InterferenciaMultiplesOndas

May 19, 2017

0.1 Interferencia por haces múltiples. Filtros interferenciales.

El siguiente notebook explica la irradiancia obtenida en transmisión y reflexión cuando un haz incide en una lámina delgada planoparalela considerando las múltiples reflexiones internas que se producen en dicha lámina. Se asume que el estudiante conoce el caso de interferencia por las dos primeras ondas reflejadas o transmitidas

Planteamiento del problema Consideremos una lámina planoparalela de espesor h e índice de refracción n, rodeada de aire. El tratamiento con las 2 primeras ondas reflejadas o transmitidas, es una aproximación válida cuando los coeficientes de reflexión son bajos. En caso contrario, se hace necesario considerar todas las reflexiones internas producidas en la lámina, y consecuentemente, todas las ondas transmitidas o reflejadas.

Vamos a ver qué ocurre con la irradiancia transmitida y reflejada en este caso. Lo que nos interesa es ver si

- cambia la posición de los máximos/mínimos obtenidos en el caso de la interferencia con 2 ondas.
- cambia el contraste.

```
In [1]: from IPython.core.display import Image
        Image("http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/89/Multiple_beam_interferen
```

Cálculo del campo total en reflexión y en transmisión En la figura anterior se muestran las sucesivas reflexiones internas en la lámina que generan las ondas que queremos hacer interferir. El procedimiento sería análogo a lo ya estudiado con 2 ondas. Colocando una lente y observando en su plano focal obtendremos anillos de interferencia.

Llamaremos al coeficiente de reflexión en la transición aire-lámina r, y al de transmisión t, mientras que llamaremos r' y t' a los coeficientes para la transición lámina-aire.

Con esto en mente, podemos ver que las ondas que interfieren en **transmisión** son,

$$E_{t1} = E_0 tt' e^{i\omega t}$$
$$E_{t2} = E_0 tt' r'^2 e^{i[\omega t - \delta_G]}$$
$$E_{t3} = E_0 tt' r'^4 e^{i[\omega t - 2\delta_G]}$$

.

.

.

$$E_{tN} = E_0 tt' r'^{2(N-1)} e^{i[\omega t-(N-1)\delta_G]}$$

donde $\delta_G = \frac{4\pi}{\lambda} nhcos(\theta_t)$ es el desfase entre ondas sucesivas debido a la diferencia de caminos (el desfase debido a las reflexiones se tiene en cuenta en los coeficientes de reflexión).

Igualmente, las ondas que interfieren en **reflexión** son,

$$E_{r1} = E_0 re^{i\omega t}$$
$$E_{r2} = E_0 tt' r' e^{i[\omega t-\delta_G]}$$
$$E_{r3} = E_0 tt' r'^3 e^{i[\omega t-2\delta_G]}$$

.

.

.

$$E_{rN} = E_0 tt' r'^{(2N-3)} e^{i[\omega t-(N-1)\delta_G]}$$

Si la lámina es suficientemente larga o el ángulo de incidencia no muy grande, tendremos muchas ondas interfiriendo ($N \to \infty$). Sumando todas, tendremos el campo total en transmisión o reflexión. Esta suma puede realizarse y se obtiene,

$$E_t = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{tt'}{1-r^2 e^{-i\delta_G}}\right]$$
$$E_r = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{r(1-e^{-i\delta_G})}{1-r^2 e^{-i\delta_G}}\right]$$

donde en la última expresión se ha utilizado que $r = r'$ y que $tt' = 1 - r^2$ (por conservarción de la energía y dado que no consideramos absorción en el medio)

Cálculo de la irradiancia De las expresiones anteriores llegamos a que la irradiancia en transmisión/reflexión es igual a,

$$I_t = I_0\left[\frac{(tt')^2}{1+r^4-2r^2cos(\delta_G)}\right]$$
$$I_r = I_0\left[\frac{2r^2(1-cos(\delta_G))}{1+r^4-2r^2cos(\delta_G)}\right]$$

Las ecuaciones anteriores se pueden transformar a expresiones más cómodas considerando que $cos\delta_G = 1 - 2sen^2(\delta_G/2)$ y definiendo un nuevo coeficiente denominado **coeficiente de fineza** que tiene en cuenta cuánto refleja cada cara de la lámina,

$$F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)$$

Así,

$$I_t = \frac{I_0}{1+Fsen^2(\delta_G/2)}$$

$$I_r = I_0 \left[\frac{Fsen^2(\delta_G/2)}{1 + Fsen^2(\delta_G/2)} \right]$$

A la función $A(\delta) = \frac{1}{1+Fsen^2(\delta/2)}$ se le denomina **función de Airy**

Análisis de las expresiones

1. £Cuánto vale I_0 - I_t?

$$I_0 - I_t = I_0 - \frac{I_0}{1 + Fsen^2(\delta_G/2)} = I_0 \left[\frac{Fsen^2(\delta_G/2)}{1 + Fsen^2(\delta_G/2)} \right] = I_r$$

   Por tanto, $I_0 = I_i + I_t$. Es decir, cuando la irradiancia en reflexión es máxima, la irradiancia en transmisión es mínima y viceversa.

2. £Cuándo obtenemos máximos en I_t?

   Los máximos de la irradiancia transmitida se obtendrán cuando en su expresión, el denominador sea mínimo. Esto ocurre cuando $sen^2(\delta_G/2) = 0$, es decir, cuando $\delta_G = 2m\pi$. Obtenemos pues, **la misma condición de máximos en transmisión (y mínimos en reflexión por tanto) que en la interferencia de las 2 primeras ondas transmitidas/reflejadas**.

3. £Cuál es la forma de la función I_t/I_0?.

   Depende del valor de F. Vamos a dibujarla para varios valores del coeficiente de fineza

In [0]:
```
# Programa para dibujar la irradiancia transmitida. Filtros interferenciales.
import numpy as np
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *
style.use('fivethirtyeight')
%matplotlib inline
import matplotlib
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 16})
fig = figure(figsize=(14,7))
deltaG = np.arange(0,8*pi,8*pi/200) # Creamos un vector de desfases geométricos
F = np.array([0.2,1,50,200])
for i in np.arange(len(F)):
    It = 1.0/(1.0 + F[i]*sin(deltaG/2)**2)
    texto = 'F =' + str(F[i])
    plot(deltaG,It,label=texto)
    xlabel(r'$\delta_G$')
    ylabel(r'$I_t/I_0$')
    legend()
```

Como vemos en la figura superior, cuanto mayor sea el valor del coeficiente de fineza, más estrechos son los máximos de I_t lo que se traduce en anillos más estrechos en el patrón de interferencia que obtenemos a la salida de la lámina. Además el contraste es a su vez mayor. Hay que recordar que el coeficiente de fineza es mayor cuanto mayor sea la reflectividad en cada cara de la lámina.