Estimación

Ejercicios.

m.a.s. n.

Halla el estimador máximo verosímil del parámetro p de la distribución Bernoulli.

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Valor

$X \to \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p. \end{cases}$

función de probabilidad.

$p(x) = P(X=x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}.$

Función de Verosimilitud.

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$$

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}$$

Logaritmo de L.

$$\ell = \ln L = \ln p^{\sum x_i} + \ln (1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$= \sum x_i \cdot \ln(p) + (n-\sum x_i) \cdot \ln(1-p).$$

Derivar con respecto a p. Igualar a cero:

$$0 = \frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} + \frac{(n-\sum x_i)}{1-p} \cdot (-1)$$

$$0 = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n-\sum x_i}{1-p} \rightarrow \frac{n-\sum x_i}{1-p} = \frac{\sum x_i}{p}$$

$$p(n-\sum x_i) = (1-p)\sum x_i \rightarrow p \cdot n - \cancel{p\sum x_i} = \sum x_i - \cancel{p\sum x_i}$$

$$p \cdot n = \sum x_i$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{p}_{MV} = \bar{x}$$