



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Фортова, Численное моделирование трехмерного течения Колмогорова для сдвигового слоя, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2013, том 53, номер 3, 433–441

DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466913030058>

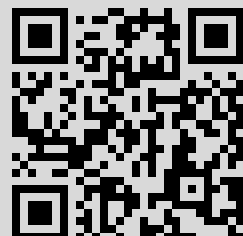
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.91.253.238

4 марта 2020 г., 14:56:55



УДК 519.634

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ СДВИГОВОГО СЛОЯ¹⁾

© 2013 г. С. В. Фортова

(123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)

e-mail: fortova@icad.org.ru

Поступила в редакцию 05.04.2012 г.

На основе численного моделирования изучается течение Колмогорова для сдвигового слоя сжимаемой невязкой среды. При наличии постоянного внешнего воздействия на течение в виде периодической силы обнаружен вихревой каскад неустойчивостей. Изучается влияние размера расчетной области, начальных условий и интенсивности воздействия на возникновение каскада неустойчивостей и переход течения в турбулентное. Показано, что механизм зарождения турбулентности имеет принципиально трехмерную природу. Для полученных турбулентных течений на инерционном интервале выполняется классический закон $-5/3$ Колмогорова. Библ. 24. Фиг. 4.

Ключевые слова: течение Колмогорова, пространственные течения, сжимаемая невязкая жидкость, возникновение турбулентности, каскад неустойчивости, энергетический спектр, численное моделирование.

DOI: 10.7868/S0044466913030058

ВВЕДЕНИЕ

Важными ориентирами в развитии исследований сложного универсального явления природы — турбулентности — являются учение и идеи А.Н. Колмогорова (см. [1]). Им были сформулированы основные положения теории локальной структуры развитого турбулентного потока, основанные на каскадной модели, содержащей достаточно большое число “ярусов”, характеризующихся последовательностью масштабов — от больших (сравнимых с характерным размером системы) до малых (порядка внутреннего масштаба): $\lambda_k = \sqrt[4]{\nu^3/\varepsilon}$, определяемого кинематической вязкостью ν и средней диссипацией энергии на единицу массы ε . На основе экспериментально-го материала Колмогоровым были сделаны следующие выводы:

- 1) при уменьшении вязкости ламинарные решения становятся обычно неустойчивыми;
- 2) при вязкости, стремящейся к нулю, настолько сильно уменьшается гладкость практически наблюдаемых решений, что порядок диссипации энергии на единицу массы зависит только от типичных скорости, длины и не зависит от вязкости.

На основании этих выводов была высказана гипотеза, что при малой вязкости должно существовать турбулентное решение. Для изучения данной проблемы в 1959 году Колмогоров (см. [2]) предложил простейшую модель — двумерное движение вязкой жидкости, возникающее под действием периодического (по одной из координат) поля внешней силы. Решение об устойчивости такого потока было дано в [3]. Здесь был доказан факт потери устойчивости ламинарного течения относительно простых периодических возмущений с большой длиной волны вдоль течения. При этом турбулентные режимы течения обнаружены не были. В 1979 году была реализована физическая модель в лабораторных условиях на основе применения “магнитогидродинамического привода”, позволившего создать в слабо проводящей жидкости периодического поля внешней силы Ампера (до $I = 3$ А) (см. [4]). Но и в этом эксперименте были получены лишь автоколебательные режимы течения.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы Президиума РАН № 14, РФФИ (код проекта 06-01-00558), Мин. образования и науки РФ (соглашение 8213, 8836).

Задаче о нелинейном развитии возмущений и возникновении вторичных стационарных или периодических течений при потере устойчивости плоского ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости посвящены работы [5], [6]. Экспериментальные исследования плоского периодического течения (см. [7]) подтверждают эти результаты.

Вопрос о существовании устойчивых автоколебательных режимов вторичного течения в двумерном случае подробно изучен в [8]. Численный анализ решения показал существование критического числа Рейнольдса Re_{kp} , при переходе через которое ламинарный режим становится неустойчивым и появляется вторичное стационарное течение.

Таким образом, проведенные ранее исследования указывают на то, что в двумерном случае получить турбулентные режимы течения не удалось. Целью данной работы является попытка ответить на вопрос, как изменится картина течения при введении третьей координаты. Для этого на основе численного моделирования изучается течение Колмогорова для сдвигового слоя сжимаемой невязкой среды.

Как известно (см. [9]), при больших числах Re в однородном турбулентном потоке присутствуют пульсационные движения с широким спектром. При этом значительную роль играют крупномасштабные пульсации, содержащие в себе основную часть энергии турбулентного потока. Мелкомасштабные пульсации, соответствующие большим волновым числам, тоже участвуют в движении, но в них заключена лишь меньшая часть всей кинетической энергии потока. От крупномасштабных движений непрерывным каскадом идет энергетическая подпитка движений с большими волновыми числами, и в итоге — непрерывная диссипация энергии в тепло (см. [9], [10]). Согласно модели Колмогорова (см. [1]), при достаточно больших числах Re должен существовать промежуточный интервал волновых чисел (инерционный интервал), в котором энергия не генерируется и не диссипирует, а передается к большим волновым числам. Для инерционного интервала из соображений подобия были выведены следующие оценки для распределения энергии пульсационного движения $E(k)$ (см. [1]) поля скорости:

$$E(k) \approx \Theta^{2/3} k^{-5/3},$$

где k — волновое число, Θ — скорость диссипации энергии на единицу массы.

Данное уравнение называется законом $-5/3$ и выполняется для любой турбулентной задачи на инерционном интервале (см. [11], [12]). Для различных турбулентных течений экспериментально доказано существование инерционного участка. В [13] представлены спектры плотности энергии $E_1(k)$ пульсаций продольных составляющих скорости для различных турбулентных течений: отливной канал, круглая струя, течение в трубе, турбулентность за сеткой, след за цилиндром, где

$$\int_0^\infty E_1(k) dk = \langle u'^2 \rangle,$$

$$\Phi = E_1(\Theta v^3)^{-1/4}$$

— безразмерная спектральная плотность, Θ — местная скорость диссипации энергии, v — кинематическая вязкость, $K_k = (\Theta v^3)^{-1/4}$ — волновое число Колмогорова (колмогоровский масштаб). Если построить зависимость спектра энергии от волновых чисел, то именно на инерционном участке график совпадает с линией с наклоном $-5/3$. Волновое число, соответствующее точке перехода от инерционного участка к участку диссипации, называется *колмогоровским масштабом*. Для течения с волновыми числами, меньшими этого масштаба, вязкостью можно пренебречь. Однако если волновые числа становятся сопоставимыми с колмогоровским масштабом, вязкость играет уже существенную роль. Еще одним ярким подтверждением предположений Колмогорова стали опытные данные, полученные при изучении крупномасштабной турбулентности в океане и атмосфере. Спектр, полученный в проливе возле о. Ванкувер с помощью буксируемых судном измерительных приборов, удивительно точно ложится на прямую с наклоном $-5/3$ (см. [14]). Существуют и другие экспериментальные подтверждения данного закона. Например, в [15] на многофункциональной ударной трубе с помощью методики “лазерный лист” получены спектральные и статистические характеристики зоны перемешивания, которые также соответствуют закону $-5/3$ Колмогорова.

Изучение механизма потери устойчивости различных гидродинамических моделей (сдвиговое течение, течение Колмогорова) способствует лучшему пониманию кинематики процессов

взаимодействия вихревых структур различных масштабов. Поэтому построение гидродинамических моделей, позволяющих проанализировать турбулентный каскад, представляет интерес как с теоретической, так и с практической стороны. Рассматриваемые в данной работе модели являются типичными представителями переходных и турбулентных режимов, таких как струйные движения в следе за движущимся телом, движения корпусов кораблей с кормовым срезом и др. Для расчета течения в непосредственной близости от движущегося тела используются модели, учитывающие вязкие эффекты и описываемые уравнениями Навье—Стокса (см. [16]). Свободно развитая сдвиговая турбулентность чаще всего появляется в слоях смешения, где из-за наличия больших градиентов скоростей влияние вязкости и стенок на общие характеристики макроструктур течения малосущественно. Это позволяет не учитывать эффекты молекулярной вязкости и исследовать динамику течения на базе моделей идеальной среды, а именно уравнений Эйлера (см. [16]).

В настоящее время развиты различные подходы к исследованию вихревых каскадов (см. [17], [21]). В [17] на основе численного решения уравнений Навье—Стокса авторами предложено развитие турбулентности в сдвиговом слое с учетом вязкости. Однако, как показали расчеты, при высоких числах Рейнольдса ее влияние при формировании вихревого движения незначительно. В [18], [19] изучен переход к турбулентности для трехмерного плоского слоя смешения через неустойчивость Кельвина—Гельмгольца. К 2005 г. на основе решения уравнений идеальной среды, т.е. без учета влияния вязких эффектов, были получены вихревые каскады сдвиговой неустойчивости для течения при большом градиенте сдвиговой скорости и случайном поле скоростей в узкой полосе возмущений в начальный момент времени (см. [20]). В [21] авторам удалось получить аналогичное турбулентное течение при условиях уже детерминированного возмущения скорости в виде одной моды Фурье. Анализ показал наличие каскада неустойчивостей, которые появляются в виде более мелких вихревых колец, возникающих на более крупном вихревом кольце предыдущей неустойчивости.

Достаточно хорошо изученный механизм формирования вихревого каскада в трехмерном сдвиговом слое дает ответы лишь на часть вопросов, возникающих при изучении начальных стадий турбулентных движений: определены критические размеры расчетных областей и начальные условия, приводящие к потере устойчивости потока.

В связи с тем что трехмерные течения сложны, разнообразны и часто теряют свою устойчивость (см. [17], [21]), целью данного исследования является изучение пространственного течения Колмогорова для свободного сдвигового слоя.

1. ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА

Ввиду чрезвычайной сложности и нелинейности турбулентных течений адекватным инструментом их изучения является численное моделирование (см. [8], [10]). В настоящее время существующее многообразие численных методов, обладающих удовлетворительной точностью и надежностью, позволяет рассчитать только определенные классы турбулентных течений. Каждый метод имеет свою область применимости, свои достоинства и свои недостатки. Для изучения эволюции крупномасштабных образований была проведена большая серия вычислительных экспериментов (см. [17], [21]). Основанные на ставшей классической концепции О.М. Белоцерковского о прямом численном моделировании, не требующей введения подсеточной турбулентности (см. [10]), для расчетов крупномасштабных течений хорошо себя зарекомендовали монотонные диссипативно-устойчивые разностные схемы с положительным оператором (см. [22]). Эти схемы имеют второй порядок точности на гладких решениях и, являясь монотонными, не используют ни искусственную вязкость, ни сглаживание, ни процедуры ограничения потока (flux limiter), часто применяющиеся в современных схемах вычислительной динамики жидкости.

В данной работе численное моделирование было выполнено на основе технологии параллельного программирования MPI с использованием монотонной диссипативно-устойчивой разностной схемы. Для расчетов использовались равномерные сетки с количеством ячеек $100 \times 100 \times 100$ и $200 \times 200 \times 200$. На основе данной схемы была проведена большая серия вычислительных экспериментов (см. [17], [21]), посвященных двумерному и трехмерному численному моделированию неустойчивостей. Они позволяют достаточно полно интерпретировать натурный эксперимент и с хорошей точностью объясняют многие важные особенности течения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для численного исследования используется модель сжимаемого невязкого газа. Исходной для построения численных схем расчета является полная система уравнений Эйлера с правой частью, записанная в декартовых координатах в дивергентной форме (см. [10], [16]). Это уравнения для плотности среды:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

уравнения для трех компонент плотности импульса:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho \operatorname{ampl} \sin(z),$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$

и уравнение для плотности полной энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho E + P) \mathbf{V}) = -\rho u \operatorname{ampl} \sin(z) - \rho g w.$$

Здесь t — время, (x, y, z) — координаты; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости; ρ — плотность; $E = e + \mathbf{V}^2/2$ — удельная полная энергия и e — удельная внутренняя энергия; ampl — интенсивность внешнего воздействия, g — сила тяжести. Для замыкания системы уравнений требуется уравнение состояния. В данной работе во всех расчетах используется уравнение состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\rho e$.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается возникновение турбулентности в трехмерном сдвиговом слое сжимаемой невязкой среды. В качестве расчетной области используется трехмерный параллелепипед в прямоугольной системе координат XYZ . Размеры области $X : 0 \leq x \leq L_x$; $Y : 0 \leq y \leq L_y$; $Z : 0 \leq z \leq L_z$, $0 \leq L_x, L_y, L_z \leq 2\pi$. Начальное возмущение компонент скорости внутри сдвигового слоя задается в виде одной моды:

$$u = 0.2 \sin(2\pi y) \cos(\pi z),$$

$$w = 0.2 \sin(2\pi y) \cos(\pi z).$$

В качестве граничных условий на верхней и нижней границе расчетной области были выбраны условия непротекания, на остальных — условия периодичности.

Исследуется эволюция структуры сдвигового течения с конечной в поперечном сечении областью постоянного ненулевого градиента скорости с высотой сдвигового слоя, равной 1 при наличии постоянной внешней силы.

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Представим процесс турбулентного перемешивания с энергетической точки зрения (см. [1], [23]): в развитом турбулентном потоке пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсациям более высоких порядков, энергия самых мелких пульсаций переходит в тепловую благодаря вязкости. Для анализа этого процесса интересно представление кинетической энергии в спектральном виде. Для этого разложим кинетическую энергию в двумерный интеграл Фурье. Кинетическая энергия, приходящаяся на единицу массы, может быть разложена в ряд по ортогональным гармоническим функциям (см. [23]).

Спектральное представление кинетической энергии рассматривается в середине области по вертикальной координате Z и имеет вид

$$E(x, y, z = \text{const}) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} [E^1(k_x, k_y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) + \\ + E^2(k_x, k_y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) + E^3(k_x, k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) + \\ + E^4(k_x, k_y) \sin(k_x x) \sin(k_y y)],$$

где E — кинетическая энергия, приходящаяся на единицу массы жидкости, k_x и k_y — проекции волновых векторов вдоль осей Ox и Oy соответственно, $E^i(k_x, k_y)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) — коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} E^1(k_x, k_y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, y, z = \text{const}) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\ E^2(k_x, k_y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, y, z = \text{const}) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy, \\ E^3(k_x, k_y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, y, z = \text{const}) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\ E^4(k_x, k_y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, y, z = \text{const}) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Величина

$$E(k_x, k_y) = \sqrt{[E^1(k_x, k_y)]^2 + [E^2(k_x, k_y)]^2 + [E^3(k_x, k_y)]^2 + [E^4(k_x, k_y)]^2} \quad (2)$$

является образом величины $E(x, y, z = \text{const})$ в пространстве волновых чисел.

Численно интегрируя (1), можно найти коэффициенты Фурье и, далее, вычисляя (2), получаем величину $E(k_x^i, k_y^j)$, зависящую только от волновых чисел k_x^i и k_y^j . Перебирая все k_x^i и k_y^j по обоим направлениям, получаем спектр кинетической энергии.

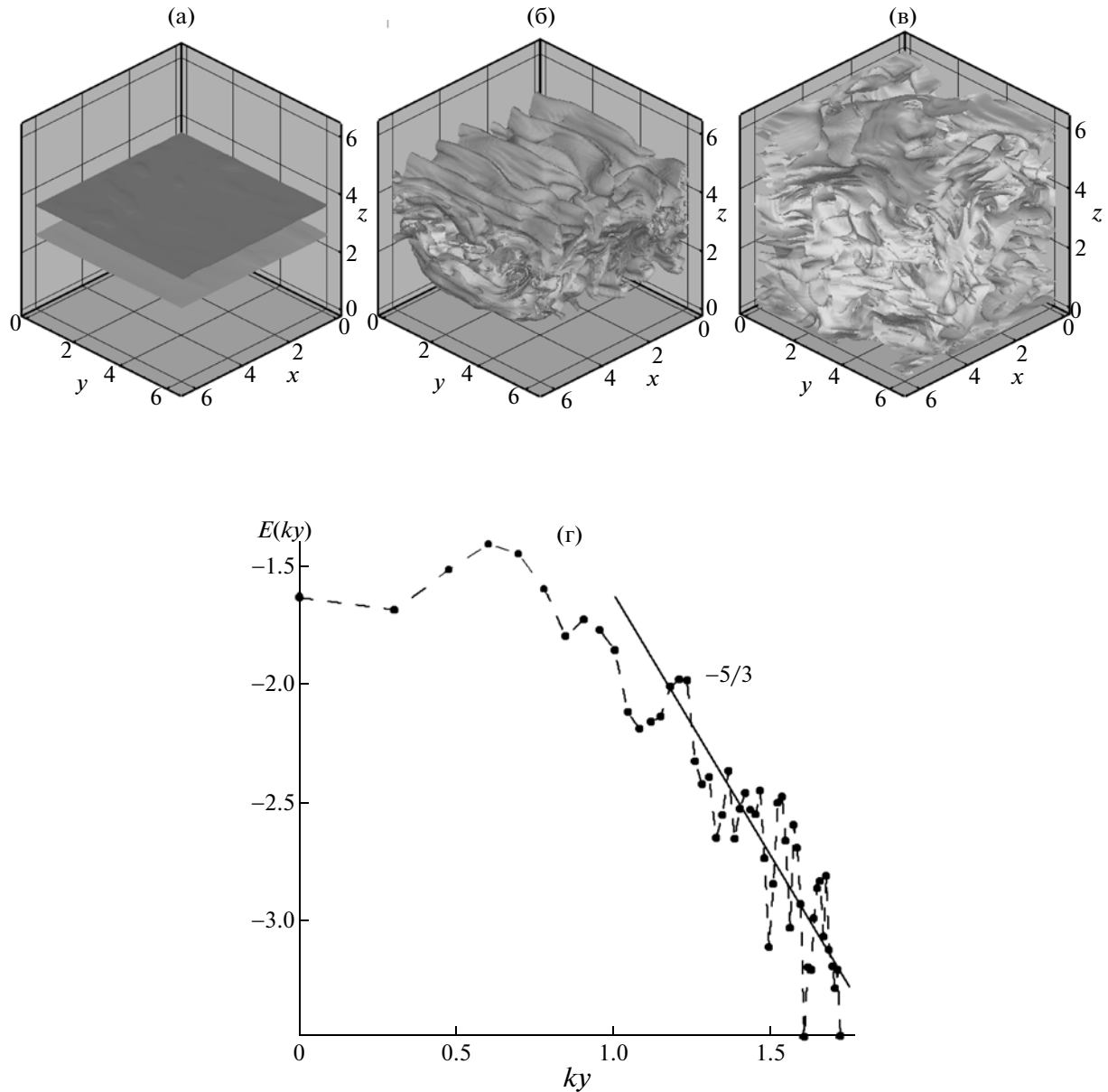
Спектральное представление кинетической энергии рассматривается в середине области по вертикальной координате.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Сравнение с задачей без воздействия внешней силы

В качестве физической модели развития турбулентности используется следующая (см. [10]): когда инерционные члены в уравнениях начинают преобладать над напряжениями, обусловленными вязкостью, силы, возникающие из поля давления, создают крупную структуру и в течении появляются вихри. Дальнейшее развитие течения заключается в эволюции крупных вихрей и в генерации ими высокочастотной части спектра. Основной задачей при этом является изучение общей динамики и природы развития турбулентного течения через вихревой каскад неустойчивостей.

Наличие постоянной внешней силы оказывает заметное влияние на формирование турбулентного потока по сравнению с задачей, где внешняя сила отсутствует (см. [21]). Ранее (см. [21]) начальный этап развития турбулентности состоял из формирования крупной структуры (аналогично двумерному случаю). Сначала возникало вторичное течение в виде вихревого рулона, плавно обтекаемого потоком. Затем в режиме реального времени рулон, как крыло, начинал обтекаться следующим вторичным течением из стопки вихревых жгутов, в которые сворачивается обтекающий “ламинарный” поток. В результате образовывался вихревой каскад неустойчивостей. В случае течения Колмогорова турбулентный поток формируется по-другому (фиг. 1). Силы, действующие внутри сдвигового слоя, как бы растягивают его в противоположных направлениях. В результате этого сдвиговый слой принимает вид гребенки, состоящей из нескольких



Фиг. 1. Вихревой каскад и спектр кинетической энергии для задачи Колмогорова.

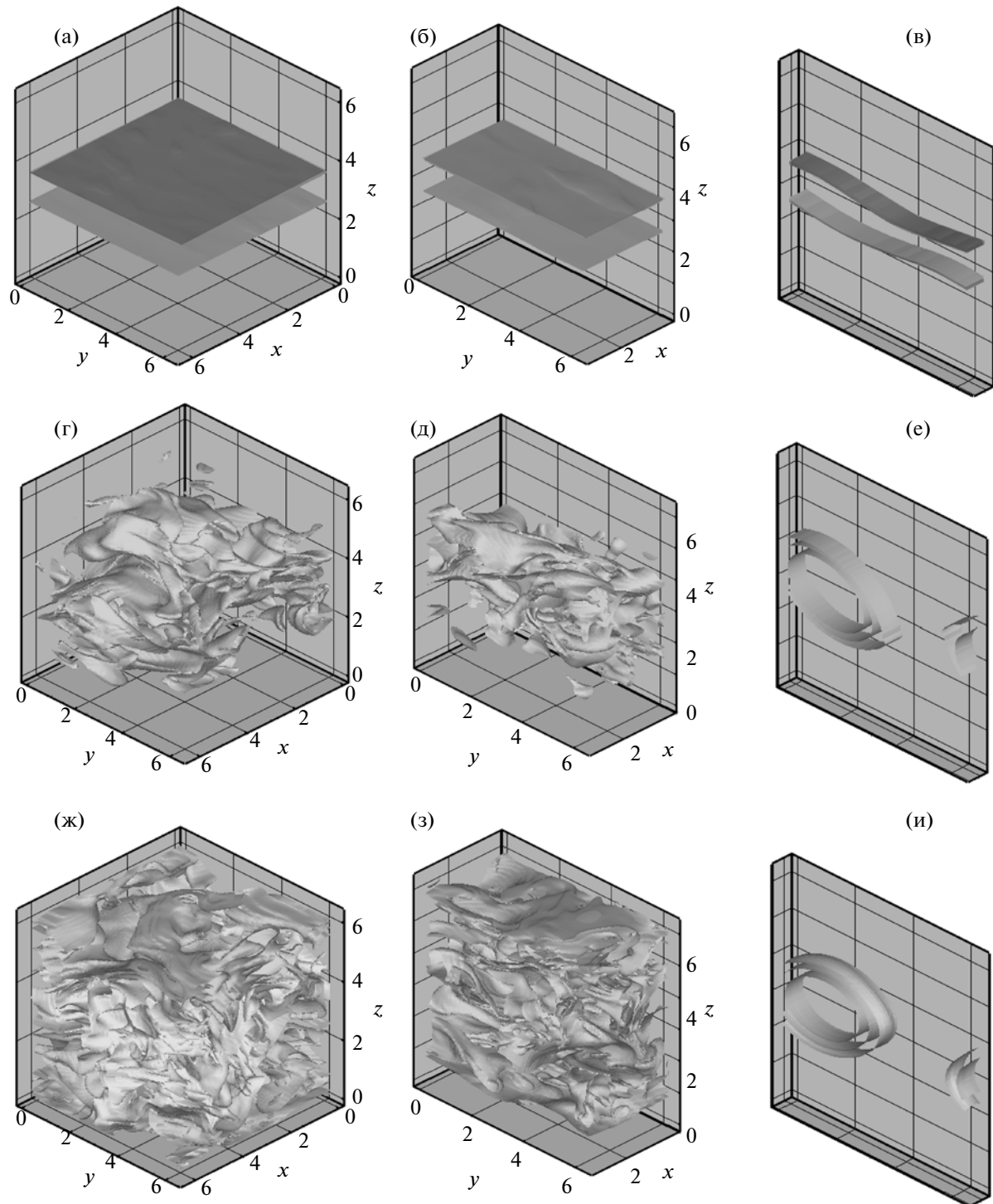
зубцов, которые постепенно увеличиваются в размерах и деформируются. Вторичные неустойчивости, появляющиеся на каждом из зубцов, со временем нарушают эту регулярную структуру, и течение переходит в турбулентную стадию.

5.2. Критические размеры области

Проанализируем влияние размеров расчетной области на развитие турбулентного течения в задаче Колмогорова.

Результаты численного моделирования в свободной сдвиговой двумерной теории показывают, что возникающие течения достаточно устойчивы (см. [5], [20]). Данные результаты подтверждаются и теоретическими исследованиями (см. [24]).

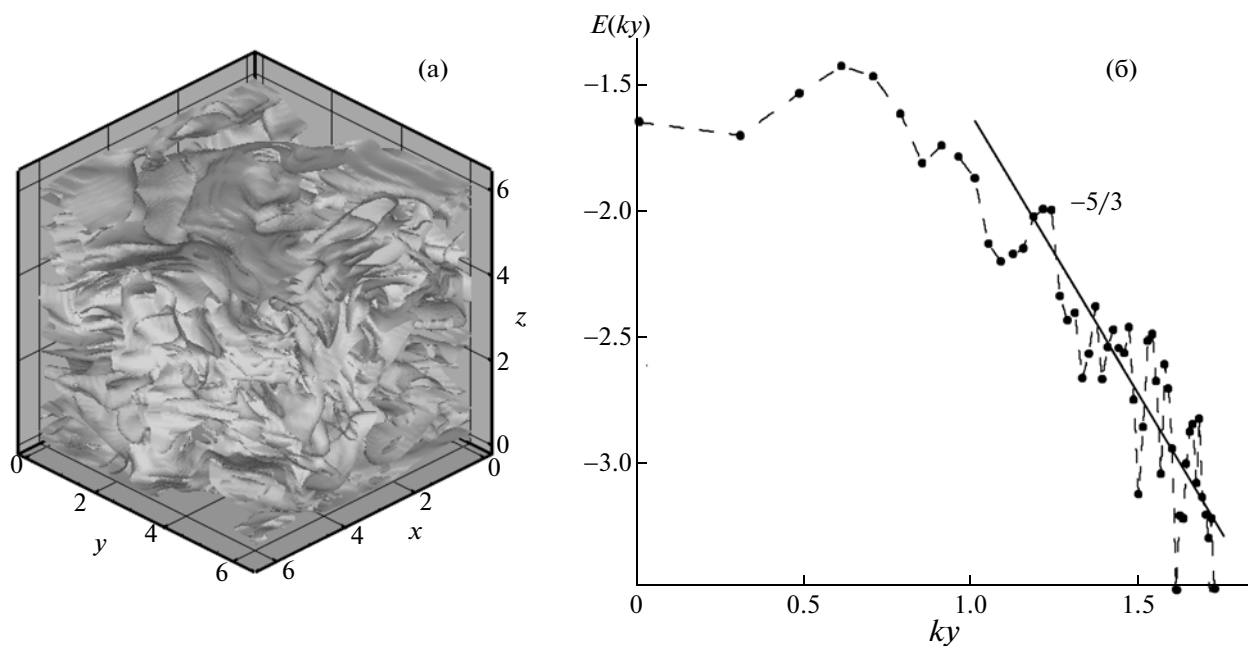
На фиг. 2 представлен сравнительный анализ влияния ширины области в направлении X . Размеры области уменьшались от 2π до $\pi/8$. Определены критические размеры: при $\pi/8 \leq Lx \leq 2\pi$ наблюдается распад течения и переход в турбулентное через каскад неустойчивости; при $0 \leq Lx \leq \pi/8$ образовавшаяся крупная структура устойчива во времени. Данный результат еще раз подтверждает факт отсутствия турбулентности в двумерном случае.



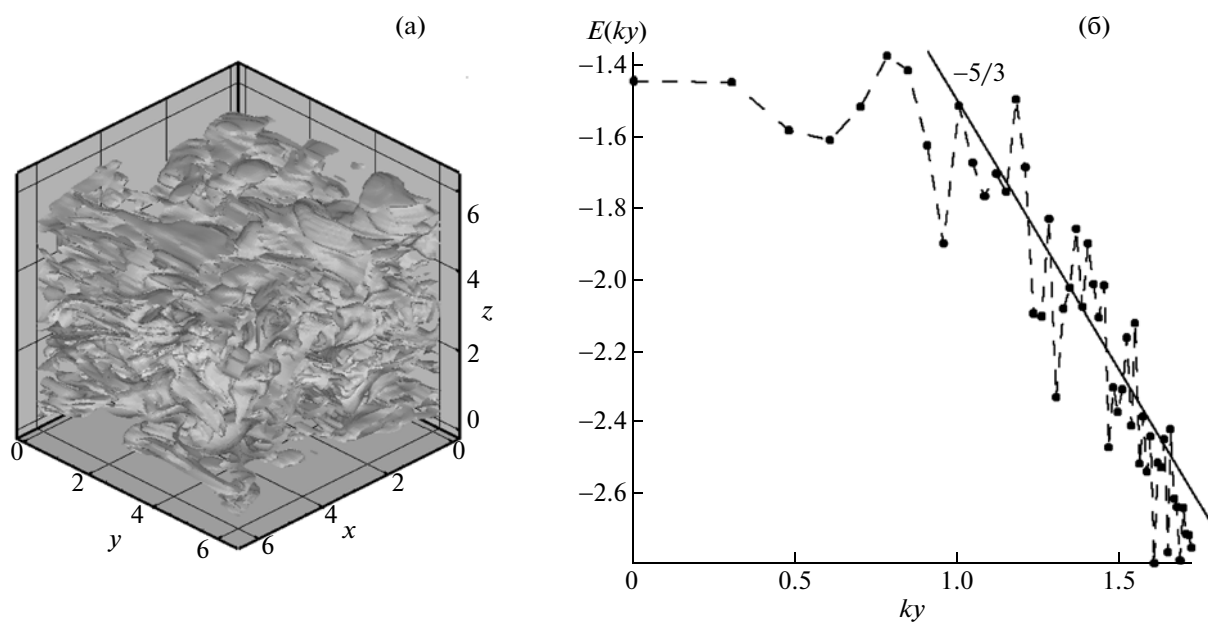
Фиг. 2. Исоповерхности условной концентрации. Моменты времени – 5, 7, 12 (сверху вниз). Протяженность сдвигового слоя в направлении $X - 2\pi, \pi, \pi/8$.

5.3. Влияние интенсивности воздействия

Исследовано влияние амплитуды воздействия внешней силы на формирование течения. Получено, что при изменении амплитуды ($\text{ampl} = 1, \text{ampl} = 3$) турбулентное течение формируется быстрее в случае большей амплитуды. На фиг. 3 и фиг. 4 можно наблюдать эволюцию течения при различных амплитудах воздействия: при $\text{ampl} = 3$ турбулентное течение уже сформировалось к моменту времени $t = 5$, в то время как течение с амплитудой в 3 раза меньше в тот же самый мо-



Фиг. 3. Изоповерхности условной концентрации и спектр кинетической энергии для течения с амплитудой воздействия $\text{ampl} = 1$ в момент времени $t = 15$.



Фиг. 4. Изоповерхности условной концентрации и спектры кинетической энергии для течения с амплитудой воздействия $\text{ampl} = 3$ в момент времени $t = 5$.

мент времени находится еще в начальной стадии формирования. Фактически, течение с большей амплитудой полностью перешло в турбулентную стадию к тому моменту времени, когда течение с меньшей амплитудой только начинает развиваться ($t = 7$). К моменту времени $t = 15$ оба течения находятся в турбулентной стадии. Одним из доказательств этого факта является соблюдение закона $-5/3$ Колмогорова.

6. ВЫВОДЫ

В данной работе изучается общая динамика и природа развития турбулентности, т.е. эволюция крупномасштабных образований и статистическое представление непрерывного потока

энергии по каскаду вихрей для задачи Колмогорова в трехмерной постановке. Прямым численным моделированием показано, что переход к хаосу осуществляется через вихревой каскад неустойчивости. Выявлены условия, при которых данный каскад возникает. Показано, что именно трехмерная постановка является решающей для возникновения турбулентности. Обнаружен инерционный участок спектра энергии и подтвержден закон $-5/3$ Колмогорова.

Автор выражает особую благодарность О.М. Белоцерковскому и О.В. Трошкину за проявленный интерес, всестороннюю поддержку и ценные замечания, касающиеся темы данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
2. Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д. Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958–1959). Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. № 1. С. 247–250.
3. Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Ж. прикл. матем. и механ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1140–1143.
4. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Геогр. и геофиз. 1941. Т. 5. № 4. С. 453–466.
5. Белоцерковский С.О., Миравель А.П., Чусов М.А. О построении закритического режима для плоского периодического течения // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1978. Т. 14. № 1. С. 11–20.
6. Юдович В.И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа. 1973. № 1. С. 32–35.
7. Бондаренко Н.Ф., Гак М.З., Должанский Ф.В. Лабораторная и теоретические модели плоского периодического течения // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1979. Т. 15. № 10. С. 1017–1026.
8. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент: от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000. С. 106–130.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953.
10. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002.
11. Обухов А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 4(232). С. 101–111.
12. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967.
13. Чепмен Д.Р. Вычислительная гидродинамика и перспективы ее развития: драйденовская лекция // Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т. 18. № 2. С. 3–32.
14. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001.
15. Кучеренко Ю.А. и др. Измерение спектральных характеристик зоны турбулентного перемешивания // Прикл. механ. и техн. физ. 2010. Т. 51. № 3. С. 3–13.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
17. Hoffman J., Johnson C. On transition to turbulence in shear flow. Prepr. 2000_4. Chalmers: Finit Element Center, 2002.
18. Rogers M.M., Moser R.D. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin–Helmholtz rollup // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 183–226.
19. Moser R.D., Rogers M.M. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence // J. Fluid Mech. 1993. V. 247. P. 275–320.
20. Belotserkovskii O.M., Chechetkin V.M., Fortova S.V., Oparin A.M. The turbulence of free shear flows // Proc. Intern. Workshop “Hot Points in Astrophysics and Cosmology”. Dubna, 2005. P. 191–209.
21. Белоцерковский О.М., Фортובה С.В. Макропараметры пространственных течений в свободной сдвиговой турбулентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1126–1139.
22. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
23. Трошкин О.В. Диссипативный волчок на слабокомпактной алгебре Ли и устойчивость основных течений в плоском канале // Докл. АН СССР. Механ. 2012. Т. 442. № 2. С. 1–6.
24. Inogamov N. Statistics of long-wavelength fluctuations and the expansion rate of Richtmyer–Meshkov turbulence zone // Jetp letters. V. 75. № 11. P. 547–551.