

Lista 2

Tópicos Especiais em Engenharia de Computação

Eric Calasans de Barros Fagner Ferreira

16 de outubro de 2017

Questão 1

Sejam $\bar{x}_1 = 230,0$, $s_1 = 10,7$, $\bar{x}_2 = 225,5$, $s_1 = 10,7$ e $s_2 = 15,4$, para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, calcularemos um **intervalo de confiança(IC)** de 95% ($\alpha = 0.05$) para a diferença das médias $\mu_1 - \mu_2$. Se

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

então:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \Rightarrow \mu = \bar{x} \pm Z * s$$

Questão 1

Dizer que a média está contida num determinado IC significa que $\mu = \bar{x} \pm Zs$. Assim, para a diferença das médias temos que:

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (\bar{x}_1 \pm Zs_1) - (\bar{x}_2 \pm Zs_2) \\ &= \bar{x}_1 \pm Zs_1 - \bar{x}_2 \pm Zs_2 \\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z(s_1 - s_2)\end{aligned}$$

Como procuramos um IC bilateral temos que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Pela simetria da curva de distribuição Normal temos que $|Z_\alpha| = |Z_{1-\alpha}| \Rightarrow |Z_{0,025}| = |Z_{0,975}|$.

Questão 1

Com a ajuda do software estatístico RStudio:

```
qnorm(.975)
```

```
## [1] 1.959964
```

Assim temos:

$$\mu_1 - \mu_2 = (230,0 - 225,5) \pm 1,96(10,7 - 15,4) = 7,5 \pm 9,2$$

Questão 2

Sejam $n_1 = 20$, $\bar{x}_1 = 510$, $s_1^2 = 20$ e $n_2 = 15$, $\bar{x}_2 = 620$, $s_2^2 = 30$ com $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, deseja-se calcular:

a) **Um intervalo de confiança de 95% para $\mu_1 - \mu_2$**

Como $n \leq 30$ em ambos os casos, usamos uma distribuição **t-Student**. Assim, para $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ temos que

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{df} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

onde

$$d_f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{\frac{n_1}{n_1-1}} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{n_2}{n_2-1}}} = \frac{(20/20 + 30/15)^2}{\frac{(20/20)^2}{19} + \frac{(30/15)^2}{14}} = 26$$

Questão 2

a) cont.

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1) - \bar{x}_2) \pm t_{0,975,26} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Pelo **RStudio**:

```
qt(.975,26)
```

```
## [1] 2.055529
```

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (510 - 620) \pm 2,056 \sqrt{\frac{20}{20} + \frac{30}{15}} \\ &= -110 \pm 3,561\end{aligned}$$

Questão 2

- b) Dadas σ_1^2 e σ_2^2 as variâncias de duas V.A.s com distribuição normal e s_1^2 e s_2^2 as variâncias amostrais, define-se **F** com **distribuição F de Snedecom**:

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2 \sigma_2^2}{s_2^2 \sigma_1^2}$$

para os graus de liberdade $df_1 = m - 1$ e $df_2 = n - 1$

Para construir um IC a variável F deve obedecer à seguinte probabilidade:

$$P(F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} < F < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}) = 1 - \alpha$$

Questão 2

b) *cont.*

Para tanto:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}$$
$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} \frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Invertendo os termos:

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}} \frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}} \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Questão 2

b) *cont.*

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{F_{0.975,19,14}} \frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{0.025,19,14}} \frac{20}{30}$$

Utilizando o **RStudio** e a propriedade da distribuição F:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}}$$

```
round(qf(0.025,19,14),digits = 3)
```

```
## [1] 0.378
```

Questão 2

b) *cont.*

$$F_{0.975,19,14} = \frac{1}{F_{0.025,19,14}} = \frac{1}{0.378} = 2.645$$

Logo:

$$\frac{1}{2.645} \frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{0.378} \frac{20}{30}$$
$$0.251 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.754$$

Questão 3

Sejam $n = 300$, $\bar{x} = 1660$ e $s = 90h$, deseja-se testar:

- $H_0 : \mu_0 = 1690h$
- $H_1 : \mu_0 \neq 1690h$

Trata-se, portanto, de um **Teste Z bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$

$$\text{Calculadndo } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1660 - 1690}{90/\sqrt{300}} = -5,77$$

Conforme calculado em questão anterior:

$$Z_{0.025} = -1.96 \quad Z_{0.975} = 1.96$$

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.05$**

Questão 3

b) $\alpha = 0.01$

Para o mesmo $Z = -5.77$ e $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005}$

```
qnorm(0.025)
```

```
## [1] -1.959964
```

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.01$**

Questão 4

Sejam $n = 20$, $\bar{x} = 0.06$ e $s = 0.009$, deseja-se testar:

- $H_0 : \mu_0 = 0.05$ *pol*
- $H_1 : \mu_0 \neq 0.05$ *pol*

Trata-se, portanto, de um **Teste t bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$

$$\text{Calculadndo } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.06 - 0.05}{0.009/\sqrt{20}} = 4.969$$

Calculando $t_{1-\frac{\alpha}{2}, 19}$:

```
qt(0.975, 19)
```

```
## [1] 2.093024
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.05$**

Questão 4

b) $\alpha = 0.01$

Para o mesmo $t = 4.969$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2},19} = t_{1-\frac{0.01}{2},19} = t_{0.995,19}$:

```
qt(0.995,19)
```

```
## [1] 2.860935
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.01$**

Questão 5

Sejam $n_a = 20, s_a = 8 (s_a^2 = 64)$ para a turma A e $n_b = 25, s_b = 10 (s_b^2 = 100)$ para a turma B, deseja-se saber se a variabilidade de B é maior que a de A. Assim temos:

- $H_0 : \sigma_b^2 = \sigma_a^2$
- $H_1 : \sigma_b^2 > \sigma_a^2$

Trata-se, portanto, de um **teste f unicaudal de cauda longa**. Calculando f :

$$f = \frac{s_b^2}{s_a^2} = \frac{100}{64} = 1.562$$

Questão 5

a) $\alpha = 0.01$

Calculando $f_{0.01,24,19}$:

```
qf(0.01,24,19,lower.tail = FALSE)
## [1] 2.924866
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO** falhamos em rejeitar H_0 com $\alpha = 0.01$

b) $\alpha = 0.05$

Calculando $f_{0.05,24,19}$:

```
qf(0.05,24,19,lower.tail = FALSE)
## [1] 2.114143
```

Como $f > f_{0.05,24,19}$ é **FALSO** falhamos em rejeitar H_0 com $\alpha = 0.05$

Questão 6

Questão 8

Seja a **distribuição Gaussiana Multivariada** dada por:

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

onde:

- D - *espaço D -dimensional*
- \mathbf{C} - *matriz de covariância*
- $\boldsymbol{\mu}$ - *vetor de médias*
- \mathbf{x} - *vetor de V.A. independentes*

Questão 8

Da definição de **matriz de covariância**, para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ e $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \\&= E \left[\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right] \\&= E \left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)(x_1 - \mu_1) & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right] \\&= E \left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)^2 & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix} \right] \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde σ_{12} é a covariância entre x_1 e x_2 .

Questão 8

Como x_1 e x_2 são V.A. independentes, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$. Assim:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

Para esboçar o gráfico de distribuição dos dados no plano x_1x_2 devemos calcular o valor de $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)$ para algum valor de k constante. Assim:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) = k$$

Questão 8

Tomando $\mu_1 = [-1 \ 0]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]$ e $k = 1$:

$$[x_1 + 1 \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$$

A equação acima mostra que o gráfico é uma elipse no plano x_1x_2 . Para o caso em questão com variâncias iguais:

$$\mathbf{C} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Questão 8

Logo:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{0.5} + \frac{x_2^2}{0.5} = 1$$

$$[x_1 + 1]^2 + x_2^2 = 0.5$$

$$[x_1 - (-1)]^2 + (x_2 - 0)^2 = 0.5$$

Para variâncias iguais a equação se transforma numa equação de um círculo de centro $[-1,0]$ e raio 0.5. O mesmo raciocínio vale para $\mu_2 = [1 \ 0]^T$, onde encontramos o centro do círculo em $[1,0]$.

Generalizando para a questão:

$$\forall k > 0, \exists [(x_1, x_2) \in \mathbf{x}, (\mu_1, \mu_2) \in \mu] \rightarrow (x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2 = k,$$

onde $k = \sigma^2$.

Questão 8

Com o auxílio do MATLAB, plotamos os gráficos para μ_1 e μ_2 :

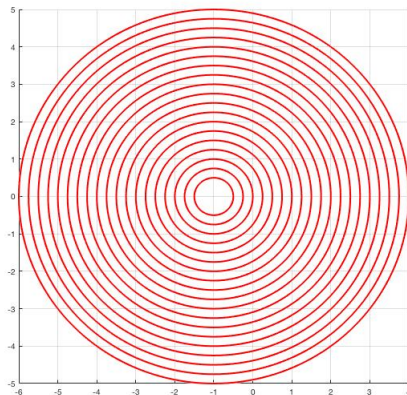


Figura: μ_1

Questão 8

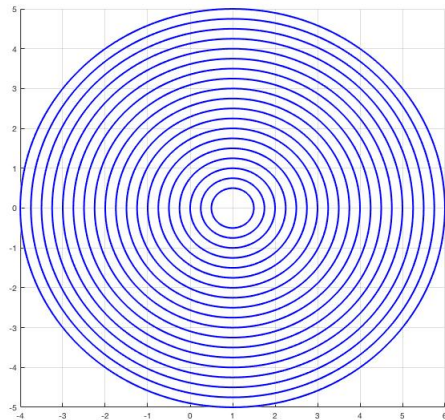


Figura: μ_2

Questão 8

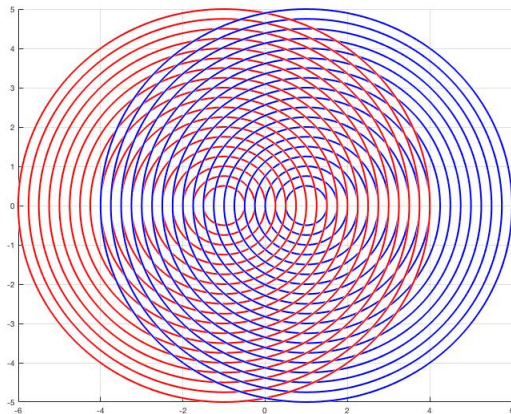


Figura: μ_1 e μ_2

Questão 8

Calculando a função de **Máxima Verossimilhança(ML)** $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\mathbf{x}|C_2)}{f(\mathbf{x}|C_1)} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} \frac{f(C_1)}{f(C_2)}$$

Tomando C_1 e C_2 como equiprováveis temos: $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\mathbf{x}|C_2)}{f(\mathbf{x}|C_1)} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} 1$$

Questão 8

Assim:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ML}(x) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2))}{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1))} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} 1 \\&= \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2))}{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1))} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} 1 \\&= \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)) \\ \Lambda_{ML}(x) &= \exp - \frac{1}{2} \{ (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) - [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)] \}\end{aligned}$$

Questão 8

Calculando o **logaritmo de Verossimilhança** $\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x))$:

$$\ln[\Lambda_{ML}(x)] = \ln e^{-\frac{1}{2}\{(x-\mu_2)^T C^{-1}(x-\mu_2) - [(x-\mu_1)^T C^{-1}(x-\mu_1)]\}}$$