Lista 2

Tópicos Especiais em Engenharia de Computação

Eric Calasans de Barros   Fagner Ferreira

16 de outubro de 2017

Questão 1

Sejam $\bar{x}_1 = 230,0 s_1 = 10,7, \bar{x}_2 = 225,5, s_1 = 10,7 e s_2 = 15,4$, para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, calcularemos um **intervalo de confiança(IC)** de 95%($\alpha = 0.05$) para a diferença das médias $\mu_1 - \mu_2$. Se

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

então:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \Rightarrow \mu = \bar{x} \pm Z * s$$

Questão 1

Dizer que a média está contida num determinado IC significa que $\mu = \bar{x} \pm Zs$. Assim, para a diferença das médias temos que:

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 &= (\bar{x}_1 \pm Zs_1) - (\bar{x}_2 \pm Zs_2) \\ &= \bar{x}_1 \pm Zs_1 - \bar{x}_2 \pm Zs_2 \\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z(s_1 - s_2) \end{aligned}$$

Como procuramos um IC bilateral temos que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Pela simetria da curva de distribuição Normal temos que $|Z_\alpha| = |Z_{1-\alpha}| \Rightarrow |Z_{0,025}| = |Z_{0,975}|$.

Questão 1

Com a ajuda do software estatístico RStudio:

```
qnorm(.975)

## [1] 1.959964
```

Assim temos:

$$\mu_1 - \mu_2 = (230,0 - 225,5) \pm 1,96(10,7 - 15,4) = 7,5 \pm 9,2$$

Questão 2

Sejam $n_1 = 20, \bar{x}_1 = 510, s_1^2 = 20$ e $n_2 = 15, \bar{x}_2 = 620, s_2^2 = 30$ com $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$., deseja-se calcular:

a) **Um intervalo de confiança de 95% para $\mu_1 - \mu_2$**
Como $n \leq 30$ em ambos os casos, usamos uma distribuição **t-Student**. Assim, para $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ temos que

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{df} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

onde

$$d_f = \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})}{\frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_1 - 1} + \frac{(\frac{s_2^2}{n_2})^2}{n_2 - 1}} = \frac{(20/20 + 30/15)^2}{\frac{(20/20)^2}{19} + \frac{(30/15)^2}{14}} = 26$$

a) cont.

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1) - \bar{x}_2) \pm t_{0,975,26}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Pelo **RStudio**:

```
qt(.975,26)

## [1] 2.055529
```

$$\mu_1 - \mu_2 = (510 - 620) \pm 2,056\sqrt{\frac{20}{20} + \frac{30}{15}}$$
$$= -110 \pm 3,561$$

b) Dadas σ_1^2 e σ_2^2 as variânicas de duas V.A.s com distribuição normal e s_1^2 e s_2^2 as variâncias amostrais, define-se **F** com **distribuição F de Snedecom**:

$$\boldsymbol{F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$$

para os graus de liberdade $df_1 = m - 1$ e $df_2 = n - 1$
Para construir um IC a variável F deve obedecer à seguinte probabilidade:

$$\boldsymbol{P(F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} < F < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}) = 1 - \alpha}$$

Questão 2

b) *cont.*

Para tanto:

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}$$

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}\frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}\frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Invertendo os termos:

$$\boldsymbol{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}\frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}\frac{s_2^2}{s_1^2}}$$

b) *cont.*
Substituindo os valores:

$$\frac{1}{F_{0.975,19,14}}\frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{0.975,19,14}}\frac{20}{30}$$

Utilizando o **RStudio** e a propriedade da distribuição F:

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}$$

```
round(qf(0.025,19,14),digits = 3)

## [1] 0.378
```

b) *cont.*

$$F_{0.975,19,14} = \frac{1}{F_{0.025,19,14}} = \frac{1}{0.378} = 2.645$$

Logo:

$$\frac{1}{2.645}\frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{0.378}\frac{20}{30}$$

$$0.251 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.754$$

Questão 3

Sejam $n = 300, \bar{x} = 1660$ e $s = 90h$, deseja-se testar:

- $\boldsymbol{H_0 : \mu_0 = 1690h}$
- $\boldsymbol{H_1 : \mu_0 \neq 1690h}$

Trata-se, portanto, de um **Teste Z bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$
Calculadndo $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1660-1690}{90/\sqrt{300}} = -5,77$
Conforme calculado em questão anterior:

$$Z_{0.025} = -1.96 \quad Z_{0.975} = 1.96$$

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos $\mathbf{H_0}$ com $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$**

Questão 3

b) $\alpha = 0.01$

Para o mesmo $Z = -5.77$ e $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005}$

```
qnorm(0.025)

## [1] -1.959964
```

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos $\mathbf{H_0}$ com $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$**

Questão 4

Sejam $n = 20, \bar{x} = 0.06$ e $s = 0.009$, deseja-se testar:

- $\boldsymbol{H_0 : \mu_0 = 0.05pol}$
- $\boldsymbol{H_1 : \mu_0 \neq 0.05pol}$

Trata-se, portanto, de um **Teste t bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$
Calculadndo $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.06-0.05}{0.009/\sqrt{20}} = 4.969$
Calculando $t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$:

```
qt(0.975,19)

## [1] 2.093024
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos $\mathbf{H_0}$ com $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$**

b) $\alpha = 0.01$
Para o mesmo $t = 4.969$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2},19} = t_{1-\frac{0.01}{2},19} = t_{0.995,19}$:

```
qt(0.995,19)

## [1] 2.860935
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$ **rejeitamos $\mathbf{H_0}$ com $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$**

Questão 5

Sejam $n_a = 20, s_a = 8(s_a^2 = 64)$ para a turma A e $n_b = 25, s_b = 10(s_b^2 = 100)$ para a turma B, deseja-se saber se a variabilidade de B é maior que a de A. Assim temos:

- $\boldsymbol{H_0 : \sigma_b^2 = \sigma_a^2}$
- $\boldsymbol{H_1 : \sigma_b^2 > \sigma_a^2}$

Trata-se, portanto, de um **teste f unicaudal de cauda longa**. Calculando f:

$$f = \frac{s_b^2}{s_a^2} = \frac{100}{64} = 1.562$$

Questão 5

a) $\alpha = 0.01$
Calculando $f_{0.01,24,19}$:

```
qf(0.01,24,19,lower.tail = FALSE)

## [1] 2.924866
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO falhamos em rejeitar H_0** com $\alpha = 0.01$

b) $\alpha = 0.05$
Calculando $f_{0.05,24,19}$:

```
qf(0.05,24,19,lower.tail = FALSE)

## [1] 2.114143
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO falhamos em rejeitar H_0** com $\alpha = 0.05$

Questão 6

Seja a X uma V.A. com distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ cuja fdp é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

para $-\infty < x < \infty$. A **função de verossimilhança L** é dada por:

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ou

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para encontrar o estimador de máxima verossimilhança devemos achar os valores para os quais $L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)$ é **máxima**. Inicialmente aplicamos a função ***ln***:

$$\ln[L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)] = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

A seguir calculamos a derivada parcial em relação a μ

$$\frac{\partial[\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)]}{\partial\mu} = -\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)(-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2}$$

Questão 6

Igualando o resultado a zero obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \hat{\mu})}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{\mu}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

Questão 6

Dessa forma, é possível que o estimador de máxima verossimilhança para a média populacional seja $\bar{x}$. Isto é confirmado se $\bar{x}$ for considerado um ponto de máximo. Para isto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2[\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)]}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})\right] \\ &= -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \end{aligned}$$

Concluímos então que $\bar{x}$ é realmente um ponto de máximo e, por consequência, o estimador de máxima verossimilhança para μ.

Desejamos calcular agora o estimador de máxima verossimilhança para a variância σ^2. Para tanto, derivamos a função $\ln L[\cdot]$ em relação a σ^2:

$$\frac{\partial[\ln L(\mu,\sigma^2;x_1,\ldots,x_n)]}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2$$

Igualando a zero:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] = 0$$

Questão 6

$$\frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$$

Multiplicando o segundo termo por $\frac{n-1}{n-1}$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$
$$\sigma^2 = \frac{n-1}{n}s^2$$

Questão 6

Dessa forma, é possível que o estimador de máxima verossimilhança para a variância populacional seja $\frac{n-1}{n}s^2$. Isto é confirmado se $\frac{n-1}{n}s^2$ for considerado um ponto de máximo. Para isto:

$$\frac{\partial^2[\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)]}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} < 0$$

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança para a σ^2 é $frac n - 1 n s^2$.

Questão 7

Sejam $\boldsymbol{s_0(t) = -1}$ e $\boldsymbol{s_1(t) = 1}$ e $\boldsymbol{n(t) \sim N(0,1)}$. Para um sinal recebido $\boldsymbol{x(t) = s_i(t) + n(t), i = 0, 1}$ têm-se as seguintes hipóteses para o sinal que foi transmitido:

- H_0: $s_0(t) \rightarrow x(t) = -1 + n(t)$
- H_1: $s_1(t) \rightarrow x(t) = 1 + n(t)$

Se $n(t)$ é uma V.A com distribuição Normal e $s_i(t)$ é uma função constante, logo $x(t)$ também é uma V.A. com distribuição Normal. Reformulando as hipóteses:

- H_0: $f(\boldsymbol{x}|H_0) \rightarrow f_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+1)^2}{2}}, \ \forall X \sim N(-1, 1)$
- H_1: $f(\boldsymbol{x}|H_1) \rightarrow f_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}, \ \forall X \sim N(1, 1)$

Seja a **distribuição Gaussiana Multivariada** dada por:

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} det(\boldsymbol{C})^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}))$$

onde:

- D - *espaço D-dimensional*
- **C** - *matriz de covariância*
- $\boldsymbol{\mu}$ - *vetor de médias*
- $\boldsymbol{x}$ - *vetor de V.A. independentes*

Questão 8

Da definição de **matriz de covariância**, para $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ e $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$, temos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)(x_1 - \mu_1) & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)^2 & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix} \right] \\
\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde σ_{12} é a covariância entre x_1 e x_2.

Questão 8

Como x_1 e x_2 são V.A. independentes, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$. Assim:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

Para esboçar o gráfico de distribuição dos dados no plano x_1x_2 devemos calcular o valor de $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_i})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_i})$ para algum valor de k constante. Assim:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_i})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_i}) = k$$

Questão 8

Tomando $\boldsymbol{\mu_1} = [-1 \ \ 0]^T$, $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \ x_2]$ e $k = 1$:

$$[x_1 + 1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$$

A equação acima mostra que o gráfico é uma elipse no plano $x_1 x_2$. Para o caso em questão com variâncias iguais:

$$\boldsymbol{C} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Questão 8

Logo:

$$\frac{(x_1+1)^2}{0.5} + \frac{x_2^2}{0.5} = 1$$

$$[x_1+1]^2 + x_2^2 = 0.5$$

$$[x_1-(-1)]^2 + (x_2-0)^2 = 0.5$$

Para variâncias iguais a equação se transforma numa equação de um círculo de centro [-1,0] e raio 0.5. O mesmo raciocínio vale para $\boldsymbol{\mu_2} = [1 \;\; 0]^T$, onde encontramos o centro do círculo em [1,0]. Generalizando para a questão:

$$\forall k > 0,\ \exists[(x_1, x_2) \in \boldsymbol{x},\ (\mu_1, \mu_2) \in \boldsymbol{\mu}] \rightarrow (x_1-\mu_1)^2 + (x_2-\mu_2)^2 = k,$$

onde $k = \sigma^2$.

Questão 8

Com o auxílio do MATLAB, plotamos os gráficos para μ_1 e μ_2:

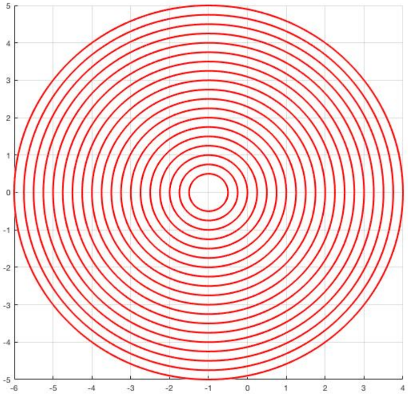

Figura: μ_1

Questão 8

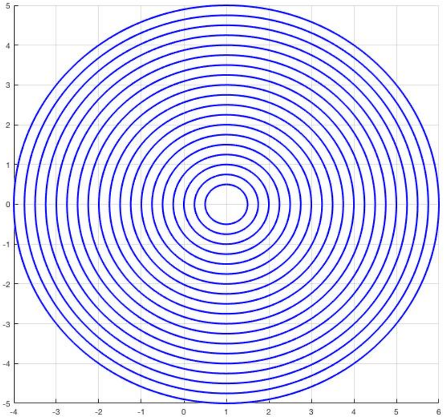

Figura: μ_2

Questão 8

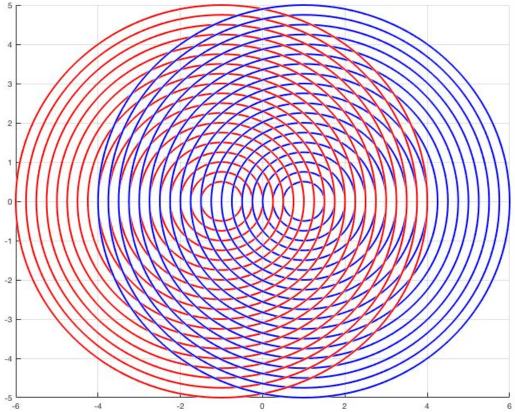

Figura: μ_2 e μ_2

Questão 8

Calculando a função de **Máxima Verossimilhança(ML)** $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\boldsymbol{x}|C_2)}{f(\boldsymbol{x}|C_1)} \underset{C_1}{\overset{C_2}{><}} \frac{f(C_1)}{f(C_2)}$$

Tomando C_1 e C_2 como equiprováveis temos: $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\boldsymbol{x}|C_2)}{f(\boldsymbol{x}|C_1)} \underset{C_1}{\overset{C_2}{><}} 1$$

Assim:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} det(\boldsymbol{C})^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2}))}{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} det(\boldsymbol{C})^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1}))} \underset{C_1}{\overset{C_2}{><}} 1$$

$$= \frac{exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2}))}{exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1}))} \underset{C_1}{\overset{C_2}{><}} 1$$

$$= exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1}))$$

$$\Lambda_{ML}(x) = exp - \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2}) - [(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})]\}$$

Questão 8

Calculando o **logaritmo de Verossimilhança** $\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x))$:

$$\begin{aligned}\ln[\Lambda_{ML}(x)] &= \ln e^{-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)-[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)]\}} \\ &= -\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)-[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)]\}\end{aligned}$$

Expandindo os produtos:

$$\begin{aligned}\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x) = &-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_2{}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_2{}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2 \\ &- [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_1{}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_1{}^T \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1]\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x) = & -\frac{1}{2}\{\cancel{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_2} - \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_2} \\
& \cancel{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_1} + \boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_1}\} \\
= & -\frac{1}{\cancel{2}}\{-\cancel{2}\boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} + \cancel{2}\boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \ - [\boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_1} \\
& - \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_2}]\} \\
= & \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_1} \\
& - \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_2}] \\
= & (\boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mu_1}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu_2}]
\end{aligned}
$$

Fazendo:

$$\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{\mu_2}^T \boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{\mu_1}^T \boldsymbol{C}^{-1})$$

e:

$$\boldsymbol{w_0} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mu_1}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\mu_2}]$$

temos:

$$\ln[\Lambda_{ML}(x)] = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w_0}$$

o que, pela linearidade em $\boldsymbol{x}$ da nova equação, configura a equação de um **hiperplano**.