Estimación

Ejercicio 9.

Halla el estimador máximo verosímil de los parámetros μ y σ^2 de la distribución Normal definida por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

a) Demuestra que el estimador máximo verosímil de μ es insesgado.

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}.$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}$$

$$\ell = \ln L = \underbrace{-\frac{n}{2}\cdot \ln\left(2\pi\sigma^2\right)}_{\text{no depende de } \mu} - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$0 = \boxed{\frac{\partial \ell}{\partial \mu}} = +\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\cdot\cancel{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\cdot(+1)$$

$$0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu = 0$$

$$\sum x_i - n\mu = 0$$

$$\sum x_i = n\mu$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \Rightarrow \hat{\mu}_{MV} = \overline{X}$$

$$\ell = -\frac{n}{2}\cdot \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 .$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\cancel{2}}\cdot \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\pi}\,\sigma^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{4}\cancel{\pi}\cdot\cancel{\sigma}\cdot + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\cancel{-2}\sigma^{-3}\right)$$

$$0 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma^3}$$

$$\frac{n}{\sigma} = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma^3}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^{\cancel{3}}}{\cancel{\sigma}} = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{n}$$

sustituimos $\hat{\mu}_{MV} = \bar{x}$.

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = S^2$$

S^2 es la varianza muestral.

El estimador M.V. de la media poblacional (μ) de la Normal es igual a la media muestral:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{X}$$

El estimador M.V. de la varianza poblacional (σ^2) de la Normal es igual a la varianza muestral.

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = S^2$$

$\hat{\mu}_{MV} = \bar{X}$ es insesgado.

$$E(\hat{\mu}_{MV}) = \mu$$

$$\parallel$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \mu$$

$$E(\hat{\mu}_{MV}) = \mu$$