МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.50-летия ВЕЛИКОЙ ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА"

для студентов специальности 220I
"Вычислительные машины, комплексы, системы и сети"

Раздел "Основы дискретной математики"

Утверждено
на заседании кафедры
специализированных
вычислительных средств
Протокол № 4 от I7.04.9I

Киев КПИ I99I

Методические указания по дисциплине "Прикладная математика" для студентов специальности 2201 "Вычислительные машины, комплексы, системы и сети". Раздел "Основы дискретной математики" / Сост. В.Н.Валуйский, М.Г.Лукашевич. - К.: КПИ, 1991. - 52 с.

Составители: В.Н.Валуйский, М.Г.Лукашевич
кандидаты технических наук

Ответственный редактор А.М.Романкевич

Рецензенты: А.Д.Горожин
Л.Ф.Карачун

Цель и основные задачи раздела "Основы дискретной математики" дисциплины "Прикладная математика" - изучение теоретических методов анализа и синтеза дискретных объектов, применяемых при проектировании аппаратурных и программных средств вычислительной техники.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать основные разделы дискретной математики; области ее применения в вычислительной технике; основные теоретические положения; взаимосвязь разделов дисциплины и их связь с другими дисциплинами;

уметь формулировать практические задачи в терминах дискретной математики; выбирать методы их решения; свободно пользоваться техникой вычислений; применять вычислительную технику для решения практических задач.

**Настоящие методические указания предназначены для получения практических навыков решения задач дискретной математики.**

## I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Содержание темы достаточно просто изложено в [I]. Здесь приводятся основные соотношения алгебры множеств, используемые для решения задач теории множеств; раскрывается на примерах методика решений уравнений с одним неизвестным в алгебре множеств с использованием приведенных соотношений.

Основные соотношения алгебры множеств:

| | |
|---|---|
| Iа) $A \cup B = B \cup A$; | Iб) $A \cdot B = B \cdot A$; |
| 2а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; | 2б) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; |
| 3а) $A \cup B \cdot C = (A \cup B) \cdot (A \cup C)$; | 3б) $A \cdot (B \cup C) = AB \cup AC$; |
| 4а) $A \cup \varnothing = A$; | 4б) $A \cdot U = A$; |
| 5а) $A \cup \bar{A} = U$; | 5б) $A \cdot \bar{A} = \varnothing$; |
| 6а) $A \cup U = U$; | 6б) $A \cdot \varnothing = \varnothing$; |

7а) $\overline{\varnothing} = U$; 7б) $\overline{U} = \varnothing$;

8а) $A \cup A = A$; 8б) $A \cdot A = A$;

9а) $A \cup AB = A$; 9б) $A \cdot (A \cup B) = A$;

10а) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$; 10б) $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Примечание. 10а, 10б – теоремы де Моргана.

11) Если $A \cup B = U$ и $AB = \varnothing$, то $B = \bar{A}$;

12) $\bar{A} = U \setminus A$; 13) $\bar{\bar{A}} = A$; 14) $A \setminus B = A\bar{B}$;

15) $A \dot- B = A\bar{B} \cup \bar{A}B$; 16) $A \dot- B = B \dot- A$; 17) $(A \dot- B) \dot- C = A \dot- (B \dot- C)$;

18) $A \dot- \varnothing = \varnothing \dot- A = A$; 19) $\overline{A \dot- B} = AB \cup \bar{A}\bar{B}$;

20) $AB \dot- AC = A(B \dot- C)$; 21) $A \subset B$, если и только если $AB = A$, либо $A \cup B = B$, либо $A\bar{B} = \varnothing$; 22) $A = B$, если и только если $A \dot- B = \varnothing$; 23) $AB \cup A\bar{B} = A$ (закон склеивания); 24) $A \cup \bar{A}B = A \cup B$;

25) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$;

26) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n$.

Примечание: 25,26 – теоремы де Моргана для $n$ множеств.

Приведенные соотношения лежат в основе решения уравнений и систем уравнений с одним неизвестным в алгебре множеств.

1. В соответствии с соотношением 22 исходное уравнение приводится к виду, содержащему пустое множество в правой части.

2. Полученное уравнение преобразуется к виду $MX \cup N\bar{X} = \varnothing$, где $M$ и $N$ – некоторые множества или выражения в алгебре множеств, не содержащие $X$. Несложно показать, что любое уравнение с пустой правой частью приводится к указанному виду.

3. На основании полученного уравнения и соотношения 21 записывается решение в виде $N \subset X \subset \bar{M}$.

Пример 1. Решить уравнение $X \cup C = D$, $C \subseteq D$.

Используя соотношение 22, получаем $(X \cup C) \dot- D = \varnothing$. Надо правильно использовать скобки при преобразовании выражений. Так, запись $X \cup C \dot- D = \varnothing$, часто используемая при этом, допускает неверное толкование, например $X \cup (C \dot- D) = \varnothing$, что приводит к ошибкам в дальнейшем решении. Следует пользоваться только записью $(X \cup C) \dot- D = \varnothing$.



Используя соотношение 15, убираем в полученном уравнении знак " $\dot-$ ". Имеем:

$$(X \cup C) \dot- D = \overline{X \cup C} \cdot D \cup (X \cup C)\bar{D} = \varnothing.$$

Далее применяем теорему де Моргана ( соотношение 10а) и раскрываем скобки. Получаем: $\bar{X}\bar{C}D \cup X\bar{D} \cup C\bar{D} = \varnothing$.

Используя условие $C \subseteq D$, получаем $C\bar{D} = \varnothing$.

Таким образом, уравнение приводится к виду $\bar{X}\bar{C}D \cup X\bar{D} = \varnothing$.

Отсюда решение может быть записано так:

$$\bar{C}D \subset X \subset D.$$

Следующий пример приведем без пояснений.

Пример 2. $\overline{\overline{X \setminus A} \dot- B} = X$, $A \cdot B = \varnothing$;

$$\overline{\overline{X \setminus A} \dot- B} \dot- X = \varnothing.$$

Используем соответственно соотношения 19, 13, 14:

$$(\overline{\overline{X \setminus A}}\,\bar{B} \cup \overline{X \setminus A} \cdot B) \dot- X = \varnothing;$$

$$[(X \setminus A)\bar{B} \cup \overline{X \setminus A}\,B] \dot- X = \varnothing;$$

$$(X\bar{A}\bar{B} \cup \overline{X\bar{A}}B) \dot- X = \varnothing.$$

Применяя теорему де Моргана (соотношение 10б), получаем:

$$[X\bar{A}\bar{B} \cup (\bar{X} \cup A)B] \dot- X = \varnothing.$$

Раскрываем скобки:

$$(X\bar{A}\bar{B} \cup \bar{X}B \cup AB) \dot- X = \varnothing.$$

Поскольку в условии уравнения задано, что $AB = \varnothing$, то

$$(X\bar{A}\bar{B} \cup \bar{X}B) \dot- X = \varnothing.$$

Используем соотношение 15:

$$\overline{(X\bar{A}\bar{B} \cup \bar{X}B)}X \cup (X\bar{A}\bar{B} \cup \bar{X}B)\bar{X} = \varnothing.$$

Используем соотношение 10а и раскрываем скобки:

$$\overline{X\bar A\bar B}\cdot\overline{\bar X B}\cdot X\cup\bar X B=\varnothing.$$

Используем соотношения 26 и I0б:

$$(\bar X\cup A\cup B)(X\cup\bar B)X\cup\bar X B=\varnothing.$$

Раскрываем скобки:

$$(\bar X\bar B\cup AX\cup A\bar B\cup BX)X\cup\bar X B=\varnothing.$$

Раскрываем скобки:

$$AX\cup A\bar B X\cup BX\cup\bar X B=\varnothing$$

Приводим уравнение к виду $MX\cup N\bar X=\varnothing$, группируя члены:

$$X(A\cup A\bar B\cup B)\cup\bar X B=\varnothing.$$

Используем соответственно соотношения 9а, 8а:

$$X(A\cup B\cup B)\cup\bar X B=\varnothing;\ X(A\cup B)\cup\bar X B=\varnothing$$

Решение записывается в виде

$$B\subset X\subset\overline{A\cup B}=\bar A\cdot\bar B.$$

I.I. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему?

I) $I\in\{\{I,\{2,\{3,4\}\}\}\}$;

2) $\{3,4\}\in\{I,\{2,\{3,4\}\}\}$;

3) $\{I,\{2,3\}\}\in\{I,\{\{2,3\},4\}\}$;

4) $\{I\}\in\{I,2,\{\{I\},4\}\}$;

5) $\{I,2\}\in\{I,2,3,4\}$;

6) $\{I,2\}\in\{I,2\}$;

7) $I\in\{\{I\},\{2,\{3,4\}\}\}$;

8) $\{I,\{2,3\}\}\in\{I,\{\{2,3\}\}\}$.

I.2. В множестве из $n$ элементов выбрано $2^{n-1}$ подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Доказать, что все эти подмножества имеют общий элемент.

I.3. Дано I99I множество, каждое из которых состоит из 45 элементов, причем объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех множеств?

I.4. Связаны ли множества A и B отношением включения? Если да, то укажите , какое из них является подмножеством другого.

I) $A=\{I,\{2,3\}\}$, $B=\{I,2,3\}$;



2) $A=\{I,2\}$, $B=\{3,4,\{I,2\}\}$;

3) $A=\{I,\{2,\{3\}\}\}$, $B=\{I,4,\{2,\{3\}\}\}$;

4) $A=\{I,\{2,\{3,4,\{5,6\}\}\}\}$; $B=\{2,\{3,4,\{5,6\}\}\}$;

5) $A=\{I,2\}$, $B=\{I,2,3,4\}$.

I.5. Определить $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\dot{-}B$.

Множества брать из задачи I.4.

I.6. Упростить выражения:

I) $A\cup\bar A B\dot{-}A$;

2) $\overline{A\bar B\dot{-}\bar A B\dot{-}\bar A\bar B}$;

3) $\overline{\overline{(A\setminus B)}\setminus(\bar A\setminus\bar B)}$;

4) $[\overline{\overline{AB\cup\bar A\cup\bar B}}\setminus(\bar A\cup\bar B)]\dot{-}A$;

5) $\overline{\overline{A\dot{-}B}\dot{-}\bar A}$;

6) $\overline{\overline{\overline{AX}\cdot B\cdot\bar B\cdot A}}$;

7) $\overline{\overline{A\cup B}\cdot\bar B\cup\overline{BA}}$.

I.7. Решить уравнения:

I) $\overline{X\setminus A=C\setminus X}$;

2) $(\bar A\cup\bar X)\cdot A\bar{\bar X}\setminus X=B$, $B\subseteq A$;

3) $\overline{A\dot{-}C\bar X=C\setminus A}$, $A\subseteq C$;

4) $(\bar X\cup A\cup\bar C)\overline{X\bar A\bar C}=C$, $A\cap C=\varnothing$;

5) $\bar A\dot{-}\underline{X\dot{-}B\dot{-}}\bar B=B$, $B\subseteq A$;

6) $\overline{AX}\cdot\overline{AX}\cdot\overline{\overline{AX}}=C$, $C\subseteq A$;

7) $A\setminus(X\setminus C)=A\cup C$;

8) $(A\setminus X)\setminus C=A\cup C$;

9) $A\bar{\bar X}\cup C=\bar{\bar X}A$;

I0) $A\dot{-}X=C\setminus X$;

II) $X\dot{-}A\dot{-}\overline{BX}=\bar A$;

I2) $\overline{A\cup(X\setminus B)}=A\bar X$;

I3) $\overline{A\dot{-}X}\dot{-}B=\bar B$;

I4) $\overline{(\bar A\setminus X)\setminus(B\setminus X)}=\bar B$;

I5) $((\overline{A\setminus X})\setminus B)\setminus(X\setminus B)=A$;

16) $\overline{\overline{\overline{A}\setminus X}\setminus B}\setminus\overline{A\setminus\overline{B}} = X\setminus A$ ;

17) $(A\cap X)\cap(C\setminus X) = A\cap C$ .

1.8. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} \overline{A}\setminus\overline{X} = X\setminus B, \\ X\setminus A = C\mathbin{\dot{-}}X; \end{cases}$

2) $\begin{cases} AX = B\setminus X, \\ C\cup X = X\setminus A; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \overline{\overline{A}\mathbin{\dot{-}}X} = B, \\ A\cup\overline{X} = C; \end{cases}$

4) $\begin{cases} A\setminus X = B\setminus X, \\ A\mathbin{\dot{-}}X = C\setminus\overline{X}, \quad A\subseteq B\subseteq C; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \overline{A\cup\overline{X}} = BX, \\ C\setminus X = A\overline{B}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \overline{A\cup\overline{BX}} = B\mathbin{\dot{-}}A, \\ C\mathbin{\dot{-}}(X\cup A) = AB, \quad A\cap B=\varnothing; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \overline{A\mathbin{\dot{-}}X} = B\mathbin{\dot{-}}A, \\ \overline{C\setminus X} = A\setminus X, \ AB=\varnothing, \ A\subseteq C; \end{cases}$

8) $\begin{cases} A\setminus(B\mathbin{\dot{-}}X) = \overline{B}, \\ C\setminus(A\setminus X) = A\setminus B; \end{cases}$

9) $\begin{cases} A\mathbin{\dot{-}}(B\setminus(A\setminus X)) = \overline{A}, \\ A\mathbin{\dot{-}}C\setminus X = AC; \end{cases}$

10) $\begin{cases} A\mathbin{\dot{-}}BX = B, \\ \overline{A}\cup C\setminus X = \overline{C\cup A}. \end{cases}$

1.9. Доказать, что для произвольных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n\geq 2)$ справедливо соотношение:

$$A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n = A_1\overline{A}_2\cup A_2\overline{A}_3\cup\dots\cup A_{n-1}\overline{A}_n\cup A_n\overline{A}_1\cup A_1A_2\dots A_n.$$



## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

Любое бинарное отношение является подмножеством декартового произведения двух множеств. Элементы теории отношений изложены в [1;2]. Любое отношение устанавливает какую-то связь между объектами. Эта связь может выражаться формулой, фразой русского языка и т.д. Если связь устанавливается между парами объектов, то соответствующее ей отношение называется бинарными. Отношение обычно обозначается буквой $\rho$ и, если объекты $x$ и $y$ связаны отношением $\rho$ , то это обозначается $x\rho y$ . Для любого бинарного отношения можно записать соответствующее соотношение. Например, для отношения "меньше/равно" соответствующее соотношение, связывающее объекты $x$ и $y$ , можно записать: $x\leq y$ . Если справедливо $x\rho y$ , то обратное, т.е. $y\rho x$ , справедливо не всегда. Любое бинарное отношение связано с <u>упорядоченным</u> перечислением пар объектов. Для рассматриваемого примера пара $x, y$ , связанная отношением $\rho$ , записывается: $<x, y>$. Таким образом, любое бинарное отношение можно представить, перечислив все упорядоченные пары объектов, связанные рассматриваемым соотношением. Например, запишем для множества $X=\{1,2,3\}$ отношение "меньше/равно". Выберем все пары чисел, в которых первое число меньше второго или равно ему. Тогда отношение представится множеством упорядоченных пар чисел:

$$\rho = \{<1,1><1,2><1,3><2,2><2,3><3,3>\} .$$

Как известно, множество всех упорядоченных пар объектов есть декартово произведение двух множеств.

Следовательно,

любое бинарное отношение есть множество упорядоченных пар объектов;

множество, которым представляется бинарное отношение, является подмножеством декартового произведения двух множеств: в первое включаются первые элементы всех упорядоченных пар, а во второе-вторые элементы всех упорядоченных пар отношения;

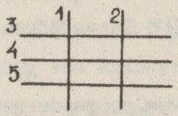
поскольку бинарное отношение - множество, то к нему применимы все положения теории множеств, в частности, над отношениями можно выполнять все операции, выполняемые над множествами, а способы задания отношений аналогичны способам задания множеств.

Вместе с тем, отношения обладают и рядом специфических свойств, в частности специфическими операциями, которые нужно изучать отдельно. К таким операциям относят операцию получения обратного отношения (симметризацию) и операцию композиции отношений.

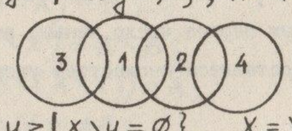
2.I. Записать отношения в стандартной форме перечислением упорядоченных пар элементов. Найти области определения и значений. Найти сечения по каждому элементу.

I) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid |x-y| \le 1 \}$, $X = Y = \{1,2,3,4\}$;

2) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid x$ параллельно $y \}$, $X = Y = \{1,2,3,4,5\}$;



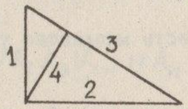

3) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid x \cap y = \varnothing \}$, $X = Y = \{1,2,3,4\}$;




4) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid x \setminus y = \varnothing \}$, $X = Y = \{A, B, C, D\}$,
$A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,2\}$, $C = \{1,3,4\}$, $D = \{1,2,3\}$;

5) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid 0 < |\frac{x-y}{2}| \le 1 \}$, $X = Y = \{1,2,3,4\}$;

6) $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid \angle(x, y) = 90^\circ \}$, $X = Y = \{1,2,3,4\}$




2.2. Над отношениями $\rho_1$ и $\rho_2$ выполнить операции $\rho_1 \cup \rho_2$,



$\rho_1 \cap \rho_2$, $\rho_1 \setminus \rho_2$, $\rho_2 \setminus \rho_1$, $\rho_1 \div \rho_2$, $\rho_1 \cdot \rho_2$, $\rho_2 \cdot \rho_1$, $\rho_1^{-1}$, $(\rho_1 \cdot \rho_2)^{-1}$:

$$\rho_1 = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle \},$$
$$\rho_2 = \{ \langle 2,4 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 3,5 \rangle \}.$$

2.3. Исследовать отношения из задачи 2.Iна рефлексивность, симметричность и транзитивность. Определить тип отношения.

2.4. Доказать, что $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2.5. Доказать, что для любых бинарных отношений $\rho$ справедливо:

$$\rho \cup \rho = \rho \cap \rho = \rho .$$

2.6. Доказать, что для любых бинарных отношений справедливо:

$$\rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3) = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 .$$

2.7 Рефлексивны ли отношения $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_1 \cap \rho_2$, $\rho_1^{-1}$, $\rho_1 \cdot \rho_2$, если рефлексивны отношения $\rho_1$ и $\rho_2$?

2.8. На множестве $S$ введено отношение $\rightarrow$, которое выполнено для пар элементов из множества $S$ и обладает следующими свойствами:

I) для любых различных элементов $a, b \in S$ выполняется ровно одно из отношений:

$a \rightarrow b$ или $b \rightarrow a$;

2) для любых трех различных элементов $a, b, c \in S$ выполнение отношений $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow c$ влечет за собой выполнение отношения $c \rightarrow a$.

Каково наибольшее число элементов, которое может содержать множество $S$?

2.9. В обществе, состоящем из I99I человека, среди любых четырех человек можно выбрать по крайней мере одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное количество людей, которые знакомы со всеми?

## 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Элементы теории графов достаточно полно изложены в [I-7].

Существует три способа задания графов: геометрический, аналитический и матричный. При геометрическом способе вершины графа изображаются точками, а связи между вершинами - линиями. Если задается орграф, то все связи ориентированы и называются дугами, если задается неограф, то все связи неориентированы и называются ребрами.

Существует две разновидности аналитического способа задания графов:

а) с помощью отображения $\Gamma$;

б) с помощью бинарного отношения $\rho$, описывающего связи вершин графа.

При матричном способе любой граф $G$ может быть задан либо матрицей смежности, либо матрицей инциденций.

Матрица смежности $R$ есть квадратная матрица формата $n \times n$, где $n$ - число вершин графа, а любой элемент $r_{ij}$ матрицы $R$ равен единице, если есть дуга, идущая от вершины $x_i$ к вершине $x_j$ графа, и равен нулю - в противном случае. Элемент $r_{ij}$ = I, если при вершине $x_i$ графа имеется петля.

Под матрицей инциденций $L$ понимается прямоугольная матрица, содержащая $n$ строк и $m$ столбцов, где $n$ - число вершин графа, а $m$ - число дуг. При этом элемент $\ell_{ij}$ матрицы $L$ равен единице, если дуга $j$ исходит из вершины $i$, $\ell_{ij}$ = -I, если дуга $j$ заходит в вершину $i$ и $\ell_{ij}$ = 0, если дуга $j$ не инцидентна вершине $i$, либо дуга $j$ - петля при вершине $i$.

В сильносвязном орграфе для любых двух его вершин $x_i$ и $x_j$ найдется путь из $x_i$ в $x_j$ и путь из $x_j$ в $x_i$. Если для любых двух вершин $x_i$ и $x_j$ имеется только путь из $x_i$ в $x_j$, либо



только путь из $x_j$ в $x_i$, то орграф называется несильносвязным. Во всех остальных случаях орграф называется несвязным.

При проектировании средств вычислительной техники часто используют разложение орграфа на компоненты сильной связности, понимая под последними сильносвязные подграфы рассматриваемого графа, удовлетворяющие условию максимальности (добавление в подграф любой вершины $x_i$ из графа с дугами, инцидентными $x_i$, нарушает условие сильной связности подграфа).

Общий подход к разложению орграфа на компоненты сильной связности заключается в выполнении последовательности следующих действий:

для произвольной вершины $x_i$ графа ищется прямое транзитивное замыкание $x_i$ (обозначается $\overset{*}{\Gamma}_{x_i}$);

для $x_i$ ищется обратное транзитивное замыкание (обозначается $\overset{*}{\Gamma}{}^{-1}_{x_i}$);

находится множество вершин графа, входящих в компоненту сильной связности с вершиной $x_i$ (обозначается $C(x_i)$) по формуле

$$C(x_i) = \overset{*}{\Gamma}_{x_i} \cap \overset{*}{\Gamma}{}^{-1}_{x_i} ;$$

выбирается вершина $x_j$, не принадлежащая $C(x_i)$, и ищется новая компонента сильной связности $C(x_j)$ в последовательности этапов, перечисленных для вершины $x_i$;

процесс разложения графа заканчивается, когда все вершины графа будут отнесены к компонентам сильной связности.

Описанная последовательность действий по поиску компонент сильной связности орграфа только поясняет общий подход. На практике используется матричный метод, получивший название метода Мальгранжа - Томеску.

На содержательном уровне операции объединения (суммы) графов соответствует наложение одного графа на другой. Образующийся после наложения граф и есть объединение графов, участвующих в операции. Пересечению графов соответствует граф, получающийся после наложения исходных графов и вычеркивания тех вершин и ребер (дуг), которые не являются общими для накладываемых графов. Операции - декартово произведение и декартова сумма - определяются формально.

Понятие цикломатического числа графа принадлежит к основным понятиям теории графов и широко используется при проектировании средств вычислительной техники (выделение схем с обратными связями на платах, обеспечение устойчивой работы цифровых автоматов за счет многофазной синхронизации и т.п.). При изучении материала наибольшее затруднение вызывает понятие остова графа. Любой граф содержит несколько остовов. Существуют специальные методы подсчета числа остовов графа. Любой из остовов графа является деревом, ветви которого проходят через вершины графа. Остов не содержит циклов. Чтобы построить остов графа, нужно в графе ликвидировать все циклы (выбрасывая из графа соответствующие ребра). Ребра остова обеспечивают минимальную его связность. Другими словами, если из остова удалить любое ребро, он распадается на две связные компоненты графа. Если граф имеет $n$ вершин, то остов всегда имеет $n$-I ребро. Примеры остовов для графа $G$ см. на рис. 3.I.

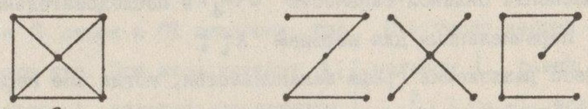



Рис.3.I

Добавление к остову графа хотя бы одного ребра, не принадлежащего остову, образует цикл. Получаемый цикл называется фундаментальным циклом графа. Число всех возможных фундаментальных циклов графа равно числу ребер графа, не входящих в его состав. Это число для рассматриваемого графа всегда постоянно и не зависит от



выбранного остова. Оно получило название цикломатического числа графа. Фундаментальные циклы позволяют получить любой цикл, имеющийся в графе, используя линейную операцию над фундаментальными циклами.

Обычно фундаментальные циклы записывают в их матрицу, а все остальные циклы графа получают на ее основе.

Число всех остовов графа можно подсчитать, используя специальный метод, получивший название теоремы Трента. Построение всех остовов графа связано с определением структурного числа графа.

Раскраска графа находит широкое применение в самых различных областях вычислительной техники, начиная от разработки технических средств и кончая математическим обеспечением. Задачи, связанные с раскраской,относятся к задачам оптимизации, а их решение позволяет получить схемы, алгоритмы и программы оптимальной структуры.

На содержательном уровне задача раскраски графа может быть сформулирована следующим образом: нужно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две смежные вершины были выкрашены в разный цвет, затратив на раскраску минимально возможное число разных цветов. При раскраске графа цветам обычно присваивают номера. Минимально возможное число разных цветов, в которые можно раскрасить вершины графа (указанным выше способом), называется хроматическим числом графа. Определить хроматическое число графа непросто. На практике обычно используют приближенные методы раскраски, дающие хорошие результаты и достаточно простые в использовании. Одним из таких методов является метод построения функции Гранди на графе.

Множество вершин графа является внутренне устойчивым, если любые две вершины этого множества не связаны ребром.

Понятие числа внутренней устойчивости на содержательном уровне сводится к поиску решения задачи: на шахматной доске расставить максимальное число фигур (например, ферзей) так, чтобы они не били друг друга. В общем случае поиск числа внутренней устойчивости графа сводится к полному перебору всех максимальных внутренне устойчивых множеств графа и выбору среди них множества с максимальной мощностью. Мощность выбранного множества и дает число внутренней устойчивости графа. Поиск числа внутренней устойчивости можно осуществить, используя специальные методы, сокращающие полный перебор. Одним из таких методов является метод Магу.

Понятие числа внешней устойчивости графа вводится через понятие внешне устойчивого множества вершин графа. Множество $A$ вершин графа внешне устойчиво, если для любой вершины $x_i$ графа, не принадлежащей этому множеству, существует дуга из некоторой вершины множества $A$ в вершину $x_i$.

Понятие числа внешней устойчивости на содержательном уровне сводится к поиску решения задачи: на шахматной доске расставить минимальное число фигур (например, ферзей), чтобы они держали под боем все клетки доски. В общем случае поиск числа внешей устойчивости графа связан с полным перебором всех максимальных внешне устойчивых множеств вершин графа и выбора среди них множества с минимальной мощностью.

Специальные методы позволяют сокращать полный перебор. Одним из таких методов является метод Магу.

Эйлеровым циклом в неографе называется такой цикл, который проходит ровно один раз по каждому ребру графа.

Гамильтонова цепь (путь) - это цепь (путь), проходящая через каждую вершину графа только один раз. Гамильтонов цикл (контур) - это гамильтонова цепь(путь), начинающаяся и заканчивающаяся в одной вершине. Один из подходов к решению задачи о коммивояжере использует так называемый метод ветвей и границ и сводится к последовательным преобразованиям матрицы расстояний графа.



В основе преобразований матрицы расстояний лежат три положения:

приведение матрицы расстояний по строкам и столбцам (определение величины нижней границы маршрута коммивояжера);

выделение нулевых клеток в приведенной матрице расстояний, которые при замене в ней символа $0$ на символ $\infty$ разрешают вычитать из своей строки и своего столбца наибольшее суммарное число;

замена содержимого клетки ( $i, j$ ) матрицы расстояний на символ $\infty$ , если наличие дуги $i \to j$ в построенной части маршрута коммивояжера образует цикл, не являющийся гамильтоновым.

3.I. Дать геометрическую интерпретацию графа 6, заданного следующим образом:

I) $G = (X, \sigma),\ X = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$,
$\sigma_{x_1} = \{x_4, x_6, x_8\},\ \sigma_{x_2} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$,
$\sigma_{x_3} = \{x_1, x_2, x_3\},\ \sigma_{x_4} = \sigma_{x_3}$,
$\sigma_{x_5} = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\},\ \sigma_{x_6} = \sigma_{x_7} = \varnothing$,
$\sigma_{x_8} = \{x_1, x_8\}$;

2) $G = (X, \sigma),\ X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$,
$\sigma_{x_1} = \{x_1, x_8\},\ \sigma_{x_2} = \{x_2, x_3\},\ \sigma_{x_3} = \sigma_{x_4} = \{x_4\}$,
$\sigma_{x_5} = \{x_5, x_6, x_7, x_8\},\ \sigma_{x_6} = \{x_1, x_6\}$;

3) $G = (X, \sigma),\ X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \sigma_{x_4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$;

4) $G = (X, \rho),\ X = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$,
$\rho = \{\langle x_1, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_1, x_3\rangle \langle x_2, x_2\rangle$,
$\langle x_2, x_4\rangle, \langle x_3, x_5\rangle, \langle x_5, x_5\rangle\}$;

5) $G = (X, \rho),\ X = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$,
$$\rho = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1, x_2, x_3 & x_4 & x_3, x_5 & \varnothing & x_1 \end{pmatrix};$$

6) $G=(X,\rho)$ , $X=\{1,2,3,4,5\}$ ,

$\rho=\{<x_i,x_j>\in(X\times X)\mid |x_i-x_j|=1\}$ ;

7) $R=\begin{Vmatrix} I&I&I&I\\ I&I&0&0\\ I&0&0&I\\ I&I&I&0 \end{Vmatrix}$ (R-матрица смежности)

8) $R=\begin{Vmatrix} I&0&I&0&I\\ 0&I&0&I&0\\ I&I&I&I&I\\ 0&0&0&I&I\\ I&I&I&0&0 \end{Vmatrix}$

9) $R=\begin{Vmatrix} 0&0&I&0&0\\ 0&0&0&I&I\\ 0&I&I&0&0\\ I&I&I&I&0\\ 0&0&0&I&I \end{Vmatrix}$

3.2. Найти объединение графов

I) $G_1=(X_1,\sigma_1)$ , $G_2=(X_2,\sigma_2)$ ,

$X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ , $X_2=\{x_1,x_2\}$ ,

$\sigma_{1x_1}=\{x_1,x_2,x_3\}$ , $\sigma_{2x_1}=\{x_2\}$ ,

$\sigma_{1x_2}=\{x_2,x_3\}$ , $\sigma_{2x_2}=\{x_1,x_2\}$ ,.

$\sigma_{1x_3}=\{x_3\}$ ;

2) $R_1=\begin{Vmatrix} I&0&I&I\\ I&I&0&I\\ I&I&I&0\\ I&0&I&I \end{Vmatrix}$ , $R_2=\begin{Vmatrix} I&I&I&I\\ I&I&I&0\\ I&0&I&I\\ I&I&0&0 \end{Vmatrix}$ .

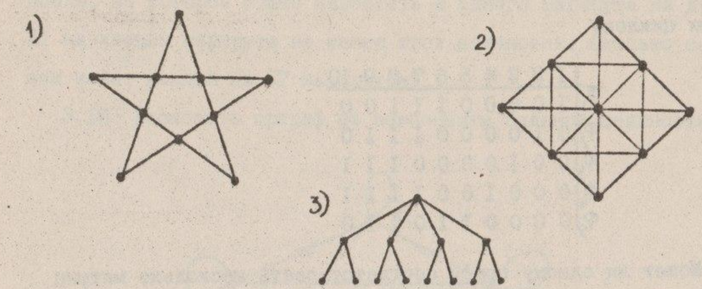
3.3. Найти пересечение графов из задачи 3.2.

3.4. Найти произведение графов из задачи 3.2.

3.5. Найти композицию графов из задачи 3.2.

3.6. Найти остовы графа :





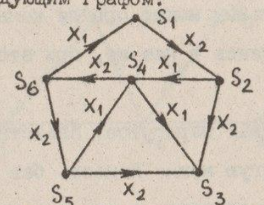

3.7. Для каждого графа из задачи 3.6 определить цикломатическое число.

3.8. Для каждого графа из задачи 3.6 построить все фундаментальные циклы по выбранному остову. По выделенным фундаментальным циклам построить матрицу фундаментальных циклов. Построить 2 цикла, не являющихся фундаментальными.

3.9. "Дельфин" - фигура, которая ходит по клеточной доске на одно поле вверх, вправо или по диагонали налево вниз. Может ли дельфин, начиная из левого нижнего угла клеточной доски размером 8x8, обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?

3.I0. В некоторой стране I000 дорог соединяют 200 городов, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Какое наибольшее число дорог можно одновременно закрыть на ремонт, не нарушив при этом связь между городами?

3.II. Обеспечить устойчивость функционирования цифрового автомата, заданного следующим графом:



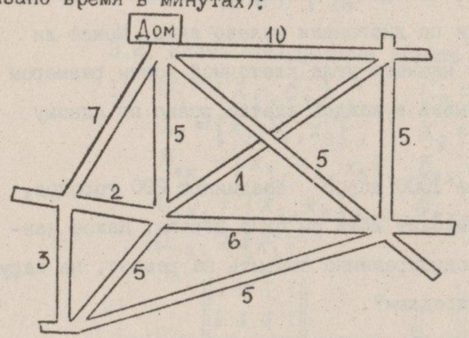

3.I2. Показать, что данная матрица не является матрицей фундаментальных циклов:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\Phi_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\Phi_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\Phi_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\Phi_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

3.13. Может ли одному графу соответствовать несколько матриц фундаментальных циклов?

3.14. Может ли одной и той же матрице фундаментальных циклов соответствовать несколько графов?

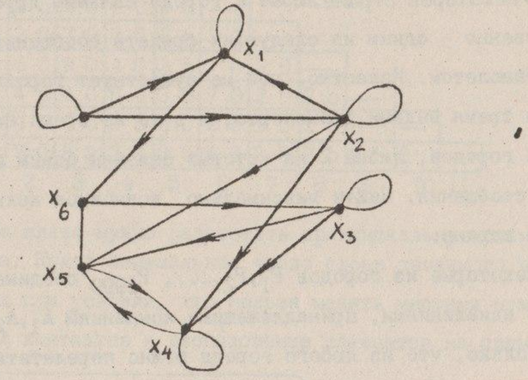
3.15. Инженер занимается бегом трусцой утром перед работой. Длительность одной пробежки 20 мин. С помощью цикломатического числа найти все возможные циклические маршруты, начинающиеся и заканчивающиеся около дома инженера. Карта местности имеет вид (указано время в минутах):

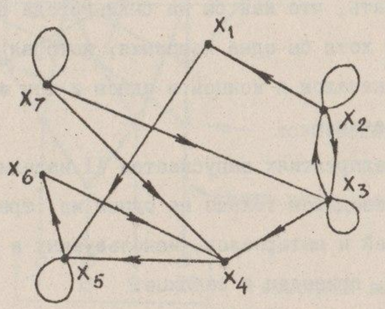


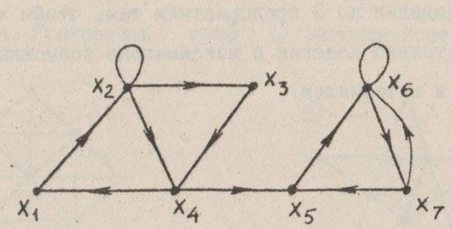

3.16. Задана шахматная доска размером 3x4. Определить максимальное число клеток, по которым может пройти конь, начав из угловой клетки и в конце возвращаясь в нее же, при этом клетки доски не должны повторяться.

3.17. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что: 1) с любой остановки на любую другую можно попасть без пересадки; 2) для любой пары маршрутов найдется, и при том только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного маршрута на другой; 3) на каждом маршруте не менее трех остановок. Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

3.18. Разложить орграф на компоненты сильной связности:



3.I9. Показать, что в графе с $n$ вершинами и $C$ компонентами связности без петель и кратных ребер справедливо соотношение

$$m \leq \frac{1}{2}(n-c)(n-c+1),$$

где $m$ - число ребер.

3.20. В некоторой стране любые 2 города связаны друг с другом непосредственно одним из следующих средств сообщения: автобусом поездом, самолетом. Известно, что не существует города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует таких 3 городов, любые 2 из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Найти максимально возможное количество городов в этой стране.

3.2I. Некоторые из городов $P_I, P_2, \ldots, P_{I990}$ соединены попарно некоторыми авиалиниями, принадлежащими компаниям $A_I, A_2, \ldots, A_{I0}$. Известно только, что из любого города можно перелететь в любой другой без пересадок и что каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Доказать, что как бы ни были города соединены авиалиниями, существует хотя бы одна компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе и с нечетным числом авиалиний.

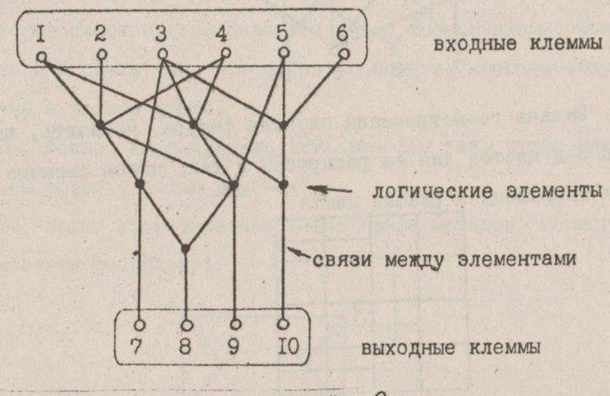
3.22. На трех предприятиях выпускается II изделий (I,2,...,II). Каждое изделие производится только на одном из трех предприятий. Процент общих деталей и материалов, используемых в производстве каждых двух изделий, приведен в таблице.

Разделить изделия по 3 предприятиям так, чтобы каждое из них выпускало только изделия с максимально возможным процентом общих деталей и материалов.



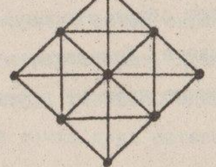
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | — | | | | | | | | | | |
| 2 | 55 | — | | | | | | | | | |
| 3 | 60 | 80 | — | | | | | | | | |
| 4 | 85 | 65 | 40 | — | | | | | | | |
| 5 | 45 | 90 | 35 | 80 | — | | | | | | |
| 6 | 80 | 75 | 30 | 90 | 90 | — | | | | | |
| 7 | 50 | 30 | 70 | 35 | 65 | 30 | — | | | | |
| 8 | 50 | 60 | 90 | 40 | 35 | 70 | 30 | — | | | |
| 9 | 60 | 45 | 40 | 80 | 30 | 70 | 20 | 25 | — | | |
| I0 | 45 | 40 | 45 | 35 | 80 | 20 | 90 | 25 | 85 | — | |
| II | 80 | 70 | 85 | 30 | 35 | 40 | 25 | 75 | 75 | 60 | — |
| | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | I0 | II |

3.23. На плате нужно разместить принципиальную схему цифрового автомата. Какое минимальное число слоев печатного монтажа потребуется при условии, что нельзя менять местами номера входных и выходных контактов и расположение элементов на схеме.

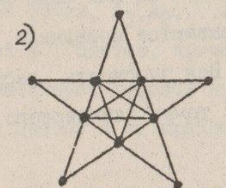



3.24. Раскрасить граф $G$ методом построения функции Гранди.

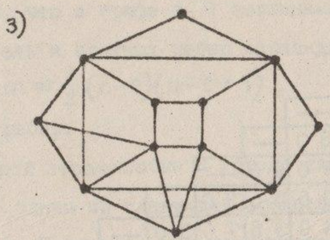
1)



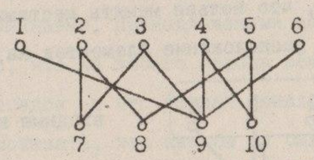
2)



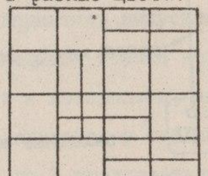
з)



3.25. На рисунке показана схема электрических соединений печатной платы. Вершины соответствуют клеммам, ребра - металлическим проводникам на печатной плате. Проводники на плате не должны пересекаться. Какое минимальное число слоев печатной платы потребуется?




3.26. Задана геометрически плоская фигура. Показать, что достаточно 3-х цветов для ее раскраски и так, чтобы смежные области были выкрашены в разные цвета.



3.27. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было четное число закрашенных соседей (две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

3.28. Вся плоскость раскрашена в 2 цвета. Доказать, что существуют 2 точки одинакового цвета, удаленные друг от друга ровно на I м.

3.29. Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.



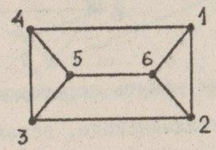
3.30. Имеются провода I2 цветов. Можно ли I3 ЭВМ соединить попарно проводами так, чтобы от каждой из них выходило I2 проводов разных цветов?

3.31. На плоскости проведено $n$ окружностей. Доказать, что каждый из участков, на которые при этом разбилась плоскость, можно закрасить в один из двух цветов - в черный или в белый, причем так, что любые 2 соседних участка (граничащие по дуге окружности) будут окрашены в разные цвета.

3.32. Треножником будем называть фигуру, состоящую из трех лучей, исходящих из одной точки. На плоскости расположено несколько треножников, причем так, что никакие 2 луча, принадлежащие различным треножникам, не лежат на одной прямой. Доказать, что области, на которые плоскость разбивается этими треножниками, можно раскрасить в 3 цвета так, что любые 2 области, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета.

3.33. Можно ли соединить 199I телефон так, чтобы каждый был соединен ровно с пятью другими?

3.34. Найти хроматическое число графа методом точного поиска и произвести раскраску:




3.35. На прямой отмечены $n$ различных точек, $A_I, A_2, \ldots A_n$ $(n \geqslant 4)$. Каждая из этих точек окрашена в один из 4 цветов, причем все 4 цвета присутствуют. Доказать, что существует отрезок прямой, содержащий ровно по одной точке двух цветов и по крайней мере по одной точке двух оставшихся цветов.

3.36. Пусть каждая клетка прямоугольной доски 4x7 окрашена в белый или черный цвет. Доказать, что на доске обязательно найдется прямоугольник, образованный горизонтальными и вертикальными линиями доски, все четыре угловые клетки которого окрашены в одинаковый цвет.

3.37. На плоскости проведено $n$ прямых. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так закрасить двумя красками, что никакие 2 соседние области (т.е. области, соприкасающиеся по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

3.38. Каждая точка пространства окрашена в один из фиксированных 5 цветов, причем имеется 5 точек, окрашенных в различные цвета. Доказать, что

а) существует прямая, все точки которой окрашены не менее, чем в 3 цвета;

б) плоскость, все точки которой окрашены не менее, чем в 4 цвета.

3.39. Найти хроматическое число графа и произвести раскраску.


3.40. Организации необходимо нанять переводчиков с французского, немецкого, греческого, итальянского, испанского, английского и китайского языков на русский. Имеется 5 кандидатур. Каждая кандидатура владеет несколькими языками (см.таблицу). Какое минимальное число переводчиков нужно нанять, чтобы осуществить перевод с любого языка на русский?

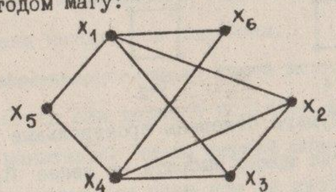


| Языки \ Перевод. | A | B | C | Д | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Французский | I | 0 | I | I | 0 |
| Немецкий | I | I | 0 | 0 | 0 |
| Греческий | 0 | I | 0 | 0 | 0 |
| Итальянский | I | 0 | 0 | I | 0 |
| Испанский | 0 | 0 | I | 0 | 0 |
| Английский | 0 | I | I | 0 | I |
| Китайский | 0 | 0 | 0 | I | I |

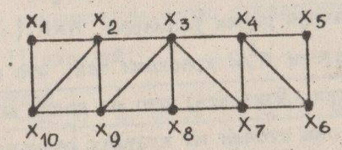
3.41. Найти хроматическое число графа

3.42. Перевозчику нужно перевезти на лодке козу, капусту и волка. В лодке, кроме перевозчика, умещается только один пассажир. Как перевезти все так, чтобы коза не съела капусту, а волк – козу?

3.43. Перечислить все максимальные внутренне устойчивые множества графа методом Магу:




3.44. Найти все максимальные внутренне устойчивые множества графа:



3.45. Расположить максимальное число ладей на шахматной доске так, чтобы ни одна из них не била другую.

3.46. Расположить максимальное число ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не мог побить другого.

3.47. Расположить максимальное число слонов на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

3.48. Расположить максимальное число коней на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

3.49. Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

3.50. Какое максимальное число магараджей можно разместить на шахматной доске 10x10 так, чтобы они не били друг друга (магараджа совмещает ход ферзя и коня)?

3.51. В натуральном двоичном коде длины 3 выделить методом Магу все варианты множеств двоичных векторов максимальной мощности, не склеивающихся друг с другом.

3.52. Найти число внутренней устойчивости для произведения графов $G_1$ и $G_2$ :

$G_1$ $G_2$

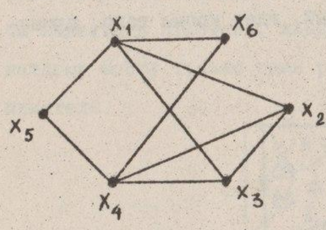
3.53. На клетчатой бумаге отмечены произвольные $n$ клеток. Доказать, что из них всегда можно выбрать не менее $n/4$ клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

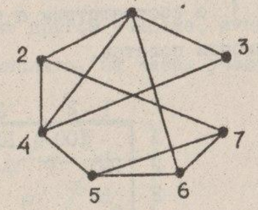
3.54. Клетки шахматной доски размером $n \times n$ ( $n$ - четное число, большее 2) раскрашены $n^2/2$ красками так, что каждой краской окрашено ровно 2 клетки. Доказать, что на доске можно расставить $n$ ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и не били друг друга.



3.55. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них среди присутствующих имеет $\leqslant (n-1)$ врагов. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

3.56 Найти все минимальные внешне устойчивые множества графа методом Магу:




3.57. Расположить на шахматной доске 8x8 минимальное число ладей так, чтобы все клетки шахматной доски находились под боем.

3.58. Расположить минимальное число слонов так, чтобы все клетки шахматной доски находились под боем.

3.59. Какое минимальное число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они держали под боем все ее свободные поля?

3.60. Какое наименьшее число ферзей можно расставить на доске так, чтобы они держали под боем все ее свободные поля?

3.61. 6 предприятий выпускают II изделий. Найти методом Петрика и методом Магу минимальное число предприятий, которые могли бы выпускать все II изделий:

| Изделия / Предприятия | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | I0 | II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | I | | | I | I | | I | | | | |
| 2 | I | I | | | | I | | | I | | I |
| 3 | | I | I | I | | I | | I | | I | |
| 4 | | | I | | I | | | | | | I |
| 5 | | | | | | | I | I | I | I | |
| 6 | | I | | | I | | | | | I | I |

3.62. Найти ядра графов:

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | | | | I | | |
| 2 | | | | | | I |
| 3 | | | | | I | |
| 4 | I | | | | | |
| 5 | | | I | | | |
| 6 | I | I | I | I | I | |

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | | | I | I | I | I |
| 2 | | | I | I | I | I |
| 3 | I | I | | | I | I |
| 4 | I | I | | | I | I |
| 5 | I | I | I | I | | |
| 6 | I | I | I | I | | |

3.63. Имеется 6 аэропортов. Из аэропорта $i$ можно попасть в аэропорт $j$ в соответствии с таблицей, где, кроме того, приведены стоимости полетов.

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | | I00 | I0 | | | |
| 2 | I00 | | | 50 | | 20 |
| 3 | I0 | | | 30 | | 40 |
| 4 | | 50 | 30 | | I5 | |
| 5 | | | | I5 | | |
| 6 | | 20 | 40 | | | |

Имеется 6 возможных маршрутов перелета из аэропорта в аэропорт:

№I: I→2→6→3→I

№2: 2→4→3→I→3→4→2

№3: 3→4→5→4→3

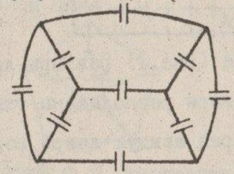
№4: I→2→4→5→4→2→I

№5: 2→6→3→4→5→4→3→6→2

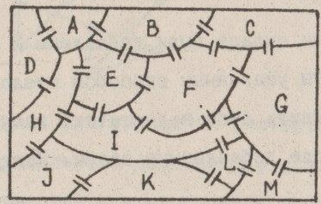
№6: I→3→6→2→I

Найти множество маршрутов среди перечисленных в условии с наименьшей суммарной стоимостью и такое, что любой перелет из аэропорта в аэропорт в соответствии с таблицей включался хотя бы в один маршрут.

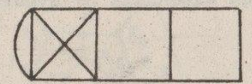
3.64 На рисунке изображен район местности с каналами и мостами через каналы. Для каких участков выполняется условие: начав движение из одного района суши, попасть в другой район суши, пройдя по каждому мосту ровно один раз и не повторяя мосты:



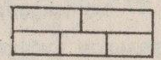
3.65. На рисунке изображена схема района с каналами и мостами. Человек выходит с одного из участков, обозначенных буквами, чтобы навестить приятеля, живущего на другом участке, и проходит по каждому мосту только один раз. Выяснить, на каких участках живут приятели.




3.66 Можно ли нарисовать фигуру с помощью одной непрерывной линии?

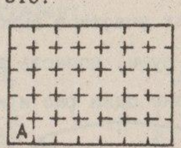


3.67. Имеется сеть отрезков прямых:



Начав с любого места, нужно обойти ее, побывав на каждом отрезке только один раз и нигде не пересекая своего пути.

3.68. Узник, приговоренный к пожизненному заключению, обратился к королю с просьбой о помиловании. Король предложил помиловать узника, если тот, отправляясь из камеры А, побывает в каждой камере тюрьмы и возвратится опять в А, не заходя дважды ни в одну из камер. Возможно ли это?




3.69. На плане склада (рис.I) разрывы линий обозначают двери. Внутренние и наружные двери расположены так, что, начав из комнаты B, можно пройти через каждую дверь ровно один раз.

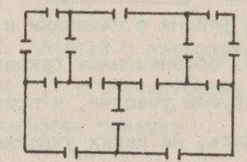


Рис.I

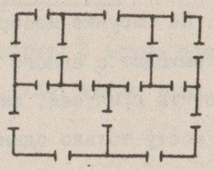
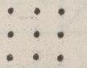


Рис.2

При реконструкции склада были добавлены 2 наружные двери (рис.2), и обойти все комнаты указанным способом стало невозможным. Архитектор, чтобы исправить этот недостаток, замуровал одну из дверей, сохранив при этом две добавленные двери. Каждую дверь замуровал архитектор?

3.79. Имеется 9 точек. Соединить их с помощью четырех отрезков прямых, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя отрезков прямых.

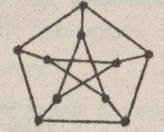


3.7I. Куб разбили на 27 одинаковых кубиков. Жук в начальный момент находится в центральном кубике. Из каждого кубика он может перейти в один из 6 соседних кубиков, которые имеют с ним общую грань. Может ли жук обойти все кубики, побывав в каждом по одному разу?

3.72. Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?



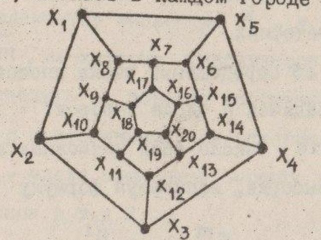
3.73. Доказать, что в графе Петерсона (см.рисунок) нет гамильтонова цикла, но в графе, полученном из него удалением одной из вершин, имеется гамильтонов цикл:



3.74. Показать, что граф с $n$ вершинами, имеющий не менее $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ребер, имеет гамильтонов цикл.

3.75. Найти все гамильтоновы цепи графа, используя алгоритм Робертса-Флореса:

3.76. Даны 20 городов. Для упрощения считается, что они расположены в вершинах правильного додекаэдра, условно изображающего Землю. Можно ли осуществить кругосветное путешествие, двигаясь по ребрам додекаэдра, побывав в каждом городе только один раз?




3.77. В графе $G_1$ имеется гамильтонов цикл, а в графе $G_2$ – гамильтонова цепь ( гамильтонов цикл). Верно ли, что в графе $G_3 = G_1 \times G_2$ существует гамильтонов цикл.

3.78. Показать, что, если для любых двух вершин $v_i$ и $v_j$ связного $n$ -вершинного графа выполняется условие $m(v_i)+m(v_j) \geqslant n$, то граф имеет гамильтонов цикл ( $m(v_i)$ – степень вершины $v_i$ ).

3.79. Показать, что граф, у которого имеются 2 несмежные вершины третьей степени, а остальные вершины имеют степень 2, не обладает гамильтоновым циклом.

3.80. Решить задачу о коммивояжере для заданной матрицы расстояний:

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 00 | IO | 5 | I5 | 20 |
| 2 | I5 | 00 | IO | IO | 25 |
| 3 | 5 | IO | 00 | I5 | IO |
| 4 | I5 | IO | I5 | 00 | I5 |
| 5 | 20 | 25 | IO | 20 | 00 |

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 00 | I | 2 | 3 | 4 |
| 2 | I | 00 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 5 | 6 | 00 | 7 | 8 |
| 4 | 9 | IO | 9 | 00 | IO |
| 5 | 8 | 7 | 6 | 5 | 00 |

## 4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

При изучении комбинаторных методов используются понятия множества и операции над множествами, поскольку большинство задач комбинаторики можно сформулировать как задачи теории конечных множеств [8-IO]. Далее даны основные вопросы по теме, позволяющие закрепить изучаемый материал.

I. Является ли задача об определении числа способов выбора $m$ из $n$ различных предметов задачей о числе выборок?

2. Можно ли найти число всех возможных выборок из $n$ предметов по $m$ в каждой выборке, используя формулу

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad ?$$

3. Можно ли определить число $P(n)$ всех возможных перестановок из $n$ различных предметов по формуле $P(n) = n!$ ?

4. Можно ли найти число всех возможных подстановок множества А в множество В по формуле $P(n) = n!$, если каждое из



множеств имеет по $n$ элементов?

5. Чем отличается подстановка от перестановок?

6. Является ли задача о нахождении способов размещения $m$ различных предметов из $n$ различных предметов по $m$ различным местам задачей о размещениях?

7. Можно ли определить число размещений $m$ предметов из $n$ предметов по $m$ различным местам, используя формулу

$$A_n^m = C_n^m P(m),$$

где $P(m)$ – число перестановок из $m$ предметов?

8. **Является ли задача о нахождении числа способов разложения множества А на взаимно непересекающиеся подмножества задачей о разбиении множества А?**

9. Можно ли подсчитать число способов разбиения множества А, используя формулу

$$C(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \dots k_m!},$$

где $n$ – число элементов множества $A$, а $k_i$ – число элементов множества $B_i$, $i \in \overline{1,m}$, на которые разбивается множество А?

IO. Можно ли определить по формуле разбиений число всех возможных перестановок с повторениями при условии, что $n$ – общее число элементов, $k_1$ – число элементов первого типа, $k_2$ – число элементов второго типа и т.д.?

II. Можно ли найти число всех возможных выборок из $n$ элементов по $m$ элементов при условии, что каждый элемент повторяется $m$ раз, используя формулу

$$f_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{n+m-1}{m!\,(n-1)!} \quad ?$$