Regresión Lineal

Ejercicio 1.

Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años de edad pesan, respectivamente, 14, 20, 32, 42 y 44 kilos.

a. Hallar la ecuación de la recta de regresión que estime el peso en función de la edad.
b. ¿Cuál sería el peso aproximado de un niño de seis años?

Modelo de Regresión Lineal Simple.

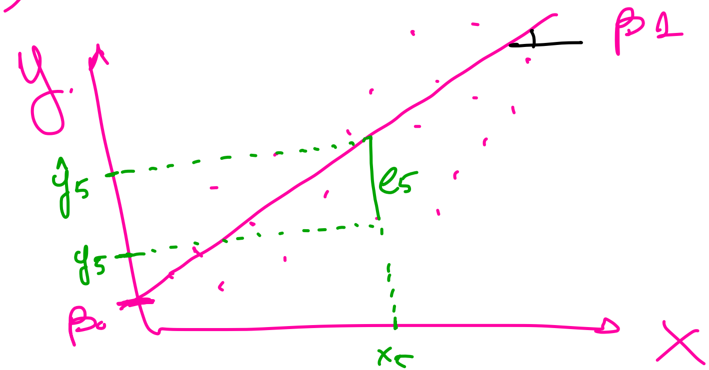
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X.$$

Y: variable Dependiente (o explicada)

X: variable independiente (o explicativa)

β_0: intercepto

β_1: pendiente.



Tipo de relación

$\beta_1 > 0 \rightarrow$ relación lineal $+$

$\beta_1 < 0 \rightarrow$ " " $-$

Estimar los parámetros:

covarianza muestral entre x e y

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \rightarrow \text{Alternativa: } \hat{\beta}_1 = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x}$$

coef. correlación.

varianza muestral de x.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$$

medias muestrales

Coeficiente de Determinación: mide la variabilidad explicada por el modelo.

$$R^2 = (r_{xy})^2$$

Inferencia sobre el parámetro β_1:

Se busca saber si β_1 es significativo ($\beta_1 \neq 0$).

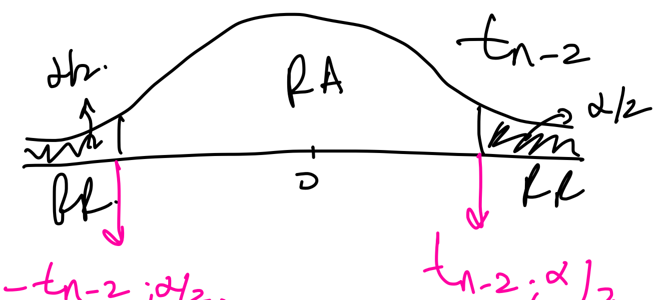
* Contraste de hipótesis.

$H_0: \beta_1 = 0$

$H_1: \beta_1 \neq 0$

Estadístico de contraste

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{S_R^2}{(n-1)\cdot S_x^2}}} \sim t_{n-2}$$



$$S_R^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum e_i^2 \quad , \text{ donde } \quad e_i = y_i - \hat{y}_i$$

e_i → error o residuo.

y_i → Datos reales.

$\hat{y}_i$ → datos estimados

S_R^2 → Varianza residual.

Intervalo de Confianza

$$IC(\beta_1) = \hat{\beta}_1 \pm t_{n-2;\,\alpha/2} \sqrt{\frac{S_R^2}{(n-1)\cdot S_x^2}}$$

¿ $0 \in IC(\beta_1)$? ⟹ No es significativo.

$0 \notin IC(\beta_1)$ ⟹ Si es significativo $(\beta_1 \neq 0)$

Interpretamos el β_1: $\quad Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X.$

la variable Y cambia en β_1 unidades, cuando X aumenta en una unidad.

Solución del Ejercicio

$n=5$

$X \leftarrow$ Edad	2	3	5	7	8
$Y \leftarrow$ Peso	14	20	32	42	44.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X.$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \qquad \beta_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = 5 \qquad S_{xy} = \left(\frac{1}{n}\sum x_i \cdot y_i\right) - \bar{x}\cdot\bar{y} = 26.8.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i = 30.4 \qquad S_x^2 = \left(\frac{1}{n}\sum x_i^2\right) - (\bar{x})^2 = 5.2.$$

$\hat{\beta_1} = \frac{Sxy}{Sx^2} = 5.15$ $\hat{\beta_0} = \bar{y} - \hat{\beta_1} \cdot \bar{x} = 4.65$

$$y = 4.65 + 5.15 \cdot x$$

b) $x = 6$ cms.

$$y = 4.65 + 5.15 \times 6 = 35.55 \text{ kg.}$$