

# Формирование крупномасштабного когерентного вихря в двумерной турбулентности

А. В. Орлов<sup>+\*×1)</sup>, М. Ю. Бражников<sup>+</sup>, А. А. Левченко<sup>+</sup>

<sup>+</sup>Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

<sup>\*</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

<sup>×</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 2 ноября 2017 г.

После переработки 4 декабря 2017 г.

Экспериментально исследована эволюция вихревого течения, возбуждаемого электромагнитным методом в тонком слое проводящей жидкости. Мелкомасштабные вихри, возбуждаемые на масштабе накачки, вследствие нелинейности взаимодействия со временем сливаются и образуют крупномасштабные структуры – формируется обратный каскад энергии. Зависимость энергетического спектра в развитом обратном каскаде хорошо описывается законом Крайчнана  $k^{-5/3}$ . На крупных масштабах обратный каскад ограничивается размерами ячейки, и наблюдается формирование крупномасштабного когерентного вихревого течения, занимающего почти всю площадь экспериментальной ячейки. Впервые установлен радиальный профиль азимутальной скорости когерентного вихря сразу после выключения накачки. В сердцевине вихря азимутальная скорость растет линейно по радиусу и выходит на постоянное значение вне сердцевины, что хорошо согласуется с теоретическим предсказанием.

DOI: 10.7868/S0370274X18030049

**Введение.** Одна из ключевых проблем турбулентности – понимание процессов, связанных с природой средних (когерентных) течений. Понимание того, как устроены такие структуры и как они взаимодействуют с флуктуациями течения, важно для решения многих проблем в целом ряде областей – физике плазмы, атмосферы, геофизике, астрофизике и других. Когерентные структуры могут генерироваться как внешними силами, так и внутренними процессами в турбулентной системе, например, вследствие спектральной конденсации в обратном каскаде [1, 2].

В данной работе исследуется двумерная турбулентность в тонком слое жидкости, когда вертикальной компонентой скорости можно пренебречь по сравнению с компонентами скорости в горизонтальной плоскости. В двумерной турбулентности теория предсказывает возможность существования двух каскадов: прямого – со степенной зависимостью энергии от волнового числа  $E(k) \propto k^{-3}$  на больших волновых числах  $k$ , превосходящих характерное волновое число накачки  $k_f$ , и обратного каскада, направленного в сторону меньших  $k$ , с энергетическим спектром Крайчнана  $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ , где  $C$  – констан-

та Колмогорова,  $\epsilon$  – поток энергии в обратном каскаде [3–5]. Большая часть поступающей в систему энергии переносится по обратному каскаду и диссипирует на крупных масштабах, для которых существенны потери энергии за счет трения о дно.

В бесконечной среде обратный каскад ограничивается масштабом течения  $L_\alpha \sim \epsilon^{1/2}\alpha^{-3/2}$ , где  $\alpha$  – коэффициент трения о дно [3–5]. В ограниченной системе максимальный размер течения не может превышать размера системы  $L$ . Если размер системы меньше масштаба  $L_\alpha$ , то в такой системе происходит спектральная конденсация энергии – энергия, передаваемая по обратному каскаду, накапливается на масштабах порядка  $L$ , что и приводит к формированию когерентных структур [3]. Такие структуры впервые наблюдали в эксперименте [6].

В настоящее время данные структуры активно исследуют экспериментально, теоретически и при численных моделированиях. В экспериментальной работе [7] исследуются когерентные вихри в двумерной турбулентности, возбуждаемой силой Лоренца в тонком слое жидкости. В экспериментальных работах [8, 9] изучается процесс формирования обратного энергетического каскада и формирование крупномасштабных когерентных вихрей в турбулентности, возбуждаемой волнами Фарадея. В теоретиче-

<sup>1)</sup>e-mail: arturor@issp.ac.ru

ской работе [10] исследуется зависимость характеристик когерентного течения от экспериментально регулируемых величин. В численной работе [11] наблюдали когерентные вихри в прямоугольной геометрии. В теоретических и численных исследованиях [12–14] предсказывается вид радиального профиля азимутальной скорости когерентного вихря. В нашей работе впервые он был установлен экспериментально.

Коэффициент трения о дно для тонкого слоя жидкости  $\alpha = \pi^2 \nu / (4h^2)$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $h$  – глубина слоя. Для уменьшения трения о дно можно увеличивать глубину слоя жидкости, но тогда будет ухудшаться условие двумерности течения  $h \ll L$ . Использование двухслойных жидкостей позволяет избежать этот недостаток: турбулентность возбуждается в верхнем слое, а нижний слой играет роль смазки. Коэффициент трения в этом случае можно найти, определив наименьший корень уравнения:

$$\frac{\rho_b}{\rho} \sqrt{\frac{\nu_b}{\nu}} = \tan \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\nu_b}} h_b \right) \tan \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} h \right), \quad (1)$$

где  $h$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  – глубина, кинематическая вязкость и плотность верхнего слоя, а  $h_b$ ,  $\nu_b$ ,  $\rho_b$  – соответствующие характеристики нижнего слоя.

**Экспериментальная методика.** Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Измерения проводили в ячейке размером

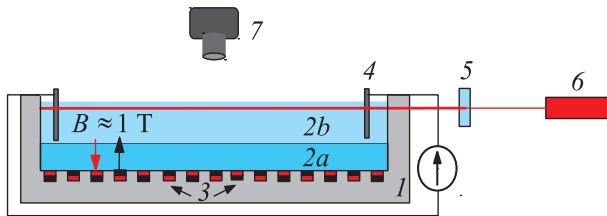


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема экспериментальной установки: 1 – ячейка из оргстекла, 2a – перфтордекалин, 2b – электролит, 3 – решетка из магнитов, 4 – платиновые электроды, подключенные к источнику питания, 5 – цилиндрическая линза, 6 – лазер, 7 – видеокамера

$10 \times 10 \times 1.5$  см, изготовленной из органического стекла. На дно ячейки наливали слой (глубиной  $h_b = 0.45$  см) перфтордекалина – нерастворимой в воде непроводящей жидкости. Плотность перфтордекалина  $\rho_b = 1.95$  г/см<sup>3</sup>, кинематическая вязкость  $\nu_b = 2.7 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с. Поверх перфтордекалина наливался слой (глубиной  $h = 0.85$  см) электролита – 20-процентного раствора  $\text{KNO}_3$  в дистиллированной воде. Плотность электролита  $\rho = 1.15$  г/см<sup>3</sup>, вязкость электролита слабо зависит от концентрации

соли и близка к вязкости воды  $\nu \approx 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с. Под дном ячейки находилась решетка  $10 \times 10$  из магнитов, расположенных в шахматном порядке, так что поля двух ближайших магнитов были направлены в противоположные стороны. Расстояние между центрами ближайших магнитов составляло 1 см. Индукция неоднородного магнитного поля составляла  $\approx 1$  Тл вблизи поверхности магнитов. Погруженные в электролит платиновые электроды подключались к источнику питания постоянного тока. При пропускании через электролит тока силой  $I = 6.4$  А жидкость за счет силы Лоренца приводилась в движение (рис. 2).

Течение электролита регистрировали методом PIV (particle image velocimetry). Для этого в жидкость добавляли порошок полиамида со средним диаметром частиц  $\approx 30$  мкм. Плотность частиц полиамида близка к плотности электролита, частицы локализованы под поверхностью в агрегатах-трейсерах со средним размером  $\approx 200$  мкм и полностью увлекаются движениями жидкости. Чтобы детектировать движения полиамидных трейсеров только в тонком слое вблизи поверхности, поверхность жидкости подсвечивалась лазерным листом толщиной  $\approx 1$  мм, сформировавшимся после прохождения через цилиндрическую линзу луча лазера. Движения подсвеченных трейсеров регистрировали камерой Canon EOS 6D со скоростью 24 кадра в секунду. Чтобы проследить за треками трейсеров, кадры накладывались друг на друга и усредняли (рис. 2а, 3). Обработка полученных кадров программой PIVLab [15] позволяет рассчитать компоненты скорости движения трейсеров  $v_x(x, y)$  и  $v_y(x, y)$  и вычислить завихренность на поверхности жидкости, которая определяется выражением:

$$\Omega(x, y) = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (2)$$

Распределение энергии на единицу массы по волновым числам  $E(k_x, k_y)$  можно рассчитать по известным значениям  $v_x$  и  $v_y$ , как дискретное пространственное преобразование Фурье кинетической энергии двумерной системы. Распределение энергии по модулю волнового числа (энергетический спектр) можно вычислить усреднением  $E(k_x, k_y)$  по кольцу в  $(k_x, k_y)$ -пространстве:

$$E(k) = \frac{1}{2S\Delta k} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} [|\mathbf{v}_q|^2]. \quad (3)$$

Интегрирование проводится в кольце  $k < q < k + \Delta k$ . Полученное значение интеграла нормируется на площадь поверхности жидкости  $S$ . Здесь  $\mathbf{v}_q$  –

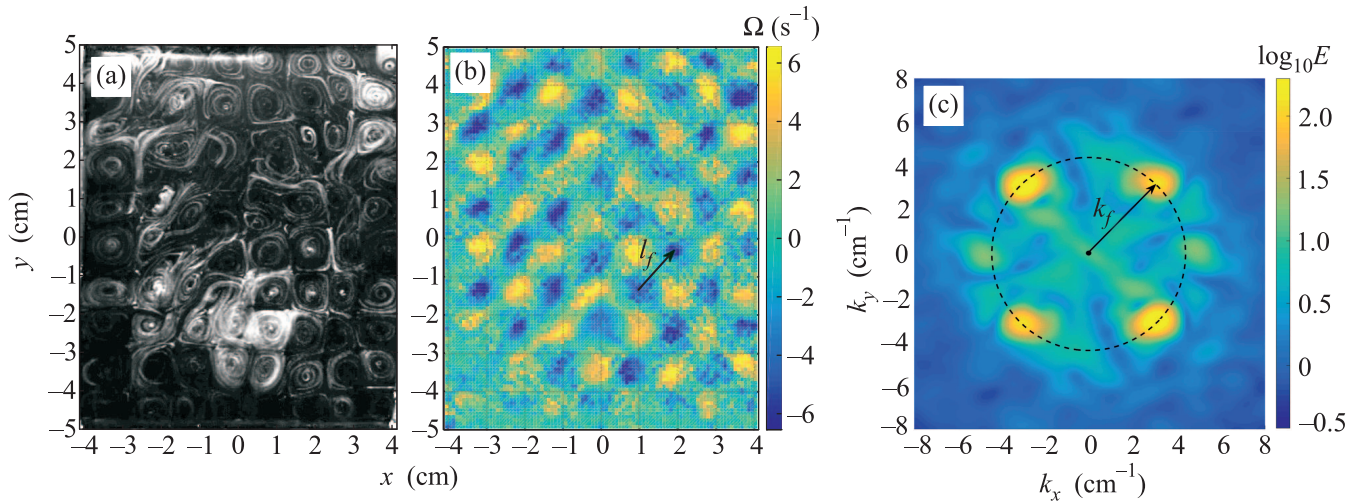


Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Треки полиамидных трейсеров на поверхности электролита. (b) – Распределение завихренности  $\Omega(x, y)$  на поверхности электролита, масштаб накачки  $l_f \approx \sqrt{2}$  см. (c) – Распределение энергии по волновым числам  $E(k_x, k_y)$  в логарифмическом масштабе через 3 секунды после включения накачки. Волновое число накачки  $k_f \approx 4.4 \text{ cm}^{-1}$

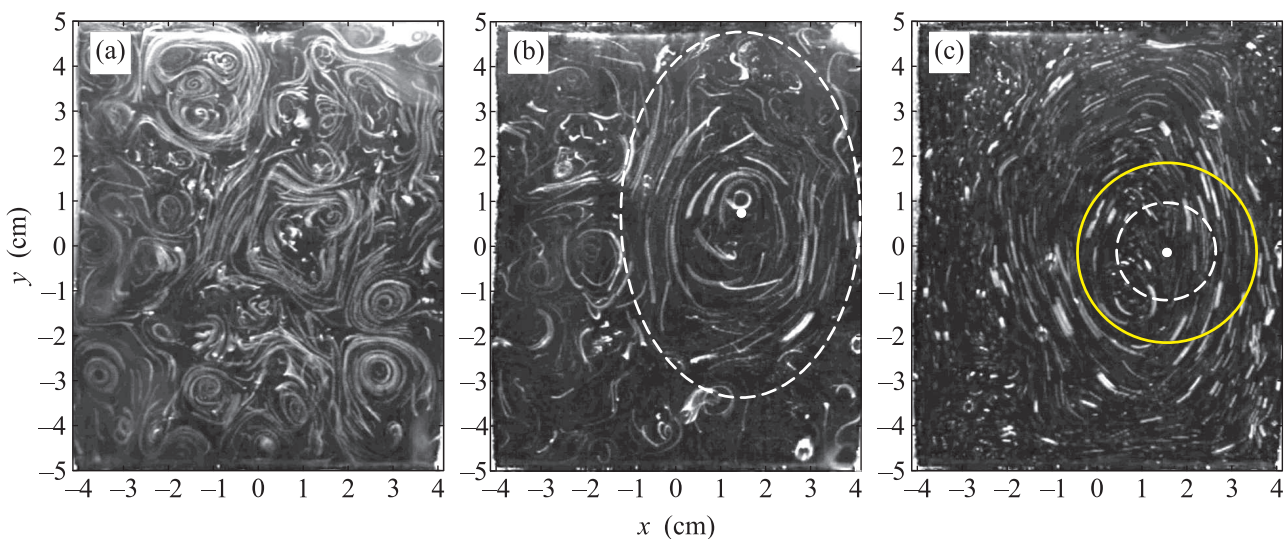


Рис. 3. (Цветной онлайн) Треки полиамидных трейсеров на поверхности электролита: (a) – через 1 мин после включения накачки, (b) – через 5 мин. Эллипсом обозначены примерные границы крупномасштабного течения. (c) – Треки полиамидных трейсеров через 13 с после выключения накачки. Радиус внешней окружности  $\approx 2$  см, внутренней –  $r_c \approx 0.9$  см. Моментальные положения центра когерентного вихря обозначены белыми кружками

фурье-компонента скорости на поверхности жидкости. Скобки  $[\ ]$  означают усреднение по 24-м последовательным снимкам.

Во время эксперимента при пропускании тока через электролит на электродах образовывались пузырьки газа, которые затрудняли детектирование течений. Поэтому вблизи электродов были установлены полимерные шторки, так что поле наблюдения было ограничено размерами  $L_x \times L_y = 8.25 \times 10$  см.

**Экспериментальные результаты и обсуждения.** На рис. 2а показаны треки полиамидных

трейсеров на поверхности электролита после 3 с накачки. Хорошо видна решетка  $8 \times 10$  вихрей диаметром  $\approx 1$  см. На рис. 2b приведено распределение завихренности  $\Omega(x, y)$ , вычисленное по формуле (2). Видно, что ближайшие соседи в решетке вращаются в противоположных направлениях, таким образом, вихри образуют шахматную структуру. Рис. 2с объясняет величину масштаба накачки  $l_f$ , на нем представлено распределение энергии  $E(k_x, k_y)$  после 3 с накачки, которое позволяет установить, на каких волновых числах (пространственных масштабах) со-



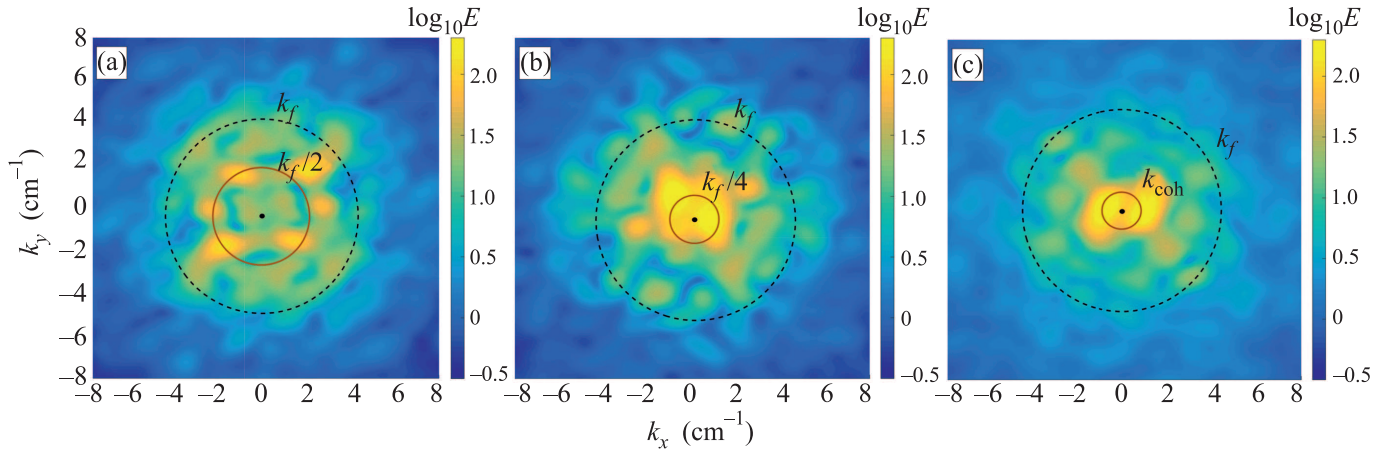


Рис. 4. (Цветной онлайн) Распределение энергии по волновым числам  $E(k_x, k_y)$  в логарифмическом масштабе: (а) – через 5 с после включения накачки, (б) – через 1 мин, (с) – через 5 мин. Волновое число накачки  $k_f \approx 4.4 \text{ см}^{-1}$ , волновое число когерентного вихря  $k_{\text{coh}} \approx 0.85 \text{ см}^{-1}$

средоточено определенное количество энергии. Хорошо видны четыре пика с примерно одинаковыми амплитудами на расстоянии  $k_f \approx 4.4 \text{ см}^{-1}$  от нуля в направлениях  $[1\ 1]$  и  $[-1\ 1]$  – направления симметрии вихрей с одним знаком завихренности, что совпадает с симметрией подрешетки магнитов с одинаковой ориентацией полюсов с периодом  $\sqrt{2} \text{ см}$ . Эти пики относятся к решетке вихрей, возбуждаемых на масштабе накачки. Значения масштаба и волнового числа накачки связаны соотношением  $l_f = 2\pi/k_f \approx 1.4 \text{ см}$ . Средняя скорость жидкости в середине между вихрями, определенная алгоритмом PIV, равна  $v_f \approx 2 \text{ см/с}$ . Число Рейнольдса на этом масштабе  $\text{Re}_f = v_f l_f / \nu \approx 280 \gg 1$ . Через 3 с накачки, после того как решетка сформировалась, вихри начинают нелинейно взаимодействовать друг с другом и сливаются, образуя более крупномасштабные структуры. Характерный масштаб вихрей увеличивается примерно в два раза между третьей (см. рис. 2) и пятой секундами, а затем между пятой секундой и первой минутой (см. рис. 3а). На рис. 3б виден наиболее крупномасштабный вихрь в системе, примерные границы которого обозначены белым пунктирным эллипсом. Через 5 мин накачки характерный размер вихря близок к размерам ячейки. Эволюция максимального вихревого масштаба видна на рис. 4, на котором показано распределение энергии  $E(k_x, k_y)$  по волновым числам. Пунктирная окружность имеет радиус  $k_f$  и центр в нуле. Видно, что большая часть энергии системы через 5 секунд накачки (см. рис. 4а) находится на расстоянии  $k \approx k_f/2$  от нуля или сосредоточена в вихрях с характерными пространственными масштабами в два раза больше, чем  $l_f$ . Через 1 мин (рис. 4б) основная часть энергии системы со-

средоточена в вихрях с характерным размером в четыре раза больше, чем  $l_f$ , через 5 мин (рис. 4с) – в вихре с волновым числом  $k_{\text{coh}} \approx 0.85 \text{ см}^{-1}$ , т.е. в вихре с характерным размером  $L_{\text{coh}} \approx 7.5 \text{ см}$ .

На рис. 5 представлены энергетические спектры, рассчитанные по формуле (3). В первое время боль-

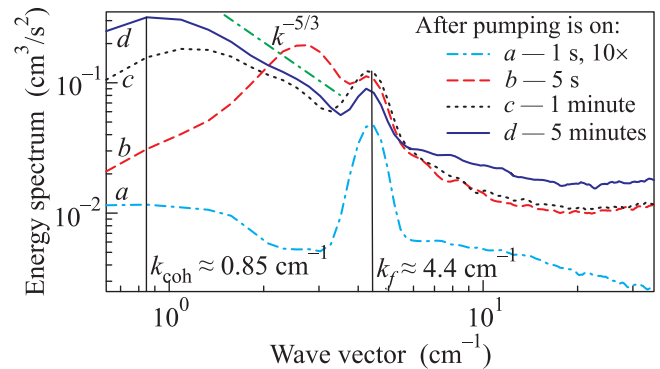


Рис. 5. (Цветной онлайн) Энергетический спектр  $E(k)$  в двойном логарифмическом масштабе в различные моменты времени после включения накачки: а – через 1 с (спектр  $E(k)$  умножен на 10 для удобства сравнения), б – 5 с, с – 1 мин, d – 5 мин

шая часть энергии, поступившая в систему, сосредоточена на  $k_f \approx 4.4 \text{ см}^{-1}$  (кривая а – спектр после 1 с накачки, умноженный на 10, другие кривые не умножаются), затем через 5 с накачки (кривая б) возникает пик на  $k \approx 2.2 \text{ см}^{-1}$  (на больших пространственных масштабах), в котором сосредоточено больше энергии, чем в пике на волновом числе накачки, т.е. энергия передается в меньшие  $k$  по (неразвитому) обратному каскаду. После 1 мин накачки (кривая с) наблюдается пик на  $k \approx 1.1 \text{ см}^{-1}$ , зависимость

энергетического спектра от волнового числа в диапазоне от  $k_f$  до этого пика (инерционный интервал) близка к теоретически предсказанной  $E(k) \propto k^{-5/3}$  [3–5]. Для сравнения на рисунке проведена пунктирная прямая, соответствующая закону  $k^{-5/3}$ . После 5 мин накачки (кривая  $d$ ) в инерционном интервале наблюдается развитый обратный каскад, зависимость энергии от волнового числа близка к теоретической  $E(k) \propto k^{-5/3}$ . Пик на  $k_{\text{coh}} \approx 0.85 \text{ см}^{-1}$  соответствует вихрю диаметром  $L_{\text{coh}} \approx 7.5 \text{ см}$ . Скорость на периферии этого вихря (см. рис. 3b), определенная алгоритмом PIV, равна  $v_{\text{coh}} \approx 1.7 \text{ см/с}$ . Центр вихря, определенный как область с максимальным по модулю значением завихренности, показан на рисунке белым кружком. Число Рейнольдса составляет  $\text{Re}_{\text{coh}} = v_{\text{coh}} L_{\text{coh}} / \nu \approx 1300$ .

Значение потока энергии в обратном каскаде  $\epsilon$  может быть найдено из энергетического баланса в квазистационарном режиме, когда энергия системы слабо меняется со временем. В этом случае поток энергии примерно равен энергии, диссипируемой в единицу времени:  $\epsilon \approx \int_{k_{\text{coh}}}^{k_f} (\gamma_k + 2\alpha) E(k) dk$ , где  $\gamma_k = 2\nu k^2$  – коэффициент затухания энергии за счет вязкости. Коэффициент трения о дно ячейки, рассчитанный по формуле (1),  $\alpha \approx 2.3 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$  согласуется с экспериментальным значением, полученным из наблюдения заключительной стадии релаксации крупномасштабного течения. Используя спектр  $E(k)$ , полученный из экспериментальных данных, определим поток энергии  $\epsilon = (3 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}^3$ . Теперь можно оценить, что пространственный масштаб, на котором должен обрываться обратный каскад в неограниченной системе  $L_\alpha \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2} \approx 50 \text{ см}$ , значительно превышает размер ячейки  $L = 10 \text{ см}$ .

На рис. 3b видны сильные флуктуации от мелкомасштабных вихрей, особенно от вихрей на масштабе накачки. Чтобы уменьшить их влияние, можно выключить накачку. Из-за большого коэффициента затухания энергии за счет вязкости для решетки и на больших  $k$  мелкомасштабные вихри быстро затухнут, и можно будет без существенных флуктуаций наблюдать когерентный вихрь и исследовать его структуру. Действительно, для  $k \geq k_f$  выполнено условие  $\gamma_k \geq \gamma_{k_f} \approx 0.4 \text{ с}^{-1}$ , что намного больше коэффициента затухания энергии на малых  $k$ , равного  $2\alpha \approx 0.05 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 3с представлены треки полиамидных трейсеров на поверхности электролита через 13 с после выключения накачки. Когерентный вихрь на рис. 3с дрейфует с характерной скоростью центра  $V_{\text{dr}} \approx 0.2 \text{ см/с}$ . Чтобы исследовать распределение скорости в нем удобно перейти в систему отсчета

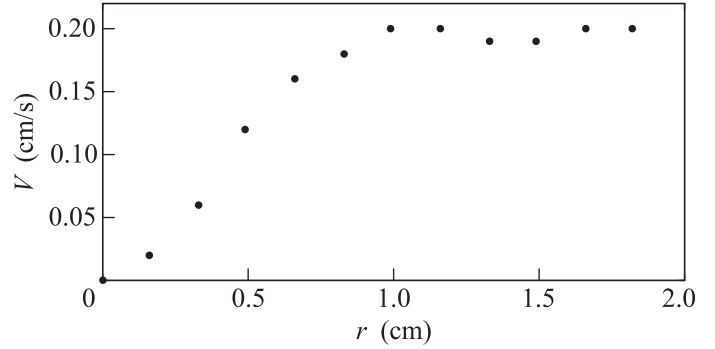


Рис. 6. Радиальный профиль азимутальной скорости во внешнем круге на рис. 3с через 13 с после выключения накачки

связанную с центром вихря. На рис. 6 показан радиальный профиль азимутальной скорости в системе центра вихря через 13 с после выключения накачки в круге, ограниченном внешней окружностью на рис. 3с, с радиусом  $\approx 2 \text{ см}$ . В сердцевине вихря, в круге с радиусом  $r_c \approx 0.9 \text{ см}$ , ограниченном внутренней окружностью на рис. 3с, наблюдается линейная зависимость азимутальной скорости когерентного вихря от радиуса. Затем скорость выходит на плато на уровне  $V \approx 0.2 \text{ см/с}$ . Центр вихря определяли по максимуму модуля завихренности.

В работе [12] теоретически было установлено, что в ячейке с периодическими граничными условиями при короткокоррелированной по времени накачке азимутальная скорость когерентного вихря при включенной накачке не зависит от расстояния от центра вихря  $V \sim \sqrt{3\epsilon/\alpha}$ . В этой же работе также было проведено компьютерное моделирование, результаты которого с хорошей точностью согласуются с теоретическими предсказаниями. В дальнейших работах [13, 14] теория была уточнена и было найдено, что в сердцевине вихря вблизи центра азимутальная скорость растет линейно по радиусу. Было установлено, что радиус сердцевины  $r_c \sim \sqrt{\nu/\alpha}$ .

В данной работе накачка – стационарная, граничные нулевые (скорость течений у границ ячейки равна нулю), однако, для оценок можно воспользоваться результатами изложенной теории. Теоретические предсказания дают оценки при включенной накачке: радиус сердцевины  $r_c \sim \sqrt{\nu/\alpha} \approx 0.7 \text{ см}$ , азимутальная скорость на плато  $V \sim \sqrt{3\epsilon/\alpha} = (2.0 \pm 0.5) \text{ см/с}$ . Из распределения энергии на рис. 4с, 5 (кривая  $d$ ) следует, что большая часть энергии системы сосредоточена в когерентном вихре. Тогда полная энергия течений на поверхности электролита на единицу массы через  $t$  секунд после выключения накачки может быть оценена как  $E_{\text{tot}}(t) \approx V_{\text{coh}}^2(t)/2$ , где  $V_{\text{coh}}(t)$  –

характерная скорость когерентного вихря в момент времени  $t$  после выключения накачки. Следовательно,  $V_{\text{coh}}(13) \approx \sqrt{E_{\text{tot}}(13)/E_{\text{tot}}(0)}V \approx 0.45$  см/с, где  $E_{\text{tot}}(0) \approx 2 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $E_{\text{tot}}(13) \approx 1 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> – экспериментальные значения полной энергии сразу перед выключением накачки и через 13 с после. В системе центра вихря, дрейфующего со скоростью  $V_{\text{dr}} \approx 0.2$  см/с, азимутальную скорость вне сердцевины через 13 с после выключения накачки можно оценить так:  $V \approx V_{\text{coh}}(13) - V_{\text{dr}} = (0.25 \pm 0.07)$  см/с, что близко к экспериментально наблюдаемому значению.

**Закключение.** В данной работе исследован процесс формирования обратного каскада энергии в двумерной системе. Обнаружено, что наблюдаемая зависимость энергии от волнового числа близка к предсказываемой теорией  $E(k) \propto k^{-5/3}$  [3–5]. Показано, что вследствие нелинейного взаимодействия мелкомасштабные вихри, первоначально возбуждаемые на масштабе накачки в тонком слое жидкости в экспериментальной ячейке, сливаются и образуют более крупномасштабные вихревые течения. Трение о дно и мощность накачки были таковы, что максимальный масштаб вихря в системе ограничивался размерами ячейки. Энергия, поступающая в этот масштаб в обратном каскаде, накапливалась в вихре и наблюдалось явление спектральной конденсации, формировался когерентный вихрь. Однако, одновременно в системе присутствовали сильные флуктуации от мелкомасштабных вихрей. После выключения накачки они быстро затухали, и через 13 с можно было без существенных флуктуаций наблюдать когерентный вихрь, размеры которого близки к размеру системы, и исследовать его структуру. Впервые был установлен радиальный профиль азимутальной скорости когерентного вихря в системе его дрейфующего центра после выключения накачки. Оказалось, что в сердцевине вихря азимутальная скорость возрастает по ли-

нейному закону, а далее азимутальная скорость близка к постоянной. Результаты данных исследований хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями [12–14].

Авторы благодарны В.В. Лебедеву, И.В. Колоколову, Л.П. Межову-Деглину и В.М. Парфеньеву за полезные обсуждения, С.В. Филатову за помощь в обработке экспериментальных данных программой PIVlab.

Работа поддержана грантом РФФИ # 14-22-00259.

1. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **71**, 427 (2012).
2. L. M. Smith and V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 352 (1993).
3. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
4. C. E. Leith, *Phys. Fluids* **11**, 671 (1968).
5. G. K. Batchelor, *Phys. Fluids* **12**, 233 (1969).
6. J. Sommeria, *J. Fluid Mech.* **170**, 139 (1986).
7. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**, 125101 (2009).
8. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, and M. Shats, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 194501 (2013).
9. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, *Phys. Rev. X* **4**, 021021 (2014).
10. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 633 (2017).
11. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 032602 (2017).
12. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 254503 (2014).
13. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
14. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *J. Fluid Mech.* **809**, R2-1 (2016).
15. W. Thieckle and E. J. Stamhuis, *J. Open Research Software* **2**, 30 (2014).