Лекція 9

9.1. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний розв'язок. Фундаментальна система розв'язків

Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо праві частини цих рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Властивості однорідної СЛАР

1) Однорідна СЛАР завжди сумісна, тому що розширена матриця відрізняється від основної на стовпець, який є нуль-вектором. Оскільки система, яка має нуль-вектор завжди лінійно залежна, то ранг розширеної матриці збігається з рангом основної. Система завжди має тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

2) Сума розв'язків однорідної СЛАР токож є її розв'язком.
3) Добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи.
4) Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком системи.

Якщо ранг матриці однорідної системи дорівнює r, то система має $n-r$ лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв'язків.

Будь-яку сукупність з $n-r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР називають **фундаментальною системою розв'язків (ФСР)**.

Теорема 9.1. (Про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР).
Якщо $\left\{ \vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_{n-r} \right\}$ — ФСР однорідної СЛАР, то загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_{n-r}$:

$$\vec{x}_{заг.одн.} = c_1 \vec{f}_1 + c_2 \vec{f}_2 + ... c_{n-r} \vec{f}_{n-r}.$$

Вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_{n-r}$ утворюють **базис підпростору розв'язків системи розмірності $n - r$.**

Приклад 9.1. Знайти загальний розв'язок однорідної системи та ФСР.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Для дослідження та пошуку розв'язків скористаємося методом Гаусса – Жордано.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}_4 \leftarrow \vec{a}_4 - 4\vec{a}_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \vec{a}_2 \leftarrow -\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \leftarrow \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \\ \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3 - 5\vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 \leftarrow \vec{a}_4 - 4\vec{a}_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \vec{a}_3 \leftarrow -\frac{1}{8}\vec{a}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \leftarrow \vec{a}_1 - 3\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \\ \\ \vec{a}_4 \leftarrow \vec{a}_4 + 8\vec{a}_3 \end{array}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $rangA = r = 3;\ x_1, x_2, x_3$ — базисні змінні,

$x_4 = c_1, x_5 = c_2$ — вільні змінні.

Перетворена матриця відповідає системі:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{7}{8}c_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{8}c_2 = 0 \\ x_3 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{5}{8}c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{7}{8}c_2 \\ x_2 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{5}{8}c_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{8}c_2 \end{cases}.$$

Загальний розв’язок записується у вигляді:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 + \frac{7}{8}c_2 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{7}{8}c_2 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{8}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7/8 \\ 5/8 \\ -5/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \vec{f}_1 + c_2 \vec{f}_2$$

Відповідь: Загальний розв’язок:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 + \frac{7}{8}c_2 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{7}{8}c_2 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{8}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

ФСР: $\left\{ \vec{f}_1, \vec{f}_2 \right\}$, *де* $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 5/8 \\ -5/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Розв’язки прикладу складають лінійний підпростір розмірності n-r. Розмірність підпростору, який описаний однорідною системою, дорівнює 2. Вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ є базисом цього підпростору.

Кожний лінійний підпростір можна подати як сукупність розв’язків відповідно підібраної системи лінійних рівнянь.

Теорема 9.2. Однорідна система, у якої однакове число невідомих і рівнянь, тільки тоді має ненульовий розв’язок, коли визначник системи дорівнює нулю. Якщо визначник цієї системи відмінний від нуля, то система має тільки нульовий (тривіальний) розв’язок.

Доведення. Нехай задано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однорідна система має ненульовий розв’язок, якщо число рівнянь (невідомих) більше за ранг матриці, тобто більше за порядок r базисного мінору *($n>r$)*, а це означає, що всі мінори *$r+1$, $r+2$, ..., n* дорівнюють нулю. Це і є доведенням теореми.●

Два рівняння називаються **незалежними**, якщо внаслідок лінійних операцій над рівняннями (додавання і множення на число) жодне з них не можна привести до іншого. Якщо в системі немає рівнянь, які є лінійною комбінацією інших рівнянь цієї системи, то кажуть, що система складається з незалежних рівнянь. Число рівнянь при цьому збігається з рангом матриці. Метод Гаусса зручний тому, що при поданні системи у певній формі число рівнянь після відкидання тих, які повторюються, дорівнює рангу матриці.

9.2. Неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний і частинний розв'язки

Розглянемо неоднорідну СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

і відповідну їй однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Теорема 9.3. (Про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР). Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи і деякого частинного розв'язку неоднорідної СЛАР: $\vec{x}_{заг.неодн.} = \vec{x}_{заг.одн.} + \vec{x}_{част.неодн.}$.

Приклад 9.2. Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Застосуємо метод Гаусса-Жордано:

Крок 1. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

Крок 2. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$.

Крок 3. $rangA = rangA^p = 2$. Система сумісна.

Крок 4. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 \leftarrow \vec{a}_1 + \frac{1}{3}\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\vec{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Крок 5. x_1 і x_3 - базисні змінні, а $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ - вільні змінні. Випишемо систему, що утворилася після перетворень:

$$\begin{cases} x_1 + 2c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 1 \\ x_3 - \frac{2}{3}c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2c_1 + \frac{1}{3}c_2 \\ x_3 = \frac{2}{3}c_2 - c_3 \end{cases}.$$

Крок 6. Загальний розв’язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2c_1 + \frac{1}{3}c_2 \\ c_1 \\ \frac{2}{3}c_2 - c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо запис загального розв’язку:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-2c_1+\frac{1}{3}c_2 \\ c_1 \\ \frac{2}{3}c_2 - c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{\text{чатс.неод.}}} + \underbrace{c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{\text{заг.одн.}}}.$$

Відповідь: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{\text{чатс.неод.}}} + \underbrace{c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{\text{заг.одн.}}}.$