

Estimación

Ejercicio 3.



Calcula el estimador máximo verosímil de los parámetros a y b de la función de densidad, en muestras aleatorias simples de tamaño n .

$$f(x, y) = abx^{a-1}y^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

Función de Verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n a \cdot b \cdot x_i^{a-1} \cdot y_i^{b-1} \\ &= a \cdot b \cdot x_1^{a-1} \cdot y_1^{b-1} \cdot a \cdot b \cdot x_2^{a-1} \cdot y_2^{b-1} \cdot \dots \cdot a \cdot b \cdot x_n^{a-1} \cdot y_n^{b-1} \\ &= a^n \cdot b^n \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{a-1} \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{b-1}. \end{aligned}$$

Logaritmos:

Prop.

$$\ln(a)^b = b \cdot \ln(a)$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\begin{aligned} l = \ln L &= n \cdot \ln(a) + n \cdot \ln(b) + (a-1) \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) + (b-1) \ln\left(\prod_{i=1}^n y_i\right) \\ &= n \ln(a) + n \ln(b) + (a-1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + (b-1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(y_i) \end{aligned}$$

Derivada de "l" con respecto a "a" e igualar a cero:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \Rightarrow \frac{n}{a} = - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \Rightarrow \hat{a}_{MV} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) = 0 \Rightarrow \hat{b}_{MV} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln(y_i)}$$