Examen 1

1) Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

   95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

   Suponiendo que los precios de este producto siguen una distribución normal de varianza 25 y media desconocida:

   a. ¿Cuál es la distribución de la media muestral?
   b. Determine el Intervalo de confianza al 95% para la media poblacional.

<u>Solución:</u>

a. Denotemos como μ la media poblacional desconocida. Como los precios vienen de una distribución Normal, entonces la media muestral (estadístico que es función de los elementos muestrales) también tiene una distribución Normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{25}{16}$.

b. Para determinar el IC, primero calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{95 + 108 + \cdots + 110}{16} = 104$$

La fórmula del intervalo es:

$$IC(\mu) = \bar{x} \pm t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{n}$$

Según la tabla de la t-student (buscando los grados de libertad igual a 15 y la probabilidad igual a 0.025) el valor $t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} = 2.1315$.

$$IC(\mu) = 104 \pm 2.1315 \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \left[104 - 2.1315 \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} \;\; ; \;\; 104 + 2.1315 \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}\right]$$
$$= [101.3357\,; 106.6643]$$

2) Una marca de nueces afirma que como máximo el 6% de las nueces están vacías. Se eligieron 300 nueces al azar y se detectaron 21 vacías.
   a. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca?

b. Si se mantiene el porcentaje muestral de nueces vacías y el nivel de significación es del 5%, ¿qué tamaño muestral necesitaría para estimar la proporción de nueces con un error menor del 1%?

Solución:

Contraste para una proporción (muestra grande)

$H_0: p \leq 0.06$
$H_1: p > 0.06$

Donde $p_0 = 0.06$ es la proporción hipotética.

Según los datos muestrales:
$n = 300$
$\hat{p} = \frac{21}{300} = 0.07$

El estadístico de contraste es:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.01}{0.0137} = 0.7299$$

El valor crítico es:

$$Z_\alpha = 2.3263$$

Como es un contraste unilateral a la derecha (tenemos un “>” en la hipótesis alternativa), entonces la región de rechazo comienza en el valor crítico $Z_\alpha = 2.3263$ y se extiende hacia la derecha, por lo cual como $\hat{Z} = 0.7299$ es menor que el valor crítico, no se encuentra en la región de rechazo sino en la región de aceptación.

Conclusión: No hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, para rechazar lo que dice la marca de que como mucho el 6% de las nueces están vacías.

3) Los datos de la producción de trigo en toneladas (X) y el precio del kilo de harina en pesetas (Y) en la década de los 80 en España fueron:

Producción de trigo	30	28	32	25	25	25	22	24	35	40
Precio de la harina	25	30	27	40	42	40	50	45	30	25

a. Ajusta la recta de regresión lineal simple de Y en función de X estimando sus parámetros.
b. Calcula la varianza residual s_R^2.
c. Calcula un intervalo de confianza al 95% para la pendiente de la recta.
d. En base al intervalo de confianza, ¿es significativo el parámetro?

Solución:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{sxy}{s_x^2} = -1.3537$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \; \bar{x} = 74.116$$

La recta es:

$$Y = 74.116 - 1.3537\,X$$

La varianza residual es:

$$s_R^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{207.92}{8} = 25.99$$

Para el intervalo de confianza necesitamos buscar en la tabla de la t-Student al valor $t_{n-2;\alpha/2} = t_{8\,;\,0.025} = 2.306$

$$IC(\beta_1) = \hat{\beta}_1 \pm t_{n-2;\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_R^2}{(n-1)s_x^2}} = [-2.046\,;\,-0.661]$$

Como el intervalo no contiene al cero, rechazamos que $\beta_1 = 0$ al nivel de confianza del 95%. Entonces el β_1 es significativo.