Red de Difraccion

May 19, 2017

0.1 Red de difracción

En el estudio de los efectos de difracción, hemos considerado anteriormente qué ocurre cuando una onda electromagnética incide sobre una abertura de cierto tamaño. Vamos ahora a deducir la irradiancia que observaríamos si en vez de una única abertura, tuviésemos un número muy grande N de ellas. En lo que sigue vamos a considerar por tanto que tenemos un haz plano monocromático, de longitud de onda λ, que incide perpendicularmente a un conjunto de rendijas con un cierto tamaño b y una separación entre ellas d. A este último parámetro le denominaremos *paso de la red*.

Antes de deducir las expresiones del campo y la irradiancia para este caso, vamos a intentar averiguar qué podríamos esperar en este caso. Si tenemos un cierto número de rendijas sobre las que incide una onda plana, cada una de ellas, producirá un campo eléctrico en un punto P suficientemente alejado de la rendija (es decir, trabajamos en el régimen de Fraunhofer), el cual sabemos cuál es su expresión.

Como en vez de una única rendija, tenemos en esta ocasión N de ellas, los campos producidos por cada una de las rendijas se sumarán (o dicho de otro modo, interferirán) en P, con una diferencia de fase entre ellos dada por la diferencia de camino que tienen que recorrer para llegar a P. Por tanto, obtendremos máximos de irradiancia cuando todas estas ondas emitidas por cada una de las rendijas lleguen en fase entre sí, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia de camino entre dos de ellas sea un múltiplo entero de λ.

$$\Delta = m\lambda$$

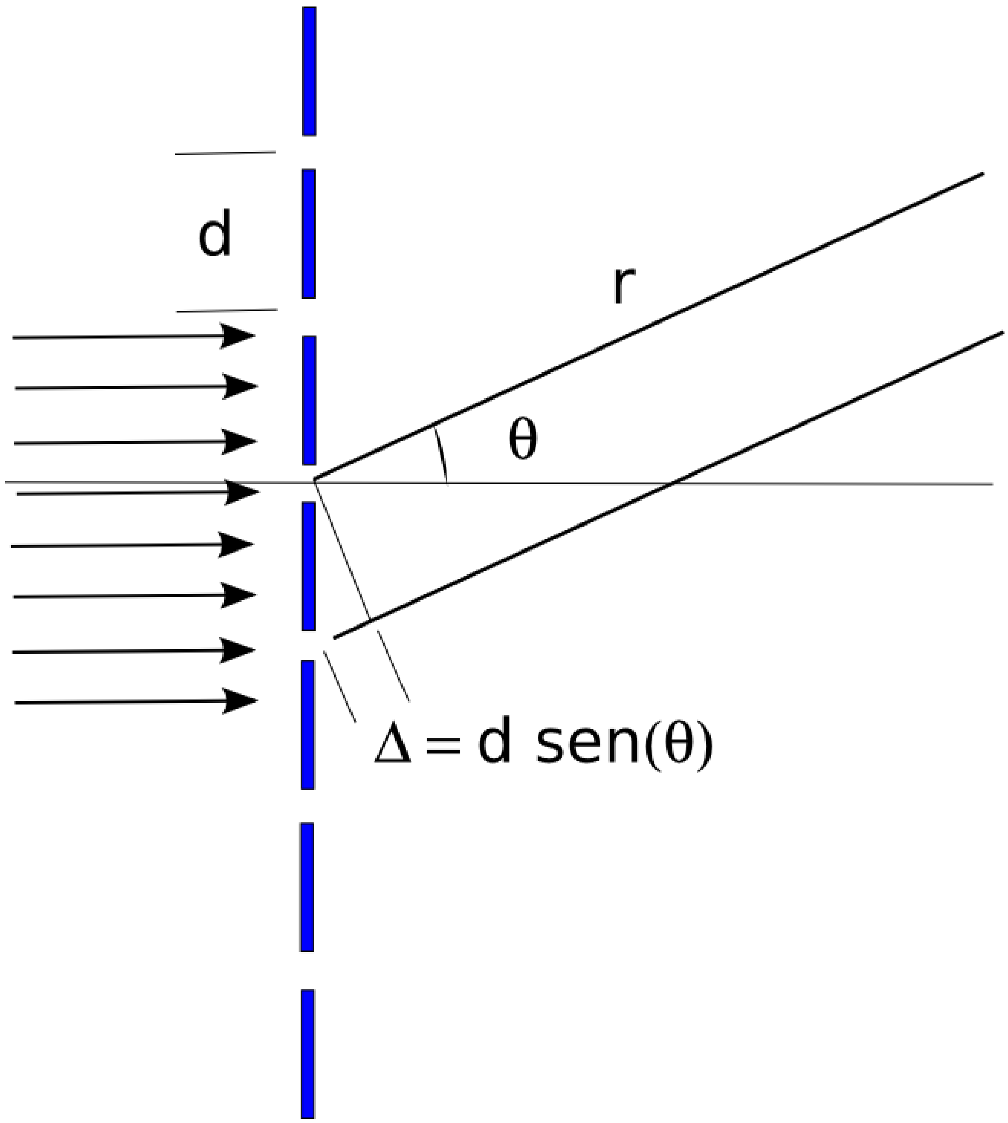
Si observamos la figura, vemos que esta diferencia de camino Δ es igual a $dsen(\theta)$ donde d hemos ya mencionado que es el paso de la red, y θ es el ángulo subtendido por P con el eje del sistema visto desde la red.

Vemos por tanto, que los máximos de irradiancia se deben encontrar en aquellas direcciones para las cuales se cumpla,

$$dsen(\theta) = m\lambda$$

Esta ecuación se denomina **Ecuación de la red**. En función del valor de m tendremos diferentes máximos de irradiancia. A estos máximos se les denomina *órdenes de difracción de la red*.

Estos máximos de irradiancia se obtienen en puntos muy localizados. Esto es debido a que al aumentar el número de rendijas, únicamente se cumple la condición de interferencia constructiva en direcciones muy concretas. Cuanto mayor sea el número N de rendijas, más estrechos serán los máximos de irradiancia (esta característica se puede comprobar en el programa que se presenta a continuación).



red

El anterior análisis se ha basado únicamente en la interferencia entre las ondas emitidas por cada rendija. Vamos a continuación a hacer una deducción más completa de las expresiones que rigen el campo y la irradiancia en función de la posición del punto P de observación.

Campo producido por una red de difracción en régimen de Fraunhofer El campo producido por una única rendija en un punto P que subtiende un ángulo θ con el eje del sistema es,

$$E(\theta) = \left(\frac{E_0}{N}\right) \frac{sen(\beta)}{\beta} e^{i(kr-\omega t)}$$

donde $\beta = \pi b sen(\theta)/\lambda$, y r es la distancia entre la rendija seleccionada y el puno P de observación. Si ahora vemos el campo producido por otra rendija contigua separada por una distancia d, la única diferencia vendrá justo en esta distancia. Ahora, el campo tendrá que recorrer una distancia $r + \Delta$ en vez de r únicamente. Aquí, $\Delta = d sen(\theta)$. Es decir,

$$E(\theta) = \left(\frac{E_0}{N}\right) \frac{sen(\beta)}{\beta} e^{i(k(r+\Delta)-\omega t)}$$

El campo total en el punto P vendrá dado por la suma de todos los campos individuales,

$$E_{tot} = \sum_i E_i(\theta)$$

o lo que es lo mismo,

$$E_{tot} = \frac{E_0}{N} \frac{sen(\beta)}{\beta} \left[e^{i(kr-\omega t)} + e^{i(k(r+\Delta)-\omega t)} + e^{i(k(r+2\Delta)-\omega t)} + \ldots + e^{i(k(r+(N-1)\Delta)-\omega t)} \right]$$

Ahora lo único que nos falta es hacer esa suma, la cual se puede poner como,

$$E_{tot} = \frac{E_0}{N} \frac{sen(\beta)}{\beta} e^{i(kr-\omega t)} \left[1 + e^{ik\Delta} + e^{ik2\Delta} + \ldots + e^{ik(N-1)\Delta} \right]$$

Para hacer la suma que se muestra entre corchetes, podemos darnos cuenta de que es una progresión geométrica de razón $e^{ik\Delta}$, y por tanto, la podemos poner como,

$$E_{tot} = \frac{E_0}{N} \frac{sen(\beta)}{\beta} e^{i(kr-\omega t)} \left[\frac{e^{ikN\Delta} - 1}{e^{ik\Delta} - 1} \right]$$

o mejor,

$$E_{tot} = \frac{E_0}{N} \frac{sen(\beta)}{\beta} e^{i(kr-\omega t + k\Delta(N+1)/2)} \left[\frac{sen(Nk\Delta/2)}{sen(k\Delta/2} \right]$$

Finalmente, la irradiancia total en el punto P, caracterizado por el valor del ángulo θ será proporcional al módulo al cuadrado del camp

$$I(\theta) = \frac{I_0}{N^2} \left[\frac{sen(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[\frac{sen(N\alpha)}{sen(\alpha)} \right]^2$$

donde $\alpha = k\Delta/2 = \pi d sen(\theta)/\lambda$ y $\beta = \pi b sen(\theta)/\lambda$. Es decir, el parámetro α tiene en cuenta la separación entre rendijas, mientras que β tiene en cuenta el tamaño de una rendija. El primer término por tanto incluye los efectos de la difracción de una única rendija, mientras que el segundo término incluye los efectos de la interferencia entre las ondas emitidas por todas las rendijas.

Esta expresión nos da unos máximos muy pronunciados cuando $\alpha = m\pi$, es decir, cuando $\pi dsen(\theta)/\lambda = m\pi$. Reescribiendo esta ecuación, llegamos de nuevo a la ecuación de la red, anteriormente deducida,

$$dsen(\theta) = m\lambda$$

Entre cada uno de estos máximos, encontramos $(N-1)$ valores de α que anulan el denominador del segundo término, es decir, cuando $\alpha = m\pi/N$ con $m = 1 \ldots N-1$. Estos valores darán mínimos de irradiancia. De ellos podemos extraer la anchura de los máximos principales,

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$$

es decir,

$$\Delta(sen(\theta) = \frac{2\lambda}{Nd} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Ndcos(\theta)} \simeq \frac{2\lambda}{Nd}$$

donde en el último paso se ha hecho la aproximación $cos(\theta) \simeq 1$. Vemos que la anchura de los máximos depende del número de rendijas iluminadas, del paso de la red y de la longitud de onda de la radiación.

```
In [1]: from numpy import *
        import numpy as np
        from matplotlib.pyplot import *
        style.use('ggplot')
        %matplotlib inline
```

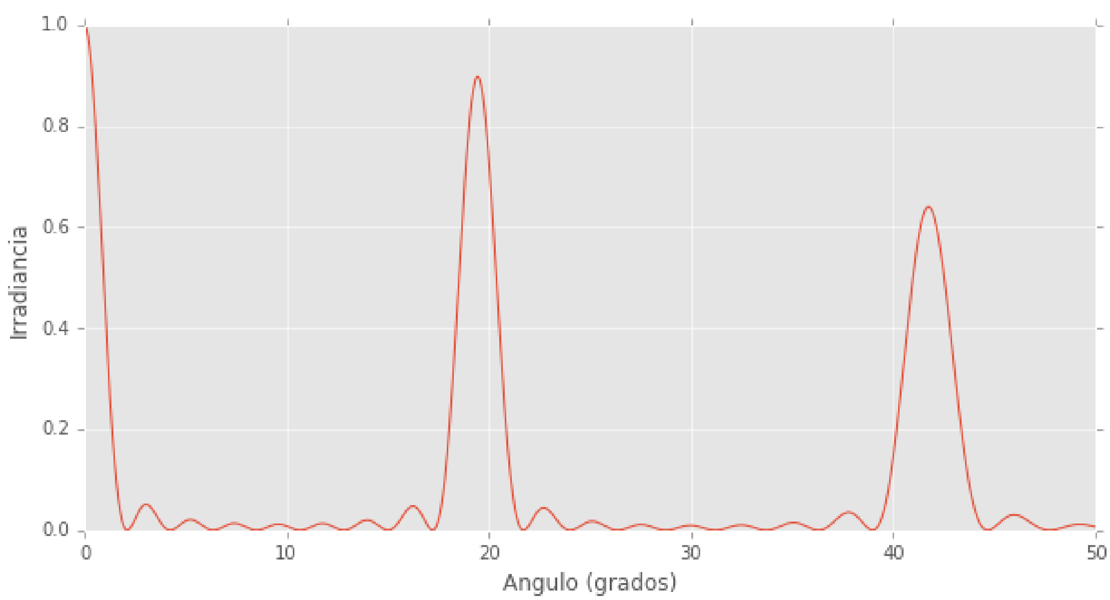
El siguiente programa permite visualizar la irradiancia obtenida por una red de difracción. Se pueden modificar los parámetros de anchura de la rendija, número de rendijas, distancia entre ellas, longitud de onda...

Se puede observar cómo la amplitud de los diferentes órdenes de difracción decae cuanto mayor es el ángulo (es decir, cuanto mayor es el orden de difracción). También se puede comprobar el efecto del número de rendijas iluminadas en la anchura de cada máximo, así como que la posición angular de los máximos depende de la longitud de onda (como se puede ver en la ecuación de la red).

```
In [2]: # Parametros
        #########
        b = 0.0003 # anchura de cada rendija en mm
        d = 1.0/600 # paso de la red
        Lambda = 555e-6 # longitud de onda en mm
        #######

        k = 2.0*pi/Lambda
        theta = linspace(0.01,50,1200)*pi/180
        beta = pi*b*sin(theta)/Lambda
        E0 = 100.0 # Amplitud del campo incidente
        N = 10 # Numero de rendijas iluminadas
```

```
E1 = (E0/N)*(sin(beta)/beta)
Delta = d*sin(theta)
fases = zeros(((N-1),len(theta)),dtype=complex)
for i in range(len(fases)):
    fases[i,:] = 1j*k*i*Delta
Etotal = sum(exp(fases),axis=0)*E1
Itotal = abs(Etotal)**2
fig = figure(figsize=(10,5))
#subplot(121)
plot(theta*180/pi,Itotal/Itotal.max())
xlabel('Angulo (grados)')
ylabel('Irradiancia');
#subplot(122)
#plot(theta*180/pi,Itotal)
#xlim([38,45])
#ylim([0,1500])
del(fases)
del(Delta)
del(theta)
```

Out[2]:

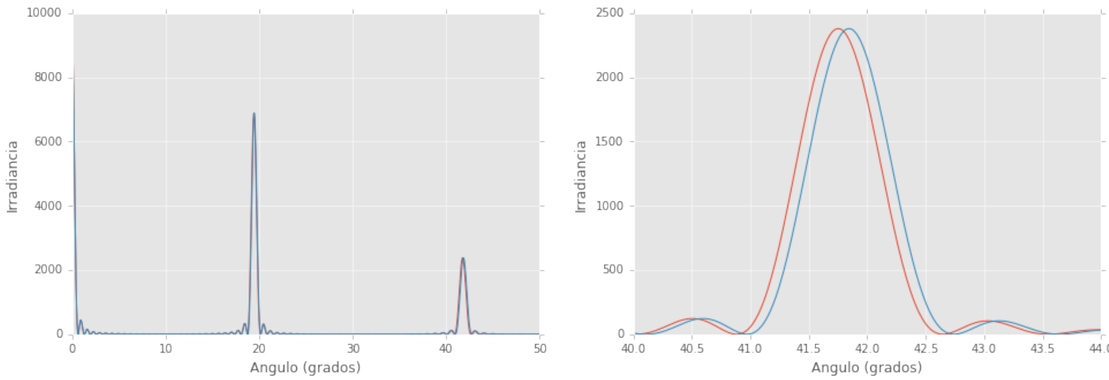


El siguiente programa permite ver cómo se separan los máximos de irradiancia para dos longitudes de onda separadas por lo que en el programa se denomina `DeltaLambda`. Se puede observar cómo cambiando el número de rendijas iluminadas los máximos se hacen más estrechos, permitiendo distinguir espacialmente las dos longitudes de onda.

Cambiar la separación entre longitudes de onda y el número de rendijas para observar cuándo se cumple el Criterio de Rayleigh para resolver dos longitudes de onda.

In [3]:
```
# Parametros
#########
a = 0.0005 # anchura de cada rendija en mm
d = 1.0/600 # paso de la red
E0 = 100.0 # Amplitud del campo normalizada a 1
N = 30 # Numero de rendijas iluminadas

Lambda1 = 555e-6 # longitud de onda 1 en mm
DeltaLambda = 1e-6 # separacion entre las dos longitudes de onda.
######

Lambda2 = Lambda1 + DeltaLambda # longitud de onda 2 en mm
k1 = 2.0*pi/Lambda1
k2 = 2.0*pi/Lambda2

theta = linspace(0.01,50,3000)*pi/180
Delta = d*sin(theta)
beta1 = pi*a*sin(theta)/Lambda1
beta2 = pi*a*sin(theta)/Lambda2
E1 = (E0/N)*(sin(beta1)/beta1)
E2 = (E0/N)*(sin(beta2)/beta2)

fases1 = zeros(((N-1),len(theta)),dtype=complex)
fases2 = zeros(((N-1),len(theta)),dtype=complex)
for i in range(len(fases1)):
    fases1[i,:] = 1j*k1*i*Delta
    fases2[i,:] = 1j*k2*i*Delta
Etotal1 = sum(exp(fases1),axis=0)*E1
Etotal2 = sum(exp(fases2),axis=0)*E2
Itotal1 = abs(Etotal1)**2
Itotal2 = abs(Etotal2)**2
fig = figure(figsize=(16,5))
subplot(121)
plot(theta*180/pi,Itotal1,theta*180/pi,Itotal2)
xlabel('Angulo (grados)')
ylabel('Irradiancia');
subplot(122)
plot(theta*180/pi,Itotal1,theta*180/pi,Itotal2)
xlabel('Angulo (grados)')
ylabel('Irradiancia')
xlim([40,44])
ylim([0,2500])

del(fases1)
del(fases2)
del(theta)
del(Delta)
```

Out[3]:



10000
8000
6000
4000
2000
0
Irradiancia
0
10
20
30
40
50
Angulo (grados)
2500
2000
1500
1000
500
0
Irradiancia
40.0
40.5
41.0
41.5
42.0
42.5
43.0
43.5
44.0
Angulo (grados)

In [0]: