Estimación

Ejercicio 1.

Se considera una población representada por una variable X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & \text{para } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

m.a.s.

tamaño n.

Determinar el estimador, por el método de los momentos, del parámetro poblacional θ.

El 1er momento muestral coincide con media muestral.

Método de los Momentos:

1er momento $\quad \alpha_1 = E(X) = a_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$

2do momento $\quad \alpha_2 = E(X^2) = a_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}.$

....

j-ésimo momento $\quad \alpha_j = E(X^j) = a_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^j}{n}.$

$$\alpha_1 = \boxed{E(X) = a_1 = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}}$$

por definición de valor esperado de v.a. continua.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \int_0^{\theta} x(\theta - x)\, dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\theta \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{\theta^3}{2} - \frac{\theta^3}{3}\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\theta^2}} \cdot \frac{\theta^{\cancel{3}}}{\cancel{6}_3} = \frac{\theta}{3} = \overline{X}$$

Estimador de θ por el método momentos:

$$\boxed{\hat{\theta}_{MM} = 3\overline{X}}$$