

DifraccionFraunhofer

May 19, 2017

1 Difracción de Fraunhofer

La difracción es la tendencia de toda onda a apartarse de la propagación rectilínea mientras se propaga o pasa a través de una apertura u obstáculo.

Este efecto es básicamente resultado de procesos interferenciales y por lo tanto está íntimamente relacionado con la naturaleza ondulatoria de la luz.

Para su estudio vamos a basarnos en el **Principio de Huygens-Fresnel**, el cual es necesario destacar que se trata de una aproximación. Para un tratamiento completo de la difracción debemos acudir a las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, el uso del principio de Huygens-Fresnel nos dará resultados más que suficientes. Dicho principio dice lo siguiente:

Cada punto del frente de onda se puede suponer como centro secundario emisor de ondas esféricas. La perturbación total que llega a otro punto posterior es el resultado de la interferencia de todas esas ondas secundarias.

Vamos a considerar la siguiente situación: Una onda esférica monocromática procedente de un punto P_0 llega a una apertura que denotaremos por Σ . Queremos ver cuál es la onda que llega a un punto P situado tras la apertura.

El campo eléctrico en la apertura será el debido a la onda esférica incidente,

$$E = \frac{E_0}{r} e^{ikr}$$

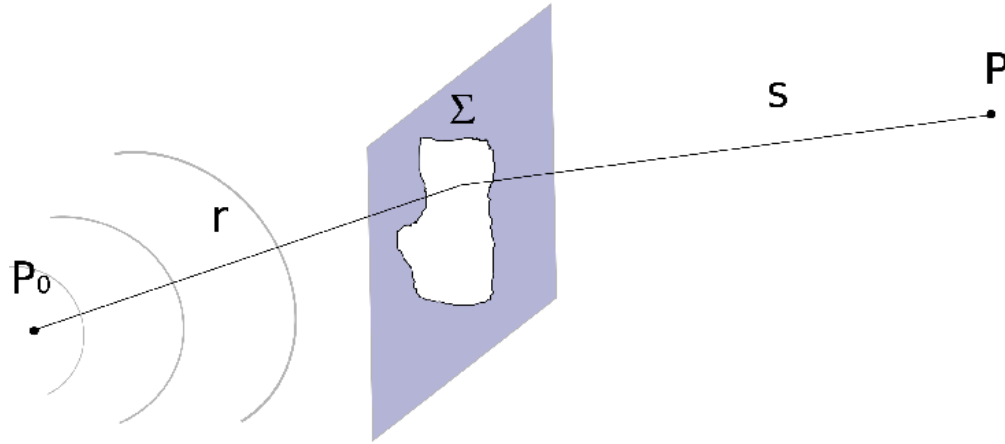
Ahora para calcular el campo eléctrico en P , primero consideramos cada elemento de superficie $d\Sigma$ de la apertura como un centro emisor de ondas esféricas, y después sumaremos (o dicho de otro modo, haremos interferir) las contribuciones de todos los elementos de superficie para obtener el campo eléctrico total. La contribución individual del elemento de superficie $d\Sigma$ al campo total en P será,

$$dE_p = \frac{E_0}{r} e^{ikr} \frac{e^{iks}}{s} d\Sigma$$

En la expresión anterior hemos simplemente escrito una onda esférica que se propaga una distancia s (de ahí el término $\frac{e^{iks}}{s}$). Como la excitación de esta onda es debida a otra onda esférica incidente, su amplitud será $\frac{E_0}{r} e^{ikr} d\Sigma$, es decir, proporcional al elemento de superficie escogido.

Ahora, el campo total lo calcularemos sumando todas las contribuciones de los elementos de superficie distribuidos por toda apertura. Es decir,

$$E_p = \int_{\Sigma} \frac{E_0}{rs} e^{ik(r+s)} d\Sigma$$



Dif. General

Resolver la anterior integral dependerá de la forma de la apertura, y de las distancia s y r entre la apertura y el punto P en el que queremos calcular el campo y el punto P_0 fuente de la onda esférica incidente en la apertura. Nosotros no vamos a ver el cálculo general, sino que nos vamos a centrar en la aproximación conocida como régimen (o difracción) de Fraunhofer. Esta aproximación se corresponde con que la fuente P_0 y el punto de observación P estén lo suficientemente alejados de la apertura. A partir de ahora nos referiremos a los puntos P y P_0 por sus coordenadas cartesianas tomando como origen el plano de la apertura, las cuales llamaremos (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) respectivamente. Además, las coordenadas de un punto en la apertura las denotaremos por (χ, η) .

Podemos demostrar que el régimen de Fraunhofer lo podemos obtener cuando se cumple,

$$\min(z, z_0) > \frac{a^2}{\lambda}$$

donde en la expresión anterior, z es la distancia entre la apertura y P , z_0 la distancia entre P_0 y la apertura, a es la dimensión de la apertura, y finalmente λ es la longitud de onda de la luz.

Una forma de satisfacer el anterior requisito es situar la fuente P_0 y el punto de observación P en el infinito de forma efectiva, es decir, en los planos focales de dos lentes situadas a ambos lados de la apertura.

Bajo esta condición, se puede demostrar que el campo resultante en P viene dado por la siguiente expresión,

$$E_P = C \int_{\Sigma} E_0(\chi, \eta) e^{ik(p\chi + q\eta)} d\chi d\eta$$

donde recordamos que χ, η son las variables cartesianas en el plano de la apertura (estamos sumando todas las contribuciones de los elementos de superficie en los que dividimos la apertura). Además,

$$p = \frac{x_0}{z_0} + \frac{x}{z}$$

y

$$q = \frac{y_0}{z_0} + \frac{y}{z}$$

La expresión de E_P escrita de la manera anterior no es nada más que la transformada de Fourier del campo en la apertura $E_0(\chi, \eta)$. Si la apertura tiene una cierta transmitancia $t(\chi, \eta)$, el campo inmediatamente después será $t(\chi, \eta)E_0(\chi, \eta)$ y será este producto el que tengamos que introducir en la expresión de E_P .

1.1 Difracción de Fraunhofer. Apertura rectangular.

En este caso, haciendo la integral anterior, el campo resultante en P que se obtiene es,

$$E_P(\theta) = E_0 \frac{\text{sen}(\beta)}{\beta} e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

y la irradiancia,

$$I_P(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen}(\beta)}{\beta} \right)^2$$

donde en las anteriores expresiones, $\beta = k \text{sen}(\theta)/2$. Es decir, la irradiancia únicamente depende del ángulo θ que subtiende P visto desde el centro de la apertura.

En el caso en el que el punto P esté en el plano focal de una lente con focal f' , $\text{sen}(\theta) \simeq y_P/f'$ para ángulos pequeños y $\beta = kay_P/2f'$. Si por el contrario, observamos en una pantalla a una distancia D mucho mayor que el tamaño de la apertura, $\beta = kay_P/2D$.

Veamos qué forma tiene la anterior función. Para observar los cambios en la irradiancia con la anchura de la rendija u otros parámetros, se pueden modificar los parámetros del código que se presenta a continuación.

```
In [1]: from numpy import *
        from matplotlib.pyplot import *
        %matplotlib inline
        style.use('bmh')

        #Parámetros
        #####
        Lambda = 632.8e-6 # longitud de onda de la radiación en mm
        focal = 500 # focal de la lente en mm. Consideramos que observamos en el plano focal de la lente
        a = 0.05 # anchura de la rendija en mm
        #####

        k = 2.0*pi/Lambda
        yp = linspace(-20,20,500) # vector de posiciones en la pantalla en mm
        beta = k*a*yp/(2.0*focal)
        I0 = 1 # en mW/cm^2
        IP = I0*(sin(beta)/beta)**2

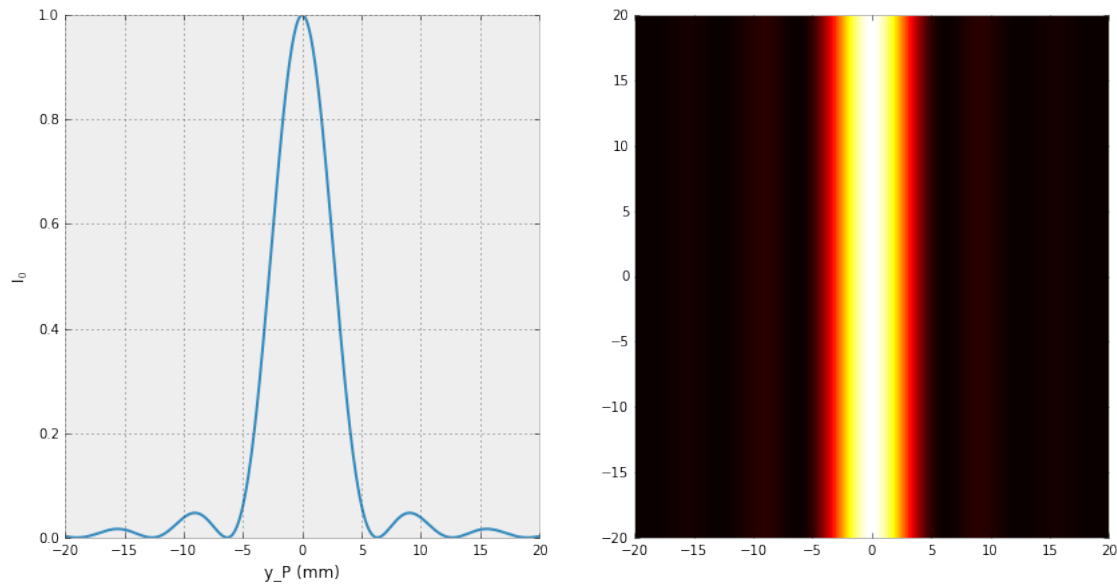
        # En 2D
        [X,Y] = meshgrid(yp,yp)
        beta2 = k*a*X/(2.0*focal)
        IP2 = I0*(sin(beta2)/beta2)**2
        fig = figure(figsize=(14,7))
        subplot(121)
```

```

plot(yp, IP)
xlabel("y_P (mm)")
ylabel(r'$I_0$')
subplot(122)
pcolormesh(yp,yp,IP2,cmap = 'hot');

```

Out[1]:



Hemos comentado anteriormente que la difracción de Fraunhofer no era más que la transformada de Fourier del campo en la apertura (mejor dicho, el campo es proporcional a la transformada de Fourier). Veamos esto.

En el código que se presenta a continuación se calcula un campo en la apertura. Como suponemos que llega una onda plana, el campo en la apertura será nada más que un valor constante para los puntos dentro de la apertura y nulo en los puntos fuera de la apertura. En el código a este campo se le denomina *campoinc*. Posteriormente, el código usa la función *fft* estándar para calcular la transformada de Fourier de ese campo. Finalmente, representamos el cuadrado del valor absoluto de esa transformada, que, deberá ser proporcional a la irradiancia representada anteriormente.

Podemos ver cómo la función obtenida es igual a la representada anteriormente. Aunque un análisis más detallado debería tener en cuenta la transformación entre las frecuencias utilizadas en el código y los valores de y en el plano de observación, no entraremos ahí. Nos basta por el momento con ejemplificar la relación entre la transformada de Fourier y la irradiancia obtenida en el régimen de Fraunhofer.

```

In [2]: def fun(x):
        if(abs(x)<0.05/2):
            return 1.0
        else:
            return 0.0

```

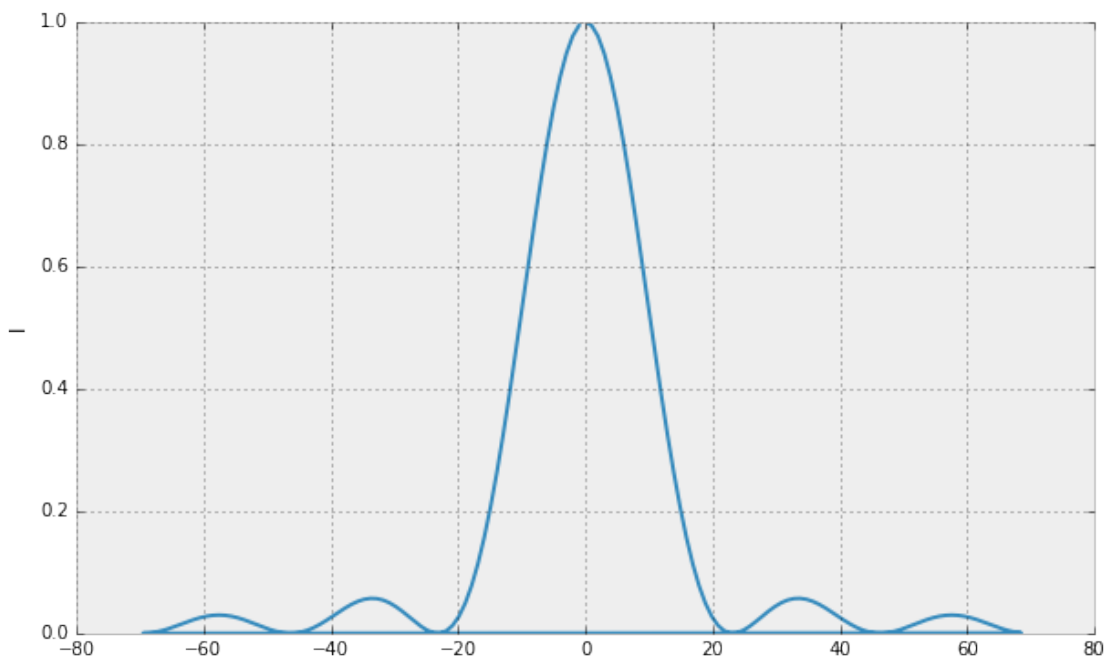
```

y = linspace(-0.5,0.5,140)
funvec = vectorize(fun)
campoinc = funvec(y)
from scipy.fftpack import fft, fftfreq
fig = figure(figsize=(10,6))
freq = fftfreq(y.shape[0],y[1]-y[0])
tfcampo = fft(campoinc)
tfcampo2 = abs(tfcampo)**2/max(abs(tfcampo))**2
plot(freq,abs(fft(campoinc))**2/max(abs(fft(campoinc)))**2)
ylabel("I")

```

Out[2]: <matplotlib.text.Text at 0x7f5b0f36f690>

Out[2]:



1.2 Difracción de Fraunhofer. Apertura circular

En el caso de una apertura circular de diámetro D_a , la expresión del campo eléctrico en un punto P que subtende un ángulo θ con el eje, y bajo la aproximación considerada en el régimen de Fraunhofer es la siguiente,

$$E(\theta) = C \frac{J_1(k \frac{D_a}{2} \sin(\theta))}{k \frac{D_a}{2} \sin(\theta)}$$

y por tanto la irradiancia,

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{J_1(k \frac{D_a}{2} \sin(\theta))}{k \frac{D_a}{2} \sin(\theta)} \right)^2$$

A esta función se le denomina *mancha de Airy* y es fundamental para comprender la formación de la imagen de sistemas ópticos incluyendo la naturaleza ondulatoria de la luz, así como su poder de resolución.

Si observamos el patrón de difracción en una pantalla situada a una distancia D de la apertura, y llamamos r a la distancia del punto de observación P al eje del sistema óptico, tendremos que $\tan(\theta) = r/D$. Por otro lado, si consideramos que el ángulo subtendido por el punto P es pequeño, $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) = r/D$, pudiendo sustituir el seno en las expresiones anteriores por este cociente.

La forma de esta función la podemos ver en la siguiente figura.

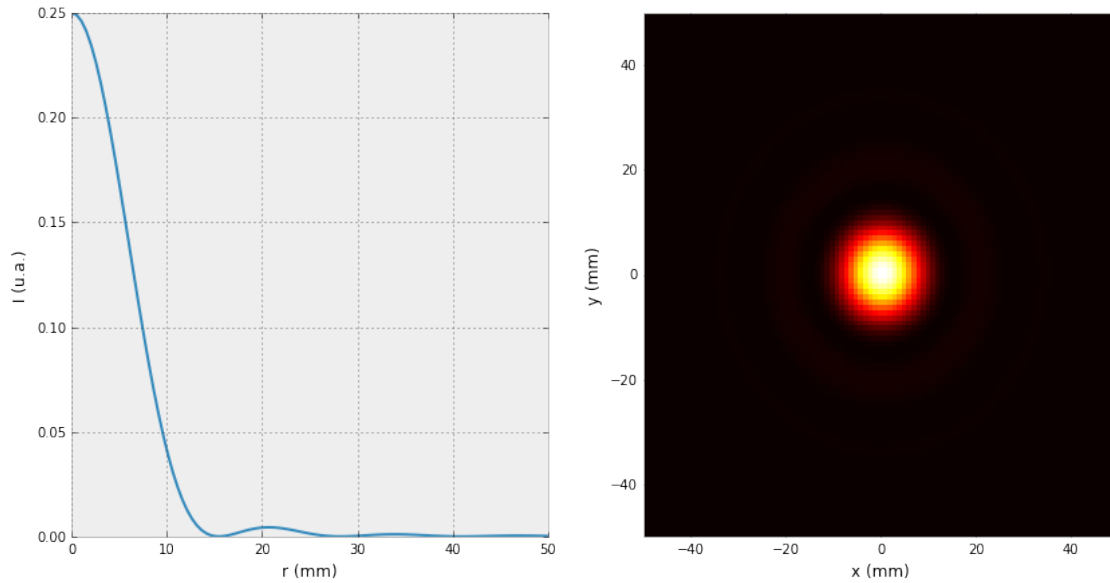
In [3]: `from scipy.special import j1`

```
#Parámetros
#####
Da = 0.1 # mm
D = 2000 # distancia entre la apertura y la pantalla de observacion
I0 = 1 #mW/cm^2
#####

r = linspace(0.001,50,100)
#Corte en 1D
fig = figure(figsize=(14,7))
subplot(121)
Icirc = I0*(j1(k*0.5*Da*r/D)/(k*0.5*Da*r/D))**2
plot(r,Icirc)
xlabel("r (mm)")
ylabel("I (u.a.)");

#En 2D
x = linspace(-50,50,100)
[X,Y] = meshgrid(x,x)
R = sqrt(X**2 + Y**2)
Icirc2 = I0*(j1(k*0.5*Da*R/D)/(k*0.5*Da*R/D))**2
subplot(122)
pcolormesh(x,x,Icirc2,cmap='hot')
xlabel('x (mm)')
xlim([-50,50])
ylim([-50,50])
ylabel('y (mm)');
```

Out [3]:



Vemos que tiene simetría circular, y que los máximos secundarios son muchísimo menores en amplitud que el pico central, lo que quiere decir que prácticamente toda la energía se encuentra en el máximo central. Para observar cómo varía la forma de esta función con la dimensión de la apertura, modificar en el anterior código el parámetro D_a y volver a ejecutarlo.

1.3 Poder de resolución de un sistema óptico

Próximamente.