



POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MINI PROJET

Prise de Mesures

ÉQUIPE #12

Fiorella Boucher (1772032)

Alexandre Dorais (1846642)

Chloé Pilon Vaillancourt (1843334)

Gabriel-Andrew Pollo-Guilbert (1837776)

Rapport remis à
Pr. Caroline Boudoux

18 septembre 2016

Table des matières

1	Définition des objectifs, métriques et contraintes	1
1.1	Objectifs	1
1.2	Définition des métriques	1
1.3	Définition des contraintes	2
1.4	Description révisée du problème	2
2	Développement et évaluation des méthodes	2
2.1	Mesure de la boîte	2
2.1.1	Loi des sinus à l'aide du pointeur laser	2
2.1.2	Formule de Pythagore à l'aide de bâtons	3
2.1.3	Choix de la démarche	4
2.2	Mesure du cylindre	4
2.3	Mesure de la sphère	5
3	Présentation des calculs	6
3.1	Résultat	6
3.2	Calcul	7
	Annexe	8

1 Définition des objectifs, métriques et contraintes

Le mardi 6 septembre 2016 entre 13h45 et 16h35 dans le cadre du cours Projet de conception en Génie Physique, à l'École Polytechnique de Montréal, et sous le format d'une compétition, chaque équipe a été commandée à concevoir une méthode de mesure afin de résoudre le problème suivant : À l'intérieur d'un carré de $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ se trouvent disposés une boîte en carton, un cylindre et un ballon de football. Leurs dimensions ainsi que leurs dispositions nous sont inconnues.

1.1 Objectifs

L'objectif principal est de développer une méthode qui permettra de déterminer les dimensions de ces objets ainsi que leurs positions par rapport à l'origine. Cette méthode devra atteindre les objectifs secondaires suivants :

- *Précision* : La méthode doit nous permettre de récupérer des mesures avec la plus petite imprécision.
- *Exactitude* : La méthode doit permettre d'obtenir des mesures proches des valeurs réelles.
- *Rapidité* : La méthode doit être établie dans le temps alloué, et les mesures concernant la boîte en carton et le cylindre doivent être priorisées.
- *Originalité* : La méthode doit combiner des connaissances en sciences et en mathématiques ainsi qu'une utilisation moins commune des objets.

1.2 Définition des métriques

TABLE 1 – Incertitude dans les Mesures (Précision et exactitude)

Degré de réussite	Mesure	Description
Succès complet	$\pm 2\text{ mm}$	Si l'objet avait été mesuré directement
Bon	$\pm 1\text{ cm}$	Erreurs associées uniquement à des mesures indirectes
Acceptable	$\pm 5\text{ cm}$	Erreurs associées à des mesures indirectes, à l'observateur et aux manipulations
Échec	$\pm 10\text{ cm}$	Les mesures des objets sont comparables à de mesures prises à l'oeil

TABLE 2 – Rapidité

Degré de réussite	Description
Succès complet	Les trois objets ont été mesurés
Bon	La boîte et le cylindre ont été mesurés
Acceptable	Un seul objet a été mesuré
Échec	Aucun objet a été mesuré

TABLE 3 – Originalité

Degré de réussite	Description
Succès complet	Utilisation d'une variété d'objets de mesures moins courants et combinaison de ceux-ci à différentes fins
Satisfaisant	Utilisation de deux ou trois objets de mesures différents afin de satisfaire aux équations simples choisies
Insatisfaisant	Choix d'une méthode prévisible et employée par de nombreuses autres équipes

1.3 Définition des contraintes

Le temps alloué à la conception de la méthode ne doit pas dépasser 60 minutes. Du côté de la période de prise de mesures, les contraintes sont les suivantes :

- Aucun objet de mesure ne pénètre dans le carré
- Aucune mesure directe (pas de marquage de ficelle ou d'objet quelconque pour mesurer directement la distance du bord d'un objet aux limites du carré)
- Ne pas déplacer les objets
- Ne pas dépasser les 15 minutes

1.4 Description révisée du problème

Élaborer une méthode de mesure qui permettra de déterminer les dimensions de trois objets (une boîte en carton, un cylindre et un ballon de football) demeurant à l'intérieur d'un carré de 3mx3m, ainsi que leurs positions relatives à un des coins du carré. Un maximum de mesures doit être pris en un temps limité de 15 minutes, et celles-ci doivent être le plus précises et exactes possible. Nous devons faire preuve de créativité en rédigeant cette méthode et en choisissant judicieusement les formules mathématiques appropriées ainsi que les outils à notre disposition. Lors des mesures, il faut aussi assurer la sécurité de tous.

2 Développement et évaluation des méthodes

2.1 Mesure de la boîte

2.1.1 Loi des sinus à l'aide du pointeur laser

La première méthode suggérée consistait à utiliser un pointeur laser positionné à un coin du carré, afin de calculer un angle formant un triangle ayant pour base un des côtés de la zone de mesure (3 m). L'opération est répétée avec un second coin pour obtenir les angles α et β nécessaires tel que démontré à la figure 1.

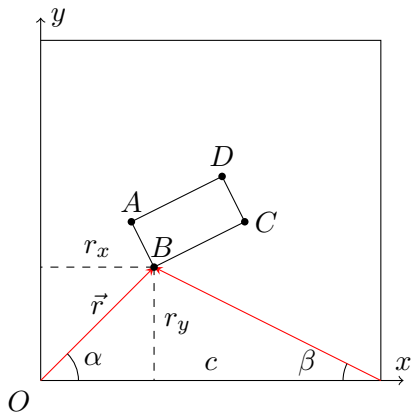


FIGURE 1 – Exemple des mesures de la position d'un des coins du rectangle avec la méthode utilisant les pointeurs lasers

La loi des sinus permet de déterminer le coté d'un triangle à l'aide de deux angles et d'un autre coté. Soit l'angle α et β de la figure précédente, ainsi que la mesure d'un coté c , alors la loi des sinus stipule que

$$\frac{\sin \beta}{\|\vec{r}\|} = \frac{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)}{c}, \quad (1)$$

où $\|\vec{r}\|$ dénote la norme du vecteur représentant le laser partant d'un coin avec l'angle α . Avec $\|\vec{r}\|$ calculé, on peut déterminer les composantes x et y du point :

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \|\vec{r}\| \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

Avec les valeurs obtenues pour les trois coins, il est possible de calculer les dimensions (ou le quatrième point) de la base rectangulaire avec une combinaison linéaire. Soit un triangle ABC inscrit dans un rectangle ABCD, alors \vec{OD} peut être écrit en terme d'une combinaison linéaire telle que

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BA} + \vec{BC}. \quad (3)$$

Quant à la hauteur de la boîte, elle sera mesurée en élevant un laser placé sur une table à ciseaux.

Les avantages de cette méthode s'avèrent la présence d'une valeur à incertitude négligeable (les côtés de 3 mètres) dans les calculs ainsi que l'utilisation des lasers qui ajoutent à l'originalité de la méthode. De plus, les lasers éliminent totalement les chances de déplacer les objets, ce qui pourrait fausser les résultats.

Les désavantages sont reliés à la manipulation du laser qui peut être difficile. Quant aux calculs, l'utilisation des équations contenant des fonctions trigonométriques peuvent rapidement augmenter les incertitudes des résultats.

2.1.2 Formule de Pythagore à l'aide de bâtons

En utilisant des bâtons, il est possible d'aller chercher une ligne perpendiculaire à un coté de la zone allant jusqu'à un coin d'une boîte. Il est donc possible d'obtenir une composante en mesurant la distance de la ligne jusqu'au coin de la zone le plus près. À l'aide des bâtons une fois de plus, l'angle partant du même coin de la zone vers le coin de la boîte peut être mesuré.

Avec ces mesures, on obtient une cathète r_x et un angle α d'un triangle rectangle partant tout les deux d'un coin, comme le montre la figure 2. L'autre cathète r_y peut donc être calculée à partir de la formule

$$\tan \alpha = \frac{r_y}{r_x}. \quad (4)$$

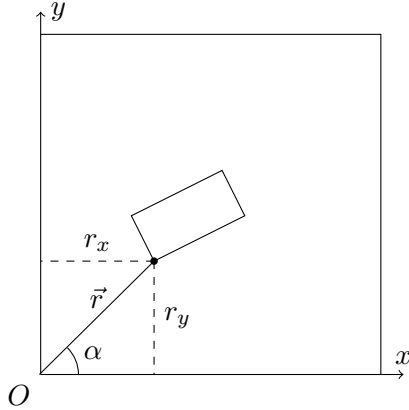


FIGURE 2 – Exemple des mesures de la position d'un des coins du rectangle avec la méthode utilisant les bâtons

En appliquant cette procédure pour 3 points, il sera également possible de calculer les dimensions de la base rectangulaire de la boîte en utilisant une combinaison linéaire comme (3).

Quant à la hauteur de la boîte, elle sera mesurée en élevant un bâton placé sur une table à ciseaux. Durant les manipulations, un équerre sera employé pour s'assurer de l'angle droit formé entre le bâton et la règle de mesure.

Les dimensions de la boîte seront déduites comme suit : la hauteur sera mesurée avec la règle et les cotés seront calculés en utilisant la formule de Pythagore avec les points calculées.

L'avantage de cette technique tient à la manipulation facile des règles. Les désavantages sont le danger de déplacer les objets avec les règles. De plus, la fonction $\tan \alpha$ est la fonction trigonométrique engendrant la plus grande erreur si on la considère avec les deux autres plus utilisées : $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

2.1.3 Choix de la démarche

La méthode prenant en compte la loi des sinus l'emporte, notamment car l'incertitude amenée par ses équations est inférieure en raison de la mesure précise des cotés de la zone ainsi que de l'utilisation du $\sin \alpha$ au lieu du $\tan \alpha$.

L'utilisation d'un pointeur laser évite également tout soucis quant au déplacement accidentel des objets, ce qui pourrait entraîner une disqualification immédiate. Cet outil nous emmène à élaborer une méthode plus originale que celles, plus courantes, qui requièrent l'utilisation directe de certains instruments géométriques (règles, équerres).

2.2 Mesure du cylindre

Une seule méthode a été considérée afin de résoudre le problème, en raison du court temps alloué aux remue-ménages. De plus, cette première méthode évaluée semblait déjà simple, rapide et efficace. Pour les mêmes raisons que dans la situation de la boîte, le pointeur-laser a été mis de l'avant par rapport aux bâtons, d'autant plus que nous nous y serions déjà familiarisés en mesurant la boîte.

Les valeurs recherchées pour le cylindre étaient les suivantes : le centre (x, y) , la hauteur et le diamètre de sa base. Puisque la courbe de niveau du cylindre dans le plan XY (le plancher) est un cercle, alors cette partie du problème devient donc d'identifier le centre du cercle ainsi que son diamètre. La hauteur sera calculée à part.

En utilisant une équerre, il est possible de placer un laser perpendiculairement à l'axe des x . Ceci nous permet d'obtenir deux tangentes $x = x_1$ et $x = x_2$ délimitant le cercle par rapport à l'axe des x comme le montre la figure 3.

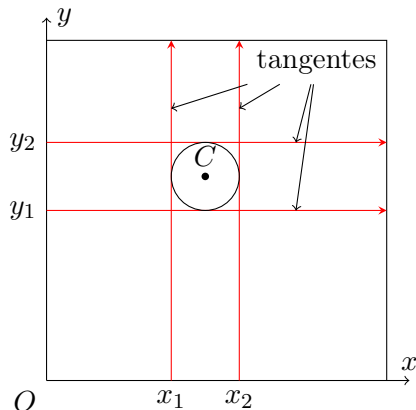


FIGURE 3 – Exemple des lignes obtenues avec le laser. Elles sont tangentes au cercle et perpendiculaire à l'extrémité de la zone.

En pratique, le laser est déplacé de l'origine vers les abscisses positives. Lorsque le point du laser apparaît sur le cylindre, la mesure x_1 peut être prise sur l'extrémité de la zone. Le laser continue à être déplacé horizontalement jusqu'à sa disparition afin de mesurer x_2 .

Puisque les deux points du cercle ayant pour abscisse x_1 et x_2 sont aux extrémités du diamètre horizontal, alors la composante du centre C_x est obtenue avec la moyenne

$$C_x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (5)$$

Le même processus est répété sur l'axe des y afin de trouver la composante C_y du centre du cercle. Pour la même raison mentionnée plus haut, le diamètre d du cercle peut être calculé avec la différence des deux valeurs

$$d = |x_1 - x_2|. \quad (6)$$

Pour mesurer la hauteur du cylindre, le pointeur laser a été déposé sur une table à ciseaux afin de soulever ce dernier jusqu'à ce que le laser disparaisse de la surface supérieure du cylindre, indiquant ainsi la hauteur de l'objet. En mesurant la hauteur du laser sur la table à ciseaux, on obtient donc la hauteur du cylindre.

Cette méthode permet de vérifier les mesures d'abscisses et d'ordonnées du cylindre. Puisque le diamètre peut être calculé de deux manières, avec les abscisses ainsi qu'avec les ordonnées, il est possible de vérifier la concordance des données en calculant le diamètre des deux façons et en vérifiant l'égalité entre les deux.

2.3 Mesure de la sphère

Une seule méthode fut développée pour mesurer la sphère. En déposant le pointeur laser sur une table à ciseaux, ce dernier peut être ajusté à la hauteur du rouleau qui stabilise la sphère. La même technique développée dans la section 2.2 est appliquée pour déterminer le centre et la hauteur du rouleau.

En prenant une perspective du problème par rapport au plan XZ , on remarque que l'extrémité de la courbe de niveau du rouleau est un rectangle. Par le fait même, on a déjà les coordonnées des coins supérieurs A et B , car leurs composantes en x sont équivalentes à la position en x des tangentes mesurées pour le centre et leurs composantes en z se trouvent à être la hauteur du cylindre.

Il est possible d'obtenir un troisième point placé sur la circonférence de l'extrémité de la courbe de niveau de la sphère. En montant à partir de l'un des coins A ou B , on peut déterminer la hauteur du point C lorsque le laser disparaît de la sphère.

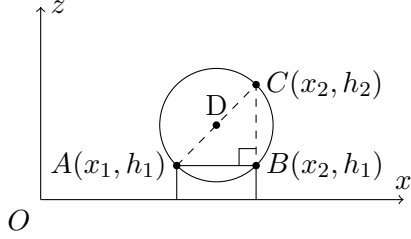


FIGURE 4 – Les points A , B et C obtenus avec les mesures, où h_1 est la hauteur du rouleau et h_2 la hauteur mesurée en montant à partir du point B .

Le triangle ABC inscrit dans le cercle de la sphère est nécessairement rectangle. Selon le théorème de Thalès, la norme du vecteur \overrightarrow{AC} est équivalente au diamètre de la sphère.

Puisque le centre du rouleau est directement sous le centre de la sphère, les coordonnées x et y du centre du rouleau sont les mêmes pour le centre de la sphère. La composante z manquante peut être calculée en faisant la moyenne des hauteurs h_1 et h_2 , ou encore en l'obtenant de la combinaison linéaire

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{2} \hat{u}_{AC}, \quad (7)$$

où \hat{u}_{AC} est le vecteur unitaire partant du point A vers le point C .

3 Présentation des calculs

3.1 Résultat

Avec les mesures recueillies, il a été possible de calculer les positions des points par rapport à l'origine et les mesures des objets tel que démontré à la prochaine table.¹

TABLE 4 – Positions et Mesures

Objet	Coordonnée	x (m)	y (m)	Mesure	Valeur (m)
Boite	Point A	$0,9 \pm 0,1$	$1,8 \pm 0,2$	Largeur	$0,7 \pm 0,4$
	Point B	$1,0 \pm 0,2$	$1,2 \pm 0,1$	Longueur	$0,5 \pm 0,4$
	Point C	$1,5 \pm 0,2$	$1,3 \pm 0,1$	Hauteur	$0,5 \pm 0,4$
	Point D	$1,4 \pm 0,4$	$1,9 \pm 0,4$		
Cylindre	Centre	1.96 ± 0.02	2.05 ± 0.02	Diamètre	0.1 ± 0.1
				Hauteur	0.07 ± 0.05

Au-delà du choix de la méthode, d'autres facteurs ont influencé avec la précision et l'exactitude des résultats, notamment au niveau de l'exécution de celle-ci. Un problème de communication entre les membres de l'équipe a engendré une confusion au niveau de la prise de notes, diminuant le temps alloué à celle-ci. De plus, le pointeur laser était mal calibré au départ. Par conséquent, une partie du temps a été consacré à une réorientation grossière de ce dernier et l'élaboration d'une échelle de grandeur pour orienter nos mesures. Finalement, le partage du matériel avec l'autre équipe a empêché l'utilisation du seul grand équerre disponible, ce qui aurait permis davantage de précision quant à l'alignement du pointeur laser.

L'agrégation de ces points a fait en sorte que les incertitudes sur nos mesures sont assez grandes, comme le montre le tableau A dans l'annexe.

1. Tous les calculs furent exécutés symboliquement dans un programme et ne sont pas sujet aux arrondissements des valeurs intermédiaires comme les exemples de cette section.

3.2 Calcul

Les coordonnées des points A, B et C furent calculées à l'aide de (2). Si on prend le point B de la figure 1 comme exemple, les composantes sont données par

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c \sin \beta \cos \alpha}{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)} \\ \frac{c \sin \beta \sin \alpha}{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,000 \sin 31 \cos 49^\circ}{\sin (180^\circ - 49^\circ - 31^\circ)} \\ \frac{3,000 \sin 31 \sin 49^\circ}{\sin (180^\circ - 49^\circ - 31^\circ)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,2 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad (8)$$

Afin d'obtenir l'incertitude sur les calculs, on utilise la méthode des dérivées partielles sur B_x et B_y

$$\begin{bmatrix} \delta B_x \\ \delta B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial B_x}{\partial \alpha} \right| \delta \alpha + \left| \frac{\partial B_x}{\partial \beta} \right| \delta \beta + \left| \frac{\partial B_x}{\partial c} \right| \delta c \\ \left| \frac{\partial B_y}{\partial \alpha} \right| \delta \alpha + \left| \frac{\partial B_y}{\partial \beta} \right| \delta \beta + \left| \frac{\partial B_y}{\partial c} \right| \delta c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad (9)$$

Puisque le point D ne fut pas mesuré directement, il faut le calculer à l'aide de la combinaison linéaire en (3). Cette combinaison se simplifie à

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x + A_x - B_x \\ C_y + A_y - B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 + 0,9 - 1,0 \\ 1,3 + 1,8 - 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,9 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (10)$$

et l'incertitude est donné par

$$\begin{bmatrix} \delta D_x \\ \delta D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta A_x + \delta B_x + \delta C_x \\ \delta A_y + \delta B_y + \delta C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 + 0,2 + 0,2 \\ 1,2 + 1,1 + 1,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,4 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad (11)$$

Les hauteurs ne requièrent pas de traitement, car elles ont été mesurées directement. La largeur et la longueur furent obtenues en calculant respectivement la norme de \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} , comme

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} \approx \sqrt{(0,9 - 1,0)^2 + (1,8 - 1,2)^2} = 0,60 \text{ m,} \quad (12)$$

et leurs incertitudes avec les dérivées partielles. Finalement², les coordonnées (x, y) du cercle et son diamètre d furent obtenus avec les tangentes comme à la figure 3 :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = x_2 - x_1. \quad (13)$$

2. Étant donné la simplicité de ces équations et de leur incertitude, les calculs furent omis.

Annexe

TABLE A – Mesures Brutes

	Angle ($^{\circ}\pm 3$)		Mesure ($m\pm 0,05$)
$\angle C_3C_1A$	26	Hauteur de la boîte	0,38
$\angle C_1C_3A$	38	Hauteur du cylindre	0,07
$\angle C_2C_1B$	49	Extrémité x_1 du cylindre	1,93
$\angle C_1C_2B$	31	Extrémité x_2 du cylindre	1,98
$\angle C_2C_1C$	40	Extrémité y_1 du cylindre	2,03
$\angle C_1C_2C$	41	Extrémité y_2 du cylindre	2,07