Estimación

Ejercicio 6.

m.a.s. n.

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro p de la distribución $Binomial(p, k)$, donde k es el número de repeticiones y es conocido.

$X \sim Binomial(p, k)$.

$$p(x) = P(X = x) = \binom{k}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{k-x}$$

Función de Verosimilitud:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left[\binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{k}{x_i} \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(k-x_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{k}{x_i} \cdot p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{nk - \sum x_i}$$

Logaritmo

$$l = \ln L = \left[\text{cte} \right] + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(p) \right] + \left[(nk - \sum x_i) \cdot \ln(1-p) \right]$$

Derivar

$$0 = \frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} + \frac{nk - \sum x_i}{1-p} \cdot (-1)$$

$$\frac{nk - \sum x_i}{1-p} = \frac{\sum x_i}{p}$$

$$p(nk - \sum x_i) = (1-p) \sum x_i$$

$$pnk - \cancel{p \sum x_i} = \sum x_i - \cancel{p \sum x_i}$$

$$pnk = \sum x_i$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot k} \rightarrow \bar{X}$$

$$\boxed{\hat{p}_{MV} = \frac{\bar{X}}{k}}$$