

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Обухов, Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование, *УМН*, 1983, том 38, выпуск 4(232), 101–111

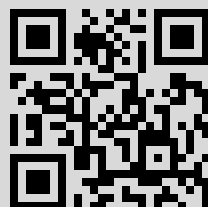
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.91.253.238

21 июня 2019 г., 16:42:02



ТЕЧЕНИЕ КОЛМОГОРОВА  
И ЕГО ЛАБОРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. М. Обухов

Основополагающее значение идей А. Н. Колмогорова для современного развития учения о турбулентности общеизвестно. За сорок два года, прошедшие после опубликования классических работ Андрея Николаевича по теории локально-изотропной турбулентности [1], [2], возникла обширная литература по этому вопросу, произведены многочисленные измерения характеристик турбулентности в естественных средах (атмосфера, океан), а также и в больших аэродинамических трубах, полностью подтвердившие предсказания теории, выдвинутой А. Н. Колмогоровым <sup>1)</sup>.

Это относится прежде всего к «закону двух третей», согласно которому средний квадрат разности скоростей в двух точках развитого турбулентного потока пропорционален расстоянию между точками наблюдения в степени  $2/3$  в области промежуточных масштабов (превышающих внутренний масштаб, определяемый вязкостью, и меньших внешнего масштаба). Современное развитие техники измерений позволило проникнуть и в тонкую структуру турбулентности, где становится заметным влияние вязкости среды. Теоретическая оценка соответствующего масштаба была дана Андреем Николаевичем еще в 1941 г. Для условий пограничного слоя атмосферы этот «внутренний масштаб» составляет несколько миллиметров, что также нашло экспериментальное подтверждение [5].

Андрея Николаевича всегда интересовали также вопросы механики жидкости, связанные с возникновением турбулентных возмущений, — гидродинамическая неустойчивость течений маловязкой жидкости.

Соответствующая математическая теория крайне сложна, и для того, чтобы лучше разобраться в этом явлении, А. Н. Колмогоров еще в 1959 г. на руководимом им семинаре [6] предложил исследовать простейшую модель — двумерное движение вязкой жидкости, возникающее под действием периодического (по одной из координат) поля внешней силы. Изящное решение задачи об устойчивости такого потока (течение Колмогорова) вскоре было дано Мешалкиным и Синаем [7]. Тогда соответствующая модель мыслилась лишь как удобный объект для теоретических исследований и вряд ли кто-нибудь думал о возможности ее физической реализации в лабораторных условиях. Это было сделано позже — в 1979 г. на основе применения «магнитогидродинамического привода», позволившего создать в слабо проводящей жидкости (электролит) периодическое в пространстве поле внешней силы Ампера:

$$\vec{j} = [\vec{H}, \vec{j}],$$

где  $\vec{H}$  — напряженность внешнего магнитного поля,  $z$ -компонента которого периодически зависит от координаты  $y$ ,  $\vec{j}$  — постоянная плотность тока меж-

<sup>1)</sup> Весьма обстоятельное изложение современного состояния статистической теории турбулентности имеется в двухтомной монографии А. С. Монина и А. М. Яглома [3], [4]

ду двумя электродами, помещенными в исследуемый слой жидкости. Величину  $j$  можно варьировать по желанию экспериментатора, меняя напряжение на электродах и создавая тем самым течение Колмогорова с различными числами Рейнольдса. Первые эксперименты такого рода были проведены в кювете размером  $24 \times 12$  см с пространственным периодом (по короткой оси) в 4,4 см и описаны в работе [8]. Обсуждение результатов этих экспериментов вместе с кратким изложением упомянутых выше теоретических исследований содержится также в монографии [9].

Ф. В. Должанский [8], [9] показал, что для более точного описания движения тонких слоев в жидкости, вызываемых внешним периодическим силовым полем, следует пользоваться модифицированной моделью Колмогорова, в которой учитывается также и «внешнее» трение (трение о дно кюветы). Соответствующие уравнения двумерной гидродинамики при этом приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u - \lambda u + \gamma \sin py, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v - \lambda v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

$u, v$  — компоненты скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\gamma$  — интенсивность внешнего воздействия ( $\gamma$  можно выразить через  $H$  и  $j$ ),  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа,  $\lambda$  — коэффициент «внешнего» трения, который приближенно определяется по формуле

$$\lambda = \frac{2\nu}{h^2},$$

где  $h$  — глубина слоя жидкости.

Учет внешнего трения оказывается очень существенным для правильной оценки критического числа Рейнольдса, которое по расчету оказывается порядка  $10^3$  (вместо  $\sqrt{2}$  по Мешалкину и Синаю), что вполне согласуется с экспериментом. После перехода через критическое значение числа Рейнольдса в сдвиговом периодическом потоке формируется система стационарных (при слабой закритичности) вихрей, образующих нечто вроде паркета. При отсутствии внешнего трения наиболее неустойчивым возмущением, согласно теории Мешалкина и Синая, оказываются «длинноволновые» вихри, размер которых ограничивается лишь внешним размером системы. Фактически благодаря действию внешнего трения имеется некоторое оптимальное продольное волновое число, сравнимое с поперечным периодом внешней силы, для которого начальные возмущения растут наиболее быстро. Вопрос о форме вихревых возмущений, возникающих на фоне периодического двумерного течения при слабой закритичности, может быть исследован в первом приближении на основе линейной теории — для отбора наиболее активных мод. Последующее применение приближенной нелинейной теории, учитывающей взаимодействие развивающихся возмущений с основным потоком, позволяет оценить стационарные значения амплитуд. В применении к течению Колмогорова такой подход был развит в работе В. И. Кляцкина [10], который впервые построил «карту» возмущений конечной амплитуды, соответствующую слабой закритичности. Применение метода Галёркина для аппроксимации гидродинамических уравнений в модели Колмогорова с последующим решением конечных алгебраических систем на ЭВМ позволило авторам статьи [11] построить вполне реалистичную картину «вихревого парка», возникающего в течении Колмогорова при значительных закритичностях, весьма сходную с тем, что было получено в описанном выше эксперименте с магнитогидродинамическим

приводом, выполненном вскоре после публикации [11]. Сопоставление результатов теоретических расчетов с картиной возмущений, полученных в эксперименте, можно найти в монографии [9].

Моделирование течения Колмогорова в ограниченной прямоугольной кювете обладает существенным недостатком в связи с влиянием боковых стенок. Течение, близкое к теоретической модели, может наблюдаться только в центральной части кюветы, некоторые неустойчивые моды при этом могут быть потеряны. В связи с этим автором статьи было предложено провести аналогичные эксперименты на аксиально-симметричной установке в кольцевом сосуде с проводящими границами круговой формы, выполняющими роль

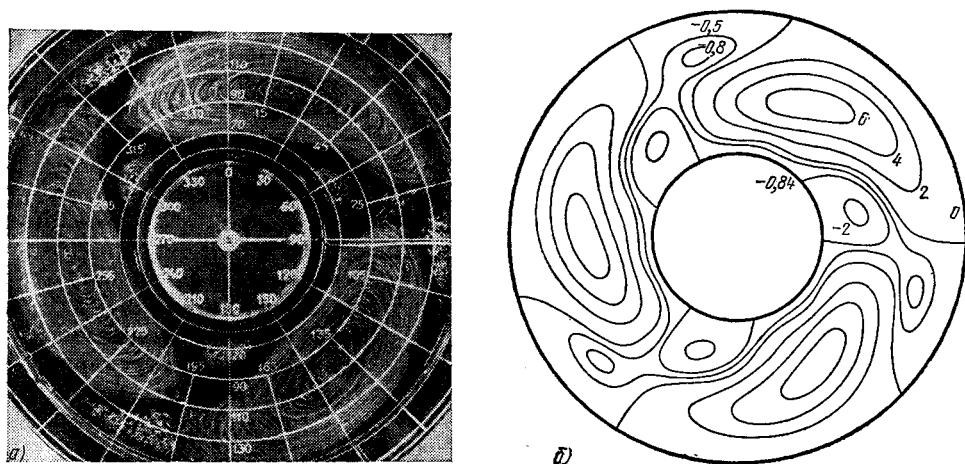


Рис. 1. Стационарное возмущение в сдвиговом течении в кольцевом канале: а) эксперимент; б) теоретический расчет.

электродов, и магнитным полем, зависящим только от радиуса, создаваемым магнитной системой, расположенной под круглой кюветой <sup>1)</sup>. В описываемой установке зависимость азимутальной разгонной силы от радиуса была близкой к синусоидальной (точнее — функции Бесселя нулевого порядка), между электродами укладывалась одна полная волна. Для визуализации течения в раствор электролита вводилась алюминиевая пудра. При слабом возбуждении наблюдается медленное движение частиц по окружностям с наибольшим градиентом скорости на узловой линии посередине кольца. В соответствии с результатами анализа устойчивости с помощью линеаризованных уравнений при некотором определенном возбуждении (числе Рейнольдса по «разгону») возникает возмущение, индекс симметрии которого может быть рассчитан теоретически и зависит от геометрии потока (отношения радиусов кольцевой области). На рис. 1 приведена наблюдаемая картина стационарных возмущений в сдвиговом течении в кольцевом канале, наблюдаемых в закритичном режиме ( $Re/Re_{кр} \approx 2,8$ ), для геометрии, которая соответствует индексу 3. Для сравнения приведена также теоретически рассчитанная В. М. Пономарёвым (методом Галёркина) картина движения (изолинии функции тока) при  $Re/Re_{кр} = 3$ . В методе Галёркина в качестве базисных (опорных) функций использовались произведения функций Бесселя от радиуса  $r$  на тригонометрические функции азимута  $\varphi$  [12].

<sup>1)</sup> Моделирование гидродинамических процессов в кольцевых каналах представляет интерес для геофизических приложений в связи с изучением общей циркуляции атмосферы. Детали эксперимента изложены в [9].

Если изменить геометрию — сузить канал при сохранении среднего радиуса, то критическое число Рейнольдса возрастает и генерируются более мелкие возмущения, отвечающие большему индексу симметрии.

В ряде работ по теории гидродинамической устойчивости двумерных течений (см., например, [13]) отмечалась возможность появления неустойчивостей, связанных с предельными циклами, что соответствует возбуждению автоколебаний. Для простейшей системы, состоящей всего из четырех вихрей, возника-

ющих в результате конвекции [14] или под влиянием магнитогидродинамических сил [15], такие автоколебания действительно наблюдаются, теоретический анализ соответствующей модели имеется в работе Плешановой [16].

Проведенные недавно в Институте физики атмосферы АН СССР эксперименты показали существование автоколебательного режима и для течения Колмогорова. Авторы эксперимента А. М. Батчаев и В. А. Довженко [17] использовали вертикальную кювету (рис. 2), в которой под действием магнитогидродинамической силы частицы жидкости (раствор медного купороса) могут двигаться по замкнутой траектории вокруг пластины внутри зазора постоянной толщины.

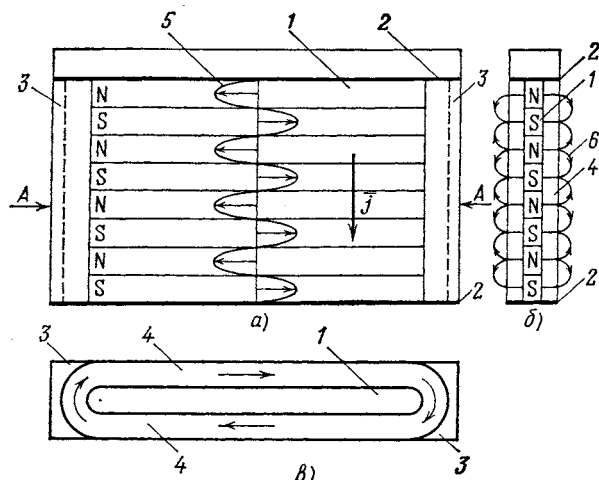


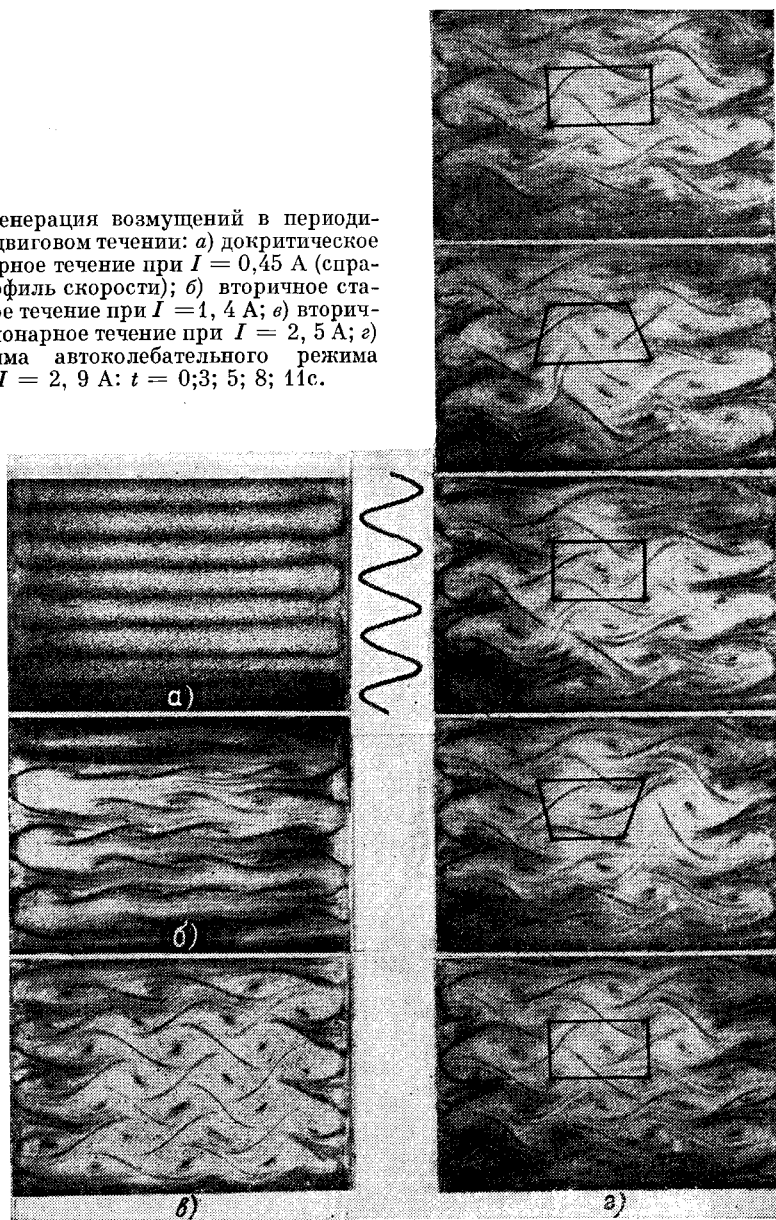
Рис. 2. Вертикальная МГД-установка для моделирования течения Колмогорова. Вид спереди, сбоку и сверху (разрез по А—А). 1 — лист магнитоэластичной резины размером  $245 \times 180 \times 5$  мм<sup>3</sup>; 2 — медный электрод; 3 — скругленная изнутри боковая стенка; 4 — канал течения жидкости; 5 — профиль МГД-силы; 6 — силовые линии магнитного поля.

В вертикальном направлении укладываются четыре полных волны. Можно полагать, что такая конструкция хорошо имитирует течение Колмогорова на поверхности цилиндра и трудности, связанные с условиями на боковых стенках, практически отсутствуют. На рис. 3 приведены картины течения, наблюдаемые при различных условиях возбуждения.

При слабом возбуждении наблюдается четкая картина упорядоченных струй, которые при принятом методе визуализации напоминают полосы на поверхности Юпитера, на котором, как известно, также наблюдается зональная атмосферная циркуляция. После перехода тока, питающего систему, через первое критическое значение (в данном эксперименте 1, 1 А) на фоне зональной циркуляции возникают стационарные вихревые возмущения. Интенсивность этих возмущений возрастает с увеличением возбуждения (интенсивность осредненного зонального потока при этом меняется слабо), и на следующем кадре видна картина развитого «вихревого паркета». При определенном значении возбуждения (второе критическое значение тока составляет 2,6 А) стационарный вихревой режим теряет устойчивость и возникает режим автоколебаний в системе вихрей. Кинограмма последовательных фаз колебательного режима показана на рис. 3. Эволюцию можно проследить, наблюдая за выделенными четырьмя особенностями «вихревого паркета». Полный цикл совершается в течение 11 секунд. Величина периода зависит от приложенного напряжения (тока) — при увеличении возбуждения период уменьшается. При токе, меньшем 3 А, колебания имеют четкий «монокрохматический» характер — система работает, как часы.

При сильном возбуждении (при токе, большем 3 А) картина колебаний усложняется, спектр обогащается высшими гармониками и можно ожидать нового перехода к режиму непрерывного спектра, что должно соответствовать

Рис. 3. Генерация возмущений в периодическом сдвиговом течении: а) докритическое стационарное течение при  $I = 0,45$  А (справа — профиль скорости); б) вторичное стационарное течение при  $I = 1,4$  А; в) вторичное стационарное течение при  $I = 2,5$  А; г) кинограмма автоколебательного режима при  $I = 2,9$  А:  $t = 0; 3; 5; 8; 11$  с.



появлению «странного аттрактора», если воспользоваться современной терминологией<sup>1)</sup>. В описываемых экспериментах этот режим специально не исследовался.

<sup>1)</sup> Странным аттракторам сейчас уделяется большое внимание, и число статей по этому вопросу быстро возрастает. В применении к структуре турбулентных течений понятию странного аттрактора посвящен ряд статей в сборнике [18].

В настоящее время исследователи постепенно привыкают к мысли о том, что турбулентность — явление далеко не столь хаотичное, как представлялось лет 30—40 тому назад. Во всяком случае на начальной стадии развития она имеет много общего с упорядоченными структурами, изучаемыми в кристаллографии. Вихревой паркет, возникающий на фоне течения Колмогорова, вполне доступен расчету — трудности здесь не принципиальные и преодолимы при использовании современной вычислительной техники.

Может быть рассчитан и средний эффект переноса импульса и тепла (в направлении, поперечном по отношению к основному потоку) стационарной системой эллиптических вихрей, что представляет непосредственный интерес для приложений. Всестороннее исследование течения Колмогорова, которое нельзя считать еще завершенным, оказалось в этом плане чрезвычайно полезным.

Все это свидетельствует о несомненных успехах динамического подхода к изучению турбулентности, хотя мы еще весьма далеки от чисто теоретического расчета характеристик переноса в развитом турбулентном потоке. Применяемые на практике методы таких расчетов в настоящее время неизбежно содержат некоторые числовые коэффициенты (постоянная Кармана, коэффициент в формуле Колмогорова и др.), которые определяются на основе экспериментальных данных, теоретически вычислить их пока что не удается.

Развитая турбулентность при достаточно больших числах Рейнольдса характеризуется рядом свойств (непрерывность временного спектра, эргодичность), которые не проявляются при слабой закрученности, хотя эффект резкого увеличения транспортных свойств потока (перенос импульса и тепла) имеет место уже на этой стадии.

А. Н. Колмогоров при формулировке основных положений теории локальной структуры развитого турбулентного потока [1] исходил из каскадной модели, содержащей достаточно большое число каскадов — «ярусов», характеризующихся последовательностью масштабов — от больших, сравнимых с поперечным размером системы, до весьма малых — порядка внутреннего масштаба:

$$\lambda_k = \sqrt[4]{v^3/\varepsilon},$$

определяемого кинематической вязкостью  $\nu$  и средней диссипацией энергии на единицу массы  $\varepsilon$ .

В чисто качественной форме представление о каскадном механизме преобразования энергии в турбулентной атмосфере было сформулировано еще в 1922 г. известным английским метеорологом Л. Ричардсоном в четверостишии, которое теперь часто цитируется; в английском оригинале его можно найти, например, в упоминавшейся уже монографии Монины и Яглома. Мы приведем это четверостишие здесь в авторизованном переводе, принадлежащем В. Н. Штерну:

В поток бурлящий бросив взгляд,  
Вихрей увидишь там каскад:  
Меньшой энергию у большего берет,  
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Изучение механизма потери устойчивости для конкретных гидродинамических моделей (включая течение Колмогорова) с привлечением методов нелинейной механики способствовало лучшему пониманию процесса взаимодействия вихревых мод различного масштаба <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Вихревой модой называется векторное бездивергентное поле, удовлетворяющее однородным граничным условиям, принятым для поля скоростей. Одна из мод возбуждается внешней силой (полем), что обеспечивает приток энергии к системе.

Представляет интерес построение упрощенных динамических моделей, имитирующих весь турбулентный каскад, статистическое описание которого столь блестяще было дано А. Н. Колмогоровым более 40 лет тому назад.

Одна из попыток построения дискретной модели турбулентности была предпринята автором на основе введенного им понятия систем гидродинамического типа [19], [20]. Системой гидродинамического типа (СГТ) называется система обыкновенных квадратично-нелинейных дифференциальных уравнений, определенных в  $n$ -мерном линейном фазовом пространстве:

$$\dot{v}^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i v^j v^k,$$

допускающих положительно определенный интеграл энергии  $E = \frac{1}{2} g_{ik} v^i v^k$  ( $dE/dt = 0$ ) и сохраняющих фазовый объем (условие Лиувилля:  $\partial v^i / \partial v^i = 0$ ).

Динамический тензор  $\Gamma_{jk}^i$ , кроме очевидного условия симметрии по нижним индексам, удовлетворяет двум дополнительным ограничениям:  $\gamma_k = \Gamma_{ik}^i = 0$  («регулярность» — сохранение фазового объема) и  $\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{j,ki} = 0$  — циклическое соотношение, выражающее закон сохранения энергии. Опускание индексов производится с помощью тензора  $g_{ik}$ , который определяет в фазовом пространстве системы евклидову метрику. При фиксированном тензоре  $g$  сумма динамических тензоров двух СГТ дает тензор, отвечающий некоторой системе того же типа, так как дополнительные условия линейны. Этот «принцип суперизации» позволяет строить сложные системы из более простых «блоков». Доказывается, что простейшей нетривиальной СГТ является триплет — система, изоморфная классическому гироскопу Эйлера, уравнения движения которого удобно записать в форме

$$\frac{dv_0}{dt} = p(v_1 - v_2^2), \quad \frac{dv_1}{dt} = -pv_0v_1, \quad \frac{dv_2}{dt} = pv_0v_2.$$

Если фазовые координаты  $v_0, v_1, v_2$  имеют размерность скоростей (энергия  $E$ , отнесенная к единице массы, имеет размерность квадрата скорости), то коэффициент взаимодействия  $p$  имеет размерность волнового числа (обратную величину можно назвать «динамическим масштабом» триплета). Заметим, что  $v_0$  отвечает неустойчивой моде системы. Системы гидродинамического типа естественно возникают при аппроксимации уравнений гидромеханики для конкретных гидродинамических моделей по методу Галёркина. В общем случае следует ввести дополнительные диссипативные члены, пропорциональные вязкости, а также учесть действие внешних сил.

На рис. 4 схематически представлена простейшая дискретная модель нелинейного каскада, построенная из подобных триплетов различного масштаба  $l_i = 1/p_i$ , сцепленных между собой определенным образом. Соответству-

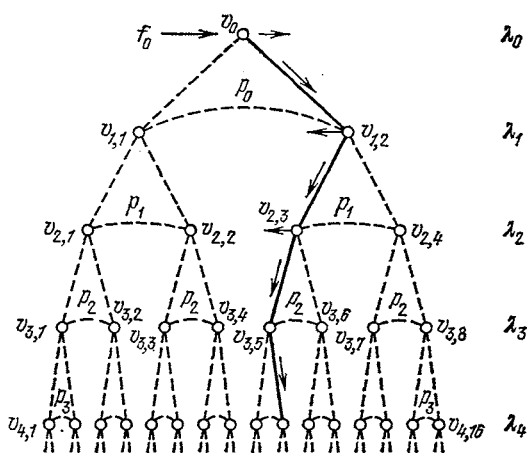


Рис. 4. Дискретная модель нелинейного каскада.



ющие уравнения движения могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= p_0 (v_{1,1}^2 - v_{1,2}^2) - \lambda_0 v_0 + f_0, \\ 1 \quad &\begin{cases} \dot{v}_{1,1} = -p_0 v_0 v_{1,1} + p_1 (v_{2,1}^2 - v_{2,2}^2) - \lambda_1 v_{1,1}, \\ \dot{v}_{1,2} = p_0 v_0 v_{1,2} + p_1 (v_{2,3}^2 - v_{2,4}^2) - \lambda_1 v_{1,2}, \end{cases} \\ 2 \quad &\begin{cases} \dot{v}_{2,1} = -p_1 v_{1,1} v_{2,1} + p_2 (v_{3,1}^2 - v_{3,2}^2) - \lambda_2 v_{2,1}, \\ \dot{v}_{2,2} = p_1 v_{1,1} v_{2,2} + p_2 (v_{3,3}^2 - v_{3,4}^2) - \lambda_2 v_{2,2}, \\ \dot{v}_{2,3} = -p_1 v_{1,2} v_{2,3} + p_2 (v_{3,5}^2 - v_{3,6}^2) - \lambda_2 v_{2,3}, \\ \dot{v}_{2,4} = p_1 v_{1,2} v_{2,4} + p_2 (v_{3,7}^2 - v_{3,8}^2) - \lambda_2 v_{2,4}, \end{cases} \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{v}_{i, 2s-1} &= -p_{i-1} v_{i-1, s} v_{i, 2s-1} + p_i (v_{i+1, 4s-3}^2 - v_{i+1, 4s-2}^2) - \lambda_i v_{i, 2s-1}, \\ \dot{v}_{i, 2s} &= p_{i-1} v_{i-1, s} v_{i, 2s} + p_i (v_{i+1, 4s-1}^2 - v_{i+1, 4s}^2) - \lambda_i v_{i, 2s} \\ &\quad (1 \leq s \leq 2^{i-1}), \end{aligned}$$

$\lambda_i = \alpha^2 \nu p_i^2$  — диссипативные коэффициенты,  $\alpha$  — множитель порядка единицы<sup>1)</sup>.

В динамических переменных  $v_{i,j}$  первым индексом пронумерованы «ярусы», отвечающие последовательности  $p_i$  и  $\lambda_i$ , вторым индексом — компоненты триплетов, расположенные на заданном ярусе.

$E_i = \frac{1}{2} \sum v_{i,j}^2$  отвечает энергии, ассоциированной с возмущением данного масштаба  $l_i = 1/p_i$ .

Поскольку уравнения движения идеальной жидкости допускают группу подобных преобразований, можно предположить (в соответствии с основной гипотезой Колмогорова об автомодельности каскада), что величины  $p_i$  образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель

$$q = \frac{p_{i+1}}{p_i}$$

является основной инвариантной характеристикой дискретного каскада. По предложению Андрея Николаевича его можно назвать «коэффициентом измельчения» турбулентных возмущений.

При сопоставлении с непрерывным энергетическим спектром  $E_i$  следует рассматривать как энергию, приходящуюся на «октаву» (или определенную долю октавы) в пространстве частот  $k$ .

<sup>1)</sup> В спектральном представлении  $\lambda = \nu k^2$ , где  $k$  — волновое число. Для опорных (координатных) векторных полей можно ввести некоторое среднее (эффективное) значение волнового числа на основе известного выражения для диссипации энергии. Вместе с тем  $p$  определяется на основе решения задачи о гидродинамической неустойчивости по максимальному инкременту нарастания возмущений, пропорциональному амплитуде «порождающей моды».

Из соображений подобия  $k$  и  $p$ , имеющие одинаковую размерность, приближенно считаются пропорциональными. Фактически  $\alpha$  может быть существенно больше единицы. Для простоты можно формально положить  $\alpha = 1$ , понимая под  $\nu$  некоторую «эффективную» вязкость.



стационарные состояния типа простых цепочек могут быть неустойчивыми уже при  $n \geq 3$ . В работе [22] установлена интересная связь явления неустойчивости цепочек с коэффициентом дробления  $q$ . При малых значениях  $q$  ( $q < q_0 = 2\sqrt{2}$ ) все достаточно длинные цепочки неустойчивы. При  $q \geq q_0$  длинные устойчивые цепочки могут существовать, но имеют очень узкий диапазон устойчивости (по параметру  $f_0$ ). Численные эксперименты показывают, что разрушение длинной цепочки происходит, когда в результате «раскачки» в одном из звеньев происходит «переброс» — соответствующая мода  $v_{i,j}$  меняет знак. Тогда связанные с ней высшие моды ( $i' > i$ ) лишаются притока энергии и быстро затухают, а процесс, начиная с  $v_{i,j}$ , развивается уже в новом направлении.

Таким образом, описанная выше модель благодаря явлению неустойчивости длинных цепочек хотя и грубо, но все же отражает явление перемежаемости мелкомасштабной турбулентности, на которое указал А. Н. Колмогоров в 1961 г. в своем докладе на симпозиуме в Марселе [23]. В докладе было отмечено, что локальные флуктуации диссипации (перемежаемость) могут привести к некоторому отклонению энергетического спектра от «закона двух третей». Этому вопросу посвящена также работа автора [24]. Появившийся после 1961 г. ряд исследований показал, что явление перемежаемости очень существенно при изучении высших моментов разности скоростей [25]. Что касается энергетического спектра, то он с точностью порядка 5% хорошо аппроксимируется «законом 2/3» (закон  $-5/3$  для спектральной плотности). На это указывают прямые измерения спектров турбулентности в атмосфере и океане, а также результаты численных экспериментов с упрощенными каскадными моделями.

Проблема синтеза статистических методов описания и динамического моделирования турбулентности сейчас привлекает большое внимание исследователей различного профиля, включая математиков, физиков-теоретиков, специалистов по физике плазмы, гидромеханике и геофизике, а также астрофизиков.

Личный вклад А. Н. Колмогорова в учение о турбулентности и его идеи, относящиеся к общей теории динамических систем, являются основными ориентирами в развитии исследований сложнейшего явления природы — турбулентности в применении к различным областям знания.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Колмогоров. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН, 1941, 30 : 4, с. 299—303.
- [2] А. Н. Колмогоров. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности.— ДАН, 1941, 32 : 1, с. 19—21.
- [3] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1965, часть 1.
- [4] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967, часть 2.
- [5] F. N. Champagne. The fine-scale structure of the turbulent velocity field.— J. Fluid Mech., 1978, 86: 1, p. 67—108.
- [6] В. И. Арнольд, Л. Д. Мешалкин. Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958—1959).— УМН, 1960, 15 : 1, с. 247—250.
- [7] Л. Д. Мешалкин, Я. Г. Синай. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости.— ПММ, 1961, 25 : 6.
- [8] Н. Ф. Бондаренко, М. З. Гак, Ф. В. Должанский. Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения.— Изв. АН, ФАО, 1979, 15 : 10, с. 1017—1026.

- [9] Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.
- [10] В. И. Кляцкин. К нелинейной теории устойчивости периодических течений.— ПММ, 1972, 36 : 2.
- [11] С. О. Белоцерковский, А. П. Миравель, М. А. Чусов. О построении закритического режима для плоского периодического течения.— Изв. АН, ФАО, 1978, 14: 1.
- [12] В. М. Пономарёв. Об устойчивости одного класса осесимметричных течений несжимаемой жидкости.— Изв. АН, МЖГ, 1980, № 1.
- [13] В. И. Юдович. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений.— Изв. АН, МЖГ, 1973, № 1.
- [14] Д. В. Любимов, Г. Ф. Путин, В. И. Чернотынский. О конвективных движениях в ячейке Хелле-Шоу.— ДАН, 1977, 237 : 3, с. 554—557.
- [15] М. З. Гак. Лабораторное исследование автоколебаний в системе четырех вихрей.— Изв. АН, ФАО, 1982, 18 : 4.
- [16] Л. А. Плешанова. Колебания в системе четырех вихрей.— Изв. АН, ФАО, 1982, 18 : 4.
- [17] А. М. Батчаев, В. А. Довженко. Лабораторное моделирование потери устойчивости периодических зональных течений.— ДАН, 1983.
- [18] Структурная турбулентность, сборник, ред. М. А. Гольдштик.— Новосибирск, 1982.
- [19] А. М. Обухов. Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа.— ДАН, 1969, 184 : 2, с. 309—312.
- [20] Ф. В. Должанский, В. И. Кляцкин, А. М. Обухов, М. А. Чусов. Нелинейные системы гидродинамического типа.— М.: Наука, 1974.
- [21] А. Б. Глуховский. Об устойчивости нелинейных систем типа цепочек, моделирующих каскадные процессы передачи энергии.— Изв. АН, ФАО, 1975, 11 : 8.
- [22] А. Б. Глуховский. О влиянии величины коэффициента дробления масштабов на устойчивость нелинейных систем типа цепочек.— Изв. АН, ФАО, 1975, 11 : 12.
- [23] A. N. Kolmogoroff. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number.— J. Fluid Mech., 13 : 1, p. 82—85.
- [24] A. M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence.— J. Fluid Mech., 13 : 1, p. 77—81.
- [25] Е. А. Новиков. Переमेжаемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока.— ПММ, 1971, 35 : 2.