Lista 2

Tópicos Especiais em Engenharia de Computação

15 de outubro de 2017

Questão 1

Sejam $\bar{x}_1 = 230,0 s_1 = 10,7, \bar{x}_2 = 225,5, s_1 = 10,7 e s_2 = 15,4,$ para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, calcularemos um **intervalo de confiança(IC)** de 95%($\alpha = 0.05$) para a diferença das médias $\mu_1 - \mu_2$. Se

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

então:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \Rightarrow \mu = \bar{x} \pm Z * s$$

Questão 1

Dizer que a média está contida num determinado IC significa que $\mu = \bar{x} \pm Zs$. Assim, para a diferença das médias temos que:

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (\bar{x}_1 \pm Zs_1) - (\bar{x}_2 \pm Zs_2)\\ &= \bar{x}_1 \pm Zs_1 - \bar{x}_2 \pm Zs_2\\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z(s_1 - s_2)\end{aligned}$$

Como procuramos um IC bilateral temos que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Pela simetria da curva de distribuição Normal temos que $|Z_\alpha| = |Z_{1-\alpha}| \Rightarrow |Z_{0,025}| = |Z_{0,975}|$.

Questão 1

Com a ajuda do software estatístico RStudio:

```
qnorm(.975)

## [1] 1.959964
```

Assim temos:

$$\mu_1 - \mu_2 = (230,0 - 225,5) \pm 1,96(10,7 - 15,4) = 7,5 \pm 9,2$$

Questão 2

Sejam $n_1 = 20, \bar{x}_1 = 510, s_1^2 = 20$ e $n_2 = 15, \bar{x}_2 = 620, s_2^2 = 30$ com $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$., deseja-se calcular:

a) **Um intervalo de confiança de 95% para $\mu_1 - \mu_2$**
Como $n \leq 30$ em ambos os casos, usamos uma distribuição **t-Student**. Assim, para $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ temos que

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{df} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

onde

$$d_f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(20/20 + 30/15)^2}{\frac{(20/20)^2}{19} + \frac{(30/15)^2}{14}} = 26$$

Questão 2

a) cont.

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1) - \bar{x}_2) \pm t_{0,975,26}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Pelo **RStudio**:

```
qt(.975,26)

## [1] 2.055529
```

$$\mu_1 - \mu_2 = (510 - 620) \pm 2,056\sqrt{\frac{20}{20} + \frac{30}{15}}$$
$$= -110 \pm 3,561$$

Questão 2

b) Dadas σ_1^2 e σ_2^2 as variânicas de duas V.A.s com distribuição normal e s_1^2 e s_2^2 as variâncias amostrais, define-se **F** com **distribuição F de Snedecom**:

$$\boldsymbol{F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$$

para os graus de liberdade $df_1 = m - 1$ e $df_2 = n - 1$
Para construir um IC a variável F deve obedecer à seguinte probabilidade:

$$\boldsymbol{P(F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} < F < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}) = 1 - \alpha}$$

Questão 2

b) *cont.*
Para tanto:

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}$$

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}\frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}\frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Invertendo os termos:

$$\boldsymbol{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}\frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}\frac{s_2^2}{s_1^2}}$$

Questão 2

b) *cont.*
Substituindo os valores:

$$\frac{1}{F_{0.975,19,14}}\frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{0.975,19,14}}\frac{20}{30}$$

Utilizando o **RStudio** e a propriedade da distribuição F:

$$F_{\frac{\alpha}{2},df_1,df_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},df_1,df_2}}$$

```
round(qf(0.025,19,14),digits = 3)

## [1] 0.378
```

Questão 2

b) *cont.*

$$F_{0.975,19,14} = \frac{1}{F_{0.025,19,14}} = \frac{1}{0.378} = 2.645$$

Logo:

$$\frac{1}{2.645}\frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{0.378}\frac{20}{30}$$

$$0.251 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.754$$

Questão 3

Sejam $n = 300, \bar{x} = 1660$ e $s = 90h$, deseja-se testar:

- $\boldsymbol{H_0 : \mu_0 = 1690h}$
- $\boldsymbol{H_1 : \mu_0 \neq 1690h}$

Trata-se, portanto, de um **Teste Z bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$
Calculadndo $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1660 - 1690}{90/\sqrt{300}} = -5,77$
Conforme calculado em questão anterior:

$$Z_{0.025} = -1.96 \quad Z_{0.975} = 1.96$$

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos** $\mathbf{H_0}$ **com** $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

Questão 3

b) $\alpha = 0.01$
Para o mesmo $Z = -5.77$ e $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005}$

```
qnorm(0.025)

## [1] -1.959964
```

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos $\mathbf{H_0}$ com $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$**

Questão 4

Sejam $n = 20, \bar{x} = 0.06$ e $s = 0.009$, deseja-se testar:

- $\boldsymbol{H_0 : \mu_0 = 0.05pol}$
- $\boldsymbol{H_1 : \mu_0 \neq 0.05pol}$

Trata-se, portanto, de um **Teste t bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$
Calculadndo $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.06 - 0.05}{0.009/\sqrt{20}} = 4.969$
Calculando $t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$:

```
qt(0.975,19)

## [1] 2.093024
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos** $\mathbf{H_0}$ **com** $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

Questão 4

b) $\alpha = 0.01$
Para o mesmo $t = 4.969$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2},19} = t_{1-\frac{0.01}{2},19} = t_{0.995,19}$:

```
qt(0.995,19)

## [1] 2.860935
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$ **rejeitamos** $\mathbf{H_0}$ **com** $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$

Questão 5

Sejam $n_a = 20, s_a = 8(s_a^2 = 64)$ para a turma A e
$n_b = 25, s_b = 10(s_b^2 = 100)$ para a turma B, deseja-se saber se a variabilidade de B é maior que a de A. Assim temos:

- $\boldsymbol{H_0 : \sigma_b^2 = \sigma_a^2}$
- $\boldsymbol{H_1 : \sigma_b^2 > \sigma_a^2}$

Trata-se, portanto, de um **teste f unicaudal de cauda longa**. Calculando f:

$$f = \frac{s_b^2}{s_a^2} = \frac{100}{64} = 1.562$$

Questão 5

a) $\alpha = 0.01$
Calculando $f_{0.01,24,19}$:

```
qf(0.01,24,19,lower.tail = FALSE)

## [1] 2.924866
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO falhamos em rejeitar H_0** com $\alpha = 0.01$

b) $\alpha = 0.05$
Calculando $f_{0.05,24,19}$:

```
qf(0.05,24,19,lower.tail = FALSE)

## [1] 2.114143
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO falhamos em rejeitar H_0** com $\alpha = 0.05$

Questão 6

Questão 8

Seja a **distribuição Gaussiana Multivariada** dada por:

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} det(\boldsymbol{C})^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}))$$

onde:

- D - *espaço D-dimensional*
- **C** - *matriz de covariância*
- $\boldsymbol{\mu}$ - *vetor de médias*
- $\boldsymbol{x}$ - *vetor de V.A. independentes*

Questão 8

Da definição de **matriz de covariância**, para $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ e $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$, temos:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)(x_1 - \mu_1) & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)^2 & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix} \right] \\
\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

onde σ_{12} é a covariância entre x_1 e x_2.