

Estimació

Exercici 2.



Calcula el estimador máximo verosímil del parámetro a de la función de densidad, en muestras aleatorias simples de tamaño n .

$$f(x, y) = a^2 e^{-a(x+y)}, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

Función de Verosimilitud:

$$L(a) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n a^2 \cdot e^{-a(x_i + y_i)}$$

$$= \underbrace{a^2}_{\downarrow 2 \cdot n} \cdot e^{-a(x_1 + y_1)} \cdot \underbrace{a^2}_{\downarrow} \cdot e^{-a(x_2 + y_2)} \cdot \underbrace{a^2}_{\downarrow} \cdot e^{-a(x_3 + y_3)} \cdot \dots \cdot \underbrace{a^2}_{\downarrow} \cdot e^{-a(x_n + y_n)}$$

$$= a^{2 \cdot n} \cdot e^{-a \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)}$$

Logaritmo de la Verosimilitud:

$$l = \ln L = 2n \cdot \ln(a) - a \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$$

Prop: $\ln e^a = a$.

$$\log_a^b = b \cdot \log(a).$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b.$$

$$l = 2n \cdot \ln(a) - a \cdot \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$$

Derivada de "l" e igualar a zero:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = 2n \cdot \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = 0$$

$$\frac{2n}{a} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$a = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)} = \frac{2n}{\sum x_i + \sum y_i} = \frac{2n}{n\left(\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum y_i}{n}\right)}$$

Estimador
máximo
verossímil.

$$\hat{a}_{MV} = \frac{2}{\bar{x} + \bar{y}}$$