Лекція 8

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

8.1. Основні означення та теореми

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розв'язати систему– це означає знайти впорядковану сукупність чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ таку, що при заміні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно на $c_1, c_2, \ldots, c_n$ кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Систему рівнянь можна записати у векторній формі. Для цього введемо у просторі, розмірність якого дорівнює числу рівнянь, вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; \ \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді система набуде вигляду $\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$.

В цьому випадку розв'язання системи можна звести до встановлення лінійної залежності системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}$.

Якщо ввести матрицю коефіцієнтів системи векторів, матрицю-стовбець правої частини і матрицю-стовбець невідомих

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$, то , використовуючи

означення добутку матриць, систему можна записати у вигляді

$$AX=B.$$

Ця форма запису системи називається **матричною**.

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

При постановці задачі про відшукання розв’язку системи, ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих.

СЛАР

— може не мати розв’язків;

— може мати нескінченну множину розв’язків;

— може мати єдиний розв’язок.

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо не має розв’язків. Сумісну систему називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок.

Дві системи називають рівносильними, якщо кожний розв’язок першої системи є розв’язком другої, і навпаки.

Будь-який розв’язок системи називають **частинним** розв’язком. Множину всіх частинних розв’язків називають **загальним розв’язком системи**.

Дослідження і розв’язання загальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Елементарними перетвореннями СЛАР називають:

1) переставляння рівнянь;
2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;
3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають **еквівалентними**.

Матриця *A* коефіцієнтів при невідомих системи називається **основною**. Приєднаємо до матриці *A* стовбець вільних членів. Дістанемо так звану **розширену матрицю** A^p даної системи:

$$A^p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера – Капеллі (умова сумісності системи лінійних рівнянь). Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці: $rangA = rangA^p$.

Доведення. Якщо СЛАР має розв'язок $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, тобто стовпчик із вільних членів матриці є лінійною комбінацією стовпців матриці *A* системи.

Базисні мінори матриць *A* і A^p не змінювались: $rangA = rangA^p$, і, згідно з теоремою про базисний мінор, справедливе рівняння

$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$, тобто система має розв'язок.

Наслідки з теореми Кронекера – Капеллі.

1. Якщо ранг матриці системи дорівнює ранку розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.
2. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків.

8.2. Методи розв'язання визначених СЛАР

Матричний метод

Розглянемо СЛАР у матричній формі: $AX = B$, де *A* – квадратна матриця *n*-ого порядку, і нехай $rangA = n$, тобто $|A| \neq 0$ — матриця *A* оборотна.

Помножимо обидві частини матричного рівняння на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Одержимо розв'язок СЛАР і матричного рівняння, якому вона еквівалентна: $X = A^{-1}B$. Отже, для того, щоб знайти розв'язок визначеної СЛАР, необхідно знайти матрицю, обернену до основної матриці системи і виконати множення цієї матриці на матрицю вільних членів.

Приклад 8.1. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ - основна матриця системи.

$$det\,A = 19. \quad A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -7 \\ -7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \\ -7 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 19 \\ -19 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2$.

Правило Крамера

Якщо в матричному методі розв'язання визначених СЛАР врахувати формулу для обчислень елементів оберненої матриці, то дістанемо:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,\ \vec{x} = \frac{1}{|A|}A^*\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Кожен елемент розв'язку визначається так: $x_j = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}, \ j = \overline{1,n}$.

Запис $\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$ означає обчислення визначника, у якого на j-ому місці стоїть стовпчик вільних членів. Тоді, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$. Це формули Крамера для обчислення розв'язків визначеної системи. Правило Крамера застосовують переважним чином для розв'язання систем двох і трьох лінійних рівнянь.

Приклад 8.2. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$ - головний визначник системи.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19; \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -19; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 38.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1; \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1; \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2.$$

Відповідь: $x_1 = 1; \ x_2 = -1; \ x_3 = 2.$

8.3. Дослідження і розв'язання загальних СЛАР

Метод Гаусса - Жордано

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Крок 1. Записують розширену матрицю системи:

$$A^p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Крок 2. За допомогою елементарних перетворень зводять матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\alpha_{1k_1}} & ... & ... & ... & \beta_1 \\ 0\ ... & \underline{\alpha_{2k_2}} & ... & ... & \beta_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \beta_m \end{array}\right).$$

Крок 3. Досліджують систему на сумісність за теоремою Кронекера – Капеллі.

Якщо хоча б один з вільних членів в нульових рядках відмінний від нуля, то система не сумісна. Якщо ранги рівні, то система сумісна.

Крок 4. У разі сумісності перетворюють східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & 0 & \dots & \delta_1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \delta_r \end{array}\right).$$

Крок 5. Знаходять розв'язки одержаної системи. Моливі два випадки:

1) кількість змінних дорівнює рангу матриці системи ($n = r$):

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1 \\ x_2 = \delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \delta_n \end{cases};$$

2) кількість змінних n більша від кількості рівнянь ($n > r$):

Змінні, які відповідають лідерам рядків, називають **базисними змінними**, а решту змінних – **вільними**.

Вільним змінним надають довільних значень $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ і виражають через них базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1 - \gamma_{1,r+1}c_1 - \dots - \gamma_{1,n}c_{n-r} \\ x_2 = \delta_2 - \gamma_{2,r+1}c_1 - \dots - \gamma_{2,n}c_{n-r} \\ \dots\dots\dots \\ x_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}c_1 - \dots - \gamma_{r,n}c_{n-r} \\ x_{r+1} = c_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n-r} \end{cases}.$$

Крок 6. Записують загальний розв'язок системи у векторному вигляді:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{1r+j} c_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_r - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{r\,r+j} c_j \\ c_1 \\ c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Приклад 8.3. Розв'язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язання. Крок 1. Розширена матриця системи: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

Крок 2. До східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \vec{a}_2 \leftarrow 4\vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3 - 2\vec{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \vec{a}_3 \leftarrow 7\vec{a}_2 + 10\vec{a}_3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right).$$

Крок 3. За теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна і визначена.

Крок 4. До зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2 - 7\vec{a}_3 \\ :19 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 \leftarrow \vec{a}_1 - \vec{a}_3 \\ :10 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 \leftarrow \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} :4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Крок 5-6. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$.

Приклад 8.4. Показати, що система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 8x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$ несумісна.

Розв‘язання. Випишемо розширену матрицю системи: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{array}\right)$.

Застосуємо до неї метод Гаусса елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \vec{a}_2 \leftarrow 8\vec{a}_2 - \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3 - 4\vec{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -15 & 6 \\ 0 & 3 & -10 \end{array}\right) \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \sim$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -44 \\ 0 & 3 & -10 \end{array}\right)$-отримали, що 0= - 44, це означає, що система розв'язків не має.

Відповідь. Система несумісна.