Estimación

Ejercicio 10.

La variable aleatoria poblacional "renta de las familias" del municipio de Madrid se distribuye siguiendo un modelo $N(\mu, \sigma^2)$. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño 4. Como estimadores del parámetro μ, se proponen los siguientes:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{x_3 - 4x_2}{-3}$$

$$\hat{\mu}_3 = \bar{x}$$

a) Comprobar si los estimadores son insesgados.
b) ¿Cuál es más eficiente?
c) Si tuvieras que escoger entre ellos, ¿cuál escogerías? Razona tu respuesta a partir del Error Cuadrático Medio.
d) Demuestra que el estimador $\hat{\mu}_3$ es consistente en caso de tener una m.a.s de tamaño n.

a) Prop. Insesgadez: Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$.

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot E(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\underbrace{E(x_1)}_{\mu} + 2\underbrace{E(x_2)}_{\mu} + 3 \cdot \underbrace{E(x_3)}_{\mu}\Big] = \frac{1}{6}\big[\mu + 2\mu + 3\mu\big] = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6}\mu$$

μ "=" $E(x)$

$$\boxed{E(\hat{\mu}_1) = \mu} \longrightarrow$$

$\hat{\mu}_1$ é insesgado.

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{x_3 - 4x_2}{-3}\right) = \frac{1}{-3} E(x_3 - 4x_2)$$

$$= -\frac{1}{3}\left[E(x_3) - 4E(x_2)\right] = -\frac{1}{3}\left[\mu - 4\cdot\mu\right] = +\frac{1}{\cancel{3}}\cdot(\cancel{+3})\cdot\mu$$

$E(\hat{\mu}_2) = \mu.$ $\rightarrow$ $\hat{\mu}_2$ es insesgado.

$$E(\hat{\mu}_3) = E(\bar{x}) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + E(x_4)\right] = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\mu = \mu.$$

$E(\hat{\mu}_3) = \mu$ $\Longrightarrow$ $\hat{\mu}_3$ es insesgado.

b) **Eficiencia**.

Más eficiente $\Leftrightarrow$ Menor varianza:

$$Var(\hat{\mu}_1) = Var\left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right) = \frac{1}{6^2} Var(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \left[\underbrace{Var(x_1)}_{\sigma^2} + 4 \cdot \underbrace{Var(x_2)}_{\sigma^2} + 9 \cdot \underbrace{Var(x_3)}_{\sigma^2} \right]$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \left[\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2 \right] = \frac{14}{36} \cdot \sigma^2 = \boxed{0.39 \times \sigma^2}$$

$$Var(\hat{\mu}_2) = Var\left(\frac{x_3 - 4x_2}{-3}\right) = \frac{1}{(-3)^2}\left[\underbrace{Var(x_3)}_{\sigma^2} + 16\cdot\underbrace{Var(x_2)}_{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left[\sigma^2 + 16\sigma^2\right] = \frac{17}{9}\sigma^2 = \boxed{1.89\times\sigma^2}$$

$$Var(\hat{\mu}_3) = Var\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = \frac{1}{\cancel{16}4}\cdot\cancel{4}\cdot\sigma^2$$

$$= \boxed{0.25\times\sigma^2}$$

$$\underline{Var(\hat{\mu}_3)} < Var(\hat{\mu}_1) < Var(\hat{\mu}_2).$$

↳ $\hat{\mu}_3$ es el más eficiente.

c) ECM = Varianza + (Sesgo)^2.

$\text{Sesgo} = E(\hat{\theta}) - \theta$

Como los 3 estimadores son insesgados ⇒ sesgo = 0

El que menor ECM tiene es el que menor Varianza ~~tiene~~ ⇒ $\hat{\mu}_3$.

d) m.a.s. n.

$\hat{\mu}_3$ es insesgado. ⇒ también es asint. insesgado

$E(\hat{\mu}_3) = E(\bar{x}) = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\mu = \mu.$

⇒ $\hat{\mu}_3$ es consistente.

$Var(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Consistencia

(i) Asintóticamente insesgado : $\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

(ii) Varianza tiende a cero $n \to \infty$. : $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$.