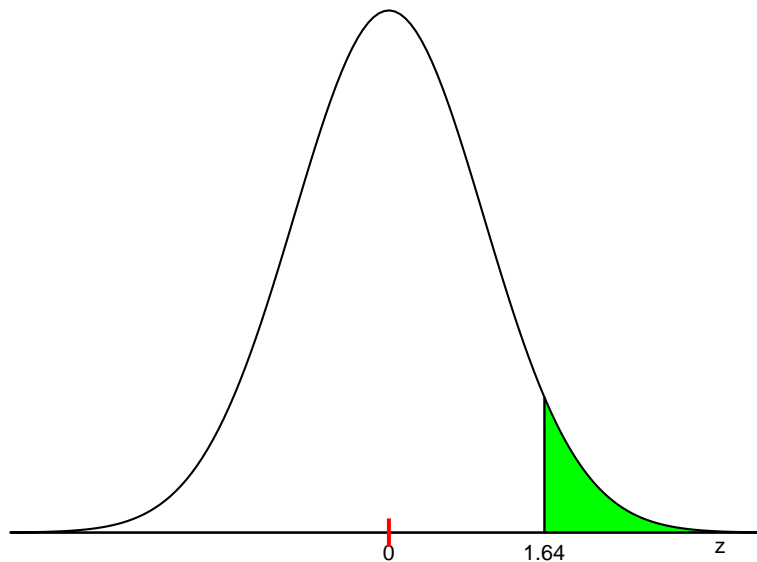
Repasemos la interpretación de estas operaciones: si la proporción de votos que el candidato tiene en la población total fuera del 30% (esa es la hipótesis nula),

entonces se esperaría que en una muestra de 50 casos, haya 15 que lo voten (15 es el 30% de 50, es la media de la distribución binomial). Como la muestra es aleatoria, la cantidad de votos que se obtienen en la muestra es aleatoria, puede ir desde cero hasta cincuenta, con diferentes probabilidades, que muestra el gráfico anterior. El criterio del 5%, establece al valor 20 votos como punto crítico. Eso quiere decir que, si la proporción de votos que el candidato tiene en toda la población fuera del 30%, la probabilidad de encontrar más de 20 votos en una muestra de 50 es menor al 5%. La regla de decisión será entonces: rechazar la hipótesis nula si en la muestra se encuentran más de 20 votos.

Si en la encuesta realizada sobre la muestra de 50 casos se encuentran 16 personas que dicen que lo votarán (con lo que<sup>10</sup>  $\hat{p} = 32\%$ ), la decisión será la de no rechazar  $H_0$  y considerar que no hay evidencia para creer que la proporción de votos que el candidato tiene, haya aumentado de su 30% anterior.

El punto crítico situado en 20 éxitos equivale a  $\hat{p}_c = 0,40$ . La comparación de los 16 éxitos muestrales con los 20 del punto crítico es la misma que la del 32% muestral frente al 40% crítico.

Si se tratara de una muestra de mayor tamaño y tanto  $n * P$  como  $n * (1 - P)$  fueran mayores a 5, podríamos usar la aproximación normal de la distribución binomial. Para ello, establecemos un nivel de significación de 5%, y el valor crítico de  $z$  (en prueba unilateral) es 1,64. Ahora en términos de  $z$ , la zona de rechazo queda así:




---

<sup>10</sup> $\hat{p} = \frac{16}{50} = 0,32$

Una vez fijado el nivel de significación ( $\alpha$ ) y la lateralidad de la prueba (derecha), quedan determinados los puntos críticos en términos de  $z$ , según el cuadro 1.

La principal diferencia a tener en cuenta para la transformación a puntaje  $z$  de la proporción es el cálculo de su error estándar que, en la aproximación normal de la distribución en el muestreo de las  $\hat{p}$  es:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$$

En la construcción de intervalos de confianza es necesario aproximar  $P * (1 - P)$  a través de  $\hat{p} * (1 - \hat{p})$ , porque se ignora el valor de la proporción poblacional. En la prueba de hipótesis, la situación es diferente, porque se cuenta con una  $P$  (poblacional) hipotética, y es esa la que se utiliza para el cálculo de  $\sigma_{\hat{p}}$ . Por lo tanto, la transformación del valor observado en la muestra a puntajes  $z$  se hará según:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{p}_{\text{obs}} - P}{\sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}}$$

Que es el estadístico de prueba para la prueba de proporciones que debe usarse cuando sea válida la aproximación normal para la distribución binomial. De acuerdo a que la posición de este  $z_{\text{obs}}$ , sea en la zona de rechazo o no rechazo de  $H_0$ , se toma la decisión.

Nuevamente sobre el ejemplo con las mismas hipótesis, nula y alternativa

$$H_0 : P = 0,30$$

$$H_1 : P > 0,30$$

Sea ahora que se trató de una muestra de 200 ciudadanos, en la que se halla que 64 dicen que van a votar a ese candidato (de este modo la proporción muestral sigue siendo de 32%). En la muestra entonces:

$$\hat{p} = \frac{64}{200} = 0.32$$

Nos preguntamos si este valor puede considerarse como un verdadero aumento respecto del 30% anterior o si solo se explica por razones de azar. Repitiendo la operación que realizamos para la media, transformamos este valor observado de la proporción muestral a puntaje  $z$  y hallamos el estadístico de prueba:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{p}_{\text{obs}} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}} = \frac{0.32 - 0.30}{\sqrt{\frac{0.30*(1-0.30)}{200}}} = 0.617$$

Este puntaje de  $z_{\text{obs}}$  no supera al punto crítico ( $z = 1.64$ ) por lo que se sitúa en la zona de no rechazo de  $H_0$ . Concluimos que la proporción no ha aumentado respecto del valor anterior.

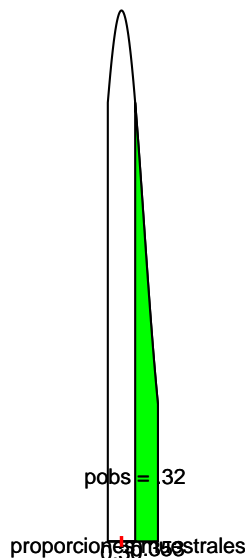
Para repetir la prueba sobre valores del estimador  $\hat{p}$ , vamos a transformar el punto crítico de acuerdo a la expresión general:

$$\hat{p} = P \pm z_c * \sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}$$

de la que usaremos ambos signos cuando se trate de una prueba bilateral o solo la suma si es unilateral derecha o solo la resta si es unilateral izquierda. Para nuestro problema, corresponde sumar, por lo que resulta:

$$\hat{p} = P + z_c * \sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}} = 0.30 + 1.64 * \sqrt{\frac{0.30*(1-0.30)}{200}} = 0.353$$

Representamos gráficamente la zona de rechazo como la cola derecha de la distribución de las  $\hat{p}$ :





El valor hallado en la muestra ( $\hat{p}_{\text{obs}} = 0,32$ ) es menor que el punto crítico, por lo que no está en la zona de rechazo, en consecuencia, no rechazamos la  $H_0$  y concluimos que no hay evidencia para creer que el candidato haya aumentado su proporción de votos. Como había sucedido antes, la conclusión es la misma si trabajamos sobre los puntajes estandarizados o sobre valores del estimador. Sin embargo, el punto crítico expresado en términos de  $\hat{p}$  es diferente, cuando se usó la distribución binomial su valor fue 40% y ahora es 35%.

En los ejemplos siguientes trabajaremos con muestras grandes por lo que las pruebas se realizan usando la aproximación normal.

Ejemplo (datos reales): en el estudio Latinobarómetro<sup>11</sup> se menciona la importancia de comprender la percepción de la gente sobre el cambio generacional, cómo vivían los padres en relación a ellos y cómo vivirán los hijos con respecto a ellos (expectativa futura). En el año 2004, el 58,2% de los argentinos encuestados consideraba que los hijos vivirían mejor que ellos. En el año 2005, los investigadores indagan nuevamente la expectativa futura. Dado que habían observado fluctuaciones en años previos se preguntan si esa expectativa positiva habrá cambiado o no respecto del año anterior. Las hipótesis que se formulan son:

$$H_0 : P = 0.582$$

$$H_1 : P \neq 0,582$$

En el estudio del año 2005, observaron que 676 participantes de los 1200 que componían la muestra consideraban que sus hijos vivirían mejor que ellos, siendo la proporción en la muestra:

$$\hat{p} = \frac{676}{1200} = 0.563$$

El nivel de significación se establece al 5%, por lo que los puntos críticos en puntajes  $z$  son  $z_c = \pm 1.96$  (prueba bilateral).

Para responder a la hipótesis planteada, se transforma el valor de proporción observado a puntaje  $z$  haciendo:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{p}_{\text{obs}} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}} = \frac{0.563 - 0.582}{\sqrt{\frac{0.582*(1-0.582)}{1200}}} = -1.36$$

---

<sup>11</sup>Latinobarómetro es un estudio de opinión pública que aplica anualmente alrededor de 19.000 entrevistas en 18 países de América Latina representando a más de 400 millones de habitantes. Corporación Latinobarómetro es una ONG sin fines de lucro con sede en Santiago de Chile, única responsable de la producción y publicación de los datos. <http://www.latinobarometro.org/>.

El valor  $z_{obs} = -1.36$  se encuentra entre los puntos críticos  $\pm 1.96$ , es decir que se halla en la zona de no rechazo de la  $H_0$ , por lo cual se concluye que no hay evidencia que indique que la proporción de expectativas positivas haya cambiado, la proporción no es significativamente distinta de 0.582.

Se alcanza la misma conclusión si se realizan los cálculos en función de los valores del estimador. Establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ( $\hat{p}$ ) a partir de los puntos críticos en puntajes  $z$  ( $z_c$ ):

$$\hat{p} = P \pm z_c * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}} = 0.582 \pm 1.96 * \sqrt{\frac{0.582 * (1 - 0.582)}{1200}} = 0.582 \pm 0.027$$

De esta manera se obtienen los  $\hat{p}_c$  que delimitan las zonas de rechazo y no rechazo: 0.55 y 0.61. El valor  $\hat{p}_{obs} = 0.563$  se encuentra comprendido entre ellos, por lo que no se rechaza la  $H_0$ .

Ejemplo (datos reales): otro de los aspectos indagados en el estudio Latinobarómetro se refiere a la opinión sobre progreso en la reducción de la corrupción en las instituciones del Estado. En el año 2004, el 3.33% de los encuestados argentinos consideraba que se había progresado mucho en ese aspecto. En el estudio del 2005, se espera que los resultados sean más favorables debido a la aplicación de una serie de medidas tendientes a controlar la corrupción institucional. Así, las hipótesis que se formulan son:

$$H_0 : P = 0.033$$

$$H_1 : P > 0.033$$

De los 1200 argentinos encuestados en el año 2005, 51 señalan que se ha progresado mucho en reducir la corrupción institucional, es decir que la proporción en la muestra es

$$\hat{p} = \frac{51}{1200} = 0.043$$

El nivel de significación se establece en el 5%, dado que la prueba es unilateral derecha el único punto crítico en puntaje  $z$  es 1.64.

Luego, se transforma el valor de proporción observado en puntaje  $z$ , usando el estadístico de prueba:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}} = \frac{0.043 - 0.033}{\sqrt{\frac{0.033*(1-0.033)}{1200}}} = 1.94$$

El valor  $z_{obs} = 1.94$  resulta superior al  $z_c = 1.64$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ . Por eso concluimos que la proporción de personas que declaran que se ha progresado en la reducción de la corrupción institucional se incrementó de manera significativa.

Se obtiene la misma conclusión a partir de los valores del estimador. Establecido el nivel de significación al 5%, se obtiene el punto crítico en puntaje original ( $\hat{p}_c$ ) a partir del punto crítico en puntajes  $z$  ( $z_c$ ):

$$\hat{p} = P + z_c * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}} = 0.033 + 1.64 * \sqrt{\frac{0.033 * (1 - 0.033)}{1200}} = 0.033 + 0.008 = 0.041$$

El valor observado de  $\hat{p}_{obs} = 0.043$  resulta mayor a  $\hat{p}_c = 0.041$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ , y se concluye que la proporción de quienes creen que se ha progresado en la reducción de la corrupción institucional se ha incrementado de manera significativa de 2004 a 2005.

Ejemplo (datos reales): otro tema que aborda Latinobarómetro es el interés por la política. En el estudio del año 2004, el 11% de los encuestados argentinos manifestó estar muy interesado en la política. Si bien no ha habido notables cambios en la última década con respecto al interés de los ciudadanos en la política, una serie de indicadores llevaron a los investigadores a considerar que el interés en esta cuestión podría haber disminuido. Las hipótesis planteadas son:

$$H_0 : P = 0.11$$

$$H_1 : P < 0.11$$

De la muestra de 1200 argentinos encuestados en el año 2005, 111 manifiestan un elevado interés en la política, la proporción en la muestra es:

$$\hat{p} = \frac{111}{1200} = 0.093$$

El nivel de significación se establece en el 5%, dado que la prueba es unilateral izquierda el punto crítico en puntaje  $z$  es  $-1.64$ . Con el estadístico de prueba se transforma el valor de proporción observado en puntaje  $z$ :

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}} = \frac{0.093 - 0.11}{\sqrt{\frac{0.11 * (1 - 0.11)}{1200}}} = -1.88$$

El valor  $z_{obs} = -1.88$  resulta inferior al  $z_c = -1.64$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ . Concluimos que la proporción de personas que manifiestan elevado interés en la política ha disminuido de manera significativa de un año al siguiente.

Como antes, puede alcanzarse la misma conclusión realizando los cálculos con el valor crítico del estimador:

$$\hat{p}_c = P - z_c * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}} = 0.11 - 1.64 * \sqrt{\frac{0.11 * (1 - 0.11)}{1200}} = 0.11 - 0.015 = 0.095$$

El valor observado de  $\hat{p}_{obs} = 0.093$  resulta menor a  $\hat{p}_c = 0.095$ , por lo que se rechaza la  $H_0$ . Se concluye entonces que la proporción de ciudadanos argentinos con alto interés en la política en el año 2005 es significativamente menor a 0.11.

## 12.4 Tipos de error en las pruebas de hipótesis

Dado que la decisión de aceptar o rechazar la  $H_0$  se toma de manera probabilística, siempre existe la posibilidad de tomar una decisión incorrecta. Esto sucede porque las muestras son tomadas al azar y puede suceder que la que usamos para tomar la decisión sea una muestra extrema. Aunque es un resultado poco probable, no es imposible.

Como hemos visto, el nivel de significación mide la probabilidad de hallar un determinado resultado muestral si la  $H_0$  fuera cierta, es una probabilidad pequeña, que habitualmente fijamos en 0.05 ó 0.01. Si la  $H_0$  es cierta y la muestra sobre la que basamos la decisión es extrema, es decir, tiene un valor ubicado en alguna de las colas de la distribución, la decisión será la de rechazar  $H_0$  y esa decisión será errónea. La decisión de rechazar puede deberse o bien a que  $H_0$  sea efectivamente falsa, o bien a que  $H_0$  sea verdadera y se haya obtenido una de esas muestras muy poco probables. Por esta razón el nivel de significación mide la probabilidad de errar en la decisión de esta manera: rechazando una  $H_0$  que es verdadera. Al igual que en los intervalos de confianza, éste no es un error de cálculo ni una equivocación, sino una imprecisión inherente a todos los procesos de estimación. Éste error se conoce como **Error de Tipo I** (ETI).

---

El **Error de Tipo I** es tomar una decisión errónea que consiste en rechazar la  $H_0$  cuando esta es verdadera. Su probabilidad está fijada de antemano y es  $\alpha$ , el nivel de significación de la prueba.

---

En consecuencia, establecer  $\alpha$  es afirmar que se está dispuesto a correr ese riesgo de cometer el ETI. En un experimento que consiste en decidir si una droga produce efectos sobre una determinada patología, la  $H_0$  dirá que no hay efecto, por lo que cometer el ETI será creer que hay efecto (rechazar  $H_0$ ) cuando

en realidad no lo haya ( $H_0$  verdadera). Como no sabemos si  $H_0$  es verdadera o falsa, cada vez que rechazamos  $H_0$  debemos recordar que hay una probabilidad  $\alpha$  de haber tomado una decisión incorrecta. Esta incertidumbre está siempre presente en evaluación humana en los campos psicológico y educativo, así como en la evaluación de efectos e impactos de programas de intervención social, o en la comparación de grupos para conocer diferencias entre varones y mujeres, medir los efectos del nivel de educación, etc. En general, está presente en la toma de decisión en contextos de incertidumbre, que son aquellos en que no se conoce a todos los elementos de una población, sino a una muestra de ellos.

Ejemplo ilustrativo: las preguntas de un examen oral son una muestra de lo que el alumno sabe, si se usa un bolillero, la elección del tema que toca es aleatoria. Supongamos que un alumno ha estudiado muy poco, pero la unidad que le toca desarrollar es alguna de las (muy pocas) que sabe. En ese caso responderá correctamente y la decisión del docente será darle por aprobado el examen. Si supiéramos que el alumno ignora todos los demás temas de la materia, la decisión correcta sería que no apruebe. La formalización de este problema es la siguiente: la hipótesis nula es la conservadora, esto es, que el alumno no sabe; será necesario sumar evidencia para que se tome la decisión de rechazar esa hipótesis y dar el examen por aprobado. La muestra de información que tiene el docente a su disposición (las bolillas que salieron por azar) es correctamente desarrollada por el alumno, lo que conduce a la decisión de rechazar la  $H_0$  y dar el examen por aprobado. Para quien tiene toda la información (que el alumno solo sabe esas unidades del programa), se ha cometido un Error de Tipo I, pero el docente nunca lo sabrá. En investigación nunca tenemos “toda la información”, trabajamos con muestras, por lo que nunca sabemos si, cuando rechazamos  $H_0$  y concluimos que algo cambió o que hay un efecto, estamos cometiendo este error o no.

Esta es la razón por la que  $\alpha$  se elige con valores pequeños, pero no se puede reducir indefinidamente el valor de  $\alpha$ , porque también existe el riesgo de no rechazar  $H_0$  siendo falsa.

Éste es otro tipo de error, que se llama **Error de Tipo II** (ETII) que sucede cuando se no se rechaza una  $H_0$ , siendo ésta falsa. En el experimento anterior, cometer este error consiste en creer que la droga no es efectiva (no rechazar  $H_0$ ) cuando en realidad sí tiene efectos ( $H_0$  es falsa). En el ejemplo del examen, se trata de aplazar a un alumno (aceptar  $H_0$ ) cuándo sí sabía, porque le tocó -a la inversa que en el caso anterior- una de las únicas bolillas que no sabía.

---

Se llama **Error de Tipo II** a la decisión equivocada de no rechazar una hipótesis nula cuando ésta es falsa.

---

Según la prueba de que se trate, el costo de cometer cada tipo de error es diferente. Si se trata de evaluar el efecto de una intervención terapéutica, la  $H_0$  dirá que no produce efectos. Entonces, cometer un ETI equivaldrá a

recomendar la intervención y que no produzca efecto. Mientras que el ETII consistirá en desestimar una intervención que sí tenía efectos. Si se trata de una intervención muy riesgosa, el ETI es muy grave, porque implicará poner en peligro al paciente, por nada. Por su parte, el ETII conlleva la pérdida del beneficio que la intervención habría dado. La decisión sobre qué error es más grave debe tomarse en cada caso y no pertenece al terreno de la estadística.

Esto se vincula a los errores a que están expuestas las pruebas diagnósticas.

Cuando la prueba da un resultado positivo al ser aplicada a alguien sano, se llama *falso positivo*. De modo más general, esa expresión indica que el error consiste en creer que “sucedió algo” cuando no fue así y corresponde, en las pruebas de hipótesis, al ETI.

De modo equivalente, el resultado negativo de una prueba diagnóstica aplicada a alguien que sí está enfermo se llama *falso negativo*. Se trata del error opuesto, porque cuando se comete se cree que “no sucedió nada” cuando en realidad sí sucedió. Es el ETII.

Si insistimos sobre estos errores es para llamar la atención sobre dos aspectos fundamentales de las pruebas de hipótesis:

- Las conclusiones son probabilísticas, no son verdaderas ni falsas.
- Toda conclusión proveniente de estos procedimientos está sujeta a error.

## 12.5 *ETII*: $\mu$ , $\alpha$ y $n$

A diferencia del ETI, la probabilidad de cometer un ETII no es fijada de antemano, al contrario, el riesgo de creer que  $H_0$  es verdadera cuando no lo es, depende de cuál sea la verdadera. Intuitivamente: no es igualmente probable creer que no hay diferencia entre dos valores cuando en realidad éstos son muy cercanos, que cuando difieren mucho, es más fácil confundir cosas que están cerca (creyendo que son iguales) que cuando están lejos.

Llamaremos  $\beta$  a la probabilidad de cometer el ETII y veremos cómo calcularla según las diferentes posibilidades del verdadero valor del parámetro sobre el cual se realiza la prueba.

El gráfico 12.8 corresponde a una prueba de hipótesis unilateral derecha sobre la media poblacional<sup>12</sup>, con la forma:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

---

<sup>12</sup>Aunque ejemplificaremos solo para el caso de la media y para una prueba unilateral derecha, el concepto de errores de tipo I y II es general y vale del mismo modo para la proporción y para pruebas de hipótesis sobre otros parámetros, en pruebas unilaterales o bilaterales.

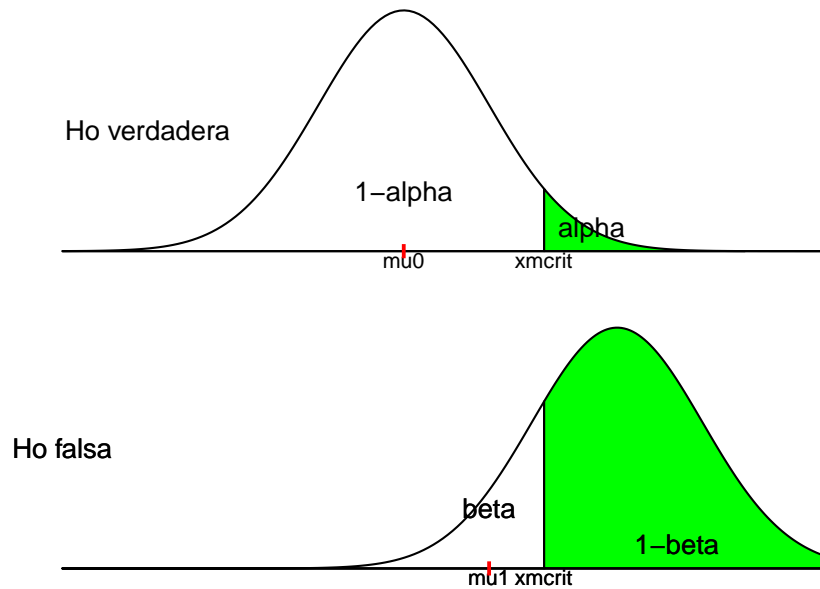


Figura 12.8: Comparación de la probabilidad de hallar a  $\bar{x}$  en zona de aceptación o rechazo, según sea  $H_0$  verdadera o falsa ( $\alpha = 0,05$ )

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Donde  $\mu_0$  es un valor determinado e hipotético para la media de la población. En el gráfico se ha ubicado ése valor hipotético y la zona de rechazo de  $H_0$ , estableciendo el nivel de significación ( $\alpha$ ) en 0,05. Además, hemos dibujado otra curva, centrada en otra media poblacional que podría ser verdadera<sup>13</sup>. Así, la curva superior representa la distribución de probabilidad de  $\bar{x}$  si  $H_0$  fuera verdadera ( $\mu = \mu_0$ ). La curva inferior muestra la distribución de probabilidades de  $\bar{x}$  si  $H_0$  fuera falsa ( $\mu > \mu_0$ ) y la verdadera media poblacional fuera  $\mu_1$  (que es una de las posibles entre las mayores que  $\mu_0$ ).

La parte superior del gráfico muestra que, si  $H_0$  es verdadera,  $\bar{x}$  tiene una probabilidad  $\alpha$  de estar en la zona de rechazo, por lo que, si  $H_0$  es verdadera y  $\bar{x}$  está en esa zona, tomaremos la decisión errada de rechazarla. El complemento del nivel de significación ( $1 - \alpha$ ), es la probabilidad de tomar la decisión correcta de no rechazar  $H_0$  cuando ésta es verdadera. Es la probabilidad de hallar a  $\bar{x}$  en la zona de no rechazo de  $H_0$ .

<sup>13</sup>Lo que sigue tiene objetivos orientativos, si se necesita un tratamiento más detallado del tema -que requiere considerar que si  $H_0$  es falsa entonces la distribución del estimador no es necesariamente simétrica-, puede consultarse Cumming (2012).

En el gráfico inferior vemos que, si  $H_0$  es falsa,  $\bar{x}$  tiene probabilidad  $1 - \beta$  de estar en la zona de rechazo, lo que llevará a tomar la decisión correcta de rechazar una  $H_0$  falsa. Bajo el mismo supuesto de  $H_0$  falsa,  $\beta$  es el área correspondiente a la zona de no rechazo de  $H_0$ , por lo que mide la probabilidad de errar aceptando una  $H_0$  falsa.

Debido a que no podemos tener certeza acerca de la verdad o falsedad de  $H_0$ , es que se nos plantean dos posibles escenarios: que  $H_0$  sea verdadera o que sea falsa. En base a los datos con que contamos en la muestra podemos tomar dos decisiones: rechazar  $H_0$  o no rechazarla, con lo que la decisión que tomemos puede ser correcta o incorrecta.

Esquema 1: Posibles combinaciones de estados de realidad y decisión que se toma. (Entre paréntesis, la probabilidad de cada evento):

Estado de realidad	Decisión	
	No rechazar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ Verdadera	Decisión correcta ( $1 - \alpha$ )	Error de tipo I ( $\alpha$ )
$H_0$ Falsa	Error de tipo II ( $\beta$ )	Decisión correcta ( $1 - \beta$ )

La última celda del esquema corresponde a la decisión correcta de rechazar una  $H_0$  que es falsa, y se la denomina **potencia de la prueba**. Es un indicador de la capacidad de la prueba para detectar hipótesis nulas que son falsas y rechazarlas.

---

Se llama **potencia de una prueba** a la probabilidad de rechazar una  $H_0$  cuando ésta es falsa.

---

Es una importante medida de la calidad de la prueba, luego volveremos sobre su cálculo, y en el apéndice ofrecemos más detalles.

Así entonces,  $\alpha$  es elegido por el investigador y mide el riesgo que está dispuesto a correr de rechazar una  $H_0$  que es verdadera. Por el contrario,  $\beta$  depende de varios elementos:

En primer lugar, depende de  $\alpha$  si se reduce el nivel de significación, aumenta el riesgo de cometer ETII.

Si se cambia el gráfico, reduciendo el nivel de significación, ahora la posición relativa de las áreas de rechazo y no rechazo queda:

Como vemos, la reducción del nivel de significación del 5% al 1% hace que el punto crítico se desplace hacia la derecha y, en consecuencia, que aumente el área bajo la otra curva, que corresponde a  $H_0$  falsa. Este cambio consiste en hacer a la prueba más exigente, al reducir las chances de rechazar  $H_0$  por error



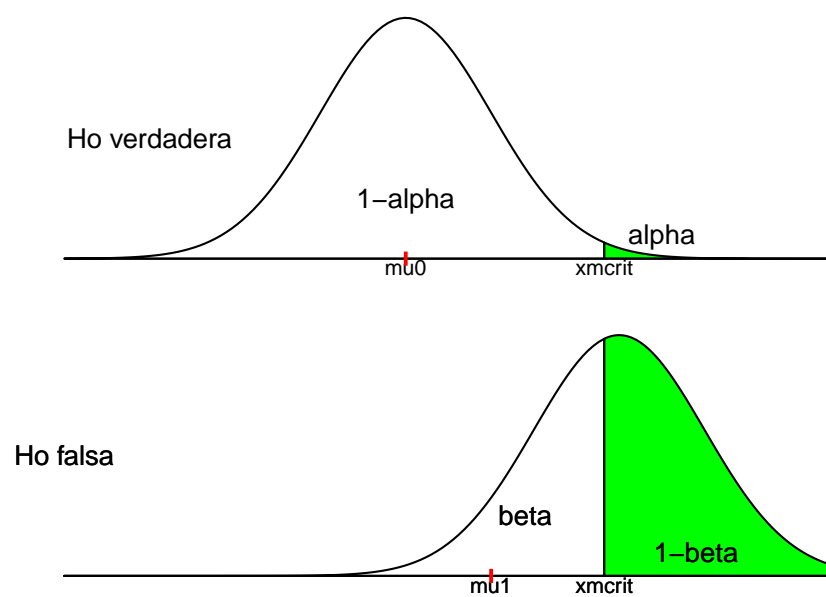


Figura 12.9: Comparación de la probabilidad de hallar a  $\bar{x}$  en zona de rechazo o no rechazo, según sea  $H_0$  verdadera o falsa  $\alpha = 0,01$

del 5 al 1%. Su consecuencia es la de aumentar las chances de aceptar  $H_0$  por error, aumentando  $\beta$ .

El ETII depende también de cuál sea la verdadera media poblacional. En los gráficos planteamos como “otra posibilidad” que la verdadera media fuera  $\mu_1$ , que es una de las formas en que puede ser  $H_0$  falsa. Siendo  $H_0$  falsa,  $\mu$  puede tener distintos valores y ellos incidirán en la probabilidad de cometer ETII. En el gráfico siguiente, además de  $\mu_1$  agregamos otras dos medias poblacionales posibles  $\mu_2$  y  $\mu_3$ .

El gráfico muestra que si la verdadera media poblacional difiere mucho de la hipotética (como es el caso de  $\mu_3$ ), es menor la probabilidad  $\beta$  de cometer ETII:  $\beta$  va decreciendo a medida que se consideran medias más alejadas de la que sostiene la  $H_0$ . Ésta es una manera de formalizar la idea intuitiva que mencionamos más arriba: es más fácil aceptar un valor equivocado de  $\mu$  si el verdadero se le parece, que si es muy diferente. Más concreto aún: es más fácil aceptar por error un billete falso si se le parece mucho al verdadero que si es muy distinto, y cuanto más difiera, menor será la probabilidad de aceptarlo por error.

El gráfico 12.10 también muestra que, de manera complementaria,  $1 - \beta$  (la potencia de la prueba), va creciendo a medida que se consideran medias alternativas más alejadas de la hipotética.

Volvamos al ejemplo (ficticio) sobre el promedio con que egresan los estudiantes de Psicología en la prueba unilateral derecha, cuyas hipótesis son:

$$H_0 : \mu = 6.50$$

$$H_1 : \mu > 6.50$$

Preguntamos: si la verdadera media de nota con que egresan los estudiantes fuera de 6.55, ¿cuál habría sido la probabilidad de haber aceptado  $H_0$ ? Dicho de otra forma ¿qué probabilidad hay de creer que la media sigue siendo 6.50 si en realidad ha aumentado a 6.55? Se trata de calcular la probabilidad de cometer ETII, porque se trata de aceptar una  $H_0$  que es falsa. A un nivel de significación del 5%, el punto crítico que habíamos encontrado es 6.60, por lo que:

Gráfico 12: Ubicación de los tipos de error de la prueba si  $H_0$  es verdadera o si es falsa.

La probabilidad de ETII en este caso es el área bajo la curva inferior que está por debajo del punto crítico, 6.60. Para calcular  $\beta$  es necesario hallar esa área bajo la curva normal centrada en 6.55, lo que requiere que se lo transforme a puntaje  $z$ :

Figura 12.10: Comparación de la probabilidad de hallar a  $\bar{x}$  en zona de aceptación o rechazo, según sea  $H_0$  verdadera o falsa, de tres modos diferentes



$$z = \frac{6.60 - 6.55}{\frac{0.60}{\sqrt{100}}} = \frac{0.05}{0.06} = 0.83$$

Cuya área izquierda asociada es:

## [1] 0.7967306

$$P(z \leq 0.83) = 0.7967$$

Éste es el valor de  $\beta$  para esta prueba y esta media alternativa. Leemos el resultado diciendo que "si el verdadero promedio con que egresan los estudiantes de Psicología fuera de 6.55, habría una probabilidad de 0.7967 de creer que sigue siendo igual al histórico, de 6.60.

Calculamos la potencia de esta prueba, como el complemento de  $\beta$ :

$$Potencia = 1 - \beta = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

Esta potencia es la probabilidad de detectar una diferencia de 0.05 entre la media real y la hipotética (es la diferencia entre 6.50 y 6.55) a un nivel de significación del 5%, con una muestra de 100 observaciones. Estos cuatro elementos: magnitud de la diferencia, tamaño de la muestra, nivel de significación y potencia están vinculados entre sí y deben tenerse en cuenta al planificar un estudio que vaya a usar pruebas de hipótesis.

### 12.5.1 Curva de potencia

Dado que no se conoce la verdadera media de la población, solo podemos conjeturar acerca de ella y calcular el ETII, así como la potencia para diferentes valores posibles, como hemos hecho para tres valores en el gráfico . En general, resulta más valioso calcular la potencia ( $1 - \beta$ ) porque nos informa sobre la calidad de la prueba. El cálculo es largo porque deben seguirse los mismos pasos que en el ejemplo anterior para cada una de las medias posibles, pero podemos automatizarlo en una hoja de cálculo. La tabla para calcular la potencia de la prueba anterior se construye manteniendo el punto crítico fijo en 6.60 (y también la desviación estándar y el tamaño de la muestra), y calculando el puntaje  $z$  correspondiente a ese valor "desde" diferentes medias poblacionales alternativas, a las que hemos llamado  $\mu_k$ . Así resulta:

Media alternativa $\mu_k$	$z = \frac{6,60 - \mu_k}{\frac{0,60}{\sqrt{100}}}$	$\beta$	$1 - \beta$
6,51	1,50	0,9332	0,0668
6,53	1,17	0,8783	0,1217
6,55	0,83	0,7977	0,2023
6,57	0,50	0,6915	0,3085
6,59	0,17	0,5662	0,4338
6,61	-0,17	0,4338	0,5662
6,63	-0,50	0,3085	0,6915
6,65	-0,83	0,2023	0,7977
6,67	-1,17	0,1217	0,8783
6,69	-1,50	0,0668	0,9332
6,71	-1,83	0,0334	0,9666
6,73	-2,17	0,0151	0,9849
6,75	-2,50	0,0062	0,9938
6,77	-2,83	0,0023	0,9977
6,79	-3,17	0,0008	0,9992
6,81	-3,50	0,0002	0,9998
6,83	-3,83	0,0001	0,9999
6,85	-4,17	0,0000	1,0000
6,87	-4,50	0,0000	1,0000

Resultan así diferentes valores para la potencia, uno para cada media posible y vemos, ahora numéricamente, como disminuye el riesgo de aceptar  $H_0$  a medida que la verdadera media es más lejana. Al mismo tiempo, aumenta la probabilidad de rechazar  $H_0$  (aumenta la potencia). Esos resultados se representan gráficamente en lo que se denomina **curva de potencia**. Para el ejemplo anterior, la curva de potencia es la siguiente:

En el eje horizontal se ubican las posibles medias poblacionales (las distintas  $\mu_k$ ) y en el vertical, la potencia asociada a cada una de ellas. Vemos que si la verdadera media es la hipotética ( $\mu = 6.50$ ), la probabilidad de rechazarla es  $\alpha$ , y esa probabilidad aumenta a medida que se consideran medias más lejanas a  $\mu_0$ . Si la verdadera media poblacional fuera tan lejana como 6.90, la probabilidad de rechazar  $H_0$  es casi 1, lo que indica que es casi seguro que se rechazará esa hipótesis.

Dijimos antes que la potencia es una medida de la calidad de la prueba, en efecto, cuanto más rápidamente crezca esta curva, tanto más sensible será la prueba, porque será más probable detectar hipótesis nulas que son falsas y rechazarlas. Dicho de otro modo, será alta la probabilidad de rechazar una hipótesis nula si la verdadera media difiere -aunque sea poco-, de la hipotética.

La forma de la curva de potencia depende de varios factores, de los que solo nos detendremos en el tamaño de la muestra: con muestras más grandes, si todo lo

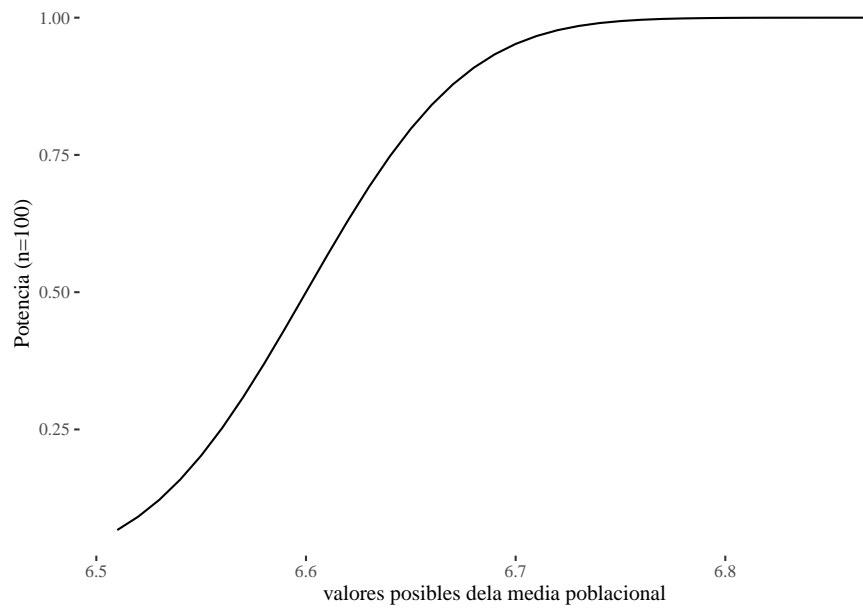
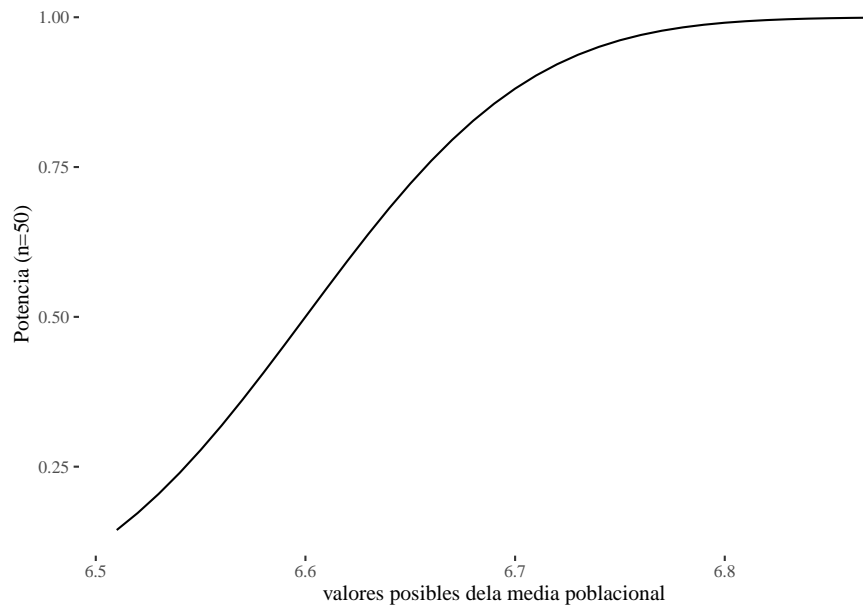


Figura 12.11: Curva de potencia con  $\mu_0 = 6.50$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $n = 100$

demás se mantiene sin cambios, la potencia de la prueba aumenta. Inversamente, muestras pequeñas reducen la potencia.

Veamos esto gráficamente, si la muestra fuera de menor tamaño que la del ejemplo, como  $n=50$ , la curva de potencia toma la siguiente forma:

Gráfico 14: Curva de potencia con  $\mu_0 = 6.50$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $n = 50$



Igual que antes, en 6.50, la probabilidad de rechazo es 0.05, que es  $\alpha$ . Pero cuando consideramos valores más lejanos de la media poblacional, la curva sube con más lentitud que la anterior, podríamos decir que “tarda más en reaccionar”, son necesarios alejamientos más grandes para que crezca la probabilidad de rechazo.

Por el contrario, si se trata de una muestra de mayor tamaño, como 200 casos, la curva tiene la forma:

Que muestra un aumento más rápido de la probabilidad de rechazar una  $H_0$  cuando ésta es falsa.

Es importante destacar que la potencia no depende del resultado observado en la muestra, por el contrario, es un indicador de la calidad de la prueba como tal, independientemente de lo que se encuentre en la muestra. Por esta razón, el análisis de la potencia se realiza al momento de planificar un experimento. Tiene mucha importancia para calcular el tamaño de muestra necesario para detectar una determinada diferencia entre grupos.

Existen índices para estandarizar la distancia entre el verdadero valor del parámetro y el hipotético. Esos índices permiten comparar entre pruebas de diferente naturaleza (porque están estandarizados), se denominan *medidas del tamaño del efecto*. Ellis (2010) provee un tratamiento detallado de este tema, en el apéndice regresaremos sobre ellas.



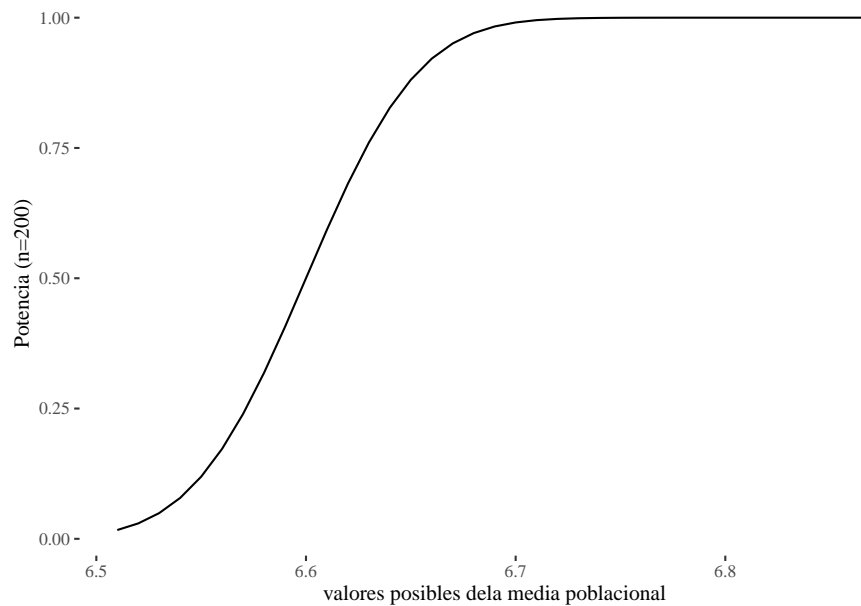
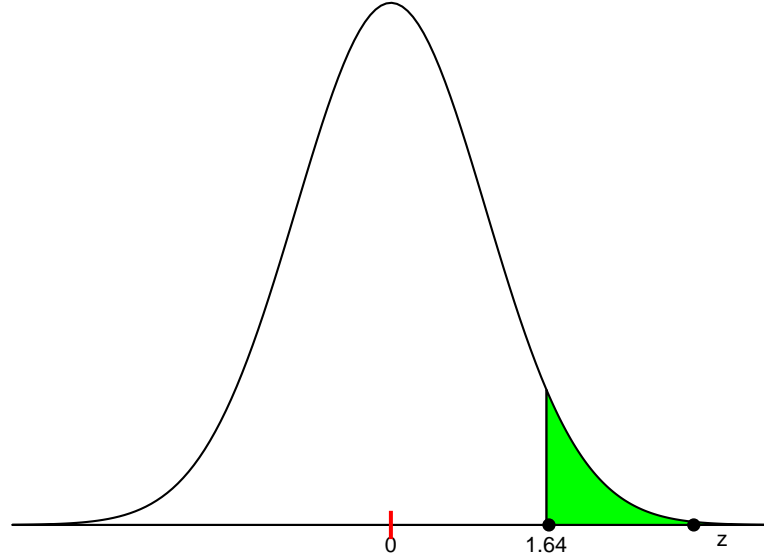


Figura 12.12: Curva de potencia con  $\mu_0 = 6.50$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $n = 200$

### 12.5.2 Significación estadística y valor $p$

Hasta este punto se ha indicado que el investigador establece el nivel de significación estadística al realizar una prueba de hipótesis, a partir de lo cual se determinan zonas de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula y que esto puede hacerse sobre valores estandarizados o del estimador. Luego, una vez obtenido el resultado de la muestra, se indica en qué zona se ubica, y se decide si se acepta o rechaza la  $H_0$ . La forma en que se comunican los resultados es, por ejemplo: “se rechaza la  $H_0$  a un nivel del 5%”. De modo que, como hemos dicho, se establece una regla de decisión y en base a ella se decide por sí o por no.

En una prueba unilateral derecha al 5%, el puntaje  $z$  que determina el punto de corte entre las zonas de rechazo y no rechazo es  $z_c = 1.64$ , por lo que, si se obtiene un  $z_{obs} = 1.67$ , se rechaza  $H_0$  y también se rechaza si se obtiene  $z_{obs} = 3.20$ , porque ambos son superiores al punto crítico. Sin embargo, encontrar  $z_{obs} = 3.20$  indica que el valor observado se aleja en gran magnitud del hipotético, mientras que si  $z_{obs} = 1.67$ , se rechaza muy cerca del límite. Entre dos situaciones, que ambas llevan a rechazar  $H_0$ , puede haber diferencias de importancia; por eso es necesaria una medida de la magnitud de la diferencia. Veamos esto gráficamente:



Aunque los dos valores de  $z$  llevan a concluir que se debe rechazar la  $H_0$  (porque ambos están en la zona de rechazo), el valor 3,20 es sustancialmente menos probable que el 1,67, por lo que podríamos decir que en ese caso ( $z_{obs} = 3.20$ ) tenemos *más* evidencia para rechazar  $H_0$ , sin embargo, si solo informamos que “se rechaza  $H_0$  a un nivel del 5%”, quien lee no puede saber si se trató de una diferencia grande o pequeña.

El modo en que se transmite esta información es ofreciendo el **valor de probabilidad** asociado al resultado muestral, que también se llama **valor  $p$** . Se trata de la probabilidad de observar en la experiencia un resultado igual o más extremo que el obtenido a partir de los datos muestrales, bajo el supuesto de que la hipótesis nula es cierta. Es decir, la probabilidad de hallar un resultado como el que se encontró o más extremo que él, solo por azar. Un valor  $p$  pequeño indica que el resultado observado (o resultados más extremos que él) son poco probables bajo el supuesto de hipótesis nula cierta, por lo cual hay evidencia en contra de la hipótesis nula.

El valor  $p$  es una probabilidad condicional a la que escribimos formalmente como:

$$valorp = P(|u| \geq u_{obs}/H_0V)$$

Donde  $u$  es el estimador del parámetro al que se refiere la  $H_0$ . La expresión  $|u| \geq u_{obs}$  es la forma reducida de decir que  $u$  sea más extrema (por encima o por debajo) que el valor observado.

Cuanto más pequeño es el valor  $p$ , tanta más evidencia hay para rechazar  $H_0$ . Por el contrario, un valor  $p$  grande indica que el resultado observado es muy probable bajo el supuesto de hipótesis nula cierta, lo que no aporta evidencia en contra de la hipótesis nula y conduce a no rechazarla.

Esta manera de indicar cuán esperable sería lo que hemos observado si  $H_0$  fuera cierta, puede vincularse con el razonamiento anterior, comparando el valor  $p$  con el nivel de significación fijado de antemano. Así resultan dos posibilidades:

- Si el valor  $p$  es menor que el nivel de significación establecido ( $p < \alpha$ ): se rechaza la hipótesis nula y se describe como “un resultado estadísticamente significativo”. Esto quiere decir que la probabilidad de haber hallado este resultado por azar es pequeña, por lo que se trata de un efecto o diferencia que muy difícilmente se puede atribuir al azar.
- Si el valor  $p$  es mayor que el nivel de significación establecido ( $p > \alpha$ ): no se rechaza la hipótesis nula y se expresa como “un resultado no estadísticamente significativo”. Lo que expresa que la probabilidad de haber hallado este resultado por azar es mayor que el máximo establecido, por lo que es razonable atribuirlo al azar, es decir a la variabilidad propia de los resultados muestrales.

Pero aun cuando esta modalidad de presentar el resultado puede hacerse equivalente al procedimiento anterior, constituye un aporte de información adicional de importancia porque pasa de la conclusión dicotómica (se rechaza o no se rechaza) a la probabilidad de hallar este resultado si la hipótesis nula fuera cierta.

A continuación calculamos estas probabilidades en los ejemplos vistos, empezando por pruebas unilaterales:

En el ejemplo sobre el promedio con que egresan los alumnos:

$$H_0 : \mu = 6.50$$

$$H_1 : \mu > 6.50$$

En la muestra de 100 alumnos habíamos hallado  $\bar{x}_{\text{obs}} = 6.65$  y  $s = 0.60$ , con esos datos debemos calcular la probabilidad de hallar “un valor tan extremo como el observado o más extremo que él, si  $H_0$  es verdadera”. Se trata de una probabilidad condicional, en la que la condición es que  $H_0$  sea verdadera, lo escribimos así:

$$P(\bar{x} \geq 6.65 / \mu = 6.50)$$

Que expresa la probabilidad de coincidir con 6.65 o superarlo (se trata de una prueba unilateral derecha, por eso usamos el signo  $\geq$ ), si la media poblacional fuera la hipotética (6.50). Para encontrar la probabilidad, transformamos  $\bar{x}$  a puntaje  $z$ :

$$z = \frac{6.65 - 6.50}{\frac{0.60}{\sqrt{100}}} = \frac{0.15}{0.06} = 2.50$$

Entonces debemos hallar  $P(z \geq 2.50)$  y ya no hace falta indicar la condición (si  $\mu = 6.50$ ), porque está incluida en el cálculo de  $z$ . Para eso complementamos la probabilidad acumulada hasta 2.50:

## [1] 0.006209665

$$P(z \geq 2.50) = 0.0062$$

Ese es el valor  $p$ , e indica cuál es la probabilidad de encontrar un valor como el observado o uno más extremo que él, si la  $H_0$  fuera verdadera. Vemos que se trata de un valor pequeño, es menor a 0.05 y también menor a 0.01, por lo que podemos decir que la  $H_0$  se rechaza a un nivel del 5% y también del 1%. Pero además de esto, comunicamos el valor  $p$  obtenido, porque eso da al lector una idea más completa de nuestro resultado.

Para el caso de la proporción, consideremos la segunda parte del ejemplo del candidato, cuando usamos una muestra grande:

$$H_0 : P = 0.30$$

$$H_1 : P > 0.30$$

En la muestra de  $n = 200$  casos habíamos hallado  $\hat{p}_{\text{obs}} = 0.32$ .

Por tratarse de una prueba unilateral derecha, necesitamos conocer la probabilidad condicional de hallar un valor como el observado -o más extremo que éste-, si fuera verdadera  $H_0$

$$P(\hat{p} \geq 0.32 / P = 0.30)$$

Para calcular esta probabilidad transformamos el valor de  $\hat{p}$  a puntaje  $z$ :

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}} = \frac{0.32 - 0.30}{\sqrt{\frac{0.30*(1-0.30)}{200}}} = 0.617$$

## [1] 0.2686174

$$P(\hat{p} \geq 0.32 / P = 0.30) = 0.2686$$

Se trata de una probabilidad “grande”, si se compara con los niveles de significación que usamos, es superior a 0.05 y también superior a 0.10, por lo que la decisión será la de no rechazar  $H_0$  y concluir que el candidato no mejoró su proporción de votos.

En el mismo ejemplo, cuando se trabaja con la muestra pequeña, no es válida la aproximación normal, por lo que debe usarse la binomial. El cálculo del valor  $p$  es equivalente, solo que se realiza en términos de la variable *número de éxitos*. En el ejemplo, el número observado de éxitos era de 16, la probabilidad condicional que corresponde al valor  $p$  es entonces la probabilidad de hallar en la muestra de 50 casos, 16 personas o más que vayan a votar al candidato, si en la población la proporción de quienes lo votarán es de 30%. Se complementa la probabilidad acumulada hasta 15 (variable dicreta):

## [1] 0.4308216

$$P(\hat{x} \geq 16/n = 50, P = 0.30) = 0.4308$$

Nuevamente es un valor elevado para  $p$ , por lo que no se rechaza  $H_0$ .

Los software de análisis de datos ofrecen, como resultado de las pruebas de hipótesis este valor, a veces llamado “ $p$ ”, “ $p$ -value”, “valor  $p$ ” o “significación”; y es en él que hay que basar la decisión.

## 12.6 Muestras pequeñas y pruebas $t$

Se ha mencionado que la distribución *t de Student*, es un modelo de probabilidades con una forma similar a la distribución normal, pero más aplanada y dependiente de un dato al que se llama “grados de libertad”. Estos grados de libertad dependen del número de casos que haya en la muestra. También se indicó que a medida que los grados de libertad aumentan, la curva  $t$  tiende a asemejarse más a la normal. De modo que si se trata de muestras grandes, la distribución  $t$  es muy similar a la normal. Esto se denomina convergencia de la distribución  $t$  hacia la normal.

Vamos a usar esa distribución en las pruebas de hipótesis cuando trabajemos con muestras pequeñas, pero con una restricción. En aquellos casos en que sea posible suponer que la variable de origen (en la población) tiene distribución normal, entonces la distribución de las medias muestrales es adecuadamente

modelada por la distribución  $t$ . Dicho de otro modo: si la variable tiene -en la población-, distribución normal, entonces las medias muestrales, cuando se trate de muestras pequeñas, tienen *distribución  $t$* . Nos encontramos así con distintas situaciones, de acuerdo al tamaño de la muestra y a la normalidad o no de la variable en la población.

Muestras grandes: Por el teorema central del límite, estamos autorizados a usar distribución normal para la media muestral, sin importar cuál sea la distribución de la variable en la población.

Muestras pequeñas: Si la variable tiene distribución normal en la población, usamos distribución  $t$  de *Student*, cuyos grados de libertad son  $n - 1$ .

De estas dos condiciones (tamaño de muestra y normalidad de la variable en la población) resultan cuatro combinaciones:

maño de la muestra	Distribución de la variable en la población	
grande ( $n \geq 30$ )	Normal	No normal
pequeña ( $n < 30$ )	distribución normal	por TCL tiende a normal
	distribución $t$ de <i>Student</i>	ninguna <sup>14</sup>

De modo que hay una situación que no podemos abordar con estos procedimientos: la de muestras pequeñas provenientes de poblaciones no normales, para ellas disponemos de procedimientos llamados “no paramétricos” de los que nos ocuparemos más adelante. Las demás combinaciones pueden todas ellas resolverse con la distribución  $t$  que es específica en el caso de muestras pequeñas y es equivalente a la normal cuando la muestra es grande (porque lo son los grados de libertad).

Por esta razón, en la mayoría de los paquetes informáticos de análisis de datos, se habla de *pruebas  $t$*  de manera genérica para las pruebas sobre la media, y el estadístico de prueba constituye un valor  $t$  en lugar de  $z$ . La lógica es exactamente la que hemos seguido en este capítulo, solo que el programa hace las cuentas usando la distribución  $t$  que, cuando se trabaja con una muestra grande, da el mismo resultado que la normal.

Además de operar internamente con la distribución  $t$  de *Student*, los programas de análisis de datos ofrecen los resultados de las pruebas de hipótesis siempre en términos del valor  $p$ . Eso permite que quien lee la salida pueda decidir si rechaza o no rechaza la  $H_0$ , de acuerdo al nivel de significación que haya fijado.

<sup>14</sup>Existe un procedimiento basado en un resultado importante de la estadística que se conoce como “desigualdad de Tchebycheff”, que establece que la probabilidad de encontrar a una variable a una distancia de su media superior a  $k$  desviaciones estándar es menor a  $\frac{1}{k^2}$ . Se expresa como  $P(|x - E(x)| > k\sigma) < \frac{1}{k^2}$ . También es posible recurrir a la distribución empírica, obtenida por remuestreo, InfoStat® lo hace en la opción *estimación por bootstrap* para construir intervalos de confianza. En el capítulo 13 se verán pruebas que permiten resolver situaciones en las que no se cumplen los supuestos, como pequeñas muestras, distribución no normal y/o nivel de medición no métrico.

## 12.7 Hacerlo en R

### 12.7.1 Media

Sea el caso de una prueba de hipótesis acerca del promedio del número de hijos por mujer en una comunidad dada. Se busca evidencia para decidir si, según los datos de una muestra de 150 casos, la población de la que esa muestra proviene tiene en promedio dos hijos por mujer o si ese promedio es mayor a 2. En la muestra de 150 observaciones se obtuvieron las siguientes medidas descriptivas:

```
mean(x)
```

```
## [1] 2.089606
```

```
sd(x)
```

```
## [1] 0.9498422
```

```
length(x)
```

```
## [1] 150
```

Con el valor muestral de 2.09, la pregunta es si se trata de evidencia suficiente como para afirmar que la media poblacional supera al valor de dos hijos por mujer. Las hipótesis entonces son:

$$H_0 : \mu = 2$$

$$H_0 : \mu > 2$$

El comando para solicitar la prueba es `t.test` al que hay que informar, la variable (proveniente de una matriz de datos), el valor de la media bajo la hipótesis nula y la lateralidad de la prueba. Para esto último, las opciones son:

- Bilateral: `alternative = "two.sided"`
- Unilateral derecha: `alternative = "greater"`
- Unilateral izquierda: `alternative = "less"`

Así, la prueba se pide:

```
t.test(x, alternative = "greater", mu = 2)

##
## One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 1.1554, df = 149, p-value = 0.1249
## alternative hypothesis: true mean is greater than 2
## 95 percent confidence interval:
##  1.961243      Inf
## sample estimates:
## mean of x
##  2.089606
```

El resultado muestra el valor  $t = 1.15$ , la cantidad de desviaciones estándar a que se encuentra el resultado muestral de la media hipotética. No es un número grande, según los criterios vistos y eso se confirma con el valor  $p$ , que es 0.12. Esta es una probabilidad mayor a todos los niveles de significación usuales, es decir que lo observado es esperable bajo la hipótesis nula, lo que conduce a no rechazar  $H_0$ . Así, la conclusión es que no hay evidencia para creer que la población de la cual esta muestra proviene, tenga un promedio de más de dos hijos por mujer.

Luego, la salida ofrece un intervalo que tiene un solo límite; el inferior. Es un intervalo unilateral derecho, porque así es como fue formulada la  $H_1$ , que indica que, con una confianza de 95%, el número medio de hijos por mujer supera el valor 1.96.

### 12.7.2 Proporción

Sea que interesa comparar la proporción de población adulta de Argentina que sufre de obesidad con los valores mundiales de obesidad de personas adultas. Se define como obesas a las personas cuyo índice de masa corporal (peso en Kg dividido talla en metros al cuadrado) es mayor o igual a 30. Según la Organización Mundial de la Salud ( <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/obesity-and-overweight>), en 2016, un 13% de la población mundial sufría de obesidad.

Para el problema de interés, la hipótesis se plantea en dirección a que los argentinos probablemente tengan una prevalencia de obesidad superior a la media de todo el mundo. La hipótesis nula afirmará que la proporción de personas con sobrepeso en Argentina no es diferente del promedio mundial. Es decir:

$$H_0 : P = 0.13$$



$$H_1 : P > 0.13$$

La base de la Encuesta Nacional de Factores de Riego 2013 contiene la variable “IMC\_agrupado”, con categorías:

- 1 Peso normal
- 2 Sobrepeso
- 3 Obesidad
- 9 Ns/Nc peso y/o talla

Cuya distribución es:

```
ENFR2013 <- read.csv("bases/archivostxt/ENFR2013_baseusuario.txt", sep = "|")
addmargins(table(ENFR2013$IMC_AGRUPADO))
```

```
##
##      1      2      3      9      Sum
## 12442 11343  6505  2075 32365
```

```
round(addmargins(prop.table(table(ENFR2013$IMC_AGRUPADO))), 3) * 100
```

```
##
##      1      2      3      9      Sum
##  38.4  35.0  20.1   6.4 100.0
```

Esta tabla está construida sobre los datos muestrales, una comparación correcta exige que se usen los factores de ponderación de la encuesta, que están calculados teniendo en cuenta el diseño de la muestra. Para tenerlos en cuenta, hace falta la función “wtd.table” (tabla ponderada), del paquete `questionr`, y cuyos argumentos son: la o las variables que se van a tabular y la variable que define las ponderaciones.

Tomando en cuenta los ponderadores de la ENFR2013, la tabla tiene esta forma:

```
library("questionr")
addmargins(wtd.table(ENFR2013$IMC_AGRUPADO, weights = ENFR2013$PONDERACION))
```

```
##      1      2      3      9      Sum
## 10180480 8953836 5027227 1616044 25777587
```

```
round(addmargins(prop.table(wtd.table(ENFR2013$IMC_AGRUPADO, weights = ENFR2013$PONDERA
```

```
##      1      2      3      9      Sum
## 39.5 34.7 19.5  6.3 100.0
```

Que expande los aproximadamente 35 mil casos relevados a casi 26 millones de la población a la que la ENFR2013 representa. Las frecuencias relativas de las dos tablas son similares. A fines de esta presentación, y para poder hacer la inferencia en base a los casos efectivamente relevados, no tendremos en cuenta las ponderaciones.

Para estimar la proporción, se debe construir la categoría de referencia, que en este caso es la 3 de las tablas anteriores (obesidad). Se genera una nueva variable, que se llamará “obesidad” en la matriz de datos, de tal modo que: cuando “IMC:agrupado” valga 3 tengamos lo que llamamos “éxito”; cuando sea 9, sea un caso perdido (NA): y si vale 1 ó 2, que “obesidad” sea cero. Luego se verifica por medio de una tabla entre las variables original y la nueva y vemos la distribución de la variable “obesidad”, que ya no tiene en cuenta los casos perdidos:

```
ENFR2013$obesidad <- ifelse(ENFR2013$IMC_AGRUPADO == 3, 1, ifelse(ENFR2013$IMC_AGRUPADO
table(ENFR2013$IMC_AGRUPADO, ENFR2013$obesidad)
```

```
##
##      0      1
## 1 12442      0
## 2 11343      0
## 3      0 6505
## 9      0      0
```

```
addmargins(table(ENFR2013$obesidad))
```

```
##
##      0      1      Sum
## 23785 6505 30290
```

```
round(addmargins(prop.table(table(ENFR2013$obesidad))), 3) * 100
```

```
##
##      0      1      Sum
## 78.5 21.5 100.0
```

El resultado muestral es una proporción de 21.5% de prevalencia de obesidad en los 30290 casos válidos de la muestra,  $\hat{p} = 0.215$ . Ahora puede realizarse una prueba  $t$  idéntica a la de la media, porque se cuenta con una variable dicotómica con categorías 0 - 1:

```
t.test(ENFR2013$obesidad, mu = .13, alternative = "greater")

##
## One Sample t-test
##
## data: ENFR2013$obesidad
## t = 35.921, df = 30289, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is greater than 0.13
## 95 percent confidence interval:
##  0.2108761      Inf
## sample estimates:
## mean of x
## 0.2147573
```

El primer resultado es  $t = 35.9$  que indica un alejamiento de la media hipotética (que en este caso mide la proporción de 1s) de casi 36 desviaciones estándar. Es un valor muy grande y se corresponde con el de  $p$  muy pequeño. Esto indica que si  $H_0$  fuera verdadera (si la prevalencia de obesidad en Argentina fuera la misma que el promedio de todo el mundo), entonces habríamos encontrado un resultado tan poco probable como si, jugando a la ruleta, el número que elegimos hubiese salido nueve veces seguidas (dos en diez mil billonésimas). Por lo cual decidimos (con mucha evidencia a favor) que la proporción de personas con obesidad en Argentina supera a la media mundial. Luego tenemos un intervalo que es unilateral, como lo es la prueba que planteamos, que indica que, con una confianza del 95%, el intervalo que comienza en 21.09 contiene a la prevalencia de obesidad en Argentina. El último renglón de la salida es el valor muestral, que conocíamos de la tabla anterior.

## 12.8 Resumen de pruebas sobre una muestra

Parámetro	Estimador	Estadístico de prueba	Puntos críticos en términos del estimador	
$\mu$	$\bar{x}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$\bar{x}_c = \mu \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}}$	$n \geq 30$ ó distribución normal
$P$	$\hat{p}$	$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}}$	$\hat{p}_c = P \pm z * \sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}$	$n * P \geq 10$

Usando el valor  $p$ , la lectura del resultado de la prueba de hipótesis se expresa:

Si la hipótesis nula fuera verdadera, habría una probabilidad  $p$  de hallar un valor como el observado o uno más extremo.

## Capítulo 13

# Prueba de hipótesis: las aplicaciones

Hasta aquí, la prueba de hipótesis es un procedimiento para evaluar si un valor observado en la muestra es compatible con el valor poblacional que plantea la hipótesis nula, para la media o la proporción. Se trabajó sobre una única población y se puso a prueba un valor determinado para un parámetro (media o proporción). Ahora ampliamos el análisis, porque vamos a poner a prueba la eventual diferencia entre dos grupos y la correlación entre dos variables. Probaremos por ejemplo, si puede aceptarse que dos poblaciones tengan la misma media en una variable cuantitativa o también la misma proporción de casos en una categoría de una variable cualitativa. Como antes, la hipótesis nula será la de no diferencia, es decir que formularemos como  $H_0$  que las dos poblaciones tienen la misma media o bien la misma proporción. Para la correlación, la  $H_0$  indica que, a nivel poblacional, el coeficiente vale cero.

En este capítulo se abordan los procedimientos que permiten comparar las medias o proporciones de dos grupos y determinar si las diferencias que se encuentran son significativamente mayores de lo que pudiera esperarse por puro azar. Es decir, recorreremos los pasos necesarios para tomar una decisión en términos estadísticos, a favor o en contra de la hipótesis que sostiene que dos grupos son iguales respecto del parámetro bajo análisis. Un modo alternativo de expresar el problema es considerar que lo que se pone a prueba es si las dos muestras provienen de la misma población o de dos poblaciones diferentes.

En el diseño experimental -tema que se verá en detalle en Metodología de la Investigación-, a menudo interesa conocer, si un grupo sometido a cierto tratamiento muestra cambios diferentes a los que experimenta otro grupo que no fue sometido a ese tratamiento. Los procedimientos que veremos se utilizan para determinar si las ganancias obtenidas en una muestra de sujetos tras un tratamiento -por ejemplo de entrenamiento cognitivo-, son lo suficientemente

amplias como para representar diferencias en la población. En este tipo de casos, se realiza una primera evaluación del grupo (pre-test), se obtiene la media de ciertas variables (aciertos en una prueba de atención, palabras recordadas, aciertos en la correspondencia entre nombres y caras, etc.). Luego se somete a los sujetos a un período de entrenamiento y a continuación son nuevamente evaluados (post-test). Necesitamos determinar si los cambios, medidos a través de la diferencia de los promedios, son de una magnitud tal que podamos atribuirlos al entrenamiento o bien si pueden explicarse por azar.

Los procedimientos destinados a comparar grupos tienen gran difusión en investigación. Muchos de los problemas que interesa resolver usándolos se encuentran vinculados a distintos campos de las Ciencias Sociales, ya que se comparan grupos que han recibido una droga con quienes no la han recibido, que han pasado por un período de entrenamiento o no, que han participado en grupos terapéuticos o han desarrollado otra actividad; alumnos que aprenden con uno u otro método; comunidades, familias o personas que han sido o no beneficiadas por una política pública; países con diferentes regímenes políticos; personas con diferente ideología política, etc. En todos los casos se realiza una comparación en algún resultado, que puede ser el puntaje en un test, la valoración de la democracia, el rendimiento escolar o cualquier otra variable sobre la que se busca intervenir. Por ejemplo, en una tesis de Maestría en Psicología Clínica, el autor separa a un grupo de niños deficientes mentales en dos grupos. Uno de ellos participa de un taller con actividades de protección ambiental (se lo llama “grupo experimental”), mientras que el otro grupo no lo hace (es el denominado “grupo control”). A través de pruebas estandarizadas se mide la sociabilidad, esperando que las actividades en las que participaron pudieran estimularla. Se comparan los niveles de sociabilidad de los niños que participaron del taller con los de quienes no participaron, esta evaluación se hace antes y después de la realización de estas actividades, que se prolongaron por un mes. En este ejemplo hay dos comparaciones: la socialización de los niños que participaron con la de los que no lo hicieron, y la de la sociabilidad de los que participaron antes del taller y luego de él. En ambos casos se utilizan las pruebas sobre las que trata este capítulo.

Siempre la hipótesis nula sostendrá que no hay diferencias entre las puntuaciones obtenidas antes y después del tratamiento, o por un grupo y el otro; o lo que es lo mismo, que las diferencias son cero (nulas). En la hipótesis alternativa se planteará la situación opuesta, sea bilateral (que las medias difieren) o unilateral (que una media es mayor que la otra).

Estos procedimientos no sólo se utilizan en experimentos -que contruyen los grupos con criterios preestablecidos-, sino también en estudios que analizan datos de observación, que pueden provenir de encuestas o de observación directa. Así una variable independiente puede constituirse por grupos o muestras de sujetos que conforman categorías diferentes. Varones versus mujeres, población rural versus población urbana, niños que repiten o no repiten un grado. Pueden interesar entonces, ciertas diferencias en los promedios de alguna variable entre

estos grupos. ¿Tienen los mismos ingresos promedio los varones jefes de hogar que las mujeres que son jefas de hogar? ¿La proporción de analfabetos es la misma entre provincias del NOA o del Centro del país? La edad promedio de las madres primerizas que se atienden en hospitales públicos, ¿es la misma que la de quienes van a privados? Podemos comparar varones y mujeres y evaluar si hay diferencia entre el promedio de un grupo y otro en relación a la introversión, el neuroticismo o su afabilidad. También podríamos comparar personas mayores y jóvenes en relación a los promedios que obtuvieran en pruebas de inteligencia fluida o cristalizada.

En estos ejemplos, jefes y jefas de hogar, NOA y Centro del país, jóvenes y adultos mayores, mujeres y varones, etc. son grupos independientes, que se diferencian por los valores de una variable (región, edad, género) y nos interesa investigar si estos agrupamientos evidencian diferencias en otras variables de interés: como los ingresos, la proporción de analfabetos, la inteligencia, la introversión.

Cuando apreciamos que las medias de dos grupos son diferentes, no podemos saber a priori si las muestras provienen de poblaciones cuyas medias son diferentes o no, porque las diferencias observadas entre los resultados muestrales pueden provenir de azar. Por eso, encontrar que  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  (en las muestras) no conduce inmediatamente a que  $\mu_1 \neq \mu_2$  (en las poblaciones).

El procedimiento para comparar los parámetros (medias o proporciones) de dos poblaciones consiste en extraer una muestra de cada población: llamaremos a los tamaños de esas muestras  $n_1$  y  $n_2$ . En cada muestra se calculan -como antes-, los estimadores correspondientes. Si se estima una diferencia de medias calcularemos las medias ( $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ ), así como las desviaciones estándar ( $s_1$  y  $s_2$ ) de cada una.

Si lo que se estima es una diferencia de proporciones, en cada muestra se calculará la proporción de casos en la categoría de interés:  $\hat{p}_1$  y  $\hat{p}_2$  que son los estimadores de los parámetros  $P_1$  y  $P_2$ .

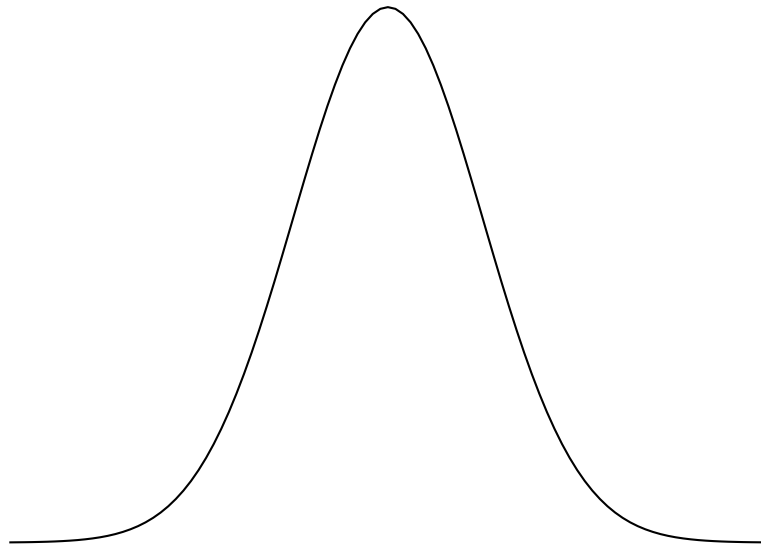
Aquellas situaciones en que no se puedan calcular medias y varianzas porque las variables son ordinales o bien no se sostengan los supuestos sobre normalidad de las distribuciones poblacionales, se aplican otro tipo de prueba de hipótesis, que serán tratados en el próximo capítulo.

Veamos en primer lugar el caso en que la variable bajo análisis es cuantitativa y entonces nos interesa comparar las medias poblacionales. El parámetro que se estima es la diferencia entre las medias poblacionales:  $\mu_1 - \mu_2$ , y la estimación se hace a través de la diferencia entre las medias muestrales:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ . El error estándar de ese estimador (que será necesario para estandarizar el valor observado) va a depender del tipo de prueba de que se trate. En este capítulo trataremos dos situaciones, cuando sean muestras independientes, y muestras apareadas o dependientes.

## 13.1 Muestras independientes

### 13.1.1 Prueba de diferencia de medias

La comparación de las medias de dos poblaciones independientes se realiza comparando los correspondientes estimadores de las medias poblacionales, veamos el siguiente esquema para recordar la notación:



Una vez que se dispone de los datos muestrales, el estadístico de prueba toma la forma;

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Es decir, se trata de la diferencia entre la diferencia de las medias muestrales y la diferencia de las medias poblacionales, dividida por el error estándar de la diferencia (el error estándar del estimador). La expresión mantiene la estructura que mencionamos en el capítulo anterior: estimador menos parámetro sobre el error estándar del estimador. En este caso el estimador es la diferencia de las medias muestrales y el parámetro es la diferencia de las medias poblacionales.

Este estadístico de prueba tiene distribución normal si los tamaños de las muestras son suficientemente grandes (mayores a 30 casos) y tiene distribución *t de Student* si se trata de muestras pequeñas y puede además suponerse que las variables que se analizan tienen distribución normal en la población. Debido



a que la distribución  $t$  tiende a la normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra, y como lo hicimos antes para una sola muestra, escribiremos de manera general:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Como sabemos, cuando las muestras sean grandes, las probabilidades asociadas al valor de  $t$  coincidirán con las de la distribución normal.

El denominador del estadístico de prueba puede ser calculado de dos manera diferentes y eso va a depender de que podamos suponer que las varianzas de las dos poblaciones de las que provienen las muestras son iguales o que no sea así.

#### 13.1.1.1 Caso 1: Varianzas poblacionales iguales

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Si puede suponerse que las varianzas poblacionales son iguales, entonces las dos varianzas que se calculan desde las muestras, constituyen dos estimadores (diferentes por azar) del mismo parámetro. Cada muestra ofrece una estimación de la varianza, que es la misma en las dos poblaciones de origen. En ese caso, calcularemos primero un promedio<sup>1</sup> de las dos estimaciones dadas por las varianzas muestrales, a la que llamaremos varianza combinada:

$$s_{\text{comb}}^2 = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Usando este estimador de la (supuestamente única) varianza poblacional, el estadístico de prueba asume la forma:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\text{comb}} * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Cuyos grados de libertad se calculan, en función de los tamaños de las muestras como:  $gl = n_1 + n_2 - 2$ .

---

<sup>1</sup>La fórmula de este promedio tiene en cuenta que las varianzas provienen de muestras de diferente tamaño y que los denominadores de las varianzas son  $n-1$ . Por eso no es simplemente la suma de ambas dividida dos. Solo en el caso que las muestras son de igual tamaño ( $n_1 = n_2$ ), se trata del promedio simple y  $s_{\text{comb}}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$

**13.1.1.2 Caso 2: Varianzas poblacionales diferentes**

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Si no es posible suponer que las varianzas de las poblaciones de donde provienen las muestras son iguales, entonces debemos usar las varianzas muestrales de manera separada. Cuando éste es el caso, el estadístico de prueba es:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Esta expresión es más sencilla, porque mantiene las varianzas originales en lugar de combinarlas, pero el cálculo de los grados de libertad de la distribución *t de Student* se vuelve más complejo. La fórmula para hacerlo es<sup>2</sup>

$$gl = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{\frac{n_1-1}{2}} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{n_2-1}{2}}}$$

No vamos a usar esta expresión para calcular los grados de libertad, pero es la que usan los programas de análisis de datos cuando detectan que las varianzas poblacionales no son iguales.

De acuerdo a esto, cuando vamos a hacer una prueba *t* para comparar las medias de dos grupos debemos antes saber si estamos ante el caso 1 ó el caso 2; lo que significa que deberemos antes decidir si las varianzas de las dos poblaciones pueden considerarse iguales o no. Dado que no conocemos estas varianzas poblacionales, la decisión se toma a partir de los datos muestrales, es decir, a partir de las varianzas halladas en las muestras ( $s_1^2$  y  $s_2^2$ ). Se realiza una prueba, cuya hipótesis nula afirma que las varianzas poblacionales son iguales y su resultado permitirá decidir, a un determinado nivel de significación, si puede tratarse a las varianzas poblacionales como iguales o si debe considerárselas diferentes, la prueba se llama prueba de homogeneidad de varianzas<sup>3</sup> y tiene las siguientes hipótesis.

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

---

<sup>2</sup>Esta expresión se conoce como la ecuación de Welch-Satterthwaite y fue desarrollada en el campo de la teoría de errores, los programas de análisis de datos la aplican de manera automática cuando las varianzas son diferentes a cierto nivel de significación.

<sup>3</sup>Se llama homogeneidad aquello que coloquialmente podría expresarse como “suficientemente parecidas como para tratarlas como iguales”.

El estadístico de prueba es el cociente de las varianzas muestrales:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Y tiene una distribución F con  $n_1 - 1$  grados de libertad en el numerador y  $n_2 - 1$  grados de libertad en el denominador.

Ejemplo 1. (datos ficticios): nos preguntamos si, para una carrera universitaria dada, el tiempo que tardan en completar sus estudios los estudiantes que trabajan y los que no trabajan es el mismo o si difiere. Para ello tomamos una muestra de 100 alumnos que trabajan y obtenemos una media de duración de la carrera de 6.7 años y una desviación estándar de 1.2 años. Extraemos otra muestra, de 150 casos de estudiantes que no trabajan, en la que obtenemos un promedio de los años de duración de 6.3 con una desviación estándar de 1.5 años. Todos estos datos provienen de la información descriptiva que proveen las muestras, son los que vamos a usar para hacer la inferencia acerca de las poblaciones, constituidas por el total de alumnos que trabajan y que no trabajan.

Como antes, la hipótesis nula es la del “no cambio”, la que afirma que no hay diferencia, por lo que:

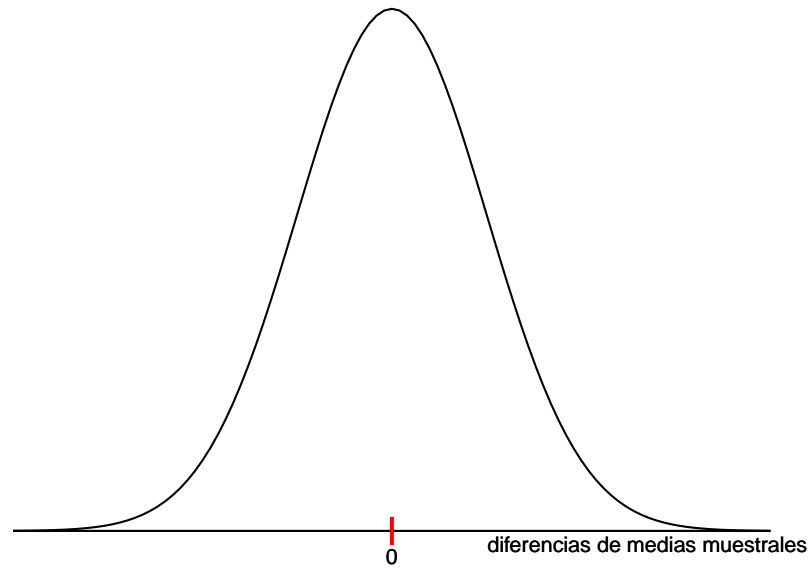
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Que dice que la diferencia entre las medias poblacionales es cero (es nula). Hemos dicho que nuestro interés está en saber si las medias poblacionales son iguales o si difieren, por lo que se trata de una prueba bilateral, entonces la hipótesis alternativa indicará que:

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

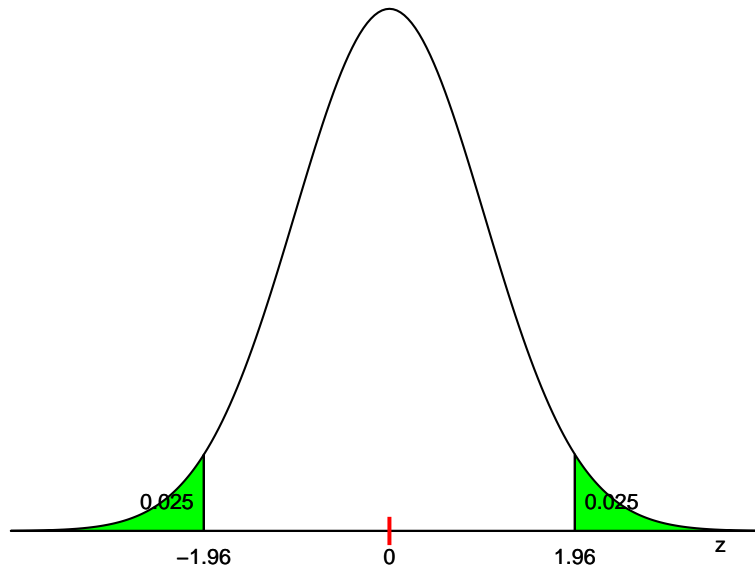
Para la presentación continuaremos usando la distribución normal, ya que resulta más familiar, pero los paquetes de análisis de datos usan directamente distribuciones  $t$ , que en este ejemplo, con 100 y 150 casos, coincide, a los fines prácticos, con la normal.

Bajo la hipótesis nula, la distribución del estimador será:



Para decirlo nuevamente, la variable aleatoria es la diferencia de medias muestrales, el centro de la distribución es el parámetro, que según la hipótesis nula es cero.

Fijamos el nivel de significación de la prueba en el 5% y los puntos críticos resultan, sobre la distribución normal estándar  $\pm 1,96$ , gráficamente:



Ahora transformamos a puntaje  $z$  los valores observados en las muestras. Recordemos para ello que el puntaje  $z$  se define como la diferencia entre el estimador (observado) y el parámetro (hipotético), dividida por el error estándar del estimador. Para esta prueba, el parámetro es la diferencia de medias poblacionales, su estimador es la diferencia de medias muestrales, con lo que:

$$z_{\text{obs}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

Y queda por decidir cómo calcular el denominador, lo que va a depender de que puedan o no suponerse iguales las varianzas poblacionales. Para decidirlo, se realiza la prueba de homogeneidad de varianzas:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

El estadístico de prueba es

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1,2^2}{1,5^2} = 0,64$$

Se busca la probabilidad asociada a un valor como el observado o mayor, bajo un modelo F con grados de libertad determinados por el tamaño de las muestras (de 100 y 150 observaciones)  $P(F_{n_1-1, n_2-1}) = P(F_{99, 149}) > 0.64$

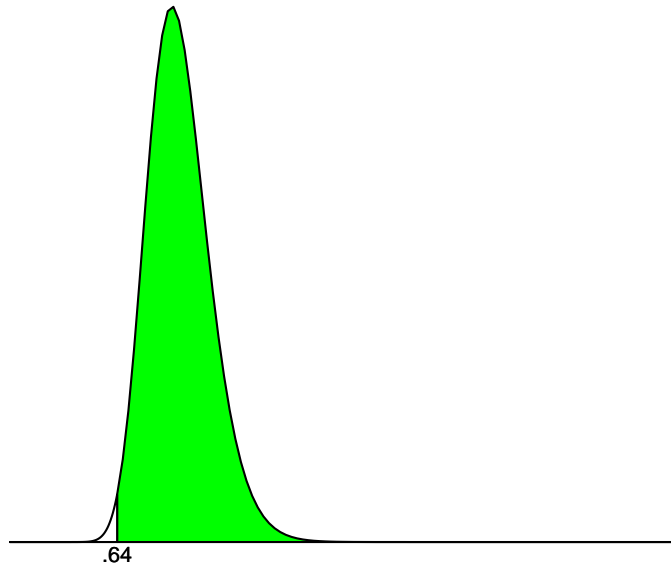
Que equivale a:

$$1 - (P(F_{99, 149}) < 0.64)$$

Y resulta:

## [1] 0.9911

Gráficamente, la distribución  $F$  tiene poca asimetría, porque los grados de libertad son elevados, y el área que queda a la derecha del valor  $F_{obs}$  es casi 1:



Esa área es el valor  $p$ , por lo que debe interpretarse como la probabilidad de hallar un cociente entre las varianzas muestrales como el observado o más extremo, si las varianzas poblacionales fueran iguales. Dado que es un número muy alto, no se rechaza la hipótesis nula, y se concluye que las varianzas pueden suponerse iguales. Se trata entonces de lo que se ha llamado “caso 1” y, para el denominador del estadístico de prueba, se calcula la varianza combinada<sup>4</sup>:

$$s_{\text{comb}}^2 = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

<sup>4</sup>Cuando se solicita a InfoStat®, automáticamente (a menos que pidamos lo contrario) se verifica si puede suponerse que las varianzas poblacionales son iguales o no y, en base al resultado de esa verificación, se calcula el error estándar de la diferencia con una fórmula o con otra.

Con los datos del ejemplo, la varianza combinada es:

$$s_{\text{comb}}^2 = \frac{(100 - 1) * 1.2^2 + (150 - 1) * 1.5^2}{100 + 150 - 2} = \frac{477.81}{249} = 1.92$$

por lo que la desviación estándar combinada resulta:

$$s_{\text{comb}} = \sqrt{1.92} = 1.38$$

Como la hipótesis nula establece que la diferencia de medias poblacionales es cero  $\mu_1 - \mu_2 = 0$ , entonces, el estadístico de prueba queda:

$$z = \frac{(6.7 - 6.3) - 0}{1.38 * \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{150}}} = \frac{0.4}{0.18} = 2.22$$

Este es el estadístico de prueba correspondiente a la diferencia de medias para muestras independientes cuando las varianzas poblacionales pueden suponerse iguales. Este valor de  $z$  (2,22) se encuentra en la zona de rechazo de  $H_0$ , por lo que la decisión será la de rechazar  $H_0$  y concluir que el tiempo que tardan en terminar la carrera los alumnos que trabajan difiere significativamente del que tardan los que no trabajan. Dicho de otro modo: la diferencia observada en las medias de las muestras es significativa a un nivel del 5%.

Ejemplo 2. Si los mismos resultados se hubiesen hallado en muestras más pequeñas, por ejemplo de 20 y 25 casos de estudiantes que trabajan y no trabajan respectivamente, y además hubiésemos podido suponer que las dos poblaciones son normales en la variable *duración de la carrera*; entonces habría correspondido usar una prueba  $t$ <sup>5</sup>. La prueba de homogeneidad de varianzas da, con esos nuevos tamaños de muestra,  $p = 0,16$ . Un valor que también es elevado, por lo que se puede tratar a las varianzas como iguales.

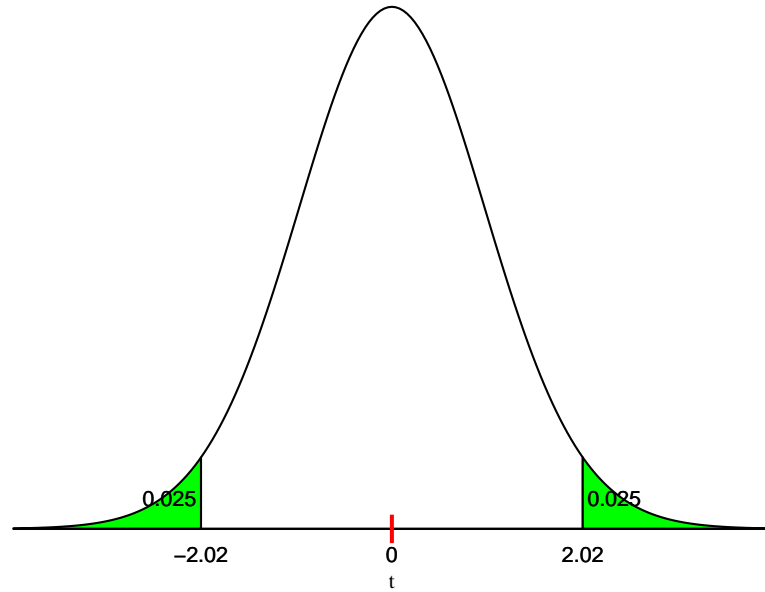
Los grados de libertad de la distribución  $t$  se calculan sumando los tamaños de muestra y restando dos:

$$gl = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 25 - 2 = 43$$

Con 43 grados de libertad, los valores  $t_c$  que delimitan un 5% extremo en la distribución de probabilidades son  $\pm 2,02$ , que gráficamente se representan así:

---

<sup>5</sup>Recordemos que la distribución normal vale para muestras grandes, por el Teorema Central del Límite.



Para tomar la decisión calculamos el estadístico de prueba con el mismo procedimiento anterior, para lo que es necesario contar primero con la desviación estándar combinada. Calculamos primero la varianza combinada:

$$s_{\text{comb}}^2 = \frac{(20 - 1) * 1.2^2 + (25 - 1) * 1.5^2}{20 + 25 - 2} = \frac{81.36}{43} = 1.89$$

Y la desviación estándar combinada es:

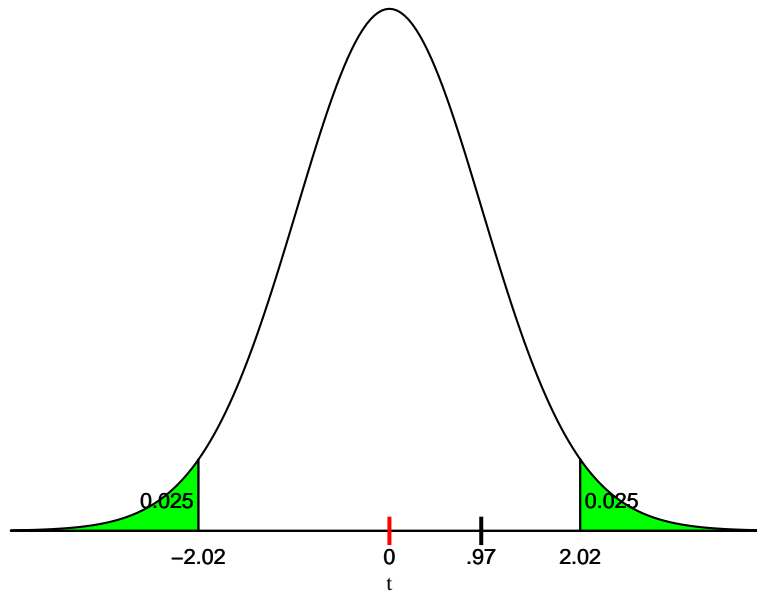
$$s_{\text{comb}} = \sqrt{1.89} = 1.37$$

por lo que el estadístico de prueba resulta:

$$t = \frac{(6.7 - 6.3) - 0}{1.37 * \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}}} = \frac{0.4}{0.41} = 0.97$$

Este valor no se ubica en la zona de rechazo de  $H_0$ , como se ve en el gráfico:





La conclusión será en este caso que no hay evidencia para creer que el tiempo promedio que tardan en terminar la carrera los alumnos que trabajan sea diferente que el que tardan quienes no trabajan.

La comparación de las conclusiones de estos dos ejemplos muestra algo muy importante: una misma diferencia absoluta de 0.4 años en los promedios muestrales de los grupos, es significativa cuando proviene de muestras grandes (100 y 150 casos) y deja de serlo cuando se obtiene en muestras pequeñas (20 y 25 casos). El tamaño de las muestras incide en la potencia de la prueba, que es su capacidad para detectar diferencias.

Por las razones que ya hemos mencionado, en el cálculo informatizado del estadístico de prueba no se distingue entre utilizar distribución normal ( $z$ ) para muestras grandes y  $t$  para muestras chicas, como acabamos de hacer en los ejemplos anteriores. Por el contrario, se usa siempre distribución  $t$ <sup>6</sup>. Así, esta prueba se conoce como *prueba  $t$  de diferencia de medias*.

Ejemplo 3 (datos reales): la salida que mostramos a continuación es una comparación de la edad promedio de los docentes varones y mujeres del nivel medio. Los datos provienen de una muestra aleatoria de 246 docentes de la ciudad de Córdoba. La hipótesis nula de esa comparación es que no hay diferencia en la edad promedio de mujeres y varones docentes del nivel medio, que se confronta con una hipótesis alternativa que afirma que sí hay diferencia. Se trata de una prueba bilateral que se expresa así:

<sup>6</sup>Recordemos que esta distribución tiende a la normal cuando las muestras son grandes.

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los grupos formados por docentes mujeres y varones respectivamente. Al final del capítulo se verá como pedir a R la realización de esta prueba, la salida es:

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  edad by sexo
## t = -1.9924, df = 116.54, p-value = 0.04867
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -2.279948 -0.006789
## sample estimates:
## mean in group mujeres mean in group varones
##                40.07696                41.22033
```

El título es el de prueba t de dos muestras de Welch, que se refiere a la corrección de Welch-Satterthwaite. Se indican los datos, que es edad según sexo (la comparación de las edades según sexo).

Luego se ofrece el valor  $t_{obs}$ , de -1.99, los grados de libertad y el valor  $p$ , de .048. Se indica cuál fue la hipótesis alternativa (que las medias difieren, es decir bilateral).

Luego se lee un intervalo de confianza para estimar la diferencia de las media, construido, por defecto al 95% y, finalmente las medias muestrales.

La lectura de esta salida es que, a un nivel de significación del 5%, hay evidencia para rechazar la hipótesis de igualdad de las medias poblacionales, dado que el valor  $p$  hallado es menor a ese criterio. Pero si se reduce el riesgo de cometer error de tipo I y se baja el nivel de significación al 1%, entonces el resultado ya no es significativo a este nivel. La lectura del resultado debe incluir esta interpretación, para que quede constancia que la  $H_0$  ha sido rechazada con poca evidencia en su contra.

Un dato adicional que obtenemos en la salida es el intervalo de confianza que estima la diferencia poblacional. Leemos que, con una confianza del 95%, el intervalo que va de 2.280 a 0.007, contiene a la diferencia de edades que hay en la población. Para la lectura del intervalo no se tiene en cuenta el signo negativo, que proviene de haber restado  $edad.mujeres - edad.varones$  y que habría sido positivo de haber elegido restar en otro orden. Sí importa, por el contrario, que los signos de los límites sean iguales (ambos positivos o ambos negativos) porque eso quiere decir que, al nivel de confianza establecido, se excluye al cero

del intervalo. Por eso este resultado es siempre compatible con la decisión de aceptar o rechazar  $H_0$ , al mismo nivel de significación.

Cuando una prueba de hipótesis sobre diferencia de medias se rechaza a un nivel de significación  $\alpha$ , entonces, un intervalo construido con una confianza del  $1 - \alpha$ , excluye al cero entre sus límites. Dicho de otra manera, el límite inferior y el límite superior tienen el mismo signo.

Cuando una prueba de hipótesis sobre diferencia de medias no se rechaza a un nivel de significación  $\alpha$ , entonces, un intervalo construido con una confianza del  $1 - \alpha$ , incluye al cero entre sus límites. Dicho de otra manera, el límite inferior es negativo y el límite superior es positivo.

La lateralidad de la prueba que analizamos en el capítulo anterior, sigue del mismo modo cuando trabajamos con diferencias de medias.

Ejemplo 4. Se espera que una droga que se está experimentando produzca efectos sobre la depresión, en dirección a reducir el puntaje que alcanzan los sujetos en un test que la evalúa. Para poner a prueba la droga será necesario diseñar un experimento, no avanzaremos en ese tema pero de manera muy simple, podemos pensar en dos grupos de pacientes depresivos a uno de los cuales se administra la droga (grupo 1) y al otro no (grupo 2)<sup>7</sup>. Concluiremos que la droga tiene efectos si luego de un tiempo de su administración, el grupo de pacientes que la recibieron experimenta cambios positivos en mayor magnitud que el otro. Dicho de otro modo, habrá efectos si la media de puntaje en el test que evalúa depresión es significativamente menor en el grupo que se sometió al tratamiento. Como siempre, la hipótesis nula afirmará que no hay diferencia:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

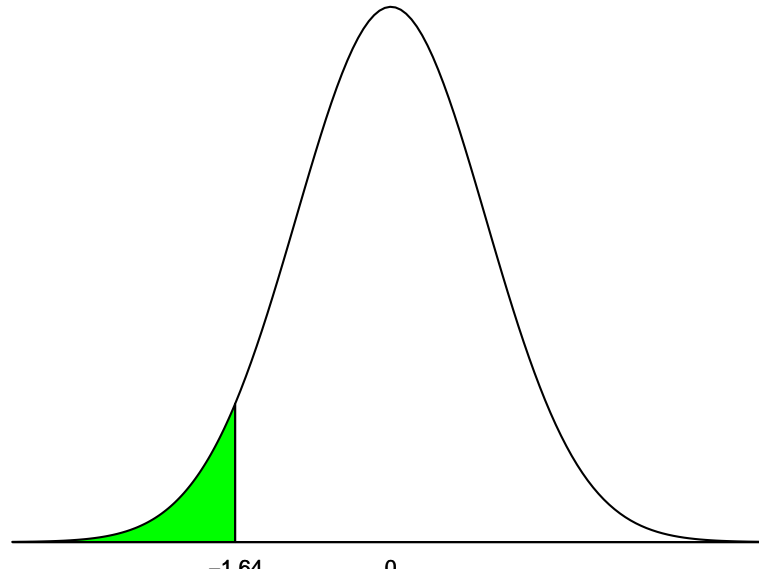
Como ahora interesa que el grupo 1 haya *reducido* su puntaje en el test de depresión, esperamos que la media del grupo 1 sea menor que la del grupo 2, lo cual se escribe:

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

Por la lateralidad de la prueba, solo hay una zona extrema de rechazo, la izquierda. Fijando un 5% de nivel de significación, si se tratara de muestras grandes, en las que podemos usar distribución normal, esta zona se representa del modo habitual:

---

<sup>7</sup>Se trata de una versión muy simplificada, solo para ver el uso de esta prueba. El tema se desarrolla con detalles en la materia Metodología de la Investigación Psicológica.



Por el contrario, si se trata de muestras pequeñas, corresponde usar distribución  $t$ , y el punto crítico dependerá de los grados de libertad.

Un grupo de 15 sujetos que recibió un medicamento arroja un puntaje promedio en la prueba que evalúa la depresión de 5.7 puntos, con desviación estándar de 1.1 puntos. Los 10 pacientes que no recibieron el medicamento alcanzan un puntaje promedio de 7.2 puntos, con desviación estándar de 1.6 puntos (datos ficticios). La prueba previa sobre la homogeneidad de las varianzas indica que no puede suponerse las iguales, por lo que estamos en el caso 2. Debe utilizarse la distribución  $t$  con grados de libertad que deben calcularse con la expresión de Welch-Satterthwaite, el resultado<sup>8</sup> es 15. El punto crítico  $t_{15,.05}$ , es -1.75.

El estadístico de prueba vale:

$$t = \frac{(5.7 - 7.2) - 0}{\sqrt{\frac{1.1^2}{15} + \frac{1.6^2}{10}}} = \frac{-1.5}{0.48} = -3.10$$

Es un valor que se sitúa a la izquierda del punto crítico, por lo que se rechaza la  $H_0$  y se concluye que el grupo que recibió la droga alcanzó un puntaje significativamente menor que el otro grupo.

Ejemplo (datos reales): en un estudio realizado en el Centro de Promoción del Adulto Mayor, se seleccionaron aleatoriamente entre todos los asistentes, a 503 personas mayores de 50 años. Entre otras preguntas, se computó el número de hijos de cada uno de ellos.

---

<sup>8</sup>Redondeado al entero.

Se conformaron dos grupos con los sujetos estudiados, quienes tenían hasta 65 años en el momento del estudio y quienes tenían 66 o más años. En este ejemplo, estos dos grupos, si bien no fueron asignados de manera aleatoria, se comportarían como muestras independientes.

Podríamos suponer que las personas de mayor edad tendrían más hijos, dadas ciertas razones históricas, religiosas y culturales que habitualmente inciden en el control de la natalidad. Esta hipótesis está basada también en el conocimiento demográfico; sabemos que las tasas de fecundidad en nuestro país han venido descendiendo desde hace varias décadas. Sostenemos así que los que conforman el grupo de 66 años y más tendrán más hijos que los de 65 años o menos, con lo que se trata de una prueba unilateral. Si llamamos 1 al grupo de los de hasta 65 años y 2 al de quienes tienen 66 ó más, las hipótesis se expresan de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

Los resultados descriptivos de los dos grupos son:

grupo_edad	hijos.length	hijos.mean	hijos.median	hijos.sd
1	243	2.489712	2	1.441310
2	260	2.607692	3	1.383835

El nombre de la variable **grupo\_edad**, corresponde a los grupos 1, hasta 65 años y 2, de 66 ó más. Los grupos tienen 243 y 260 personas respectivamente. La descripción muestra la media, mediana y desviación estándar.

Vemos que hay diferencia en el número de hijos promedio de los dos grupos. Los del segundo grupo (66 o más) tienen en promedio 0.12 hijos más que los del otro grupo. Ahora bien, dadas estas diferencias entre las medias encontradas, nos interesa determinar si se deben al azar o bien si tienen una magnitud tal que representen una diferencia que pueda atribuirse a la diferencia de edad de los sujetos de los dos grupos.

Para realizar una prueba de diferencia de medias entre muestras independientes, se puede usar la distribución normal como buena aproximación, debido a que las muestras son grandes. La prueba es unilateral izquierda, porque interesa saber si el grupo 1 tiene menos hijos que el grupo 2. El punto crítico de esa prueba es  $z_{.05} = -1.64$ . La región de rechazo está conformada por todos los valores de  $z$  que sean inferiores a -1,64. Para hacer la prueba manualmente, ahora se calcula el  $z_{obs}$  y según sea menor o mayor que ese punto crítico, se rechaza o no se rechaza  $H_0$ .

La salida R para esta prueba es:

```
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: hijos by grupo_edad
## t = -0.93523, df = 495.19, p-value = 0.1751
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf 0.08990955
## sample estimates:
## mean in group 1 mean in group 2
##      2.489712      2.607692
```

Por cuestiones de economía de recursos, los software usan siempre distribución  $t$ . La salida muestra: la variable que se analiza (hijos), según la que clasifica los grupos (`grupo_edad`), el valor del estadístico de prueba ( $t=-0.94$ ), los grados de libertad (495), el valor de probabilidad asociado a la prueba (0.17), el tipo de prueba, que es unilateral izquierda en este caso, un intervalo de confianza unilateral, como fue pedida la prueba y finalmente, las medias (2.49 y 2.61) de cantidades de hijos de cada grupo

El  $t_{obs}$  de la prueba es -0.94, que se ubica en la zona de no rechazo. Con ese resultado ya estamos en condiciones de concluir sobre la prueba: no se rechaza  $H_0$ , las medias no difieren de manera significativa, no hay diferencia en el número de hijos entre los grupos conformados.

Si no hubiésemos calculado previamente el punto crítico, podemos llegar a esta conclusión a partir del valor  $p$ , que en este caso es 0.1751 y representa la probabilidad de haber hallado esa diferencia o una mayor, por puro azar. Este es el valor que, como sabemos, se juzga en comparación con el nivel de significación, por ser mayor a 0.05 que habíamos establecido, decidimos no rechazar la  $H_0$ . Cuanto más pequeña sea esta probabilidad, tanta más evidencia habrá para rechazar  $H_0$ , en este caso la consideramos grande y no rechazamos. La lectura del valor  $p$  es, en este caso “si el número promedio de hijos de los dos grupos fuera el mismo, la probabilidad de haber encontrado entre dos muestras de tamaños 243 y 260, una diferencia de 0.12 ó superior, es de 0.1751”. Brevemente:

$$P((\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < -0.12)/(\mu_1 - \mu_2 = 0)) = 0.1751$$

### 13.1.1.3 Prueba de diferencia de proporciones

Compararemos ahora dos muestras en cuanto a la proporción de casos que hay en una categoría de una variable que puede ser nominal o también de un nivel superior<sup>9</sup>. Aunque en los programas de análisis de datos este procedimiento se

<sup>9</sup>Aunque la prueba se usa principalmente para comparar variables nominales, no hay inconveniente en usarla con variables métricas, definiendo con precisión qué se compara. Por

realiza también solicitando *prueba t*, esto sólo está autorizado si se trabaja con muestras grandes.

De manera muy similar a la prueba de diferencia de medias, la  $H_0$  afirma que no hay diferencia entre las proporciones de las dos poblaciones, por lo que tiene la forma:

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

Mientras que la  $H_1$  puede indicar que las proporciones solo difieren:

$$H_1 : P_1 - P_2 \neq 0$$

Cuando la prueba es bilateral o bien, si es unilateral derecha:

$$H_1 : P_1 - P_2 > 0$$

O izquierda:

$$H_1 : P_1 - P_2 < 0$$

Dado que solo trabajaremos con muestras grandes al analizar la diferencia de proporciones, solo usaremos la distribución normal. El estadístico de prueba tiene forma similar al que usamos en la prueba de la proporción para una sola muestra, solo que ahora hay que hacer participar los datos que provienen de dos muestras. Así resulta:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 * (1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 * (1 - \hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Donde  $\hat{p}_1$  y  $\hat{p}_2$  son los estimadores de  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. A diferencia de la prueba sobre una sola proporción, ahora no se cuenta con valores poblacionales de  $P_1$  ni de  $P_2$ , ya que la  $H_0$  solo enuncia que son iguales. Por eso ahora, el error estándar del estimador (el denominador del estadístico de prueba) se calcula en base a las proporciones muestrales.

Ejemplo (datos ficticios): se dispone de datos de la proporción de aplazos sobre el total de materias rendidas que tienen varones y mujeres estudiantes de una carrera universitaria. En una muestra de 200 mujeres hay un 15% de aplazos,

---

ejemplo, si la variable es la edad, podemos comparar la proporción de personas mayores de 65 años en dos muestras. Todos los mayores de 65 constituyen una categoría y el resto la otra. En ese caso decimos que hemos “dicotomizado” una variable métrica, la hemos transformado en una variable con dos categorías: *mayores de 65* y *65 o menos*. De mismo modo que se definen como promocionados, los alumnos con notas 7 o mayores.

mientras que entre los 150 varones que componen la otra parte de la muestra, el porcentaje es del 17%. Nos preguntamos si se trata de una diferencia significativa o si puede explicarse por la variabilidad propia de los datos. Así, las hipótesis de la prueba serán:

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

$$H_1 : P_1 - P_2 \neq 0$$

Es decir que la hipótesis nula afirma que la diferencia en la proporción de aplazos entre varones y mujeres es cero en la población, y la hipótesis alternativa, dice que esa diferencia es diferente de cero.

Fijamos el nivel de significación en el 5% y, por tratarse de una prueba bilateral, los puntos críticos son  $\pm 1.96$ .

A continuación calculamos el estadístico de prueba, que resulta:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1*(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2*(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.15 - 0.17) - 0}{\sqrt{\frac{0.15*(1-0.15)}{200} + \frac{0.17*(1-0.17)}{150}}} = -0.50$$

Es un valor que no se ubica en la zona de rechazo, por lo que la decisión es la de aceptar  $H_0$  y concluir que no hay evidencia para creer que la proporción de aplazos entre mujeres y varones sea diferente.

### 13.1.2 Muestras apareadas

Esta prueba es útil cuando se buscan diferencias que puedan haber aparecido en sujetos individuales. La prueba se llama así porque las diferencias se consideran en pares o en parejas. En lugar de comparar muestras provenientes de dos poblaciones independientes, compararemos unidades de análisis consigo mismas, en dos momentos distintos. Ejemplo típico de este uso lo constituyen las pruebas en las que se compara una situación “antes y después”. Así, cuando cierta característica de los sujetos experimentales se evalúa antes de un tratamiento y se vuelve a medir luego del tratamiento, interesa conocer en qué medida se han producido cambios *individuales*. Observamos a cada individuo en dos momentos y comparamos las dos observaciones (mediciones). En el contexto del diseño experimental, la medición en el momento inicial se llama *pretest* y la posterior *posttest*.

Pero no es el único ámbito en que se usa, cuando se comparan los logros que los alumnos alcanzan luego de una determinada experiencia pedagógica, es valioso poder comparar el “estado inicial” (anterior a la intervención) con el “estado final” (posterior) de cada individuo, o cuánto aprendieron o si se modificó



determinada conducta. Esta prueba pone el acento en los cambios sucedidos en cada sujeto y no en las diferencias entre sujetos. Cuando interesa conocer la diferencia de presión arterial a la mañana y al atardecer, corresponde medir la presión arterial de cada persona en los dos horarios y comparar uno a uno. Por cierto, luego los resultados se agregan, pero las diferencias se miden sujeto a sujeto.

No hay cambio conceptual en el planteo de las hipótesis: la  $H_0$  afirma que no hay diferencia entre las dos mediciones (o entre las mediciones hechas en momentos distintos) y la  $H_1$  podrá ser unilateral o bilateral. Sin embargo cambiamos levemente la notación, porque vamos a resumir la diferencia en la letra  $\bar{D}$  (por media de diferencias) y equivale a  $\mu_1 - \mu_2$ . El objetivo de este cambio es poner el acento en que no tratamos con dos poblaciones independientes (una representada por  $\mu_1$  y la otra por  $\mu_2$ ) sino con las diferencias entre dos mediciones.  $\bar{D}$  es un parámetro y es sobre  $\bar{D}$  que formulamos ahora las hipótesis:

$$H_0 : \bar{D} = 0$$

La hipótesis alternativa puede ser bilateral

$$H_1 : \bar{D} \neq 0$$

Unilateral derecha

$$H_1 : \bar{D} > 0$$

O bien unilateral izquierda

$$H_1 : \bar{D} < 0$$

El estimador de  $\bar{D}$  se llamará  $\bar{d}$  y es la media de las diferencias individuales, que tiene distribución *t de Student* con  $n-1$  grados de libertad. Como se trata de una sola variable, el estadístico de prueba es semejante al que usábamos para una sola muestra, porque resume las diferencias para cada caso:

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

La última igualdad se debe a que, bajo la  $H_0$ ,  $\bar{D} = 0$ .

$s_d$  es la desviación estándar de la variable  $d$ , que mide las diferencias individuales.

Ejemplo (parcial<sup>10</sup>): se busca detectar el eventual efecto que tendría una intervención terapéutica sobre el bienestar de pacientes diagnosticados de depresión. Disponemos de un test que nos permite evaluar el bienestar de los pacientes con nivel cuantitativo, en una escala que va de 0 (mínimo bienestar) a 10 (máximo bienestar). Para evaluar la terapia, nos interesamos por los cambios que suceden en el bienestar de los pacientes entre el momento previo y el posterior a la misma. Hacemos esto por medio de la aplicación del test a una muestra de 7 pacientes diagnosticados de depresión, en dos momentos: antes de la terapia y al cabo de ella.

Esperamos que la terapia tenga por efecto el de aumentar el bienestar de los sujetos que la reciben, dicho de otro modo, esperamos cambios positivos en el puntaje del test. Las hipótesis son entonces:

$$H_0 : \bar{D} = 0$$

$$H_1 : \bar{D} > 0$$

Fijado el nivel de significación en el 5% y suponiendo que la variable se distribuye de manera normal en la población, el punto crítico de la distribución  $t$  con 6 grados de libertad, de una cola derecha es  $t_c = +1.943$ .

Los siguientes son los datos recogidos:

sujeto	antes $x_1$	después $x_2$	diferencia $d_i$
1	5	7	2
2	4	7	3
3	6	6	0
4	3	5	2
5	4	5	1
6	5	6	1
7	7	7	0

Esta tabla indica, para cada individuo, el puntaje que obtuvo en la prueba que mide bienestar tomada antes de la terapia ( $x_1$ ) y en la tomada después ( $x_2$ ). Además, las diferencias para cada sujeto, que es la resta de la segunda menos la primera, a esas diferencias las llamamos  $d_i$ , el subíndice  $i$  se refiere a cada sujeto y va desde 1 hasta 7.

La hipótesis nula de la prueba es que no hay diferencia en las dos mediciones, es decir que no hay efectos de la terapia, que el bienestar de los sujetos luego

<sup>10</sup>Es un ejemplo incompleto porque no hay grupo control, por lo que no es seguro que los cambios observados se deban a la intervención terapéutica o a otros factores.

del tratamiento es igual que antes de él. El cambio respecto de las pruebas para muestras independientes es que ahora pasamos a trabajar con  $d$  como variable, sus medidas descriptivas son; la media de las  $d_i$ ,  $\bar{d} = 1.286$ , y desviación estándar,  $s_d = 1.113$ .

Con esa información se llega al estadístico de prueba:

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{1.286}{\frac{1.113}{\sqrt{7}}} = 3.057$$

Por ser mayor que el punto crítico ( $t_{\text{obs}} > t_c$ ), está en la zona de rechazo de  $H_0$ , y se concluye que hay evidencia para considerar que los puntajes en el test de bienestar son mayores luego de la terapia. La siguiente es la representación gráfica de este resultado.

La salida R para esta prueba es:

```
##
## Paired t-test
##
## data:  antes and despues
## t = -3.0571, df = 6, p-value = 0.01115
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf -0.4684903
## sample estimates:
## mean of the differences
##      -1.285714
```

Que indica, las dos variables que se comparan (antes y después), el valor  $t$ , los grados de libertad y el valor  $p$ , que vale 0,01115. Es una probabilidad pequeña (menos del 0,05) que confirma el rechazo de  $H_0$ .

### 13.1.3 Coeficiente $r$ de Pearson

En el análisis de relaciones entre variables a partir de datos de muestras, se han calculado coeficientes para medir el grado (o intensidad) de la asociación. Luego de haber visto los procedimientos de inferencia, corresponde generalizar las conclusiones obtenidas en estos análisis a toda la población de referencia. Ahora se dispone de las herramientas necesarias para hacer esa generalización. Para el coeficiente  $r$  de Pearson la lógica para la prueba de hipótesis es la que ya conocemos, solo cambia la forma de calcular el estadístico de prueba. Para niveles de medición más bajos (ordinales o nominales), se usan otras pruebas, que se desarrollan en el próximo capítulo

Si ha sido obtenido en una muestra representativa, el coeficiente de correlación de Pearson allí calculado es un estimador del coeficiente de correlación poblacional, es decir que mide la intensidad de la asociación entre las variables en la población; así como  $\bar{x}$  es el estimador de  $\mu$  y  $\hat{p}$  el estimador de  $P$ . Manteniendo la notación anterior, usaremos la letra griega  $\rho$  (rho) para referirnos al coeficiente de correlación paramétrico (o poblacional) que es estimado por el muestral:  $r$ .

Si se extraen todas las muestras posibles de una población dada y en cada una se calcula  $r$ , la media de todos los coeficientes de correlación encontrados, coincide con el coeficiente de correlación paramétrico. A esa media, que no calculamos, porque no es posible extraer “todas las muestras de la población”, la llamamos esperanza.

Dicho de otra manera,  $r$  es un estimador insesgado de  $\rho$ . Los escribimos:  $E(r) = \rho$ .

Por su parte, la varianza de  $r$  es:

$$\sigma_r^2 = \frac{1 - r^2}{n - 2}$$

Por lo que el error estándar del estimador tiene la forma:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}$$

Y, tal como sucedió con la media y la proporción, el Teorema Central del Límite indica que a medida que aumenta el tamaño de las muestras, la distribución de los  $r$  tiende a ser normal. Si podemos suponer que en la población, la variable bajo análisis tiene distribución normal, es válido usar la distribución  $t$  cuando la muestra es pequeña. Cuando aumenta el tamaño de la muestra esta distribución tiende a la normal. En consecuencia, y como sucedió con la media, usaremos distribución  $t$  de *Student* siempre.

Para esta prueba de hipótesis, la distribución  $t$  tiene grados de libertad que se calculan como el tamaño de la muestra menos dos:

$$gl = n - 2$$

Conociendo la distribución de probabilidades para  $r$  podemos construir el estadístico de prueba restando el estimador menos el parámetro y dividiendo por el error estándar del estimador:

$$t = \frac{r - \rho}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$$

La hipótesis de carácter conservador (aquella que señala la no-diferencia) será la que afirme que en la población no hay relación entre las variables, por lo que si en la muestra hallamos un valor de  $r$  no nulo, habrá sido por azar. Nuevamente se trata de decidir si un valor muestral observado es evidencia suficiente para rechazar la  $H_0$ ; a la que escribiremos:

$$H_0 : \rho = 0$$

La hipótesis alternativa puede ser bilateral:

$$H_1 : \rho \neq 0$$

O unilateral derecha:

$$H_1 : \rho > 0$$

O unilateral izquierda:

$$H_1 : \rho < 0$$

Y en todos los casos transformaremos el coeficiente  $r$  observado a puntaje  $t$ , haciendo:

$$t = \frac{r_{\text{obs}} - \rho}{\sqrt{\frac{1-r_{\text{obs}}^2}{n-2}}} = \frac{r_{\text{obs}}}{\sqrt{\frac{1-r_{\text{obs}}^2}{n-2}}}$$

La última igualdad se debe a que la hipótesis nula afirma que  $\rho = 0$ .

Ejemplo (datos ficticios): se observa la relación entre el tiempo que los alumnos dedicaron a preparar el examen de una materia y la calificación obtenida en ese examen, a partir de una muestra de 27 estudiantes. Se obtiene un coeficiente de correlación lineal de Pearson de  $r_{\text{obs}} = +0.37$ . El signo positivo de este coeficiente indica que la relación es directa, por lo que, en la muestra, los alumnos que dedican más tiempo a la preparación, tienden a tener notas más altas. El valor absoluto indica que se trata de una relación moderada entre las dos variables. Ahora nos interesa probar si este resultado es suficiente evidencia para creer que en la población, las dos variables están relacionadas, es decir, que en la población el coeficiente de correlación no es cero. La pregunta es si hemos encontrado  $r = +0.37$  porque en la población las variables están correlacionadas o solo por las variaciones propias del procedimiento aleatorio de muestreo, es decir, solo por azar.

Las hipótesis correspondientes a este problema son:

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Es bilateral porque nuestro interés es saber si  $\rho$  difiere de cero.

Fijamos el nivel de significación en el 5% y hallamos en una distribución *t de Student* con 25 grados de libertad ( $n - 2 = 27 - 2 = 25$ ) los valores críticos correspondientes son  $\pm 2.05$ , gráficamente:

El área sombreada constituye la probabilidad extrema de 0,05, repartida en dos colas de 0.025 cada una. La zona de rechazo de  $H_0$  se constituye por el conjunto de los valores  $t$  mayores a 2.05 así como los menores a -2.05.

Ahora transformamos el valor de  $r$  obtenido a puntaje  $t$ , calculando el estadístico de prueba:

$$t = \frac{r_{\text{obs}}}{\sqrt{\frac{1-r_{\text{obs}}^2}{n-2}}} = \frac{0,37}{\sqrt{\frac{1-0,37^2}{27-2}}} = 1,99$$

Un valor que no se encuentra en la zona de rechazo, por lo que la decisión es la de aceptar  $H_0$  y concluir que no hay suficiente evidencia para afirmar que haya una correlación lineal no nula entre el tiempo que los alumnos dedican a preparar una materia y la nota que obtienen en el examen. Diremos que el coeficiente de correlación hallado en la muestra no difiere significativamente de cero o, más simplemente, que no es significativo.

Como siempre puede hacerse en las pruebas de hipótesis, vamos a llegar a la misma conclusión calculando el valor  $p$  asociado al coeficiente  $r$  muestral. Se trata de encontrar la probabilidad de hallar un valor de  $r$  como el observado o uno más extremo que él, si la hipótesis nula fuera cierta. Como la prueba es bilateral debemos tratar a la expresión “más extremo” como incluyendo dos posibilidades, que  $r$  sea mayor que el observado o menor que su opuesto, por lo que la probabilidad que buscamos se escribe:

$$P(r < -r_{obs} \cup r > r_{obs} / H_0 \text{ es verdadera}) = P(r < -0,37 \cup r > 0,37 / \rho = 0)$$

Que se lee como “la probabilidad que  $r$  sea menor que el opuesto al valor observado o mayor que el valor observado, dado que la hipótesis nula es verdadera”

Usando el estadístico de prueba, transformamos los dos valores de  $r_{obs}$  en puntajes  $t$  y entonces esa probabilidad, expresada en términos de  $t$ , nos queda:

$$P(t < -1,99 \cup t > 1,99)$$

En la que no incluimos la condición que  $H_0$  sea verdadera ( $\rho = 0$ ) porque está implícita en la distribución  $t$  de  $r$ . Esta probabilidad es 0.0576. Debido a que es mayor a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0,05$ ), la decisión es la de no rechazar  $H_0$ . La lectura de este valor  $p$  es “si en la población no existiera correlación entre las variables, la probabilidad de haber hallado un valor como el observado o más extremo que él sería de 0.0576. Consideramos a este valor como elevado, por lo que no rechazamos la hipótesis de ausencia de correlación”.

*Dos consecuencias de este resultado:*

Primera: un coeficiente que, a nivel muestral habríamos juzgado como moderado no puede generalizarse como significativo a toda la población. Esto se debe principalmente al reducido tamaño de la muestra. Así, para que este valor de  $r$  hubiese representado una asociación significativa en la población, habría sido necesario que proviniese de una muestra de mayor tamaño.

Segunda: el valor de  $t_{obs}$  es cercano al punto crítico (1.99 frente a 2.05), de modo que es poco lo que le falta para que la hipótesis sea rechazada. En el procedimiento a través del valor  $p$ , eso equivale a que dicho valor de probabilidad apenas supera al nivel de significación establecido: 5.6% frente a 5%. Aun así, nuestro criterio fijado a priori indica que no debemos rechazar  $H_0$ . Pero esto debe informarse en el reporte, para que el lector pueda interpretar los resultados.

La salida R para esta operación es:

```
##
## Pearson's product-moment correlation
```

```
##
## data: tiempo_prep and calif
## t = 2.0035, df = 25, p-value = 0.05608
## alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -0.009391405 0.658839508
## sample estimates:
## cor
## 0.37195
```

La lectura es que el puntaje  $t$  asociado al valor muestral es 2.0035, al que, con 25 grados de libertad, le corresponde una probabilidad extrema de 0.05608. El intervalo de confianza estima, al 95%, el coeficiente poblacional. Que este intervalo incluya al cero es consistente con que al un nivel del 5% la  $H_0$  no sea rechazada.

Al final está el coeficiente de correlación muestral, de 0.37195 cuya probabilidad de haber sido encontrado por puro azar es 0.05608.

A un nivel de significación del 5% no se rechaza la  $H_0$  según la cual las variables no están correlacionadas. Aunque sí se rechaza si se fija un nivel de significación “más tolerante” del 10%.

Resumen de pruebas tratadas en el capítulo

Parámetro	Estimador	Estadístico de prueba	Supuestos
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s_{comb} * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $gl = n_1 + n_2 - 2$	Grupos independientes Distribución normal en la dos poblaciones ó $n > 30$
		$s_{comb}^2 = \frac{(n_1-1)*s_1^2 + (n_2-1)*s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	Varianzas iguales
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ $gl = \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_1-1} + \frac{(\frac{s_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$	Grupos independientes Distribución normal en la dos poblaciones ó $n > 30$ Varianzas diferentes
$P_1 - P_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1*(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2*(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$	Grupos independientes y $n_1 > 100$ y $n_2 > 100$
$\bar{D}$	$\bar{d}$	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}; gl = n - 2$	Distribución normal de $d$ ó $n > 30$
$\rho$	$r$	$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$	Distribución normal



## 13.2 Hacerlo en R

### 13.2.1 Ejemplo 1.

Diferencia de medias muestras grandes

Generamos datos ficticios:

```
set.seed(1)
duracion <- c(rnorm(100, 6.7, 1.2), rnorm(150, 6.3, 1.5))
trabaja <- c(rep("si", 100), rep("no", 150))
datos.ejemplo.1 <- data.frame(trabaja, duracion)
```

Y solicitamos la prueba  $t$  a la que hay que indicar:

- qué variable se compara (la duración de la carrera)
- entre quiénes se compara (los que trabajan y los que no)
- de dónde provienen los datos (la matriz de datos)

La variable cuyas medias se comparan y la que define los grupos se separan con el signo  $\sim$  (alt+0126 en windows), los datos, luego de una coma.

```
t.test(duracion ~ trabaja, data = datos.ejemplo.1)

##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  duracion by trabaja
## t = -3.5765, df = 246.64, p-value = 0.000419
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -0.9058173 -0.2624402
## sample estimates:
## mean in group no mean in group si
##           6.246536           6.830665
```

La salida indica que es una prueba  $t$  de Welch, implica que introduce la corrección en el cálculo de la varianza combinada cuando las varianzas poblacionales se consideran diferentes a un nivel del 5%. Los valores que interesan son:

- el puntaje  $t$  que indica la cantidad de desviaciones estándar que la diferencia observada se aleja de cero. El signo depende del modo en que han sido elegidas para restar, no tiene interpretación en pruebas bilaterales.
- la lateralidad de la prueba, indicada en “alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0”
- el valor  $p$  que indica la probabilidad de encontrar una diferencia entre las

medias muestrales con la observada o más extrema si en la población la diferencia fuera cero. Por ser un valor pequeño ( $<0.01$ ), se decide rechazar  $H_0$  y concluir que las media poblacionales difieren significativamente.

- los valores de las medias muestrales

Los valores numéricos no son los mismos que se obtuvieron manualmente, porque la generación aleatoria produce las cantidades de casos que se piden (100 y 150) extraídos de distribuciones con los parámetros ( $\mu$  y  $\sigma$ ) indicados, pero los estadísticos muestrales ( $\bar{x}$  y  $s$ ) no necesariamente coinciden con ellos, como sabemos desde que tratamos las distribuciones en el muestreo.

La conclusión de la prueba sí es la misma.

### 13.2.2 Ejemplo 2.

Diferencia de medias muestras grandes

Generamos datos ficticios igual que antes, pero con 20 y 25 observaciones:

```
set.seed(1)
duracion.2 <- c(rnorm(20, 6.7, 1.2), rnorm(25, 6.3, 1.5))
trabaja.2 <- c(rep("si", 20), rep("no", 25))
datos.ejemplo.2 <- data.frame(trabaja.2, duracion.2)
```

Solicitamos la prueba como antes:

```
t.test(duracion.2 ~ trabaja.2, data = datos.ejemplo.2)

##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: duracion.2 by trabaja.2
## t = -1.8173, df = 42.347, p-value = 0.07625
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -1.32432188 0.06917121
## sample estimates:
## mean in group no mean in group si
##          6.301053          6.928629
```

Ahora la lectura es que el valor p es grande por lo que no se rechaza la  $H_0$ . No hay evidencia para considerar que las medias poblacionales difieran.

### 13.2.3 Aplicación a los datos de Adultos Mayores

Se lee la base y se la nombra como `adultos_mayores`:

```
adultos_mayores <- read.csv("bases/archivostxt/Adultos.mayores.txt",
  sep = ";", header = TRUE, fileEncoding="latin1"
)
```

Luego, se llevan a numéricas la edad y la cantidad de hijos, porque fueron leídas como factores:

```
adultos_mayores$edad <- as.numeric(as.character(adultos_mayores$edad))
adultos_mayores$hijos <- as.numeric(as.character(adultos_mayores$hijos))
```

Se construye la variable que agrupa las edades:

```
adultos_mayores$grupo_edad <- ifelse(adultos_mayores$edad < 66, 1, 2)
```

Y se solicita la prueba de hijos según grupos de edad, unilateral izquierda:

```
t.test(hijos ~ grupo_edad, data = adultos_mayores, alternative = "less")

##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  hijos by grupo_edad
## t = -0.93523, df = 495.19, p-value = 0.1751
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf 0.08990955
## sample estimates:
## mean in group 1 mean in group 2
##      2.489712      2.607692
```

### 13.2.4 Prueba apareada

Se contruye la matriz de datos:

```
antes <- c(5, 4, 6, 3, 4, 5, 7)
despues <- c(7, 7, 6, 5, 5, 6, 7)
para_prueba_apareada <- data.frame(antes, despues)
```

Y es solicita la prueba  $t$ , indicando en el argumento que es apareada:

```
t.test(antes, despues, data = para_prueba_apareada, paired = TRUE)

##
## Paired t-test
##
## data:  antes and despues
## t = -3.0571, df = 6, p-value = 0.02231
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -2.3147876 -0.2566409
## sample estimates:
## mean of the differences
##                -1.285714
```

### 13.2.5 Coeficiente de correlación

Para solicitar la prueba de significación sobre el coeficiente  $r$  de Pearson, simplemente se solicita:

```
cor.test(tiempo_prep, calif)

##
## Pearson's product-moment correlation
##
## data:  tiempo_prep and calif
## t = 2.0035, df = 25, p-value = 0.05608
## alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -0.009391405  0.658839508
## sample estimates:
##      cor
## 0.37195
```

Como sucedió con el comando *cor* que ofrecía el coeficiente de correlación, esta prueba por defecto calcula el coeficiente de Pearson, si se necesita el coeficiente de Spearman, debe indicarse en el argumento *method*:

```
cor.test(tiempo_prep, calif, method = "spearman")

##
## Spearman's rank correlation rho
##
```

```
## data: tiempo_prep and calif
## S = 1956, p-value = 0.03811
## alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
## sample estimates:
##      rho
## 0.4029304
```



## Capítulo 14

# Cuando los supuestos no se cumplen

N.B. En este capítulo no nos detendremos en detalles de los procedimientos, solo las condiciones de aplicación de cada uno y, en el último apartado, el modo de reproducir los ejemplos en R.

Las condiciones que se han pedido hasta este punto para los procedimientos vistos, son exigentes. Por ejemplo, en las *pruebas t* debemos suponer que la variable tiene distribución normal en la población<sup>1</sup>. El Teorema Central del Límite nos dice que si las muestras son lo suficientemente grandes, la distribución muestral tiende a ser normal, por lo que puede eliminarse el supuesto de normalidad en la población si las muestras tienen suficiente tamaño, pero a menudo no es posible contar con muestras grandes. Todas las pruebas que hemos visto hasta este momento hacen supuestos acerca de la población, que son condiciones que debe cumplir la distribución de las variables bajo análisis en la población; estos supuestos a veces se cumplen y otras no. Los resultados que se obtengan de esas pruebas dependen del cumplimiento de esas condiciones. En algunos casos es posible poner a prueba la veracidad de esas exigencias, para ver si se cumplen, en otros casos, solo es posible “suponer” que es así. Por esa razón los resultados pueden ser aproximados o directamente incorrectos, si hay violaciones graves a sus condiciones de aplicación.

Además, los cálculos hechos en las pruebas mencionadas, requieren un nivel de medición alto, para poder calcular medias y varianzas. Hemos resuelto parcialmente el problema cuando, al tratar con variables nominales, usamos la proporción de casos en alguna categoría. Sin embargo no hemos resuelto aún el problema de analizar relaciones entre variables cualitativas, a las que no puede calcularse la media ni la varianza, pero que a menudo aparecen en nuestros

---

<sup>1</sup>Lo que puede verificarse inicialmente observando el histograma, comparando la media y la mediana, y calculando los coeficientes de asimetría y curtosis.

análisis. Es el mismo caso con el coeficiente de Pearson, su cálculo requiere que se calculen medias y varianzas, lo que no puede hacerse si las variables no son métricas.

Estos problemas son muy frecuentes en investigación social: pocos casos, variables que no son métricas, sin certeza sobre la normalidad de las distribuciones paramétricas. Para ellos existe un conjunto de pruebas llamadas **pruebas no paramétricas**. Por oposición a ellas, todas las pruebas presentadas hasta aquí son **pruebas paramétricas**, que quiere decir que especifican ciertas condiciones que deben cumplir (o que puede suponerse que cumplan) los parámetros de la población de la que se extrae la muestra.

---

Son **pruebas no paramétricas** las pruebas de hipótesis que no especifican condiciones sobre los parámetros de la población de la que proviene la muestra.

---

La limitación de las pruebas no paramétricas respecto de las paramétricas, es que tienen, a igual nivel de significación e igual tamaño de muestra, menor potencia. Eso significa que, para obtener la misma potencia en una prueba no paramétrica que en una paramétrica, es necesario usar más casos.

Si el problema es el nivel de medición de las variables —que en la mayoría de los casos no es métrico—, puede resolverse apelando a una prueba no paramétrica y lograr resultados de la misma calidad, aunque a un mayor costo por la mayor cantidad de casos necesarios.

Si el problema es el tamaño de la muestra, es decir, si tenemos muy pocos casos observados y no puede suponerse distribución normal en la población, entonces no hay alternativa y debe usarse una prueba no paramétrica.

En este capítulo desarrollaremos tres pruebas no paramétricas basadas en el puntaje *ji cuadrado* y dos alternativas a las pruebas *t* para muestras independientes y apareadas. Puede consultarse el manual de Siegel (1956) para una presentación muy completa, aunque no actualizada a procedimientos informáticos.

### 14.0.1 Las pruebas *ji cuadrado* (o *chi cuadrado*)

Ya hemos usado el puntaje *ji cuadrado* para derivar medidas de la asociación entre dos variables nominales (*V* de Cramer, *C* de Pearson) y luego como un modelo especial de probabilidades. Ahora relacionaremos esos dos usos del puntaje *ji cuadrado*, en primer lugar para analizar la eventual independencia entre dos variables (prueba de independencia de atributos), luego para evaluar si una distribución se ajusta a un modelo predicho (prueba de bondad de ajuste) y finalmente para comparar la tendencia central entre variables de nivel ordinal (prueba de la mediana).



#### 14.0.1.1 Prueba de independencia de atributos

El puntaje *ji cuadrado* ( $\chi^2$ ) es una medida de la distancia que hay entre una distribución de frecuencias bivariada observada y la correspondiente distribución de frecuencias esperadas. Estas frecuencias esperadas son las que se esperarían observar si las variables fueran independientes. Así, cuanto más alejadas se encuentren las frecuencias observadas de las esperadas, tanto más grande será el puntaje  $\chi^2$  y más alejadas de la independencia estarán las variables que se analizan, el hecho de estar alejadas de la independencia implica que existe alguna asociación entre ellas. El valor mínimo de este puntaje es cero, que solo podría alcanzarse si todas las frecuencias observadas coincidieran con las esperadas y sería el caso de una independencia perfecta; una situación muy improbable de hallar en la realidad. El puntaje  $\chi^2$  carece de un valor máximo, puede ser indefinidamente grande, dependiendo no solo de lo alejadas que están las frecuencias observadas de las esperadas, sino también de la dimensión de la tabla y de la cantidad de casos.

Como las frecuencias observadas que están en la tabla bivariada provienen de una muestra, necesitamos poder generalizar el resultado que hallemos a la población de referencia. Es decir que ahora, en el contexto de la inferencia, nos preguntamos ¿Cómo debería ser de grande el puntaje  $\chi^2$  encontrado para que consideremos que las variables se alejan lo suficiente de la independencia y en consecuencia, se pueda decir que la asociación es significativa? Por la redacción de la pregunta puede verse que tratamos con una prueba de hipótesis, nos estamos preguntando ¿A partir de qué valor podemos considerar que  $\chi^2$  es significativo? La respuesta dependerá del valor que asuma  $\chi^2$  (que está influido por el tamaño de la muestra) y de la dimensión de la tabla. Para formular las hipótesis de esta prueba, recordemos que la  $H_0$  es aquella que indica no-diferencia, el no-cambio, es la hipótesis “conservadora”. Por el contrario, la hipótesis alternativa,  $H_1$  presenta una diferencia en algún sentido. En este problema, como vamos a tratar acerca de relaciones entre variables, la  $H_0$  indicará que no hay relación o, lo que es lo mismo, que las variables son independientes.

Ejemplo 1 (datos ficticios) se trata analizar la posible relación entre el resultado del primer parcial de Psicoestadística (aprobado – no aprobado) y el turno en que los alumnos lo hicieron. Se construye una muestra con 180 alumnos seleccionados entre quienes hicieron el primer parcial en los últimos cinco años. La siguiente es la tabla de distribución de frecuencias observadas.

Para el análisis de la independencia se calculan las frecuencias esperadas<sup>2</sup>:

Las frecuencias esperadas conducen al puntaje<sup>3</sup>  $\chi^2$ , que en este caso es  $\chi^2 = 0.903$ . En el interés por generalizar a toda la población, se trata de alcanzar una conclusión acerca de la independencia o no de las dos variables, que no esté

---

<sup>2</sup>Como  $f_{ij} = \frac{f_i * f_j}{n}$

<sup>3</sup>Haciendo:  $\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$

Tabla 14.2: Frecuencias conjuntas observadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó.

Resultado del parcial	Turno	
	Mañana	Tarde
Aprobado	60	30
No aprobado	30	10
Total	90	40

Tabla 14.3: Frecuencias conjuntas esperadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó.

Resultado del parcial	Turno	
	Mañana	Tarde
Aprobado	62	28
No aprobado	28	12
Total	90	40

limitada a estos 180 casos, sino que sea general. No debemos olvidar que los datos disponibles son muestrales y, por el modo en que se seleccionan los casos de la muestra, dependen del azar.

Nos preguntamos: ¿el valor hallado para el puntaje  $\chi^2 = 0.903$ , puede explicarse por azar, o representa un distanciamiento suficientemente grande como para atribuirlo a una relación entre las variables en la población?

Queremos entonces decidir si lo que hemos observado para estos alumnos (la muestra de quienes cursaron en los últimos cinco años, por ejemplo) es general, es decir, si vale para alumnos a los que no hemos observado. Por eso, la hipótesis nula de la prueba será:

$H_0$ : El resultado del parcial es independiente del turno en que se realiza<sup>4</sup>

Que equivale a afirmar que no hay relación entre el turno y el resultado.

Su contrapartida, la  $H_1$  dirá que:

$H_1$ : Existe relación entre el turno en el que se realiza el parcial y el resultado que se obtiene.

La pregunta será entonces si la evidencia hallada a partir de nuestros datos es suficiente para rechazar  $H_0$  y concluir que las variables están relacionadas

<sup>4</sup>De mismo modo que sucede con las pruebas paramétricas, las hipótesis se refieren a toda la población, aunque aquí no aparezca el nombre de un parámetro reconocible, como  $\mu$  o  $P$ .

o si, por el contrario, deberemos seguir sosteniendo que las variables no están relacionadas.

La variable aleatoria  $\chi^2$  tiene una distribución de probabilidad asimétrica y su forma depende de los grados de libertad. Estos últimos, para tablas de doble entrada dependen del número de filas y de columnas que tenga la tabla, según:

$$gl = (f - 1) * (c - 1)$$

Donde  $gl$  son los grados de libertad,  $f$  es el número de filas de la tabla y  $c$  el número de columnas. Entonces conocemos el puntaje  $\chi^2$  y su distribución de probabilidad, con lo que puede decidirse si se trata de un valor extremo (muy poco probable si  $H_0$  fuera cierta) o bien de un valor esperable. En el primer caso rechazaremos  $H_0$  y concluiremos que hay relación entre el turno en que se hace el parcial y el resultado que se obtiene. En el segundo caso, aceptaremos  $H_0$  y diremos que no hay evidencia para descartar la independencia, o que no hay pruebas para sostener que las variables estén relacionadas. Rechazaremos  $H_0$  si el valor  $\chi^2$  encontrado es grande, porque eso es sinónimo de un gran alejamiento de nuestros datos respecto de la independencia. En razón de ello, ésta será siempre una prueba unilateral derecha: se rechaza para valores que excedan cierto límite.

El procedimiento para hacer la prueba puede ser el tradicional, que consiste en fijar de antemano el nivel de significación ( $\alpha$ ), luego determinar el (único) punto crítico y comparar si el valor observado de  $\chi^2$  excede ese punto crítico; si es así se rechaza  $H_0$ . O también puede usarse el *valor p* asociado al puntaje  $\chi^2$  observado, y si esa probabilidad es menor al nivel de significación, se rechaza  $H_0$ .

En este ejemplo, los grados de libertad son:

$$gl = (f - 1) * (c - 1) = (2 - 1) * (2 - 1) = 1 * 1 = 1$$

Se fija un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  y se encuentra que el punto crítico que corresponde para esa área (superior) y esos grados de libertad bajo la curva de la distribución  $\chi^2$ . El resultado es:

## [1] 3.841459

Se lo llama  $\chi_c^2$  (chi cuadrado crítico). La representación gráfica de la zona de rechazo de  $H_0$  es entonces:

Gráfico 1: Ubicación del punto crítico que deja un 5% de área superior en una distribución  $\chi^2$  con 2 grados de libertad.



De acuerdo a este gráfico, la región de rechazo de  $H_0$  es la que se encuentra a la derecha de 3.84, formada por todos los valores de  $\chi^2$  que superen a 3.84. Los datos dieron un puntaje  $\chi^2_{obs} = 0.903$ , que no pertenece a la zona de rechazo de  $H_0$ , por lo que no se rechaza  $H_0$  y se concluye que no hay relación entre las variables; o bien que no hay evidencia suficiente para descartar la independencia entre el resultado del parcial y el turno en que éste se realiza.

Si se prefiere usar el valor de probabilidad (*valor p*) para tomar la decisión y dar mayor claridad a los resultados, entonces, como en las pruebas paramétricas, se informa la probabilidad de hallar un valor de  $\chi^2$  como el observado o más extremo que él. En esta prueba (de independencia de atributos), “más extremo” siempre quiere decir “mayor que”, porque es una prueba unilateral derecha. Buscamos entonces la probabilidad que tiene la variable  $\chi^2$  con un grado de libertad, de asumir un valor igual o mayor al que hemos observado, es decir:

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_{obs}) = P(\chi^2 \geq 0.903)$$

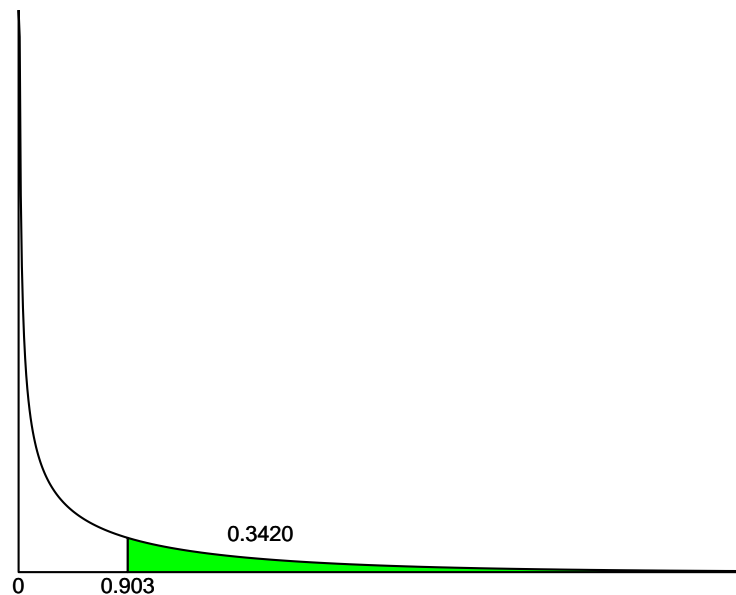
Que es:

## [1] 0.3419786

Lo leemos diciendo que, si las dos variables fueran independientes, la probabilidad de hallar un puntaje  $\chi^2$  como el observado o más extremo que él es de 0.3420. Dado que es una probabilidad alta (sea a un nivel de significación del 0.05 o de 0.10), consideramos a éste como un resultado altamente probable,

de ser cierto que las variables son independientes, por lo que no constituye evidencia para rechazar  $H_0$ .

La representación gráfica de esta probabilidad es el área sombreada, a la derecha del valor  $\chi^2_{obs} = 0.903$ :



#### 14.0.1.2 Pruebas de bondad de ajuste

El cálculo del puntaje  $\chi^2$  ofrece la posibilidad de hacer comparaciones entre frecuencias observadas (reales, provenientes de la recolección de datos) y frecuencias esperadas bajo diferentes hipótesis. En la prueba anterior, las esperadas lo han sido bajo la hipótesis de independencia, pero la condición bajo la cual se esperan determinadas frecuencias puede ser otra y el puntaje  $\chi^2$  también permite medir esas distancias.

Ejemplo 2 (datos ficticios): la distribución de la condición que alcanzan los alumnos que cursan Psicoestadística ha sido, históricamente, 35% de promocionados, 35% de regulares y 30% de libres. Consideremos el subconjunto de alumnos que estudian otra carrera además de Psicología. Una muestra de 142 de estos alumnos se distribuye, según condición, del siguiente modo:

Tabla 3: Distribución de frecuencias de los alumnos de Psicología que también estudian otra carrera, según condición:

condición	alumnos
Promocionados	53
Regulares	51
Libres	38
Total	142

La tabla anterior muestra las frecuencias observadas. Nos preguntamos si esta distribución se aleja significativamente de la tendencia general, o bien si está dentro de lo esperado. Esta pregunta puede reformularse en dirección a saber si los datos observados se “ajustan” a la distribución general o se apartan de ella. Expresado en términos de hipótesis, la  $H_0$  afirmará que no hay diferencia:

$H_0$ : La distribución de promocionados, regulares y libres de los alumnos que estudian otra carrera se ajusta a la distribución del total de alumnos.

Mientras que la  $H_1$ , afirmará lo contrario:

$H_1$ : La distribución de promocionados, regulares y libres de los alumnos que estudian otra carrera se aparta de la distribución del total de alumnos.

Si la distribución se mantuviera igual (si  $H_0$  fuera verdadera), esperaríamos que los 142 alumnos que estudian otra carrera se distribuyeran en las tres categorías según estas proporciones: 0.35 - 0.35 - 0.30. La frecuencia que esperaríamos encontrar en la categoría promocionados es  $0.35 * 142 = 49.7$  y del mismo modo con las demás categorías. Por lo que esperaríamos la siguiente distribución de frecuencias:

Tabla 4: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de ajuste a la distribución general:

condición	alumnos
Promocionados	49,7
Regulares	49,7
Libres	42,6

Disponemos ahora de las dos tablas, una de frecuencias observadas y otra de esperadas y queremos evaluar si son similares o muy diferentes; que es el mismo problema que en la prueba de independencia, solo que ahora las tablas son univariadas. Para medir la distancia entre las dos tablas nuevamente se usa el puntaje  $\chi^2$ , que compara una a una las frecuencias de las celdas. Aplicada a las tablas de arriba, da:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(53 - 49.7)^2}{49.7} + \frac{(51 - 49.7)^2}{49.7} + \frac{(38 - 42.6)^2}{42.6} = 0.75$$

Del mismo modo que en la prueba de independencia de atributos, buscaremos un valor crítico de  $\chi^2$ , para tomar la decisión. En este caso, los grados de libertad de la distribución  $\chi^2$  dependen del número de categorías de la tabla univariada, simplemente es el número de categorías menos uno:

$$gl = k - 1$$

En este ejemplo, las categorías son tres, por lo que  $gl=2$ . Con 2 grados de libertad y 5% de nivel de significación, el punto crítico es

## [1] 5.991465

Por lo que la región de rechazo es el conjunto de valores que superan 5.99. El valor observado se encuentra fuera de la región de rechazo, por lo que corresponde no rechazar  $H_0$  y concluir que los alumnos que estudian otra carrera además de Psicología no muestran, en Psicoestadística, una distribución entre promocionados, regulares y libres que difiera significativamente de la tendencia general de quienes cursan esa materia.

#### 14.0.1.3 Prueba de la mediana

Cuando es necesario comparar la tendencia central de dos distribuciones, se dispone de la *prueba t de diferencia de medias*. Sin embargo esa prueba no es válida cuando se trabaja con variables que tienen nivel ordinal, ya que allí no tiene interpretación la media ni tampoco la varianza. Si se deben comprar dos muestras en una variable medida a nivel ordinal se puede plantear la hipótesis que afirma que las medianas son iguales, como una equivalencia a la que, en variables métricas, plantea que las medias de dos <distribuciones son iguales:

$$H_0 : M_{dn_1} - M_{dn_2} = 0$$

Frente a una hipótesis alternativa que usualmente es bilateral:

$$H_0 : M_{dn_1} - M_{dn_2} \neq 0$$

El procedimiento consiste en calcular, en primer lugar, la mediana del grupo compuesto por los casos de las dos muestras, todos reunidos en una sola distribución, se la denomina “mediana combinada” y se indica  $M_{dn_c}$ . Luego se cuentan los casos de cada grupo que quedan por encima y por debajo de esa mediana combinada. Si la mediana de los dos grupos fuera la misma, se esperaría que aproximadamente la mitad de los casos de cada grupo queden por encima de la mediana combinada y la otra mitad por debajo. En la medida que los casos de los grupos se aparten de esa forma de distribuirse habrá

evidencia para creer que las medianas difieren. Por lo tanto, se trata de ver si una distribución real de datos respeta una distribución teórica (esperada) o no.

La disposición de los datos se realiza en una tabla de dos por dos como la siguiente:

Ubicación respecto de la mediana combinada	Grupo		Total
	1	2	
Por encima			
Por debajo			
Total			

Bajo la hipótesis nula, esperaríamos que la cantidad de casos por encima y por debajo de la  $M_{dn_c}$  fuera la misma para los dos grupos. Dicho de otro modo, para aceptar la  $H_0$  deberíamos hallar independencia entre la pertenencia a los grupos y la ubicación de los casos por encima y por debajo de  $M_{dn_c}$ . De este modo vemos que el problema puede tratarse como una prueba de independencia: si el puntaje  $\chi^2_{obs}$  es tal que debe rechazarse la hipótesis de independencia, será —en esta prueba—, equivalente a rechazar la igualdad de las medianas.

Un problema que suele aparecer cuando se hace el recuento de casos por encima y por debajo de la  $M_{dn_c}$  es que algunos coincidan con ella, que no estén ni encima ni debajo. Si la cantidad total de casos con que se cuenta es grande, se pueden dejar de lado esos casos y solo contar los que efectivamente difieran (en más o en menos) de la  $M_{dn_c}$ . De lo contrario, puede hacerse el recuento de los casos que están por encima de la  $M_{dn_c}$  y los que no lo están, es decir que uno de los grupos cuenta la cantidad de casos que hay por encima de la  $M_{dn_c}$  y el otro los que la igualan o están por debajo de ella.

Ejemplo (datos ficticios): se comparan las calificaciones “de concepto” asignadas por docentes de escuelas primarias de dos grupos de alumnos. Dichas calificaciones, presentan categorías: 1. Excelente, 2. Muy bueno, 3. Bueno, 4. Satisfactorio, 5. No satisfactorio, por lo que son de nivel ordinal y no es posible realizar una prueba de diferencia de medias, en su reemplazo recurrimos a la prueba de la mediana. Se seleccionan 40 alumnos de cada docente y se relevan las notas de concepto de cada uno. Calculamos la mediana de los 80 alumnos juntos y obtenemos 3. A continuación contamos cuántos alumnos de la primera docente están por encima y por debajo de 3 y lo mismo para la segunda docente. La distribución queda del siguiente modo:



Ubicación respecto de la mediana combinada	Grupo		Total
	1	2	
Por encima	28	8	36
Por debajo	8	24	32
Total	36	32	68

Aunque originalmente se relevaron 40 alumnos de cada docente, quedaron 36 de la primera y 32 de la segunda, porque cuatro casos de un grupo y ocho del otro coincidieron con la  $M_{dn_c}$  y fueron descartados, con lo que el total se redujo a 68 observaciones.

La sola inspección de la tabla sugiere que debe descartarse la igualdad de las medianas de los grupos, ya que hay concentración de casos en las celdas de la diagonal, que es una indicación de la relación que hay entre filas y columnas. El grupo 1 está mayoritariamente por encima de la  $M_{dn_c}$  y el grupo 2 por debajo. En efecto, el puntaje  $\chi^2_{obs} = 13.33$ , con 1 grado de libertad, tiene una probabilidad asociada (*valor p*) de 0,00026, que quiere decir que se rechaza la hipótesis de igualdad de medianas.

### 14.0.2 Coeficiente $r_s$ de Spearman

El coeficiente *r de Pearson* solo puede interpretarse si proviene de variables medidas a nivel intervalar o proporcional, es decir, métricas. Cuando trabajamos con variables ordinales, disponemos de otra medida de la asociación, el coeficiente de correlación por rangos  $r_s$  de Spearman, cuyos valores se interpretan como los de *r de Pearson*. Por trabajar con un nivel de medición no métrico, la prueba sobre este coeficiente es no paramétrica.

La prueba de hipótesis que permite generalizar su valor a una población de referencia, casi no difiere de la de *r*. Llamaremos  $\rho_s$  al coeficiente de Spearman paramétrico y  $r_s$  al muestral. El error estándar de este estimador tiene la misma forma que el de Pearson:

$$\sigma_{r_s} = \sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}$$

Y cuando la muestra tiene al menos 10 observaciones, se distribuye con una distribución t con  $n-2$  grados de libertad<sup>5</sup>. En consecuencia, el estadístico de prueba será:

$$t = \frac{r_s - \rho_s}{\sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}}$$

<sup>5</sup>Kendall (1948) citado por Siegel (1956)

Ejemplo (datos ficticios): se interroga a 20 alumnos de primer año de una carrera universitaria sobre las razones de su elección de carrera y a partir de las respuestas se construye un índice que clasifica el interés en 1. Muy fuerte, 2. Fuerte, 3. Débil, 4. Muy débil. Los resultados de este índice se ponen en correspondencia con el orden de mérito alcanzado en el ingreso a la carrera universitaria (1. Primero, 2. Segundo, etc.). En el análisis de la relación entre estas dos variables ordinales obtenemos un coeficiente de correlación de Spearman de 0.82, que indica, en la muestra, una relación positiva e intensa entre el interés y el orden de mérito en el ingreso. Preguntamos si este resultado, obtenido sobre 20 casos, nos autoriza a afirmar que existe una asociación entre las dos variables más allá de la muestra observada. Formularemos las hipótesis correspondientes a una prueba bilateral, porque queremos probar si el coeficiente es significativamente diferente de cero.

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

Fijamos el nivel de significación en el 5% y hallamos en una distribución t con 18 grados de libertad ( $n - 2 = 20 - 2 = 18$ ) los valores críticos correspondientes son:

## [1] -2.100922

## [1] 2.100922

El estadístico de prueba es:

$$t = \frac{r_s - \rho_s}{\sqrt{\frac{1-r_s^2}{n-2}}} = \frac{0.82}{\sqrt{\frac{1-0.82^2}{20-2}}} = \frac{0.82}{0.135} = 6.08$$

Este valor se ubica en la región de rechazo de  $H_0$ , con lo que la decisión es la de rechazar  $H_0$  y concluir que “hay evidencia para creer que la correlación a nivel poblacional no es nula”.

El valor  $p$  asociado a esta observación es:

## [1] 9.570773e-06

El pequeño valor  $p$  es señal de lo escasamente probable que resulta que este resultado provenga del azar, es decir, es evidencia para creer que en la población, la asociación efectivamente existe.

### 14.0.3 Alternativas no paramétricas a las pruebas t

#### 14.0.3.1 Muestras independientes

La prueba U de Mann-Whitney es la versión no paramétrica de la prueba t de Student, es decir, sirve para comparar la tendencia central entre dos muestras independientes. Se usa cuando no se cumplen los supuestos de la prueba t y, sobre todo cuando las variables son de nivel ordinal. La hipótesis nula es que las muestras provienen de poblaciones iguales.

Si se dispone de dos muestras de tamaños  $n_1$  y  $n_2$ , para realizar la prueba se ordenan las observaciones de las dos muestras juntas, de menor a mayor, y se les asignan rangos desde 1 hasta  $n_1 + n_2$ . Si la tendencia central de ambas poblaciones es la misma los rangos deberían distribuirse aleatoriamente entre las dos muestras y el rango medio de las observaciones de una muestra debería ser casi el mismo que el de la otra. El estadístico de prueba U de Mann-Whitney se construye a partir de la suma de rangos de una de las muestras,  $R_i$ , elegida arbitrariamente.

#### 14.0.3.2 Muestras relacionadas

La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon es una prueba no paramétrica para comparar el rango medio de dos muestras relacionadas. Es una alternativa a la prueba t de Student para muestras relacionadas, que se usa en los casos en que no se sostiene la normalidad de la distribución y, especialmente cuando las variables son de nivel ordinal.

La hipótesis nula dice que las muestras provienen de poblaciones con la misma distribución de probabilidad. La prueba tiene en cuenta las diferencias entre las puntuaciones de los elementos de cada par asociado, y considera tanto el signo, como la magnitud de la diferencia.

## 14.1 Hacerlo en R

### 14.1.1 Ejemplo 1

Como se trata de datos ficticios, debemos primero generarlos.

```
resultado <- c(rep("aprobado", 90), rep("no aprobado", 40))
turno <- c(rep("mañana", 60), rep("tarde", 30), rep("mañana", 30), rep("tarde", 10))
datos_ejemplo_1_chi <- data.frame(resultado, turno)
```

Y construimos la tabla

```
library(kableExtra)
resultado_por_turno <- table(datos_ejemplo_1_chi$resultado, datos_ejemplo_1_chi$turno)
resultado_por_turno
```

```
##
##           mañana tarde
## aprobado      60    30
## no aprobado   30    10
```

Ahora solicitamos la prueba  $\chi^2$ :

```
prueba <- chisq.test(resultado_por_turno, correct = FALSE)
names(prueba)
```

```
## [1] "statistic" "parameter" "p.value"   "method"     "data.name"  "observed"
## [7] "expected"  "residuals" "stdres"
```

```
prueba$expected
```

```
##
##           mañana   tarde
## aprobado  62.30769 27.69231
## no aprobado 27.69231 12.30769
```

```
prueba
```

```
##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data: resultado_por_turno
## X-squared = 0.90278, df = 1, p-value = 0.342
```

### 14.1.2 Ejemplo 2

Nuevamente, hay que generar los datos

```
condicion <- c(rep("promocionados", 53), rep("regulares", 51), rep("libres", 38))
tabla_condicion <- table(condicion)
```

En la aplicación de la prueba, los argumentos son la tabla univariada y las proporciones esperadas en cada categoría (en el orden que aparecen; conviene observar la tabla antes):

```
chisq.test(tabla_condicion, p = c(.30, .35, .35))
```

```
##
## Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  tabla_condicion
## X-squared = 0.74983, df = 2, p-value = 0.6873
```

La salida muestra el puntaje  $\chi^2$ , los grados de libertad y el valor p asociado. Por tratarse de un valor elevado, concluimos que no hay evidencia para rechazar la hipótesis según la cual los estudiantes de más de una carrera se distribuyen entre regulares, promocionales y libres del mismo modo que lo hacen quienes solo estudian una carrera.

### 14.1.3 Prueba de la mediana

Construimos la matriz de datos, codificando del 1 al 5 los conceptos Excelente.... No satisfactorio.

```
docente_a <- c(rep(1, 15), rep(2, 13), rep(3, 4), rep(4, 6), rep(5, 2))
docente_b <- c(rep(1, 3), rep(2, 5), rep(3, 8), rep(4, 18), rep(5, 6))
concepto <- c(docente_a, docente_b)
docente <- c(rep("a", 40), rep("b", 40))
datos_prueba_mediana <- data.frame(concepto, docente)
```

La prueba de la mediana está en un paquete que no hemos usado aun, será necesario instalarlo y cargarlo en esta sesión:

### 14.1.4 Prueba de Wilcoxon

Sea el caso de la comparación entre los puntajes de un test estandarizado entre los grupos experimental y control, cada uno de los cuales tiene nueve casos. Los datos son los siguientes:

```
puntajes_control <- c(38.9, 61.2, 73.3, 21.8, 63.4, 64.6, 48.4, 48.8, 48.5)
puntajes_experimental <- c(67.8, 60, 63.4, 76, 89.4, 73.3, 67.3, 61.3, 62.4)
```

Los argumentos de la prueba solicitan los dos conjuntos de datos, la lateralidad, el valor bajo la hipótesis nula, y debe indicarse que no es una prueba apareada

```
##
## Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data: puntajes_control and puntajes_experimental
## W = 15, p-value = 0.02712
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

El resultado, a partir del valor  $p$  que ofrece, indica que se rechaza la hipótesis nula.

Si hubiésemos aplicado la prueba  $t$ , primero debe construirse la matriz de datos:

```
puntajes <- c(puntajes_control, puntajes_experimental)
grupo <- rep(c("control", "experimental"), each = 9)
datos_prueba_wilcoxon <- data.frame(grupo, puntajes)
```

Y luego aplicar la prueba

```
t.test(puntajes ~ grupo, data = datos_prueba_wilcoxon)
```

```
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: puntajes by grupo
## t = -2.7842, df = 13.114, p-value = 0.01538
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -29.981920 -3.795858
## sample estimates:
##      mean in group control mean in group experimental
##                52.10000                68.98889
```

El resultado conduce a la misma decisión, pero para interpretarlo debe cuidarse que los puntajes estén medidos a escala cuantitativa.

### 14.1.5 Muestras apareadas

Se trata de evaluaciones antes y después de una intervención sobre las condiciones de trabajo en una organización, medidas en puntaje de una prueba de satisfacción. Se quiere saber si hay evidencia para creer que después los puntajes son mayores:

```
wilcox.test(despues, antes, alternative = "greater", mu = 0, paired = TRUE)
```

```
##
##  Wilcoxon signed rank test
##
## data:  despues and antes
## V = 199, p-value = 5.245e-05
## alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

Leemos que, en una prueba unilateral derecha, el valor p es menor a los niveles usuales de significación, por lo que hay evidencia para afirmar que los puntajes son mayores luego de la intervención.

La realización de esta prueba si la satisfacción estuviese medida a nivel métrico y se pudiera suponer la normalidad de las distribuciones, sería por medio de una prueba t para muestras apareadas:

```
t.test(despues, antes, paired = TRUE, alternative = "greater")
```

```
##
##  Paired t-test
##
## data:  despues and antes
## t = 4.5337, df = 19, p-value = 0.0001136
## alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  1.922063      Inf
## sample estimates:
## mean of the differences
##                3.107097
```

Que conduce al mismo resultado, pero que solo es válida si se cumplen los supuestos paramétricos.





## Capítulo 15

# Apéndice: Tamaño del efecto

### 15.1 Significación estadística y significación práctica

El procedimiento de prueba de hipótesis concluye con la aseveración acerca del rechazo o no de la hipótesis nula. Esto se hace observando qué tan probable es hallar los resultados muestrales bajo el supuesto de  $H_0$  verdadera. El valor  $p$  es una medida de esa probabilidad, por eso es que cuando es pequeño la decisión es rechazar  $H_0$  y decimos que es resultado (la diferencia, el coeficiente, o lo que sea que se haya puesto a prueba) es significativo, o significativamente distinto de cero.

Sin embargo, que una prueba haya dado significativa no implica directamente que el resultado tenga interés práctico. Como se vio en el cálculo de la potencia, un tamaño de muestra grande, puede detectar diferencias muy pequeñas que quizá en la práctica tengan poco interés. La palabra significación contribuye a la confusión, porque en el lenguaje cotidiano, una diferencia significativa a menudo quiere decir una diferencia importante. La significación estadística, como hemos visto, es otra cosa y puede suceder que una prueba dé significativa pero la diferencia sea insignificante.

Por eso es necesario introducir otro concepto; el de **tamaño del efecto**. Se trata de una cuantificación de lo importante que es una diferencia o un coeficiente, luego de haber obtenido un resultado significativo en la prueba de hipótesis. Conocer el tamaño del efecto es absolutamente necesario para interpretar los resultados de una investigación. La APA (2010) destaca que “las pruebas de hipótesis no son sino el punto de partida y se requiere informar elementos

adicionales tales como tamaños del efecto, intervalos de confianza y descripciones extensivas” (p. 33, traducción del autor).

Las medidas de tamaño del efecto expresan de manera estandarizada cuán diferente de cero es una diferencia o un coeficiente. Que estén estandarizadas permite dos cosas: evaluarlas en su magnitud, dados ciertos criterios; y comparar efectos entre experimentos diseñados de manera diferente, por ejemplo con distintos tamaños de muestra, lo cual permite el meta-análisis<sup>1</sup>. Para decidir cuándo un efecto es grande mediano o pequeño, existen criterios, casi todos propuestos por Jacob Cohen (1962), quien es autor también de la mayoría de las medidas de tamaño del efecto.

## 15.2 Medidas de tamaño del efecto

Hay una gran diversidad de medidas del tamaño del efecto, Kirk (2003) las estima en más de setenta, y suelen clasificarse (Ellis, 2010) en dos familias: las medidas de diferencias entre grupos y las medidas de asociación. Para esta presentación, elegiremos algunas medidas de uso difundido y sugerimos Ellis (2010), así como Cumming (2012) para una descripción más detallada. Las siguientes son las medidas que más se usan para evaluar el tamaño del efecto, según cuál sea la prueba que se haya realizado.

### 15.2.1 Prueba t para diferencia de medias

Conocido como *d de Cohen*, se define como:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\text{comb}}}$$

Y mide la distancia entre las medias observadas, expresada en términos de la desviación estándar combinada de los dos grupos. Cohen (1962) sugiere que valores de *d* de 0.20, 0.50, y 0.80 indican tamaños de efecto: pequeño, mediano y grande respectivamente. Medidas alternativas al *d* de Cohen son *delta de Glass* y *g de Hedge*, que difieren en el modo de calcular el denominador de la expresión anterior, pero conceptualmente consisten también en una estandarización de la diferencia observada.

### 15.2.2 Análisis de la varianza

La medida se llama *f de Cohen* y se define así:

---

<sup>1</sup>Meta-análisis es una revisión sistemática que usa procedimientos estadísticos para comparar los resultados obtenidos en diferentes estudios sobre un determinado tema.

$$f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k p_i * (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{s_{res}^2}}$$

En la que las  $p_i$  de la fórmula representan la proporción de casos en cada grupo que se compara. Los valores sugeridos por Cohen son 0.10, 0.25, y 0.40 para efectos de tamaño pequeño, mediano y grande respectivamente. Otras medidas usadas en ANOVA son  $\eta^2$  (eta cuadrado) y  $\varepsilon^2$  (épsilon cuadrado). La relación entre  $\eta$  y  $f$  es

$$f = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2}\right)}$$

### 15.2.3 Correlaciones

El coeficiente de correlación es una medida estandarizada y se usa como medida del tamaño del efecto, es decir, de la magnitud de la asociación. Cohen considera que un efecto grande corresponde a  $r = 0.50$ , mediano a  $r = 0.30$  y pequeño  $r = 0.10$ .

### 15.2.4 Regresión lineal

La medida estandarizada para evaluar la calidad de un modelo lineal es:

$$f^2 = \frac{R^2}{1 - R^2}$$

Es una medida de tamaño del efecto alternativa al el coeficiente general de correlación  $R^2$ . Cohen fija en 0.02, 0.15 y 0.35 los criterios de pequeño, mediano y gran efecto.

### 15.2.5 Pruebas ji cuadrado

Se utiliza la medida definida como:

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{(f_i^e - f_i^{e1})^2}{f_i^e}}$$

En la que  $f_i^e$  y  $f_i^{e1}$  son las frecuencias relativas esperadas en la celda i bajo  $H_0$  y  $H_1$  respectivamente.

### 15.3 Análisis de la potencia

El cálculo del tamaño del efecto permite entonces comparar resultados de diferentes diseños experimentales y evaluar si un efecto es grande o pequeño. Este es el análisis a posteriori, luego de haber realizado las pruebas y haber hallado resultados estadísticamente significativos. Cuando se trató la potencia de la prueba, se indicó que ésta crece a medida que la diferencia entre el valor hipotético y el verdadero valor del parámetro se agranda, es decir que si el valor real difiere mucho del valor hipotético (tamaño del efecto grande), la probabilidad de rechazar la hipótesis nula es también grande (potencia alta).

También participa de esta relación el tamaño de la muestra, ya que si la muestra es de mayor tamaño, las varianzas de los estimadores se reducen (por su propiedad de ser consistentes) y el área que corresponde a la potencia aumenta. Es decir que muestras grandes dan lugar a mayor probabilidad de rechazar hipótesis nulas falsas, dicho de otra manera, las muestras grandes tienen más probabilidad de detectar diferencias, aunque éstas sean pequeñas. Esto conduce a que muestras muy grandes pueden dar resultados significativos aunque las diferencias sean ínfimas, por eso es muy necesario informar el tamaño del efecto para que se pueda tener una interpretación correcta de los resultados.

Aún queda un componente más en esta relación: la probabilidad de cometer error de tipo I, es decir la significación de la prueba. Si esta es muy pequeña, fijada así para reducir el riesgo de rechazar una hipótesis nula que sea verdadera, entonces también decrece la potencia, es decir, se vuelve más probable aceptar una hipótesis nula que es falsa y así pasar por alto un resultado que podría haber sido detectado.

Son entonces cuatro los elementos que interactúan: potencia, significación, tamaño del efecto y tamaño de la muestra. Si se establece a priori i) cuál es el tamaño del efecto que se quiere detectar (grande, mediano o pequeño), ii) qué riesgo de rechazar una hipótesis nula que es verdadera se está dispuesto a correr (significación) y iii) qué probabilidad de detectar diferencias se pretende (potencia); entonces el tamaño de la muestra queda fijado. Análogamente, si se tiene un número de casos dado y se fija la potencia y la significación, se puede calcular el tamaño del efecto que la prueba será capaz de detectar. Así, con tres de los elementos mencionados, queda determinado el cuarto. Las previsiones sobre la relación entre estos cuatro elementos se conocen como **análisis de la potencia** y es una parte importante del diseño de una investigación, porque sirve para calcular a priori el tamaño de muestra requerido para detectar un determinado tamaño de efecto con un nivel de significación dado. Si el tamaño de muestra está fijado (por presupuesto o tiempo), el análisis de la potencia permite saber qué probabilidad hay de detectar un determinado tamaño del efecto. También es posible establecer cuál es la potencia que deseamos para nuestro estudio o, al revés, qué probabilidad de cometer Error de Tipo II (no rechazar una  $H_0$  que es falsa) estamos dispuestos a asumir.

Figura 15.1: Relación efecto, muestra, potencia y significación

Los gráficos de la página siguiente ilustran, como se hizo en el capítulo XXXXX la relación entre estos elementos. Las áreas sombreadas más claro corresponden a la potencia, las oscuras al nivel de significación, y la distancia entre los centros de las campanas representa el tamaño del efecto.

Las relaciones entre el tamaño de muestra, la potencia, el tamaño del efecto y el nivel de significación dependen de cuál sea el tipo de estudio planteado y cuál la medida de tamaño del efecto elegida. Eso hace que las operaciones para calcular uno de ellos conociendo los otros tres, sean complejas. En el capítulo XXXX se construyeron las curvas de potencia para diferentes valores de la hipótesis alternativa (es decir del verdadero valor del parámetro) y diferentes tamaños de muestra. Sin embargo, esos cálculos dependen de los valores concretos de los parámetros (en particular, de las diferencias entre el valor paramétrico que sostiene  $H_0$  y el que sostienen las diferentes alternativas  $H_k$ ); ahora, con el tamaño del efecto estandarizado, solo hace falta saber qué prueba se realiza

para obtener la curva de potencia.

Si bien existen calculadoras on line<sup>2</sup>, es recomendable, por su flexibilidad, usar el paquete **pwr** (Champely, 2017) en R. Este conjunto de rutinas genera, para cada prueba estadística, uno de los cuatro valores a partir de los otros tres. Por ejemplo, una prueba t unilateral derecha, para comparar dos grupos a un nivel de significación del 5%, con una potencia de 80% requiere, para detectar un efecto grande ( $d=0.85$ ), 18 casos.

Primero se instala el paquete y se carga en la sesión:

El valor 31 para el tamaño de muestra se considera óptimo porque a partir de ahí la curva crece más lentamente y las ganancias de potencia son pequeñas, lo que no se justifica aumentar el número de casos.

El vídeo *tamaño del efecto, muestra potencia y significación* describe el uso del paquete **pwr** en el entorno RStudio.

---

<sup>2</sup>Por ejemplo <http://www.socscistatistics.com/effectsize/Default3.aspx> o también <https://www.uccs.edu/~lbecker/>.

# Bibliografía

- Doherty, C., Kiley, J., and Jameson, B. (2016). Partisanship and Political Animosity in 2016. *PewResearchCenter*, page 75.
- INDEC (2016). La medición de la pobreza y la indigencia en la Argentina.
- INDEC (2018). Censo 2001.
- Inglehart, R. (2018). *Cultural evolution : people's motivations are changing, and reshaping the world*.
- Morales Quiroga, M. and Pineiro Rodriguez, R. (2010). Gasto en campaña y éxito electoral de los candidatos a diputados en Chile 2005. *Revista de ciencia política (Santiago)*, 30(3):645–667.
- Norris, P. and Inglehart, R. (2011). *Sacred and secular : religion and politics worldwide*. Cambridge University Press.
- Robinson, J. (2014). *Likert Scale*, pages 3620–3621. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Stevens, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. *Science*, 103(2684):677–680.
- Upton, J. (2013). *Beck Depression Inventory (BDI)*, pages 178–179. Springer New York, New York, NY.