Universidad Nacional del Callao
Ciencia y Tecnología del Tercer Milenio
Universidad Licenciada, Resolución N° 171-2019-SUNEDU/CD

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

CURSO: CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL

SEMANA 3

MÉTODO DE NEWTON

Docente: Andres Collante Huanto

acollanteh@unac.edu.pe

BIS
PTO FIJO
NEWTON

$F(x) = 0$ $x \in [a, b]$

MÉTODO NEWTON

(Teorema de Taylor)

Suponga que $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n+1)}$ existe en $[a, b]$, y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

1) Si $f(x) = \cos x$ y $x_0 = 0$. Determine

a) el segundo polinomio de Taylor para f alrededor de x_0; y

b) el tercer polinomio de Taylor para f alrededor de x_0.

Solución Puesto que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, el teorema de Taylor puede aplicarse a cualquiera $n \geq 0$. Además,

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{y} \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

Por lo tanto

$$\cos x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad \text{y} \quad f'''(0) = 0.$$

a) Para $n = 2$ y $x_0 = 0$, obtenemos

$$P_2(x) \qquad R_2(x)$$

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \qquad P_2(x) =$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \operatorname{sen} \xi(x),$$

donde $\xi(x)$ es algún número (por lo general, desconocido) entre 0 y x. (Consulte la figura 1.9.)

$x_0 = 2$

$$\cos x = f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - 2)^3$$

Cuando $x = 0.01$, esto se convierte en

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \operatorname{sen} \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \operatorname{sen} \xi(0.01).$$

$\cos(0.01) \simeq 0.99995$

Por lo tanto, la aproximación para cos 0.01 provista por el polinomio de Taylor es 0.99995. El error de truncamiento, o término restante, relacionado con esta aproximación es

$$\frac{10^{-6}}{6} \operatorname{sen} \xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \operatorname{sen} \xi(0.01),$$

donde la barra sobre el 6 en $0.1\overline{6}$ se utiliza para indicar que este dígito se repite indefinidamente. A pesar de que no existe una forma de determinar sen $\xi(0.01)$, sabemos que todos los valores del seno se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que el error que se presenta si utilizamos la aproximación 0.99995 para el valor de cos 0.01 está limitado por

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} |\operatorname{sen} \xi(0.01)| \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}.$$

Por lo tanto, la aproximación 0.99995 corresponde por lo menos a los primeros cinco dígitos de cos 0.01 y

Método de Newton

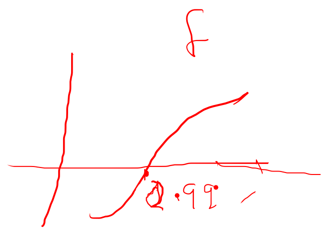
$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$$

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

Suponga que $f \in C^2[a, b]$. Si $p_0 \in [a, b]$ es una aproximación para p, de tal forma que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ es "pequeño". Considere que el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de p_0 y evaluado en $x = p$:

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0) f'(p_0) + \frac{(x-p_0)^2 f''(\xi)}{2}$$



$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p)),$$

donde $\xi(p)$ se encuentra entre p y p_0. Puesto que $f(p) = 0$, esta ecuación nos da

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \cancel{\frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))}.$$

El método de Newton se deriva al suponer que como $|p - p_0|$ es pequeño, el término relacionado con $(p - p_0)^2$ es mucho más pequeño, entonces

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0). \rightarrow -f(p_0) \approx (p - p_0) f'(p_0)$$

$$-\frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \approx p - p_0 \sim p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p_1$$

$$p \approx p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = p_2$$

$$p \approx p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = p_3$$

Al resolver para p obtenemos

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

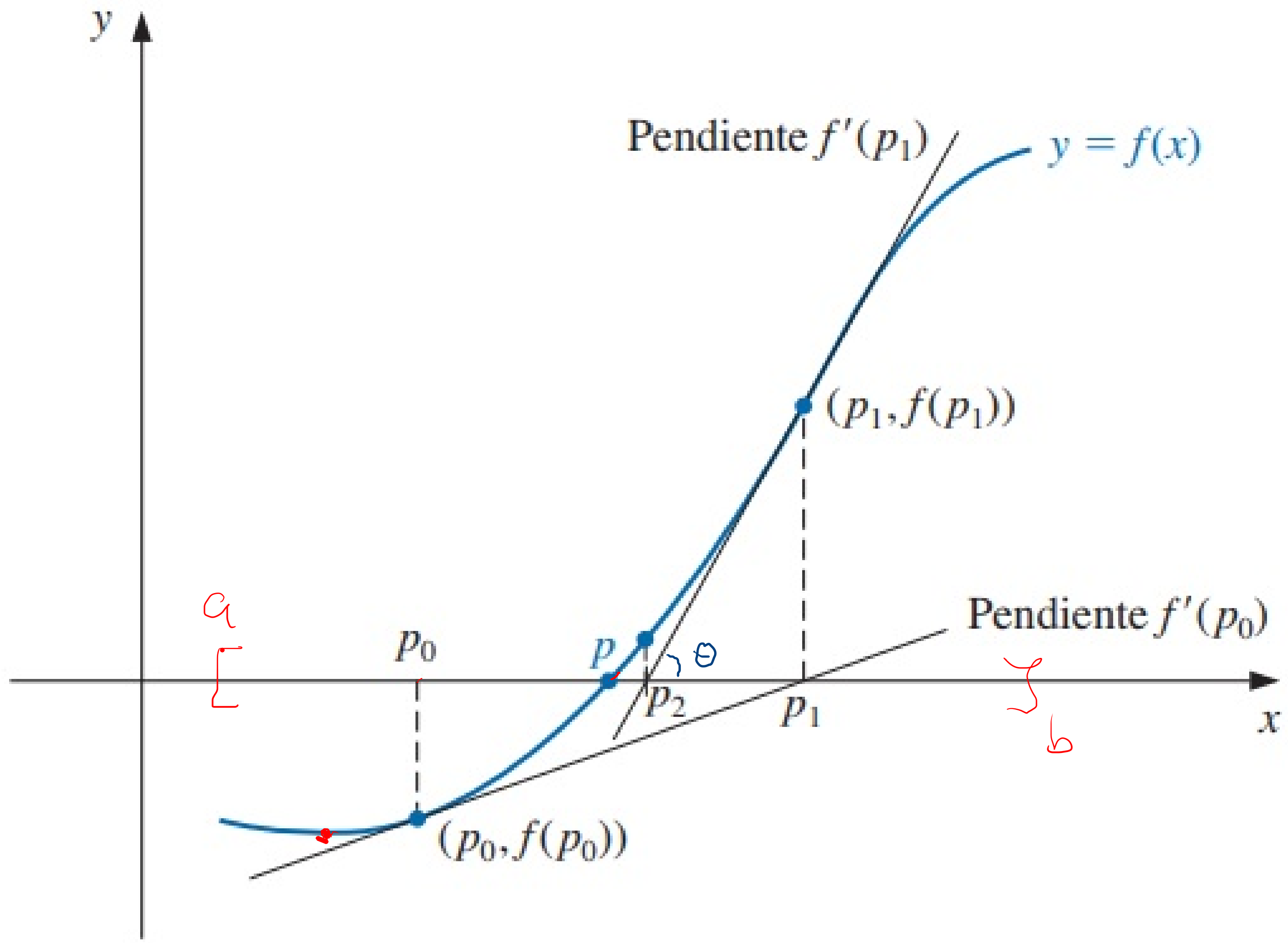
Esto constituye la base para el método de Newton, que empieza con una aproximación inicial p_0 y genera la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, mediante

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \geq 1. \tag{2.7}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

I.G

¿ $f(x)=0$?



$$Tg(\theta) = \frac{f(P_1)}{P_1 - P_2} = f'(P_1)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{f(P_1)}{f'(P_1)}$$

$$P_2 = P_1 - \frac{f(P_1)}{f'(P_1)}$$

$$P_3 = P_2 - \frac{f(P_2)}{f'(P_2)}$$

$$P_4 = P_3 - \frac{f(P_3)}{f'(P_3)}$$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{f(P_n)}{f'(P_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$X_n = X_{n-1} - \frac{f(X_{n-1})}{f'(X_{n-1})} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Método de Newton

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial p_0:

ENTRADA aproximación inicial p_0 tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0

SALIDA solución aproximada p o mensaje de falla.

Paso 1 Determine $i = 1$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga los pasos 3–6.

Paso 3 Determine $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (*Calcule* p_i.)

Paso 4 Si $|p - p_0| < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*El procedimiento fue exitoso*.)
PARE.

Paso 5 Determine $i = i + 1$.

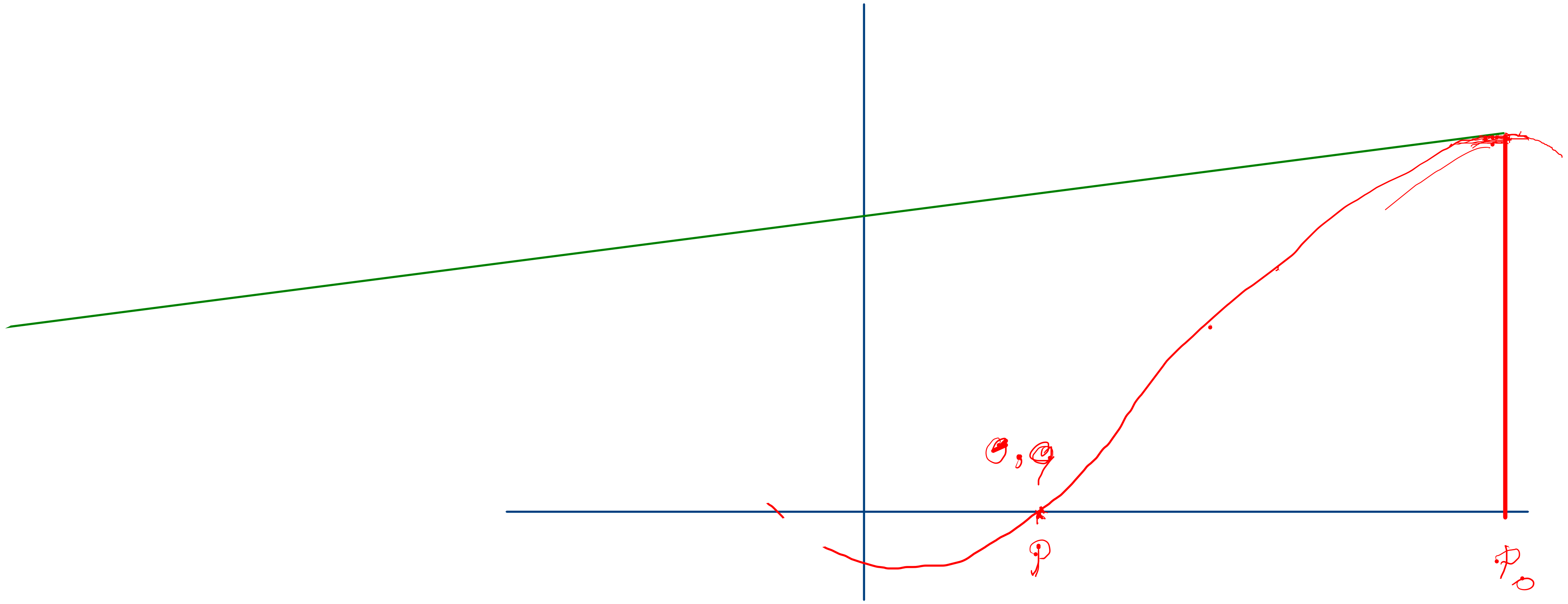
Paso 6 Determine $p_0 = p$. (*Actualizce* p_0.)

Paso 7 SALIDA ('El método falló después de N_0 iteraciones, $N_0 =$', N_0);
(*El procedimiento no fue exitoso*.)
PARE.

El método de Newton es una técnica de iteración funcional con $p_n = g(p_{n-1})$, para la que

$g(p_{n-1}) = p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \geq 1. \tag{2.11}$$

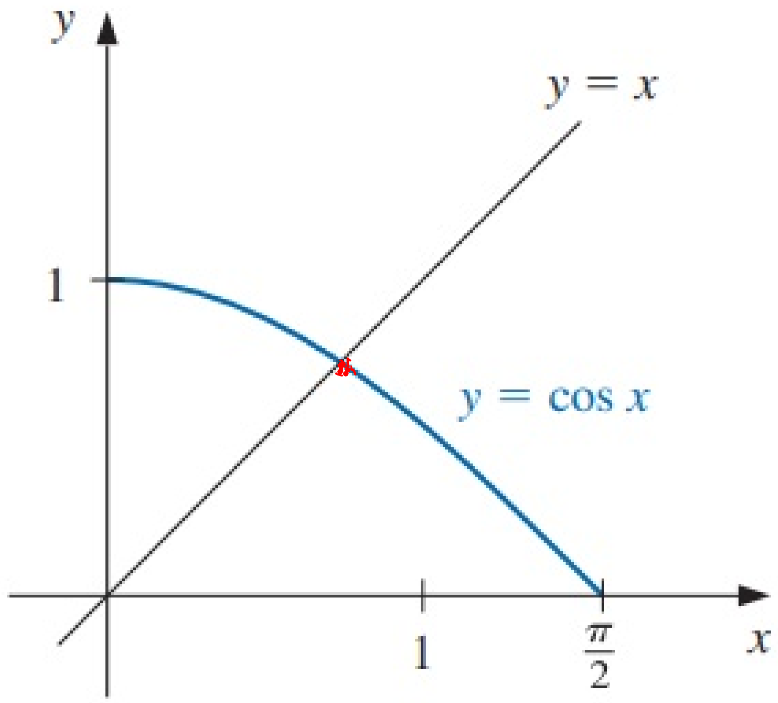


$f'(p_0) \approx 0$ X

$f(x) = 0 \rightsquigarrow x = g(x)$

1) Considere la función $f(x) = \cos x - x = 0$. Aproxime una raíz de f usando **a)** el método de punto fijo y **b)** el método de Newton.

a)



a) $x = g(x)$

$x = \cos x$

$x_n = \cos(x_{n-1})$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$x_{n+1} = \cos(x_n)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$P_{n+1} = \cos(P_n)$

$f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x)$

n	p_n
0	0.7853981635 $= \pi/4$
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen}(x_n) - 1}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$

$n=1$ $\quad X_1 = X_0 - \frac{\cos(X_0) - X_0}{-\operatorname{Sen}(X_0) - 1}$

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\cos(\pi/4) - \pi/4}{-\operatorname{sen}(\pi/4) - 1}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}/2 - \pi/4}{-\sqrt{2}/2 - 1}$$
$$= 0.7395361337$$
$$p_2 = p_1 - \frac{\cos(p_1) - p_1}{-\operatorname{sen}(p_1) - 1}$$
$$= 0.7390851781$$

$f(x) = \cos x - x$

$f'(x) = -\operatorname{Sen} x - 1$

$X_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\cos(\pi/4) - \pi/4}{-\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{4}) - 1}$

$X_n = X_{n-1} - \frac{f(X_{n-1})}{f'(X_{n-1})}$

$X_2 = X_1 - \frac{\cos(X_1) - X_1}{-\operatorname{Sen}(X_1) - 1}$

$X_n = X_{n-1} - \frac{\cos(X_{n-1}) - X_{n-1}}{-\operatorname{Sen}(X_{n-1}) - 1}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$X_3 = X_2 - \frac{\cos(X_2) - X_2}{-\operatorname{Sen}(X_2) - 1}$

Método de Newton

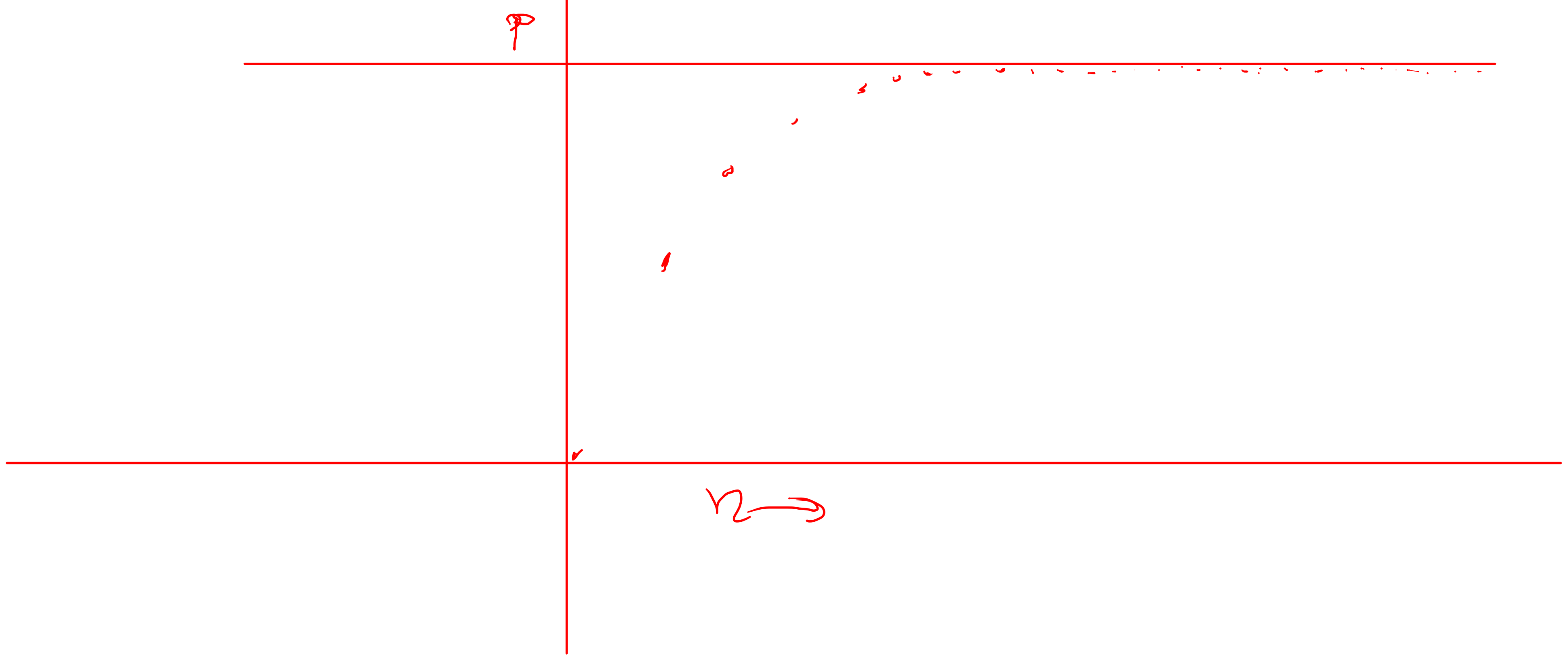
n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\operatorname{sen} p_{n-1} - 1}.$$

$\varepsilon = 10^{-4}$

x_n

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$



Imagine una pared de tabique con un espesor de 0.05 m. La temperatura en el lado interior de la pared, T_0, es de 625 K, pero se desconoce la temperatura del lado exterior. La pérdida de calor de la superficie exterior se efectúa por convección y por radiación. La temperatura T_1 está determinada por la ecuación

$$f(T_1) = \frac{k}{\Delta x}(T_1 - T_0) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_\infty^4) + h(T_1 - T_f) = 0 \qquad \text{(A)}$$

donde

k: conductividad térmica de la pared, 1.2 W/mK

ε: emisividad, 0.8

T_0: temperatura del lado interior de la pared, 625 K

T_1: temperatura del lado exterior de la pared (desconocida), K

T_∞: temperatura del entorno, 298 K

T_f: temperatura del aire, 298 K

h: coeficiente de transferencia de calor, 20 W/m^2K

σ: constante de Stefan-Boltzmann, 5.67×10^{-8} W/m^2K^4

Δx: espesor de la pared, 0.05 m

Determine T_1 por iteración de Newton.