

УДК 532.5

## Современные проблемы турбулентности

*Леонова В.А., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Теплофизика»*

*Научный руководитель: Хвесюк В.И., д.т.н., профессор  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*[khves@power.bmstu.ru](mailto:khves@power.bmstu.ru)*

### 1. Введение

Со времени открытия Рейнольдсом турбулентного течения его структура и свойства были изучены множеством исследователей, среди которых такие выдающиеся ученые как Прандтль, Карман, Колмогоров и др. В настоящее время для описания турбулентности применяются в основном две теории, призванные дополнять друг друга:

1. Классическая – описывает распределение усредненных по времени величин в зависимости от положения выбранной точки в потоке;
2. Статистическая – описывает флуктуации параметров течения в зависимости от их масштаба.

В рамках обеих теорий достигнуты значительные успехи, но в то же время налицо множество нерешенных задач, вопросов, ответы на которые еще не найдены.

## 2. Два основных подхода к описанию турбулентности

### 2.1. Классическое описание

Наибольший интерес при исследовании турбулентности представляет пограничный слой. Как известно, распределение скорости  $u$  в нем описывается внутри вязкого подслоя линейной зависимостью

$$u = \frac{u_\tau^2}{\nu} y,$$

а на больших расстояниях от стенки – логарифмическим профилем (он же называется уравнением Кармана):

$$\frac{u}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + 5,1.$$

Здесь  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$  – динамическая скорость,  $\tau_0$  – касательное напряжение на стенке,  $\rho$  – плотность жидкости,  $1/\kappa = 2,5$  – постоянная Кармана. Приняты обозначения координат  $x_1 = x$  – в направлении потока,  $x_2 = y$  – по нормали к стенке,  $x_3 = z$  – поперек потока (параллельно стенке). Им соответствуют скорости  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ .

В литературе можно встретить несколько отличающиеся коэффициенты для уравнения Кармана, напр. 2,44 и 4,9. Несмотря на некоторые связанные с этим расхождения, оно успешно применяется и дает результат, хорошо совпадающий с экспериментом. Но для практических целей его недостаточно – необходимо рассчитывать сопротивление трения на стенке и теплоотдачу. Для этого пульсирующие величины скорости  $u$ , температуры  $T$  и давления  $p$  принято представлять в виде суммы средней по времени величины и пульсационной составляющей, напр.  $u = \bar{u} + u'$ . Этот формальный прием позволяет получить систему уравнений следующего вида.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \bar{u}) = 0;$$

уравнения движения

$$\operatorname{div}(\rho \bar{u}_i \bar{u}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \operatorname{div}(\rho \nu \operatorname{grad} \bar{u}_i) - \operatorname{div}(\rho \overline{u_i' u'});$$

уравнение энергии

$$\operatorname{div}(c_p \rho \bar{T} \bar{u}) + \operatorname{div}(c_p \rho \overline{T' u'}) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \bar{T}).$$

Также как правило добавляют условия

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0.$$

Здесь  $c_p$  – удельная изобарная теплоемкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности жидкости.

Данная система уравнений *незамкнута*, так как в ней присутствуют требующие определения величины:

$\vec{\tau}_\tau = \overline{\rho u_i' u'} -$  касательные напряжения Рейнольдса и

$\vec{q}_\tau = -c_p \rho \overline{T' u'}$  – тепловой поток Рейнольдса.

Для их определения были предложены различные гипотезы (например, гипотезы Прандтля, Кармана, Прандтля-Колмогорова). В большинстве своем они основываются на «длине смешения» – параметре, физический смысл которого весьма расплывчат, и дают

порой не самые точные результаты. (Например, из гипотезы Прандтля следует, что в ядре потока пульсации стремятся к нулю, что не так.) Также каждая такая модель адаптирована для своего узкого класса течений.

Для решения проблемы замыкания системы весьма многообещающей представляется статистическая теория турбулентности. Она направлена на обнаружение и изучение универсальных свойств турбулентности, рассматривая масштабы, значительно меньшие размеров области, занятой турбулентным течением:  $l \ll L$ , где  $L$  – внешний масштаб турбулентности.

## 2.2. Статистическое описание: теория Колмогорова

В статистической теории турбулентности важнейшей величиной является масштаб  $l$  (или волновой вектор  $\vec{k}$ , где  $k = 2\pi/l$ ). Рассматривается энергия, заключенная в некоторых волновых числах

$$E(k) = \int_{k=|k|} |\hat{u}(k)|^2 dk,$$

где  $\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx$ , а также скорость диссипации энергии

$$\varepsilon(k) = \int_0^k E(k') dk'.$$

В данном подходе турбулентность считается *однородной и изотропной*. Это означает, что все величины инвариантны по отношению к направлению вектора  $\vec{k}$  и что параметры одних масштабов не влияют на другие масштабы. Это позволяет получить из уравнений Навье-Стокса следующую запись:

$$\partial_t E(k) = T(k) - D(k) + F(k).$$

Здесь  $T(k)$  описывает перенос энергии в данный масштаб в результате взаимодействия пульсаций скорости различного масштаба.  $D(k)$  описывает скорость диссипации энергии за счет действия молекулярной вязкости (эта функция локализована вблизи микромасштаба турбулентности  $\lambda$  – масштаба Колмогорова).  $F(k)$  характеризует приток энергии за счет внешних сил, поддерживающих течение (локализована вблизи макромасштаба  $L$ ).

Как показано на рис. 1, приток и диссипация энергии разнесены по масштабам. Для стационарности течения необходимо, чтобы  $T(k) - D(k) + F(k) = 0$ . Площади под

кривыми  $D(k)$  и  $F(k)$  в точности равны друг другу, а в промежутке между ними – инерционном интервале –  $T(k) = 0$ , т.е. скорость притока энергии из больших масштабов в точности равна скорости ее оттока в меньшие. Чем больше число Рейнольдса  $Re$ , тем шире данный интервал. Его наличие свидетельствует о развитой турбулентности.

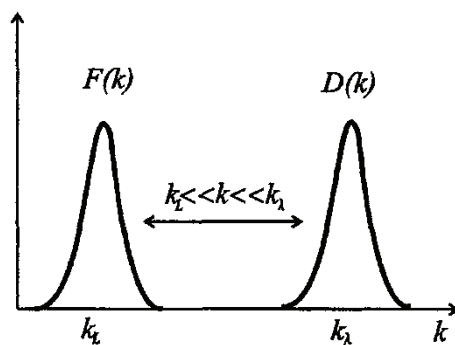


Рис. 1. Баланс энергии по масштабам

В инерционном интервале справедлива теория Колмогорова, являющаяся основополагающей теорией статистической турбулентности. Она исходит из предположений, что

а) статистические свойства в инерционном и диссипативном интервалах не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами:  $\varepsilon$ ,  $\nu$  и  $l$ ;

б) статистические свойства в инерционном интервале универсальны и зависят только от  $\varepsilon$  и  $l$ ;

в) скорость диссипации энергии – универсальная константа для заданного течения и не изменяется в пространстве и времени.

Из этого был получен закон Колмогорова:

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

Здесь  $C$  – константа Колмогорова. Данный степенной закон как правило иллюстрируют в логарифмических координатах (рис. 2) или строят график нормированной величины  $E(k)k^{5/3}$ , который в инерционном интервале должен иметь горизонтальный участок.

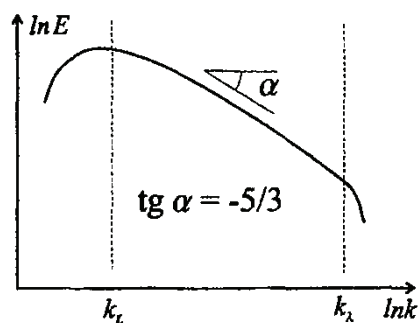


Рис. 2. Закон Колмогорова

Также необходимо отметить, что для статистического анализа турбулентности часто применяются корреляционные тензоры второго

$$R_{ik} = \langle (u_{2i} - u_{1i})(u_{2k} - u_{1k}) \rangle$$

и третьего порядка

$$R_{ikm} = \langle (u_{2i} - u_{1i})(u_{2k} - u_{1k})(u_{2m} - u_{1m}) \rangle.$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  – скорости в точках, отстоящих друг от друга на расстояние  $l$ . В инерционном интервале теоретически получен результат, называемый «законом 4/5»:

$$R_{iii} = -\frac{4}{5} \varepsilon l.$$

### 3. Неизотропная турбулентность

Статистическая теория изотропной однородной турбулентности хорошо подтверждается на практике. Закон Колмогорова, полученный из соображений размерности, обладает простотой и красотой с точки зрения математики. Но при этом результаты данной теории непригодны (по крайней мере, в таком виде) для задачи замыкания системы уравнений гидродинамики для описания пограничного слоя. Основные причины трудностей в согласовании классической и статистической теорий следующие.

а) Статистическая теория однородной изотропной турбулентности, как следует из ее названия, занимается лишь областями течений, далеких от стенок и прочих источников неоднородности.

б) Эта теория рассматривает диссипацию энергии, но не ее источники, в то время как именно в пограничном слое, как показали измерения Клебана [5] производство турбулентной кинетической энергии максимально, как можно видеть на рис. 3.

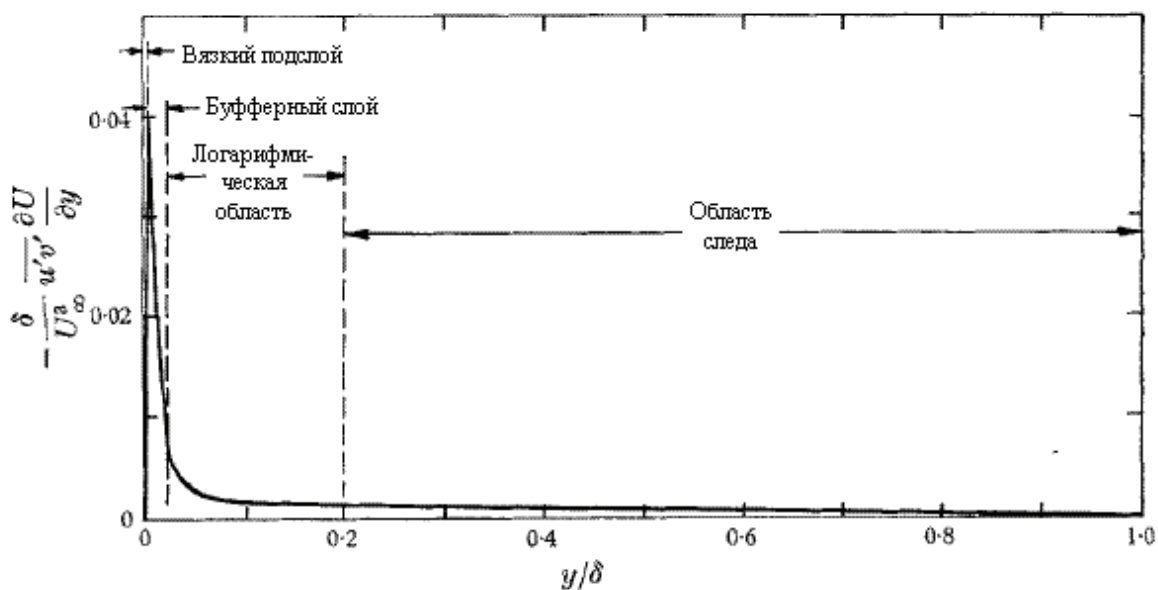


Рис. 3. Нормированное производство турбулентной кинетической энергии в единице объема в типичном пограничном слое

Применительно к этому рисунку и дальнейшему изложению, основанному, к сожалению, лишь на иностранной литературе, следует упомянуть принятые в ней названия различных участков пограничного слоя. Они представлены в таблице.

Названия, применяемые для участков пограничного слоя,  
и взаимоотношение этих участков

	Вязкий («ламинарный») подслой	Пристеночная область	Внутренний слой
	Буферный слой		
	Логарифмическая область		Внешний слой
	Область следа		

Попытки выйти из создавшейся ситуации и расширить статистическую теорию на пограничный слой привели к созданию многих работ, направленных на статистическое изучение неоднородной турбулентности.

Основоположником данного направления по праву считается Таунсенд, предложивший теорию присоединенных вихрей [10], которая, хоть и претерпела

значительные изменения, очень популярна и берется подавляющим большинством авторов за основу их моделей. Чисто математически(!), используя корреляционные тензоры, Таунсенд получил характерную форму течения у стенки – двойной вихрь, показанный на рис. 4.

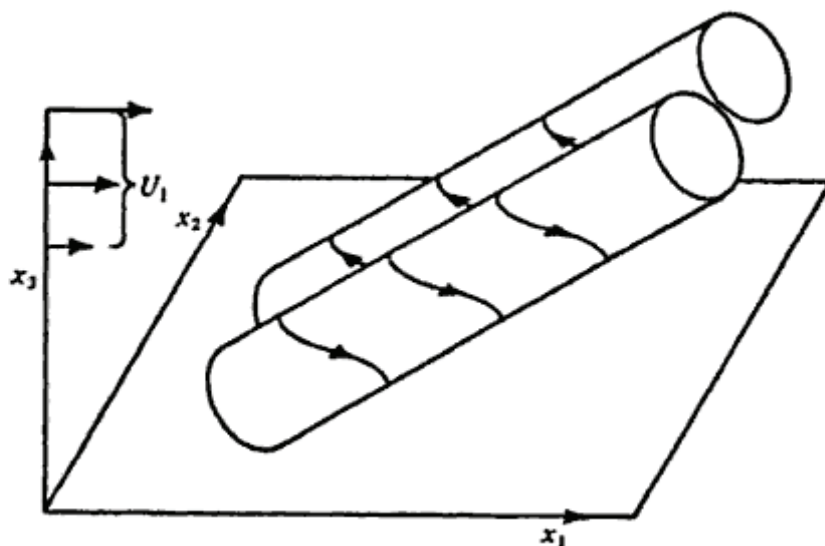


Рис. 4. Эскиз наклоненного двойного вихря. Стрелки показывают линии тока

Создание новой теории потребовало новых экспериментальных методов – визуализации всего течения, а не (только) снятия скоростей в ряде отдельных точек. Эти методы впервые были применены в работах Клайна [5] и Хэда [3]. Визуализация потока (рис. 5) позволила им экспериментально обнаружить вытянутые двойные вихри (за которыми после работы Хэда закрепилось название «шпильки»).

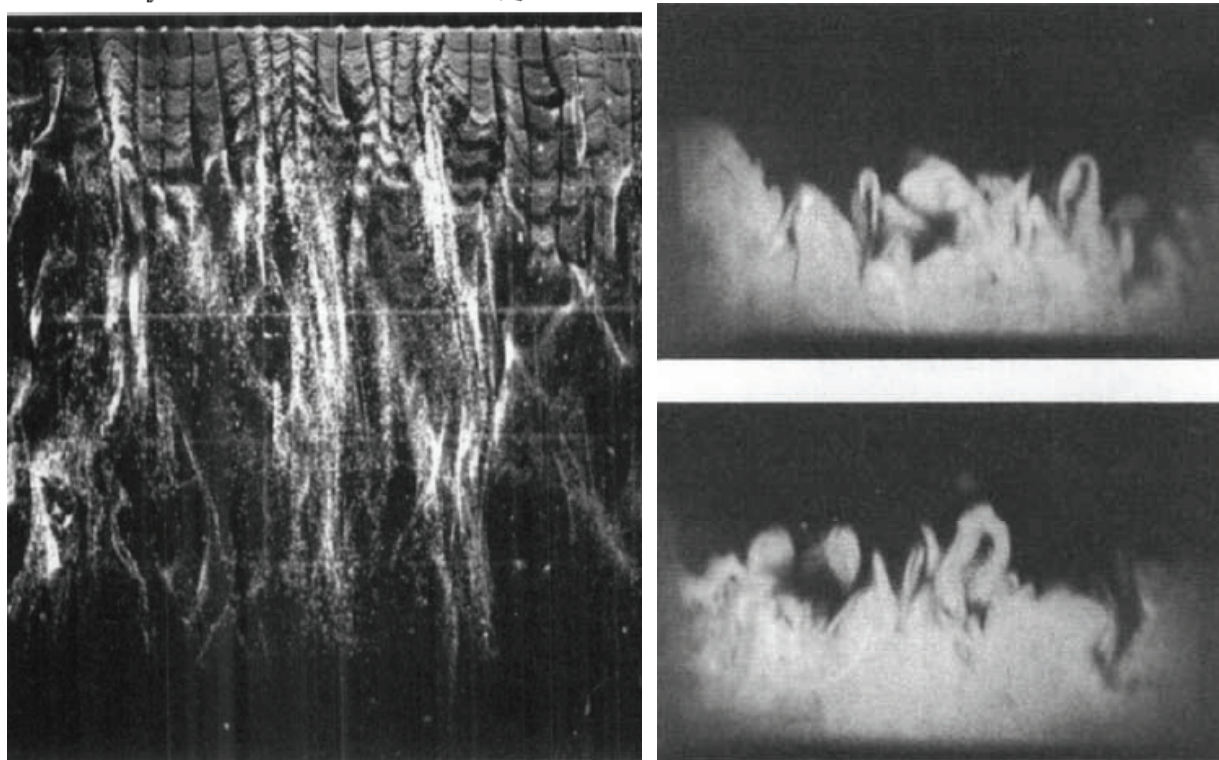


Рис. 5. Эксперименты по визуализации потока вблизи стенки.

Слева – из [5], справа – из[3]

В настоящее время существуют модели, призванные описать все области пограничного слоя, в которые модель Колмогорова входит как частный случай. Например модель Перри и Чонга [8], предполагающая одновременное существование нескольких иерархий шпилек (рис. 6) разного размера. Согласно этой модели, шпильки растут в высоту, отчего расстояние между их ножками сужается, пока ножки с противоположными направлениями вращения не сольются (и как следствие взаимно уничтожатся) или шпилька не войдет в состав шпилек из иерархии большего размера. Пространство между шпильками заполнено остатками материала от уничтожившихся шпилек.



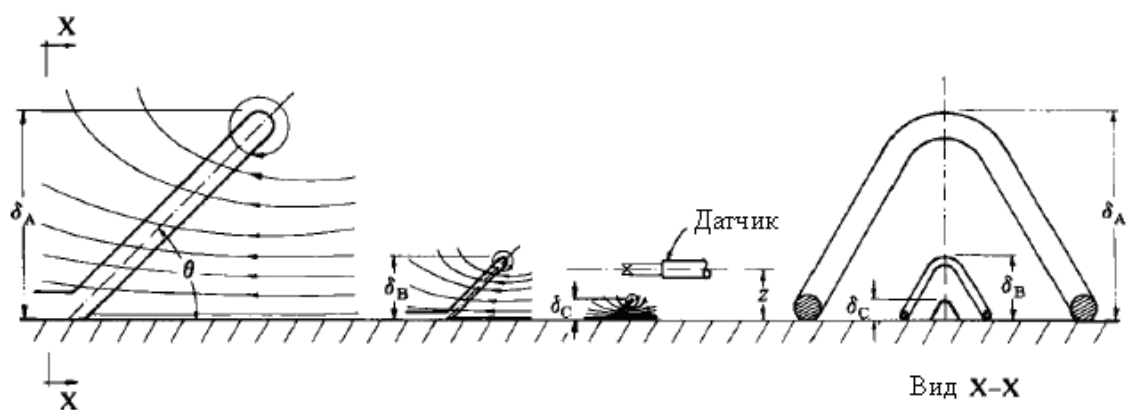


Рис. 6. Шпильки в модели Перри и Чонга

Авторы данной модели показывают (рис. 7), как различные участки этой математической модели соответствуют всем частям пограничного слоя, перекрываясь между ними.

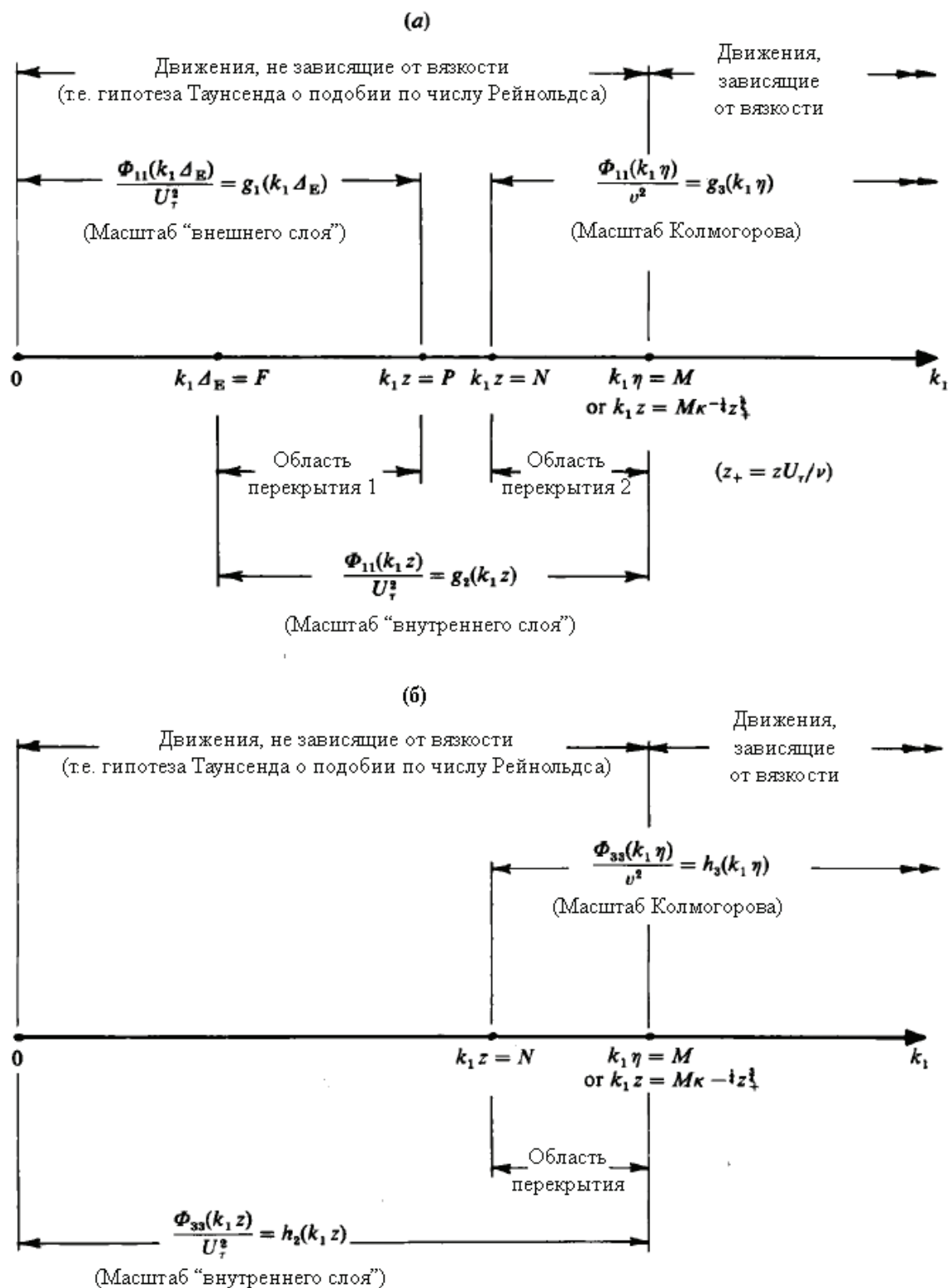


Рис. 7. Модель Перри и Чонга для турбулентной пристеночной области. а) спектр  $u_1$ , б) спектр  $u_3$ . Здесь  $\Phi_{ij}(k_1)$  – спектральная плотность на единичное волновое число  $k_1$  для флуктуаций скорости  $u_i$  и  $u_j$

Помимо теоретических исследований было проведено и проводится сейчас множество экспериментов, направленных на их подтверждение и уточнение.

#### **4. Сложности описания турбулентности и нерешенные вопросы**

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию турбулентных пограничных слоев (а зачастую благодаря им), на данный момент в этой области существует множество проблем и нерешенных вопросов, на которые ученым только предстоит дать ответ. Вот некоторые из них.

1. Достоверность логарифмического профиля скоростей. Хотя данный профиль успешно применяется долгое время, существует мнение [7], что на самом деле он при некоторых числах Рейнольдса степенной. Если это так, может оказаться, что множество основанных на логарифмическом профиле работ неточны.

2. Наличие нескольких масштабов у пристеночных движений. Начиная с экспериментов Хэда выделяли два масштаба: масштаб шпилек и масштаб более крупных объединений из нескольких шпилек – т.н. движений большого масштаба. Однако сейчас выдвинуты идеи о том, что существует еще больший масштаб, который многократно превосходит характерный размер канала – «движение очень больших масштабов» [4]. Как его точно экспериментально определить и как оно влияет на течение не совсем ясно.

3. «Выбросы» и «взрывы». Так разные авторы называют важный механизм передачи энергии от пограничного слоя к основному потоку. Названия объясняются тем, что шпильки, выросшие до границы слоя, становятся нестабильными, колеблются и «взрываются», причем часть составлявшего их вещества с большой энергией уходит в ядро потока. Этот механизм – самостоятельное обширное поле для изучения.

4. Ограниченность в возможностях для экспериментальных исследований. Для получения инерционного интервала достаточной длины необходимы огромные числа Рейнольдса. Также желательно иметь как можно больший размер установки, чтобы иметь возможность проводить измерения для микромасштабов ( $l \sim \lambda$ ), т.к. анемометры не могут разрешить масштабы, меньшие размера их рабочей части. Известны, например, эксперименты Саддохи [9], проводившиеся самой большой в мире аэродинамической трубе при исследовательском центре NASA. Канал этой трубы имеет размеры порядка  $24 \times 37$  м, измерения проводились при скорости 50 м/с, а толщина пограничного слоя составила порядка 1 м. Еще один использовавшийся метод [6] связан с измерением параметров атмосферного пограничного слоя (толщина которого около 200 м), но он

связан со многими трудностями, вызванными невозможностью влиять на условия эксперимента.

Что же касается вычислительных экспериментов, им присущ общий недостаток расчетов для текучих сред – недостаточная мощность современных компьютеров для расчета большого объема (например, необходимого, чтобы уместить в него «движение очень больших масштабов»). Также численные эксперименты ограничены небольшими числами Рейнольдса.

5. Не рассматриваются процессы передачи тепла. Все модели неизотропной турбулентности рассматривают поток только с точки зрения гидродинамики. О процессе теплоотдачи от стенки речь не ведется, хотя он представляет большой практический интерес.

### **Заключение**

Несмотря на большие успехи теории неизотропной турбулентности, до сих пор нет целостной картины, в которой бы классическая и статистическая теории, дополняя друг друга, позволяли точно теоретически описать структуру турбулентного течения и процессы в нем. Дальнейшее изучение этих процессов очень важно как для прикладных целей, так и для создания новых моделей турбулентного течения.

### **Список литературы**

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ. Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 736 с.
2. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.
3. Head M.R., Bandyopadhyay P.R. New aspects of turbulent structure. J. Fluid Mech., 1981, vol. 297, no. 107, pp. 297-338.
4. Kim K.C., Adrian R.J. Very large-scale motion in the outer layer. J. Physics of Fluids, 1999, vol. 417, no. 11, pp. 417-422.
5. Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W. The structure of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., 1967, vol. 741, no. 30, pp. 741-773.
6. Kunkel S.J., Marusic I. Study of the near-wall-turbulent region of the high-Reynolds-number boundary layer using an atmospheric flow. J. Fluid Mech, 2006, vol. 548, pp. 375-402.

7. Marusic I., McKeon B.J., Monkewitz P.A., Nagib H.M., Smits A.J., Screenivasan K.R. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues. J. Physics of Fluids, 2010, vol. 065103, no. 22, pp.1-24.
8. Perry E.A., Henbest S., Chong M.S. A theoretical and experimental study of wall turbulence. J. Fluid Mech, 1986, vol. 165, pp. 163-199.
9. Saddoughi S.G., Veeravalli S.V. Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. J. Fluid Mech, 1994, vol. 268, pp. 333-372.
10. Townsend A.A. The structure of Turbulent Shear Flow. 2nd ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1976. 428 p.