Estimación

Ejercicio 1)

Se considera una población representada por una variable X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & \text{para } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar el estimador, por el método de los momentos, del parámetro poblacional θ.

Ejercicio 2)

Calcula el estimador máximo verosímil del parámetro a de la función de densidad, en muestras aleatorias simples de tamaño n.

$$f(x, y) = a^2 e^{-a(x+y)}, \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

Ejercicio 3)

Calcula el estimador máximo verosímil de los parámetros a y b de la función de densidad, en muestras aleatorias simples de tamaño n.

$$f(x, y) = abx^{a-1}y^{b-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

Ejercicio 4)

Calcula el estimador máximo verosímil del parámetro a de la función de densidad, en muestras aleatorias simples de tamaño 2.

$$f(x) = ae^{-ax}, \qquad x \geq 0, a > 0$$

Ejercicio 5)

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro p de la distribución Bernoulli.

Ejercicio 6)

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro p de la distribución $Binomial(p, k)$, donde k es el número de repeticiones y es conocido.

Ejercicio 7)

Halla el estimador por el método de los momentos del parámetro λ de la Poisson.

Ejercicio 8)

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro λ de la distribución de Poisson.

a) Analiza su insesgadez.
b) Analiza su consistencia.

Ejercicio 9)

Halla el estimador máximo verosímil de los parámetros μ y σ^2 de la distribución Normal definida por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

a) Demuestra que el estimador máximo verosímil de μ es insesgado.

Ejercicio 10)

La variable aleatoria poblacional "renta de las familias" del municipio de Madrid se distribuye siguiendo un modelo $N(\mu, \sigma^2)$. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño 4. Como estimadores del parámetro μ, se proponen los siguientes:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{x_3 - 4x_2}{-3}$$

$$\hat{\mu}_3 = \bar{x}$$

a) Comprobar si los estimadores son insesgados.
b) ¿Cuál es más eficiente?
c) Si tuvieras que escoger entre ellos, ¿cuál escogerías? Razona tu respuesta a partir del Error Cuadrático Medio.
d) Demuestra que el estimador $\hat{\mu}_3$ es consistente en caso de tener una m.a.s de tamaño n.

RESUMEN DE FÓRMULAS

Estimación por el método de los momentos (MM)

El procedimiento consiste en igualar los momentos poblacionales a los correspondientes momentos muestrales, formando así tantas ecuaciones como parámetros poblacionales se pretenden estimar:

$$\alpha_1 = E(X) = \mu \;\rightarrow\; \hat{\alpha}_1 = a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \mu \;\rightarrow\; \hat{\alpha}_2 = a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$\ldots$$

$$\alpha_r = E(X^r) = \mu \;\rightarrow\; \hat{\alpha}_r = a_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$$

Estimación de máxima verosimilitud (MV)

Se definen los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros θ_i como aquellos que maximizan la función de verosimilitud (es decir, que hacen cero la derivada sobre cada θ_i):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

Pasos:

1. *Hallar la función de verosimilitud L.*
2. *Hallar el logaritmo (usualmente ln = logaritmo natural) de L.*
3. *Derivar la log-verosimilitud con respecto al parámetro (o los parámetros).*
4. *Igualar a cero y despejar el parámetro (o los parámetros).*

Insesgadez

Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado cuando se verifica que su valor esperado coincide con el parámetro que estima: $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Eficiencia

Entre varios estimadores, el más eficiente será el que tenga menor varianza.

Por ejemplo, entre dos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, decimos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si se verifica que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$.

La eficiencia relativa entre dos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ es igual a:

$$\frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

Error Cuadrático Medio (ECM)

El Error Cuadrático Medio representa el balance entre las dos propiedades más deseables en los estimadores (insesgadez y mejor eficiencia). Entre dos estimadores, al intentar elegir uno de ellos, en ocasiones resulta que uno es mejor que el otro en términos de la insesgadez, y al inverso en términos de la eficiencia. Entonces no sabemos cuál elegir. En ese caso usaremos el ECM cuya fórmula es la siguiente, y elegiremos el estimador que tenga menor ECM:

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = Var(\hat{\theta}) + [Sesgo(\hat{\theta})]^2$$

Donde $Sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

Consistencia

Un estimador $\hat{\theta}$ es consistente si es un estimador asintóticamente insesgado y su varianza tiende a cero al aumentar el tamaño muestral. Es decir, un estimador $\hat{\theta}$ es consistente cuando:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \text{ y } \lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$$