Estimación

Ejercicio 8.

m.a.s. n.

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro λ de la distribución de Poisson.

a) Analiza su insesgadez.
b) Analiza su consistencia.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Función de Probabilidad:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Función de Verosimilitud.

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} \right)$$

$$= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\lambda}.$$

$$L(\lambda) = \frac{e^{-\lambda \cdot n} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Logaritmo

$$\ell = \ln L = \ln e^{-\lambda n} + \ln \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\ell = -\lambda n + \sum x_i \cdot \ln(\lambda) - cte$$

Derivada

$$0 = \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} \rightsquigarrow n = \frac{\sum x_i}{\lambda} \rightsquigarrow \lambda = \sum x_i / n.$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \overline{X}$$

a) Insesgadez

Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado si

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

$$E(\hat{\lambda}_{MV}) = E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum x_i\right).$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \lambda.$$

$$= \lambda.$$

x_i son v.a.

$x_i \sim \text{Poisson}(\lambda).$

$E(x_i) = \lambda.$

$Var(x_i) = \lambda.$

$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MV}$ es insesgado.

b) Consistencia

Un estimador $\hat{\theta}$ es consistente si:

(i) Asintóticamente insesgado $\left(\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta\right)$

(ii) Varianza tiende a cero cuando $n \to \infty$. $\left(\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0\right)$

(i): $\hat{\lambda}_{MV}$ es insesgado $\Rightarrow$ también va a ser asint. inseg.

(ii) $Var(\hat{\lambda}_{MV}) = Var\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var\left(\sum x_i\right)$

$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum Var(x_i) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Conclusión

$\hat{\lambda}_{MV}$ es consistente.