

Lista 2

Tópicos Especiais em Engenharia de Computação

Eric Calasans de Barros Fagner Freire de Oliveira
Prof.: **Adrião Dória**

17 de outubro de 2017

Questão 1

Sejam $\bar{x}_1 = 230,0$, $s_1 = 10,7$, $\bar{x}_2 = 225,5$, $s_1 = 10,7$ e $s_2 = 15,4$, para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, calcularemos um **intervalo de confiança(IC)** de 95% ($\alpha = 0.05$) para a diferença das médias $\mu_1 - \mu_2$. Se

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

então:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \Rightarrow \mu = \bar{x} \pm Z * s$$

Questão 1

Dizer que a média está contida num determinado IC significa que $\mu = \bar{x} \pm Zs$. Assim, para a diferença das médias temos que:

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (\bar{x}_1 \pm Zs_1) - (\bar{x}_2 \pm Zs_2) \\ &= \bar{x}_1 \pm Zs_1 - \bar{x}_2 \pm Zs_2 \\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z(s_1 - s_2)\end{aligned}$$

Como procuramos um IC bilateral temos que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Pela simetria da curva de distribuição Normal temos que $|Z_\alpha| = |Z_{1-\alpha}| \Rightarrow |Z_{0,025}| = |Z_{0,975}|$.

Questão 1

Com a ajuda do software estatístico RStudio:

```
qnorm(.975)
```

```
## [1] 1.959964
```

Assim temos:

$$\mu_1 - \mu_2 = (230,0 - 225,5) \pm 1,96(10,7 - 15,4) = 7,5 \pm 9,2$$

Questão 2

Sejam $n_1 = 20$, $\bar{x}_1 = 510$, $s_1^2 = 20$ e $n_2 = 15$, $\bar{x}_2 = 620$, $s_2^2 = 30$ com $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, deseja-se calcular:

a) **Um intervalo de confiança de 95% para $\mu_1 - \mu_2$**

Como $n \leq 30$ em ambos os casos, usamos uma distribuição **t-Student**. Assim, para $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ temos que

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{df} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

onde

$$d_f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{\frac{n_1}{n_1-1}} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{n_2}{n_2-1}}} = \frac{(20/20 + 30/15)^2}{\frac{(20/20)^2}{19} + \frac{(30/15)^2}{14}} = 26$$

Questão 2

a) cont.

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1) - \bar{x}_2) \pm t_{0,975,26} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Pelo **RStudio**:

```
qt(.975,26)
```

```
## [1] 2.055529
```

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (510 - 620) \pm 2,056 \sqrt{\frac{20}{20} + \frac{30}{15}} \\ &= -110 \pm 3,561\end{aligned}$$

Questão 2

- b) Dadas σ_1^2 e σ_2^2 as variâncias de duas V.A.s com distribuição normal e s_1^2 e s_2^2 as variâncias amostrais, define-se **F** com **distribuição F de Snedecom**:

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2 \sigma_2^2}{s_2^2 \sigma_1^2}$$

para os graus de liberdade $df_1 = m - 1$ e $df_2 = n - 1$

Para construir um IC a variável F deve obedecer à seguinte probabilidade:

$$P(F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} < F < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}) = 1 - \alpha$$

Questão 2

b) *cont.*

Para tanto:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}$$
$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} \frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Invertendo os termos:

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}} \frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}} \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Questão 2

b) *cont.*

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{F_{0.975,19,14}} \frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{0.975,19,14}} \frac{20}{30}$$

Utilizando o **RStudio** e a propriedade da distribuição F:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}}$$

```
round(qf(0.025,19,14),digits = 3)
```

```
## [1] 0.378
```

Questão 2

b) *cont.*

$$F_{0.975,19,14} = \frac{1}{F_{0.025,19,14}} = \frac{1}{0.378} = 2.645$$

Logo:

$$\frac{1}{2.645} \frac{20}{30} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{0.378} \frac{20}{30}$$
$$0.251 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.754$$

Questão 3

Sejam $n = 300$, $\bar{x} = 1660$ e $s = 90h$, deseja-se testar:

- $H_0 : \mu_0 = 1690h$
- $H_1 : \mu_0 \neq 1690h$

Trata-se, portanto, de um **Teste Z bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$

$$\text{Calculadndo } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1660 - 1690}{90/\sqrt{300}} = -5,77$$

Conforme calculado em questão anterior:

$$Z_{0.025} = -1.96 \quad Z_{0.975} = 1.96$$

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.05$**

Questão 3

b) $\alpha = 0.01$

Para o mesmo $Z = -5.77$ e $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005}$

```
qnorm(0.025)
```

```
## [1] -1.959964
```

Como $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.01$**

Questão 4

Sejam $n = 20$, $\bar{x} = 0.06$ e $s = 0.009$, deseja-se testar:

- $H_0 : \mu_0 = 0.05$ *pol*
- $H_1 : \mu_0 \neq 0.05$ *pol*

Trata-se, portanto, de um **Teste t bicaudal**. Para:

a) $\alpha = 0.05$

$$\text{Calculadndo } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.06 - 0.05}{0.009/\sqrt{20}} = 4.969$$

Calculando $t_{1-\frac{\alpha}{2}, 19}$:

```
qt(0.975, 19)
```

```
## [1] 2.093024
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}, 19}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.05$**

Questão 4

b) $\alpha = 0.01$

Para o mesmo $t = 4.969$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2},19} = t_{1-\frac{0.01}{2},19} = t_{0.995,19}$:

```
qt(0.995,19)
```

```
## [1] 2.860935
```

Como $t > t_{1-\frac{\alpha}{2},19}$ **rejeitamos H_0 com $\alpha = 0.01$**

Questão 5

Sejam $n_a = 20, s_a = 8 (s_a^2 = 64)$ para a turma A e $n_b = 25, s_b = 10 (s_b^2 = 100)$ para a turma B, deseja-se saber se a variabilidade de B é maior que a de A. Assim temos:

- $H_0 : \sigma_b^2 = \sigma_a^2$
- $H_1 : \sigma_b^2 > \sigma_a^2$

Trata-se, portanto, de um **teste f unicaudal de cauda longa**. Calculando f :

$$f = \frac{s_b^2}{s_a^2} = \frac{100}{64} = 1.562$$

Questão 5

a) $\alpha = 0.01$

Calculando $f_{0.01,24,19}$:

```
qf(0.01,24,19,lower.tail = FALSE)
## [1] 2.924866
```

Como $f > f_{0.01,24,19}$ é **FALSO** falhamos em rejeitar H_0 com $\alpha = 0.01$

b) $\alpha = 0.05$

Calculando $f_{0.05,24,19}$:

```
qf(0.05,24,19,lower.tail = FALSE)
## [1] 2.114143
```

Como $f > f_{0.05,24,19}$ é **FALSO** falhamos em rejeitar H_0 com $\alpha = 0.05$

Questão 6

Seja a X uma V.A. com distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ cuja fdp é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

para $-\infty < x < \infty$. A **função de verossimilhança L** é dada por:

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ou

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Questão 6

Para encontrar o estimador de máxima verossimilhança devemos achar os valores para os quais $L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)$ é **máxima**. Inicialmente aplicamos a função **ln**:

$$\ln[L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)] = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

A seguir calculamos a derivada parcial em relação a μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)]}{\partial \mu} &= -\frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(-1) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Questão 6

Igualando o resultado a zero obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \hat{\mu})}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\hat{\mu}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

Questão 6

Dessa forma, é possível que o estimador de máxima verossimilhança para a média populacional seja \bar{x} . Isto é confirmado se \bar{x} for considerado um ponto de máximo. Para isto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 [\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)]}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) \right] \\ &= -\frac{n}{\sigma^2} < 0\end{aligned}$$

Concluimos então que \bar{x} é realmente um ponto de máximo e, por consequência, o estimador de máxima verossimilhança para μ .

Questão 6

Desejamos calcular agora o estimador de máxima verossimilhança para a variância σ^2 . Para tanto, derivamos a função $\ln L[\cdot]$ em relação a σ^2 :

$$\frac{\partial[\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)]}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)^2$$

Igualando a zero:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)^2 = 0$$
$$\frac{1}{2} \left[-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] = 0$$

Questão 6

$$\frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

Multiplicando o segundo termo por $\frac{n-1}{n-1}$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$
$$\sigma^2 = \frac{n-1}{n} s^2$$

Questão 6

Dessa forma, é possível que o estimador de máxima verossimilhança para a variância populacional seja $\frac{n-1}{n}s^2$. Isto é confirmado se $\frac{n-1}{n}s^2$ for considerado um ponto de máximo. Para isto:

$$\frac{\partial^2 [\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)]}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} < 0$$

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança para a σ^2 é $\frac{n-1}{n}s^2$.

Questão 7

Sejam $s_0(t) = -1$ e $s_1(t) = 1$ e $n(t) \sim N(0, 1)$. Para um sinal recebido $x(t) = s_i(t) + n(t)$, $i = 0, 1$ têm-se as seguintes hipóteses para o sinal que foi transmitido:

- $H_0: s_0(t) \rightarrow x(t) = -1 + n(t)$
- $H_1: s_1(t) \rightarrow x(t) = 1 + n(t)$

Se $n(t)$ é uma V.A com distribuição Normal e $s_i(t)$ é uma função constante, logo $x(t)$ também é uma V.A. com distribuição Normal. Reformulando as hipóteses:

- $H_0: f(x|H_0) \rightarrow f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}, \forall X \sim N(-1, 1)$
- $H_1: f(x|H_1) \rightarrow f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \forall X \sim N(1, 1)$

Questão 7

a) Teste de máxima verossimilhança

$$\Lambda_{ML}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|H_1)}{f(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{f(H_0)}{f(H_1)}$$

Como $f(H_0) = f(H_1)$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ML}(\mathbf{x}) &= \frac{f(\mathbf{x}|H_1)}{f(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} 1 \\ &= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \cancel{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} 1 \\ &= \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} 1\end{aligned}$$

Questão 7

Aplicando \ln e calculando δ_{ML} , temos:

$$\begin{aligned}\delta_{ML}[\Lambda_{ML}(\mathbf{x})] &= \ln \left[\frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln(1) \\ &= \ln \left[e^{-\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2}} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0 \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0 \\ &= \frac{1}{2} [(x+1)^2 - (x-1)^2] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0 \\ &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0 \\ \delta_{ML}[\Lambda_{ML}(\mathbf{x})] &= x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0\end{aligned}$$

Questão 7

Assim:

- $R_0: x(t) < 0$
- $R_1: x(t) > 0$

Como $x(t) = 0.3$ concluímos que $s_1(t)$ foi transmitido.

b) Teste de Bayes

Dados $p(H_0) = \frac{1}{3}$, $p(H_1) = \frac{2}{3}$, $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = 2$ e $c_{01} = 1$ e utilizando-se do raciocínio do item anterior para o cálculo de $\delta_B[\Lambda_B(x)]$, temos:

$$\delta_B[\Lambda_B(x)] = 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \left[\frac{c_{10} - c_{00}}{c_{01} - c_{11}} \cdot \frac{p(H_0)}{p(H_1)} \right]$$

Questão 7

$$\begin{aligned}\delta_B[\Lambda_B(\mathbf{x})] &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \left[\frac{2-0}{1-0} \cdot \frac{1/3}{2/3} \right] \\ &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln 1 \\ &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \rightarrow x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0\end{aligned}$$

Assim:

- $R_0: x(t) < 0$
- $R_1: x(t) > 0$

Como $x(t) = 0.3$ concluimos que $\mathbf{s}_1(\mathbf{t})$ foi transmitido.

c) Teste de Neyman-Pearson

Para $\alpha = \lambda = 0.15$ e utilizando o raciocínio dos itens anteriores, calculamos:

$$\begin{aligned}\delta_{NP}[\Lambda_{NP}(\mathbf{x})] &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \lambda \\ &= 2x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln 0.15 \\ &= x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} -1.9\end{aligned}$$

Questão 7

Assim:

- $R_0: x(t) < -1.9$
- $R_1: x(t) > -1.9$

Como $x(t) = 0.3$ concluímos que $\mathbf{s}_1(t)$ foi transmitido.

Questão 8

Seja a **distribuição Gaussiana Multivariada** dada por:

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

onde:

- D - *espaço D -dimensional*
- \mathbf{C} - *matriz de covariância*
- $\boldsymbol{\mu}$ - *vetor de médias*
- \mathbf{x} - *vetor de V.A. independentes*

Questão 8

Da definição de **matriz de covariância**, para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ e $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \\&= E \left[\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right] \\&= E \left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)(x_1 - \mu_1) & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right] \\&= E \left[\begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)^2 & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \\ (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & (x_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix} \right] \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde σ_{12} é a covariância entre x_1 e x_2 .

Questão 8

Como x_1 e x_2 são V.A. independentes, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$. Assim:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

Para esboçar o gráfico de distribuição dos dados no plano x_1x_2 devemos calcular o valor de $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)$ para algum valor de k constante. Assim:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) = k$$

Questão 8

Tomando $\boldsymbol{\mu}_1 = [-1 \ 0]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]$ e $k = 1$:

$$[x_1 + 1 \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$$

A equação acima mostra que o gráfico é uma elipse no plano x_1x_2 . Para o caso em questão com variâncias iguais:

$$\mathbf{C} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Questão 8

Logo:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{0.5} + \frac{x_2^2}{0.5} = 1$$

$$[x_1 + 1]^2 + x_2^2 = 0.5$$

$$[x_1 - (-1)]^2 + (x_2 - 0)^2 = 0.5$$

Para variâncias iguais a equação se transforma numa equação de um círculo de centro $[-1,0]$ e raio 0.5. O mesmo raciocínio vale para $\mu_2 = [1 \ 0]^T$, onde encontramos o centro do círculo em $[1,0]$.

Generalizando para a questão:

$$\forall k > 0, \exists [(x_1, x_2) \in \mathbf{x}, (\mu_1, \mu_2) \in \mu] \rightarrow (x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2 = k,$$

onde $k = \sigma^2$.

Questão 8

Com o auxílio do MATLAB, plotamos os gráficos para μ_1 e μ_2 :

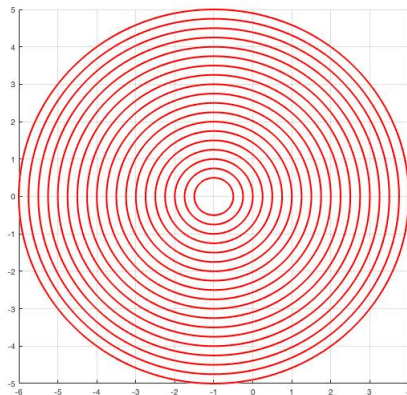


Figura: μ_1

Questão 8

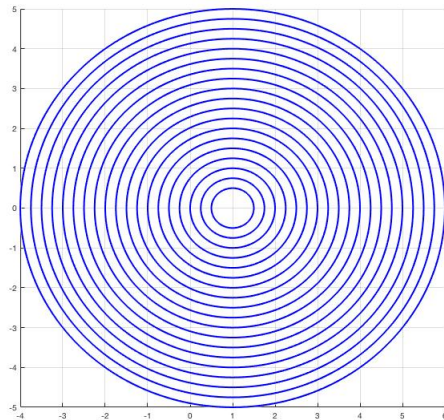


Figura: μ_2

Questão 8

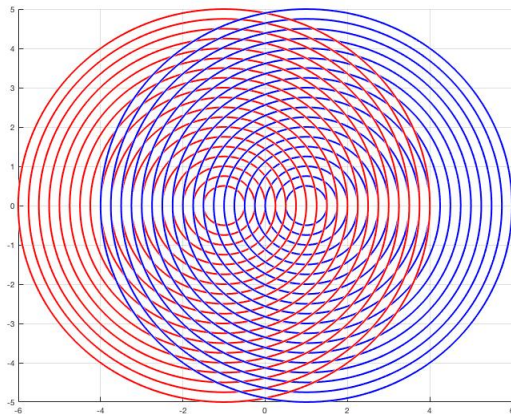


Figura: μ_2 e μ_2

Questão 8

Calculando a função de **Máxima Verossimilhança(ML)** $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\mathbf{x}|C_2)}{f(\mathbf{x}|C_1)} \underset{C_1}{\overset{C_2}{>}} \frac{f(C_1)}{f(C_2)}$$

Tomando C_1 e C_2 como equiprováveis temos: $\Lambda_{ML}(x)$:

$$\Lambda_{ML}(x) = \frac{f(\mathbf{x}|C_2)}{f(\mathbf{x}|C_1)} \underset{C_1}{\overset{C_2}{>}} 1$$

Questão 8

Assim:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ML}(x) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2))}{\frac{1}{(2\pi)^{D/2} \det(\mathbf{C})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1))} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} 1 \\&= \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2))}{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1))} \underset{C_1}{>} \underset{C_2}{<} 1 \\&= \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)) \\ \Lambda_{ML}(x) &= \exp - \frac{1}{2} \{ (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) - [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)] \}\end{aligned}$$

Questão 8

Calculando o **logaritmo de Verossimilhança** $\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x))$:

$$\begin{aligned}\ln[\Lambda_{ML}(x)] &= \ln e^{-\frac{1}{2}\{(x-\mu_2)^T C^{-1}(x-\mu_2) - [(x-\mu_1)^T C^{-1}(x-\mu_1)]\}} \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-\mu_2)^T C^{-1}(x-\mu_2) - [(x-\mu_1)^T C^{-1}(x-\mu_1)]\}\end{aligned}$$

Expandindo os produtos:

$$\begin{aligned}\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x)) &= -\frac{1}{2}\{x^T C^{-1}x - x^T C^{-1}\mu_2 - \mu_2^T C^{-1}x - \mu_2^T C^{-1}\mu_2 \\ &\quad - [x^T C^{-1}x - x^T C^{-1}\mu_1 - \mu_1^T C^{-1}x + \mu_1^T C^{-1}\mu_1]\}\end{aligned}$$

Questão 8

$$\begin{aligned}\delta_{ML}(\Lambda_{ML}(x)) &= -\frac{1}{2}\{\cancel{x^T C^{-1} x} - x^T C^{-1} \mu_2 - \mu_2^T C^{-1} x + \mu_2^T C^{-1} \mu_2 \\ &\quad \cancel{- x^T C^{-1} x} + x^T C^{-1} \mu_1 + \mu_1^T C^{-1} x - \mu_1^T C^{-1} \mu_1\} \\ &= -\frac{1}{2}\{-\cancel{2}\mu_2^T C^{-1} x + \cancel{2}\mu_1^T C^{-1} x - [\mu_1^T C^{-1} \mu_1 \\ &\quad - \mu_2^T C^{-1} \mu_2]\} \\ &= \mu_2^T C^{-1} x - \mu_1^T C^{-1} x + \frac{1}{2}[\mu_1^T C^{-1} \mu_1 \\ &\quad - \mu_2^T C^{-1} \mu_2] \\ &= (\mu_2^T C^{-1} - \mu_1^T C^{-1})x + \frac{1}{2}[\mu_1^T C^{-1} \mu_1 - \mu_2^T C^{-1} \mu_2]\end{aligned}$$

Questão 8

Fazendo:

$$\mathbf{w}^T = (\mu_2^T \mathbf{C}^{-1} - \mu_1^T \mathbf{C}^{-1})$$

e:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{2}[\mu_1^T \mathbf{C}^{-1} \mu_1 - \mu_2^T \mathbf{C}^{-1} \mu_2]$$

temos:

$$\ln[\Lambda_{ML}(x)] = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + \mathbf{w}_0$$

o que, pela linearidade em \mathbf{x} da nova equação, configura a equação de um **hiperplano**.