

Universidade Federal de Campina Grande

Departamento de Engenharia Elétrica

Notas de Aula: Princípios de Comunicações

Bruno Barbosa Albert e Edmar Candeia Gurjão  
albert@dee.ufcg.edu.br e ecandeia@dee.ufcg.edu.br



# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de sistemas de comunicação pode ser dividido em duas partes:

1. como eles funcionam e,
2. qual o seus desempenhos na presença do ruído.

Para cada parte existe uma ferramenta específica. Na primeira usa-se a análise de Fourier (técnicas de Fourier) e na segunda a teoria das probabilidades.

Essa divisão é importante mas coloca um problema bastante sério: a dificuldade de cobrir todo o material em um único curso. A segunda parte é mais difícil que a primeira, e em geral é mais facilmente assimilada se a primeira for bem entendida. Dessa forma o ideal é termos os dois cursos em sequência, o segundo após o primeiro. Neste texto trataremos da primeira parte.

### 1.1 Sistema de Comunicação

Na Figura 1.1 tem-se a representação de um sistema de comunicação, cujos componentes são:

1. Fonte: onde se origina as mensagens
2. Transdutor de Entrada: converte as mensagens em sinais elétricos, chamado de sinal em banda básica
3. Transmissor: modifica o sinal em banda básica para uma transmissão eficiente
4. Canal: é o meio de comunicação, fio, cabo, fibra, enlace de rádio
5. Receptor: realiza o processo inverso ao do transmissor.
6. Transdutor de saída: converte os sinais elétricos para sua forma original
7. Destino: para quem se destina a mensagem gerada pela fonte

8. Distorção e Ruído: o canal se parece com um filtro, atenua o sinal e distorce sua forma. Em geral, quanto mais distante estiverem fonte e destino mais atenuado será o sinal. A distorção ocorre porque ocorrem atenuações e deslocamentos de fase distintos par cada componente do sinal. Este tipo distorção é chamada de **distorção linear** e pode ser parcialmente corrigida no receptor por um equalizador com características de ganho e fase complementares à do canal.
- Distorções não lineares: através da atenuação que varia com a amplitude do sinal. Também pode ser corrigida no receptor.
  - Ruído: o sinal também pode ser contaminado por sinais indesejáveis chamados de ruído, que são sinais aleatórios e imprevisíveis originados por causas externas e internas ao canal.
    - Causas externas: canais vizinhos, ruído gerado pelo homem, relâmpagos, etc. Com um cuidado adequado alguns desses ruídos podem ser eliminados
    - Causas internas: movimento “térmico” de elétrons em um condutor, difusão e recombinação de portadores em semicondutores. Este ruído nunca é eliminado.

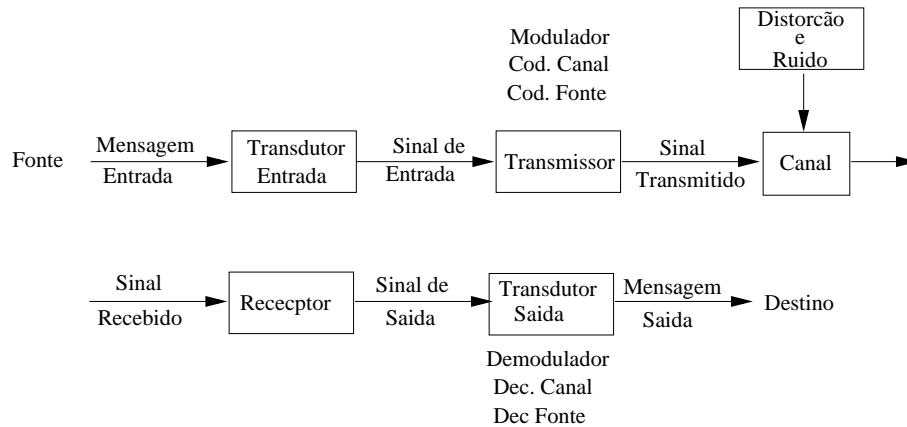


Figura 1.1: Modelo de um Sistema de Comunicação.

# Capítulo 2

## Transmissão de Sinais

Durante a propagação entre o transmissor e o receptor o sinal é alterado pelo meio em que ele se propaga. Neste capítulo vamos discutir os efeitos das características desse meio de transmissão sobre o sinal.

### 2.1 Transmissão sem Distorção Através de Sistemas Lineares

Vamos estudar o que acontece com um sinal quando ele é transmitido entre dois pontos, denominados de transmissor e receptor, através de um meio físico denominado de canal de comunicação, como está representado na Figura 2.1.

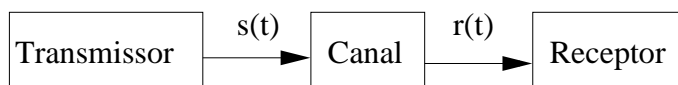


Figura 2.1: Representação Simplificada de um Sistema de Comunicações.

O sinal enviado  $s(t)$  se propagará pelo canal de comunicação e estará sujeito à interferências impostas pelo canal. Sendo  $F[\ ]$  a função que descreve o comportamento do canal, a relação da entrada com a saída será

$$r(t) = F[s(t)].$$

A determinação da função  $F[\ ]$  é um dos grandes problemas em telecomunicações.

Inicialmente vamos analisar o canal de comunicações como um sistema linear, lembrando que um sistema desse tipo deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. a resposta a uma soma de excitações é igual a soma das respostas das excitações tomadas individualmente, ou seja, se a entrada for dada por

$$s(t) = \sum_k a_k s_k(t)$$

sendo os  $a_k$  constantes, então a saída será dada por

$$r(t) = \sum_k a_k F[s_k(t)];$$

2. as relações entre a entrada e a saída são invariantes, ou seja,

$$F[s(t - t_d)] = r(t - t_d).$$

A primeira condição é o princípio da superposição, enquanto a segunda implica que os elementos do sistema não variam com o tempo.

Dessa forma podemos ver o canal de comunicação como o sistema linear da Figura 2.2, o sinal  $s(t)$  é processado de acordo com as características do sistema ( $h(t)$ ) para produzir  $r(t)$ .

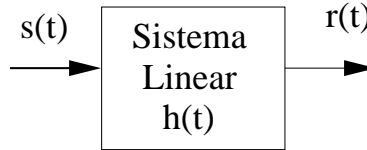


Figura 2.2: Sistema Linear.

Se  $H(\omega)$  é a função de transferência do sistema linear, então

$$r(t) = s(t) * h(t)$$

ou pela propriedade da transformada de Fourier da convolução

$$R(\omega) = S(\omega)H(\omega)$$

colocando na forma polar

$$\begin{aligned} R(\omega) &= |S(\omega)| e^{j\theta_s(\omega)} |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} \\ &= |S(\omega)| |H(\omega)| e^{j[\theta_s(\omega) + \theta_h(\omega)]}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ou seja

$$\begin{aligned} |R(\omega)| &= |S(\omega)| |H(\omega)| \\ \theta_R(\omega) &= \theta_S(\omega) + \theta_H(\omega) \end{aligned}$$

e algumas questões importantes podem ser colocadas neste instante:

1. que relações devem existir entre  $|H(\omega)|$ ,  $\theta_h(\omega)$  e  $|G(\omega)|$  e  $\theta_g(\omega)$  para preservar a forma de onda do sinal de entrada na saída
2. que filtro é obtido na forma de onda da saída em comparação com a entrada pelas variações de  $|H(\omega)|$ ?

3. o mesmo para  $\theta_h(\omega)$

4. como a distorção do sinal está relacionada com a largura de faixa do sistema?

Iniciemos pela primeira questão, pois nos sistemas de comunicação queremos sempre minimizar as distorções causadas pelas imperfeições do canal, e no caso ideal obter uma transmissão sem distorção.

Uma transmissão é dita sem distorção se a entrada e a saída tem a mesma forma de onda, possivelmente escalonada (multiplicada por um fator  $k$  que pode atenuar ou amplificar o sinal)<sup>1</sup>. Como o sinal levará um tempo para atingir a saída do sistema, será incluindo um atraso, porém uma transmissão que inclua um atraso na saída e que mantenha a forma de onda de entrada ainda é considerada sem distorção.

Assim, para uma transmissão sem distorção

$$r(t) = ks(t - t_d)$$

sendo  $t_d$  um atraso que não altera a forma de onda do sinal transmitido. Pela propriedade do deslocamento

$$\begin{aligned} R(\omega) &= kS(\omega)e^{-j\omega t_d} \\ &= ke^{-j\omega t_d}S(\omega) = H(\omega)S(\omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

logo

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}.$$

Fazer  $|H(\omega)| = k$  implica que todas as componentes de frequência devem sofrer a mesma atenuação ou amplificação.

Além disso deve-se ter  $\theta_H(\omega) = -\omega t_d$  e isto quer dizer que a fase é proporcional a  $\omega$ , de forma que todas as componentes de frequência sofram o mesmo atraso  $t_d$  ( $\cos \omega(t - t_d) = \cos(\omega t - \omega t_d)$ ).

Dessa forma, para uma transmissão sem distorção o módulo e a fase de  $H(\omega)$  devem ter o formato mostrado na Figura 2.3, e como já foi dito, sistemas reais são no máximo uma aproximação dos sistemas sem distorção.

Deve fazer a ressalva de que há diferença entre o atraso ( $t_d$ ) constante e a fase ( $\omega t_d$ ) constante. Nesse último caso, se a fase for constante, haverá distorção, e pode-ser perceber que, se a fase for proporcional à frequência, ou seja  $\arg(H(\omega)) = -\omega t_d$ , então

$$\arg(H(\omega)) = -\omega t_d = -2\pi f t_d \rightarrow t_d = -\frac{\arg(H(\omega))}{2\pi f}$$

e assim, se a fase varia proporcionalmente a frequência, tem-se um atraso constante.

Outro parâmetro derivado da relação entre fase e atraso, é o **atraso de grupo**, definido como

$$\tau_d = -\frac{d\arg(H(\omega))}{d\omega}$$

e mede a variação da fase.

---

<sup>1</sup>Vale observar que em um canal de comunicações, sempre ocorrerá a atenuação do sinal

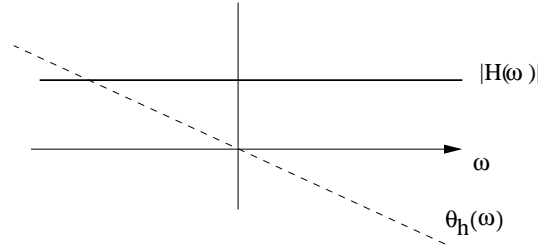


Figura 2.3: Módulo e fase da função  $H(\omega)$  que não distorce o sinal de entrada.

**Exemplo 1** Determinar a função de transferência  $H(\omega)$  e desenhar  $|H(\omega)|$  e  $\theta_h(\omega)$  de um circuito RC mostrado na Figura 2.4. Para transmitir sem distorção, que restrição devemos impor na largura de faixa de  $g(t)$ ? Qual é o atraso de transmissão? Ache  $y(t)$  quando  $g(t) = A \cos 100t$ .

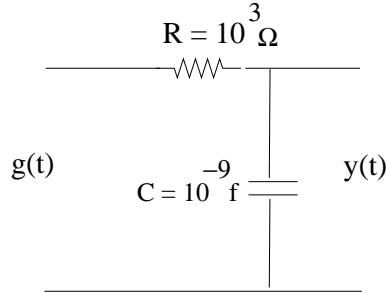


Figura 2.4: Circuito RC.

## Solução

Para o circuito da Figura 2.4 tem-se

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{Z_c}{Z_R + Z_c} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{(jR\omega C + 1)} \\ &= \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{a}{a + j\omega} \end{aligned}$$

sendo  $a = 1/RC = 10^6$ . Assim, na forma polar tem-se

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{e} \quad \theta_h(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}.$$

Quando  $\omega \ll a$  pode-se dizer que  $|H(\omega)| \approx 1$  e  $\theta_h(\omega) \approx -\omega/a$ , ou que temos uma transmissão sem distorção, quase ideal. Por exemplo, para  $\omega < 0,2a$ ,  $|H(\omega)|$  desvia 2% de um e  $\theta_h(\omega)$  de 1,5% do ideal.



Então para um sinal de largura de faixa  $B \ll \frac{a}{2\pi} Hz$  a transmissão é praticamente sem distorção. O valores de  $B$  dependem da quantidade de distorção que pode ser tolerada. Para  $\omega = 0, 2a$  ou  $2\pi B = 200.000$   $B \approx 31.847 Hz$  temos uma distorção desprezível.

O atraso  $t_d$  é dado por

$$t_d = \frac{d\theta_h(\omega)}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

No caso ideal  $\theta_h(\omega) = -\omega t_d \approx -\omega/a$  e  $t_d \approx 1/a = RC = 10^{-6}$ .

Para uma entrada  $A \cos 100t$ , com  $100 \ll 10^6$

$$y(t) = A \cos 100(t - 10^{-6}) = A \cos(100t - 10^{-4})$$

Na prática, variações de  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  do valor de  $|H(\omega)|$  são consideradas toleráveis, e o intervalo de frequência no qual  $|H(\omega)|$  permanece dentro desta variação (3dB) é chamado de largura de faixa do sistema (filtro). No nosso exemplo  $|H(\omega)| = 0,707$  em  $\omega RC = 1$ . Nesta faixa de frequências  $\theta_h$  varia de 0,215 radianos em relação a sua característica linear ideal.

### 2.1.1 Filtros Ideais

Filtros ideais permitem transmissão sem distorção de uma certa faixa de frequências e suprime todas as outras. Na Figura 2.5 tem-se o módulo e a fase de um filtro passa-baixas ideal. As frequências abaixo  $2\pi B$  passam sem distorção e todas as componentes acima de  $2\pi B$  são suprimidas.

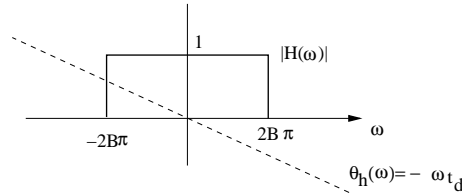


Figura 2.5: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa baixas.

Pode-se ainda ter um filtro ideal passa altas, representado na Figura 2.6 ou um filtro passa faixa ideal, representado na Figura 2.7.

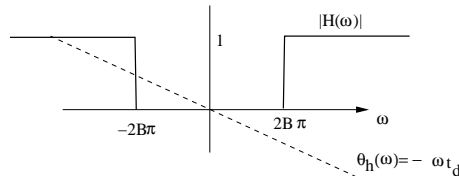


Figura 2.6: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa altas.

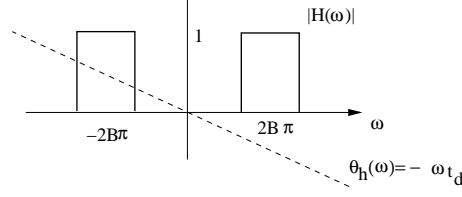


Figura 2.7: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa faixa.

A função  $h(t)$  para o filtro passa baixas ideal, também chamada resposta a um impulso unitário, é dada por  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) e^{-j\omega t_d}$$

sendo

$$\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi B/2 \\ 0 & |\omega| > 4\pi B/2 \end{cases}$$

logo  $h(t) = 2B \text{Sinc}[2B(t - t_d)]$ , representada na Figura 2.8.

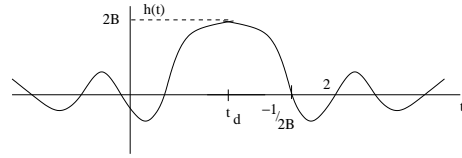


Figura 2.8: Filtro passa baixas ideal no domínio do tempo.

Pelo resultado acima tem-se que  $h(t)$  existe para  $t < 0$ . Isto é um resultado bastante estranho considerando que  $h(t)$  é a resposta a um impulso aplicado em  $t = 0$ , ou seja, a resposta aparece antes da entrada ser aplicada.

Infelizmente nenhum sistema real exibe essa característica profética (de prever que uma determinada excitação vai ocorrer). Donde conclui-se que um filtro ideal apesar de ser desejável não é fisicamente realizável.

De forma similar podemos mostrar que outros filtros ideais são fisicamente irrealizáveis. Para um sistema ser fisicamente realizável  $h(t)$  deve ser causal, isto é,  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ .

A função  $h(t)$  do filtro ideal pode não ser realizável mas  $\hat{h} = h(t)u(t)$  é fisicamente realizável porque é causal. Tal filtro no entanto não é ideal e distorce o sinal limitado em BHz.

Mas se aumentarmos a atraso  $t_d$  (teoricamente se  $t_d \rightarrow \infty$ ) teríamos um filtro ideal “realizável”.  $\hat{h}(t)$  pode ser uma réplica aproximada de  $h(t)$  exceto pelo atraso. O filtro resultante  $\hat{H}(\omega)$  é uma aproximação de  $H(\omega)$ .

Assim um filtro ideal pode ser realizado de um modo aproximado com um certo atraso  $t_d$ . Se  $t_d$  for da ordem de 2 ou 3 vezes  $1/2B$  fará com que  $\hat{h}(t)$  seja uma versão razoavelmente aproximada de  $h(t)$ .

Fazendo uma analogia, se uma pessoa quiser saber o que vai acontecer daqui a um ano (com a universidade por exemplo), ela tem duas opções

1. ir a um vidente (uma pessoa irrealizável) que pode dar a resposta imediatamente, ou
2. consultar um *expert* e permitir que ele lhe dê a notícia daqui a um ano. Mas se o *expert* for mesmo sábio ele pode acertar o prognóstico com atraso menor que um ano, verificando as tendências.

Na prática temos uma variedade de filtros, por exemplo, os filtros Butterworth são descritos pelas funções de transferência

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)^{2n}}}$$

sendo  $n$  a ordem do filtro. Na Figura 2.9 temos filtros para alguns valores de  $n$ .

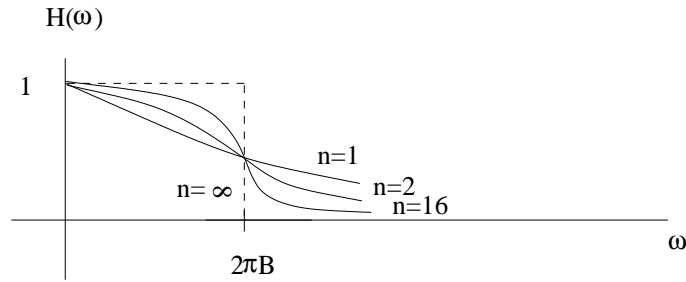


Figura 2.9: Filtro Butterworth para alguns valores de  $n$ .

Deve ser lembrado que  $|H(\omega)|$  e a fase  $\theta_h(\omega)$  são interdependentes e ao escolher um valor de  $n$  para um filtro pode ser que o

### 2.1.2 Filtros Digitais

Sinais analógicos também podem ser processados por meios digitais (conversão A/D), seguindo o esquema representado na Figura 2.10. O sinal resultante pode então ser processado por um computador dedicado, projetado para converter a entrada na saída desejada. Esses computadores são chamados de Processadores Digitais de Sinais (DSP, do inglês, *Digital Signal Processor*).

A saída é então convertida (D/A) para forma analógica. Um algoritmo especial do processador é usado para conseguir a operação desejada (filtragem PB, PG, PA).

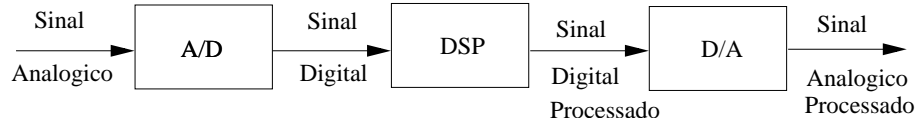


Figura 2.10: Esquema de um DSP.

As vantagens do processamento digital são:

- pode ser compartilhado para várias utilizadores;
- em geral o custo é consideravelmente mais baixo;
- a precisão dos filtros digitais é dependente apenas do tamanho da palavra processada, dos intervalos de quantização e da taxa de amostragem;
- emprega elementos simples (somadores, multiplicadores, etc.) em vez de RLC e amplificadores operacionais. O resultado disso é que os filtros digitais não são afetados por precisão de componentes, temperatura, envelhecimento, etc;
- filtros de mais alta ordem são facilmente realizáveis;
- podem ser facilmente modificados, alterando-se apenas o algoritmo.

### Exemplo: Filtros Digitais de Reposta Finita

Os filtros digitais de resposta finita ao impulso (FIR, do inglês *Finite Impulse Response*) produzem uma saída,  $y[n]$ , que é uma soma ponderada das entradas atuais e passadas,  $x[n]$ , ou seja:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots + b_qx[n-q]$$

ou

$$y[n] = \sum_{i=0}^q b_i x[n-i]$$

sendo  $b_i$ ,  $i = 0, \dots, q$  os coeficientes que determinam o tipo do filtro.

Dado o comportamento esperado de um filtro em frequência,  $H(\omega)$ , pode-se calcular a transformada de Fourier inversa e assim determinar os coeficiente do filtro ( $b_i$ ) para que ele tenha o comportamento desejado. Como exemplo considere um filtro passa-baixas dado por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad (2.3)$$

pode-se calcular

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega =$$

Do resultado acima nota-se que para obter um filtro passa baixas com a resposta em frequência da Equação 2.3 (filtro passa baixas Apesar da implementação do filtro ideal com o uso de todos os coeficientes ser impossível, pode-se truncar a quantidade de coeficientes utilizado e obter uma aproximação do filtro ideal.

## 2.2 Distorção do Sinal através de um Canal

Como foi dito, durante a transmissão o sinal enviado através de um canal é distorcido devido às imperfeições do mesmo. Como será mostrado as distorções podem ser lineares ou não lineares.

### 2.2.1 Distorção Linear

Primeiro vamos considerar canais lineares e invariantes no tempo. Distorções podem ser causadas por características não ideais de

- magnitude,
- fase
- ou ambas

Na nossa análise utilizaremos um pulso  $x(t)$  transmitido através do canal. Suponhamos que o pulso exista no intervalo de tempo  $(a, b)$  e que seja zero fora desse intervalo. Sabemos que  $x(t)$  pode ser representado por seu espectro (de magnitude e de fase).

Já foi mostrado que a transmissão de  $x(t)$  através de um canal ideal sem distorção deixa este espectro imperturbado, pois todas as componentes são multiplicadas por um mesmo fator e sofrem o mesmo atraso.

Se a magnitude do canal não é ideal ( $|H(\omega)|$  não é constante) o espectro então será perturbado e a soma de todas as componentes de frequência pode não ser zero fora do intervalo  $(a, b)$ .

Em suma, o pulso é espalhado no tempo. O mesmo raciocínio pode ser empregado para fase não ideal,  $\theta_h(\omega) \neq -\omega t_d$ . Esse espalhamento é chamado de dispersão.

Este tipo de distorção é altamente indesejável nos sistemas de multiplexação no tempo como o TDM (*Time Division Multiplexing*), pois pode fazer com que pulsos vizinhos interfiram entre si, provocando interferência intersimbólica e “*crosstalk*”, interferência nos canais vizinhos. Nos sistemas de multiplexação em frequência como o FDM (*Frequency Division Multiplexing*), o sinal é distorcido mas não afeta os canais vizinhos.

**Exemplo 2** Considere a função de transferência de um canal de comunicação é dado por

$$h(\omega) = \begin{cases} (1 + k \cos T\omega)e^{-j\omega t_d} & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

que está representada na Figura 2.11, e que um pulso  $x(t)$  com largura de banda limitada a BHz é aplicado a entrada desse canal, vamos analisar que sinal é obtido na saída.

Seja  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$  e  $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$ , logo

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= X(\omega)[1 + k \cos T\omega]e^{-j\omega t_d} \\ &= X(\omega)e^{-j\omega t_d} + k[X(\omega) \cos T\omega]e^{-j\omega t_d} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Usando a propriedade de deslocamento no tempo e o seguinte fato

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \leftrightarrow 2X(\omega) \cos t_0\omega$$

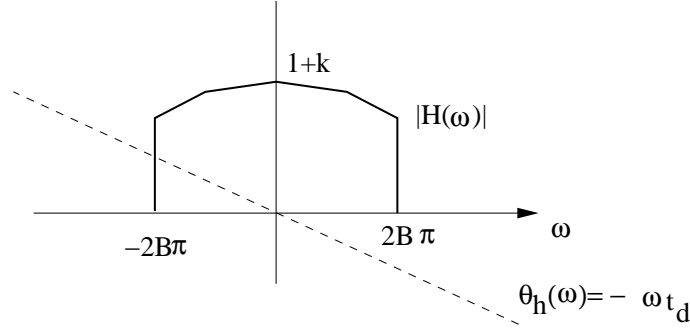


Figura 2.11: Espectro do canal de comunicação do Exemplo 2.

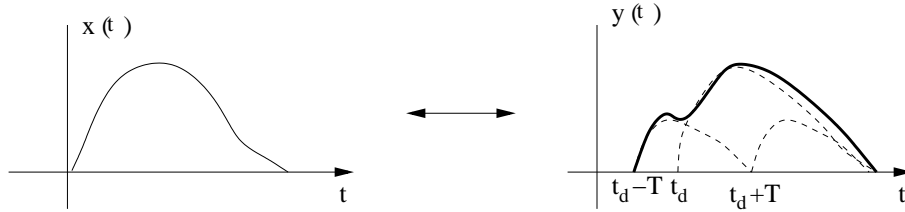


Figura 2.12: Pulsos deslocados no tempo e atenuados.

$$y(t) = x(t - t_d) + \frac{k}{2}[x(t - T - t_d) + x(t + T - t_d)]$$

que consiste no pulso  $x(t)$  atrasado de  $t_d$  mais dois outros pulso  $x(t)$  atenuados de  $k/2$ , deslocados de  $\pm T$  e atrasados de  $t_d$ , como mostrado na Figura 2.12.

A dispersão é causada pelos ecos em  $\pm T$ . Magnitude ideal e fase não ideal de  $H(\omega)$  provoca um efeito similar.

**Exercício 1** O que aconteceria com o sinal na saída do canal do exemplo anterior se o sinal de entrada não fosse limitado a  $BHz$ ?

### 2.2.2 Equalização

Em tese pode-se eliminar a distorção linear no receptor pela aplicação de uma função de seja inversa a do canal. Esse processo é conhecido como equalização. Sendo  $H_C(\omega)$  a resposta ao impulso do canal e  $H_{eq}(\omega)$  a resposta ao impulso do equalizador se fizermos

$$H_C(\omega)H_{eq}(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

sendo  $K$  e  $t_d$  constantes tem-se o sinal recebido sem distorção.

Um exemplo simples de equalizador são os filtros transversais, como estão mostrados na Figura 2.13. Nesse filtro o sinal recebido  $s(t)$  passa por uma linha que o atrasa e em seguida multiplica por um coeficiente  $c_i$ , dessa forma

$$r(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \Delta) + c_1x(t - 2\Delta)$$

e

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= c_{-1} + c_0 e^{-j\omega\Delta} + c_1 e^{-j\omega 2\Delta} \\ &= (c_{-1} e^{j\omega\Delta} + c_0 + c_1 e^{-j\omega\Delta}) e^{-j\omega\Delta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Que pode ser generalizada para um conjunto de  $2M + 1$  atrasados por

$$H_{eq}(\omega) = \left( \sum_{m=-M}^{m=M} c_m e^{-j\omega m\Delta} \right) e^{-j\omega M\Delta}$$

a série de Fourier exponencial com período  $1/\Delta$ .

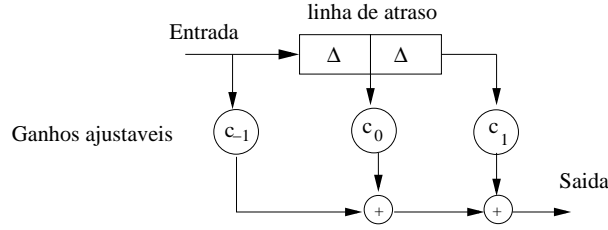


Figura 2.13: Filtro transversal usado como equalizador.

**Exemplo 3** Sendo  $x(t)$  a entrada de um sistema linear e  $y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$  sua saída, obtenha a expressão do equalizador baseado em linhas de atraso para ser colocado na saída do sistema para que se obtenha uma transmissão sem distorção.

Sendo  $y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$  então

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= k_1 X(\omega) e^{-j\omega t_1} + k_2 X(\omega) e^{-j\omega t_2} \\ &= (k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2}) X(\omega) \end{aligned}$$

de onde pode-se obter

$$\begin{aligned} H(\omega) &= k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} \\ &= k_1 e^{j\omega t_1} (1 + k e^{-j\omega t_0}) \end{aligned}$$

sendo  $k = k_2/k_1$  e  $t_0 = t_2 - t_1$ .

Para obter uma transmissão sem distorção deve-se ter

$$H_{eq}(\omega) = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}}$$

que pode ser escrito como

$$H_{eq}(\omega) = 1 = k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j\omega 2t_0}$$

e truncando a soma tem-se

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= 1 + k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j\omega 2t_0} \\ &= (e^{j\omega t_0} + k + k^2 e^{-j\omega t_0}) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

de onde se obtém:  $c_{-1} = 1$ ,  $c_0 = k$ ,  $c_1 = k^2$  e  $\Delta = t_0$

### 2.2.3 Distorção Causada pelas não linearidades do canal

Para pequenos sinais é válido aproximar um canal qualquer por um canal linear, mas para amplitudes maiores as não linearidades não podem ser ignoradas.

Vamos considerar um caso simples de um canal não linear sem memória, no qual  $y(t)$  está relacionada com a saída por uma equação não linear  $y = f(x)$ . Usando a série de McLaurin para expandir  $f(x)$

$$r = a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^2 + \dots + a_kx(t)^k + \dots$$

A série de potências nos permite avaliar o espectro resultante

$$x^k(t) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

donde

$$Y(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega) + \sum_k \frac{a_k}{(2\pi)^{k-1}} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

Podemos tirar algumas conclusões da equação acima: uma delas é que a saída consiste dos espectro de entrada mais repetidas autoconvoluções desse mesmo espectro.

Quando um espectro é convoluído com ele mesmo o espectro resultante tem largura de banda duas vezes maior que o original. Assim,  $(k-1)$  autoconvoluções vai aumentar a largura de faixa por um fator  $k$ . Isto significa que o sinal de saída terá componentes de frequência que não existiam no sinal original. Este tipo de distorção causa não apenas distorção no sinal mas interferência nos canais vizinhos.

**Exemplo 4** *Um sinal  $m(t)\cos\omega_c(t)$  é transmitido através um canal com a seguinte característica*

$$y = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t)$$

*sendo  $x$  a entrada e  $y$  a saída. Determine o sinal recebido, desenhe o espectro e comente o resultado obtido.*

Sendo

$$x(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

então

$$y(t) = a_1m(t) \cos \omega_c t + a_2m^2(t) \cos^2 \omega_c t + a_3m^3(t) \cos^3 \omega_c t$$

sabemos que  $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  e  $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)$ , assim

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1m(t) \cos \omega_c t + \frac{a_2}{2}m^2(t) + \frac{a_2}{2}m^2(t) \cos 2\omega_c t + 3\frac{a_3}{4}m^3(t) \cos \omega_c t + \frac{a_3}{4}m^3 \cos 3\omega_c t \\ &= \frac{a_2}{2}m^2(t) + [a_1m(t) + \frac{3}{4}a_3m^3(t)] \cos \omega_c t + \frac{a_2}{2}m^2(t) \cos \omega_c t + \frac{a_3}{4}m^3 \cos 3\omega_c t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando um filtro passa faixa centrado em  $\omega_c$  de largura  $4\pi B$  então

$$y_{filtrado}(t) = [a_1m(t) + \frac{3}{4}a_3m^3(t)] \cos \omega_c t$$

no qual a primeira componente é o sinal desejado e a segunda componente a distorção. Observe que o sinal de saída  $y(t)$  provavelmente vai interferir em outros canais.



## Compansão

O efeito das não linearidades pode ser reduzido para este tipo de canal usando um dispositivo que é o recíproco do canal.

Em alguns casos um sinal é intencionalmente distorcido passando por um compressor na transmissão e por um expensor na recepção.

O compressor amplifica mais os sinais em níveis baixos do que em níveis altos e em geral segue uma curva logarítmica, o expensor implementa a função inversa. Compressão-expansão  $\Rightarrow$  compansão.

### 2.2.4 Distorção causada pelo efeito do multipercurso

Recepção em multipercurso ocorre quando um sinal transmitido chega no receptor por diferentes percursos com atrasos diferentes, isso ocorre em enlaces de rádio, cabos não casados, dentre outros meios de transmissão.

O canal pode ser representado então por vários canais em paralelo, cada um com uma atenuação e atraso próprios. Vamos considerar um caso com apenas dois percursos, um com ganho 1 e atraso  $t_d$  e outro com ganho  $\alpha$  e atraso  $t_d + \Delta t$ , como está representado na Figura 2.14.

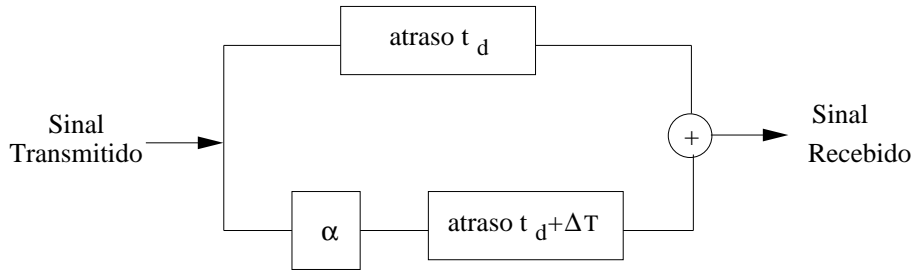


Figura 2.14: Canal com dois percursos.

As funções de transferência para cada caminho são respectivamente

$$H_1(\omega) = e^{-j\omega t_d}$$

e

$$H_2(\omega) = \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)},$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega) + H_2(\omega) \\ &= e^{-j\omega t_d} + \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha e^{-j\omega \Delta t}) \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha \cos \omega \Delta t - j \sin \omega \Delta t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
|H(\omega)| &= \sqrt{(1 + \alpha \cos \omega \Delta t)^2 + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + 2\alpha \cos \omega \Delta t + \alpha^2 \cos^2 \omega \Delta t + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \omega \Delta t}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\theta_h(\omega) = -(\omega t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin \omega \Delta t}{1 + \alpha \cos \omega \Delta t}) \tag{2.9}$$

Pode-se observar na Figura 2.15 que a magnitude e a fase de  $H(\omega)$  tem período  $2\pi/\Delta t$ .

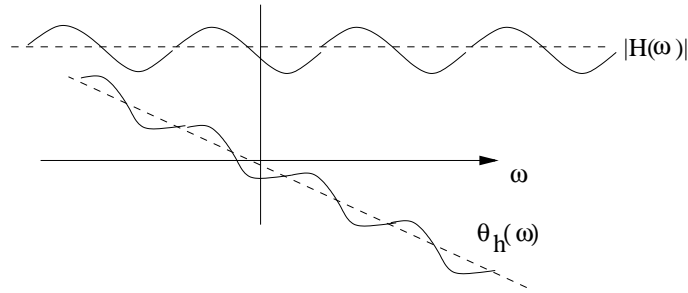


Figura 2.15: Magnitude e fase da função de transferência de um canal com dois percursos.

Multipercurso causa distorção linear e portanto dispersão. Esta distorção pode ser parcialmente corrigida pelo uso de equalizadores.

### Canais com desvanecimento

Até agora assumimos o canal invariante no tempo. Na prática encontramos canais cujas características de transmissão variam com o tempo. Como exemplo, os canais de tropodifusão que usam a ionosfera para reflexão de rádio a longa distância. Nesses canais as variações ocorrem por causa das condições meterológicas.

Portanto, a função de transferência do canal varia de forma aleatória produzindo uma variação aleatória no sinal. Este fenômeno é conhecido como desvanecimento (em inglês *fading*).

O desvanecimento pode ser fortemente dependente da frequência, ou seja afeta mais determinadas componentes de frequências. Isto é chamado de desvanecimento seletivo.

## 2.3 Densidade Espectral de Energia

A energia de um sinal  $g(t)$  é definida como a área sob  $|g(t)|^2$ . Esse parâmetro também pode ser obtido da transformada de Fourier de  $g(t)$ , usando o Teorema de Parseval mostrado a seguir.

**Teorema 1 (Teorema de Parseval)** *Seja*

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

*a energia a sinal  $g(t)$  e caso essa função seja complexa tem-se  $|g(t)|^2 = g(t)g^*(t)$ , então*

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt \quad (2.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \quad (2.11)$$

*trocando a ordem das integrais tem-se:*

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt d\omega \right] \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega \quad (2.13)$$

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (2.14)$$

A função  $|G(\omega)|$  é chamada de **Densidade espectral de energia** (ESD). Agora pode-se determinar a energia de um sinal tanto pela sua representação no tempo quanto pela representação na frequência.

**Exemplo 5** *Seja  $g(t) = e^{-at}u(t)$   $a > 0$ , determinar a energia de  $g(t)$ .*

$$\begin{aligned} E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} \\ E_g &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

*Agora, seja a transformada de Fourier de  $g(t)$  dada por  $G(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$  então*

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ E_g &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Da equação

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

pode-se observar que a contribuição de frequência  $\omega$  para a energia de  $g(t)$  é igual a  $|G(\omega)|^2$ . Então, considere  $g(t)$  aplicado como entrada do filtro passa-faixa  $H(\omega)$  centrado em  $\omega_0$ , representado na Figura 2.16.

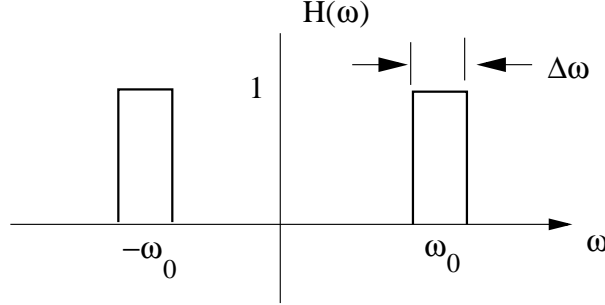


Figura 2.16: Filtro passa faixa ideal centrado em  $\omega_0$ .

A saída do filtro  $Y(\omega)$  será dada por  $Y(\omega) = G(\omega)H(\omega)$  e a energia de  $y(t)$  por

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)H(\omega)|^2 d\omega$$

como  $H(\omega) = 1$  no entorno de  $\omega_0$  tem-se

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{\pi} |G(\omega_0)|^2 \Delta\omega \quad (2.16)$$

então  $|G(\omega)|^2 df$  é a contribuição a energia de  $g(t)$  pelas bandas  $\Delta f$  centradas em  $\omega_0$ , logo  $|G(\omega)|^2$  é a energia por unidade de largura de banda (Hertz) da componente espectral de  $g(t)$  centrada em  $\omega$ , ou  $|G(\omega)|^2$  é **Densidade Espectral de Energia** de  $g(t)$ , ou seja

$$\Phi_g(\omega) = |G(\omega)|^2 \quad e \quad E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g(\omega) d\omega$$

### 2.3.1 Função de autocorrelação no tempo e densidade espectral de energia

Vamos mostrar que a DEE é a transformada de Fourier da função de autocorrelação no tempo. Para isso, definimos a autocorrelação no tempo de um sinal  $g(t)$  como

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt.$$

Primeiro vamos mostrar que  $\psi(\tau)$  é par quando  $g(t)$  é real, para isso tomemos  $x = t + \tau$ , ou,  $t = x - \tau$  e  $dt = dx$ , assim

$$\begin{aligned}\psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \tau)g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau)dx = \psi(-\tau).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Para provarmos que  $\mathcal{F}[\psi_g(\tau)] = \Psi_g(\omega)$  vamos mostrar que

$$\psi_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau)$$

para isso vamos fazer  $g(-\tau) = f(\tau)$  assim

$$g(\tau) * g(-\tau) = g(\tau) * f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(\tau - x)dx$$

$$f(\tau - x) = g[-(\tau - x)] = g(x - \tau)$$

assim

$$g(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau)dx = \psi_g(-\tau) = \psi_g(\tau)$$

para  $g(t)$  real

$$g(\tau) \leftrightarrow G(\omega)$$

$$g(-\tau) \leftrightarrow G(-\omega) = G^*(\omega)$$

e portanto

$$g(\tau) * g(-\tau) \leftrightarrow G(\omega) * G^*(\omega) = |G(\omega)|^2 = \Psi_g(\omega)$$

## Densidades de Energia de Entrada e Saída

Seja  $g(t)$  o sinal de entrada e  $y(t)$  o sinal de saída de um sistema linear com função de transferência  $H(\omega)$ , ou seja,  $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ , então temos

$$\begin{aligned}\Psi_y(\omega) &= |Y(\omega)|^2 = |G(\omega)H(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |G(\omega)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \Psi_g(\omega)\end{aligned}\tag{2.18}$$

## 2.4 Densidade Espectral de Potência

Se um sinal  $g(t)$  existe para  $-\infty < t < \infty$  define-se a potência média, ou simplesmente potência,  $P_g$  desse sinal como a potência média dissipada por um resistor de  $1\Omega$  quando uma tensão  $g(t)$  é aplicada sobre ele. Assim

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t)dt\tag{2.19}$$

A potência assim definida é simplesmente o valor médio quadrático de  $g(t)$  ou

$$P_g = \overline{g^2(t)}$$

Observe que se  $E_g$  é finita, então  $P_g = 0$  e se  $P_g$  é finita  $E_g$  é infinita. Dessa forma tem-se a seguinte classificação:

- sinais com  $E_g$  finita são denominados de energia;
- sinais com  $P_g$  finita e diferente de zero são chamados sinais de potência.

Alguns sinais não obedecem essa classificação, por exemplo o sinal  $g(t) = e^{-at}$   $-\infty < t < \infty$  tem  $E_g$  e  $P_g$  infinitas.

Para achar  $P_g$  no domínio de frequência como  $E_g \rightarrow \infty$  para sinais de potência, existe a possibilidade de não existir a transformada de Fourier. Portanto vamos considerar  $g(t)$  truncado

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |T| < T/2 \\ 0 & |T| > T/2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Enquanto  $T$  for finito,  $E_g$  é finita e existe a transformada de Fourier  $g_T(t) \leftrightarrow G_T(\omega)$  e

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \quad (2.21)$$

mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

donde

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \right] \quad (2.22)$$

Quando  $T$  aumenta, também aumentam  $E_T$  e  $|G_T(\omega)|^2$ , no entanto  $\frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$  se aproxima de algum limite quando  $T \rightarrow \infty$ , pois crescem com a mesma taxa, assim tem-se:

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (2.23)$$

e define-se a Densidade Espectral de Potência (DEP) como

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T} \quad (2.24)$$

donde

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega \quad (2.25)$$

a mudança no limite inferior de integração na equação acima deve-se ao fato que  $S_g(\omega)$  é positiva, real e par. A unidade de  $S_g$  é  $W/Hz$  e a de  $P_g$  é  $W$ .

Usando a variável  $f$  ao invés de  $\omega$  tem-se

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(2\pi f) df = 2 \int_0^{\infty} S_g(2\pi f) df \quad (2.26)$$

De  $S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T}$  deduz-se que a DEP de um sinal contém apenas informação de magnitude do espectro de frequências de  $G_T(\omega)$  e perde a informação de fase. Isto quer dizer que alterar a fase não altera a DEP.

## 2.5 Correlação no Tempo de Sinais de Potência

A transformada de Fourier de um sinal determinístico  $x(t)$  fornece uma representação no domínio da frequência  $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$  na qual é possível analisar o módulo e a fase, sendo esse último parâmetro importante para a análise da distorção durante a transmissão dos sinais.

Entretanto, para sinais aleatórios a aplicação da transformada de Fourier leva a uma representação que também é aleatório, uma para cada realização do sinal. Para que possamos analisar a densidade espectral de potência de um sinal aleatório precisamos de uma medida que nos forneça o comportamento médio do sinal, e essa medida é a autocorrelação, como será mostrado nessa seção.

A função de autocorrelação no tempo  $R_g(\tau)$  de um sinal  $g(t)$  é definida como

$$R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt \quad (2.27)$$

trocando  $t + \tau$  por  $x$  tem-se

$$R_g(\tau) = \overline{g(x-\tau)g(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2+\tau}^{T/2+\tau} g(x-\tau)g(x) dt \quad (2.28)$$

como  $x$  é uma variável muda pode-se fazer  $x = t$  e obtém-se:

$$R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t-\tau)} = R_g(-\tau) \quad (2.29)$$

ou seja  $R_g(\tau)$  é uma função par.

Como no caso dos sinais de energia

$$\mathcal{F}[R_g(\tau)] = S_g(\omega) \quad (2.30)$$

tomemos novamente  $g_T(t)$  e sua densidade espectral de energia  $|G_T(\omega)|^2$ , então

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\tau)g_T(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T} \quad (2.31)$$

e

$$F[R_g(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F[\psi_{gT}(\tau)]}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega) \quad (2.32)$$

Fazendo  $\tau = 0$  na Equação 2.27 tem-se

$$R_g(0) = \overline{g^2(t)} = P_g \quad (2.33)$$

Deve ser lembrado que a DEP contém somente informação de magnitude do sinal, pois a informação de fase não é utilizada. Assim, para cada sinal só há uma DEP, porém para cada DEP  $S_x(\omega)$  pode haver uma infinidade de sinais no tempo, que diferem entre si pela fase.

**Exemplo 6** Determinar a DEP de  $g(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ .

**Solução:**

Usando a função de autocorrelação tem-se

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t + \theta) A \cos(\omega_0(t + \tau) + \theta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 \tau) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) dt \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde pode-se observar que  $R_g(\tau)$  é independente de  $\theta$ , a fase de  $g(t)$ . A PSD será

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= \mathcal{F}[R_g(\tau)] = \frac{A^2}{2} \mathcal{F}[\cos \omega \tau] \\ &= \pi \frac{A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (2.35)$$

A potência média, ou valor médio quadrático de  $g(t)$  será

$$P_g = R_g(0) = \frac{A^2}{2}$$

ou de outra forma

$$\begin{aligned} P_g &= 2 \int_0^\infty S_g(\omega) df = 2 \int_0^\infty \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_0) df \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

confirmando um fato bastante conhecido.



### 2.5.1 Relação entre a DSP de entrada com DSP de saída

Idêntico ao caso anterior para sinais de energia, se  $H(\omega)$  é a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo, então

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$

e

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_g(\tau)$$

### 2.5.2 Interpretação da DEP

Também similar a interpretação feita para a densidade espectral de energia, a densidade espectral de potência representa a contribuição de potência de várias componentes de frequência.  $S_g(\omega)$  representa a potência por unidade de largura de faixa das componentes de frequência centradas em  $\omega$ .

**Exemplo 7** Um sinal  $g(t)$  tem PSD  $S_g(\omega) = N/A^2$  como mostrado na Figura 2.17. Determine a PSD e o valor médio quadrático de sua derivada.

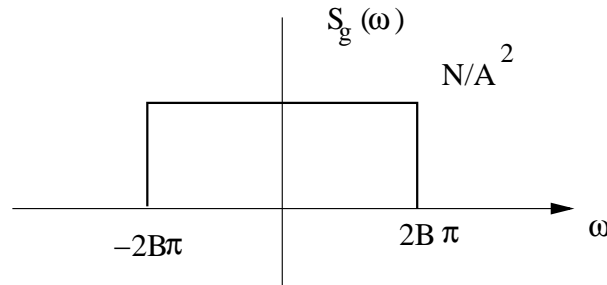


Figura 2.17: PSD do sinal  $g(t)$  do Exemplo 7.

### Solução

Podemos observar a derivada como um sistema cuja entrada é o sinal  $g(t)$ , a função de transferência é a derivada e a saída o sinal derivado, como está representado na Figura 2.18.

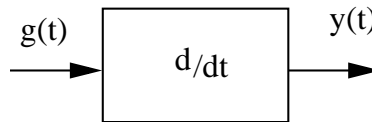


Figura 2.18: Derivada vista como um sistema.

Assim, como  $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$  e a função de transferência de um diferenciador é  $j\omega$  tem-se

$$S_y(\omega) = |j\omega|^2 S_g(\omega) = \omega^2 S_g(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{A^2} \omega^2$$

O valor médio será dado por

$$\begin{aligned} \overline{y^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_y(\omega) df = \int_0^\infty \frac{\omega^2 \mathcal{N}}{A^2} df \\ &= 2 \int_0^B (2\pi f)^2 \frac{\mathcal{N}}{A^2} df = \frac{2\mathcal{N}}{A^2} \int_0^B 4\pi^2 f^2 df \\ &= \frac{8\pi^2 \mathcal{N} B^3}{3A^2} \text{volt}^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

**Exemplo 8** Mostre que se  $g(t)$  tem uma PSD  $S_g(\omega)$  e potência  $P_g$ , então  $ag(t)$  tem PSD  $a^2 S_g(\omega)$  e potência  $a^2 P_g$

**Solução**

$$y(t) = ag(t) \leftrightarrow Y(\omega) = aG(\omega) = H(\omega)G(\omega)$$

sendo  $H(\omega) = a$ , logo temos

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega) = a^2 S_g$$

Isto significa que multiplicar um sinal por um fator  $a$  aumenta sua PSD por um fator  $a^2$ .

**Exemplo 9** Seja um trem de pulsos binários aleatórios, como mostrado na Figura 2.19. Determine a função de autocorrelação, a PSD e a largura de faixa essencial de  $g(t)$ .

Temos que

$$R_g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t-\tau) d\tau$$

para obter o integrando precisamos multiplicar  $g(t)$  por  $g(t-\tau)$  ( $g(t)$  deslocada), e então achar a área sob o produto  $g(t)g(t-\tau)$ .

Primeiro vamos observar a Figura 2.20 e considerar  $0 < \tau < T_0/2$ .

como os pulsos são positivos ou negativos, o produto  $g(t)g(t-\tau)$  é sempre positivo e a área de um pulso será  $A_p = T_0/2 - \tau$ .

Considerando um intervalo  $T = NT_0$  temos  $N$  pulsos sobre o intervalo, a área total é a soma das áreas de cada pulso individual, assim  $A_T = N(T_0/2 - \tau)$  e

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [N(T_0/2 - \tau)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} [N(T_0/2 - \tau)] \\ &= \frac{1}{T_0} \left( \frac{T_0}{2} - \tau \right) = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{2\tau}{T_0} \right) \text{ para } 0 < \tau < T_0/2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

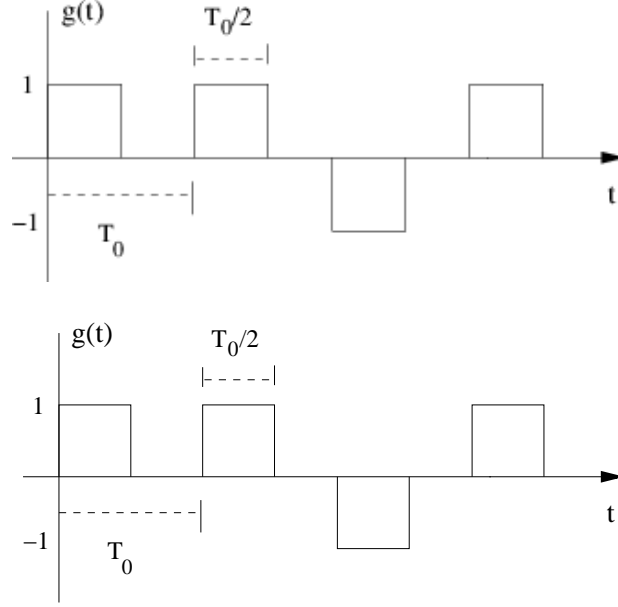


Figura 2.19: Pulsos Binários Aleatórios.

Como  $R_g(\tau)$  é uma função par

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2|\tau|}{T_0} \right) \quad |\tau| < T_0/2$$

e tem o formato mostrado na Figura 2.21.

Consideremos agora o caso de  $\tau > T_0/2$ . Haverá sobreposição do pulso com seu vizinho, ou seja, teremos pulsos positivos e negativos no produto  $g(t)g(t - \tau)$ . Como os pulsos são equiprováveis, num tempo  $T \rightarrow \infty$  teremos produtos  $g(t)g(t - \tau)$  positivos e negativos equiprováveis. Ou seja, metade dos pulsos são positivos e metade são negativos (quando  $T \rightarrow \infty$ ) resultando numa área total nula. Ou seja,

$$R_g(\tau) = 0 \quad \text{para } |\tau| > T_0/2$$

e a função de autocorrelação é a mostrada na Figura 2.21.

A DEP  $S_g(\omega) = \mathcal{F}[R_g(\tau)]$  que para um pulso triangular é

$$S_g(\omega) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}^2 \left( \frac{\omega T_0}{4\pi} \right)$$

cujo formato está representado na Figura 2.22.

Calculando a área abaixo de  $S_g(\omega)$  para  $|\omega| < 4\pi/T_0$  em relação a área total, verificamos que 90,28% da potência do sinal está dentro dessa faixa, e portanto esta pode ser considerada a largura de faixa essencial de  $g(t)$  para a maioria dos casos práticos.

Este exemplo mostra um sinal não determinístico que não pode ser expresso por uma função determinística no tempo. Consequentemente não podemos expressar seu espectro de

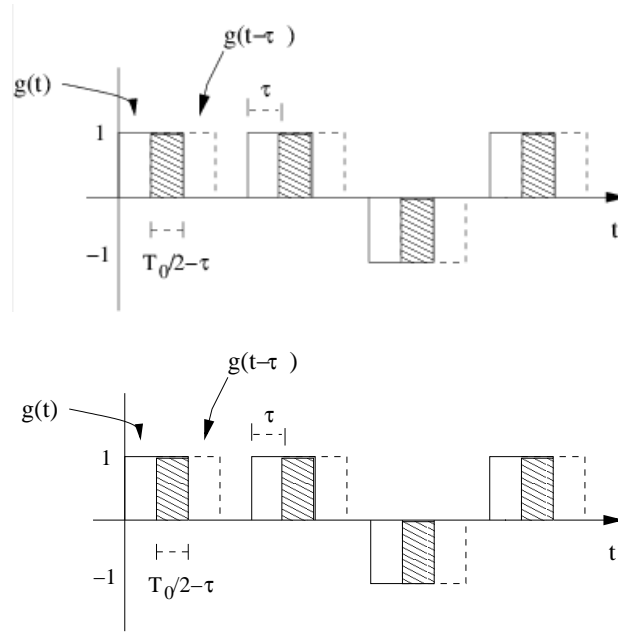


Figura 2.20: Pulsos Binários aleatórios deslocados.

frequência. Mas a função de autocorrelação nos permite obter informação sobre o espectro desses sinais que seria impossível por meios convencionais.

## 2.6 Exercícios

**Exercício 2** Considere um canal no qual o sinal enviado chega ao receptor por dois caminhos distintos. O primeiro atenua o sinal por um fator  $k_1$  e atrasa de  $t_1$ , o segundo tem atenuação  $k_2$  e atraso  $t_2$ . Obtenha a expressão de um equalizador baseado em uma linha de atraso para esse canal.

**Exercício 3** Seja um sinal  $x(t) = \cos \omega_1 t$  transmitido através de um canal multipercursos (dois raios) em que  $\omega_1 t_d = \pi$ ,  $\omega_1 (t_d + \Delta T) = 2\pi$  e  $\alpha = 1$ . Qual o sinal recebido?

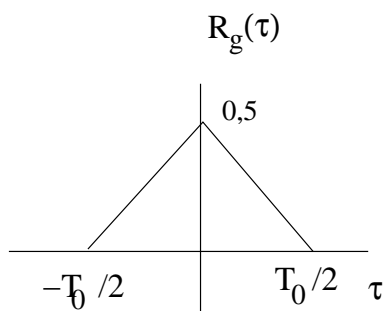
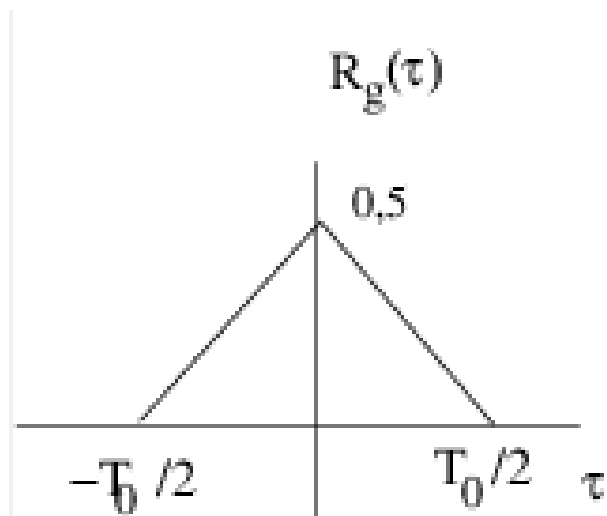


Figura 2.21: Função de autocorrelação de pulsos binários aleatórios.

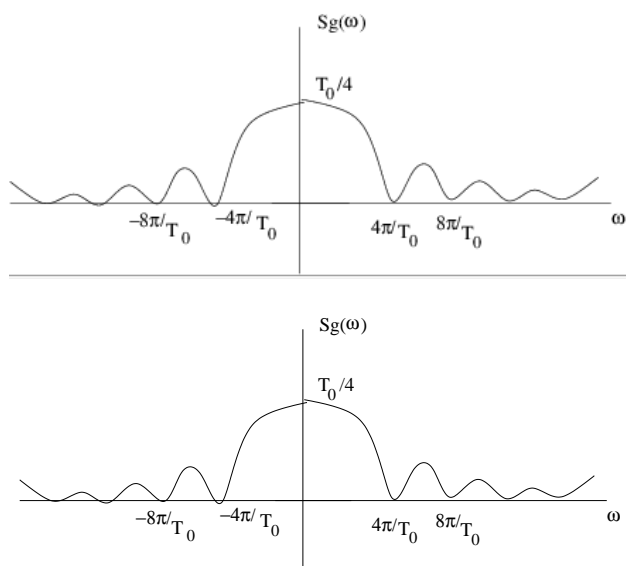


Figura 2.22: PSD do pulso triangular.