Зміст

1. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$

2. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$

3. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

4. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x + 1 = 0$

5. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

6. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

7. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y + 25 = 0$

8. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 36x - 18y - 1 = 0$

9. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x - 4 = 0$

СЛАР

10. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+x_4-x_6=0 \\ -3x_1+x_2-x_3+4x_4=0 \\ 9x_1+3x_2+5x_3-2x_4+5x_5=0 \\ -9x_1-4x_3+7x_4-x_6=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_5-x_6=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \\ -5x_1+11x_2+8x_3-6x_6=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_5=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3-x_4+5x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4-6x_5=0 \\ -5x_1+11x_2+8x_3-6x_4=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_5=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4+2x_5=0 \\ -5x_1+8x_3-6x_4+x_5+3x_6=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_4=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_2+3x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+3x_4-5x_6=0 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_7=0 \end{cases}$

17.

На гіперболі $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$, знайти точку M_0 найближчу до прямої $3x+2y+1=0$, та обчислити відстань від цієї точки до прямої.

18.

На параболі $y^2=64x$, знайти точку M_0, найближчу до прямої $4x+3y-14=0$, та обчислити відстань від цієї точки до прямої.

19.

Знайти рівняння площин, що ділять двогранні кути між площинами $3x-y+2z+1=0$ і $x+7y-6z=0$ навпіл.

20.

Написати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задана його вершина $A(1,3)$ і рівняння двох медіан: $x-2y+1=0$ і $y-1=0$.

21.

З лівого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ під тупим кутом α до вісі *Ox* напрямлений промінь світла, причому $tg\alpha=-2$. Написати рівняння прямої, на якій лежить промінь, який відбився від еліпса.

22.

Знайти довжину та рівняння спільного перпендикуляра до прямих $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{0}$.

23.

Довести лінійність оператора, вказати його матрицю: оператор проектування на площину $\sqrt{3}x+y=0$.

24.

Застосувати процесс ортогоналізації Грамма-Шмідта до системи векторів:

$\vec{f}_1=(1,-2,2);\ \vec{f}_2=(1,0,1);\ \vec{f}_1=(5,-3,-7)$

1.

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$$

1. Перетворимо квадратичну форму:

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 5x^2+8xy+5y^2$$

матриця квадратичної форми $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{pmatrix}5-\lambda&4\\4&5-\lambda\end{pmatrix} = (5-\lambda)^2-16=0 \qquad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=9\end{array}\right.$$

Оскільки $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ маємо криву еліптичного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda=\lambda_1=1$

$$\begin{cases}4x_1+4x_2=0\\4x_1+4x_2=0\end{cases} \iff x_1=-x_2 \qquad \begin{array}{l}x_1 - \text{базисна}\\ x_2=c - \text{вільна}\end{array}$$

$$\vec{f_1}=c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad |\vec{f_1}|=|c|\sqrt{2} \quad \vec{i}=\frac{c}{|c|}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$\lambda=\lambda_2=9$

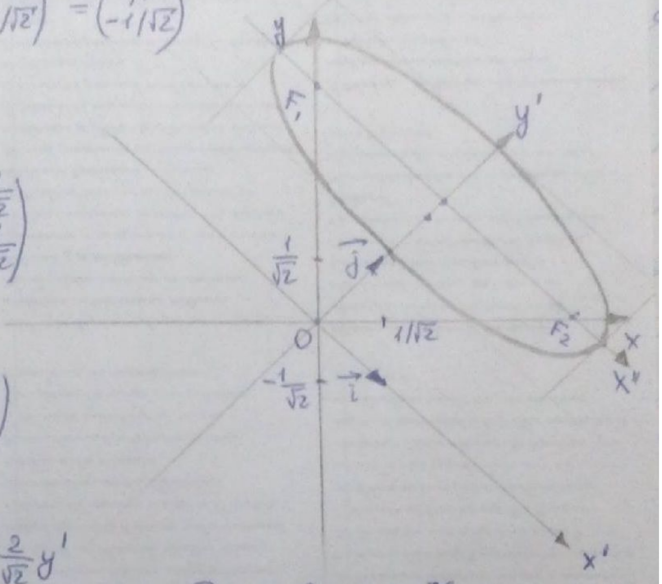
$$\begin{cases}4x_1-4x_2=0\\4x_1-4x_2=0\end{cases} \iff x_1=x_2$$

x_1 - базисна

$x_2=c$ - вільна

$$\vec{f_2}=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad |\vec{f_2}|=|c|\sqrt{2} \quad \vec{j}=\frac{c}{|c|}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$



2. Перетворення лінійної форми

$$L(x,y) = -18x-18y \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\end{cases}$$

$$L(x',y')=-18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}y'$$

Рівняння кривої в базисі $\{\vec{i},\vec{j}\}$ набуває вигляду: $x'^2+9y'^2-\frac{36}{\sqrt{2}}y'+9=0$

3. Виділимо повні квадрати:

$$\frac{1}{9}x'^2+y'^2-\frac{4}{\sqrt{2}}y'+1=0$$

$$\frac{1}{9}x'^2+(y'^2-2\sqrt{2}y'+2)-2+1=0$$

$$\frac{1}{9}x'^2+(y'-\sqrt{2})^2=1$$

$$\begin{cases}x''=x'\\y''=y'-\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \frac{x''^2}{9}+y''^2=1$$

$a=3$ $\qquad F_1(-2\sqrt{2};0)$

$b=1$ $\qquad F_2(2\sqrt{2};0)$

$c=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$

2. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = x^2 - 4xy + 4y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$

$\lambda_1 = \dfrac{-(-5)+5}{2\bullet 1} = 5 \qquad \lambda_2 = \dfrac{-(-5)-5}{2\bullet 1} = 0$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 = 0$ маємо криву параболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = 0 \qquad 1x_1 - 2y_1 = 0 \qquad 2x_1 = x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$-2x_1 + 4y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(2;1) \qquad |f_1| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 5 \qquad -4x_1 - 2y_1 = 0 \qquad x_1 = -2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$-2x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(1;-2) \qquad |f_2| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad X^{T\prime}A'x' = 5y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -4x - 3y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x = 2\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \qquad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1$

$L(x_1, y_1)$=4(підставити x)-3(підставити y)

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду:

$5y^2_1 - 11\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = 7$

3. Виділимо повні квадрати:

$(y_1 - {}^1/_5\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{5}(4x + {}^{174}/_{25})$

$(y - {}^1/_5\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 2 * {}^2/_5(x - ({}^{-87}/_{50}))$

Перетворити в канонічне

$p = {}^2/_5$

$F_1(-1/5;0)$

3. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = 5x^2 + 12xy$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ 6 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$

$\lambda_1 = \frac{-(-5)+13}{2 \bullet 1} = 9$ $\quad$ $\lambda_2 = \frac{-(-5)-13}{2 \bullet 1} = -4$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 < 0$ маємо криву гіперболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = -4$ $\quad$ $9x_1 + 6y_1 = 0$ $\quad$ $2x_1 = -3x_2$ $\quad$ x_1 – базисна змінна

$6x_1 + 4y_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(2;-3)$ $\quad$ $|f_1| = |c|\sqrt{13}$ $\quad$ $\vec{i} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 9$ $\quad$ $4x_1 + 6y_1 = 0$ $\quad$ $3x_1 = 2x_2$ $\quad$ x_1 – базисна змінна

$6x_1 - 9y_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(3;2)$ $\quad$ $|f_2| = |c|\sqrt{13}$ $\quad$ $\vec{j} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ $\quad$ $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ $\quad$ $X^{T\prime}A'x' = -4x_1^2 + 9y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -22x - 12y$ $\quad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{\sqrt{13}} & 3\frac{1}{\sqrt{13}} \\ -3\frac{1}{\sqrt{13}} & 2\frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $x = \frac{2}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_1$ $\quad$ $y = \frac{-3}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_1$

$L(x_1, y_1) = -22\left(\frac{2}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_1\right) - 12\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_1\right) = \ldots$

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду: $-4x^2_1 + 9y^2_1 - 8\frac{1}{\sqrt{13}}x_1 - 90\frac{1}{\sqrt{13}}y_1 = 19$

3. Виділимо повні квадрати:

для x_1:

$-4\left(x_1^2 + 2 \bullet \frac{1}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{1^2}{\sqrt{13}}\right) + 4 \bullet \frac{1^2}{\sqrt{13}} = -4\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + {}^4/_{13}$

для y_1:

$9\left(y_1^2 - 2 \bullet 5 \bullet \frac{1}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{5^2}{\sqrt{13}}\right) - 9 \bullet \frac{5^2}{\sqrt{13}} = 9\left(y_1 - 5 \bullet \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - {}^{225}/_{13}$

$\frac{-1}{9}\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y_1 - 5\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$

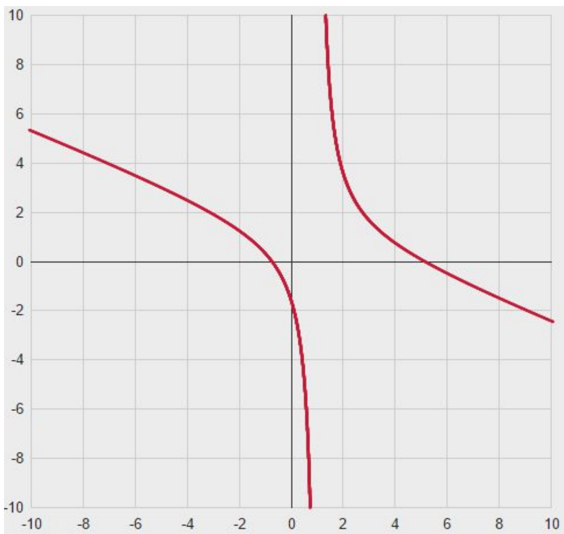
$x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}$ $\quad$ $y_2 = y_1 - 5\frac{1}{\sqrt{13}}$ **перетворити в канонічне**

$a = 3$ $b = 2$ $c = \sqrt{13}$

$F_1(-\sqrt{13};0)$ и $F_2(\sqrt{13};0)$,

Асимптоти гіперболи:

$y_1 - 5\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3}\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ $\quad$ $y_1 - 5\frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{3}\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$



4. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x + 1 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = x^2 + 4xy - 2y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda_1 = \frac{-1+5}{2\bullet 1} = 2 \quad \lambda_2 = \frac{-1-5}{2\bullet 1} = -3$

Оскільки $\lambda_{1*}\lambda_2 < 0$ маємо криву гіперболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = -3 \qquad 4x_1 + 2y_1 = 0 \qquad x_1 = -2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$\qquad 2x_1 + 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(1;-2) \qquad |\, f_1 \,| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 2 \qquad -1x_1 + 2y_1 = 0 \qquad 2x_1 = x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$\qquad 2x_1 - 4y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(2;1) \qquad |\, f_2 \,| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad X^{T\prime}A'x' = -3x_1^2 + 2y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -4x \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -2\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \qquad y = -2\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1$

$L(x_1, y_1) = -4$(підставити x)=…

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду: $-3x^2_1 + 2y^2_1 - 4\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - 8\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = 1$

3. Виділимо повні квадрати:

для x_1:

$-3\left(x_1^2 + 2\bullet {}^2/_3 \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{({}^2/_3)^2}{\sqrt{5}}\right) + 3\bullet\frac{({}^2/_3)^2}{\sqrt{5}} = -3\left(x_1 + {}^2/_3 \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + {}^4/_{15}$

для y_1:

$2\left(y_1^2 - 2\bullet 2\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2^2}{\sqrt{5}}\right) - 2\bullet\frac{2^2}{\sqrt{5}} = 2\left(y_1 - 2\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^8/_5$

$-9\left(x_1 + {}^2/_3\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$

$x_2 = x_1 + {}^2/_3\frac{1}{\sqrt{5}} \quad y_2 = y_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}$ **перетворити в канонічне**

$a = {}^1/_3$ (мнимая полуось); $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (действительная полуость)

$c = {}^5/_{18}$

$F_1(-{}^5/_{18};0)$ и $F_2({}^5/_{18};0)$,

Асимптоти гіперболи:

$y_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{{}^1/_3}\left(x_1 + {}^2/_3\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad y_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{{}^1/_3}\left(x_1 + {}^2/_3\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

5. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^{T}Ax = 2x^2 + 4xy + 5y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = \frac{-(-7)+5}{2\bullet 1} = 6 \qquad \lambda_2 = \frac{-(-7)-5}{2\bullet 1} = 1$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 > 0$ маємо криву еліптичного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = 1 \qquad 1x_1 + 2y_1 = 0 \qquad 2x_1 = -1x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$2x_1 + 4y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(2;-1) \qquad |f_1| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 6 \qquad -4x_1 + 2y_1 = 0 \quad x_1 = 2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$2x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(1;2) \qquad |f_2| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad X^{T'}A'x' = x_1^2 + 6y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -6x - 8y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x = 2\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1$

$L(x_1, y_1) = -6$(підставити x) -8(підставити y) $= \ldots$

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду: $x^2_1 + 6y^2_1 - 4\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - 22\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = 1$

3. Виділимо повні квадрати:

для x_1:

$\left(x_1^2 - 2\bullet 2\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2^2}{\sqrt{5}}\right) - 1\bullet\frac{2^2}{\sqrt{5}} = \left(x_1 - 2\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^4/_5$

для y_1:

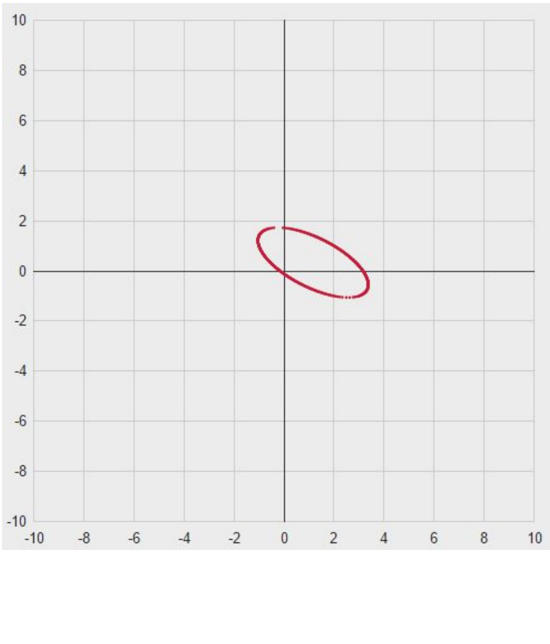
$6\left(y_1^2 - 2\bullet{}^{11}/_6\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{({}^{11}/_6)^2}{\sqrt{5}}\right) - 6\bullet\frac{({}^{11}/_6)^2}{\sqrt{5}} = 6\left(y_1 - {}^{11}/_6\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^{121}/_{30}$

$\frac{6}{35}\left(x_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{36}{35}\left(y_1 - {}^{11}/_6\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$

$x_2 = x_1 + {}^2/_3\frac{1}{\sqrt{5}} \quad y_2 = y_1 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}$ **перетворити в канонічне**

$a = \sqrt{{}^{35}/_6}$; $b = {}^1/_6\sqrt{35}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{{}^{35}/_6 - {}^{35}/_{36}} = {}^5/_6\sqrt{7} \approx 2.2$

$F_1(-{}^5/_6\sqrt{7};0)$, $F_2({}^5/_6\sqrt{7};0)$.



6. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = 4xy + 3y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = \dfrac{-(-3)+5}{2\bullet 1} = 4 \qquad \lambda_2 = \dfrac{-(-3)-5}{2\bullet 1} = -1$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 < 0$ маємо криву гіперболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = -1 \qquad \begin{matrix} 1x_1 + 2y_1 = 0 \\ 2x_1 + 4y_1 = 0 \end{matrix} \qquad 2x_1 = -1x_2 \qquad \begin{matrix} x_1 \text{ – базисна змінна} \\ x_2 = c \text{ – вільна} \end{matrix}$

$f_1 = c(2;-1) \qquad |f_1| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 4 \qquad \begin{matrix} -4x_1 + 2y_1 = 0 \\ 2x_1 - 1y_1 = 0 \end{matrix} \qquad x_1 = 2x_2 \qquad \begin{matrix} x_1 \text{ – базисна змінна} \\ x_2 = c \text{ – вільна} \end{matrix}$

$f_2 = c(1;2) \qquad |f_2| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad X^{T\prime}A'x' = -1x_1^2 + 4y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = 16x + 12y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x = 2\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1$

$L(x_1, y_1)$= 16(підставити x)+12(підставити y)=…

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду: $-x^2_1 + 4y^2_1 + 20\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 40\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = 36$

3. Виділимо повні квадрати:

для x_1:

$-1\left(x_1^2 - 2\bullet 10\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{10^2}{\sqrt{5}}\right) + 1\bullet\frac{10^2}{\sqrt{5}} = -1\left(x_1 - 10\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20$

для y_1:

$4\left(y_1^2 + 2\bullet 5\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{5^2}{\sqrt{5}}\right) - 4\bullet\frac{5^2}{\sqrt{5}} = 4\left(y_1 + 5\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 20$

$\frac{-1}{36}\left(x_1 - 10\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(y_1 + 5\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$

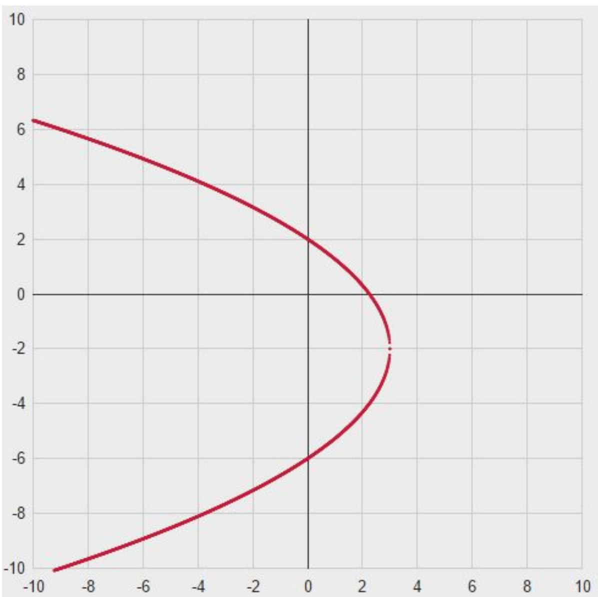
$x_2 = x_1 - 10\frac{1}{\sqrt{5}} \quad y_2 = y_1 + 5\frac{1}{\sqrt{5}}$ **перетворити в канонічне**

$a = 6 \quad b = 3 \quad c = 3\sqrt{5}$

$F_1(-c;0) \quad F_2(c;0)$

Асимптоти гіперболи:

$y_1 + 5\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{6}\left(x_1 - 10\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad y_1 + 5\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{6}\left(x_1 - 10\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$



7. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y + 25 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = x^2 - 2xy + y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda_1 = \dfrac{-(-2)+2}{2\bullet 1} = 2 \qquad \lambda_2 = \dfrac{-(-2)-2}{2\bullet 1} = 0$

Оскільки $\lambda_{1*}\,\lambda_2 = 0$ маємо криву параболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = 0 \qquad 1x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_1 = x_2 \quad x_1$ – базисна змінна

$\qquad -1x_1 + 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(1;1) \qquad |\, f_1 \,| = |c|\sqrt{2} \qquad \vec{i} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 2 \qquad -1x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_1 = -2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$\qquad -1x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(1;-1) \qquad |\, f_2 \,| = |c\sqrt{2} \qquad \vec{j} = \dfrac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad X^{T\prime}A'x' = 2\,y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -x-y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y1 \end{pmatrix} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1$

$L(x_1, y_1)$=-(підставити x)-(підставити y)

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду:

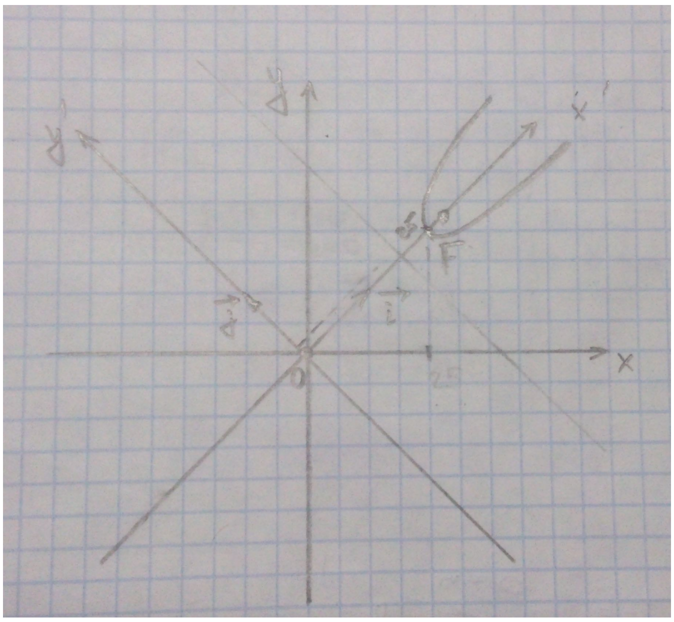
$2y_1^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 = 25$

3. Виділимо повні квадрати:

$y^2 = \frac{1}{2}(x - 25)$ **перетворити в канонічне**

$p = {}^1/_4$

$F(1/8;0)$;



8. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 36x - 18y - 1 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = 2x^2 + 4xy + 5y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = \frac{-(-7)+5}{2\bullet 1} = 6 \qquad \lambda_2 = \frac{-(-7)-5}{2\bullet 1} = 1$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 > 0$ маємо криву еліптичного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = 1 \qquad 1x_1 + 2y_1 = 0 \qquad 2x_1 = -1x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$2x_1 + 4y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(2;-1) \qquad |f_1| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 6 \qquad -4x_1 + 2y_1 = 0 \quad x_1 = 2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$2x_1 - 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(1;2) \qquad |f_2| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad X^{T'}A'x' = x_1^2 + 6y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -6x - 8y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x = 2\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1$

$L(x_1, y_1)$= -6(підставити x) -8(підставити y) =…

Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду: $x_1^2 + 6y_1^2 - 54\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - 72\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = 1$

3. Виділимо повні квадрати:

для x_1:

$\left(x_1^2 - 2\bullet 27\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{27^2}{\sqrt{5}}\right) - 1\bullet\frac{27^2}{\sqrt{5}} = \left(x_1 - 27\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^{729}/_5$

для y_1:

$6\left(y_1^2 - 2\bullet 6\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{6^2}{\sqrt{5}}\right) - 6\bullet\frac{6^2}{\sqrt{5}} = 6\left(y_1 - 6\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^{216}/_5$

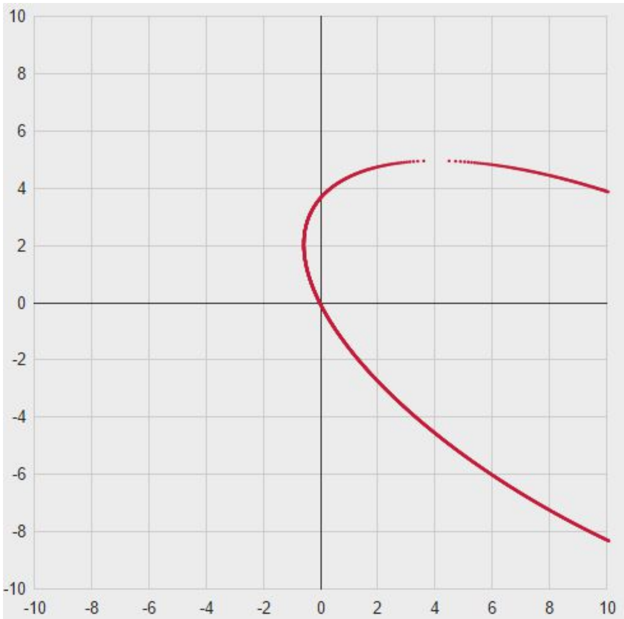
$\frac{1}{190}\left(x_1 - 27\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{95}\left(y_1 - 6\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$

перетворити в канонічне

$a = \sqrt{190}; b = \sqrt{{}^{95}/_3}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{190 - {}^{95}/_3} = 5\sqrt{{}^{19}/_3} \approx 12.58$

$F_1(-5\sqrt{{}^{19}/_3};0)$, $F_2(5\sqrt{{}^{19}/_3};0)$.



9. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x - 4 = 0$

1.Перетворимо квадратичну форму

$X^T Ax = 4x^2 - 4xy + y^2$

Матриця квадратичної форми: $B = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$

$\lambda_1 = \frac{-(-5)+5}{2 \bullet 1} = 5$ $\qquad \lambda_2 = \frac{-(-5)-5}{2 \bullet 1} = 0$

Оскільки $\lambda_1 * \lambda_2 = 0$ маємо криву параболічного типу.

Знайдемо власні вектори і побудуємо ортонормований базис:

$\lambda = \lambda_1 = 0 \qquad 4x_1 - 2y_1 = 0 \qquad x_1 = 2x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

$\qquad -2x_1 + 1y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_1 = c(1;2) \qquad |f_1| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{i} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\lambda = \lambda_2 = 5 \qquad -1x_1 - 2y_1 = 0 \qquad 2x_1 = -x_2 \qquad x_1$ – базисна змінна

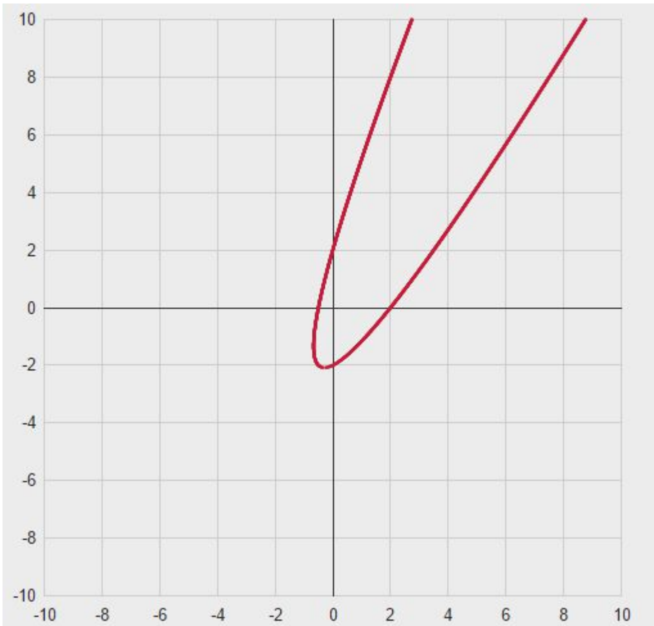
$\qquad -2x_1 - 4y_1 = 0 \qquad x_2 = c$ – вільна

$f_2 = c(2;-1) \qquad |f_2| = |c|\sqrt{5} \qquad \vec{j} = \frac{c}{|c|}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad X^{T'}A'x' = 5y_1^2$

2.Перетворення лінійної форми:

$L(x,y) = -6x \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y1 \end{pmatrix} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 \qquad y = \frac{2}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1$

$L(x_1, y_1) = -6$(підставити x)



Рівняння кривої в базисі {i,j} набуває вигляду:

$5y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{12}{\sqrt{2}}y_1 = 4$

3. Виділимо повні квадрати:

$5\left(y_1^2 + 2 \bullet {}^6/_5 \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{({}^6/_5)^2}{\sqrt{5}}\right) - 5 \bullet \frac{({}^6/_5)^2}{\sqrt{5}} = 5\left(y_1 - {}^6/_5 \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - {}^{36}/_{25}$

$(y_1 + {}^6/_5\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{5}(6x + {}^{64}/_{25})$

Перетворити в канонічне

$p = {}^3/_5$

$F_1(-3/10;0)$

10.Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 - x_6 = 0 \end{cases}$$

1. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 - x_6 = 0; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 5 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]/3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 5 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]+[1]\cdot 3 \\ [3]+[1]\cdot(-9) \\ [4]+[1]\cdot 9 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 10 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]/3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 10 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]+[2]\cdot 3 \\ [4]+[2]\cdot(-6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[2]\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ \\ [3]/5 \\ [4]/(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

Отже, система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{9}x_3 - \frac{7}{9}x_4 - \frac{1}{9}x_6 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 = 0, \\ x_5 + \frac{2}{5}x_6 = 0, \\ x_6 = 0; \end{cases}$$

Тому, з рі-ння 4: знайдено, що $x_6 = 0$;

З рі-ння 3: $x_5 + \frac{2}{5}x_6 = x_5 + \frac{2}{5}\cdot 0 = 0$;

З 2 рі-ння: $x_2 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4$;

З 1 рі-ння: $x_1 = -\frac{4}{9}x_3 + \frac{7}{9}x_4$;

Нехай $x_3 = C_1$, а $x_4 = C_2$, тоді загальний розв'язок набуває вигляду:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}C_2 - \frac{4}{9}C_1; \\ -\frac{5}{3}C_2 - \frac{1}{3}C_1; \\ C_1; \\ C_2; \\ 0; \\ 0; \end{pmatrix};$$

~~фунд~~ фундаментальна:

$$C_2\begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]/2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]+[1]\cdot(-6) \\ [3]+[1]\cdot(-6) \\ [4]+[1]\cdot(-4) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]\cdot(-1) \\ [3]+[2] \\ [3]+[2]\cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & +2 & +4 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ [4]\cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[3]\cdot(-1) \\ [2]+[3]\cdot(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1/2 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) [1] + [2]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

Отже, ранг розширеної матриці = рангу системи матриці, але менше кількості невідомих, тому система сумісна і має безліч розв'язків.

З рівняння 3: $x_4 = 0$, тоді з другого рівняння:

$x_3 + 4x_5 = 3 \Rightarrow x_3 = 3 - 4x_5$;

З першого рів-ння:

$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}$;

нехай $x_2 = c_1$, та $x_5 = c_2$, тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}; \\ c_1; \\ -4c_2 + 3; \\ 0; \\ c_2; \end{pmatrix}$$

12. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_5-x_6=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \\ -5x_1+11x_2+8x_3-6x_6=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_5=0 \end{cases}$$

(3) Знайти: ~~загальну~~ загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_5-x_6=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4=0, \\ -5x_1+11x_2+8x_3-6x_6=0, \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_5=0; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & 8 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]\cdot(-1) \\ [2]+[1]\cdot 2 \\ [3]+[1]\cdot(-5) \\ [4]+[1]\cdot 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & -15 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 & 14 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]/4 \\ [3]+[2] \\ [4]+[2]\cdot(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]/9 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ [4]+[3]\cdot(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) [4]/(-7)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [2]+[4]\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \\ [3]+[4]\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{57}{28} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{21} & -\frac{5}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{array}\right) [2]+[3]\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 187/84 & -19/84 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -16/21 & -5/21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{array}\right) [1]+[2]\cdot 3 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 103/28 & 9/28 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 187/84 & -19/84 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -16/21 & -5/21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/7 & -2/7 & 0 \end{array}\right);$$

Нехай $x_5 = C_1$; $x_6 = C_2$;

Отже, $x_1 = -\frac{9}{28}C_2 - \frac{103}{28}C_1$; $x_2 = \frac{19}{84}C_2 - \frac{187}{84}C_1$; $x_3 = \frac{5}{21}C_2 + \frac{16}{21}C_1$; $x_4 = \frac{2}{7}C_2 + \frac{5}{7}C_1$; $x_5 = C_1$; $x_6 = C_2$;

Загальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{9}{28}C_2 - \frac{103}{28}C_1; \\ \frac{19}{84}C_2 - \frac{187}{84}C_1; \\ \frac{5}{21}C_2 + \frac{16}{21}C_1; \\ \frac{2}{7}C_2 + \frac{5}{7}C_1; \\ C_1; \\ C_2; \end{pmatrix};$$

Фундаментальна система:

$$C_1\begin{pmatrix} -\frac{103}{28} \\ -\frac{187}{84} \\ \frac{16}{21} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2\begin{pmatrix} -\frac{9}{28} \\ \frac{19}{84} \\ \frac{5}{21} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

13 Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

(4) Знайти загальний розв'язок та фунд. систему розв'язк

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ -5 & 11 & 8 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]\cdot(-1) \\ [2]+[1]\cdot 2 \\ [3]+[1]\cdot(-5) \\ [4]+[1]\cdot 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -1 & -25 & 0 \\ 0 & 8 & 14 & -3 & 20 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]/4 \\ [3]+[2] \\ [4]+[2]\cdot(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]/(-21) \\ [4]/(-5) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[3]\cdot(-1) \\ [2]+[3]\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & 0 & -\frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 0 & \frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[2]\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & 11/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 0 & 8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

З 4-го рівняння $x_5 = 0$; з 3го: $x_4 = \frac{12}{5}x_5 = 0$;

з 2-го: $x_2 = -\frac{7}{4}x_3$; з 1го: $x_1 = -\frac{9}{4}x_3$;

нехай $x_3 = C_1$, тоді загальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}C_1; \\ -\frac{7}{4}C_1; \\ C_1; \\ 0; \\ 0; \end{pmatrix};$$ фундаментальна система розв'язків:

$$C_1\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

14. Дослідити на сумісність систему алгебраїчних рівнянь, знайти загальний розв'язок системи та фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність СЛАР знайти загальний розв'язок системи та фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) [1]/2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]+[1]\cdot(-3) \\ [3]+[1]\cdot(-9) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & -\frac{55}{2} & -\frac{25}{2} & \frac{5}{2} & -25 \end{array}\right) [2]\cdot\left(-\frac{2}{11}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & -\frac{55}{2} & -\frac{25}{2} & \frac{5}{2} & -25 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[2]\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) \\ \\ [3]+[2]\cdot\frac{55}{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

Отже, ранг розширеної матриці дорівнює рангу матриці системи, але менше за число невідомих, тому система сумісна та має безліч розв'язків.

З другого рівняння знайдемо x_2:

$x_2 = \frac{1}{11}x_4 - \frac{5}{11}x_3 + \frac{10}{11}$, з першого р-ння знайдемо x_1: $x_1 = -\frac{9}{11}x_4 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{2}{11}$. Нехай $x_3 = C_1$; $x_4 = C_2$.

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11}C_2 + \frac{1}{11}C_1 - \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11}C_2 - \frac{5}{11}C_1 + \frac{10}{11} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

Фундаментальний ?

15. Знайти загальний розв’язок та фундаментальну систему розв’язків системи:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4+2x_5=0 \\ -5x_1+8x_3-6x_4+x_5+3x_6=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

(6) Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4+2x_5=0, \\ -5x_1+8x_3-6x_4+x_5+3x_6=0, \\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_4=0; \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю, одразу ж домноживши I-й рядок на (-1):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 8 & -6 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]+[1]\cdot(-2) \\ [3]+[1]\cdot 5 \\ [3]+[1]\cdot(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 8 & -11 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 8 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]/4 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 8 & -11 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 8 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]+[2]\cdot 15 \\ [4]+[2]\cdot(-8) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 47/4 & 31/4 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]\cdot\frac{4}{47} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 & 44/47 & 12/47 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ [3]+[2]\cdot(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 & 44/47 & 12/47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{187}{47} & -\frac{367}{47} & -\frac{36}{47} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ [3]\cdot\left(\frac{-47}{187}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 & 44/47 & 12/47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{367}{187} & \frac{36}{187} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[4] \\ [2]+[4]\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) \\ [3]+[4]\cdot\left(\frac{-31}{47}\right) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & 180/187 & 36/187 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 & -\frac{1087}{748} & \frac{-45}{187} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-67}{187} & \frac{24}{187} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{367}{187} & \frac{36}{187} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]+[3]\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & 180/187 & 36/187 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-15}{11} & \frac{-3}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-67}{187} & \frac{24}{187} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{367}{187} & \frac{36}{187} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]+[2]\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{585}{187} & -\frac{117}{187} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{67}{187} & \frac{24}{187} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{367}{187} & \frac{36}{187} & 0 \end{array}\right);$$

Знайдемо базисні розв'язки:

$x_1 = \frac{117}{187}x_6 + \frac{585}{187}x_5;$

$x_2 = \frac{3}{11}x_6 + \frac{15}{11}x_5;$

$x_3 = \frac{-24}{187}x_6 + \frac{67}{187}x_5;$

$\cancel{x_4} = \frac{-36}{187}x_6 - \frac{367}{187}x_5;$

вільні змінні:

$x_5 = C_1;\ X_6 = C_2;$

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{117}{187}C_2 + \frac{585}{187}C_1 \\ \frac{3}{11}C_2 + \frac{15}{11}C_1 \\ \frac{-24}{187}C_2 + \frac{67}{187}C_1 \\ \frac{-36}{187}C_2 - \frac{367}{187}C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

фунд. ~~розв~~ система:

$$C_1\begin{pmatrix} \frac{585}{187} \\ \frac{15}{11} \\ \frac{67}{187} \\ \frac{-367}{187} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ C_2\begin{pmatrix} \frac{117}{187} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{-24}{187} \\ \frac{-36}{187} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_6 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_7 = 0 \end{cases}$$

7) Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_6 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) /6 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ [3]+[1]\cdot(-6) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 5 & 13 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ [3]/2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} [1]+[3]\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ [2]+[3]\cdot(-3) \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 & -\frac{15}{2} & -\frac{39}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} [1]+[2]\cdot\frac{1}{2} \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{37}{12} & \frac{3}{2} & \frac{-65}{12} & -\frac{143}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 & -\frac{15}{2} & -\frac{39}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right);$$

Отже, знаходимо x_1, x_2, x_3 – базисні змінні:

$$x_1 = \frac{143}{12}x_7 + \frac{65}{12}x_6 - \frac{3}{2}x_5 + \frac{37}{12}x_4;$$

$$x_2 = \frac{39}{2}x_7 + \frac{15}{2}x_6 - 3x_5 + \frac{11}{2}x_4;$$

$$x_3 = -\frac{13}{2}x_7 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{5}{2}x_4;$$

Вільні змінні: $x_4 = C_1$; $x_5 = C_2$; $x_6 = C_3$; $x_7 = C_4$;

Загальний розв'язок:

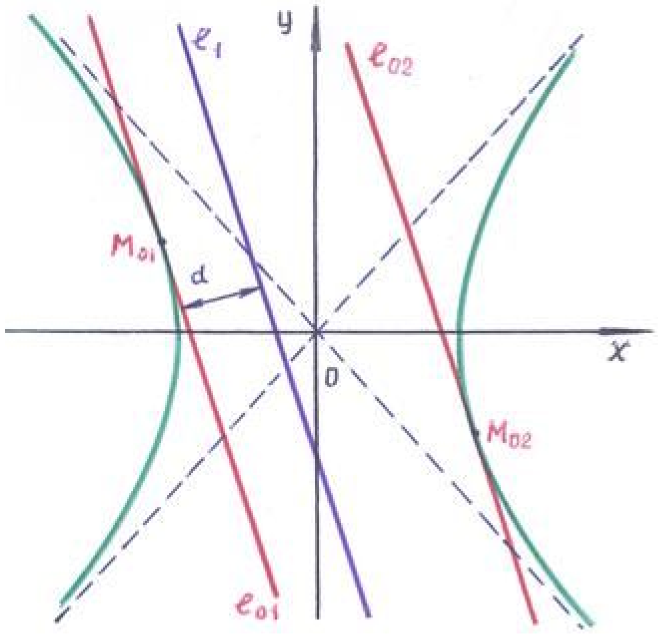
$$X = \begin{pmatrix} \frac{143}{12}C_4 + \frac{65}{12}C_3 - \frac{3}{2}C_2 + \frac{37}{12}C_1 \\ \frac{39}{2}C_4 + \frac{15}{2}C_3 - 3C_2 + \frac{11}{2}C_1 \\ -\frac{13}{2}C_4 - \frac{5}{2}C_3 - \frac{5}{2}C_1 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

Фундамент. система:

$$\begin{pmatrix} \frac{37}{12} \\ \frac{11}{12} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{65}{12} \\ \frac{15}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{143}{12} \\ \frac{39}{2} \\ -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17 На гиперболе $x^2/24-y^2/18=1$ найти точку $M(x0,y0)$, ближайшую к прямой L1 : $3x+2y+1=0$ и вычислить расстояние от точки до этой прямой.

Решение:



1). Учтём свойство гиперболы по отношению к её касательным: её верхняя половина располагается под касательной, а нижняя над касательной. Заметим также, что рисунок не отражает окончательные результаты решения задачи: взаимное расположение всех геометрических фигур на самом деле может оказаться другим. Рисунок мы рассматриваем как эскиз образа исходных данных задачи.

2). Из условия следует, что угловые коэффициенты асимптот гиперболы: k=+-3/4 . Угловой коэффициент прямой равен k2 =-3/2 . Проверим выполнимость условия :A^2a^2-B^2b^2=C^2 . Угловой коэффициент прямой равен |A/B| =3/2=>3/2=b/a => касательная существует, и условие выполняется.

3). Так как касательные:L01 и L02 должны быть параллельны прямой L1 , то общим уравнением для них может быть запись: Ax+By+C=3x+2y+C . Воспользуемся условием: A^2a^2-B^2b^2=C^2 . В данном примере: C^2=9*24-4*18=144 C=+-12 . Это значит L1 :3x+2y-12=0 , : .

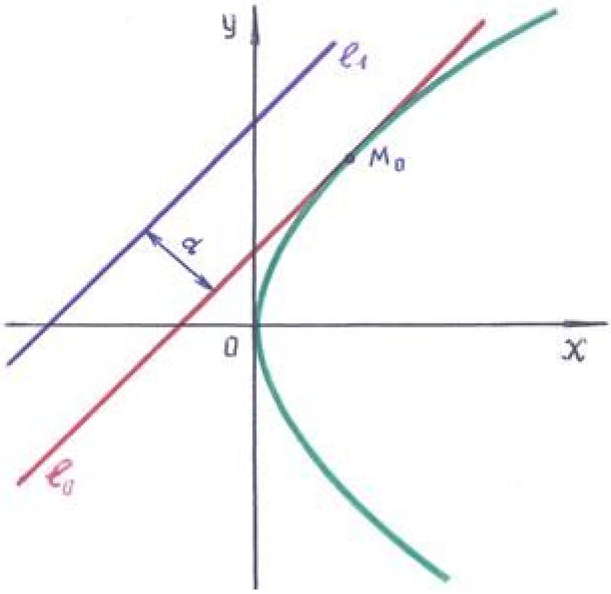
4). Так как прямая пересекает ось в точке (-1/3.0) , ближе к ней располагается прямая L01 . Это значит, по условию задачи нам нужна точка M01 . Вычислим её координаты:x0 =-a^2*A/C = –6, y0 = b^2*B/C =3.

5). Нормализуя заданное уравнение, получаем : L1 :1/sqrt(13)*(3x+2y+1)=0. Для нахождения расстояния между параллельными прямыми: L1 и L01 воспользуемся точкой (–4,0), принадлежащей L01 . Для выделенной точки отклонение отL1 : d =|1/sqrt(13)*(3x+2y+1)=0|=11/sqrt(13) .

Ответ: точка: M (–6,3); расстояние: d =11/sqrt(13)

18 На параболе:y^2=64x найти точку M, ближайшую к прямой 4x+3y-14=0 и вычислить расстояние от точки до этой прямой.

Решение:



2). Из условия следует, что угловой коэффициент касательной должен быть: k=–4/3 . Это значит, что точка касания располагается на нижней ветви параболы.

3). Уравнение касательной должно иметь вид L1:Ax+By+C , или 4x+3y+C=0

4). Воспользуемся условием:pB^2=2AC . В данном примере:32*9=2*4*C =>C=36. Значение параметра =36. Тогда уравнение касательной L1 :4x+3y+36=0

4). Вычислим координаты точки касания: x0 = C/A = 36*4 =9 и y0 = -p*B/A = -32*2/4 =–24.

5). Нормализуя заданное уравнение, получаем L1:(4x+3y-14)/5=0. Для нахождения расстояния между параллельными прямымиL1: и L01 воспользуемся точкой (–9,0), принадлежащей L01. Для выделенной точки отклонение от L1 :d =|1/5*(4*(-9)+0-14)=–10.

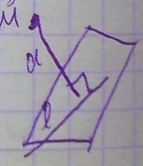
Ответ: точка: M (9,–24); расстояние: d =10.

9. Скласти рівняння площини, що ділить двогранні кути між площинами $3x - y + 2z + 1 = 0$ і $x + 7y - 6z = 0$ навпіл.

Розв'язання

Кожна точка площини, що ділить двогранний кут навпіл, знаходиться на однакові відстані від площин, що утворюють кут. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої площини.

Відстань від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D$ обчислимо за формулою



$$\rho = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Відстані від точки $M(x; y; z)$ до площини

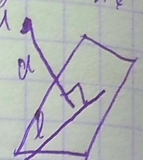
$$\rho_1 = \left| \frac{3x - y + 2z + 1}{\sqrt{14}} \right| \quad \rho_2 = \left| \frac{x + 7y - 6z}{\sqrt{86}} \right|$$

Відстань від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D$ обчислимо за формулою

$$\rho = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Відстані від точки $M(x; y; z)$ до площини

$$\rho_1 = \left| \frac{3x - y + 2z + 1}{\sqrt{14}} \right| \quad \rho_2 = \left| \frac{x + 7y - 6z}{\sqrt{86}} \right|$$



оскільки $\rho_1 = \rho_2$ то

$$\frac{3x - y + 2z + 1}{\sqrt{14}} = \frac{x + 7y - 6z}{\sqrt{86}}$$

і

$$\frac{3x - y + 2z + 1}{\sqrt{14}} = -\frac{x + 7y - 6z}{\sqrt{86}}$$

кут

на вісь

навпіл,

що

$3x\sqrt{86} - y\sqrt{86} + 2z\sqrt{86} + \sqrt{86} \quad \sqrt{14}x + 7\sqrt{14}y - 6\sqrt{14}z$

і

$3x\sqrt{86} - y\sqrt{86} + 2z\sqrt{86} + \cancel{86} = -\sqrt{14}x - 7\sqrt{14}y + 6\sqrt{14}z$

2. $x(3\sqrt{6} + \sqrt{14}) + y(7\sqrt{14} - \sqrt{86}) + z(2\sqrt{86} - 6\sqrt{14}) + \sqrt{86}$

і

1. $\cancel{x}$ $x(3\sqrt{86} - \sqrt{14}) + y(-\sqrt{86} - 7\sqrt{14}) + z(2\sqrt{86} + 6\sqrt{14}) +$

$+\sqrt{86} = 0$

Написати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задана його вершина A(1; 3) і рівняння двох медіан: x-2y+1=0 і y-1=0

Розв'язання

Нехай x-2y+1=0 це медіана проходить через точку B, і y-1=0 через точку C. ~~Від прямої проведемо~~ Проведемо ~~через~~ пряму L_1 паралельно прямій x-2y+1=0 через точку C. Пряму L_2 проведено через B паралельно прямій y-1=0. Пряма L_1 в два рази далі від A ніж пряма x-2y+1=0. Пряма L_2 в два рази далі від A ніж пряма y-1=0. Звідси напишемо рівняння прямих L_1 і L_2 які повинні різнитися від прямих x-2y+1=0 і y-1=0 вільним членом.

Підставимо координати точки A в рівняння x-2y+1=0.

1-6+1=-4, виходить -4, а повинно бути в два рази менше. Зменшуємо вільний член на -4 і

Виходить рівняння $L_1: x - 2y - 3 = 0$. Підставимо координати точки A в рівняння $y - 1 = 0$. $3 - 1 = 2$, що м… по бути в два рази ~~менше~~ більше, тобто збільшуємо вільн… член на 2. Виходить рівняння $y + 1 = 0$. Перетин двох прямих L_2 і ~~$x - 2y + 1$~~ $y - 1 = 0$ дасть нам точку B

$\cancel{x - 2y - 3 = x - 2y + 1}$

$$\begin{cases} \cancel{x - 2y + 3 = 0} \\ \cancel{x - 2y + 1 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x + 2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$x = [illegible]$ B $(-3; -1)$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x + 2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$x = [illegible]$ B $(-3; -1)$

Перетин прямих L_1 і ~~$x - 2y + 1$~~ $y - 1 = 0$ дасть нам точку C.

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$x = 5$

$y = 1$

$C(5; 1)$.

Ми знайшли точки B і C тепер напишемо ~~рівн~~ рівняння [illegible]

$AB: \dfrac{x - 1}{-4} = \dfrac{y - 3}{-4}$

$AC: \dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y - 3}{-2}$

$BC: \dfrac{x + 3}{8} = \dfrac{y + 1}{2}$

З лівого фокусу еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ під тупим кутом до вісі Ox направлений промінь світла, при тому $tg\,\alpha=-2$. Написати рівняння прямої, на якій лежить промінь, який відбивається від еліпса

Рішення

Знайдемо рівняння прямої на якій лежить випущений з лівого фокусу $F_1(-6;0)$ луч. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через заданую точку $(x_0;y_0) \Rightarrow y-y_0=k(x-x_0)$ или $y=-2(x+c)$.

Находим c: $c^2=a^2-b^2=45-20=25 \Rightarrow c=5$. Уравнение выпущенного луча $y=-2(x+5)$. Находим точку отражения $\{y=-2(x+5)$

$$\begin{cases} y = -2(x+5) \\ \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 10 \\ \frac{x^2}{45} + \frac{-(2x+10)^2}{20} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{45} - \frac{100 + 40x + 4x^2}{20} = 1$$

$$\cancel{20x^2 + 4500} \qquad 20x^2 - 4500 - 1800x - 180x^2 - 900 = 0$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

$x_1 = -6 \quad x_2 = -3$. Из условия задачи следует, что второй корень уравнения является посторонним, так как абсцисса точки отражения луча находится левее левого фокуса

$F_1(-5;0)$. Таким образом, абсцисса точки отражения $x=-6$. Находим ординату точки отражения: $y = -2(x+5) = -2(-6+5) = 2$. Получаем, что точка $C(-6;2)$ есть точка отражения луча. Согласно зеркальному свойству эллипса, выпущенный из левого фокуса луч света отразившись от зеркала эллипса проходит через фокус $F_2(5;0)$. Таким образом, прямая, на которой лежит отраженный луч проходит через фокус $F_2(5;0)$ и точку $C(-6;2)$. Используем уравнение прямой проходящей через две точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Подставив координаты точек F_2 и C, получаем:

$$\frac{x-6}{-6-5}=\frac{y}{2} \text{ или } \boxed{2x+11y-10=0}.$$

Знайти довжину та рівняння спільного перпендикуляра до прямих.

$$\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{0}$$

$z = 1$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

$x=-y$

$$\begin{cases} \cancel{x=-2-y} \\ \cancel{2x} \; -4-2y-y-1=0 \end{cases} \qquad \{-2y-y=0$$

$y=0$

$x=0$

$z=1$

$q\{l; m; n\}$

$q=[\vec{n}_1; \vec{n}_2]$ $\qquad n_1=(1;1;-2)$ $\qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$n_2=(2;-1;1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3x - 6y + 11z - 9 = 0$$

$$d = \frac{|11 - 9|}{\sqrt{9 + 36 + 121}} = \frac{2}{\sqrt{166}}$$

$= -i - 5j - 3k$

$\vec{q_1} = (-1; -5; -3)$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{-3}$$

Знайдемо рівняння спільного перпендикуляру.

$\vec{q_1} = (-1; -5; -3)$

$\vec{q_2} = (2; -1; 0)$

$$\vec{n} = [\vec{q_1}, \vec{q_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 6j - 9k$$

$\vec{n} = (-3; -6; -9)$

Знайдемо рівняння площини P_1 і P_2 $P_1 = [q_1, n]$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3x - 6y + 11z - 9 = 0$$

$$d = \frac{|11 - 9|}{\sqrt{9 + 36 + 121}} = \frac{2}{\sqrt{166}}$$

$= -i - 5j - 3k$

$\vec{q_1} = (-1; -5; -3)$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{-3}$$

Знайдемо рівняння спільного перпендикуляру.

$\vec{q_1} = (-1; -5; -3)$

$\vec{q_2} = (2; -1; 0)$

$$\vec{n} = [\vec{q_1}, \vec{q_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 6j - 9k$$

$\vec{n} = (-3; -6; -9)$

Знайдемо рівняння площини P_1 і P_2 $P_1 = [q_1, n]$

$$\begin{cases} 27x - 9z + D_1 = 0 \\ 9x - 18y - 15z + D_2 = 0 \end{cases}$$

щоб знайти D_1 беремо точку $M_1 \in L_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{-3}$

$M_1(0; 0; 1)$. Аналогічно для D_2 $M_2 \in L_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{0}$

$M_2(1; 0; -3)$

Підставляємо точки в відповідні рівняння і знаходимо

$$\begin{cases} 27x - 9z + 9 = 0 \\ 9x - 18y - 15z - 54 = 0 \end{cases}$$

Довжина

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3x - 6y + 11z - 9 = 0$$

$$d = \left| \frac{11 - 9}{\sqrt{9 + 36 + 121}} \right| = \frac{2}{\sqrt{166}}$$

$-\sqrt{3}\,x + y = 0$

Нормальный вектор ~~плоскости~~ плоскости $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$

Произвольная точка пространства $M(x, y, z)$ проходит в точку плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$. При этом вектор $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ является направляющим вектором прямой MM_1. Поэтому, канонические уравнения прямой MM_1 будут: $\frac{x - x_1}{-\sqrt{3}} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{0}$

Отсюда

$$\begin{cases} z = z_1 \\ \frac{x - x_1}{-\sqrt{3}} = \frac{y - y_1}{1} \end{cases}$$

Точка M принадлежит плоскости $-\sqrt{3}x + y = 0$ и прямой MM_1, то есть лежит на пересечении плоскости и прямой. Следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению плоскости и уравнениям прямой.

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\,x_1 + y_1 = 0 \\ z = z_1 \\ \frac{x - x_1}{-\sqrt{3}} = \frac{y - y_1}{1} \end{cases}$$

Выразим координату y_1 из первого уравнения, подставим y_1 в третье уравнение и выразим x_1

Получим:

$$\begin{cases} y_1 = \cancel{+}\sqrt{3}\,x_1 \\ z = z_1 \\ x - x_1 = -\sqrt{3}\,(y - y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = +\sqrt{3}\,x_1 \\ z = z_1 \\ x - x_1 = -\sqrt{3}\,y + 3\,\cancel{x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{3}\,x_1 \\ z = z_1 \\ x_1 = \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{4} \end{cases}$$

Подставим x_1 в первое уравнение

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,x + 3y}{4} \\ z = z_1 \\ x_1 = \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{4} \end{cases}$$

Таким образом, точка $M(x, y, z)$ переходит в точку $M_1\left(\dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{4}, \dfrac{\sqrt{3}\,x + 3y}{4}, z\right)$

Проверим линейность данного преобразования

Рассмотрим вектор $\alpha\bar{x} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, и подействуем на него полученным преобразованием A. Получим

$$A\alpha\bar{x} = \left(\frac{\alpha x + \sqrt{3}\,\alpha y}{4}, \frac{\sqrt{3}\,\alpha x + 3\alpha y}{4}, z\alpha\right) = \alpha\left(\frac{x + \sqrt{3}\,y}{4}, \frac{\sqrt{3}\,x + 3y}{4}, z\right) = \alpha A\bar{x}$$

Рассмотрим сумму двух векторов $\bar{x} + \bar{y} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ и подействуем на него преобразовании A. Получим

$$~~A\vec{x}~~ \quad A(\vec{x}+\vec{y}) = \left(\frac{(x_1+x_2)+\sqrt{3}(y_1+y_2)}{4}, \frac{\sqrt{3}(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)}{4}, z_1+z_2 \right) = \left(\frac{x_1+\sqrt{3}y_1}{4} + \frac{x_2+\sqrt{3}y_2}{4}, \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3}x_1+3y_1}{4} + \frac{\sqrt{3}x_2+3y_2}{4}, z_1+z_2 \right) =$$

$$= \left(\frac{x_1+\sqrt{3}y_1}{4}, \frac{\sqrt{3}x_1+3y_1}{4}, z_1 \right) + \left(\frac{x_2+\sqrt{3}y_2}{4}, \frac{\sqrt{3}x_2+3y_2}{4}, z_2 \right)$$

$$= A\vec{x} + A\vec{y}$$

Оба условие линейного преобразование выполнены. Следовательно преобразование линейно.

Отыщим матрицу преобразование.

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

$$A\vec{e}_1 = A(1,0,0) = \left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot 0}{4}, \frac{\sqrt{3}+0}{4}, 0 \right) = \vec{e}_1{}' = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$$

$$A\vec{e}_2 = A(0,1,0) = \left(\frac{0+\sqrt{3}}{4}, \frac{0+3}{4}, 0 \right) = \vec{e}_2{}' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$$

$$A\vec{e}_3 = A(0,0,1) = (0,0,1) = \vec{e}_3{}' = (0,0,1)$$

Матрица линейного преобразования это матрица, столбцы которой координатные столбцы образов базисных векторов

$$A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_1 = (1; -2; 2)$; $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$ $\vec{f}_3 = (5; -3; -7)$

$\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = (1; -2; 2)$

$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} \cdot e_1$

$\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

$(1; 0; 1)$

$(f_2, e_1) = 3$

$(e_1, e_1) = 9$

$\cancel{\vec{e}_2 = \vec{f}_2 + (-\frac{1}{3} \vec{e}_1)}$

$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{1}{3} \vec{e}_1$

$\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}; +\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

$\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 \quad \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2$

$\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

$\frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{-3}{1} = -3$

$\vec{e}_3 = \vec{f}_3 + \frac{1}{3} \vec{e}_1 + 3 \vec{e}_2$

$\vec{e}_3 = (6; -3; -6)$

$\vec{e}_1 = (1; -2; 2)$

$\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

$e_3 = (6; -3; -6)$

$\vec{e}_1 = (\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

$\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

$\vec{e}_3 = (\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$