

Universidade Federal de Campina Grande

Departamento de Engenharia Elétrica

Notas de Aula: Princípios de Comunicações

Bruno Barbosa Albert e Edmar Candeia Gurjão
albert@dee.ufcg.edu.br e ecandeia@dee.ufcg.edu.br

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas de comunicação pode ser dividido em duas partes:

1. como os sistemas funcionam e,
2. qual o desempenho deles na presença do ruído.

Para cada parte existe uma ferramenta específica. Na primeira usa-se a análise de Fourier (técnicas de Fourier) e na segunda a teoria das probabilidades.

Essa divisão é importante mas coloca um problema bastante sério: a dificuldade de cobrir todo o material em um único curso. A segunda parte é mais difícil que a primeira, e em geral é mais facilmente assimilada se a primeira for bem entendida. Dessa forma o ideal é termos os dois cursos em sequência, o segundo após o primeiro. Neste texto trataremos da primeira parte.

1.1 História

O desejo de se comunicar a distância é tão antigo quanto a própria humanidade. No passado as mensagens eram “transportadas” por mensageiros, por pombo-correio, tambores ou tochas. Praticamente todos esses esquemas de comunicação foram suplantados pelos sistemas de comunicação elétricos (aqueles que usam sinais elétricos para transportar informação) a longa distância.

Antes de iniciarmos o nosso estudo sobre os princípios de como enviar informação usando sinais elétricos, vejamos um pequeno histórico desse tipo de

1800-1837 Primeiros passos: Volta inventa a bateria primária. Sistemas telegráficos por Gauss e Weber. Fourier, Cauchy, Laplace e Lei de Ohm.

1838-1899 Telegrafia - Morse (comercial em 1844). Cabos submarinos. Leis de Kirchhoff.

1876-1899 Telefonia.

1887-1907 Telegrafia sem fio - Marconi, Popov e Landell.

- 1904-1920 Eletrônica aplicada a rádio e telefonia. Flamingo - diodo. Lei de Forest e triodo. Primeira estação AM de difusão (*Broadcasting*) KDKA, Pittsburg.
- 1923-1938 Televisão
 - 1931 Serviço de teletipo
 - 1936 Armstrong tornou factível o rádio FM
 - 1937 Alice Reeves redescobriu o PCM, inventado por Rainey em 1926
- 1938-1945 II guerra: radar, microondas, FM, Weiner e Kolmogoroff métodos estatísticos para detecção de sinais
 - 1948 C. E. Shannon publica “*A mathematical Theory of Communications*”
- 1948-1951 Transistor - Banden, Braflain e Shockley
 - 1955 Proposta para comunicação via satélite (Pierce)
 - 1958 Sistemas de transmissão de dados de longa distância
 - 1960 Maiman, primeiro laser
 - 1961 CIs comerciais
 - 1962 Comunicação via satélite
- 1962-1966 Comunicação digital de alta velocidade
 - 1965 Fotos de Marte pela Mariner IV
 - 1970 Fibras ópticas, Redes de computadores, TV a cabo, telefonia móvel, etc.

A comunicação através de sinais elétricos pode ser feita de forma **confiável** e **econômica**. Por exemplo, teleconferência evita o deslocamento de pessoas, Internet, etc.

1.1.1 Sistema de Comunicação

Na Figura 1.1 tem-se a representação de um sistema de comunicação, cujos componentes são:

1. Fonte: onde se origina as mensagens
2. Transdutor de Entrada: converte as mensagens em sinais elétricos, chamado de sinal em banda básica
3. Transmissor: modifica o sinal em banda básica para uma transmissão eficiente

4. Canal: é o meio de comunicação, fio, cabo, fibra, enlace de rádio
 5. Receptor: realiza o processo inverso ao do transmissor.
 6. Transdutor de saída: converte os sinais elétricos para sua forma original
 7. Destino: para quem se destina a mensagem gerada pela fonte
 8. Distorção e Ruído: o canal se parece com um filtro, atenua o sinal e distorce sua forma. Em geral, quanto mais distante estiverem fonte e destino mais atenuado será sinal. A distorção ocorre porque temos atenuações e deslocamentos de fase diferentes por componentes de frequência diferente do sinal. Este tipo distorção é chamada de **distorção linear** e pode ser parcialmente corrigida no receptor por um equalizador com características de ganho e fase complementares à do canal.
- Distorções não lineares: através da atenuação que varia com a amplitude do sinal. Também pode ser corrigida no receptor.
 - Ruído: o sinal também pode ser contaminado por sinais indesejáveis chamados de ruído, que são sinais aleatórios e imprevisíveis originados por causas externas e internas ao canal.
 - Causas externas: canais vizinhos, ruído gerado pelo homem, relâmpagos, etc. Com um cuidado adequado alguns desses ruídos podem ser eliminados
 - Causas internas: movimento “térmico” de elétrons num condutor, difusão e recombinação de portadores em semicondutores. Este ruído nunca é eliminado.

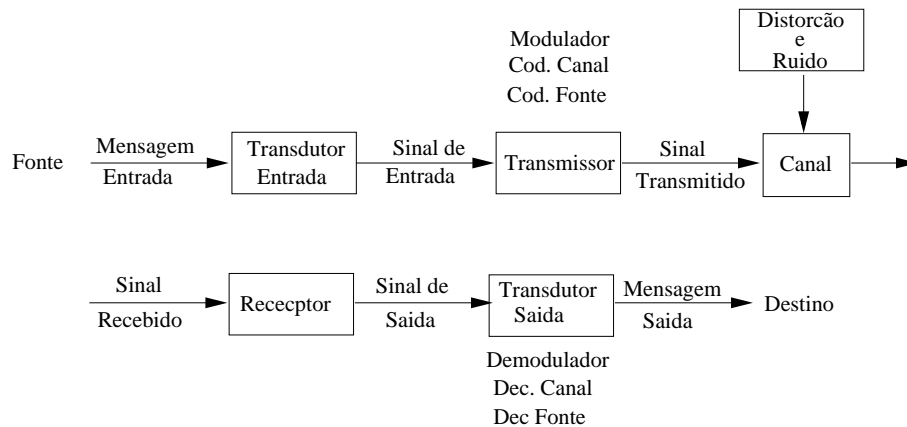


Figura 1.1: Modelo de um Sistema de Comunicação.

Capítulo 2

Unidade Logarítmica

Medir uma grandeza é um processo de comparação com outra grandeza da mesma natureza e que serve de referência, chamada de unidade.

É importante escolhermos unidades coerentes com o que desejamos medir, por exemplo, para medir uma estrada usamos Km e não centímetros, em contrapartida um pedaço de tecido é medido em cm e não em Km .

A medida de potência de sinais elétricos que mais se adapta para telecomunicações é mW . Acontece que mesmo o mW pode não ser conveniente, por exemplo, a potência sonora de uma pessoa pode variar 10.000 para 1 e em casos extremos, esta mesma pessoa gritando, pode-se chegar a variações de 10.000.000 para 1.

Pessoa falando baixo: $0,001\mu W$, pessoa falando normal: $10\mu W$. Essa escala imensa torna pouco prática qualquer medida decimal, problema que pode ser resolvido pelo uso de logaritmos. Por exemplo, uma variação de 1 para 10.000.000 usando logaritmos decimais representa uma variação de 0 para 7. Nas próximas seções usaremos o logaritmo para definir medidas de potência relativa, que serão denominadas de decibéis.

2.1 Potência Relativa

Seja o sistema da Figura 2.1, se $P1$ é a potência de entrada e $P2$ a potência de saída, então o ganho G em decibéis (dB) será

$$G = 10 \log \frac{P2}{P1} dB \text{ quando } P2 > P1$$

caso contrário ($P1 > P2$), ocorre uma perda que é denominada de atenuação (A) que em decibéis será

$$A = 10 \log_{10} \frac{P1}{P2} dB$$

Exercício 1 *Determine os ganhos em dB para as seguintes razões a) 1, b) 2, c) 10, d) 20 e e) 100.*

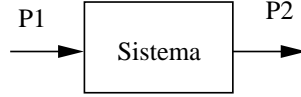


Figura 2.1: Sistema com potência de entrada P1 e de saída P2.

Exemplo 1 Numa linha de transmissão é enviado um sinal de $200mW$. Na outra ponta é recebido um sinal de $5mW$. Qual a atenuação em dB ?

Solução

$$A = 10 \log \frac{P1}{P2} = 10 \log_{10} \frac{200}{5} = 16dB$$

Exemplo 2 Um amplificador tem uma resistência de entrada de 600Ω e uma resistência de carga de 75Ω . Quando a tensão de entrada é de $100mV$ rms a corrente de saída é $20mA$ rms. Ache o ganho em dB .

Solução

$$P1 = (100 \times 10^{-3})^2 / 600 \approx 16,7\mu W$$

$$P2 = (20 \times 10^{-3})^2 \times 75 = 30\mu W.$$

e

$$G = 10 \log \frac{P2}{P1} = 10 \log \frac{3 \times 10^{-3}}{16,7 \times 10^{-6}} \approx 32,6dB$$

Se a entrada e a saída do sistema tem a mesma impedância, então

$$G = 10 \log \frac{P2}{P1} = 10 \log \frac{V_2^2/R}{V_1^2/R} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} dB$$

ou

$$G = 20 \log \frac{I_2}{I_1} dB$$

Outra vantagem do uso da medida logarítmica pode ser vista quando temos vários circuitos em série, como está representado na Figura 2.2.

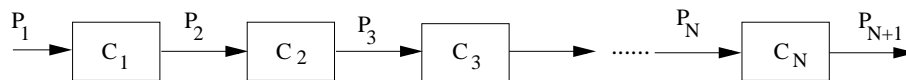


Figura 2.2: Circuitos em série.

O ganho em dB de todo o sistema pode ser expresso como

$$\begin{aligned} G &= 10 \log \frac{P_{N+1}}{P_1} = 10 \log \left(\frac{P_{N+1}}{P_N} \times \frac{P_N}{P_{N-1}} \times \dots \frac{P_2}{P_1} \right) dB \\ &= 10 \log \frac{P_{N+1}}{P_N} + 10 \log \frac{P_N}{P_{N-1}} + \dots 10 \log \frac{P_2}{P_1} \\ &= G_N + G_{N-1} + \dots + G_2 + G_1 \end{aligned}$$

ou seja, o ganho total do sistema é a soma algébrica dos ganhos individuais em dB .

Exemplo 3 *Ao ligarmos em série os circuitos dos exemplos 1 e 2 teremos uma atenuação ou ganho?*

Solução

$$G = G_2 + G_1 = 32,6 - 16 = 16,6dB$$

logo temos um ganho.

O decibel é uma unidade relativa, resulta da comparação entre duas potências. Podemos definir uma unidade absoluta se fixarmos uma das potências como referência. Isto é realizado considerando $P_1 = 1mW$. Desta forma a potência será dada em dBm ou seja

$$P = 10 \log \frac{P_2}{1mW} dBm$$

Para sinais de satélite a potência tomada como referência é $P_1 = 1W$ e a potência resultante é expressa em dBW .

Exemplo 4 *Expresse em dBm os seguintes níveis de potência: (i) $1mW$, (ii) $1W$, (iii) $2mW$, (iv) $100mW$.*

Solução

$$(i) 1mW = 10 \log \frac{1mW}{1mW} dBm = 0dBm$$

$$(ii) 1W = 10 \log \frac{100mW}{1mW} dBm = 30dBm$$

$$(iii) 2mW = 10 \log \frac{2mW}{1mW} dBm = 3dBm$$

$$(iv) 100mW = 10 \log \frac{100mW}{1mW} dBm = 20dBm$$

Exemplo 5 *Calcule (i) $2dBm + 2dBm$ e (ii) $2dBm + 2dB$*

Solução

$$(i) \quad 2dBm = 10 \log \frac{P_1}{1mW} = 10^{0,2}mW \approx 1,6mW,$$

logo

$$2dBm + 2dBm \approx 1,6 + 1,6 = 3,2mW \text{ e}$$

$$3,2mW = 10 \log 3,2 \approx 5dBm \text{ assim}$$

$$2dBm + 2dBm = 5dBm$$

$$(ii) \quad 2dBm + 2dB = 10 \log 1,6 + 10 \log 1,6 = 20 \log 1,6 = 4dBm$$

Aqui vale observar que a potência de entrada P_1 , o ganho g e a potência de saída P_2 de um sistema estão relacionados por

$$P_2 = gP_1$$

logo podemos fazer $P_2/1mW = gP_1/1mW$ e aplicando o logaritmo e multiplicando por 10 ambos os lados obtem-se

$$P_2(dBm) = g(dB) + P_1(dBm)$$

logo pode-se somar dB com dBm diretamente.

Num sistema de transmissão podemos tomar como referência qualquer uma de suas potências, e as medições logarítmicas tomadas a partir da potência de referência são expressas em dBr .

A potência no ponto de referência do sistema é

$$10 \log \frac{P_r}{P_r} = 0dBr$$

e esse ponto é chamado ponto de nível relativo zero.

Exemplo 6 Na linha de transmissão representada na Figura 2.3 foi injetado um tom de teste que tem uma potência de $-5dBm$ no ponto de $0dBr$. Qual o nível de tom nos diversos pontos do sistema.

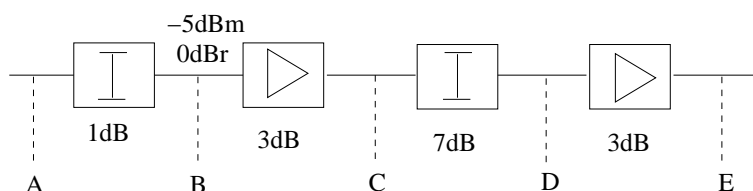


Figura 2.3: Linha de transmissão em série.

Solução

O ponto A é uma atenuação para B , logo:

- Ponto A $1dBr$ e $-4dBm$.
- No ponto C $3dBr$ e $-2dBm$ (ganho)
- No ponto D $-dBr$ e $-9dBm$ (atenuação)
- No ponto E $-1dBr$ e $-6dBm$

Muitas vezes num sistema de transmissão junto com a informação seguem outros sinais para ajudar na recuperação dessa informação no receptor (por exemplo, sinais de sincronismo, frequência piloto).

Em geral esses sinais são medidos em relação à potência do sinal de informação no ponto de referência zero (0 dBr). Essa nova medida é chamada de $dBm0 = dBm - dBr$.

Exemplo 7 *O Sinal piloto tem $-20dBm0$ no sistema de transmissão da Figura 2.3. Qual a potência absoluta nos diversos pontos do sistema para este sinal ?*

Solução

Começando pelo ponto B temos que o sinal piloto tem $-20dBm0$

- B : $0dBr, -20dBm0 \rightarrow -20dBm$ por definição
- A : $1dBr, -19dBm \rightarrow -20dBm0$
- C : $3dBr, -17dBm \rightarrow -20dBm0$
- D : $-4dBr, -24dBm \rightarrow -20dBm0$
- E : $-7dBr, -27dBm \rightarrow -20dBm0$

2.2 Perdas na transmissão e repetidores

Qualquer meio de transmissão tem uma perda de potência, assim $P_{saida} < P_{entrada}$, e essa perda é chamada de atenuação, dada por

$$L = \frac{P_{entrada}}{P_{saida}}$$

ou em dB

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_{entrada}}{P_{saida}}$$

No caso de linhas de transmissão, cabos coaxiais e fibras ópticas e ondas guiadas a potência de saída decai exponencialmente com a distância, ou seja

$$P_{saída} = 10^{-\alpha l/10} P_{entrada}$$

sendo l a distância entre o transmissor e o receptor e α o coeficiente de atenuação dado em dB por unidade de comprimento, em dB tem-se

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_{entrada}}{P_{saída}} = 10 \log_{10} \frac{1}{10^{-\alpha l/10}} = \alpha l$$

A medida que a distância aumenta a atenuação aumenta, portanto, dependendo da distância faz-se necessário colocar amplificador ao longo do caminho para garantir uma determinada potência mínima de saída.

Exemplo 8 *Um cabo de par trançado, utilizado para transmitir um sinal na frequência de 10kHz tem $\alpha = 2\text{dB/Km}$. Considere que o transmissor e o receptor estão separados por 2Km e que a potência de entrada é de 10W. É necessário colocar repetidores nessa linha para garantir uma potência de 1W no receptor?*

Inicialmente vamos calcular a perda para esse enlace, temos que

$$L = \alpha l = 2 \frac{\text{dB}}{\text{Km}} 2\text{Km} = 4\text{dB}.$$

logo

$$P_{saída} = 10^{10^{-L/10}} P_{entrada} = 10^{-0.4} * 10\text{W} = 4\text{W}$$

e essa transmissão não necessitaria de repetidores.

Exercício 2 *Repita o exemplo anterior e caso seja necessário o uso de repetidores indique qual a melhor distância para colocá-los para*

- $\alpha = 3\text{dB/Km}$ – par trançado a 100KHz
- $\alpha = 6\text{dB/Km}$ – par trançado a 300KHz

Exercício 3 *No Exemplo 8 se utilizássemos fibra óptica na frequência de $3.6 \times 10^{14}\text{Hz}$ que tem $\alpha = 0.2\text{dB/Km}$, em qual distância máxima o transmissor e o receptor poderiam ser colocados para que as potência de entrada e saída sejam as mesmas sem que seja necessário utilizar um repetidor.*

Exercício 4 *O que representa uma perda de 3dB em termos de diminuição na potência de entrada.*

Exercício 5 *Considerando a resposta do item anterior, o que representa um perda de n dB sendo n um múltiplo de 3?*

2.3 Transmissão de Rádio

As transmissões normalmente podem ser feitas via cabos ou pelo espaço livre (chamada de transmissão via rádio). Quando a transmissão é feita via cabos e a distância entre o transmissor e o receptor é grande, normalmente o sinal enviado tem que ser regenerado via repetidores no meio do caminho. Transmissão via rádio pode reduzir o número de repetidores e eliminar a necessidade de cabos longos. Vamos examinar as perdas na transmissão para propagação com visada direta (aquela em que o sinal enviado pela antena transmissora atinja a antena receptora sem a necessidade de um repetidor), como mostrado na Figura 2.4. Este método de propagação é empregado para longas distâncias utilizando frequências acima de 100MHz.

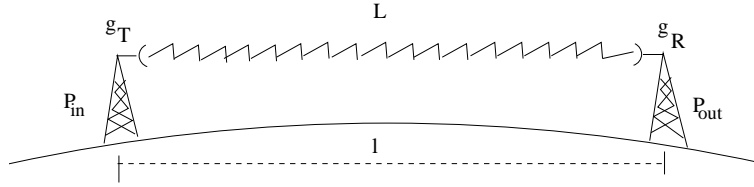


Figura 2.4: Transmissão no espaço livre.

A perda no espaço livre é devida à dispersão esférica da onda de rádio e é dada por

$$L = \left(\frac{4\pi l}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{4\pi f l}{c} \right)^2$$

sendo λ o comprimento de onda, f a frequência do sinal e c a velocidade da luz.

Se l for expresso em Km e f em Giga Hertz ($10^9 Hz$) então

$$L_{dB} = 92,4 + 20 \log f_{GHz} + 20 \log l_{Km}$$

Note que as perdas crescem com o logaritmo de l , assim dobrar a distância implica em aumentar as perdas em $6dB$.

As antenas direcionais tem um efeito de foco que funciona como um amplificador de forma que

$$P_{out} = \frac{g_T g_R}{L} P_{in}$$

sendo g_T e g_R os ganhos das antenas no transmissor e no receptor respectivamente.

Estes ganhos dependem da área de abertura efetiva A_e da antena,

$$g = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} = \frac{4\pi A_e f^2}{c^2}$$

O valor da área efetiva de uma antena corneta, o prato, é aproximadamente igual a sua área física, parabólicas podem ter ganhos de até $60dB$.

Exemplo 9 Seja o sistema de retransmissão por satélite, mostrado na Figura 2.5. O satélite está a aproximadamente 40.000Km de cada estação terrestre, o sinal a ser retransmitido tem frequência de 6GHz. As antenas terrestres tem os ganhos de $g_{Tu} = 70dB$ para o enlace de subida e de $g_{Rd} = 50dB$ para o enlace de descida. No satélite a antena receptora tem $g_{Ru} = 30dB$ e $g_{Td} = 30dB$. O amplificador no satélite dá um ganho de $g_{amp} = 80dB$ e a potência de entrada $P_{in} = 100W = 50dBm$. Calcule as perdas e a potência de saída P_{out}

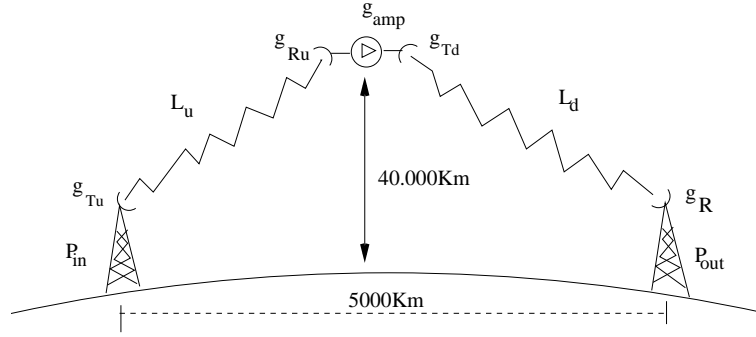


Figura 2.5: Enlace de satélite.

Solução

Temos que $L_{dB} = 92,4 + 20 \log f_{GHz} + 20 \log l_{Km}$ representando a perda no espaço livre, as perdas nos enlaces são iguais e dadas por

$$L_u = L_d = 92,4 + 20 \log 6 + 20 \log 40.000 = 200dB$$

assim a perda total é dada por

$$\begin{aligned} L &= -g_{Tu} + L_u - g_{Ru} - g_{amp} - g_{Td} + L_d - g_{Rd} \\ &= -70 + 200 - 30 - 80 - 30 + 200 - 50 = 140dB \end{aligned}$$

$$P_{out} = -L + P_{in}(dBm) = -140 + 50dBm = -140dB$$

e

$$P_{out} = 10^{-90/10} \times 1mW = 10^{-9}mW$$

Esses valores são típicos de satélite.

Capítulo 3

Análise de Sinais

Estamos acostumados a analisar sinais via sua especificação no tempo, porém nesse capítulo vamos mostrar que é possível analisar um sinal no domínio da frequência. Vamos mostrar que qualquer sinal que pode ser produzido em laboratório pode ser expresso como uma soma de senóides de várias frequências.

Cada sinal tem um “espectro” de frequências (amplitudes e fases) e é univocamente especificado por esse espectro. Para cada característica observada no domínio do tempo existe uma correspondente no domínio da frequência, portanto tem-se a dualidade Sinal (domínio do tempo) \Leftrightarrow Sinal (domínio da frequência).

A nossa análise começa na próxima seção pela representação de sinais periódicos pela soma de senóides, conhecida como série de Fourier.

3.1 Representação de Sinais Periódicos por Séries de Fourier

Um sinal $g(t)$ (t será a variável usada para representar o tempo) é dito ser periódico se $g(t) = g(t + T_0)$ sendo $T_0 \neq 0$. O menor valor de T_0 que satisfaz essa relação é chamado de **período** e a frequência com que o sinal se repete é dada por $f_0 = 1/T_0$. Para satisfazer a propriedade acima o sinal deve começar em $t = -\infty$ e continuar até $t = \infty$. Na Figura 3.1 tem-se um sinal periódico com período $T_0 = Tms$.

Como foi dito, vamos representar um sinal $g(t)$ periódico por uma soma de senóides, ou seja:

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0 + a_1 \cos 2\pi f_0 t + a_2 \cos 2(2\pi f_0 t) + \dots + a_k \cos k(2\pi f_0 t) \\ &+ b_1 \sin 2\pi f_0 t + b_2 \sin 2(2\pi f_0 t) + \dots + b_k \sin k(2\pi f_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k [(a_n \cos n(2\pi f_0 t) + b_n \sin n(2\pi f_0 t))] \end{aligned} \quad (3.1)$$

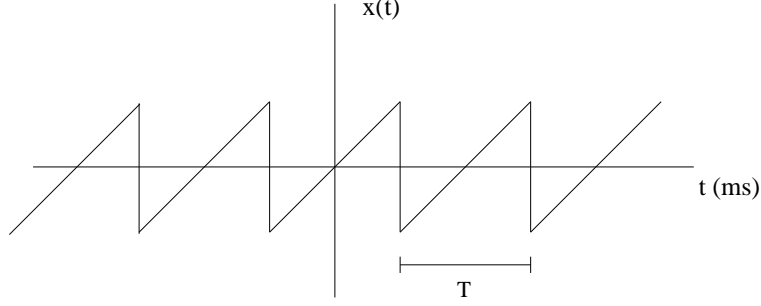


Figura 3.1: Representação de um Sinal Periódico.

se $g(t)$ é periódico, temos $f_0 = 1/T_0$ ou $T_0 = 1/f_0$ logo

$$\begin{aligned}
 g(t + T_0) &= a_0 + \sum_{n=1}^k [(a_n \cos n(2\pi f_0(t + T_0)) + b_n \sin n(2\pi f_0(t + T_0))] \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^k [(a_n \cos(2n\pi f_0 t + 2\pi n) + b_n \sin(2n\pi f_0 t + 2\pi n)] \\
 &= g(t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se variarmos os a_n e b_n podemos construir uma variedade de sinais periódicos e o inverso deste resultado também é verdadeiro, ou seja, qualquer sinal periódico com período T_0 pode ser expresso como uma soma de senóides de frequências f_0 e todos os múltiplos inteiros de f_0 .

A frequência f_0 é chamada de **frequência fundamental** e a frequência nf_0 a **n -ésima harmônica**. Por conveniência fazemos $\omega_0 = 2\pi f_0$ e $k \rightarrow \infty$ para obter

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)] \tag{3.3}$$

Se temos $g(t)$ e queremos determinar os a_n e b_n , devemos observar que

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ T_0/2 & \text{se } k = n \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ T_0/2 & \text{se } k = n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \tag{3.6}$$

Integrando ambos os lados de 3.3 obtemos

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) dt \quad (3.7)$$

agora multiplicando ambos os lados de 3.3 por $\cos k\omega_0 t$ e integrando sobre um período $(t_0, t_0 + T_0)$ temos

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (3.8)$$

da mesma forma se multiplicarmos 3.3 por $\sin k\omega_0 t$ e integrarmos obtemos

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (3.9)$$

A Equação 3.3 pode ser escrita de uma forma mais compacta e mais significativa:

$$g(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O quadrante em que θ_n se encontra é dado pelos sinais de b_n e a_n , observe que para determinação do quadrante

$$\tan^{-1} \frac{-1}{-1} \neq \tan^{-1}(1)$$

Da Equação 3.10 podemos dizer que a n -ésima harmônica

$$C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

tem amplitude C_n que é sempre positiva e fase θ_n . Dessa forma podemos desenhar (mais facilmente) um gráfico que represente o espectro de amplitudes ($C_n \times \omega$) e o espectro de fase ($\theta_n \times \omega$).

Ainda tem-se as seguintes considerações

1. Se $g(t)$ for uma função par, todos os $b_n = 0$
2. Se $g(t)$ for uma função ímpar, todos os $a_n = 0$
3. A integração para calcular os coeficientes que ficam só precisa ser realizada na metade do período

Exemplo 10 *Determine a série de Fourier para um trem de pulsos retangular $k(t)$ mostrado na Figura 3.2.*

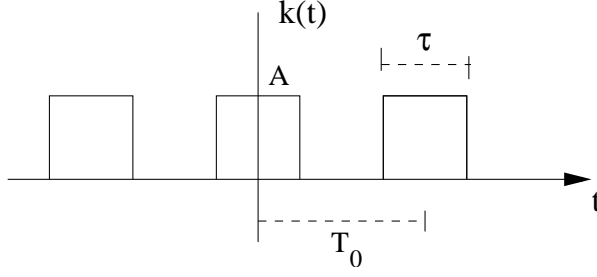


Figura 3.2: Trem de Pulsos Retangular.

Solução do exemplo

Sendo $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ escolheremos o período de integração de $-T_0/2$ a $T_0/2$ assim

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} k(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_0} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos n\omega_0 t dt = \frac{2A\tau}{T_0 n \omega_0} \sin n\omega_0 t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{2A}{T_0 \frac{2\pi}{T_0} n} (\sin n\omega_0 \tau/2 - \sin n\omega_0 (-\tau/2)) \\ &= \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\pi\tau}{T_0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

e $b_n = 0$ (**Por que?**).

Como,

$$k(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3.14)$$

tem-se $C_n = a_0 = \frac{A\tau}{T_0}$ e $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a_n^2} = a_n$ logo $C_n = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$ e $\theta_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = -\tan^{-1} 0 = 0$ donde

$$k(t) = \frac{A\tau}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\pi\tau}{T_0} \cos n\omega_0 t \quad (3.15)$$

Se $\tau = T_0/2$ temos um trem de pulsos quadrados e $C_0 = \frac{AT_0/2}{T_0} = \frac{A}{2}$ e

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\pi T_0/2}{T_0} = \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{2A}{\pi n} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos n\omega_0 t \\
&= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

observe que as harmônicas 3, 7, 11 ... tem sinais negativos, como explicar esse fato?

A fase é π e $-\pi$, por exemplo a terceira harmônica $\frac{2A}{3\pi} \cos(3\omega_0 t - \pi)$ ou $\theta_3 = -\tan^{-1} \left(\frac{0}{-2A/3} \right) = -\pi$.

Quando $b_n = 0$ podemos dizer que existem amplitudes negativas com fases iguais a zero. Nesse caso precisamos apenas do espectro de amplitudes representado na Figura 3.3.

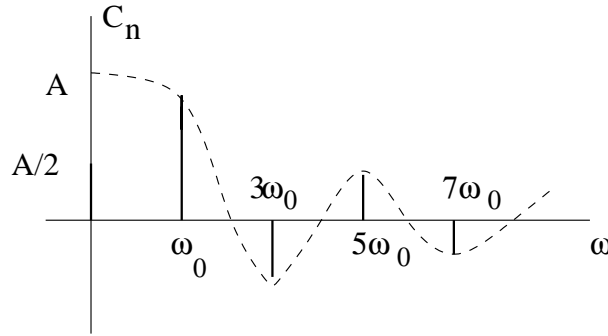


Figura 3.3: Espectro de Amplitudes para $\tau = T_0/2$.

Se fixarmos $\tau = T_0/5$ temos $C_0 = A/5$ e $C_n = \frac{2A}{\pi n} \sin \left(\frac{n\pi}{5} \right)$ $\theta_n = 0$.

Observe que o gráfico de amplitudes é discreto e nos pontos $\pm \frac{\tau}{2} \pm nT_0$ o sinal é descontínuo. Nesses pontos a série de Fourier tende para metade da amplitude da descontinuidade.

Por exemplo, a onda quadrada é caracterizada pela equação

$$k(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t \dots \right) \tag{3.18}$$

observando a descontinuidade em $t = \tau/2$ tem-se

$$\begin{aligned}
k\left(\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi \tau}{T_0} \frac{\tau}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{6\pi \tau}{T_0} \frac{\tau}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{10\pi \tau}{T_0} \frac{\tau}{2} + \dots \right) \text{ como } T_0 = \tau/2 \text{ tem-se} \\
&= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{4} - \frac{1}{3} \cos \frac{6\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{4} + \frac{1}{5} \cos \frac{10\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{4} + \dots \right) \\
&= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

e isso vale para todas as outras descontinuidades.

Um caso interessante é quando $\tau \rightarrow 0$ e $A \rightarrow \infty$ de tal forma que $A\tau = 1$, ou seja, cada pulso se torna um impulso unitário e nosso sinal se transforma num trem de impulsos como mostrado na Figura 3.4.

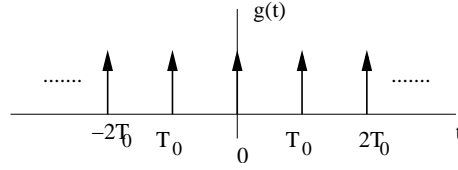


Figura 3.4: Trem de Impulsos.

O resultado anterior continua válido tomando-se os limites apropriados,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_0 t \quad (3.20)$$

como $A\tau = 1$ e $\tau \rightarrow 0$ tem-se

$$C_0 = \frac{A\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2AT_0}{\pi n A\tau T_0} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)}{n\pi\tau/T_0} \\ &= \frac{2}{T_0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

sendo $x = n\pi\tau/T_0$ quando $\tau \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$. Aplicando a regra de L'Hôpital tem-se

$$C_n = \frac{2}{T_0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{2}{T_0} \quad (3.23)$$

donde

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} [1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \dots)] \quad (3.24)$$

o espectro de frequências $C_n \times \omega$ terá o formato representado na Figura 3.5. Observe que a componente DC tem amplitude $1/T_0$.

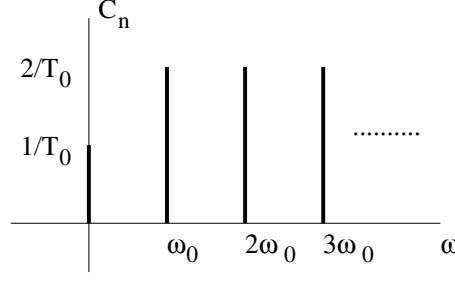


Figura 3.5: Espectro do Trem de Impulsos.

3.2 Série Exponencial de Fourier

Senos e cossenos podem ser expressos por exponenciais complexas, da seguinte forma

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \text{ e } \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (3.25)$$

logo usando essa representação podemos escrever a série de Fourier em termos de exponenciais complexas

$$\begin{aligned} g(t) &= G_0 + G_1 e^{j\omega_0 t} + G_2 e^{j\omega_0 t} + \dots + G_{-1} e^{-j\omega_0 t} + G_{-2} e^{-j\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T_0$.

Os coeficientes G_k da série podem ser obtidos multiplicando ambos os lados da Equação 3.26 por $e^{-jk\omega_0 t}$ e integrando sobre um período

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T_0} G_n e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

mas

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ T_0 & n = k \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= G_k T_0 \\ G_k &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.27)$$

A Equação 3.26 é chamada de série exponencial de Fourier para representar sinais periódicos. O parâmetro t_0 é arbitrário e se for escolhido com algum critério pode simplificar a integração em 3.27.

A série trigonométrica e a exponencial são duas maneiras diferentes de escrever a mesma coisa. Daí pode-se afirmar que

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= G_0 \\ a_n &= G_n + G_{-n} \\ b_n &= j(G_n - G_{-n}) \end{aligned} \right\} n \neq 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \text{ e} \\ G_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se $g(t)$, a_n e b_n são reais $G_{-n} = G_n^*$ (G_n^* é o conjugado de G_n), assim se

$$\begin{aligned} G_n &= |G_n| e^{j\theta_n} \\ G_{-n} &= |G_n| e^{-j\theta_n} \end{aligned}$$

sendo $|G_n|$ a amplitude e θ_n é a fase de G_n . Então para $g(t)$ real $|G_{-n}| = |G_n|$ e o espectro de amplitude $G_n \times \omega$ é uma função par, do mesmo modo o espectro de fase $\theta_n \times \omega$ é um função ímpar pois $\theta_n = -\theta_{-n}$.

Exemplo 11 *Determinar a série de Fourier e desenhar o espectro de frequências do trem de pulsos retangulares.*

Solução:

$$\begin{aligned} k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{-jn\omega_0 t} \text{ onde} \\ K_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \left(\frac{-1}{jn\omega_0} \right) e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{-1}{jn\omega_0} (e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2}) \\ &= \frac{A}{n\omega_0 T_0} \left(\frac{e^{jn\omega_0 \tau/2} - e^{-jn\omega_0 \tau/2}}{2j} \right) \\ &= \frac{A}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi\tau}{T_0} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Comparando com 2.12c

$$C_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T_0}$$

para $\tau = T_0/2$ (trem de pulsos quadrados)

$$K_n = \frac{A}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi T_0}{T_0 2} \right) = \frac{A}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

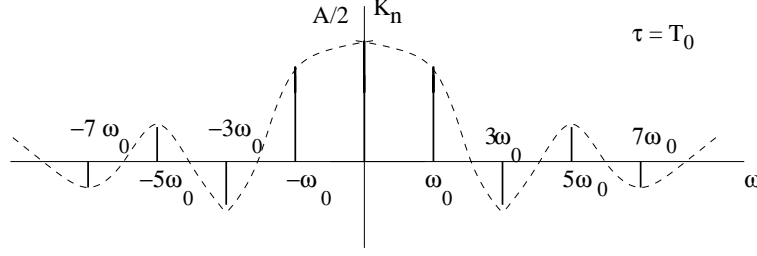


Figura 3.6: Representação de $k_n \times \omega$ para $\tau = T_0$.

a $K_n \times \omega$

Para o caso de $\tau \rightarrow 0$ e $A\tau = 1$

$$K_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)} = \frac{1}{T_0} e$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

comparar com o exemplo anterior.

3.3 Espectro da Série de Fourier Exponencial

Ao analisar as componentes de frequências vemos valores em $0, \pm\omega_0, \pm\omega_0, \dots, \pm\omega_0, \dots$, e pode surgir a questão de como é possível existir frequências negativas?.

Na série exponencial os termos são funções exponenciais complexas e não senóides, e chamamos de um modo não preciso " $n\omega_0$ " como a frequência de sinal $e^{jn\omega_0 t}$ com

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} + G_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

como $G_n = |G_n| e^{-j\theta_n}$ e $G_{-n} = |G_{-n}| e^{-j\theta_n}$

$$\begin{aligned} g(t) &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + |G_n| e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)} \\ &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |G_n| \frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2} \\ &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |G_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$C_0 = G_0 \text{ e } C_n = 2 |G_n| = |G_n| + |G_n^*|$$

Como a série exponencial tem suas vantagens ela será usada no restante do texto. Tratamos até aqui de sinais periódicos idéias que existem de $-\infty < t < \infty$. Quando queremos estender os resultados anteriores para sinais não periódicos usamos a Transformada de Fourier.

3.4 Representação de Sinais não Periódicos: Transformada de Fourier

Vamos inicialmente representar sinais $g(t)$ da Figura 3.7 pelo sinal periódico $g_P(t)$ mostrado na Figura 3.8.

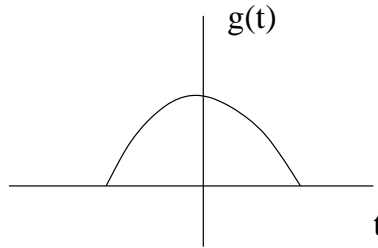


Figura 3.7: Sinal $g(t)$ não periódico.

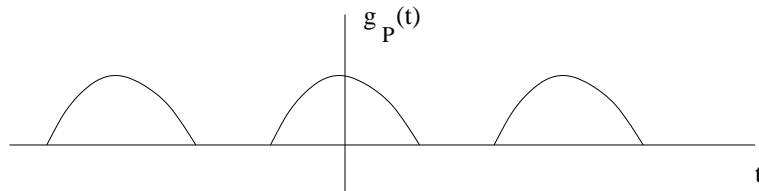


Figura 3.8: Extensão periódica do sinal $g(t)$ não periódico.

$g_P(t)$ é $g(t)$ repetido a cada T_0 segundos. $g_P(t)$ é periódico e pode ser representado pela série exponencial da Fourier. No limite quando $T_0 \rightarrow \infty$ temos

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_P(t)$$

se

$$g_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t}$$

e

$$G_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_P(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.32)$$

e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

A medida que T_0 aumenta ω_0 diminui e o espectro fica mais denso. As componentes G_n também tornam-se menores. A forma do espectro no entanto permanece inalterada. Já vimos isto nos exemplos.

Em $T_0 \rightarrow \infty$ (no limite) cada componente torna-se infinitamente pequena, mas agora existe um número infinito de frequências pois $\omega_0 \rightarrow 0$.

O espectro passa a existir para todo ω e deixa de ser discreto, ou seja é uma função contínua de ω .

Como $T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow 0$ vamos representar ω_0 por $\Delta\omega$.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

de 3.32

$$T_0 G_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \quad (3.33)$$

$T_0 G_n$ é uma função de $n\Delta\omega$, então

$$T_0 G_n = G(n\Delta\omega) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} g_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(n\Delta\omega)}{T_0} e^{jn\Delta\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{G(n\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega \right] e^{jn\Delta\omega t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

No limite $T_0 \rightarrow \infty$, $g_p(t) \rightarrow g(t)$, assim

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_p(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(n\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega e^{jn\Delta\omega t}$$

que por definição é $n\Delta\omega \rightarrow \omega$ e $\Delta\omega \rightarrow d\omega$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

de 3.33 e 3.34

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} G(n\Delta\omega) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Recapitulando

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.36)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.37)$$

A amplitude da componente de frequência ω é proporcional ao $G(\omega)$ e portanto $G(\omega)$ representa o espectro (contínuo) de $g(t)$. As Equações 3.36 e 3.37 são chamadas respectivamente de Transformada inversa de Fourier e Transformada Direta de Fourier.

Simbolicamente $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ e $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$ ou $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$.

A transformada de Fourier é um operador linear, isto é se $g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega)$ e $g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$ então

$$ag_1(t) + bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(\omega) + bG_2(\omega)$$

Se $g(t)$ é uma função real de t então

$$G(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt = G^*(\omega)$$

sendo G^* o conjugado. Portanto se

$$\begin{aligned} G(\omega) &= |G(\omega)| e^{j\theta_g(\omega)} \\ G(-\omega) &= |G(\omega)| e^{-j\theta_g(\omega)} \end{aligned}$$

Isto significa que para $g(t)$ real

$$|G(-\omega)| = |G(\omega)| \quad \text{é par} \quad \theta_g(-\omega) = -\theta_g(\omega) \quad \text{é ímpar}$$

3.5 Comentários Sobre a Transformada de Fourier

Expressamos um sinal $g(t)$ não periódico como uma soma contínua de sinais exponenciais com frequências no intervalo $-\infty \leq \omega \leq \infty$. Amplitude de uma componente é infinitesimal mas proporcional a $G(\omega)$.

Transformada de Fourier é uma ferramenta que representa um sinal como uma soma de componentes exponenciais (eternas). Particularmente interessante quando $g(t)$ só existe num intervalo $a \leq t \leq b$

3.6 Existência da Transformada de Fourier

Nem todas as funções possuem transformada de Fourier, e a condição de existência é que a integral exista no limite quando $T \rightarrow \infty$.

Para a integral convergir é necessário que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (3.38)$$

com isso pode-se garantir a existência da transformada. Entretanto, algumas funções não satisfazem 3.38 e ainda podem ser transformadas.

Pode ser mostrado que se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (3.39)$$

a existência está garantida.

Lembrando que se uma tensão $g(t)$ é aplicada a um resistor de 1Ω , a energia dissipada é dada por

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (3.40)$$

e é definida como a energia de um sinal real $g(t)$. Se um sinal tiver energia finita ele tem Transformada de Fourier.

Exemplo 12 *Pulso exponencial. Qual a transformada de Fourier do pulso exponencial da forma*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Mostrado na Figura 3.9.

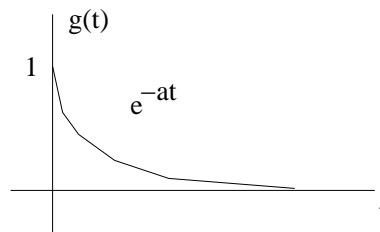


Figura 3.9: Pulso Exponencial.

Solução

Antes de prosseguirmos vamos introduzir a definição da função degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Assim $g(t)$ pode ser definida como

$$\begin{aligned}
 g(t) &= u(t)e^{-at} \\
 G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-at}e^{-j\omega t}dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\
 &= -\frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a+j\omega} \text{ quando } a > 0
 \end{aligned}$$

Na forma polar $G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\theta_g(\omega)}$ tem-se $|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ e $\theta_g(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/a)$ donde se obtêm os gráficos representados na Figura 3.10.

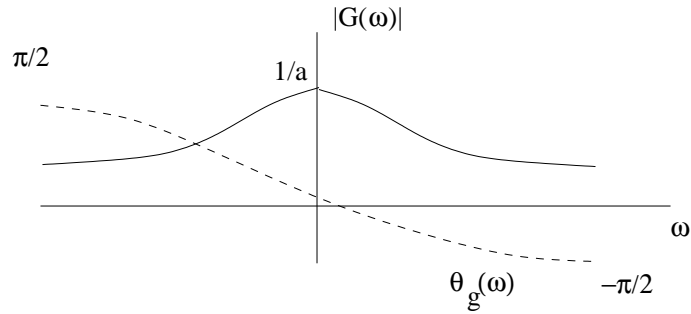


Figura 3.10: Módulo e Fase do Espectro do Pulso Exponencial.

Exemplo 13 Determinar a transformada de Fourier da função porta representada na Figura 3.11 e definida como

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| \geq 1/2 \end{cases}$$

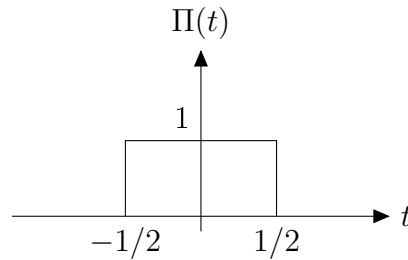


Figura 3.11: Função Porta.

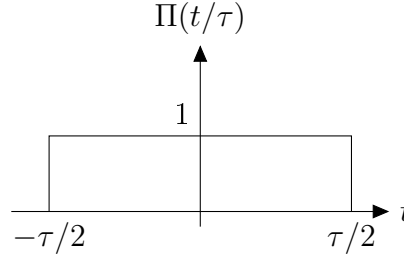


Figura 3.12: Função Porta Expandida.

Com uma função $g(t/a)$ é a função $g(t)$ expandida por um fator $a > 1$ na escala de tempo, $\Pi(t/\tau)$ é a função porta expandida por τ , como está representado na Figura 3.12.

Como

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\tau}\right| < 1/2 \\ 0 & \left|\frac{t}{\tau}\right| > 1/2 \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega}[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}] \\ &= \frac{1}{j\omega}[e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}] \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau/2) \\ &= \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

representada na Figura ??.

A função $\sin(x)/x$, representada na Figura 3.13 tem um papel importante na teoria de comunicações e em geral tem uma forma mais compacta de notação dada por

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (3.44)$$

Assim 3.43 teria a forma

$$\Pi(t/\tau) \leftrightarrow \tau \text{Sinc}(\omega\tau/2\pi).$$

Exemplo 14 Determinar a transformada de Fourier do sinal

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ -1 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

A transformada pode ser obtida facilmente se considerarmos que

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(t)]$$

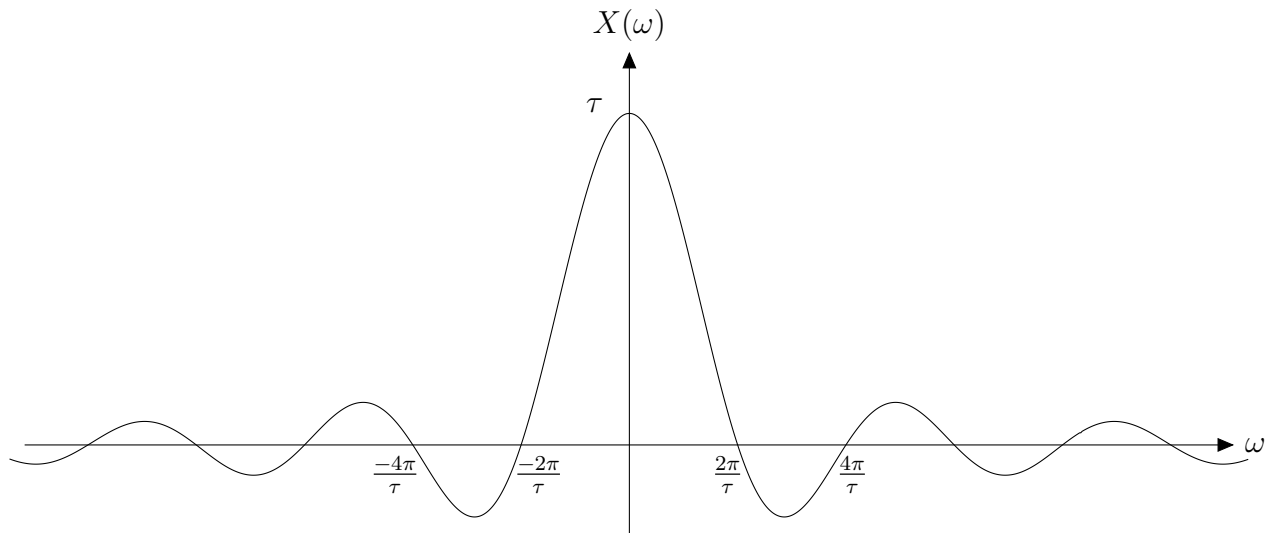


Figura 3.13: Função $Sinc(x)$.

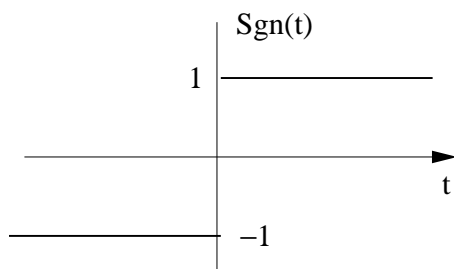


Figura 3.14: Função $Sgn(t)$.

lembrando que

$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Sgn(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-at}u(t) - e^{-at}u(-t)]e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-at}e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{a - j\omega} e^{a-j\omega t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \lim_{\rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}. \end{aligned}$$

Exemplo 15 Determinar a transformada da função impulso unitário $\delta(t)$

Dirac definiu o impulso unitário como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

e $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$. O impulso unitário poder ser considerado com um pulso estreito de área 1 no limite quando sua largura $\epsilon \rightarrow 0$ e sua altura $1/\epsilon \rightarrow \infty$, Figura 3.15.

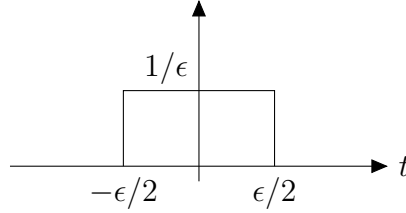


Figura 3.15: Pulso Estreito.

A transformada pode ser obtida facilmente usando a propriedade da amostragem de função impulso, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0) \quad (3.45)$$

sendo que $\phi(t)$ apresenta a restrição de ser contínua no ponto $t = 0$.

Esta propriedade pode ser demonstrada multiplicando $\phi(t)$ pelo pulso da Figura 3.15. O produto $\phi(t)\delta(t)$ é $\phi(0)/\epsilon$ no intervalo $-\epsilon/2 \leq t \leq \epsilon/2$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(0)}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dt = \phi(0)$$

Com argumentos similares

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - t_0) \delta(t) dt = \phi(t_0) \quad (3.46)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - t_1) \delta(t - t_2) dt = \phi(t_2 - t_1) \quad (3.47)$$

Voltando ao exemplo tem-se que

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.48)$$

Exemplo 16 Determine a transformada de Fourier de $g(t) = 1$

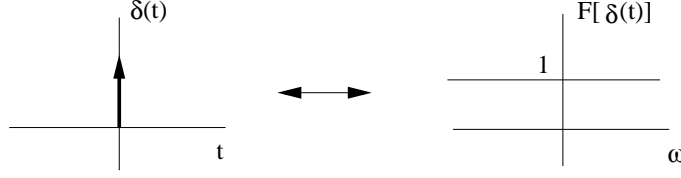


Figura 3.16: Espectro da Função Impulso.

Do exemplo anterior tem-se que

$$G(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1,$$

assim

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

fazendo $\omega = -x$ e $d\omega = -dx$ então

$$2\pi\delta(t) = - \int_{\infty}^{-\infty} e^{-jxt} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jxt} dx \quad (3.49)$$

assim

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

fazendo $t = x$ e comparando com 3.49 temos

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jx\omega} dx = 2\pi\delta(\omega)$$

logo

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega). \quad (3.50)$$

3.7 Algumas Propriedades da Transformada de Fourier

É instrutivo o estudo do efeito que uma ação realizada em um domínio de análise exerce sobre o outro. Por exemplo, se derivarmos um sinal no tempo o que ocorre na frequência? E se o sinal sofrer um atraso no tempo, o que isso implica na frequência?

É fácil verificar que existe uma certa simetria entre os dois domínios, como pode ser observado das equações

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \text{ e } g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.51)$$

É de se esperar que o efeito na frequência de deslocar o sinal tempo seja similar ao efeito no tempo de deslocar o sinal da frequência. Vamos mostrar as propriedades sem demonstrá-las

Simetria ou Dualidade

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega).$$

Com o uso dessa propriedade fica fácil calcular a transformada de Fourier, por exemplo vamos observar o sinal $g(t) = 1$, nesse caso $\delta(t) \leftrightarrow 1$ e $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

Escalonamento

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então para um valor a real e constante

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Dessa propriedade nota-se que $g(at)$ é uma versão comprimida por um fator a de um sinal $g(t)$ e $G\left(\frac{\omega}{a}\right)$ é uma versão expandida por um fator a de $G(\omega)$. Logo conclui-se que compressão no domínio do tempo implica em expansão no domínio da frequência e vice-versa.

Deslocamento no Tempo

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$g(t - t_0) \leftrightarrow G(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Este resultado diz claramente que um deslocamento no tempo de t_0 deixa o espectro de magnitude inalterado, mas o espectro de fase ganha um termo adicional $-\omega t_0$.

Deslocamento na Frequência

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$g(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow G(\omega - \omega_0).$$

O resultado acima mostra que um deslocamento do sinal em frequência é equivalente a multiplicar o sinal no tempo por $e^{j\omega_0 t}$. Dito de outra forma: se multiplicarmos um sinal $g(t)$ por um fator $e^{j\omega_0 t}$ isso translada todo o espectro $G(\omega)$ por ω_0 .

Nos sistemas de comunicação, geralmente é desejável transladar o espectro de frequência. Isto é realizado multiplicando-se $g(t)$ por um sinal senoidal. Este processo é chamado de **modulação** e pode ser visto como

$$g(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [g(t)e^{j\omega_0 t} + g(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

usando a propriedade acima, segue

$$g(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \quad (3.52)$$

como está representado na Figura 3.17.

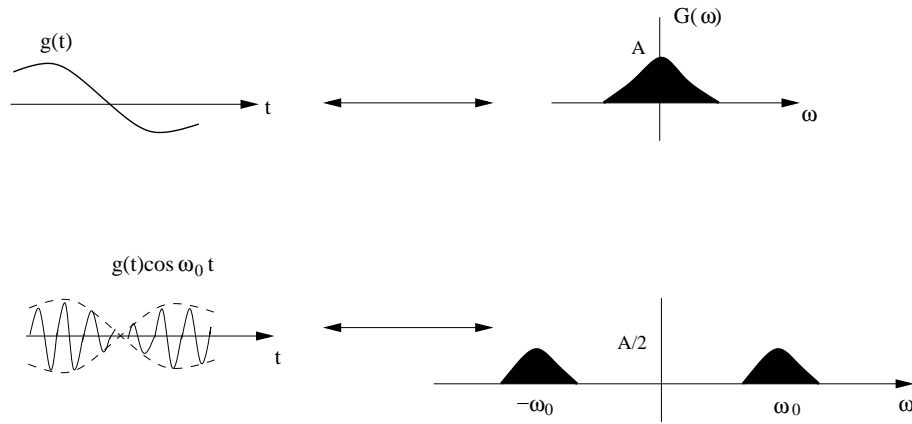


Figura 3.17: Deslocamento do Espectro.

Exemplo 17 *Determine a transformada de Fourier de um sinal $g(t)$ periódico qualquer*

Lembrando que se $g(t)$ for periódico ele pode ser representado por uma série exponencial de Fourier

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t}$$

sendo $\omega_0 = 2\pi/T_0$, logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[G_n e^{jn\omega_0 t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] \end{aligned}$$

que é a transformada de 1 deslocada de $n\omega_0 t$, logo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \delta(\omega - n\omega_0).\end{aligned}\quad (3.53)$$

Exemplo 18 *Determine a transformada de Fourier de um trem de pulsos unitários*

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

Usando o resultado do exemplo anterior substituindo G_n por $1/T_0$, lembrando que $g(t)$ é um sinal periódico qualquer, então:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) &\leftrightarrow \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &\leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}\quad (3.54)$$

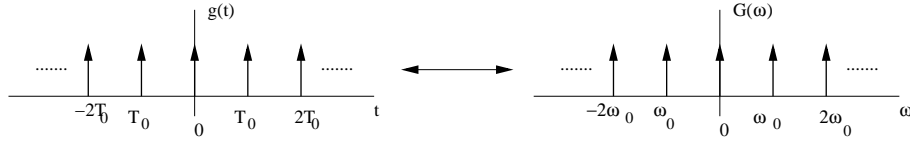


Figura 3.18: Transformada de Fourier de um trem de impulsos.

Diferenciação e Integração no Tempo

Se $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ então

$$\frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega G(\omega)$$

e

$$\int_{-\infty}^t g(x) dx \leftrightarrow \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0) \delta(\omega) \quad (3.55)$$

Intuitivamente estes resultados mostram que a diferenciação melhora as componentes de mais alta frequência e a integração atenua estas mesma componentes, o que está de acordo com o sinal no domínio do tempo, derivar acentua variações no tempo e integrar suaviza as variações no tempo.

Esta propriedade é importante para obtermos a transformada de Fourier de alguns sinais contínuos por partes.

Diferenciação em Frequência

Se $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ então

$$-j\omega g(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} G(\omega) \quad (3.56)$$

Teorema da Convolução

Dados dois sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$ a convolução destes sinais é definida como

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(t-x)dx \quad (3.57)$$

pode-se verificar que

$$g_1(t) * g_2(t) = g_2(t) * g_1(t). \quad (3.58)$$

Teorema da convolução no tempo e na frequência, se

$$g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega)$$

e

$$g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$$

então

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega) \text{ convolução no tempo} \quad (3.59)$$

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega) * G_2(\omega) \text{ convolução na frequência} \quad (3.60)$$

A propriedade da convolução é uma das ferramentas mais poderosas na análise de Fourier. Ela facilita a obtenção de resultados importantes na teoria das comunicações, por exemplo o teorema da amostragem.

Interpretação Gráfica

O cálculo da convolução não é mais difícil que o cálculo de uma integral comum quando as duas funções são contínuas para todo t . Acontece que em alguns casos uma das (ou ambas) funções envolvidas é definida por partes, e nesse caso uma interpretação gráfica da convolução é bastante útil.

Temos da Equação 3.57 que

$$g(t) = g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(t-x)dx$$

note que a função resultante da convolução é função do tempo, assim como as funções envolvidas. Na integral t é a variável independente e x é a variável muda.

Sejam as funções como mostradas na Figura 3.19.

A função $g_1(x)$ é a mesma função que $g_1(t)$ trocando t por x . Para construirmos $g_2(t-x)$ primeiro construímos $g_2(-x)$, Figura 3.20. Em seguida deslocamos a função $g_2(-x)$ de t obtendo a função da Figura 3.21.

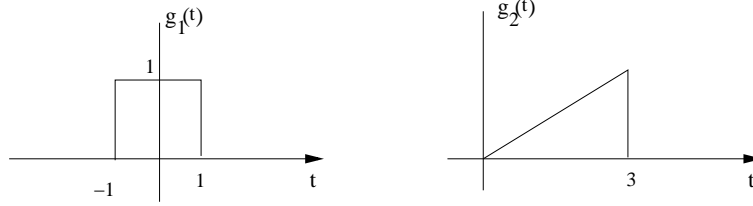


Figura 3.19: Funções $g_1(t)$ e $g_2(t)$ a serem convoluídas.

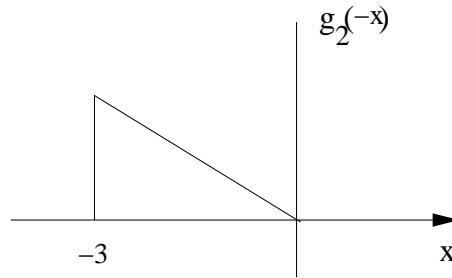


Figura 3.20: Funções $g_2(-x)$.

Fazemos então o produto de $g_1(x)$ por $g_2(t - x)$ e tomamos a área definida por este produto, como mostrado na Figura 3.22.

Aqui temos o cálculo da convolução no ponto t . Variando t de $-\infty$ a ∞ e fazendo os cálculos da área resultante para cada t , contruímos assim a função $g(t) = g_1(t) * g_2(t)$ mostrada na Figura 3.23.

Exemplo 19 *Convolução de uma função com um impulso*

$$g(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - x) dx = g(t)$$

ou de outra forma $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ e $\delta(t) \leftrightarrow 1$ donde $g(t) * \delta(t) = g(t)$. Este resultado também é óbvio graficamente.

3.8 Teorema de Parseval

A propriedade da convolução em frequência nos diz que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\mu) G_2(\omega - \mu) d\mu$$

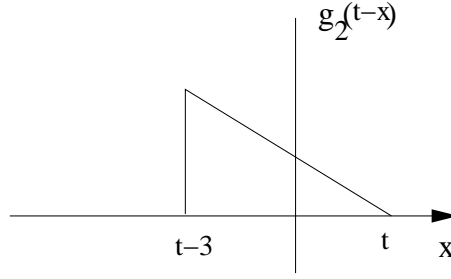


Figura 3.21: Funções $g_2(t-x)$.

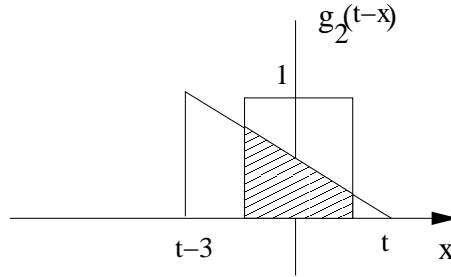


Figura 3.22: Cálculo da Convolução.

tomando $\omega = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\mu)G_2(-\mu)d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2(-\omega)d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(-\omega)G_2(\omega)d\omega
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Se $g(t) = g_1(t) = g_2(t)$ então

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G(-\omega)d\omega$$

Se $g(t)$ for real, $G(-\omega) = G^*(\omega)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

3.8.1 O Sinal de Energia

Seja $g(t)$ real, a sua energia E_g é definida

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$$

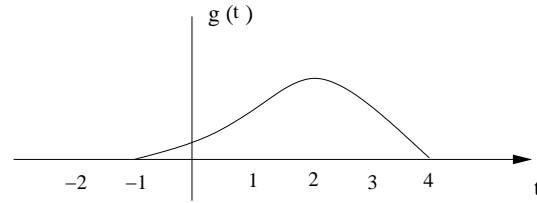


Figura 3.23: Resultado da Convolução.

e este conceito só é válido se E_g for finita.

Sinais com E_g finita são chamados de sinais de energia. Como foi dito, esta é uma condição suficiente para existência da transformada de Fourier.

Do Teorema de Parseval

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega.$$

3.9 Exercícios

Exercício 6 *Quais os coeficientes de Fourier (série) para o sinal*

$$s(t) = d \cos \omega t + e \sin \omega t$$

Exercício 7 *Na Equação 3.3 considere $a_0 = 1$ e $a_n = b_n = 1$, $n = 1, \dots, k$ e que o somatório vai de 1 até k . Atribua valores a k e desenhe para cada um desses valores a função $g(t)$ obtida. Como se comporta o sinal obtido a medida de k aumenta?*

Exercício 8 *Encontre a série exponencial de Fourier para o sinal $s(t) = d \cos \omega t + e \sin \omega t$ e desenhe os espectros de amplitude e fase*

Exercício 9 *Mostre que $g(t - t_0) + g(t + t_0) \leftrightarrow 2G(\omega) \cos \omega t_0$*

Capítulo 4

Transmissão de Sinais

Durante a propagação entre o transmissor e o receptor o sinal é alterado pelo meio em que ele se propaga. Neste capítulo vamos discutir os efeitos das características desse meio de transmissão sobre o sinal.

4.1 Transmissão sem Distorção Através de Sistemas Lineares

Vamos estudar o que acontece com um sinal quando ele é transmitido entre dois pontos, denominados de transmissor e receptor, através de um meio físico denominado de canal de comunicação, como está representado na Figura 4.1.

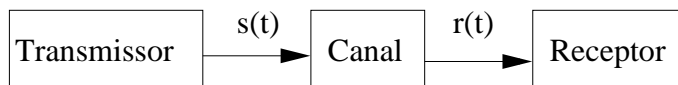


Figura 4.1: Representação Simplificada de um Sistema de Comunicações.

O sinal enviado $s(t)$ se propagará pelo canal de comunicação e estará sujeito à interferências impostas pelo canal. Sendo $F[\]$ a função que descreve o comportamento do canal, a relação da entrada com a saída será

$$r(t) = F[s(t)].$$

A determinação da função $F[\]$ é um dos grandes problemas em telecomunicações.

Inicialmente vamos analisar o canal de comunicações como um sistema linear, lembrando que um sistema desse tipo deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. a resposta a uma soma de excitações é igual a soma das respostas das excitações tomadas individualmente, ou seja, se a entrada for dada por

$$s(t) = \sum_k a_k s_k(t)$$

sendo os a_k constantes, então a saída será dada por

$$r(t) = \sum_k a_k F[s_k(t)];$$

2. as relações entre a entrada e a saída são invariantes, ou seja,

$$F[s(t - t_d)] = r(t - t_d).$$

A primeira condição é o princípio da superposição, enquanto a segunda implica que os elementos do sistema não variam com o tempo.

Dessa forma podemos ver o canal de comunicação como o sistema linear da Figura 4.2, o sinal $s(t)$ é processado de acordo com as características do sistema ($h(t)$) para produzir $r(t)$.

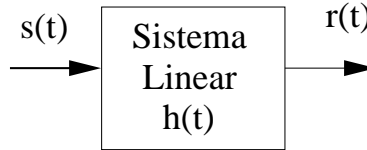


Figura 4.2: Sistema Linear.

Se $H(\omega)$ é a função de transferência do sistema linear, então

$$r(t) = s(t) * h(t)$$

ou pela propriedade da transformada de Fourier da convolução

$$R(\omega) = S(\omega)H(\omega)$$

colocando na forma polar

$$\begin{aligned} R(\omega) &= |S(\omega)| e^{j\theta_s(\omega)} |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} \\ &= |S(\omega)| |H(\omega)| e^{j[\theta_s(\omega) + \theta_h(\omega)]}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ou seja

$$\begin{aligned} |R(\omega)| &= |S(\omega)| |H(\omega)| \\ \theta_R(\omega) &= \theta_S(\omega) + \theta_H(\omega) \end{aligned}$$

e algumas questões importantes podem ser colocadas neste instante:

1. que relações devem existir entre $|H(\omega)|$, $\theta_h(\omega)$ e $|G(\omega)|$ e $\theta_g(\omega)$ para preservar a forma de onda do sinal de entrada na saída
2. que filtro é obtido na forma de onda da saída em comparação com a entrada pelas variações de $|H(\omega)|$?

3. o mesmo para $\theta_h(\omega)$

4. como a distorção do sinal está relacionada com a largura de faixa do sistema?

Iniciemos pela primeira questão, pois nos sistemas de comunicação queremos sempre minimizar as distorções causadas pelas imperfeições do canal, e no caso ideal obter uma transmissão sem distorção.

Uma transmissão é dita sem distorção se a entrada e a saída tem a mesma forma de onda, possivelmente escalonada (multiplicada por um fator k que pode atenuar ou amplificar o sinal)¹. Como o sinal levará um tempo para atingir a saída do sistema, será incluindo um atraso, porém uma transmissão que inclua um atraso na saída e que mantenha a forma de onda de entrada ainda é considerada sem distorção.

Assim, para uma transmissão sem distorção

$$r(t) = ks(t - t_d)$$

sendo t_d um atraso que não altera a forma de onda do sinal transmitido. Pela propriedade do deslocamento

$$\begin{aligned} R(\omega) &= kS(\omega)e^{-j\omega t_d} \\ &= ke^{-j\omega t_d}S(\omega) = H(\omega)S(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

logo

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}.$$

Fazer $|H(\omega)| = k$ implica que todas as componentes de frequência devem sofrer a mesma atenuação ou amplificação.

Além disso deve-se ter $\theta_H(\omega) = -\omega t_d$ e isto quer dizer que a fase é proporcional a ω , de forma que todas as componentes de frequência sofram o mesmo atraso t_d ($\cos \omega(t - t_d) = \cos(\omega t - \omega t_d)$).

Dessa forma, para uma transmissão sem distorção o módulo e a fase de $H(\omega)$ devem ter o formato mostrado na Figura 4.3, e como já foi dito, sistemas reais são no máximo uma aproximação dos sistemas sem distorção.

Exemplo 20 Determinar a função de transferência $H(\omega)$ e desenhar $|H(\omega)|$ e $\theta_h(\omega)$ de um circuito RC mostrado na Figura 4.4. Para transmitir sem distorção, que restrição devemos impor na largura de faixa de $g(t)$? Qual é o atraso de transmissão? Ache $y(t)$ quando $g(t) = A \cos 100t$.

¹Vale observar que em um canal de comunicações, sempre ocorrerá a atenuação do sinal

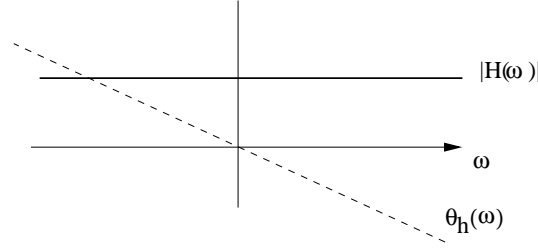


Figura 4.3: Módulo e fase da função $H(\omega)$ que não distorce o sinal de entrada.

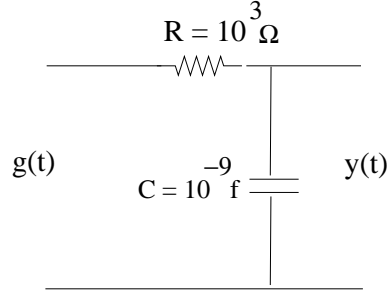


Figura 4.4: Circuito RC.

Solução

Para o circuito da Figura 4.4 tem-se

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{Z_c}{Z_R + Z_c} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{(jR\omega C + 1)} \\ &= \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{a}{a + j\omega} \end{aligned}$$

sendo $a = 1/RC = 10^6$. Assim, na forma polar tem-se

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{e} \quad \theta_h(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}.$$

Quando $\omega \ll a$ pode-se dizer que $|H(\omega)| \approx 1$ e $\theta_h(\omega) \approx -\omega/a$, ou que temos uma transmissão sem distorção, quase ideal. Por exemplo, para $\omega < 0,2a$, $|H(\omega)|$ desvia 2% de um e $\theta_h(\omega)$ de 1,5% do ideal.

Então para um sinal de largura de faixa $B \ll \frac{a}{2\pi} Hz$ a transmissão é praticamente sem distorção. Os valores de B dependem da quantidade de distorção que pode ser tolerada. Para $\omega = 0,2a$ ou $2\pi B = 200.000$ $B \approx 31.847 Hz$ temos uma distorção desprezível.

O atraso t_d é dado por

$$t_d = \frac{d\theta_h(\omega)}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

No caso ideal $\theta_h(\omega) = -\omega t_d \approx -\omega/a$ e $t_d \approx 1/a = RC = 10^{-6}$.

Para uma entrada $A \cos 100t$, com $100 \ll 10^6$

$$y(t) = A \cos 100(t - 10^{-6}) = A \cos(100t - 10^{-4})$$

Na prática, variações de $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ do valor de $|H(\omega)|$ são consideradas toleráveis, e o intervalo de frequência no qual $|H(\omega)|$ permanece dentro desta variação (3dB) é chamado de largura de faixa do sistema (filtro). No nosso exemplo $|H(\omega)| = 0,707$ em $\omega RC = 1$. Nesta faixa de frequências θ_h varia de 0,215 radianos em relação a sua característica linear ideal.

4.1.1 Filtros Ideais

Filtros ideais permitem transmissão sem distorção de uma certa faixa de frequências e comprime todas as outras. Na Figura 4.5 tem-se o módulo e a fase de um filtro passa-baixas ideal. As frequências abaixo $2\pi B$ passam sem distorção e todas as componentes acima de $2\pi B$ são suprimidas.

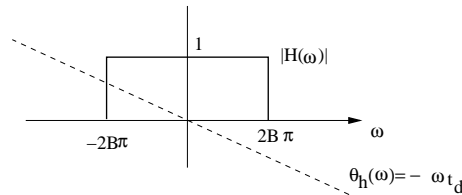


Figura 4.5: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa baixas.

Pode-se ainda ter um filtro ideal passa altas, representado na Figura 4.6 ou um filtro passa faixa ideal, representado na Figura 4.7.

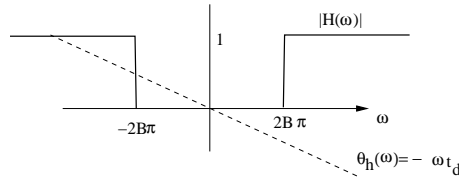


Figura 4.6: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa altas.

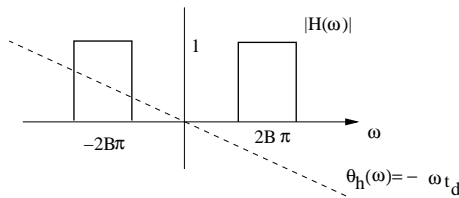


Figura 4.7: Módulo e fase do espectro de um filtro ideal passa faixa.

A função $h(t)$ para o filtro passa baixas ideal, também chamada resposta a um impulso unitário, é dada por $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) e^{-j\omega t_d}$$

sendo

$$\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi B/2 \\ 0 & |\omega| > 4\pi B/2 \end{cases}$$

logo $h(t) = 2BSinc[2B(t - t_d)]$, representada na Figura 4.8.

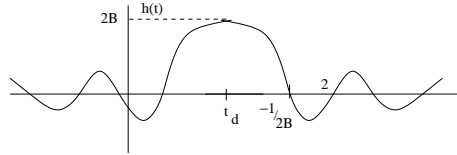


Figura 4.8: Filtro passa baixas ideal no domínio do tempo.

Pelo resultado acima tem-se que $h(t)$ existe para $t < 0$. Isto é um resultado bastante estranho considerando que $h(t)$ é a resposta a um impulso aplicado em $t = 0$, ou seja, a resposta aparece antes da entrada ser aplicada.

Infelizmente nenhum sistema real exibe essa característica profética (de prever que uma determinada excitação vai ocorrer). Donde conclui-se que um filtro ideal apesar de ser desejável não é fisicamente realizável.

De forma similar podemos mostrar que outros filtros ideais são fisicamente irrealizáveis. Para um sistema ser fisicamente realizável $h(t)$ deve ser causal, isto é, $h(t) = 0$ para $t < 0$.

A função $h(t)$ do filtro ideal pode não ser realizável mas $\hat{h} = h(t)u(t)$ é fisicamente realizável porque é causal. Tal filtro no entanto não é ideal e distorce o sinal limitado em BHz.

Mas se aumentarmos a atraso t_d (teoricamente se $t_d \rightarrow \infty$) teríamos um filtro ideal “realizável”. $\hat{h}(t)$ pode ser uma réplica aproximada de $h(t)$ exceto pelo atraso. O filtro resultante $\hat{H}(\omega)$ é uma aproximação de $H(\omega)$.

Assim um filtro ideal pode ser realizado de um modo aproximado com um certo atraso t_d . Se t_d for da ordem de 2 ou 3 vezes $1/2B$ fará com que $\hat{h}(t)$ seja uma versão razoavelmente aproximada de $h(t)$.

Fazendo uma analogia, se uma pessoa quiser saber o que vai acontecer daqui a um ano (com a universidade por exemplo), ela tem duas opções

1. ir a um vidente (uma pessoa irrealizável) que pode dar a resposta imediatamente, ou
2. consultar um *expert* e permitir que ele lhe dê a notícia daqui a um ano. Mas se o *expert* for mesmo sábio ele pode acertar o prognóstico com atraso menor que um ano, verificando as tendências.

Na prática temos uma variedade de filtros, por exemplo, os filtros Butterworth são descritos pelas funções de transferência

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)^{2n}}}$$

sendo n a ordem do filtro. Na Figura 4.9 temos filtros para alguns valores de n .

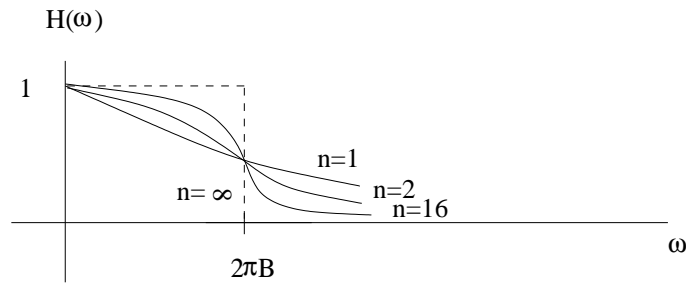


Figura 4.9: Filtro Butterworth para alguns valores de n .

Deve ser lembrado que $|H(\omega)|$ e a fase $\theta_h(\omega)$ são interdependentes e ao escolher um valor de n para um filtro pode ser que o

4.1.2 Filtros Digitais

Sinais analógicos também podem ser processados por meios digitais (conversão A/D), seguindo o esquema representado na Figura 4.10. O sinal resultante pode então ser processado por um computador dedicado, projetado para converter a entrada na saída desejada. Esses computadores são chamados de Processadores Digitais de Sinais (DSP, do inglês, *Digital Signal Processor*).

A saída é então convertida (D/A) para forma analógica. Um algoritmo especial do processador é usado para conseguir a operação desejada (filtragem PB, PG, PA).

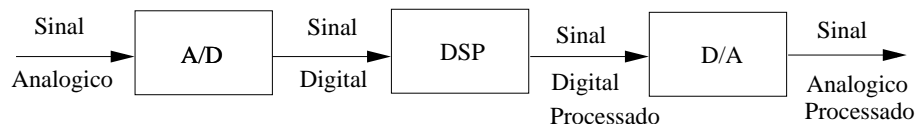


Figura 4.10: Esquema de um DSP.

As vantagens do processamento digital são:

- pode ser compartilhado para vários utilizadores;
- em geral o custo é consideravelmente mais baixo;
- a precisão dos filtros digitais é dependente apenas do tamanho da palavra processada, dos intervalos de quantização e da taxa de amostragem;

- emprega elementos simples (somadores, multiplicadores, etc.) em vez de RLC e amplificadores operacionais. O resultado disso é que os filtros digitais não são afetados por precisão de componentes, temperatura, envelhecimento, etc;
- filtros de mais alta ordem são facilmente realizáveis;
- podem ser facilmente modificados, alterando-se apenas o algoritmo.

Exemplo: Filtros Digitais de Resposta Finita

Os filtros digitais de resposta finita ao impulso (FIR, do inglês *Finite Impulse Response*) produzem uma saída, $y[n]$, que é uma soma ponderada das entradas atuais e passadas, $x[n]$, ou seja:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots + b_qx[n-q]$$

ou

$$y[n] = \sum_{i=0}^q b_i x[n-i]$$

sendo b_i , $i = 0, \dots, q$ os coeficientes que determinam o tipo do filtro.

Dado o comportamento esperado de um filtro em frequência, $H(\omega)$, pode-se calcular a transformada de Fourier inversa e assim determinar os coeficiente do filtro (b_i) para que ele tenha o comportamento desejado. Como exemplo considere um filtro passa-baixas dado por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad (4.3)$$

pode-se calcular

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega =$$

Do resultado acima nota-se que para obter um filtro passa baixas com a resposta em frequência da Equação 4.3 (filtro passa baixas Apesar da implementação do filtro ideal com o uso de todos os coeficientes ser impossível, pode-se truncar a quantidade de coeficientes utilizado e obter uma aproximação do filtro ideal.

4.2 Distorção do Sinal através de um Canal

Como foi dito, durante a transmissão o sinal enviado através de um canal é distorcido devido às imperfeições do mesmo. Como será mostrado as distorções podem ser lineares ou não lineares.

4.2.1 Distorção Linear

Primeiro vamos considerar canais lineares e invariantes no tempo. Distorções podem ser causadas por características não ideais de

- magnitude,
- fase
- ou ambas

Na nossa análise utilizaremos um pulso $x(t)$ transmitido através do canal. Suponhamos que o pulso exista no intervalo de tempo (a, b) e que seja zero fora desse intervalo. Sabemos que $x(t)$ pode ser representado por seu espectro (de magnitude e de fase).

Já foi mostrado que a transmissão de $x(t)$ através de um canal ideal sem distorção deixa este espectro imperturbado, pois todas as componentes são multiplicadas por um mesmo fator e sofrem o mesmo atraso.

Se a magnitude do canal não é ideal ($|H(\omega)|$ não é constante) o espectro então será perturbado e a soma de todas as componentes de frequência pode não ser zero fora do intervalo (a, b) .

Em suma, o pulso é espalhado no tempo. O mesmo raciocínio pode ser empregado para fase não ideal, $\theta_h(\omega) \neq -\omega t_d$. Esse espalhamento é chamado de dispersão.

Este tipo de distorção é altamente indesejável nos sistemas de multiplexação no tempo como o TDM (*Time Division Multiplexing*), pois pode fazer com que pulsos vizinhos interfiram entre si, provocando interferência intersimbólica e “*crosstalk*”, interferência nos canais vizinhos. Nos sistemas de multiplexação em frequência como o FDM (*Frequency Division Multiplexing*), o sinal é distorcido mas não afeta os canais vizinhos.

Exemplo 21 Considere a função de transferência de um canal de comunicação é dado por

$$h(\omega) = \begin{cases} (1 + k \cos T\omega)e^{-j\omega t_d} & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

que está representada na Figura 4.11, e que um pulso $x(t)$ com largura de banda limitada a BHz é aplicado a entrada desse canal, vamos analisar que sinal é obtido na saída.

Seja $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ e $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$, logo

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= X(\omega)[1 + k \cos T\omega]e^{-j\omega t_d} \\ &= X(\omega)e^{-j\omega t_d} + k[X(\omega) \cos T\omega]e^{-j\omega t_d} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Usando a propriedade de deslocamento no tempo e o seguinte fato

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \leftrightarrow 2X(\omega) \cos t_0\omega$$

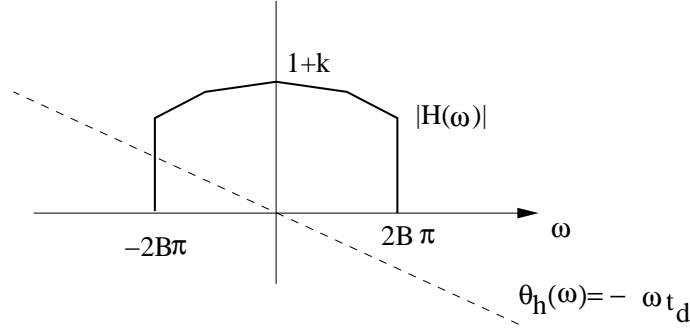


Figura 4.11: Espectro do canal de comunicação do Exemplo 21.

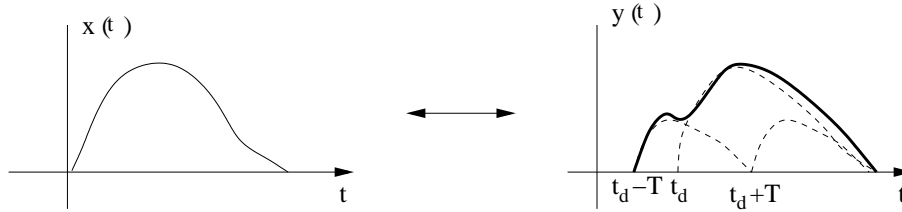


Figura 4.12: Pulsos deslocados no tempo e atenuados.

$$y(t) = x(t - t_d) + \frac{k}{2}[x(t - T - t_d) + x(t + T - t_d)]$$

que consiste no pulso $x(t)$ atrasado de t_d mais dois outros pulso $x(t)$ atenuados de $k/2$, deslocados de $\pm T$ e atrasados de t_d , como mostrado na Figura 4.12.

A dispersão é causada pelos ecos em $\pm T$. Magnitude ideal e fase não ideal de $H(\omega)$ provoca um efeito similar.

Exercício 10 O que aconteceria com o sinal na saída do canal do exemplo anterior se o sinal de entrada não fosse limitado a BHz ?

4.2.2 Equalização

Em tese pode-se eliminar a distorção linear no receptor pela aplicação de um função de seja inversa a do canal. Esse processo é conhecido como equalização. Sendo $H_C(\omega)$ a resposta ao impulso do canal e $H_{eq}(\omega)$ a resposta ao impulso do equalizador se fizermos

$$H_C(\omega)H_{eq}(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

sendo K e t_d constantes tem-se o sinal recebido sem distorção.

Um exemplo simples de equalizador são os filtros transversais, como estão mostrados na Figura 4.13. Nesse filtro o sinal recebido $s(t)$ passa por uma linha que o atrasa e em seguida multiplica por um coeficiente c_i , dessa forma

$$r(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \Delta) + c_1x(t - 2\Delta)$$

e

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= c_{-1} + c_0 e^{-j\omega\Delta} + c_1 e^{-j\omega 2\Delta} \\ &= (c_{-1} e^{j\omega\Delta} + c_0 + c_1 e^{-j\omega\Delta}) e^{-j\omega\Delta}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Que pode ser generalizada para um conjunto de $2M + 1$ atrasados por

$$H_{eq}(\omega) = \left(\sum_{m=-M}^{m=M} c_m e^{-j\omega m\Delta} \right) e^{-j\omega M\Delta}$$

a série de Fourier exponencial com período $1/\Delta$.

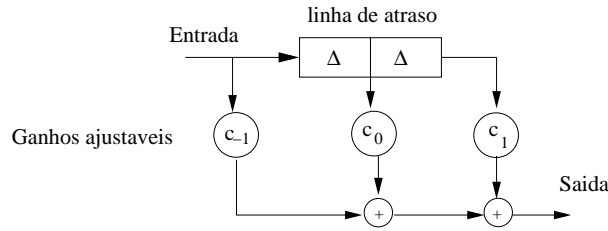


Figura 4.13: Filtro transversal usado como equalizador.

Exemplo 22 Sendo $x(t)$ a entrada de um sistema linear e $y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$ sua saída, obtenha a expressão do equalizador baseado em linhas de atraso para ser colocado na saída do sistema para que se obtenha uma transmissão sem distorção.

Sendo $y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$ então

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= k_1 X(\omega) e^{-j\omega t_1} + k_2 X(\omega) e^{-j\omega t_2} \\ &= (k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2}) X(\omega) \end{aligned}$$

de onde pode-se obter

$$\begin{aligned} H(\omega) &= k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} \\ &= k_1 e^{j\omega t_1} (1 + k e^{-j\omega t_0}) \end{aligned}$$

sendo $k = k_2/k_1$ e $t_0 = t_2 - t_1$.

Para obter uma transmissão sem distorção deve-se ter

$$H_{eq}(\omega) = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}}$$

que pode ser escrito como

$$H_{eq}(\omega) = 1 = k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j\omega 2t_0}$$

e truncando a soma tem-se

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= 1 + k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j\omega 2t_0} \\ &= (e^{j\omega t_0} + k + k^2 e^{-j\omega t_0}) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

de onde se obtém: $c_{-1} = 1$, $c_0 = k$, $c_1 = k^2$ e $\Delta = t_0$

4.2.3 Distorção Causada pelas não linearidades do canal

Para pequenos sinais é válido aproximar um canal qualquer por um canal linear, mas para amplitudes maiores as não linearidades não podem ser ignoradas.

Vamos considerar um caso simples de um canal não linear sem memória, no qual $y(t)$ está relacionada com a saída por uma equação não linear $y = f(x)$. Usando a série de McLaurin para expandir $f(x)$

$$r = a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^2 + \dots + a_kx(t)^k + \dots$$

A série de potências nos permite avaliar o espectro resultante

$$x^k(t) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

donde

$$Y(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega) + \sum_k \frac{a_k}{(2\pi)^{k-1}} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

Podemos tirar algumas conclusões da equação acima: uma delas é que a saída consiste dos espectro de entrada mais repetidas autoconvoluções desse mesmo espectro.

Quando um espectro é convoluído com ele mesmo o espectro resultante tem largura de banda duas vezes maior que o original. Assim, $(k-1)$ autoconvoluções vai aumentar a largura de faixa por um fator k . Isto significa que o sinal de saída terá componentes de frequência que não existiam no sinal original. Este tipo de distorção causa não apenas distorção no sinal mas interferência nos canais vizinhos.

Exemplo 23 Um sinal $m(t)\cos\omega_c(t)$ é transmitido através um canal com a seguinte característica

$$y = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t)$$

sendo x a entrada e y a saída. Determine o sinal recebido, desenhe o espectro e comente o resultado obtido.

Sendo

$$x(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

então

$$y(t) = a_1m(t) \cos \omega_c t + a_2m^2(t) \cos^2 \omega_c t + a_3m^3(t) \cos^3 \omega_c t$$

sabemos que $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ e $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)$, assim

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1m(t) \cos \omega_c t + \frac{a_2}{2}m^2(t) + \frac{a_2}{2}m^2(t) \cos 2\omega_c t + 3\frac{a_3}{4}m^3(t) \cos \omega_c t + \frac{a_3}{4}m^3 \cos 3\omega_c t \\ &= \frac{a_2}{2}m^2(t) + [a_1m(t) + \frac{3}{4}a_3m^3(t)] \cos \omega_c t + \frac{a_2}{2}m^2(t) \cos \omega_c t + \frac{a_3}{4}m^3 \cos 3\omega_c t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando um filtro passa faixa centrado em ω_c de largura $4\pi B$ então

$$y_{filtrado}(t) = [a_1m(t) + \frac{3}{4}a_3m^3(t)] \cos \omega_c t$$

no qual a primeira componente é o sinal desejado e a segunda componente a distorção. Observe que o sinal de saída $y(t)$ provavelmente vai interferir em outros canais.

Compansão

O efeito das não linearidades pode ser reduzido para este tipo de canal usando um dispositivo que é o recíproco do canal.

Em alguns casos um sinal é intencionalmente distorcido passando por um compressor na transmissão e por um expensor na recepção.

O compressor amplifica mais os sinais em níveis baixos do que em níveis altos e em geral segue uma curva logarítmica, o expensor implementa a função inversa. Compressão-expansão \Rightarrow compansão.

4.2.4 Distorção causada pelo efeito do multipercurso

Recepção em multipercurso ocorre quando um sinal transmitido chega no receptor por diferentes percursos com atrasos diferentes, isso ocorre em enlaces de rádio, cabos não casados, dentre outros meios de transmissão.

O canal pode ser representado então por vários canais em paralelo, cada um com uma atenuação e atraso próprios. Vamos considerar um caso com apenas dois percursos, um com ganho 1 e atraso t_d e outro com ganho α e atraso $t_d + \Delta t$, como está representado na Figura 4.14.

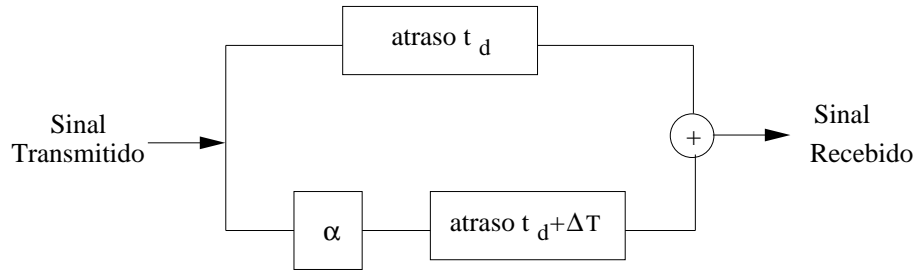


Figura 4.14: Canal com dois percursos.

As funções de transferência para cada caminho são respectivamente

$$H_1(\omega) = e^{-j\omega t_d}$$

e

$$H_2(\omega) = \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)},$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega) + H_2(\omega) \\ &= e^{-j\omega t_d} + \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha e^{-j\omega \Delta t}) \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha \cos \omega \Delta t - j \sin \omega \Delta t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
|H(\omega)| &= \sqrt{(1 + \alpha \cos \omega \Delta t)^2 + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + 2\alpha \cos \omega \Delta t + \alpha^2 \cos^2 \omega \Delta t + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \omega \Delta t}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\theta_h(\omega) = -(\omega t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin \omega \Delta t}{1 + \alpha \cos \omega \Delta t}) \tag{4.9}$$

Pode-se observar na Figura 4.15 que a magnitude e a fase de $H(\omega)$ tem período $2\pi/\Delta t$.

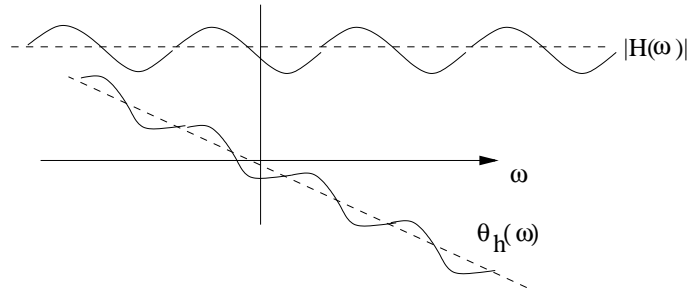


Figura 4.15: Magnitude e fase da função de transferência de um canal com dois percursos.

Multipercurso causa distorção linear e portanto dispersão. Esta distorção pode ser parcialmente corrigida pelo uso de equalizadores.

Canais com desvanecimento

Até agora assumimos o canal invariante no tempo. Na prática encontramos canais cujas características de transmissão variam com o tempo. Como exemplo, os canais de tropodifusão que usam a ionosfera para reflexão de rádio a longa distância. Nesses canais as variações ocorrem por causa das condições meterológicas.

Portanto, a função de transferência do canal varia de forma aleatória produzindo uma variação aleatória no sinal. Este fenômeno é conhecido como desvanecimento (em inglês *fading*).

O desvanecimento pode ser fortemente dependente da frequência, ou seja afeta mais determinadas componentes de frequências. Isto é chamado de desvanecimento seletivo.

4.3 Densidade Espectral de Energia

A energia de um sinal $g(t)$ é definida como a área sob $|g(t)|^2$. Esse parâmetro também pode ser obtido da transformada de Fourier de $g(t)$, usando o Teorema de Parseval mostrado a seguir.

Teorema 1 (Teorema de Parseval) *Seja*

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

a energia a sinal $g(t)$ e caso essa função seja complexa tem-se $|g(t)|^2 = g(t)g^(t)$, então*

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt \quad (4.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \quad (4.11)$$

trocando a ordem das integrais tem-se:

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt d\omega \right] \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega \quad (4.13)$$

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (4.14)$$

A função $|G(\omega)|$ é chamada de **Densidade espectral de energia** (ESD). Agora pode-se determinar a energia de um sinal tanto pela sua representação no tempo quanto pela representação na frequência.

Exemplo 24 *Seja $g(t) = e^{-at}u(t)$ $a > 0$, determinar a energia de $g(t)$.*

$$\begin{aligned} E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} \\ E_g &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Agora, seja a transformada de Fourier de $g(t)$ dada por $G(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$ então

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ E_g &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Da equação

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

pode-se observar que a contribuição de frequência ω para a energia de $g(t)$ é igual a $|G(\omega)|^2$. Então, considere $g(t)$ aplicado como entrada do filtro passa-faixa $H(\omega)$ centrado em ω_0 , representado na Figura 4.16.

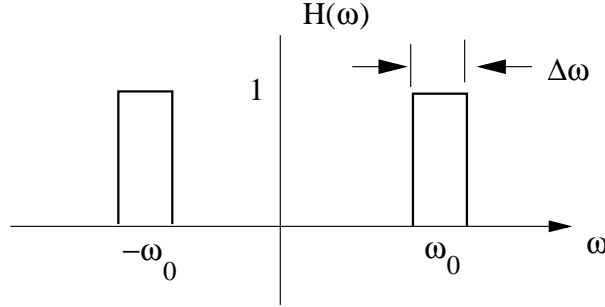


Figura 4.16: Filtro passa faixa ideal centrado em ω_0 .

A saída do filtro $Y(\omega)$ será dada por $Y(\omega) = G(\omega)H(\omega)$ e a energia de $y(t)$ por

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)H(\omega)|^2 d\omega$$

como $H(\omega) = 1$ no entorno de ω_0 tem-se

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{\pi} |G(\omega_0)|^2 \Delta\omega \quad (4.16)$$

então $|G(\omega)|^2 d\omega$ é a contribuição a energia de $g(t)$ pelas bandas $\Delta\omega$ centradas em ω_0 , logo $|G(\omega)|^2$ é a energia por unidade de largura de banda (Hertz) da componente espectral de $g(t)$ centrada em ω , ou $|G(\omega)|^2$ é **Densidade Espectral de Energia** de $g(t)$, ou seja

$$\Phi_g(\omega) = |G(\omega)|^2 \quad e \quad E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g(\omega) d\omega$$

4.3.1 Função de autocorrelação no tempo e densidade espectral de energia

Vamos mostrar que a ESD é a transformada de Fourier da função de autocorrelação no tempo. Para isso, definimos a autocorrelação no tempo de um sinal $g(t)$ como

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt.$$

Primeiro vamos mostrar que $\psi(\tau)$ é par quando $g(t)$ é real, para isso tomemos $x = t + \tau$, ou, $t = x - \tau$ e $dt = dx$, assim

$$\begin{aligned}\psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \tau)g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau)dx = \psi(-\tau).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Para provarmos que $\mathcal{F}[\psi_g(\tau)] = \Psi_g(\omega)$ vamos mostrar que

$$\psi_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau)$$

para isso vamos fazer $g(-\tau) = f(\tau)$ assim

$$g(\tau) * g(-\tau) = g(\tau) * f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(\tau - x)dx$$

$$f(\tau - x) = g[-(\tau - x)] = g(x - \tau)$$

assim

$$g(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau)dx = \psi_g(-\tau) = \psi_g(\tau)$$

para $g(t)$ real

$$g(\tau) \leftrightarrow G(\omega)$$

$$g(-\tau) \leftrightarrow G(-\omega) = G^*(\omega)$$

e portanto

$$g(\tau) * g(-\tau) \leftrightarrow G(\omega) * G^*(\omega) = |G(\omega)|^2 = \Psi_g(\omega)$$

4.3.2 Estimativa da Largura de Faixa Essencial de um Sinal

Para amostrarmos um sinal temos que conhecer sua largura de faixa. Todos os sinais práticos são limitados no tempo, portanto não são limitados em faixa.

Como os sinais limitados no tempo tem energia finita, o espectro de todos os sinais práticos devem decair com a frequência. Assim, além de uma determinada frequência a contribuição espectral para a energia do sinal pode ser considerada desprezível.

Portanto para uma dada aplicação podemos estabelecer um critério de erro no qual consideramos o sinal limitado em BHz . Por exemplo, podemos usar o critério de que um sinal é limitado em BHz se a contribuição das componentes espectrais acima de BHz for menor que x por cento da energia do sinal. Quanto menor o valor de x , menor o erro sobreposição (*aliasing*).

Densidades de Energia de Entrada e Saída

Seja $g(t)$ o sinal de entrada e $y(t)$ o sinal de saída de um sistema linear com função de transferência $H(\omega)$, ou seja, $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$, então temos

$$\begin{aligned}\Psi_y(\omega) &= |Y(\omega)|^2 = |G(\omega)H(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |G(\omega)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \Psi_g(\omega)\end{aligned}\quad (4.18)$$

4.4 Densidade Espectral de Potência

Se um sinal $g(t)$ existe para $-\infty < t < \infty$ define-se a potência média, ou simplesmente potência, P_g desse sinal como a potência média dissipada por um resistor de 1Ω quando uma tensão $g(t)$ é aplicada sobre ele. Assim

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (4.19)$$

A potência assim definida é simplesmente o valor médio quadrático de $g(t)$ ou

$$P_g = \overline{g^2(t)}$$

Observe que se E_g é finita, então $P_g = 0$ e se P_g é finita E_g é infinita. Dessa forma tem-se a seguinte classificação:

- sinais com E_g finita são denominados de energia;
- sinais com P_g finita e diferente de zero são chamados sinais de potência.

Alguns sinais não obedecem essa classificação, por exemplo o sinal $g(t) = e^{-at}$ $-\infty < t < \infty$ tem E_g e P_g infinitas.

Para achar P_g no domínio de frequência como $E_g \rightarrow \infty$ para sinais de potência, existe a possibilidade de não existir a transformada de Fourier. Portanto vamos considerar $g(t)$ truncado

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (4.20)$$

Enquanto T for finito, E_g é finita e existe a transformada de Fourier $g_T(t) \leftrightarrow G_T(\omega)$ e

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \quad (4.21)$$

mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

donde

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \right] \quad (4.22)$$

Quando T aumenta, também aumentam E_T e $|G_T(\omega)|^2$, no entanto $\frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$ se aproxima de algum limite quando $T \rightarrow \infty$, pois crescem com a mesma taxa, assim tem-se:

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (4.23)$$

e define-se a Densidade Espectral de Potência (DEP) como

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T} \quad (4.24)$$

donde

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega \quad (4.25)$$

a mudança no limite inferior de integração na equação acima deve-se ao fato que $S_g(\omega)$ é positiva, real e par. A unidade de S_g é W/Hz e a de P_g é W .

Usando a variável f ao invés de ω tem-se

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(2\pi f) df = 2 \int_0^{\infty} S_g(2\pi f) df \quad (4.26)$$

De $S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G(\omega)|^2}{T}$ deduz-se que a DEP de um sinal contém apenas informação de magnitude do espectro de frequências de $G_T(\omega)$ e perde a informação de fase. Isto quer dizer que alterar a fase não altera a DEP.

4.5 Correlação no Tempo de Sinais de Potência

A função de autocorrelação no tempo $R_g(\tau)$ de um sinal $g(t)$ é definida como

$$R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt \quad (4.27)$$

trocando $t + \tau$ por x tem-se

$$R_g(\tau) = \overline{g(x-\tau)g(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2+\tau}^{T/2+\tau} g(x-\tau)g(x) dt \quad (4.28)$$

como x é uma variável muda pode-se fazer $x = t$ e obtém-se:

$$R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t-\tau)} = R_g(-\tau) \quad (4.29)$$

ou seja $R_g(\tau)$ é uma função par.

Como no caso dos sinais de energia

$$\mathcal{F}[R_g(\tau)] = S_g(\omega) \quad (4.30)$$

tomemos novamente $g_T(t)$ e sua densidade espectral de energia $|G_T(\omega)|^2$, então

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_T(t) g_T(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T} \quad (4.31)$$

e

$$F[R_g(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F[\psi_{g_T}(\tau)]}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega) \quad (4.32)$$

Fazendo $\tau = 0$ na Equação 4.27 tem-se

$$R_g(0) = \overline{g^2(t)} = P_g \quad (4.33)$$

Exemplo 25 Determinar a DEP de $g(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$.

Solução:

Usando a função de autocorrelação tem-se

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t + \theta) A \cos(\omega_0(t + \tau) + \theta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 \tau) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) dt \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde pode-se observar que $R_g(\tau)$ é independente de θ , a fase de $g(t)$. A PSD será

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= \mathcal{F}[R_g(\tau)] = \frac{A^2}{2} \mathcal{F}[\cos \omega \tau] \\ &= \pi \frac{A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

A potência média, ou valor médio quadrático de $g(t)$ será

$$P_g = R_g(0) = \frac{A^2}{2}$$

ou de outra forma

$$\begin{aligned} P_g &= 2 \int_0^\infty S_g(\omega) df = 2 \int_0^\infty \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_0) df \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

confirmando um fato bastante conhecido.

4.5.1 Relação entre a DSP de entrada com DSP de saída

Idêntico ao caso anterior para sinais de energia, se $H(\omega)$ é a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo, então

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$

e

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_g(\tau)$$

4.5.2 Interpretação da DSP

Também similar a interpretação feita para a densidade espectral de energia, a densidade espectral de potência representa a contribuição de potência de várias componentes de frequência. $S_g(\omega)$ representa a potência por unidade de largura de faixa das componentes de frequência centradas em ω .

Exemplo 26 Um sinal $g(t)$ tem PSD $S_g(\omega) = \mathcal{N}/A^2$ como mostrado na Figura 4.17. Determine a PSD e o valor médio quadrático de sua derivada.

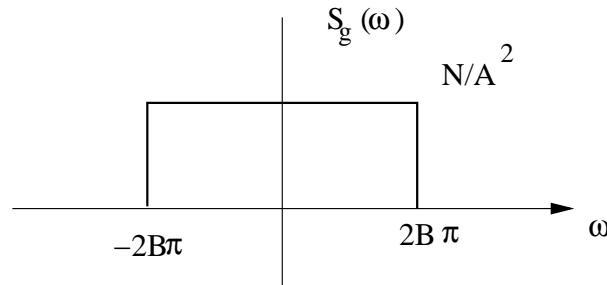


Figura 4.17: PSD do sinal $g(t)$ do Exemplo 26.

Solução

Podemos observar a derivada como um sistema cuja entrada é o sinal $g(t)$, a função de transferência é a derivada e a saída o sinal derivado, como está representado na Figura 4.18.

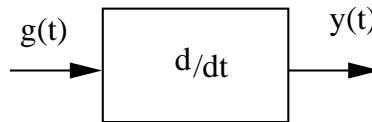


Figura 4.18: Derivada vista como um sistema.

Assim, como $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$ e a função de transferência de um diferenciador é $j\omega$ tem-se

$$S_y(\omega) = |j\omega|^2 S_g(\omega) = \omega^2 S_g(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{A^2} \omega^2$$

O valor médio será dado por

$$\begin{aligned} \overline{y^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_y(\omega) df = \int_0^\infty \frac{\omega^2 \mathcal{N}}{A^2} df \\ &= 2 \int_0^B (2\pi f)^2 \frac{\mathcal{N}}{A^2} df = \frac{2\mathcal{N}}{A^2} \int_0^B 4\pi^2 f^2 df \\ &= \frac{8\pi^2 \mathcal{N} B^3}{3A^2} \text{volt}^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Exemplo 27 Mostre que se $g(t)$ tem uma PSD $S_g(\omega)$ e potência P_g , então $ag(t)$ tem PSD $a^2 S_g(\omega)$ e potência $a^2 P_g$

Solução

$$y(t) = ag(t) \leftrightarrow Y(\omega) = aG(\omega) = H(\omega)G(\omega)$$

sendo $H(\omega) = a$, logo temos

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega) = a^2 S_g$$

Isto significa que multiplicar um sinal por um fator a aumenta sua PSD por um fator a^2 .

Exemplo 28 Seja um trem de pulsos binários aleatórios, como mostrado na Figura 4.19. Determine a função de autocorrelação, a PSD e a largura de faixa essencial de $g(t)$.

Temos que

$$R_g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t-\tau) d\tau$$

para obter o integrando precisamos multiplicar $g(t)$ por $g(t-\tau)$ ($g(t)$ deslocada), e então achar a área sob o produto $g(t)g(t-\tau)$.

Primeiro vamos observar a Figura 4.20 e considerar $0 < \tau < T_0/2$.

como os pulsos são positivos ou negativos, o produto $g(t)g(t-\tau)$ é sempre positivo e a área de um pulso será $A_p = T_0/2 - \tau$.

Considerando um intervalo $T = NT_0$ temos N pulsos sobre o intervalo, a área total é a soma das áreas de cada pulso individual, assim $A_T = N(T_0/2 - \tau)$ e

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [N(T_0/2 - \tau)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} [N(T_0/2 - \tau)] \\ &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - \tau \right) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2\tau}{T_0} \right) \text{ para } 0 < \tau < T_0/2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

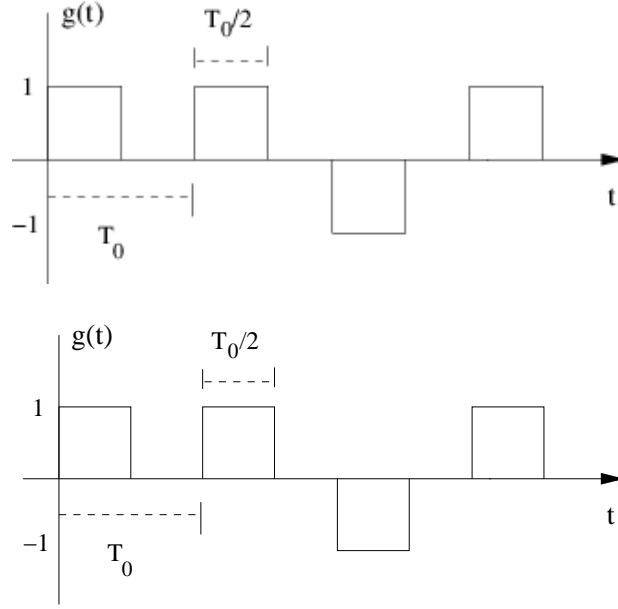


Figura 4.19: Pulsos Binários Aleatórios.

Como $R_g(\tau)$ é uma função par

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2|\tau|}{T_0} \right) \quad |\tau| < T_0/2$$

e tem o formato mostrado na Figura 4.21.

Consideremos agora o caso de $\tau > T_0/2$. Haverá sobreposição do pulso com seu vizinho, ou seja, teremos pulsos positivos e negativos no produto $g(t)g(t - \tau)$. Como os pulsos são equiprováveis, num tempo $T \rightarrow \infty$ teremos produtos $g(t)g(t - \tau)$ positivos e negativos equiprováveis. Ou seja, metade dos pulsos são positivos e metade são negativos (quando $T \rightarrow \infty$) resultando numa área total nula. Ou seja,

$$R_g(\tau) = 0 \quad \text{para } |\tau| > T_0/2$$

e a função de autocorrelação é a mostrada na Figura 4.21.

A DEP $S_g(\omega) = \mathcal{F}[R_g(\tau)]$ que para um pulso triangular é

$$S_g(\omega) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right)$$

cujos formato está representado na Figura 4.22.

Calculando a área abaixo de $S_g(\omega)$ para $|\omega| < 4\pi/T_0$ em relação a área total, verificamos que 90,28% da potência do sinal está dentro dessa faixa, e portanto esta pode ser considerada a largura de faixa essencial de $g(t)$ para a maioria dos casos práticos.

Este exemplo mostra um sinal não determinístico que não pode ser expresso por uma função determinística no tempo. Consequentemente não podemos expressar seu espectro de

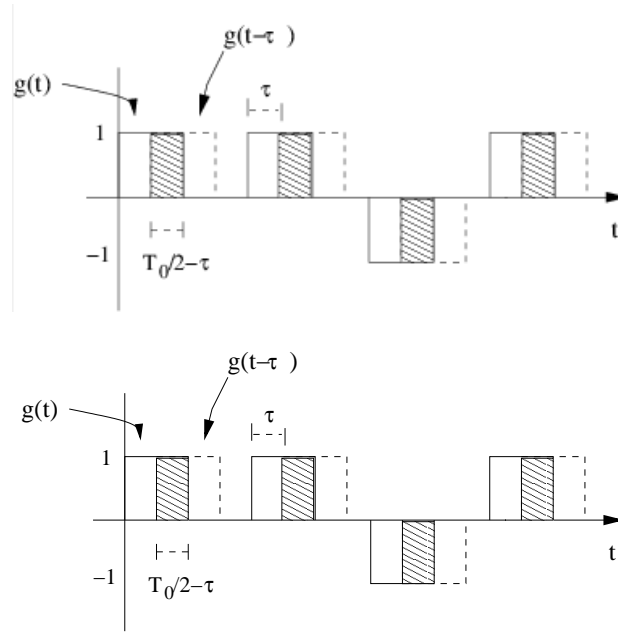


Figura 4.20: Pulsos Binários aleatórios deslocados.

frequência. Mas a função de autocorrelação nos permite obter informação sobre o espectro desses sinais que seria impossível por meios convencionais.

4.6 Exercícios

Exercício 11 Considere um canal no qual o sinal enviado chega ao receptor por dois caminhos distintos. O primeiro atenua o sinal por um fator k_1 e atrasa de t_1 , o segundo tem atenuação k_2 e atraso t_2 . Obtenha a expressão de um equalizador baseado em uma linha de atraso para esse canal.

Exercício 12 Seja um sinal $x(t) = \cos \omega_1 t$ transmitido através de um canal multipercursos (dois raios) em que $\omega_1 t_d = \pi$, $\omega_1 (t_d + \Delta T) = 2\pi$ e $\alpha = 1$. Qual o sinal recebido?

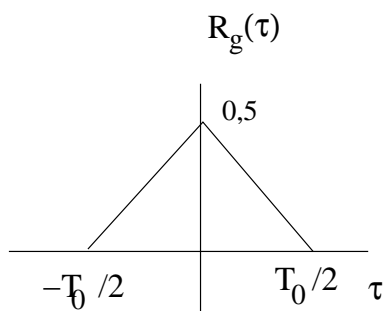
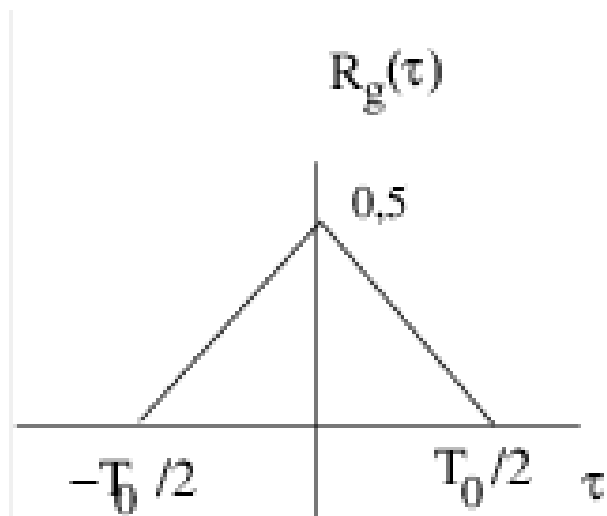


Figura 4.21: Função de autocorrelação de pulsos binários aleatórios.

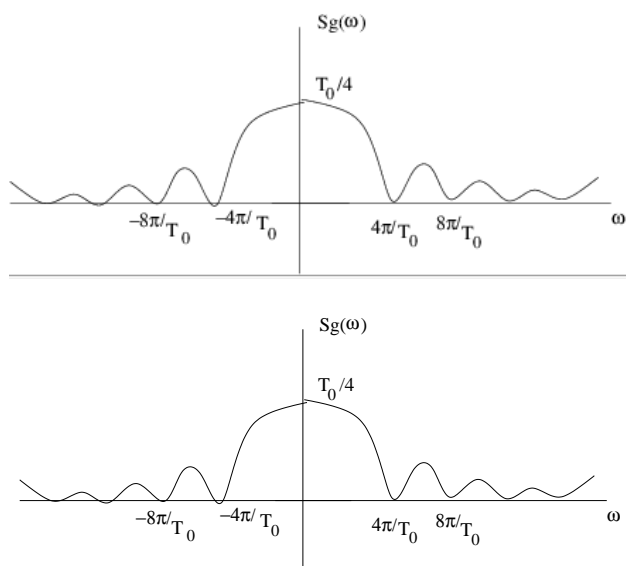


Figura 4.22: PSD do pulso triangular.

A Razão Sinal Ruído (SNR do inglês *Signal to Noise Ratio*) é definida como a razão entre a potência do sinal e a potência do ruído. O nível do ruído em geral aumenta com a distância enquanto que o sinal é atenuado de modo que a SNR piora ao longo do canal.

Tirei a seção a segui pois achei sem sentido e mal escrita.

4.6.1 Mensagens analógicas e digitais

As mensagens digitais são constituídas por um número finito de símbolos, por exemplo o computador usa internamente níveis binários (0 ou 1) para representar as informações. Por outro lado as mensagens analógicas usam um conjunto de símbolos cujos valores variam continuamente numa determinada faixa, por exemplo a temperatura de um ambiente.

As mensagens digitais precisam de um número finito de formas de onda para serem transmitidas. Uma forma enviada pelo transmissor será alterada pelo canal e o receptor tem que identificar, dentre o conjunto de formas de onda possíveis, qual a forma de onda foi enviada pelo transmissor.

Capítulo 5

Modulação em Amplitude (AM)

Pode-se transmitir sinais de duas formas banda básica e com portadora. O termo banda básica se refere a faixa de frequências de um sinal que é produzida por uma fonte ou um transdutor. Como exemplo, na telefonia o sinal de áudio é transmitido na faixa de 0 a 3,4Kz, na televisão a faixa de vídeo vai de 0 a 4,3 MHz.

O sinal banda básica tem potência nas baixas frequências e não pode ser transmitido por um enlace de rádio, mas podem ser transmitidos por um fio ou cabo coaxial. Em geral um sinal banda básica é mais difíceis de transmitir e não fazem uso eficiente do espectro de frequências disponível.

Modulação é um processo que causa um deslocamento na faixa de frequências de um sinal para outra faixa de frequências. Para isso usa-se um sinal chamada de portadora, que normalmente é uma onda senoidal com uma determinada frequência ω_c que tem alguma de suas características (amplitude, frequência, fase ou um combinação deles) de acordo com o sinal em banda básica. A modulação é usada tanto com sinais analógicos quanto digitais.

5.1 Modulação em Amplitude com Banda Lateral Dupla

Na modulação AM a amplitude A_c de uma portadora

$$A_c \cos(\omega_c t + \theta_c) \quad (5.1)$$

varia com um sinal em banda básica conhecido como sinal modulante. Os valores de ω_c e θ_c são constantes e para facilitar o entendimento vamos assumir que $\theta_c = 0$.

Se A_c é diretamente proporcional a $m(t)$, a portadora modulada será

$$m(t) \cos(\omega_c t) \quad (5.2)$$

e das propriedades da transformada de Fourier sabe-se que essa operação consiste no deslocamento do espectro de $m(t)$ para ω_c , ou seja

$$\begin{aligned} \text{Se } m(t) &\leftrightarrow M(\omega) \\ m(t) \cos(\omega_c t) &\leftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

conforme está representado na Figura 5.1.

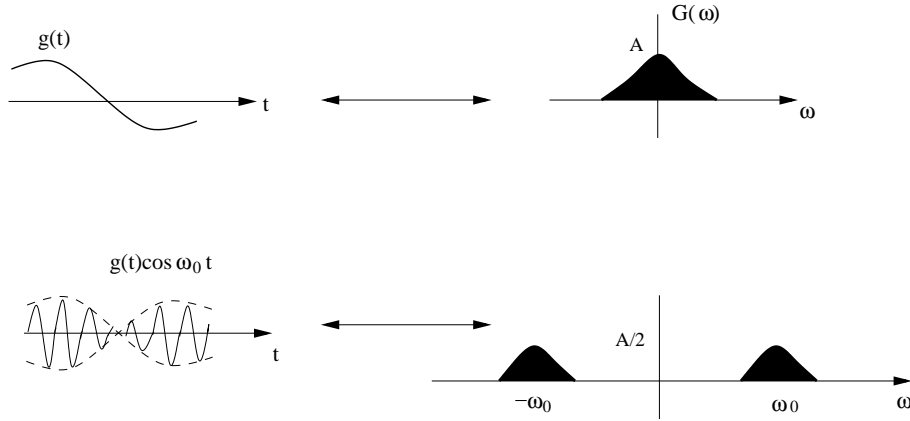


Figura 5.1: Deslocamento do espectro na modulação AM.

Se $m(t)$ é limitado em BHz , o sinal modulado ocupa $2BHz$ e é composto de duas partes:

- Banda lateral superior (USB ou BLS) e
- Banda lateral inferior (LSD ou BLI),

conforme está ilustrado na Figura 5.1. Por esse motivo, esse esquema é dito ser uma Modulação em Amplitude com Banda Lateral Dupla e com Portadora Suprimida, DSB-SC (*double-sideband-supressed-carrier*).

Para recuperar o sinal $m(t)$ a partir do sinal modulado precisamos reconduzir o espectro de $m(t)$ para a sua posição original, esse processo é chamado de **demodulação** e é realizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m(t) \cos \omega_c t \cos \omega_c t &= m(t) \cos^2 \omega_c t \\ &= \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2\omega_c t] \end{aligned} \quad (5.4)$$

após a demodulação tem-se

$$\frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos(2\omega_c t)] \leftrightarrow \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} [M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c)] \quad (5.5)$$

Para recuperar o sinal original pode-se usar um filtro passa-faixas, conforme está ilustrado na Figura 5.2.

Este método de demodulação é chamado de detecção síncrona ou detecção coerente, pois usamos uma portadora local com a mesma frequência (fase) para demodulação. Assim precisamos gerar no receptor uma portadora em perfeito sincronismo com a que foi usada pelo transmissor.

Vale ainda observar que $\omega_c \geq 2\pi B$ para evitar a sobreposição de $M(\omega + \omega_c)$ e $M(\omega - \omega_c)$, pois se $\omega_c < 2\pi B$ a dedmodulação é impossível. Na prática $\frac{\omega_c}{2\pi B} \gg 1$.

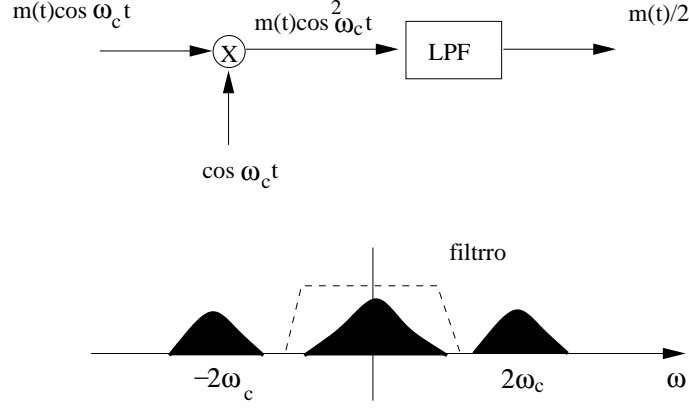


Figura 5.2: Filtragem do espectro na demodulação AM.

5.2 Modulação AM

Foi mostrado que na demodulação de sinais AM-DSB-SC a portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$ deve ser gerada no receptor para que o sinal $m(t)$ possa ser recuperado. A geração da portadora no receptor se justifica em comunicações ponto-a-ponto, nas quais o custo de implementação do receptor pode ser mais alto do que em comunicações multiponto (um transmissor e vários receptores como no caso de radiodifusão). Nesse último caso, por questões econômicas, os receptores devem ser simples e portanto deve-se procurar uma forma de evitar a geração da portadora localmente.

Uma das formas de evitar a geração da portadora no receptor é enviá-la junto com o sinal transmitido, nesse caso tem-se a modulação AM-DSB, cujo sinal a ser enviado é dado por

$$\psi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t \quad (5.6)$$

$$= [A + m(t)] \cos \omega_c t. \quad (5.7)$$

O espectro de $\psi_{AM}(t)$ é idêntico ao de $m(t) \cos(\omega_c t)$ porém com dois impulsos adicionais centrados em $\pm\omega_c$, ou seja:

$$\psi_{AM}(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c) + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]] \quad (5.8)$$

Seja o sinal $m(t)$ e as modulações mostradas na Figura 5.3. O sinal $E(t) = A + m(t)$ é chamado de envelope (ou envoltória) dos sinal $E(t) \cos \omega_c t$, podemos notar que se $A + m(t) > 0$ para todo t podemos recuperar $m(t)$ a partir de ϕ_{AM} pela detecção do sua envoltória.

A condição para detecção é então $A + m(t) > 0$ para todo t ou $A \geq -m(t)_{min}$. Define-se o índice de modulação como

$$\mu = \frac{-m(t)_{min}}{A}.$$

Donde tem-se as seguintes situações

- $\mu \leq 1$ - sobre modulação, é condição necessária para demodularmos por detecção de envoltória;

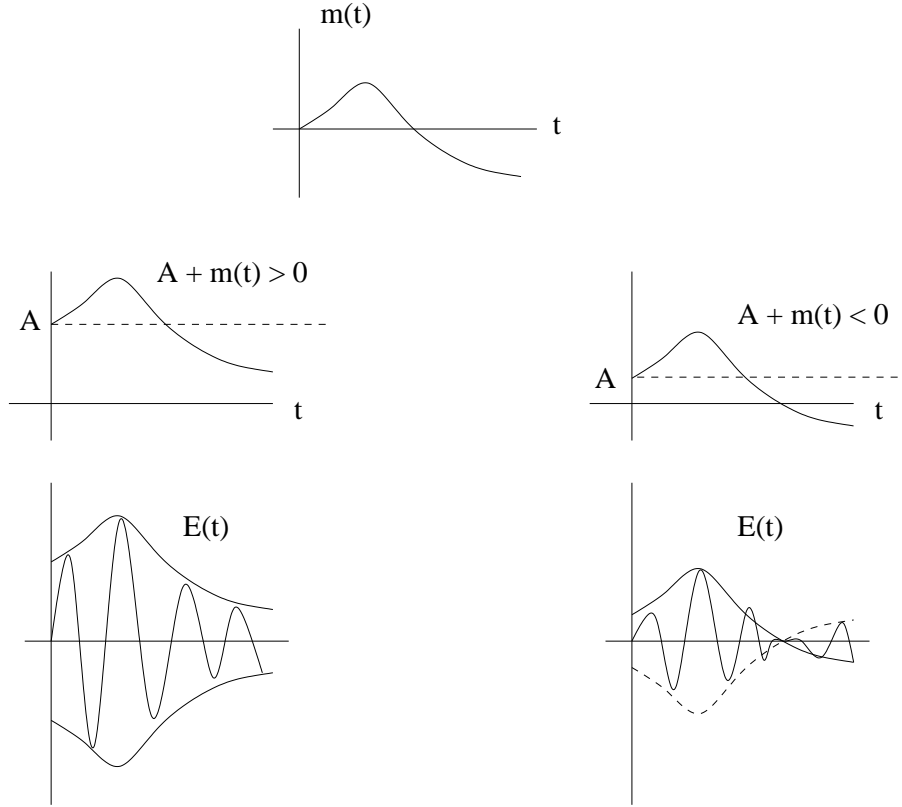


Figura 5.3: Sinal $m(t)$ e suas modulações.

- $\mu > 1$ - submodulação, a detecção de envoltória não mais funciona e precisamos usar demodulação síncrona.

Exemplo 29 Desenhe $\phi_{AM}(t)$ para índices de modulação $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$ quando $m(t) = B \cos \omega_m t$.

Solução

Nesse caso

$$\mu = \frac{-m(t)_{min}}{A} = \frac{B}{A}$$

e

$$m(t) = B \cos \omega_m t = A\mu \cos \omega_m t$$

logo

$$\phi_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_c t = A[1 + \mu \cos \omega_m t] \cos \omega_c t$$

e os sinal para $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$ estão representados na Figura 5.4.

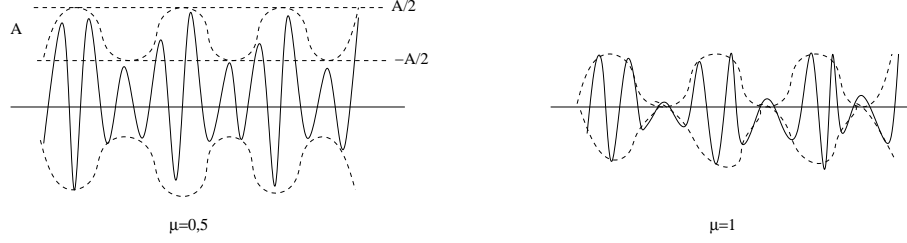


Figura 5.4: Sinais modulados para $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$ no Exemplo 29

5.3 Potência da Portadora e da Banda Lateral

Com já foi ressaltado, na modulação AM a portadora não transporta informação, e assim a potência usada no envio dessa parte do sinal AM inútil em termos de informação. Definido a eficiência como a relação entre a potência utilizada para transportar a mensagem (útil em termos de envio de informações) e a potência total, temos que, sendo o sinal enviado

$$s_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t$$

a potência da portadora ($A \cos \omega_c t$) será dada por

$$P_c = \frac{A^2}{2}$$

e a potência das bandas laterais ($m(t) \cos \omega_c t$) será

$$P_{BL} = \frac{1}{2} \overline{m^2(t)}.$$

sendo $\overline{m^2(t)}$ o valor médio quadrático de $m(t)$, logo a potência total do sinal AM é dada por

$$P_t = P_c + P_{BL} = \frac{1}{2} \left[A^2 + \overline{m^2(t)} \right].$$

e a eficiência será

$$\eta = \frac{P_{BL}}{P_t} \times 100\% = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \times 100\%.$$

Para o caso em que $m(t) = B \cos \omega_m(t)$ (modulação em tom) e fazendo $b = \mu A$, tem-se

$$m(t) = \mu A \cos \omega_m(t) \quad e \quad \overline{m^2(t)} = \frac{\mu^2 A^2}{2} = \frac{(\mu A)^2}{2}$$

logo

$$\eta = \frac{(\mu A)^2/2}{A^2 + (\mu A)^2/2} \times 100\% = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \times 100\%.$$

Da equação acima pode-se observar que no caso da modulação em tom, η_{MAX} ocorre quando $\mu = 1$, e nesse caso tem-se

$$\eta_{MAX} = \frac{1}{3} \times 100\% \approx 33\%$$

Isto significa que nas melhores condições, quando ainda é possível usar demodulação coerente, apenas 1/3 da potência é usada para transportar informação. Para sinais de voz por exemplo, isto é ainda pior consegue-se apenas 25%.

5.4 Geração de Sinais AM

Uma forma simples de implementar moduladores AM-DSB-SC é através de um circuito que realize a multiplicação de $m(t)$ por $\cos \omega_c t$. Apesar da simplicidade, essa operação deve ser feita por multiplicadores analógicos que por sua vez devem ser mantidos na região linear, o que nem sempre é possível ou só pode ser reduzido a um custo muito alto.

Outra possibilidade é usar moduladores não lineares, que podem ser obtidos usando componentes não lineares como diodos e transistores. Na Figura 5.5 tem-se um esquema de modulação AM que usa dois elementos não lineares (ENL).

No esquema da Figura 5.5 tem-se que

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t)$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$ a entrada e saída respectivamente do elemento não linear. A saída $z(t)$ será dada por

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t) = [ax_1(t) + bx_1^2(t)] - [ax_2(t) + bx_2^2(t)]$$

substituindo $x_1(t) = \cos \omega_c t + m(t)$ e $x_2(t) = \cos \omega_c t - m(t)$ tem-se

$$z(t) = 2am(t) + 4bm(t) \cos \omega_c t$$

o espectro de $m(t)$ é centrado na origem e o de $m(t) \cos \omega_c t$ é centrado em $\pm \omega_c$, logo quando $z(t)$ passa por um filtro passa-faixas centrado, no domínio do tempo, em ω_c obtém-se o sinal AM-DSB-SC $4bm(t) \cos \omega_c t$.

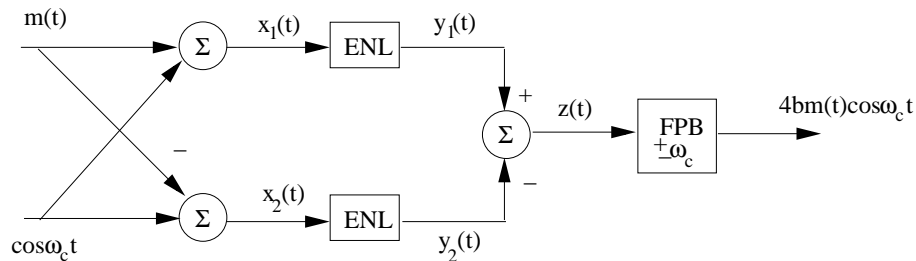


Figura 5.5: Modulador DSB-SC não linear.

Outro tipo de modulador que gera sinais AM-DSB-SC são os moduladores chaveados, neles a operação de multiplicação de $m(t)$ pela portadora é realizada por uma operação de

chaveamento obtida pela multiplicação de $m(t)$ por um sinal periódico qualquer que tenha frequência fundamental ω_c .

Um sinal periódico com frequência fundamental ω_c tem série trigonométrica de Fourier dada por

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_c t + \theta_n)$$

e portanto tem-se

$$m(t)\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n m(t) \cos(n\omega_c t + \theta_n)$$

O espectro de frequências da $m(t)\phi(t)$ é o espectro $M(\omega)$ deslocado em $\pm\omega_c, \pm2\omega_c, \dots, \pm n\omega_c$. Se esse sinal é passado por um filtro passa-faixas de largura $2B$ Hz centrado em ω_c então obtém-se o sinal DSB-SC $c_1 m(t) \cos(\omega_c t)$.

Como exemplo, seja o trem de pulsos mostrado na Figura 5.6 que é um sinal periódico com série de Fourier dada por

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right)$$

multiplicando $m(t)$ por $w(t)$ tem-se

$$m(t)w(t) = \frac{m(t)}{2} + \frac{2}{\pi} \left(m(t) \cos \omega_c t - \frac{m(t)}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{m(t)}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right)$$

que consiste em um número infinito de sinais modulados nas frequências $\omega_c, 3\omega_c, 5\omega_c, \dots$. Mais uma vez, usando um filtro passa faixas centrado em ω_c recupera-se o sinal DSB-SC $\frac{2}{\pi} m(t) \cos \omega_c t$.

Uma particularidade interessante desse tipo de modulador é que a operação $m(t)w(t)$ consiste em chavear $m(t)$ segundo o sinal $w(t)$ depois passar o resultado por um filtro passa-faixas, como está representado na Figura 5.6. Um circuito simples que pode implementar esse modulador está representado na Figura 5.7, nele os diodos D_1, D_2 e D_3 e D_4 são pares casados.

Observe no circuito da Figura 5.7 que nos instantes em que o sinal $A \cos \omega_c t$ está na metade do ciclo que torna o terminal c positivo com relação ao terminal d , então todos os diodos conduzem e os terminais a e b estão ligados. Na outra metade do ciclo, d é positivo com relação a c , logo nenhum dos diodos conduz e os terminais a e b estão desconectados. Essa operação se repete a cada ciclo, e para obter $m(t) \cos \omega_c t$ o sinal resultante deve passar por um filtro, como está ilustrado na Figura 5.7.

A demodulação de sinais AM-DSB-SC pode ser feita usando circuitos idênticos aos moduladores, apenas trocando o filtro por um passa baixas, já que se deseja recuperar $m(t)$.

No caso de sinais AM (com portadora) os mesmos circuitos que geram os sinais DSB-SC podem ser usados, apenas fazendo a entrada ser $A + m(t)$ ao invés de $m(t)$. Porém, como não existe a necessidade de suprimir a portadora pode-se usar circuitos mais simples, como o que está representado na Figura 5.8.

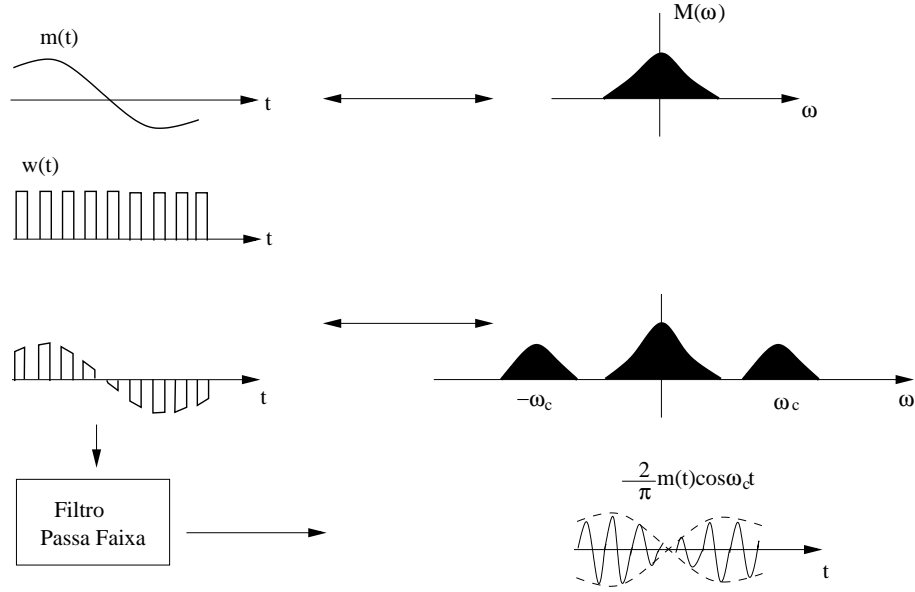


Figura 5.6: Modulador DSB-SC chaveado.

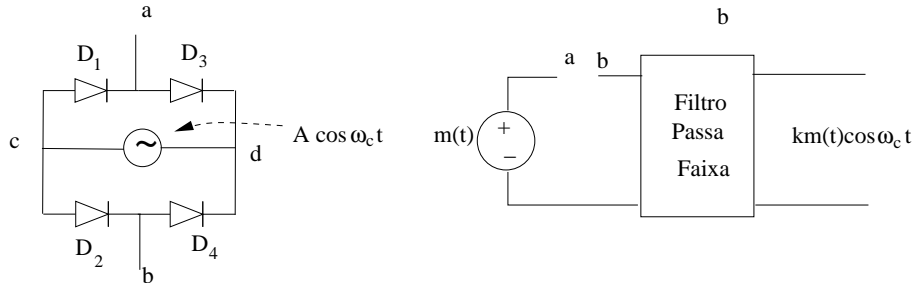


Figura 5.7: Circuito que implementa um modulador DSB-SC chaveado.

A Figura 5.8 representa um modulador chaveado no qual o chaveamento é feito por um único diodo. A entrada $m(t) + c \cos \omega_c t$, com $c \gg m(t)$ tal que a ação do diodo é controlada por $c \cos \omega_c t$, faz com que o diodo abra (conduza) e feixe (não conduza) periodicamente com $\cos \omega_c t$ fazendo com que o sinal $c \cos \omega_c t + m(t)$ seja multiplicado por $w(t)$. A tensão nos terminais bb' é

$$\begin{aligned}
 v_{bb'}(t) &= [c \cos \omega_c t + m(t)]w(t) \\
 &= [c \cos \omega_c t + m(t)] \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right) \right] \\
 &= \frac{c}{2} \cos \omega_c t + \frac{2}{\pi} m(t) \cos \omega_c t + \text{outros termos (removidos pelo filtro)}
 \end{aligned}$$

O filtro passa faixa centrado em ω_c remove os termos indesejáveis fornecendo o sinal AM na saída.

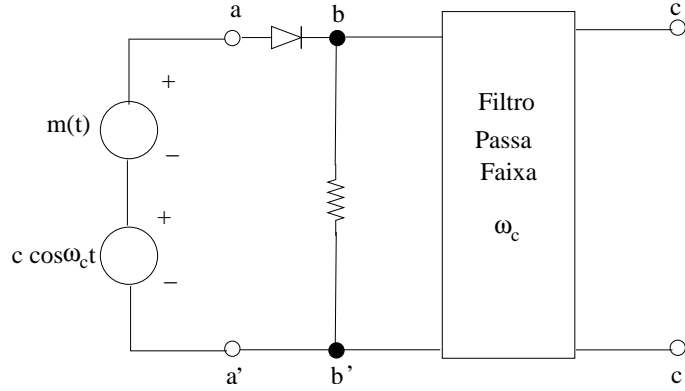


Figura 5.8: Circuito gerador AM.

5.4.1 Demodulação de Sinais AM

Os sinais AM podem ser demodulados usando demoduladores não coerentes, ou seja, não é necessário que o receptor gere a portadora localmente, e essa demodulação é feita essencialmente pela detecção da amplitude da portadora, como mostrado a seguir.

Detector Retificador

Se um sinal AM é aplicado a um circuito com um diodo e um resistor (veja Figura 5.9), a parte negativa do sinal AM é suprimida e a saída no resistor será uma versão de meia onda retificada do sinal AM, que consiste essencialmente em multiplicar o sinal de entrada por $w(t)$, ou seja

$$\begin{aligned}
 v_R &= \{[a + m(t)] \cos \omega_c t\} w(t) \\
 &= \{[a + m(t)] \cos \omega_c t\} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} [A + m(t)] + \text{termos em frequências altas}
 \end{aligned}$$

Quando v_R é aplicado a um filtro passa-baixas com frequência de corte em BHz , a saída será $[A + m(t)]/\pi$. O termo DC A/π pode ser removido por um capacitor produzindo o sinal $m(t)/\pi$ como está ilustrado na Figura 5.9.

Detector de Envelope

Nesses demoduladores, a saída do detector segue o envelope do sinal modulado. Um circuito desse tipo está ilustrado na Figura 5.10. No ciclo positivo do sinal AM o diodo conduz e carrega o capacitor com o valor mínimo do sinal de entrada, no ciclo negativo o diodo para de conduzir e o capacitor descarrega através do resistor R , o processo se repete e a saída $v_c(t)$ acompanhará o envelope da entrada a menos de uma ondulação, como está representado na Figura 5.10.

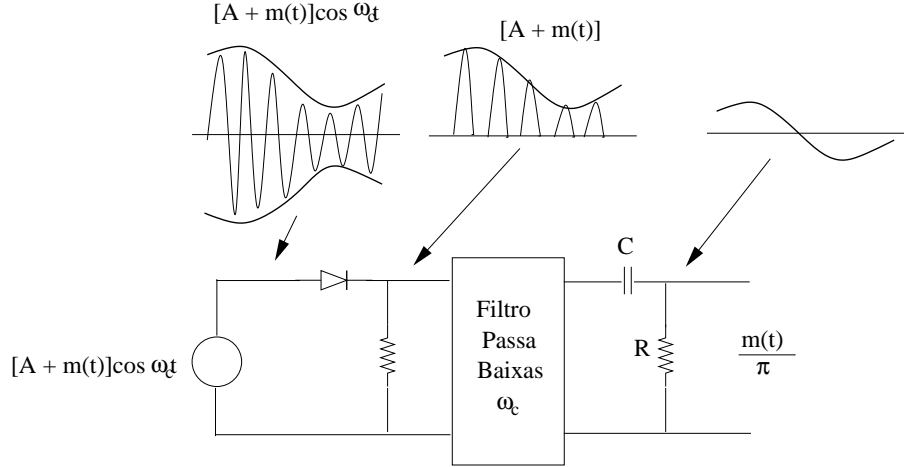


Figura 5.9: Detector retificador AM.

A ondulação no sinal de saída pode ser reduzida pela escolha adequada dos valores de R e C . Como RC é a constante de tempo que reje o decaimento do sinal durante o ciclo de entrada negativo, quanto maior esse valor menor será o decaimento. Porém, dependendo da escolha de RC o decaimento poderá ser muito lento e o sinal de saída não acompanhará o envelope do sinal de entrada, como está representado na Figura 5.11.

Uma questão interessante a ser respondida é qual o valor ideal para a constante de tempo RC ? Para responder essa questão considere que o sinal de saída será dado por

$$v_c = Ee^{-t/RC}$$

usando a série de Taylor esse valor pode ser aproximado por

$$v_c = E \left(1 - \frac{t}{RC} \right)$$

e o decaimento de descarga será $-E/RC$. Para que o capacitor siga $E(t)$, o valor da queda determinado por RC deve ser muito maior que o decaimento do envelope $E(t)$, ou seja

$$\left| \frac{dv_c}{dt} \right| = \frac{E}{RC} \geq \left| \frac{dE}{dt} \right| \quad (5.9)$$

No caso da modulação em tom ($m(t) \cos \omega_m t$) tem-se

$$E(t) = A[1 + \mu \cos \omega_m t],$$

$$\frac{dE}{dt} = -\mu A \omega_m \sin \omega_m t$$

e a Equação 5.9 se torna

$$\frac{A(1 + \mu \cos \omega_m t)}{RC} \geq \mu A \omega_m \sin \omega_m t$$

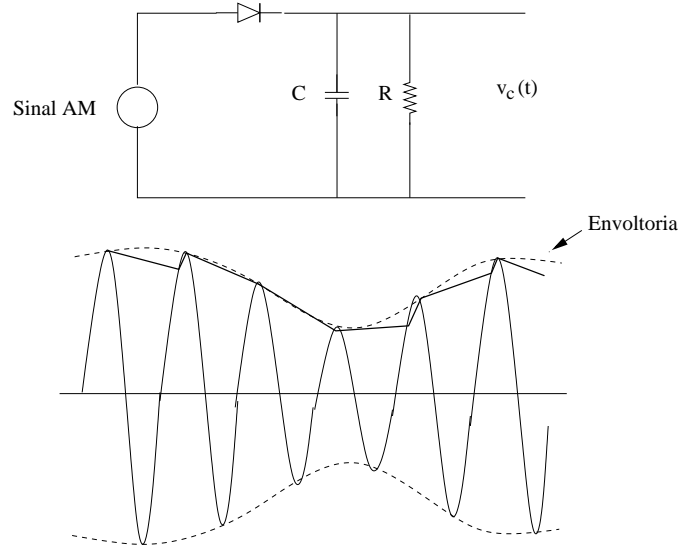


Figura 5.10: Detector de envelope AM.

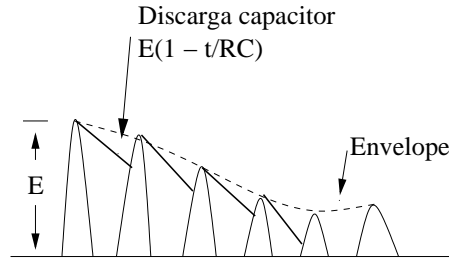


Figura 5.11: Descarga do capacitor no detector de envelope.

para todo t , ou

$$RC \leq \frac{1 + \mu \cos \omega_m t}{\mu \omega_m \sin \omega_m t}$$

O pior caso ocorre quando o lado direito da equação acima se torna o mínimo, e isto é atingido quando $\cos \omega_m t = -\mu$ e neste caso obtém-se

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \quad (5.10)$$

5.5 Banda Lateral Única

O espectro de sinais DSB tem duas componentes denominadas de Banda Lateral Inferior (BLI) e Banda Lateral Superior (BLS). Cada uma dessas bandas contém a informação completa sobre a mensagem. Dessa forma, somente uma dessas bandas precisaria ser transmitida.

Esquemas de modulação que usam o fato acima descrito são chamados de banda lateral única (SSB, do inglês *Single Side Band*) e tem como característica mais marcante a de

necessitar apenas metade da faixa de frequências do que a necessária para enviar um sinal DSB.

Os sinais SSB podem ser demodulados coerentemente de maneira idêntica aos sinais DSC-SC, como está ilustrado na Figura 5.12.

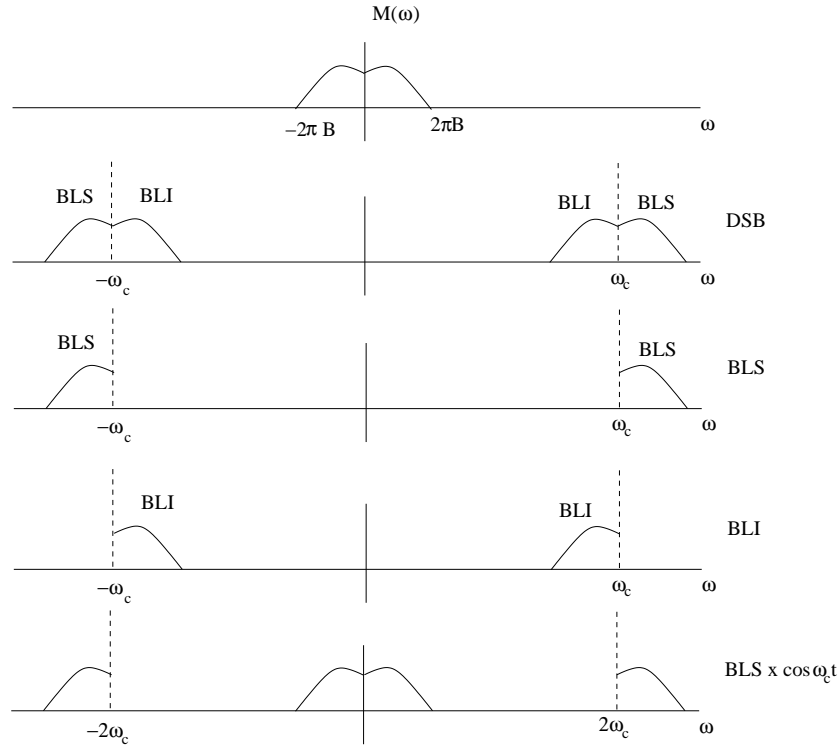


Figura 5.12: Espectro de frequências de sinais SSB.

Observe que os sinais SSB não possuem a portadora, logo podem ser denominados de SSB-SC.

Vamos determinar a expressão no tempo de sinais SSB. Para isso precisamos do conceito de pré-envoltória de um sinal $m(t)$. Observe a Figura 5.13, então $M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega)$ e $M_-(\omega) = M(\omega)u(-\omega)$ sendo $u(t)$ a função degrau. Assim tem-se

$$m_+(t) \leftrightarrow M_+(\omega)$$

e

$$m_-(t) \leftrightarrow M_-(\omega)$$

e $m_+(t)$ é definida como a pré-envoltória de $m(t)$.

Os módulos $|M_+(\omega)|$ e $|M_-(\omega)|$ não são pares logo $m_+(t)$ e $m_-(t)$ são funções complexas.

Como $M_+(\omega)$ e $M_-(\omega)$ são conjugadas, então $m_+(t)$ e $m_-(t)$ também o são, e como

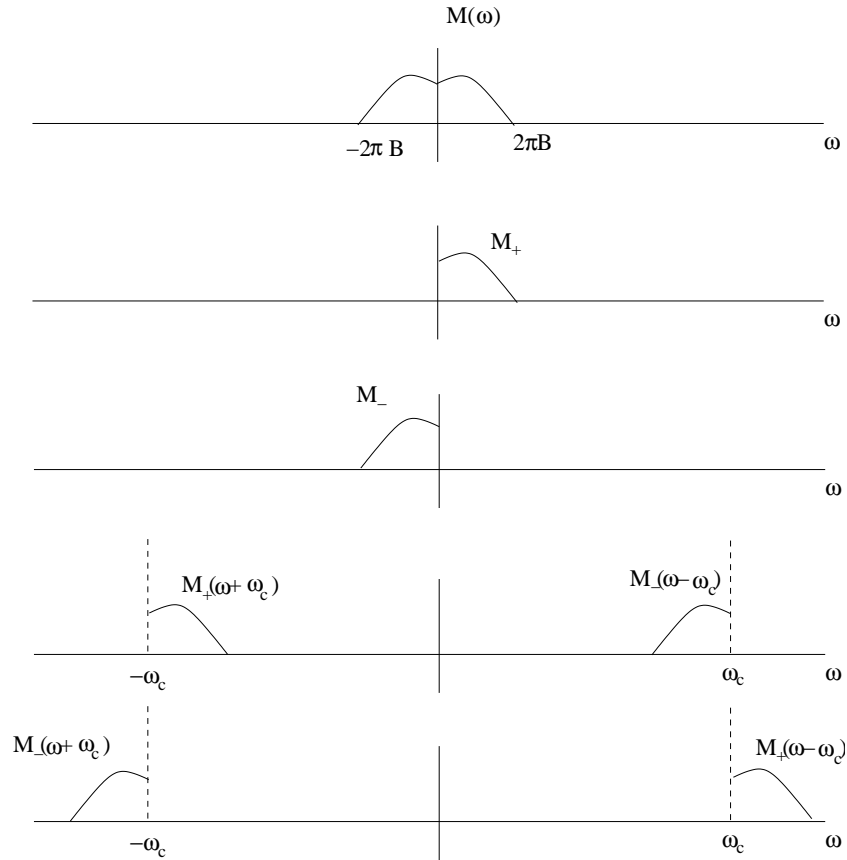


Figura 5.13: Pré-envoltória de um sinal.

$m(t) = m_+(t) + m_-(t)$ temos:

$$m_+(t) = \frac{1}{2}[m(t) + jm_h(t)]$$

e

$$m_-(t) = \frac{1}{2}[m(t) - jm_h(t)] \quad (5.11)$$

precisamos determinar $m_h(t)$. Como temos que

$$M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)]$$

$$M_+(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

assim,

$$m(t) \leftrightarrow M(\omega)$$

$$m_+(\omega) \leftrightarrow M_+(\omega)$$

e

$$m_+(t) = \frac{1}{2}m(t) + j\frac{1}{2}m_h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

em consequência

$$\frac{1}{2}jm_h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

ou

$$jm_h(t) \leftrightarrow M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

e multiplicando por $-j$ tem-se

$$m_h(t) \leftrightarrow -jM(\omega)\text{sgn}(\omega) = M_h(\omega) \quad (5.12)$$

temos que

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}(\omega)$$

e lembrando que

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega),$$

então

$$\begin{aligned} m_h(t) &= -jm(t) * \frac{1}{\pi t} = m(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m(\alpha) \frac{1}{\pi(t - \alpha)} d\alpha \\ m_h(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (5.13)$$

$m_h(t)$ é chamada de **Transformada de Hilbert** de $m(t)$.

Da Equação 5.12 temos que $M_h(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)M(\omega) = H(\omega)M(\omega)$, ou seja se passarmos $m(t)$ por um sistema com função de transferência $H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)$ obtemos na saída $m_h(t)$.

$$H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega) \begin{cases} -j = e^{-j\pi/2} & \omega > 0 \\ j = e^{j\pi/2} & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Segue que $|H(\omega)| = 1$ e

$$\Theta_h(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Ou de outra forma, se atrasarmos todas as componentes de $m(t)$ por $\pi/2$ obtemos $m_h(t)$. Podemos agora expressar um sinal SSB como

$$\Phi_{BLS}(\omega) = M_+(\omega - \omega_c) + M_-(\omega + \omega_c)$$

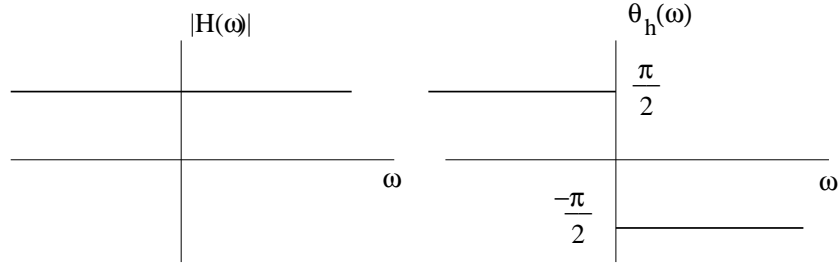


Figura 5.14: Característica do filtro.

que no domínio do tempo torna-se

$$\begin{aligned}
 \phi_{BLS}(t) &= m_+(t)e^{j\omega_c t} + m_-(t)e^{-j\omega_c t} \\
 &= \frac{1}{2}[m(t) + jm_h(t)]e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}[m(t) - jm_h(t)]e^{-j\omega_c t} \\
 &= m(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) + m_h(t)\frac{j}{2}(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}) \quad (5.16) \\
 &= m(t)\cos\omega_c t - m_h(t)\sin\omega_c t \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento acima obtém-se ϕ_{BLI} como

$$\phi_{BLI}(t) = m(t)\cos\omega_c t + m_h(t)\sin\omega_c t. \quad (5.18)$$

Exemplo 30 Seja $m(t)\cos\omega_m t$ (modulação em tom), determine o sinal $\phi_{BLS}(t)$.

Solução

Como $m(t) = \cos\omega_m t$ e a transformada de Hilbert de um sinal consiste em atrasar todas as fases desse sinal de $-\pi/2$, tem-se que $m_h(t) = \cos(\omega_m t - \pi/2) = \sin\omega_m t$. E assim:

$$\begin{aligned}
 \phi_{BLS}(t) &= m(t)\cos\omega_c t - m_h(t)\sin\omega_c t \\
 &= \cos\omega_m(t)\cos\omega_c t - \sin\omega_m(t)\sin\omega_c t \\
 &= \cos(\omega_c + \omega_m)t
 \end{aligned}$$

5.5.1 Geração de Sinais SSB

Dois métodos geralmente são usados:

1. filtros “afiados” pra eliminar a banda lateral indesejada, ou
2. deslocamento em frequência para obter o mesmo resultado.

O primeiro caso é o método mais comum, nele o sinal DSB-SC passa por um filtro “afiado” de modo a suprimir a banda lateral indesejada.

Filtragem

Para obter o sinal BLS, o filtro deve cortar todas as componentes abaixo de ω_c e deixar passar as que estão acima.

O problema é que tal filtro é irrealizável, portanto deve haver alguma separação entre a faixa de passagem do sinal e onde deve ser cortado, como está ilustrado na Figura 5.15.

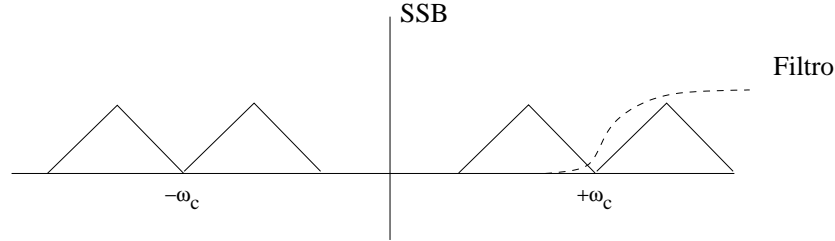


Figura 5.15: Filtragem para obter sinais SSB.

Para nossa sorte, os sinais de voz fornecem essa condição. Em banda básica o sinal de voz tem pouca potência nas baixas frequências, e além disso, foram realizados testes que mostraram não existir perda de inteligibilidade se cortarmos as componentes abaixo de 300Hz. Desse modo podemos filtrar com uma certa facilidade sinais de voz pois temos 600Hz ao redor da região de transição ω_c .

Para que se obtenha um corte considerado bom, a banda lateral indesejada deve ser atenuada em até 40 dB.

Porém se a frequência da portadora é muito alta (p.ex. 10MHz) um intervalo de 660Hz é muito pequeno e pode constituir num problema. A solução é realizar a modulação em mais de um passo, da seguinte forma:

Passo 1 Gerar um sinal DSC-SC com portadora de baixa frequência de modo que seja a filtragem seja fácil, como está representado na Figura 5.16.

Passo 2 O sinal resultante é então modulado para uma frequência alta ω_{c2} e então novamente filtrado, pois o intervalo agora é $2\omega - c$, conforme está ilustrado na Figura 5.17.

Se a portadora f_c for muito alta o processo acima pode ser repetido.

Deslocamento de Fase

A equação

$$\phi_{SSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t$$

é a base para esse método. Esquemáticamente representado na Figura 5.18.

Os blocos $-\pi/2$ deslocam a fase de $\pi/2$, ou seja, realizam a transformada de Hilbert do sinal de entrada. Vale salientar que deslocadores de fase ideais não são realizáveis e, na prática, são muito difíceis de implementar.

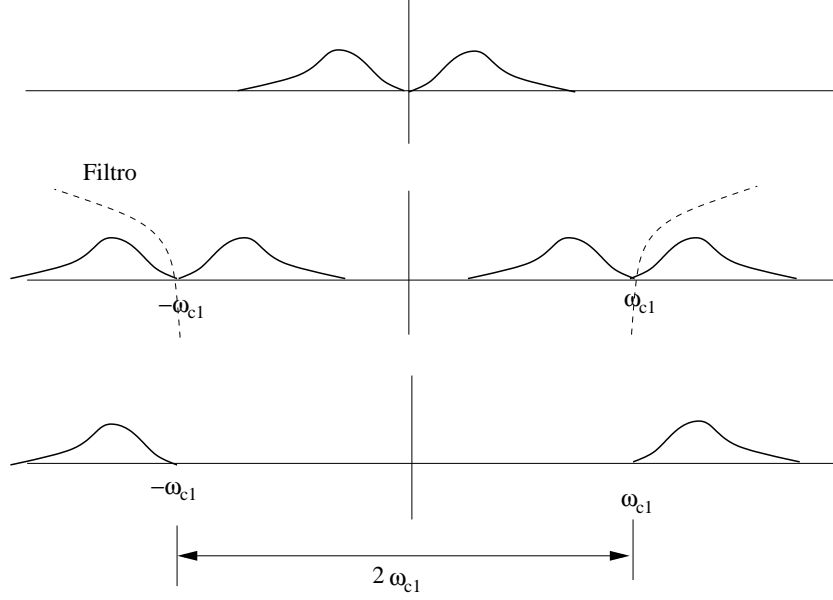


Figura 5.16: Primeiro passo para gerar o sinal SSB.

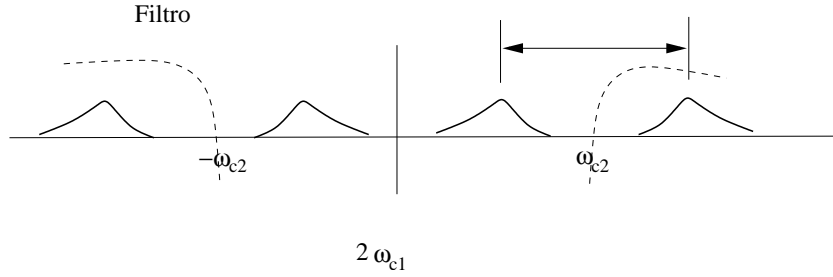


Figura 5.17: Segundo passo para gerar o sinal SSB.

5.6 Demodulação de Sinais SSB-SC

Os sinais SSB-SC podem ser coerentemente detectados, vejamos

$$\phi_{SSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t$$

multiplicando por $\cos \omega_c t$ temos

$$\begin{aligned} \phi_{SSB}(t) \cos \omega_c t &= \frac{1}{2} m(t) [1 + \cos(2\omega_c t)] \mp \frac{1}{2} m_h(t) \sin 2\omega_c t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} [m(t) \cos 2\omega_c t \mp m_h(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned} \quad (5.19)$$

o segundo termo da soma acima é suprimido pelo filtro passa baixas, sobrando apenas a mensagem $m(t)$. Portanto, o demodulador é idêntico ao que já vimos para os sinais DSB-SC.

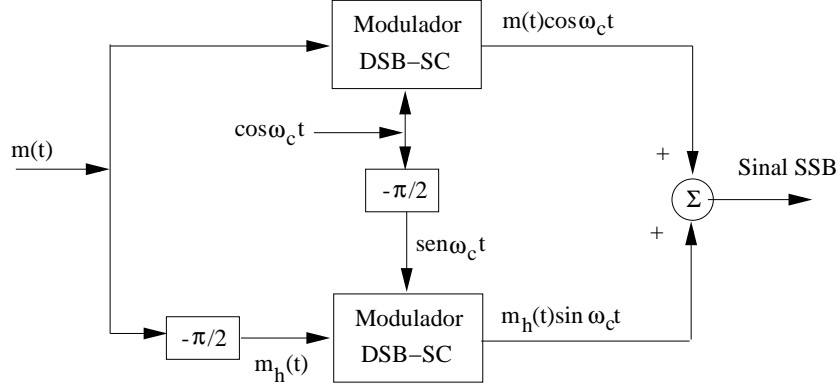


Figura 5.18: Geração de sinais SSB pelo método de deslocamento de fase.

5.7 Sinais SSB com portadora

Tal sinal pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= A \cos \omega_c t + \phi_{SSB}(t) \\ \phi(t) &= A \cos \omega_c t + [m(t) \cos \omega_c t \pm m_h(t) \sin \omega_c t]\end{aligned}$$

Este sinal pode ser recuperado por detecção de envoltória, desde que $A \gg |m(t)|$, vejamos:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t \\ &= E(t) \cos \omega_c(t + \theta)\end{aligned}\tag{5.20}$$

sendo

$$\begin{aligned}E(t) &= \{[A + m(t)]^2 + m_h^2(t)\}^{1/2} \\ &= [A^2 + 2Am(t) + m^2(t) + m_h^2(t)]^{1/2} \\ &= \{A^2[1 + \frac{2m(t)}{A} + \frac{m^2(t)}{A^2} + \frac{m_h^2(t)}{A^2}]\}^{1/2} \\ &= A[1 + \frac{2m(t)}{A} + \frac{m^2(t)}{A^2} + \frac{m_h^2(t)}{A^2}]^{1/2}\end{aligned}\tag{5.21}$$

Se $A \gg |m(t)|$ em geral $A \gg |m_h(t)|$, assim os termos

$$\frac{m^2(t)}{A} \text{ e } \frac{m_h^2(t)}{A^2}$$

são ignorados e

$$E(t) = A \left[1 + \frac{2m(t)}{A} \right]^{1/2}$$

temos que $(1+x)^n \approx 1+nx$ quando $|x| \ll 1$ e como $A \gg m(t)$ tem-se que $m(t)/A \ll 1$ donde

$$E(t) \approx A \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2m(t)}{A} \right] = A + m(t)$$

A condição para detecção por envoltória de sinais AM é que $A \geq -m_{\min}(t)$, para sinais SSB com portadora é que $A \gg m(t)$ e isto implica dizer que em termos de potência os sinais SSB com portadora são menos eficientes que os sinais AM.

5.8 Modulação em Amplitude em Quadratura (QAM)

O sinais DSB tem largura de faixa duas vezes maiores que sinais SSB. Isto pode ser superado se em vez de enviarmos um sinal DSB, enviarmos dois sinais DSB com a mesma frequência mas usando portadoras em quadratura de fase.

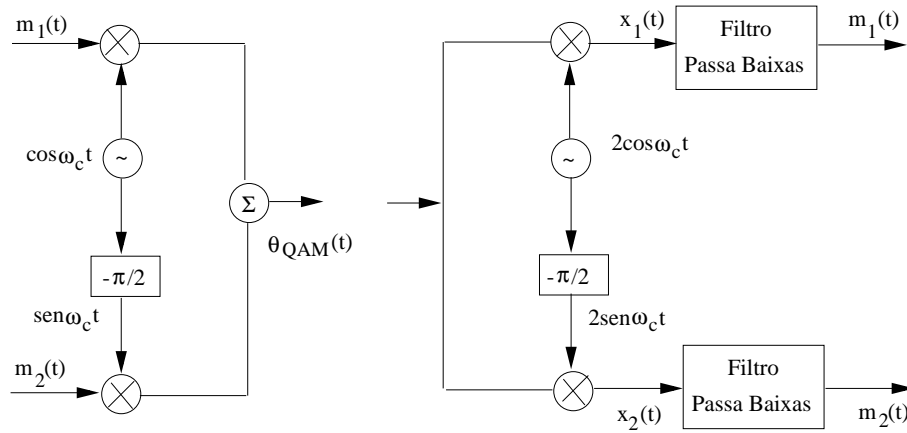


Figura 5.19: Multiplexação em quadratura de amplitude.

Ambos os sinais modulados ocupam a mesma faixa e os dois sinais podem ser separados no receptor por detecção síncrona, usando portadoras locais em quadratura.

Vejamos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t)2 \cos \omega_c t \\ &= [m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c(t)]2 \cos \omega_c t \\ &= m_1(t) + m_1(t) \cos 2\omega_c t + m_2(t) \cos \omega_c t \end{aligned} \quad (5.22)$$

o segundo termo após a igualdade na equação acima é eliminado pelo filtro passa baixas.

De forma similar podemos analisar o outro canal. Este esquema é chamado de **modulação em amplitude em quadratura** QAM (do inglês em Quadrature Amplitude Modulation) ou multiplexação em quadratura.

QAM tem problemas, erro de fase entre as portadora no demodulador causa a perda do sinal e também interferência entre os dois canais. Da mesma forma se as frequências são diferentes.

Já SSB em dois canais adjacentes, um erro de fase nas portadoras causa distorção em cada canal mas não interferência.

Multiplexação em quadratura é usada em televisão em cores para multiplexar os sinais de crominância. QAM é usado também em transmissão digital. Vamos ver uma aplicação sobre linhas telefônicas.

Sabemos que para transmitir pulsos em banda básica a uma faixa de 2400bits/s necessitamos um mínimo de 1200Hz de banda. Na prática a largura de faixa necessária é definida (usando 1 primeiro critério de Nyquist) como

$$(1 + r)1200 \text{ sendo } 0 \leq r \leq 1$$

o parâmetro r é chamado de “roll-off” e determina a porcentagem a mais de faixa usada além da faixa mínima necessária.

No nosso exemplo usaremos 12,5% de “roll-off” ou $r = 0,125$ e assim $(1 + 0,125)1200 = 1350\text{Hz}$ de largura de banda para o sinal em banda básica.

Modulação dobra a largura de faixa para 2700Hz, ou seja, precisamos dessa largura de faixa para transmitir 2400bps de dados.

Uso de QAM dobra a taxa com a mesma largura de faixa. Ao invés de transmitirmos um sinal $m(t)$ PSK podemos enviar dois sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ PSK em quadratura de fase. Por esta razão este método também é chamado de PSK em quadratura ou QPSK.

Podemos aumentar ainda mais a taxa de transmissão usando QAM M -ário. Um caso prático com $M = 16$ usa 16 pulsos com o formato dado por

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p(t) \cos \omega_c t + b_i p(t) \sin \omega_c t \\ &= r_i p(t) \cos(\omega_c t + \theta_i) \quad i = 1, 2, \dots, 16 \end{aligned} \quad (5.23)$$

sendo $p(t)$ o formato do pulso. Os valores de r_i e θ_i (a_i e b_i) são escolhidos como está representado na Figura 5.20.

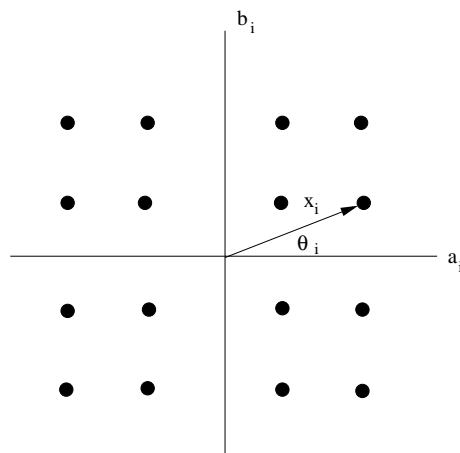


Figura 5.20: Constelação de Sinais 16 QAM.

Como temos 16 sinais $\Rightarrow \log_2 16 = 4$ dígitos binários e cada pulso p_i transmite 4 bits, logo podemos transmitir a uma taxa de $4 \times 2400 = 9600 \text{bps}$.

Os sinais $m_1(t) = a_i p(t)$ e $m_2(t) = b_i p(t)$ são os sinais que entram no modulador (QAM). As saídas do demodulador serão $a_i p(t)$ e $b_i p(t)$, e desse modo, dado o par (a_i, b_i) sabemos qual combinação dos 4bits foi transmitida.

Na transmissão pela linha telefônica, necessitamos em cada ponto terminal um modulador e um demodulador para transmitir e receber os dados. O transmissor e o receptor (**modulador** e **demodulador**) está geralmente num único equipamento chamado de modem.

5.9 Banda Lateral Vestigial (VSB)

Como já foi visto se um sinal não tem nível DC nulo é extremamente difícil gerar sinais SSB. Um sistema VSB (do inglês *Vestigial Side Band*) é um compromisso entre os sistemas DSB-SC e SSB. Sinais DSB-SC são mais fáceis de gerar que SSB, mas ocupam duas vezes mais faixa de frequência.

Sinais VSB são relativamente fáceis de gerar e ocupam uma faixa 25% maior, tipicamente, que sinais SSB.

No VSB, ao invés de rejeitarmos completamente uma das bandas laterais, um corte gradual é realizado em uma das bandas como está ilustrado na Figura 5.21.

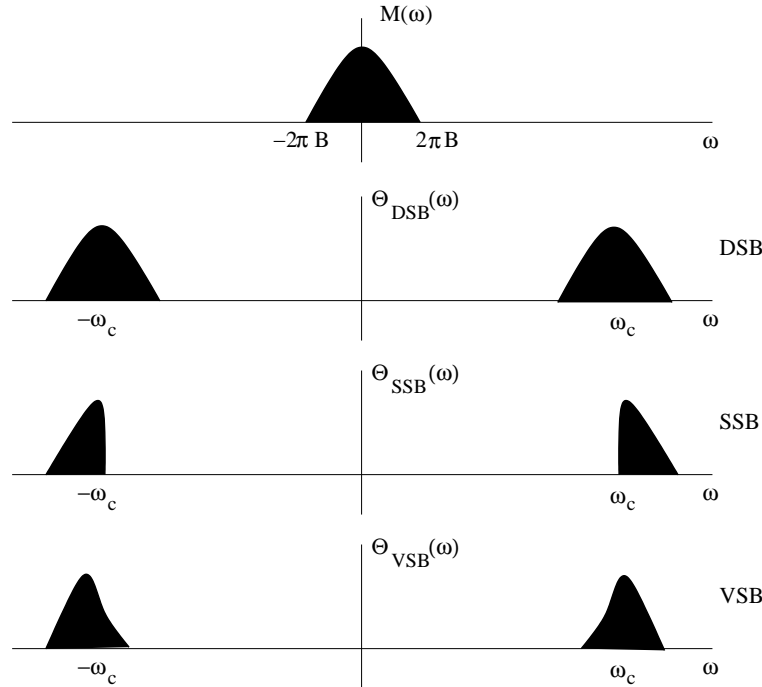


Figura 5.21: Espectro de sinais DSB, SSB e VSB.

O sinal banda básica pode ser recuperado por detecção síncrona em conjunto com um filtro equalizador $H_0(\omega)$. Se usarmos uma portadora podemos usar detectores de envoltória

para recuperar o sinal enviado.

Na Figura 5.22 estão representados o transmissor e o receptor VSB e na Figura 5.23 estão representadas as características dos filtros $H_i(\omega)$.

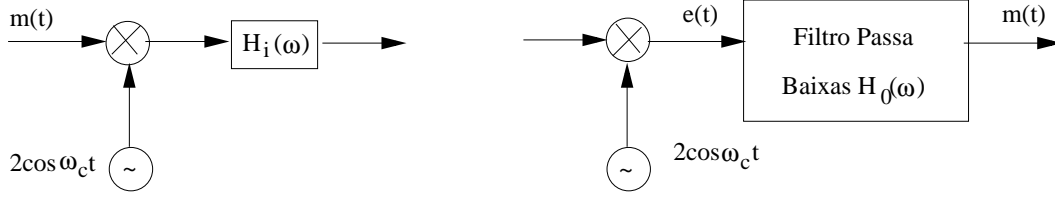


Figura 5.22: Transmissor e Receptor VSB.

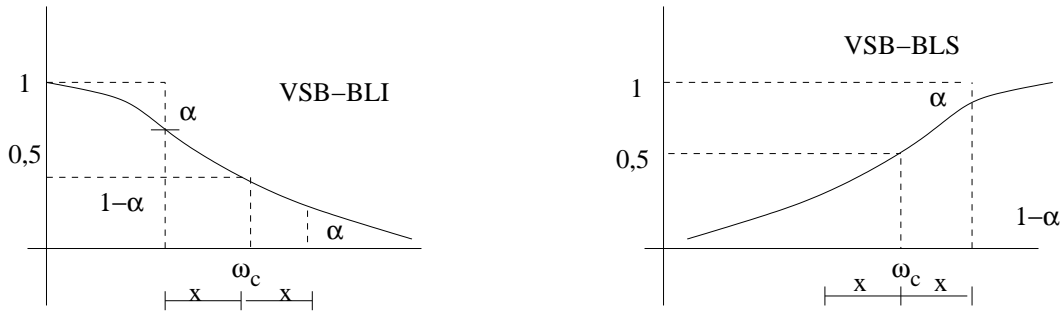


Figura 5.23: Característica dos filtros $H_i(\omega)$ para VSB.

A partir do sinal DSB temos

$$\phi_{DSB}(\omega) = [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]H_i(\omega)$$

sendo $H_i(\omega)$ um filtro facilmente realizável, cuja característica está representado na Figura 5.23.

Desejamos que $m(t)$ seja recuperado usando demodulação síncrona e como

$$e(t) = 2\phi_{VSB}(t) \cos \omega_c t \Leftrightarrow \Phi_{VSB}(\omega + \omega_c) + \Phi_{VSB}(\omega - \omega_c)$$

passando pelo filtro equalizador $H_0(\omega)$ tem-se

$$M(\omega) = [\Phi_{VSB}(\omega + \omega_c) + \Phi_{VSB}(\omega - \omega_c)]H_0(\omega)$$

substituindo Φ_{VSB} , obtemos:

$$M(\omega) = \{[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega)]h_i(\omega + \omega_c) + [M(\omega) + M(\omega - 2\omega_c)]h_i(\omega - \omega_c)\}H_0(\omega)$$

$H_0(\omega)$ é um filtro passa-baixas de modo que as componentes em $\pm 2\omega_c$ são eliminadas e então tem-se

$$M(\omega) = M(\omega)[H_i(\omega + \omega_c) + H_i(\omega - \omega_c)]H_0(\omega)$$

donde

$$H_0(\omega) = \frac{1}{H_i(\omega + \omega_c) + H_i(\omega - \omega_c)} \quad |\omega| \leq 2\pi B$$

Observe que $H_i(\omega)$ é um filtro passa-faixa centrado em ω_c , de modo que $H_i(\omega \pm \omega_c)$ contém componentes em frequências baixas.

Exemplo 31 A frequência da portadora de um certo sinal VSB é $f_c = 20\text{KHz}$ o sinal em banda básica tem largura de faixa de 6KHz . O filtro $H_i(\omega)$ corta gradualmente até 2KHz a banda lateral inferior, como está representado na Figura 5.24. Determine $H_0(\omega)$ para uma recepção sem distorção

Solução: Primeiro precisamos achar quem é $h_i(\omega + \omega_c) + H_i(\omega - \omega_c)$

As componentes em $\pm 40\text{Hz}$ são suprimidas pelos filtros passa-baixas $H_0(\omega)$, que estamos interessado em descobrir, temos

$$H_0(\omega) = \frac{1}{H_i(\omega) + H_i(\omega - \omega_c)} \quad \text{para } |\omega| \leq 2\pi B$$

donde obtemos os sinais representados na Figura 5.24.

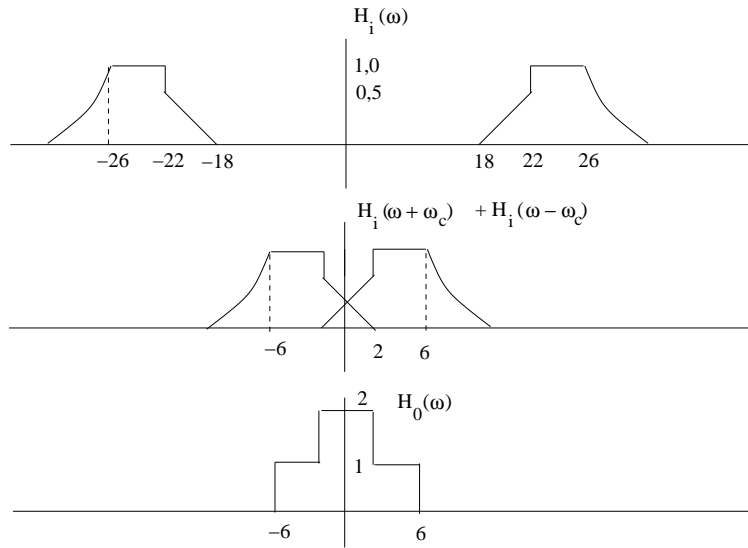


Figura 5.24: Saída VSB do filtro.

5.9.1 Detecção por Envoltória de Sinais VSB+C

Podemos provar que os sinais VSB+C podem ser demodulados por envoltória de forma similar como foi feito para sinais SSB+C.

Vimos que SSB+C necessita de uma portadora muito maior que os sinais DSB+C (AM). Como os sinais VSB estão numa classe entre esses dois sinais, a portadora não é tão grande como no caso do SSB+C mas é maior que no caso de AM.

5.9.2 Uso do VSB em Sinais de Televisão (Por Difusão)

O sinal de TV ocupa uma largura de faixa de 4,5MHz em banda básica. Usando a modulação DSB, a largura de faixa necessária para transmitir esse sinal seria de 9MHz. Pode-se então pensar em usar SSB para transmitir esses sinais e assim usar uma faixa de 4,5Mhz, entretanto os sinais de TV tem potências altas nas baixas frequências, o que tornaria quase impossível suprimir uma das bandas laterais com filtros.

Além dos fatos já citados, como o sistema de TV é por difusão é interessante termos receptores mais simples, usando detecção de envoltória. Mais uma vez pode-se cogitar o uso de (SSB+C) porém com esta escolha muita potência seria usada na portadora.

O uso de VSB+C é um compromisso entre os sistemas DSB+C e SSB+C. O espectro resultante do sinal é de 6MHz.

5.10 Linearidade de Modulação em Amplitude

Todos os tipos de modulação em amplitude satisfazem o princípio de superposição (excluindo a portadora), ou seja, se $m_1(t)$ e $m_2(t)$ são sinais modulantes que produzem os sinais modulados $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ então

$$k_1 m_1(t) + k_2 m_2(t)$$

produz

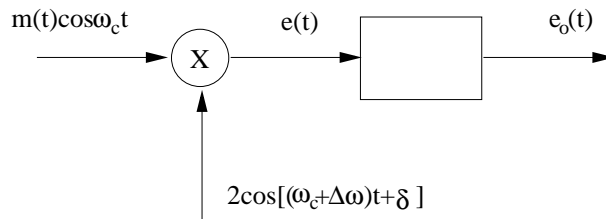
$$k_1 \phi_1(t) + k_2 \phi_2(t)$$

Isto é interessante pois qualquer sinal (real) pode ser expresso como uma soma de senóides.

5.11 Aquisição da Portadora

DSB-SC, SSB-SC e VSB-SC necessitam que na recepção seja gerada uma portadora, que idealmente deve estar em sincronismo de fase e de frequência com a portadora usada no transmissor. Qualquer discrepância causa distorção na saída de detector.

Vamos considerar o sinal DSB-SC $m(t) \cos \omega_c t$ e a portadora local $2 \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta]$ assim



$$\begin{aligned} e(t) &= 2m(t) \cos \omega_c t \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta] \\ &= m(t) \{ \cos(2\omega_c t + \Delta\omega t) + \cos[\Delta\omega t + \delta] \} \end{aligned} \quad (5.24)$$

o primeiro termo da soma após a igualdade é eliminada pelo filtro e na saída obtém-se

$$e_0(t) = m(t) \cos[\Delta\omega t + \delta]$$

Se $\Delta\omega$ e δ são zero então $e_0(t) = m(t)$.

Se $\Delta\omega = 0$ e $\delta \neq 0$ então

$$e_0(t) = m(t) \cos \delta$$

quando δ for constante $e_0(t)$ é proporcional a $m(t)$. Quando $\delta = 0$ tem-se o mínimo e quando $\delta = \pm\pi/2$ tem-se o máximo. Isto quer dizer que o erro de fase causa uma atenuação no sinal $m(t)$ sem sem distorção. Infelizmente, o erro de fase varia aleatoriamente com o tempo e isto ocorre por vários fatores, como por exemplo devido a variação no caminho de propagação. Se $\Delta\omega \neq 0$ e $\delta = 0$ então

$$e_0(t) = m(t) \cos \Delta\omega t$$

e nesse caso o sinal não é apenas atenuado mas também distorcido. Em geral $\Delta\omega$ é pequeno, $e_0(t)$ é o sinal amplificado por uma senóide de baixa frequência. A amplitude de $m(t)$ varia de um mínimo pra zero como tempo, periodicamente em 2 vezes o número de períodos da frequência de batimento $\Delta\omega$.

Este efeito de “batimento” é catastrófico mesmo para diferenças pequenas de frequência. Por exemplo, $\Delta f = 1Hz$ tem um efeito de uma criança aumentar e diminuir o volume do som duas vezes num segundo.

Para assegurar frequências idênticas o receptor e o transmissor podem usar osciladores a cristal de Quartzo. Acontece que para altas frequências as dimensões de cristal tornam-se tão pequenas que fica difícil um cristal ideal.

Em tais casos uma portadora, chamada de piloto, é transmitida a níveis reduzidos (-20dB). O piloto é seprado do sinal por um filtro passa-faixas estreito e sintonizado na frequência piloto. Ele é então amplificado e usado para sincronizar o oscilador local.

No caso de sinais SSB-SC a natureza da distorção é um pouco diferente quando a portadora local é $2 \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t]$. Na saída as componentes espectrais de $m(t)$ são deslocadas por $\Delta\omega$ e isso destrói a relação harmônica entre as componentes de frequência. Se $\Delta f = 10Hz$ as frequências 1000 e 200Hz tornam-se 1010 e 2010.

A menos que Δf seja realmente grande isto não afeta a ilegibilidade. Para sinais de áudio $\Delta f < 20Hz$ é aceitável e $\Delta f > 30Hz$ produz um som parecido com o de pato Donald.

Ou seja, sincronismo da portadora é mais crítico em sinais DSB-SC que em sinais SSB-SC.

Vamos ver agora métodos de aquisição de portadoras DSB-SC.

Método de Elevar o Sinal ao Quadrado

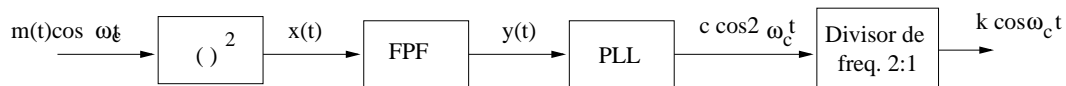


Figura 5.25: Geração da portadora coerente usando o quadrado do sinal.

$$x(t) = m^2(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2}m^2(t) + \frac{1}{2}m^2(t) \cos 2\omega_c t$$

$m^2(t)$ é um sinal positivo e apresenta um nível DC que será denominado de K . Podemos expressar $m^2(t)/2$ como

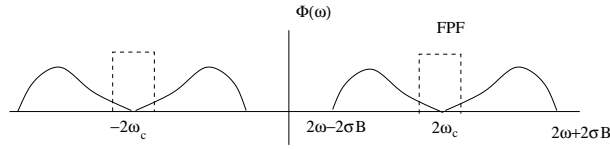
$$\frac{1}{2}m^2(t) = K + \phi(t)$$

sendo $\phi(t)$ um sinal banda básica com média zero, assim

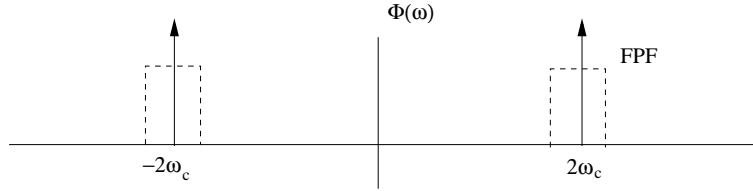
$$x(t) = \frac{1}{2}m^2(t) + k \cos 2\omega_c t + \phi \cos 2\omega_c t$$

e novamente o segundo termo da soma após a igualdade é eliminado pelo filtro.

O filtro passa faixas suprime $(1/2)m^2(t)$ e parte de $\phi(t) \cos 2\omega_c t$. Lembrando que $\phi(t)$ tem nível DC igual a zero.



agora o espectro de $k \cos 2\omega_c t$ será



então $g(t) = k \cos 2\omega_c t + \text{resíduo de } \phi \cos 2\omega_c t$.

O resíduo pode ser suprimido pelo PLL que segue $k \cos 2\omega_c t$. Passando a saída do PLL pelo decisor de frequências 2:1 temos a portadora desejada.

Laço de Costas

O VCO gera a portadora $2 \cos(\omega_c t + \Theta_0)$. O erro de fase é dado por $\Theta_l = \Theta_i - \Theta_0$.

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 2m(t) \cos(\omega_c t + \theta_i) \cos(\omega_c t + \theta_0) \\ &= m(t) \cos(2\omega_c t + \theta_i + \theta_0) + m(t) \cos(\theta_i - \theta_0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

o primeiro termo da soma é eliminado pelo filtro.

A saída do filtro será $m(t) \cos \theta_l$. O mesmo para $e_2(t)$ no ramo de baixo $m(t) \sin \theta_l$. A entrada do filtro passa baixas é

$$m^2(t) \sin \theta_l \cos \theta = \frac{1}{2}m^2(t) \sin 2\theta_l$$

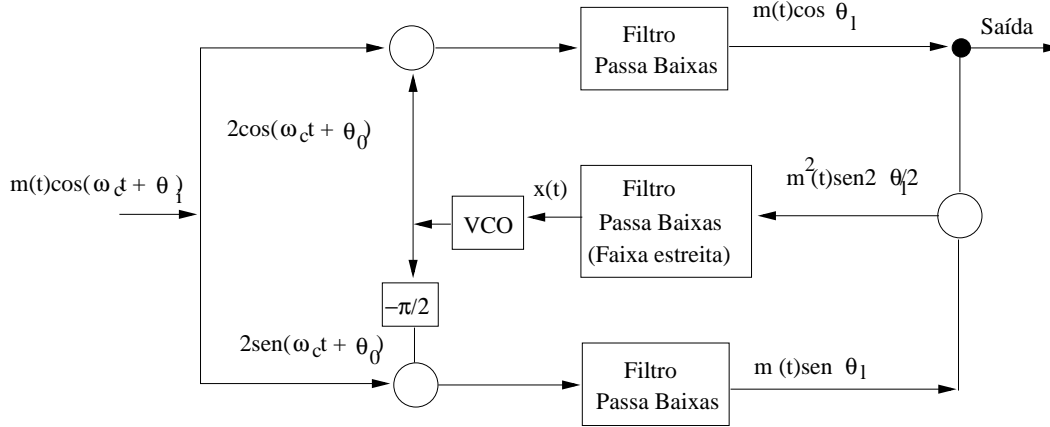


Figura 5.26: Receptor com PLL para a geração da portadora coerente na demodulação.

e a saída será $k \sin 2\theta_l$ sendo k a componente DC de $\frac{1}{2}m^2(t)$.

O sinal é aplicado ao VCO que tem frequência “quiescente” ω_c .

O termo $k \sin 2\theta_l$ aumenta a frequência ω_c que reduz θ_l .

A saída do VCO passa a ser $2 \cos(\omega_c t + \Delta\omega t + \theta_0)$ e a saída do filtro passa baixas que tem $e_1(t)$ como entrada

$$\cos(\theta_i - \theta_0 - \Delta\omega t) = \cos(\theta_l - \Delta\omega t)$$

Para sinais DSB-Sc e VSB-SC estas duas técnicas podem ser aplicadas, por exemplo o sinal SSB

$$E(t) = \sqrt{m^2(t) + m_h^2(t)} \text{ e } \theta(t) = \tan^{-1} \left[\frac{\mp m_h(t)}{m(t)} \right] \quad (5.26)$$

$$\phi_{SSB}^2(t) = E^2(t) \cos^2(\omega_c t + \theta(t)) = \frac{1}{2} E^2(t) \{1 + \cos[2\omega_c t + 2\theta(t)]\} \quad (5.27)$$

O termo $\frac{1}{2} E^2(t) \cos[2\omega_c t + 2\theta(t)]$ não é uma senóide pura e não temos como eliminar $2\theta(t)$. Então quando não são usados cristais uma portadora piloto é utilizada.

5.12 Multiplexação por Divisão em Frequências (FDM)

Vários sinais compartilham a faixa de passagem do canal e as várias portadoras são separadas adequadamente para evitar sobreposição de espectros. Estas portadoras são chamadas de subportadoras. Um exemplo de FDM com três suportaora está representado na Figura 5.27.

5.13 Receptor AM Superheterodino

Consiste de uma seção de RF em conversor de frequência, um amplificador de IF, um detector de envoltória e um amplificador de áudio.

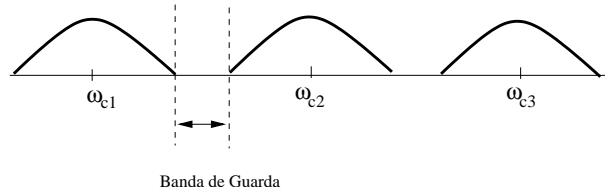


Figura 5.27: Representação de um FDM com três subportadoras.

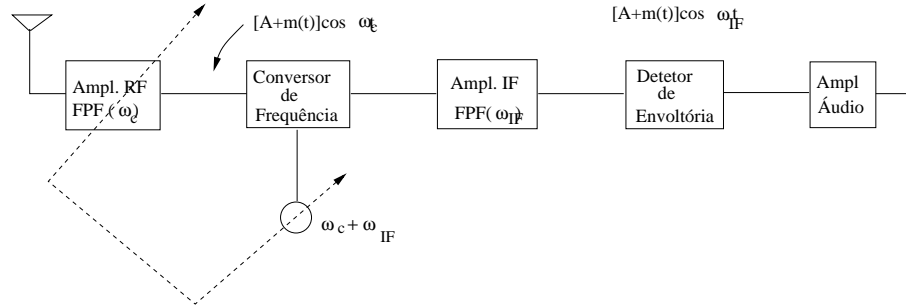


Figura 5.28: Receptor Superheterodino.

A seção de RF é um filtro sintonizável e um amplificador que sintoniza na estação desejada.

Na próxima seção o conversor de frequências converte ω_c para uma frequência IF de 455KHz. Para conseguir isto, o oscilador local é exatamente 455KHz acima da portadora

$$F_{01} = f_c + 455KHz = f_c + f_{IF}$$

A razão para isso é para obter uma seletividade adequada. É difícil projetar filtros adequados de 10Khz de largura de faixa (áudio) se f_c é muito alta. Particularmente quando o filtro é sintonizável. Isto quer dizer que o filtro de RF não pode fornecer seletividade adequada para canais adjacentes.

Toda seletividade é realizada praticamente na seção de RF, que também amplifica o sinal para o detector de envoltória. A principal função da seção de RF é a supressão da frequência imagem. Por exemplo, se $f_c = 1000KHz$ e $f_{10} = 1455KHz$ mas $f' = 1455KHz$ e $f_{10} = 1910KHz$ também é captada em 455KHz pois $|f' - f_{10}| = 455KHz$ a estação imagem da estação de 1000KHz.

Estações a $910KHz = 2f_{IF}$ são estações imagem e aparecem simultaneamente na saída de IF.

A seção de RF fornece uma baixa seletividade para estações adjacentes mas alta seletividade para estações separadas por 910KHz.

O receptor que estamos analisando converte a frequência da portadora para uma frequência IF usando um oscilador local de frequência f_{IO} maior que a da portadora (conversão para cima) e por isso o receptor é chamado de super-heterodino.

Este princípio foi introduzido por E. H. Armstrong e é usado em receptores AM, FM e em televisores. A razão para se usar a conversão para cima e não para baixo é que é mais

fácil projetar os osciladores.

A faixa de frequências do AM comercial é de 550 a 1600KHz. A conversão para cima de 1005 a 2055kHz razão de 2,045 e para baixo de 95 a 1145Khz razão de 12,05. Canais de 10KHz de largura de faixa e as mensagens na faixa de 4 a 4KHz. Cada canal é separado por uma banda de guarda de 30KHz.

Capítulo 6

Modulação em Ângulo

Nos anos 20 a radiodifusão estava no início e se procurava uma forma de transmissão que reduzisse o efeito do ruído (estática). Como a potência do ruído é proporcional a largura de faixa do sinal modulado, e idéia era encontrar um esquema de modulação que reduzisse a largura de faixa.

Vislumbrou-se então um novo método que eliminava as bandas laterais. A idéia era variar a frequência com o sinal mensagem,

$$\omega(t) = \omega_c + km(t)$$

sendo k uma constante arbitrária. Acreditava-se que se $m(t)$ varia de $-m_p$ a m_p , então os valores mínimo e máximo de $\omega(t)$ seriam $\omega_{MIN}(t) = \omega_c - km_p$ e $\omega_{MAX}(t) = \omega_c + km_p$ respectivamente. Portanto, as componentes espectrais ficariam numa faixa de $2km_p$ centradas em ω_c . Como k é uma constante, ela pode ser feita arbitrariamente pequena produzindo assim uma faixa arbitrariamente pequena.

Infelizmente observou-se na prática a largura do sinal modulado seguindo a regra acima é na melhor das hipóteses igual a utilizada por um sinal AM. Neste capítulo a técnica de modulação que varia a frequência de portadora em função de mensagem é apresentada e é mostrado o que acontece para que o pensamento descrito acima não esteja correto.

6.1 Modulação em Ângulo ou Exponencial

Como foi mostrado a informação pode ser transmitida pela modificação das características de uma senóide. No Capítulo anterior variando a amplitude dessa senóide de acordo com a mensagem e mantendo sua frequência constante obtivemos a modulação em amplitude. Agora vamos modificar a fase ou a frequência dessa senóide em função da mensagem.

Na modulação em frequência, desejamos variar a frequência da portadora em função do sinal modulante $m(t)$. Ou seja, a frequência da portadora será modificada a cada instante. É interessante que tenhamos um sinal senoidal com pelo menos um ciclo na mesma frequência, e isto nos leva ao conceito de frequência instantânea.

Seja um sinal senoidal generalizado

$$\phi(t) = A \cos \theta(t)$$

sendo $\theta(t)$ o ângulo generalizado que é função de t . Para $\theta(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0)$, $\theta_t(t) = \omega_c t + \theta_0$, graficamente temos o ângulo generalizado representado na Figura 6.1.

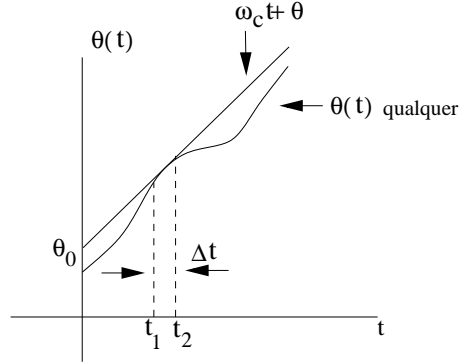


Figura 6.1: Ângulo generalizado.

Em um pequeno intervalo Δt podemos dizer que $\omega_c t + \theta_0$ é a tangente de $\theta(t)$. Dessa forma sob esse pequeno intervalo tem-se

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0$$

ou

$$\phi(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0) \quad t_1 < t < t_2.$$

Assim podemos dizer que no pequeno intervalo Δt a frequência de $\phi(t)$ é ω_c , ou de outra forma, que a frequência de $\phi(t)$ é a inclinação da tangente de $\theta(t)$ no intervalo Δt . Generalizando para qualquer intervalo γ , definimos a frequência instantânea ω_i como a inclinação de $\theta(t)$ no tempo t , ou

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

e

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \omega_i(\alpha) d\alpha.$$

Veremos como transmitir $m(t)$ variando $\theta(t)$. Tal técnica é chamada de modulação em ângulo ou exponencial. Para esse tipo de modulação existem duas possibilidades:

1. Modulação em fase (PM)
2. Modulação em frequência (FM)

Na modulação em fase $\theta(t)$ varia linearmente com $m(t)$

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p m(t)$$

sendo k_p uma constante, ω_c a frequência da portadora e θ_0 a fase de portadora que pode ser feita igual a zero sem perda de generalidade, então

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t)$$

assim

$$s_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + k_p m(t)] \quad (6.1)$$

e a frequência instantânea ω_i será

$$\omega_i = \frac{d}{dt}[\omega_c t + k_p m(t)] = \omega_c + k_p m'(t).$$

Portanto, na modulação em fase a frequência instantânea varia linearmente com a derivada do sinal modulante.

Se a frequência instantânea é que varia linearmente com o sinal modulante temos modulação em frequência (FM), ou seja

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t) \quad (6.2)$$

sendo k_f uma constante, temos

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_{-\infty}^t [\omega_c + k_f m(\alpha)] d\alpha \\ &= \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde,

$$s_{FM} = A \cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha]. \quad (6.4)$$

As equações 6.1 e 6.4 dos sinais PM e FM respectivamente são bastante similares, na verdade observando os sinais PM e FM no tempo não é possível distingui-los. Devido a dualidade entre FM e PM, se temos um modulador de fase podemos gerar um modulador em frequência e vice-versa, como está ilustrado na Figura 6.2. O primeiro método foi usado na prática por Armstrong e era chamado de sistema FM indireto (1936).

Isto sugere que podemos ter uma função generalizada, na qual FM e PM são casos especiais, esta função é chamada de modulação exponencial (EM - *Exponential Modulation*) e é dada por

$$s_{EM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k \int_{-\infty}^{\infty} m(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha \right]$$

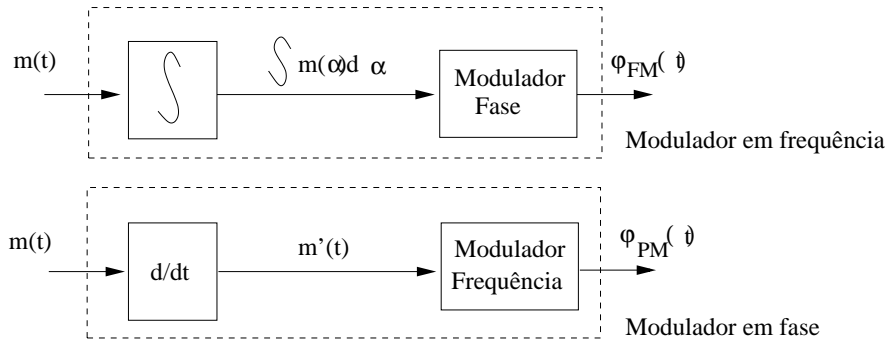


Figura 6.2: Moduladores em Frequência e Fase.

sendo k uma constante. Se

$$h(t) = \delta(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} m(\alpha) \delta(t - \alpha) d\alpha = m(t)$$

temos um sinal PM, se

$$h(t) = u(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} m(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

temos um sinal FM.

Exemplo 32 Desenhe as ondas FM e PM para o sinal $m(t)$ representado na Figura abaixo. $k_f = 2\pi 10^5$, $k_p = 10\pi$ e $f_c = 100\text{KHz}$.

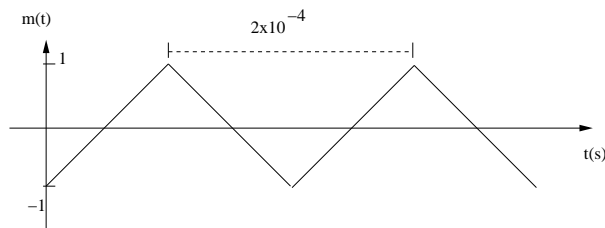


Figura 6.3: Função do Exemplo 32.

Solução: Em FM temos $\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$ que dividindo por 2π é

$$\begin{aligned} f_i &= f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) \\ &= 100 \times 10^6 + \frac{2\pi 10^5}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t) \end{aligned}$$

donde obtém-se $f_{i(min)} = 10^8 - 10^5 = 99,9\text{MHz}$ e $f_{i(max)} = 10^8 + 10^5 = 100,1\text{MHz}$.

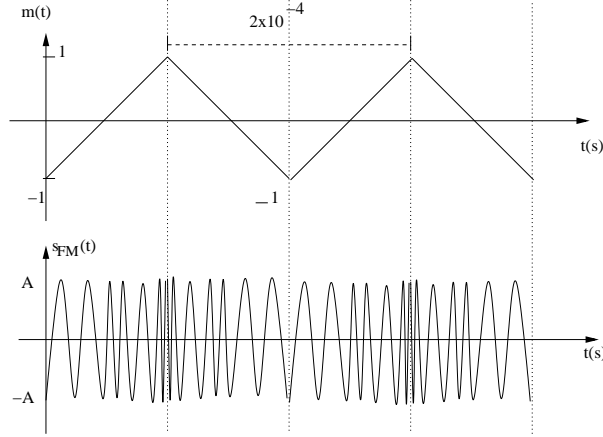


Figura 6.4: Sinal do Exemplo 32 modulado em frequência.

Como $m(t)$ cresce (ou decresce) linearmente com o tempo f_i cresce (ou decresce) de 99,99MHz a 100,1MHz linearmente com o tempo.

b) PM: temos que PM para $m(t)$ é FM para $m'(t)$, de forma que

$$\begin{aligned} f_i &= f_c + \frac{k_p}{2\pi} m'(t) \\ &= 10^8 + \frac{10\pi}{2\pi} m'(t) = 10^8 + 5m'(t) \end{aligned}$$

$m'(t) = a$ quando $m(t)$ varia de -1 a 1 e $m'(t) = -a$ quando $m(t)$ varia de 1 a -1, sendo que a indica a inclinação da reta definida pelos pontos -1 a 1 em t , ou seja

$$a = \frac{1 - (-1)}{10^{-4}} = 2 \times 10^4 = 20.000$$

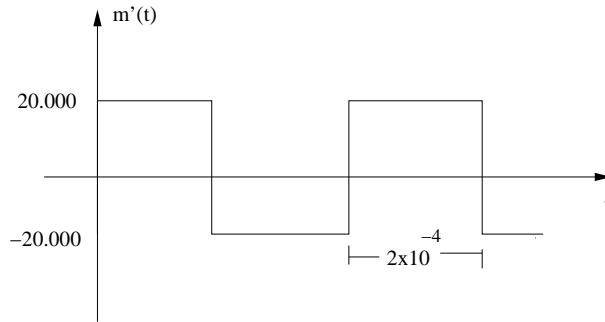


Figura 6.5: Derivada do sinal do Exemplo 32.

$$f_{i(min)} = 10^8 - 5 \times 20.000 = 10^8 - 10^5 = 99,99MHz \quad f_{i(max)} = 10^8 + 5 \times 20.000 = 10^8 + 10^5 = 100,1MHz$$

Como $m'(t)$ comuta de 20.000 a -20.000 a cada $10^{-4}s$ a f_i comuta de 100,1 e 99,9Mhz a cada $10^{-4}s$.

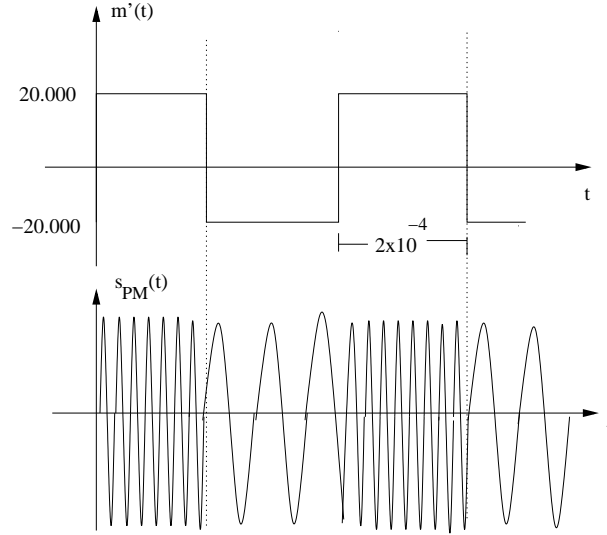


Figura 6.6: Sinal modulado em Fase do Exemplo 32.

Exemplo 33 *Desenhar ondas FM e PM para um sinal modulante digital $m(t)$ abaixo. $k_f = 2\pi 10^5$, $k_p = \pi/2$ e $f_c = 100\text{MHz}$.*

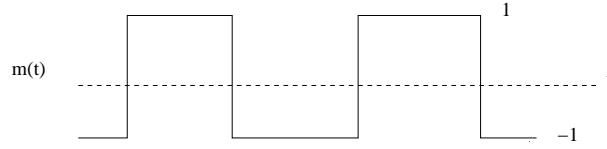


Figura 6.7: Sinal do Exemplo 33.

Solução:

a) FM, temos

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t).$$

Como $m(t)$ comuta de 1 a -1 e vice-versa, a onda FM também de 100,1 a 99,9MHz

Este esquema de modulação é chamado de FSK (*Frequency-Shift Keying*) comutação por deslocamento em frequência.

b) Para PM, temos

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m'(t) = 10^8 + \frac{1}{4} m'(t).$$

e não fica claro como a f_i se altera. Portanto vamos considerar a abordagem direta.

$$\begin{aligned} s_{PM}(t) &= A \cos[\omega_c t + k_p m(t)] \\ &= A \cos[\omega_c t + \frac{\pi}{2} m(t)] \end{aligned}$$

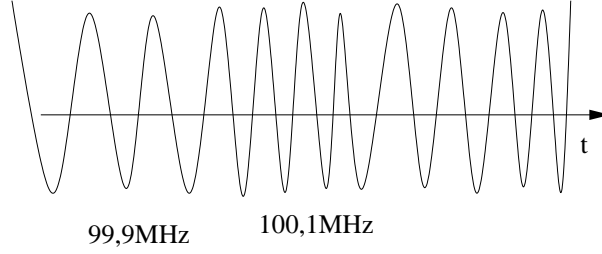


Figura 6.8: Sinal do Exemplo 33 modulado em FM.

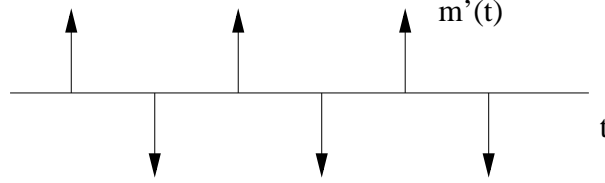


Figura 6.9: Sinal do Exemplo 33 derivado no tempo.

$$s_{PM}(t) = \begin{cases} A \cos[\omega_c t + \frac{\pi}{2}] = -A \sin \omega_c t & \text{para } m(t) = 1 \\ A \cos[\omega_c t - \frac{\pi}{2}] = A \sin \omega_c t & \text{para } m(t) = -1 \end{cases}$$

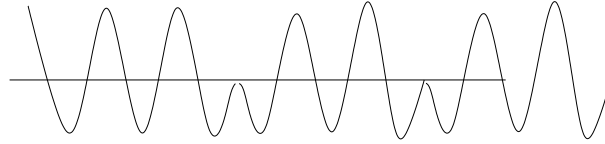


Figura 6.10: Sinal do Exemplo 33 modulado em fase.

Este esquema é chamado PSK (*Phase-Shift Keying*) comutação por deslocamento de fase. Observe que ele pode ser visto como uma modulação DSB-SC por $m(t)$.

A onda $s_{PM}(t)$ tem descontinuidade nos instantes onde os impulsos em $m'(t)$ estão localizados. Isto implica que $\omega_i = \frac{d\Theta}{dt}$ nestes instantes $\rightarrow \infty$.

É interessante notar que k_p deve ser escolhido de forma que a fase fique restrita a faixa $(-\pi, \pi)$. Por exemplo, se $k_p = \frac{3\pi}{2}$ em nosso exemplo

$$s_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + \frac{3\pi}{2} m(t)]$$

e $s_{PM}(t) = A \sin \omega_c t$ quando $m(t) = 1$ e $m(t) = -1/3$ o que pode causar ambiguidades no receptor.

Se $m(t)$ for contínuo a restrição sobre k_p não é necessária. Com isso podemos dizer que para $m(t)$ limitado em faixa k_p não tem qualquer restrição.

6.2 Potência de uma Onda Modulada em Ângulo

Embora ω_i varie como tempo, a amplitude A permanece sempre a mesma. Portanto $P_{s_{PM}} = P_{s_{FM}} = \frac{A^2}{2}$ independente de k_p e k_f .

6.3 Largura de Faixa de Sinais Modulados em Ângulo

Primeiro caso de FM, vamos ter

$$a(t) = \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

assim

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A \cos(\omega_c t + k_f a(t)) \\ &= \text{Re}[A e^{j(\omega_c t + k_f a(t))}] \\ &= \text{Re}[\hat{s}_{FM}(t)] \end{aligned} \quad (6.5)$$

agora

$$\hat{s}_{FM}(t) = A e^{j\omega_c t} e^{jk_f a(t)}$$

expandido em série este último termo

$$\hat{s}_{FM}(t) = A e^{j\omega_c t} \left[1 + j k_f a(t) - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) + \dots + \frac{j^n k_f^n a^n(t)}{n!} + \dots \right]$$

tomando a parte real

$$\begin{aligned} \hat{s}_{FM}(t) &= A \cos\left[1 - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) + \dots\right] + A \sin \omega_c t \left[-k_f a(t) + \frac{k_f^3 a^3(t)}{3!} - \dots\right] \\ &= A \left[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t - \frac{k_f^2 a^2(t)}{2!} \cos \omega_c t + \frac{k_f^3 a^3(t)}{3!} \sin \omega_c t + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se $M(\omega)$ é limitado em faixa em BHz então $M(\omega) \frac{1}{j\omega} = A(\omega)$ (integral) também é limitada em BHz .

$$\begin{aligned} a^2(t) &\leftrightarrow A(\omega) * A(\omega) / 2\pi \text{ limitada em } 2BHz \\ a^n(t) &\leftrightarrow A(\omega) * A(\omega) * \dots A(\omega) / (2\pi)^{n-1} \text{ limitada em } nBHz. \end{aligned} \quad (6.7)$$

De modo que o espectro total é o espectro da portadora mais o espectro dos a^n centrados em ω_c . É fácil notar que este espectro é ilimitado em faixa.

Embora teoricamente a largura de faixa de uma onda FM seja infinita, podemos notar que a maior parte da potência do sinal está contida numa faixa finita. Usando essa informação tem-se dois casos a considerar:

- FM de faixa estreita, e
- FM de faixa larga

6.4 Modulação em Ângulo em Faixa Estreita

A modulação em ângulo é não linear, por exemplo

$$A \cos\{\omega_c t + k_f[a_1(t) + a_2(t)]\} \neq A \cos[\omega_c t + k_f a_1(t)] + A \cos[\omega_c t + k_f a_2(t)]$$

para confirmar esse fato basta a expansão do cosseno.

Agora se fizermos k_f muito pequeno de modo que $|k_f a(t)| \ll 1$ então na expansão em série os termos

$$\frac{k_f^2 a^2(t)}{2!}, \frac{k_f^3 a^3(t)}{3!}, \dots, \frac{k_f^n a^n(t)}{n!}$$

tendem a zero e ficamos com

$$s_{FM} \approx A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t]$$

que é linear. Esta expressão é semelhante a de uma onda AM. Como $a(t)$ é limitado em BHz , $s_{FM}(t)$ terá apenas $2BHz$. Por essa razão, quando $|k_f a(t)| \ll 1$ este caso é chamado de **FM de faixa estreita** (NBFM, *Narrow Band FM*). O PM de faixa estreita é similar

$$s_{PM}(t) \approx A[\cos \omega_c t - k_p m(t) \sin \omega_c t].$$

As equações acima sugerem um método possível para gerar NBFM e NBPM usando moduladores DSB-SC, como está ilustrado na Figura 6.11.

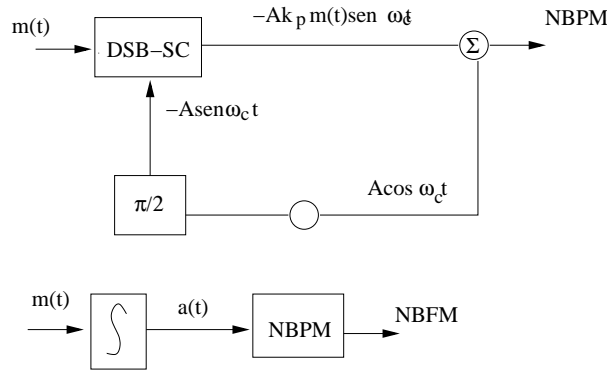


Figura 6.11: Método para gerar NBFM e NBPM via DSB-SC.

Exercício 13 Encontre as expressões para os espectros de $s_{FM}(t)$ e $s_{PM}(t)$ considerando faixa estreita.

Se $|k_f a(t)|$ não é muito menor que 1, não podemos desprezar os termos de mais alta ordem da equação do sinal FM, e a análise se torna bastante complicada.

Para obter uma estimativa vamos considerar $m(t)$ limitado em BHz . Este sinal pode ser aproximado por digamos $\hat{m}(t)$ como mostra a Figura 6.12.

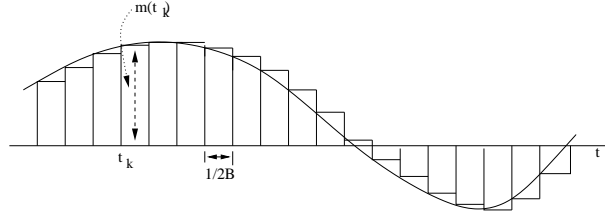


Figura 6.12: Aproximação do sinal $m(t)$ por degraus.

Por conveniência cada pulso será chamado de uma célula. É relativamente fácil analisar FM para $\hat{m}(t)$ por causa das amplitudes constantes de cada célula. Para assegurar que $\hat{m}(t)$ contenha toda a informação de $m(t)$ cada célula não deve ser maior que o intervalo de Nyquist $1/2B$ segundos.

Vamos considerar uma célula típica começando em $t = t_k$, esta célula tem uma amplitude constante $m(t_k)$, portanto o sinal FM correspondente a esta célula será uma senoide de frequência

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t_k) \text{ para } t_k < t < t_k + \frac{1}{2B}$$

como mostrado na Figura 6.13.

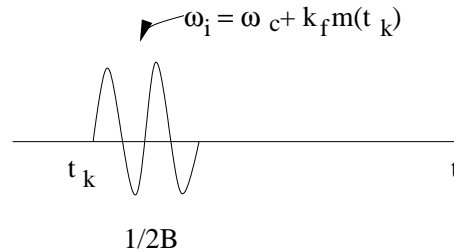


Figura 6.13: Sinal FM correspondente a uma célula.

O sinal FM consiste de uma sequência de pulsos correspondentes a cada célula de $\hat{m}(t)$. O espectro FM de $\hat{m}(t)$ consiste da soma das transformadas de Fourier dos pulsos. A transformada de Fourier de um pulso senoidal é uma função *sinc*, representado na Figura 6.14.

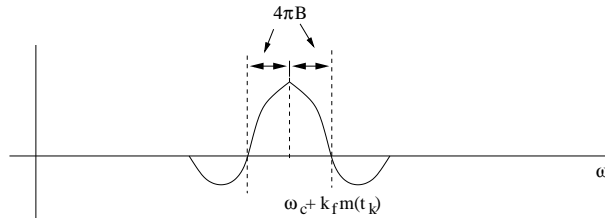


Figura 6.14: Transformada de Fourier de um pulso senoidal

Note que o espectro deste pulso é espalhado ao redor de $\omega_c + k_f m(t_k)$ por $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/2B} = 4\pi B$.

As amplitudes máxima e mínima das células são respectivamente $-m_p$ e m_p . Portanto as frequências máxima e mínima do sinal FM são $\omega_c + k_f m_p$ e $\omega_c - k_f m_p$ respectivamente. O espectro de cada pulso com frequência máxima e mínima é mostrado na Figura 6.15.

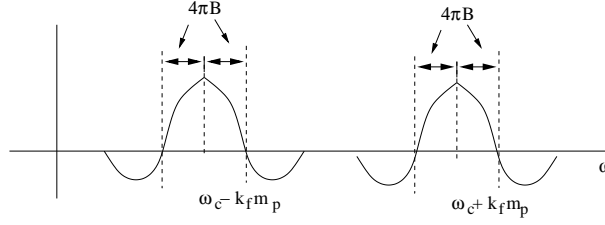


Figura 6.15: Transformada de Fourier de dois pulsos senoidais.

Portanto as componentes de frequências máxima e mínima significativas serão

$$\omega_c + k_f m_p + 4\pi B \text{ e } \omega_c - k_f m_p - 4\pi B$$

com uma largura de faixa de

$$2k_f m_p + 8\pi B$$

considerando que a potência do sinal está contida no lóbulo principal da função *sinc*.

As frequências máxima e mínima da portadora são $\omega_c + k_f m_p$ e $\omega_c - k_f m_p$, mas suas componentes espectrais só estariam nessa faixa se essas portadoras fossem senóides que sempre existiram e com as frequências constantes nesse caso impulsos em $\omega_c + k_f m_p$ e $\omega_c - k_f m_p$. Para senóides com duração finita de T segundos o espectro é espalhado por $2\pi/T$.

O desvio de frequência da portadora é de $\pm k_f m_p$. Chamamos o desvio de frequência de $\Delta\omega$, assim

$$\Delta\omega = k_f m_p$$

em Hertz

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{k_f m_p}{2\pi}.$$

A largura de faixa estimada para FM pode ser expressa como:

$$B_{FM} = \frac{1}{2\pi}(2k_f m_p + 8\pi B) = 2\left(\frac{k_f m_p}{2\pi} + \frac{4\pi B}{2\pi}\right) = 2(\Delta f + 2B)$$

Esta estimativa é um pouco maior que o valor real pois foi obtida para $\hat{m}(t)$ e não para $m(t)$ que é um sinal mais suave. Portanto vamos reajustar a nossa estimativa.

Primeiro vamos analisar nossa equação para NBFM, ou seja k_f muito pequeno, em outras palavras Δf é muito pequeno em relação a B , de modo que podemos ignorá-lo, assim $B_{FM} \approx 4B$.

Mas tínhamos visto anteriormente que para esse caso a largura de faixa seria $2B$. Isto indica que uma estimativa melhor é

$$B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 2\left(\frac{k_f m_p}{2\pi} + B\right)$$

que é o resultado obtido por Carlson, que investigou o problema rigorosamente para um tom. Por isso essa fórmula é chamada de **Regra de Carson**.

Agora se $\Delta_f \gg B$, caso de um verdadeiro WBFM $B_{FM} \approx 2\Delta_f$. Como $\Delta\omega = 2\pi\Delta_f = \frac{2\pi k_f m_p}{2\pi} = k_f m_p$, para esse caso isso é precisamente o que foi reconhecido pelos pioneiros. O único erro foi pensar que funcionava para qualquer caso, especialmente quando $\Delta_f \ll B$.

Definimos a regra de desvio $\beta = \frac{\Delta_f}{B}$ e assim a regra de Carson fica

$$B_{FM} = 2B(\beta + 1)$$

β controla a quantidade de modulação e tem um papel semelhante ao índice de modulação do AM, e por isso é também chamado de índice de modulação para FM.

6.5 Modulação em Fase

Todos os resultados derivados para o FM podem ser aplicados ao PM. Vejamos:

$$\omega_i = \omega_c + k_p m'(t)$$

O desvio de frequência $\Delta\omega = k_p m'(t)$.

Assumimos que $m'_p = [m'(t)]_{MAX} = [m'(t)]_{MIN}$, portanto,

$$B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 2 \left(\frac{k_p m'_p}{2\pi} + B \right).$$

Um aspecto importante é que $\Delta\omega$ para o FM depende só do valor de pico de $m(t)$, m_p , e não do espectro de $m(t)$.

Agora no caso da PM, $\Delta\omega = k_p m'_p$, depende do valor de pico de $m'(t)$ que depende fortemente do espectro e frequências de $m(t)$. Variações rápidas de $m(t)$ implicam em m' maiores.

Finalmente pode-se concluir que

- WBFM (largura de faixa) independe do espectro de $m(t)$ (B é quase desprezível) e
- WBPM é fortemente dependente do espectro de $m(t)$

6.6 Verificação da Relação de Largura da Faixa FM

Vamos analisar para o caso específico de um tom, $m(t) = \alpha \cos \omega_m t$, assim

$$a(t) = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t \quad \text{assumimos } a(-\infty) = 0$$

e

$$\hat{\varphi}_F M(t) = A e^{j(\omega_c t + k_f a(t))} = A e^{j(\omega_c t + \frac{k_f \alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t)}$$

sendo $\Delta\omega = k_f m_p = \alpha k_f$.

A largura da faixa de $m(t)$ é $B = f_M Hz$. O índice de modulação

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\alpha k_f}{\omega_m}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{FM}(t) &= Ae^{j(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)} \\ &= Ae^{j\omega_c t} e^{j\beta \sin \omega_m t}\end{aligned}\quad (6.8)$$

Este último termo é periódico com período $2\pi/\omega_m$ e portanto pode ser expandido em série de Fourier

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_m t}$$

sendo

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt \quad \text{como } T = \frac{2\pi}{\omega_m}$$

$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t - jn\omega_m t} dt$$

fazendo $\omega_m t = x$, $\omega_m dt = dx$ e os limites de integração $x_i = \omega_m \left(\frac{-\pi}{\omega_m} \right) = -\pi$ e $x_s = \omega_m \left(\frac{\pi}{\omega_m} \right) = \pi$ assim

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin(x-nx))} dx$$

esta integral não pode ser avaliada diretamente, porém pode-se expandir o termo mais interno numa série infinita. Esta integral se encontra tabulada e é chamada de função de Bessel de primeira classe e ordem n , ou seja, $C_n = J_n(\beta)$, representadas na Figura 6.16.

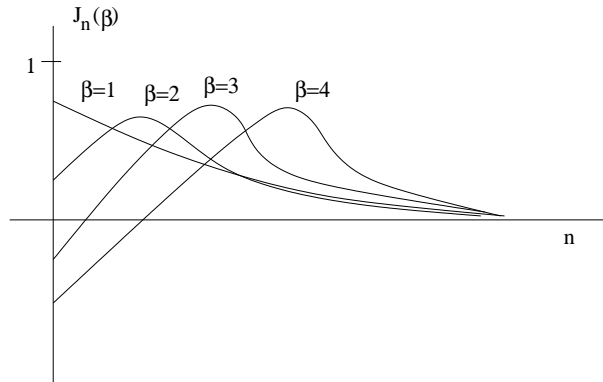


Figura 6.16: Função $J_n(\beta)$ para $\beta = 1, 2, 3$ e 4 .

$J_n(\beta)$ é fornecida para vários valores de η e β , assim

$$\begin{aligned} e^{j\beta \sin \omega_m t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_m t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \end{aligned} \quad (6.9)$$

substituindo em $\hat{\varphi}_{FM}(t)$ temos

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{FM}(t) &= \text{Re}[\hat{\varphi}_{FM}(t)] \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t \end{aligned} \quad (6.11)$$

Vemos que o sinal modulado tem uma componente correspondente a portadora quando $\eta = 0$ e infinitas componentes nas bandas laterais, $\omega_c \pm \omega_m, \omega_c \pm 2\omega_m, \dots, \omega_c \pm n\omega_m, \dots$

Para cada β o comprimento de n -ésima componenete $\omega = \omega_c + n\omega_m$ é $J_n(\beta)$ para $\omega = \omega_c - n\omega_m$ é $J_n(-\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$.

Como mostrado no gráfico $J_n(\beta)$ decresce com n de modo que para n grande o suficiente $J_n(\beta)$ se torna desprezível. Em geral $J_n(\beta)$ é desprezível para $\eta > \beta + 1$, assim temos $\beta + 1$ bandas laterais significativas. A largura de faixa significativa para o FM nesse caso será

$$B_{FM} = 2nf_m = 2(\beta + 1)f_m$$

como $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$,

$$\begin{aligned} B_{FM} &= 2 \left(\frac{\Delta f}{f_m} + 1 \right) f_m \\ &= 2(\Delta f + \beta) \text{ onde } B = f_m \end{aligned} \quad (6.12)$$

que satisfaz a resultado anterior NBFM $\beta \ll 1 \Rightarrow B_{FM} \approx 2f_m = 2B$,

Infelizmente a modulação em ângulo é não linear, ao contrário do AM, de modo que os resultados para um tom não podem ser extrapolados para outros sinais (somatório de tons).

Este método pode ser generalizado para acharmos o espectro de um sinal periódico qualquer $m(t)$.

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A e^{j\omega_c t} e^{jk_f a(t)}$$

$e^{jk_f a(t)}$ será também periódico e poderá ser expresso como uma série de Fourier.

Exemplo 34 a) Estimar B_{FM} e B_{PM} para $m(t)$ da Figura 6.3, com $k_f = 2\pi 10^5$ e $k_p = 5\pi$

b) Repita o problema se a amplitude de $m(t)$ dobrar

Solução:

a) Primeiro determinar a largura de faixa exponencial (B) de $m(t)$. Como $m(t)$ é um sinal periódico pode ser representado por uma série de Fourier

$$m(t) = \sum_n C_n \cos n\omega_0 t \quad \text{onde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \times 10^{-4}} = 10^4\pi$$
$$C_n = \begin{cases} \frac{8}{8\pi^2 n^2} & n \text{ mpar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad (6.13)$$

as amplitudes das harmônicas decrescem rapidamente com n . Por exemplo a terceira harmônica tem apenas 11% da fundamental e a quinta harmônica tem 4% da fundamental. Em termos de potência a terceira harmônica tem 0,11² ou 1,21% da potência da fundamental e a quinta harmônica tem apenas 0,16%.

Assumindo então que a largura de faixa de $m(t)$ compreende até a terceira harmônica, $\omega_m = 3\omega_0 = 3 \times 10^4\pi$ ou $B = \frac{3 \times 10^4\pi}{2\pi} = 15KHz$.

Para FM temos que $m_p = 1$ e pela regra de Carson

$$B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 2(100 + 15) = 230KHz$$

de outra forma, o índice de modulação

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{100}{15}$$

e

$$B_{FM} = 2B(\beta + 1) = 2 \cdot 15 \left(\frac{100}{15} + 1 \right) = 230KHz$$

Para PM já vimos que $m' = 20.000$ então

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} 5\pi 20.000 = 50KHz$$

e $B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 130KHz$. Pelo índice de modulação $\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{50}{15}$

$$B_{PM} = 2B(\beta + 1) = 2 \times 15 \left(\frac{50}{15} + 1 \right) = 130KHz$$

b) Dobrando $m(t)$, $m_p = 2$ e $B = 15KHz$ como antes.

Para FM:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m_p = 200KHz$$

e

$$B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 430KHz \quad e \quad \beta = \frac{200}{15}$$

Para PM $m' = 40.000$

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_p m'_p = 100KHz$$

$$B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 230KHz \quad \beta = \frac{100}{15}$$

Observe que duplicar $m(t)$ quase dobra a largura de faixa para FM e PM.

Exemplo 35 Repetir o exemplo anterior para $T = 4 \times 10^{-4}$, duas vezes o período anterior

Solução:

Para determinar a nova largura de faixa essencial de $m(t)$, relembremos que uma expansão de 2 no tempo reduz o espectro de 2.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2,5\pi 10^4 \quad \text{ou} \quad f_0 = 0,25 \times 10^4 = 2,5 \text{ KHz}$$

a terceira harmônica $B = 3f_0 = 7,5 \text{ KHz}$

Para FM, $m_p = 1$ tem-se $\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m_p = 100 \text{ KHz}$ e $B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 2(100 + 7,5) = 215 \text{ KHz}$.

Para PM, $m'_p = 10.000$ metade do anterior tem-se $\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m'_p = 25 \text{ KHz}$ e $B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 2(25 + 7,5) = 65 \text{ KHz}$.

Observe que a expansão no tempo quase não afetou B_{FM} , mas reduziu a metade B_{PM} . Isto ratifica nossa afirmação que o espectro do PM é fortemente do espectro de $m(t)$.

Exemplo 36 Um sinal modulado em ângulo com $\omega_c = 2\pi \times 10^5$ e dado por

$$\varphi_{FM}(t) = 10 \cos(\omega_c t + 5 \sin 3000t + 10 \sin 2000t)$$

- a) Ache a potência,
- b) Δf ,
- c) β ,
- d) $\Delta\phi$ (desvio de fase)
- e) Estime a largura de faixa

Solução:

Determinar a largura do sinal mensagem (ou sua derivada) que é a maior frequência de

$$\begin{aligned} m_{PM}(t) &= 5 \sin 3000t + 10 \sin 2000\pi t \\ m_{FM}(t) &= 15000 \cos 300t + 2000\pi \cos 2000\pi t \\ \omega_m &= 2000\pi \quad \text{ou} \quad B = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{2000\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz} \end{aligned}$$

a)

$$P = \frac{A^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50 \tag{6.14}$$

b) Para achar Δf , precisamos achar ω_i

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + 15.000 \cos 3000t + 20.000t \cos 2000\pi t$$

desvio máximo quando $\cos 3000t$ e $\cos 2000\pi t$ iguais e a um ao mesmo tempo, assim

$$\Delta\omega = 15000 + 20000\pi \Leftarrow \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 12.387,32 \text{ Hz}$$

c)

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{12.3987,32}{1.000} = 12,387$$

d)

$$\Theta(t) = \omega_c t + (5 \sin 3000t + 10 \sin 2000t)$$

o desvio de fase $\Delta\theta$ é o máximo valor de $m(t)$ ou seja quando ambos os senos forem 1, assim $\Delta\theta = 5 + 10 = 15rad$.

e)

$$\begin{aligned} B_{FM} &= 2(\Delta f + B) \\ &= 2(12.387,32 + 1000) = 26.774,65Hz \end{aligned}$$

observe que não é necessário saber se o sinal é FM ou PM para determinar a largura de faixa de $\varphi_{EM}(t)$.

6.7 História de Edwin H. Armstrong (1890-1954)

No início, o desenvolvimento do FM baseava-se na tentativa de diminuir a largura de faixa de transmissão o que implicaria na diminuição da influência do ruído branco.

Os resultados experimentais mostraram que isto não era possível. Carson mostrou matematicamente que no máximo se conseguia a largura de faixa do AM.

Infelizmente Carson não mostrou as vantagens do FM. E mais tarde escreveu num artigo: “De fato, tanto mais e mais esquemas são analisados e testados, quanto mais a natureza essencial do problema persiste, nos estamos inevitavelmente forçados a concluir que a estática (ruído), como os pobres, sempre estará conosco”.

Esta opinião, de um mais habilidosos matemáticos da época na área de comunicações, atrasou por uma década o desenvolvimento do FM.

As vantagens na supressão de ruídos do FM foi provada pelo Major Edwin H. Armstrong, considerado como o pai do FM moderno, em um artigo de 1936.

Além da invenção de equipamentos de FM, ele contribuiu com o circuito de realimentação regenerativa, que tornou a amplificação de rádio difusão possível, o circuito superheterodino, base para todos os rádios modernos, e o circuito super-regenerativo usado em sistemas de ondas curtas.

Armstrong foi um dos últimos inventores solitários de garagem. Para estabelecer a rádio difusão por FM travou uma batalha com o pessoal de rádio difusão já estabelecido.

Em 1944 o FCC (órgão regulador de comunicações dos EUA), com base em um depoimento de um técnico especialista, trocou a faixa de frequências estabelecida para o FM de 42-50MHz para 88-108MHz. Isto tornou obsoletos todos os equipamentos (transmissores, receptores, antenas, etc.) construídos para a antiga faixa de FM.

Armstrong lutou contra a decisão até que em 1947 conseguiu a retratação do técnico. Mas apesar de tudo, o FCC não trocou a faixa do FM.

A indústria de radiodifusão, antes resistente ao FM, passou a construir equipamentos para a nova faixa sem pagar “royalties” para Armstrong. Ele passou metade de sua vida nas cortes americanas na tentativa de separar a injustiça, chegando em ao suicídio em 1954 pulando da janela do 13º andar de um prédio.

6.8 Características da Modulação em Ângulo

Como PCM o FM também pode utilizar a característica de negociar faixa de frequência com potência do sinal, a largura de faixa pode ser ajustada pelo desvio de frequência Δf . A AM não tem esta característica. Isto é extremamente importante em sistemas de comunicações espaciais.

6.8.1 Imunidade a Não Linearidades

Uma característica interessante de modulação em ângulo é a amplitude constante (da portadora), isto a torna menos suscetível a não linearidades, vejamos

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

um dispositivo não linear, se

$$x(t) = \cos[\omega_c t + \psi(t)]$$

então

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \cos[\omega_c t + \psi(t)] + a_2 \cos^2[\omega_c t + \psi(t)] \\ &= \frac{a_2}{2} + a_1 \cos[\omega_c t + \psi(t)] + a_2 \cos[2\omega_c t + 2\psi(t)] \end{aligned}$$

Pra FM $\psi(t) = k_f \int m(\alpha) d\alpha$, donde

$$y(t) = \frac{a_2}{2} + a_1 \cos[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha] + a_2 \cos[2\omega_c t + 2k_f \int m(\alpha) d\alpha]$$

Filtrando o nível DC ($a_2/2$), observe que o último termo tem a frequência da portadora e o desvio de frequência multiplicado por 2. O termo em a_1 é o sinal FM. Em ambos os casos $m(t)$ permanece intacto. Isto sugere que podemos fazer multiplicadores de frequência para sinais FM com dispositivos não lineares sem distorcemos a informação. Esses dispositivos não lineares são chamados de multiplicadores de frequência, por essa causa. Qualquer dispositivo não linear tais como um diodo ou um transistor pode ser usado para isso.

De uma maneira geral dispositivos de ordem n produzem uma multiplicação da f_c e Δf por n . Filtros passa faixas sintonizados em $n\omega_c$ podem gerar um sinal FM nessa frequência como um desvio Δf em relação ao sinal original.

Já vimos que para o AM-DSB-SC por exemplo não linearidades distorcem o sinal mensagem, por exemplo

$$y(t) = ax(t) + bx^3(t)$$

sendo $x(t) = m(t) \cos \omega_c t$ produz

$$y(t) = [am(t) + \frac{3b}{4}m^3] \cos \omega_c t + \frac{b}{4}m^3(t) \cos 3\omega_c t$$

Essa imunidade a não linearidades é a razão primária para modulação em ângulo ser usada em sistemas repetidores de microondas que necessitem de níveis altos de potência. Isto impõe amplificadores não lineares classe C.

6.9 Geração de Ondas FM

Dois métodos serão apresentados: indireto e direto.

6.9.1 Método Indireto de Armstrong

Já vimos um método indireto para NBFM a partir da equação do PM

$$\varphi_{PM}(t) \approx A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t]$$

que é uma simplificação quando $|k_p m(t)| \ll 1$.

Integrando $m(t)$ antes de introduzi-lo no modulador em fase produzindo

$$\varphi_{FM} \approx A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t]$$

sendo $a(t) = \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$.

Um sistema WBFM pode ser gerado a partir de um NBFM com a utilização de multiplicadores de frequência vistos anteriormente, lembrando que tanto a frequência da portadora bem como o desvio de frequência são multiplicados.

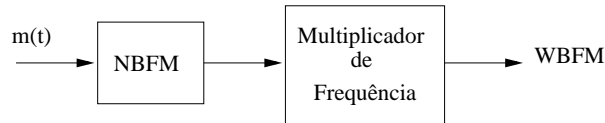


Figura 6.17: Gerador FM indireto de Armstrong.

O método de geração do NBFM sugerido por Armstrong, apresenta distorções por causa das aproximações realizadas. A saída do NBFM tem alguma modulação em amplitude. A limitação da amplitude pelos multiplicadores de frequência removem grande parte de distorção.

Exemplo 37 Temos um gerador NBFM com $f_{c1} = 200\text{KHz}$. Nesta frequência é fácil construir osciladores de cristal estáveis. O desvio de frequência $\Delta f_1 = 25\text{Hz}$, o espectro do sinal de áudio para obter alta fidelidade, é de 50Hz a 15KHz . Desse modo $\beta = \frac{\Delta f_1}{f_m} = \frac{25}{15.000} \ll 1$, no pior caso um sinal de voz $\beta = 25/50 = 0,5$.

A saída do transmissor comercial FM é de $91,2\text{MHz}$ e $\Delta f = 75\text{KHz}$.

Para conseguirmos $\Delta f = 75KHz$, precisamos multiplicar de $75.000/25 = 3000$ vezes Δf_1 .

Isto pode ser feito por dois estágio de multiplicação de 64 e 48, ou $64 \times 48 = 3072$ o que produz $\Delta f = 76,8$. O valor exato $\Delta f = 75KHz$ pode ser conseguido com $\Delta f_1 = 24,41Hz$. Os multiplicadores são projetados por meio de duplicadores e triplicadores colocados em cascata. Assim $64 = 2^6$ (6 duplicadores), $48 = 2^4 \times 3$ (4 duplicadores, 1 triplicador).

O problema é essa multiplicação produz $f_c = 3072 \times f_{c1} = 3072 \times 200KHz \approx 600MHz$.

Isto pode ser evitado pelo uso de conversores de frequência. O esquema está representado na Figura 6.18.

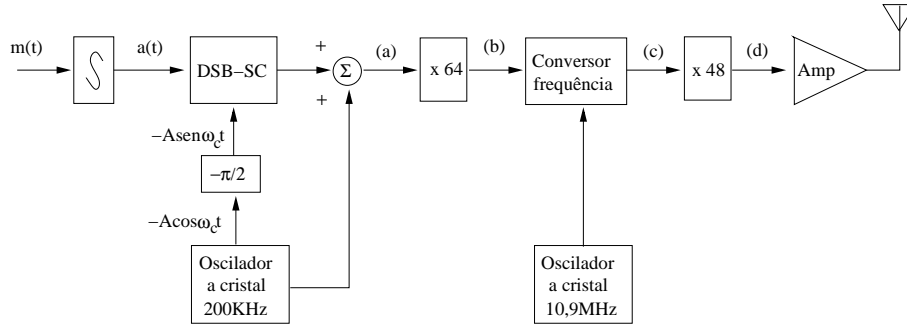


Figura 6.18: Esquema do Gerador FM utilizando conversor de frequência.

Vamos analisar o circuito, em a) tem-se $f_{c1} = 200KHz$ $\delta f_1 = 25Hz$, em b) temos $f_{c2} = 64 \times 200 = 12,8MHz$ e $\delta f_2 = 64 \times 25 = 1,6kHz$.

Se multiplicarmos tudo por 48 acontecerá o que já foi apresentado $f_c \approx 600MHz$. Como queremos $f_c = 91,2MHz$ vamos abaixar f_{c2} e modo que após a multiplicação por 48 tenhamos f_c .

A frequência em c) terá que ser $91,2MHz/48 = 1,9MHz$ para conseguirmos f_{c3} , a frequência do oscilador do conversor deve ser $f_{c2} \mp f_{c3}$, escolhemos $f_{c2}f_{c3} = 12,8 - 1,9 = 10,9MHz$.

O conversor de frequência não altera Δf assim em c) temos $f_{c3} = 1,9MHz$ e $\Delta f_3 = 1,6kHz$.

A última multiplicação produz em d) então $f_{c4} = 1,9 \times 48 = 91,2MHz$ e $\Delta f_4 = 1,6 \times 48 = 76,8KHz$ como desejávamos. O resultado é então amplificado e transmitido.

Este esquema apresenta boa estabilidade de frequência, mas sofre pelo ruído inerente causado pelo excesso de multiplicadores e da distorção nas frequências mais baixas quando Δf_m não é tão pequeno.

Exemplo 38 *Discuta a natureza da distorção inerente no gerador de DM indireto de Armstrong*

Solução:

Dois tipos de distorção: em amplitude e de frequência. Para NBFM

$$\begin{aligned}\varphi_{FM} &= A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t] \\ &= AE(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)]\end{aligned}\tag{6.15}$$

sendo

$$E(t) = \sqrt{1 + k_f^2 a^2(t)} \quad e \quad \theta(t) = \tan^{-1}[k_f a(t)]$$

vemos que a amplitude do sinal modulado $AE(t)$ não é constante, e portanto gera uma distorção na amplitude esta distorção no entanto não é grave pois pode ser eliminada por limitadores de faixa de passagem discutidos mais a frente.

Agora para FM $\theta(t) = k_f a(t)$ mas $\theta(t) = \tan^{-1}(k_f a(t))$ e

$$\omega_i = \frac{d\theta(t)}{dt} = k_f (d\theta(t)/dt) \frac{1}{1 + k_f^2 a^2(t)}$$

sendo $d\theta(t)/dt = m(t)$ e

$$\frac{1}{1 + k_f^2 a^2(t)} = 1 - k_f^2 a^2(t) + k_f^4 a^4(t) \dots$$

assim

$$\omega_i = k_f m(t) [1 - k_f^2 a^2(t) + k_f^4 a^4(t) \dots]$$

para o FM $\omega_i = k_f m(t)$, de modo que o restante dos termos da equação acima representa a distorção.

Quando $m(t) = \alpha \cos \omega_m t$, $a(t) = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t$ e

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\Delta \omega}{\omega_m} = \frac{\alpha k_f}{\omega_m}$$

assim

$$\omega_i = k_f \alpha \cos \omega_m t [1 - k_f^2 \frac{\alpha^2}{\omega_m^2} \sin^2 \omega_m t + k_f^4 \frac{\alpha^4}{\omega_m^4} \sin^4 \omega_m t \dots]$$

$$\omega_i = \beta \omega_m \cos \omega_m t [1 - \beta^2 \sin^2 \omega_m t + \beta^4 \sin^4 \omega_m t \dots]$$

Esta equação como podemos observar, apresenta apenas harmônicos ímpares de distorção

e a mais importante é a terceira harmônica. Ignorando os outros temos tem-se

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \beta \omega_m \cos \omega_m t [1 - \beta^2 \sin^2 \omega_m t] \\
&= \beta \omega_m \cos \omega_m t [1 - \frac{\beta^2}{2} (1 - \cos 2\omega_m t)] \\
&= \beta \omega_m \cos \omega_m t - \frac{\beta^3}{2} \omega_m \cos \omega_m t + \frac{\beta^3}{2} \omega_m \cos \omega_m t \cos 2\omega_m t \\
&= (\beta - \beta^3/2) \omega_m \cos \omega_m t + \frac{\beta^3}{4} \omega_m (\cos \omega_m t + \cos 3\omega_m t) \\
&= (\beta - \beta^3/4) \omega_m \cos \omega_m t + \frac{\beta^3}{4} \omega_m \cos 3\omega_m t \\
&= \beta \omega_m (1 - \beta^2/4) \cos \omega_m t + \frac{\beta^3}{4} \omega_m \cos 3\omega_m t \\
\text{para } \beta << 1 \\
\omega_i &= \beta \omega_m \cos \omega_m t + \frac{\beta^3}{4} \omega_m \cos 3\omega_m t
\end{aligned} \tag{6.16}$$

O primeiro termo após a igualdade é desejado e o segundo termo é a distorção.

No exemplo anterior, o pior caso ocorria quando $f_m = 50\text{Hz}$ sendo $\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{25}{50} = 0,5$.

Nesse caso a razão distorção da terceira harmônica pela desejada seria

$$\frac{\beta^3 \omega_m / 4}{\beta \omega_m} = \frac{\beta^2}{4} = \frac{0,5^2}{4} = \frac{1}{16}$$

ou 6,25%.

6.9.2 Geração Direta

Um VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) é um dispositivo que controla a frequência de saída por meio de uma tensão de entrada. A frequência de oscilação varia linearmente com o sinal de entrada. o VCO apresenta uma frequência de repouso, quando a entrada é zero, esta frequência chamaremos de ω_c então, como mostrado na Figura 6.19, $\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$.



Figura 6.19: VCO para gerar o sinal FM.

Um VCO pode ser construído com um amplificador operacional e um comparador. Uma outra maneira é através da variação dos parâmetros reativos (L ou C) de um circuito ressonante de um oscilador.

6.10 Demodulação de FM

A informação em um sinal FM está na frequência instantânea

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$$

portanto uma malha seletiva em frequência com função de transferência dada por

$$|H(\omega)| = a\omega + b$$

na faixa de FM produziria uma saída proporcional a ω_i .

A malha mais simples é um diferenciador ideal com função de transferência $j\omega$. Aplicando $\varphi_{FM}(t)$ a um diferenciador ideal temos,

$$\begin{aligned}\varphi_{FM}(t) &= A \cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha] \\ \frac{d\varphi_{FM}(t)}{dt} &= -A[\omega_c + k_f m(t)] \sin[\varphi_{FM}(t)] = \varphi'(t)\end{aligned}$$

o sinal $\varphi'_{FM}(t)$ é um sinal modulado tanto em frequência como em amplitude, como está representado na Figura 6.20.

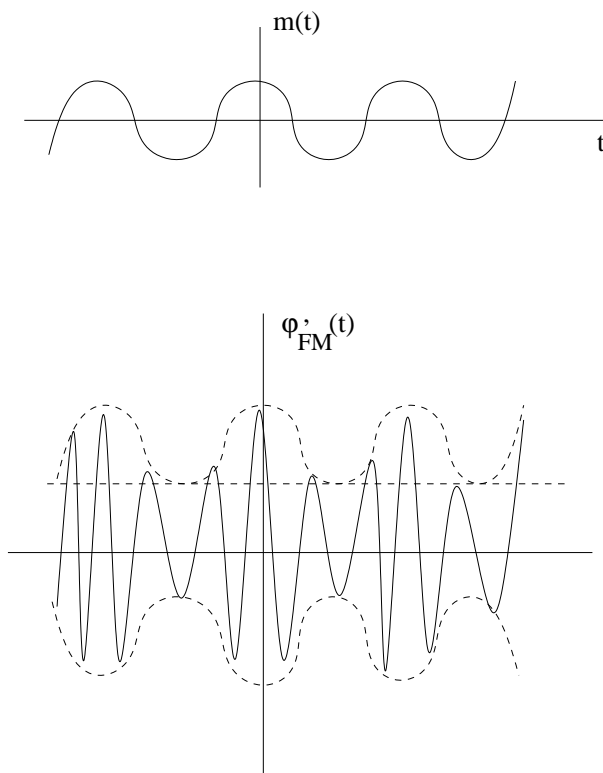


Figura 6.20: Sinal $\varphi'_{FM}(t)$.

A envoltória de $\varphi'_{FM}(t)$ é $A[\omega_c + k_f m(t)]$. Como

$$\omega_c > k_f m(t) \Rightarrow A[\omega_c + k_f m(t)] > 0, \quad \forall t$$

e portanto $m(t)$ pode ser obtida por detecção de envoltória. Assim o demodulador FM em diagrama de blocos está representado na Figura 6.21.

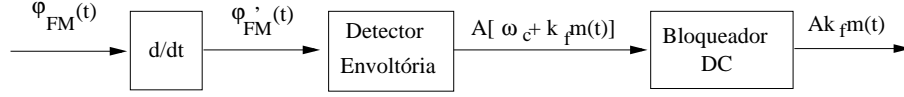


Figura 6.21: Diagramas de bloco do demodulador FM.

Observe que a amplitude A deve ser constante. Se a amplitude A não for constante, mas função do tempo, então

$$\begin{aligned} \varphi_{FM}(t) &= A(t) \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad \theta(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \\ \frac{d\varphi_{FM}}{dt} &= -A(t)[\omega_c \theta'(t)] \sin(\omega_c t + \theta(t)) + \frac{dA}{dt} \cos(\omega_c t + \theta(t)) \end{aligned}$$

considerando que $A(t)$ varia muito lentamente, o termo dA/dt pode ser desprezado, mesmo assim a envoltória de φ'_{FM} seria

$$E(t) = A(t)[\omega_c + \theta'(t)] = A(t)[\omega_c + k_f m(t)]$$

que é proporcional a $m(t)A(t)$. Portanto é essencial manter A constante.

Vários fatores como ruído e desvanecimento fazem com que A varie. Essa variação deve ser removida antes de aplicar o sinal FM ao detector.

6.10.1 Limitador de Banda Passante

As variações em amplitude podem ser eliminadas por um limitador na banda passante, como está ilustrado na Figura 6.22.

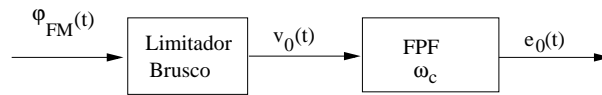


Figura 6.22: Limitador Brusco na banda passante.

O limitador brusco tem a seguinte característica

$$v_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i > 0 \\ -1 & \text{se } v_i < 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

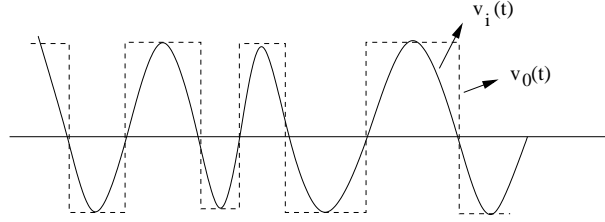


Figura 6.23: Saída do limitador Brusco na banda passante.

Observe que a saída do limitador brusco a uma senóide será uma onda quadrada de amplitude 1 independente da amplitude da senóide. Além disso, os cruzamentos no zero são preservados pois quando a entrada é zero a saída também é zero.

Assim se $v_i(t) = A(t) \cos \theta(t) \Rightarrow v_o(t)$ tem a amplitude constante

Quando $v_o(t)$ passa pelo filtro passa-faixas centrado em ω_c a saída é um sinal modulado em ângulo. Vejamos

$$v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$$

em que

$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) \alpha$$

$v_o(t)$ depende do sinal de $v_i(t)$. Considerando $A(t) \geq 0$ $v_o(t)$ pode ser expresso por

$$v_o(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \cos \theta > 0 \\ -1 & \text{se } \cos \theta < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Assim como função de θ é uma função quadrada periódica com período 2π

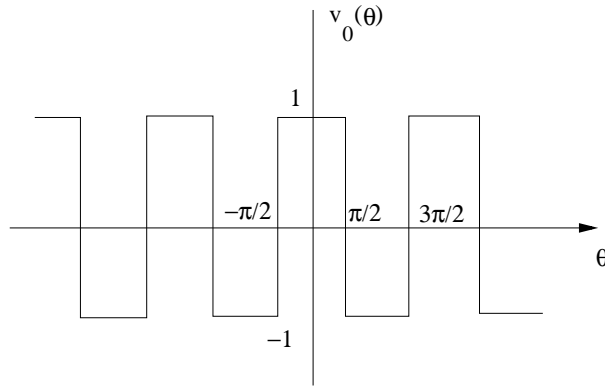


Figura 6.24: Sinal $v_o(\theta)$

que pode ser expandido em série de Fourier

$$v_o(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \dots \right)$$

que é válida para qualquer θ real.

Em qualquer instante de tempo t

$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

assim

$$v_0(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha] - \frac{1}{3} \cos[3\omega_c t + 3k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha] + \dots \right\}$$

passando pelo filtro passa-faixas centrado em ω_c tem-se

$$e_0(t) = \frac{4}{\pi} \cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha]$$

Esse resultado também pode ser aplicado para sinais PM.

Além de manter a amplitude constante o limitador na banda passante suprime o ruído quando esse é pequeno.

6.11 Interferência em Sistemas Modulados em Ângulo

Vamos considerar o caso simples da interferência de uma portadora não modulada $A \cos \omega_c t$ por uma outra senóide $I \cos(\omega_c + \omega)t$, como está representado na Figura 6.25.

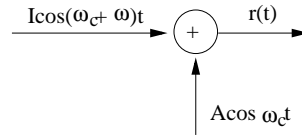


Figura 6.25: Interferência senoidal

$$\begin{aligned} r(t) &= A \cos \omega_c t + I \cos(\omega_c + \omega)t \\ &= A \cos \omega_c t + I \cos \omega_c t \cos \omega t - I \sin \omega_c t \sin \omega t \\ &= (A + I \cos \omega t) \cos \omega_c t - I \sin \omega_c t \sin \omega t \\ &= E_A(t) \cos(\omega_c(t) + \phi_d(t)) \end{aligned}$$

em que

$$\phi_d(t) = \tan^{-1} \frac{I \sin \omega t}{A + I \cos \omega t}$$

Quando o sinal de interferência é pequeno em comparação a portadora ($I \ll A$)

$$\phi_d(t) \approx \frac{I}{A} \sin \omega t$$

A frequência instantânea de $r(t)$ é $\omega_i = \omega_c + \phi'_d(t)$ aplicando $r(t)$ a um demodulador de fase ideal, a saída do demodulador será

$$y_d(t) = \phi_d(t) \approx \frac{I}{A} \sin \omega t$$

similarmente para um demodulador FM ideal

$$y_d(t) = \frac{d\phi_d}{dt} = \frac{I}{A} \omega \cos \omega t$$

observe que em qualquer caso a influência é inversamente proporcional a amplitude da portadora A . Ou seja, quanto maior a amplitude da portadora A menor o efeito da interferência.

Esse efeito é muito diferente das sinais AM, em que a interferência na saída do demodulador é independente de amplitude da portadora.

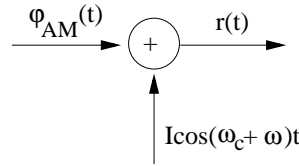


Figura 6.26: Interferência no sinal AM.

Como exemplo seja a interferência na Figura 6.26.

$$\begin{aligned} r(t) &= \varphi(t) + I \cos(\omega_c + \omega)t \\ &= [a + m(t)] \cos \omega_c t + I \cos(\omega_c + \omega)t \\ &= [A + m(t) + I \cos \omega t] \cos \omega_c t - I \sin \omega t \sin \omega_c t \end{aligned}$$

A envoltória desse sinal será

$$\begin{aligned} E(t) &= \{[A + m(t) + I \cos \omega t]^2 + I^2 \sin^2 \omega t\}^{1/2} \\ &\approx A + m(t) + I \cos \omega t \text{ quando } I \ll A \end{aligned}$$

Ou seja, o sinal de interferência na saída do detector de envoltória é $I \cos \omega t$, que é independente da amplitude da portadora A . O mesmo resultado é obtido para demodulação síncrona. E resultados similares para os sistemas sem portadora.

Portanto, os sistemas modulados em ângulo suprime as interferências fracas ($I \ll A$) melhor que os sistemas AM.

A Figura 6.27 mostra o efeito da interferência em FM e PM.

O ruído no canal age como uma interferência nos sinais modulados em ângulo.

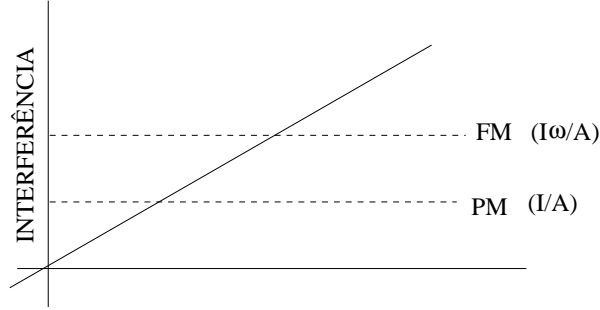


Figura 6.27: Efeito da interferência nos sinais FM e PM.

6.11.1 Pré-ênfase e Deênfase

A Figura acima mostra que para FM a interferência é mais severa para frequências mais altas do sinal interferência.

Como o ruído se comporta como uma interferência a potência do ruído no receptor está concentrado nas frequências mais altas.

Se $m(t)$ for uma sinal a potência desse sinal está concentrada nas frequências mais altas.

Dessa forma a DEP do ruído está centrada onde $m(t)$ é mais fraco, o que parece desastroso.

Na realidade pe uma oportunidade de reduzir fortemente o ruído. Esse processo é mostrado na Figura 6.28.

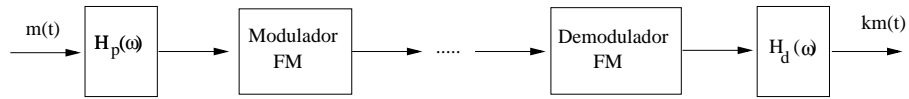


Figura 6.28: Filtro Pré-ênfase.

O filtro $H_p(\omega)$ no transmissor incrementa as frequências mais altas (que tem potência mais baixa) de $m(t)$ antes da modulação. Esse filtro é chamado de filtro de pré-ênfase.

No receptor, a saída do demodulador é passada por um filtro de deênfase com função de transferência $H_0(\omega) = 1/H_p(\omega)$.

Dessa forma o filtro de deênfase desfaz o filtro de pré-ênfase atenuando as componentes de frequências mais altas.

O ruído entra no canal e portanto não passa pelo filtro de pré-ênfase. No entanto, ele passa através do filtro de de-ênfase, que atenua as frequências mais altas, nas quais a potências do ruído está concentrada.

Desse modo, o processo de pré-ênfase e de-ênfase deixa e sinal $m(t)$ intocável mas reduz consideravelmente a potência do ruído.

6.11.2 Receptor FM

A FCC atribuiu a faixa de frequências 88 a 108MHz para FM, com separação de 200KHz entre estações adjacentes e desvio de frequência $\Delta f = 75KHz$ e 200KHz de largura de faixa.

Um receptor FM monofônico é idêntico ao receptor AM superheterodino, a frequência intermediária é de 10,7MHz e o detector de envoltória é substituído por um PLL ou um discriminador de frequência seguido por um filtro de deênfase.

As primeiras transmissões FM eram monofônicas. Transmissões estéreo, usando dois canais de áudio, E (microfone esquerdo) e D (microfone direito), foram propostas mais tarde.

O novo sistema tinha que ser compatível com o antigo, ou seja, o sistema antigo deveria ser capaz de receber o sinal $E + D$ e a largura de faixa total dos dois sinais E e D deveria ocupar ainda 200KHz com $\Delta f = 75KHz$.

Um transmissor e receptor FM estéreo é mostrado na Figura 6.29.

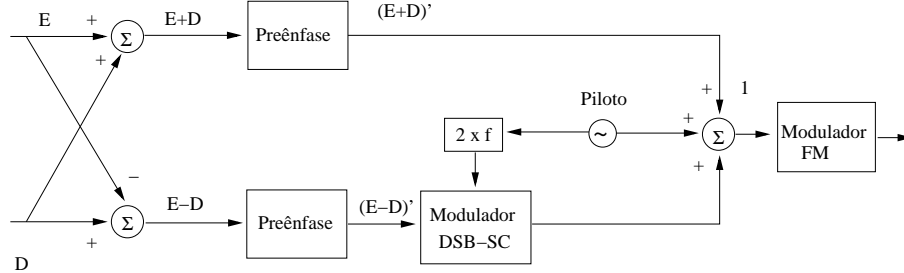


Figura 6.29: FM estéreo.

O espectro em 1 é o seguinte:

$$m(t) = (L + R)' + (L - R)' + \alpha \cos \omega_c t / 2$$

$$\omega_c = 2\pi \times 38 \text{ rad/s}$$

O receptor está representado na Figura 6.30, sendo que o receptor monofônico consiste apenas do ramo de cima.

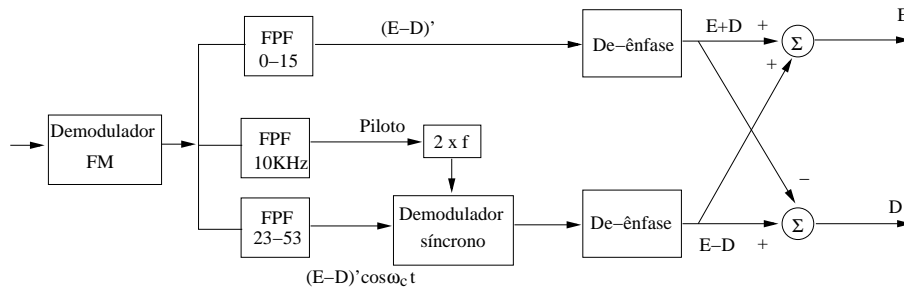


Figura 6.30: Receptor FM estéreo.

O valor de pico m_p do sinal $m(t)$ fica praticamente inalterado de modo que Δf permanece praticamente o mesmo.

Capítulo 7

Modulação por Codificação de Pulsos

Os sinais podem ser transmitidos de forma analógica ou digital. Nos capítulos anteriores foi vista a transmissão de sinais analógicos. Para que seja possível enviar os sinais no formato digital eles devem ser convertidos do formato analógico para o digital, e para que isso seja possível o sinal deve ser amostrado e quantizado, neste capítulo será estudado como essa operação pode ser realizada.

7.1 Teorema da Amostragem

Na Seção ?? foi mostrado que um sinal $g(t)$ limitado em banda em B Hz pode ser reconstruído exatamente de suas amostras se eles foram tomadas uniformemente a uma taxa de $R > 2B$ Hz. Além disso, foi mostrado que uma taxa de amostragem menor que $2B$ produz um efeito conhecido como *aliasing* que é a sobreposição dos espectros das amostras o que impossibilita a recuperação do sinal original.

Vamos rever o teorema da Amostragem sob outro ângulo. Considere novamente um sinal $g(t)$ cujo espectro é limitado em banda em B Hz. Para amostrar esse sinal a uma taxa f_s Hz pode-se multiplicar $g(t)$ por um trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$, que consiste em um impulso unitário repetido periodicamente a cada T_s segundos ($T_s = 1/f_s$), ou seja

$$g_s(t) = g(t)\delta_{T_s}(t - nT_s).$$

Como um trem de impulsos é um sinal periódico ele pode ser expresso por uma série de Fourier. A série de Fourier trigonométrica do trem de impulsos é dada por

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} [1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + 2 \cos 3\omega_s t + \dots], \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$$

dessa forma

$$g_s(t) = g(t)\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} [g(t) + 2g(t) \cos 2\omega_s t + 2g(t) \cos 3\omega_s t + \dots] \quad (7.1)$$

Para encontrar $G_s(\omega)$ podemos aplicar a transformada de Fourier em cada termo da Equação acima. Observe que o primeiro termo é $G(\omega)$, o segundo termo é $G(\omega - \omega_s) +$

$G(\omega + \omega_s)$, o terceiro termo é $G(\omega - 2\omega_s) + G(\omega + 2\omega_s)$ e assim por diante, e que esses termos são o deslocamento do espectro de $G(\omega)$ para $\pm n\omega_s$, o mesmo que é feito na modulação AM. Isso significa que o espectro de $G_s(\omega)$ consiste de $G(\omega)$ repetido periodicamente com período $\omega_s = 2\pi/T_s$, ou

$$G_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s). \quad (7.2)$$

como está representado na Figura 7.1

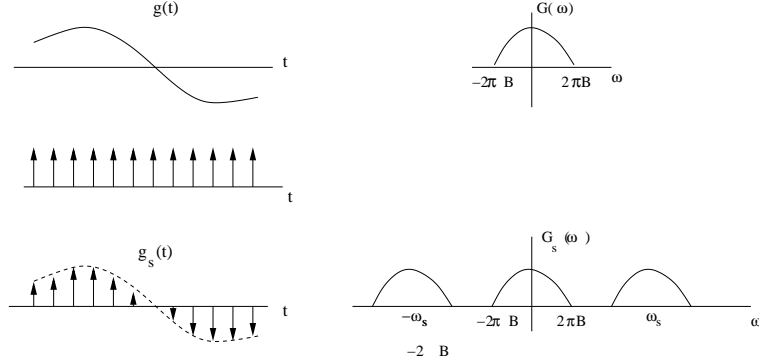


Figura 7.1: Representação do sinal $g(t)$, seu espectro $G(\omega)$, do trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ e do sinal $g_s(t)$ com o seu espectro.

Para reconstruir $g(t)$ a partir de $g_s(t)$ devemos conseguir recuperar $G(\omega)$ de $G_s(\omega)$, isso só será possível se não houver sobreposição dos espectros de $G_s(\omega)$, o que implica em

$$f_s > 2B \text{ ou } T_s < \frac{1}{2B}$$

o valor $f_s = 2B$ é conhecido como **taxa de Nyquist**.

A reconstrução do sinal pode ser feita passando $g_s(t)$ por um filtro passa baixas de largura de banda B Hz, pois observando a Equação 7.2 pode-se ver que o sinal $G_s(\omega)$ aplicado a um filtro passa baixas eliminaria as componentes deslocadas de $n\omega_s$, $n \neq 0$, passando somente $G(\omega)$. O filtro com essa característica tem função de transferência

$$H(\omega) = T_s \text{rect} \left(\frac{\omega}{4\pi B} \right). \quad (7.3)$$

Vamos analisar como a reconstrução do sinal ocorre no domínio do tempo. A resposta ao impulso $h(t)$, cuja função de transferência é dada pela Equação 7.3 é

$$h(t) = 2BT_s \text{sinc}(2\pi Bt)$$

e assumindo a taxa de amostragem de Nyquist, isto é, $2BT_s = 1$ temos

$$h(t) = \text{sinc}(2\pi Bt).$$

Observe que $h(t)$ é zero para todos os instantes de amostragem ($t = \pm n/2B$) exceto em $t = 0$. Quando $g_s(t)$ é aplicado a esse filtro a saída é $g(t)$ pois como cada amostra em $g_s(t)$ é um impulso na saída do filtro tem-se um pulso *sinc* cuja amplitude é proporcional a amostra, como está representado na Figura 7.2. De uma forma geral

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}[2\pi B(t - kT_s)] \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \end{aligned} \quad (7.4)$$

que é conhecida como fórmula de interpolação que aproxima os valores de $g(t)$ a partir das amostras.

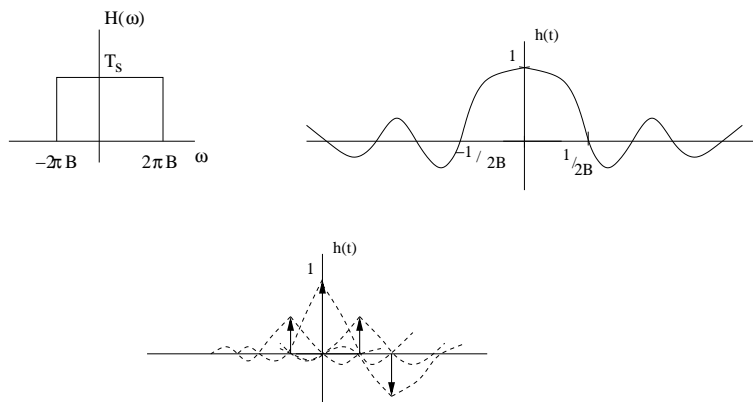


Figura 7.2: Representação do sinal $g(t)$, seu espectro $G(\omega)$ e, do trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ e do sinal $g_s(t)$ com o seu espectro.

Se um sinal é amostrado na frequência de Nyquist $f_s = 1/T_s$ o espectro de $G_s(\omega)$ consiste de repetições do espectro de $G(\omega)$ sem intervalos entre eles, e para recuperar $g(t)$ é necessário utilizar um filtro passa baixas ideal que elimine todas as componentes $G(\omega + n\omega_s)$ sendo $n \neq 0$. Como a realização de um filtro ideal é impossível, ao utilizar um filtro realizável na saída teremos $G(\omega)$ mais uma parte de outras componentes espectrais, fazendo com que o sinal recuperado não seja exatamente $g(t)$. Uma solução para isso é aumentar a frequência de amostragem pois com isso as cópias do espectro de $G(\omega)$ ficarão mais espaçadas e pode-se utilizar filtros mais suaves. Mesmo assim, nem sempre pode-se obter um filtro que elimine somente $G(\omega)$ ou realizar uma amostragem em taxas mais altas, logo conclui-se que a recuperação exata de $g(t)$ a partir de suas amostras é muito difícil.

O teorema da amostragem foi demonstrado considerando que o sinal $g(t)$ é limitado em banda, porém os sinais práticos são naturalmente ilimitados em banda, dessa forma, o espectro $G_s(\omega)$ do sinal amostrado consistirá de ciclos de $G(\omega)$ que se sobrepõem a cada f_s Hz. Devido a essa sobreposição $G_s(\omega)$ não tem a informação completa sobre $G(\omega)$, logo

teoricamente não seria possível recuperar $g(t)$ de $g_s(t)$. Este problema é conhecido como *aliasing*.

Uma possibilidade para solucionar o problema do *aliasing* é filtrar o sinal $g(t)$ antes que ele seja amostrado. Essa filtragem conhecida como *anti-aliasing* deve eliminar as componentes de frequências mais altas do sinal.

Outra dificuldade é que o teorema foi demonstrado utilizando uma sequência de impulsos para amostrar o sinal $g(t)$, e como é sabido os impulsos também são fisicamente irrealizáveis. Entretanto, pode-se utilizar um trem de pulsos para obter as amostras de $g(t)$, desde que a frequência de Nyquist seja preservada. Para tanto, observe que um trem de pulsos sendo um sinal periódico pode ser expresso como

$$p_{T_s}(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

e

$$\begin{aligned} g_s(t) &= g(t)p_{T_s}(t) = g(t) \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n) \right] \\ &= C_0 g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n g(t) \cos(n\omega_s t + \theta_n) \end{aligned} \quad (7.5)$$

e o sinal amostrado $g_s(t)$ consiste de $C_0 g(t)$, $C_1 g(t) \cos(\omega_s t + \theta_1)$, $C_2 g(t) \cos(2\omega_s t + \theta_2)$ e assim por diante. O termo desejado é $C_0 g(t)$ e os demais estão deslocados de $n\omega_s$ logo podem ser eliminados pelo filtro.

Aplicações

O teorema da amostragem é muito importante na análise, processamento e transmissão de sinais pois permite substituir um sinal contínuo no tempo por uma sequência de números discretos. Esse fato abre a possibilidade de realizar o processamento digital do sinal e de construir novas técnicas para comunicar sinais contínuos no tempo por trem de pulsos. Nesse último caso, as amostras do sinal são utilizadas para modificar certos parâmetros de um trem de pulsos periódicos. Pode-se variar a amplitude dos pulsos, obtendo a modulação conhecida como **modulação por amplitude de pulsos** (PAM - *pulse-amplitude modulation*, a largura dos pulsos obtendo-se a **modulação por largura de pulso** (PWM - *pulse-width modulation*) ou a posição do pulso obtendo a **modulação por posição do pulso** (PPM - *pulse-position modulation*) ou ainda a **modulação por codificação do pulso** (PCM - *pulse-code modulation*). As três primeiras estão representadas na Figura 7.3 e a última será tratada na próxima seção.

Como exemplo vamos analisar o PAM. Nessa modulação, as amplitudes dos pulsos regularmente espaçados variam proporcionalmente aos valores das amostras de um sinal mensagem contínuo, os pulsos podem ter formato retangular, como está representado na Figura 7.3 c) ou alguma outra forma apropriada.

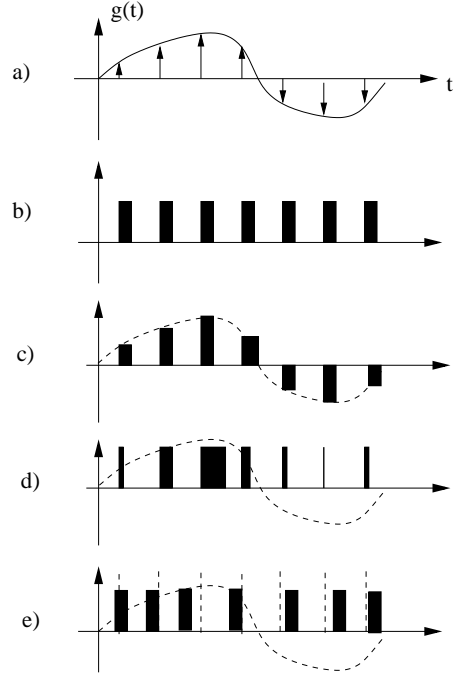


Figura 7.3: Representação das modulações por pulso a) Sinail $g(t)$, b) Portadora de Pulsos, c) PAM, d) PWM e e) PPM.

Na Figura 7.3 pode-se observar o sinal mensagem $m(t)$ e a sequência de pulsos retangulares $s(t)$. A geração do sinal PAM envolve duas operações:

1. Amostragem do sinal $m(t)$ a cada T_s (período de amostragem) segundos.
2. Prolongamento da duração de cada amostra até um valor constante T .

Na terminologia de circuitos as operações acima são conhecidas como *sample and hold* e a relação T/T_s como ciclo de trabalho. A razão para prolongar a duração de cada amostra é evitar o uso de uma largura de banda excessiva, uma vez que a largura de banda é inversamente proporcional à duração do pulso.

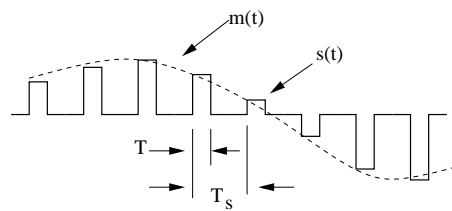


Figura 7.4: Sinal $m(t)$ modulando em amplitude um pulso quadrado de duração T .

Um sinal PAM $s(t)$ pode ser definido como

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)h(t - nT_s)$$

sendo T_s o período de amostragem, $m(nT_s)$ o valor da amostra de $m(t)$ obtido no tempo $t = nT_s$ e $h(t)$ um pulso retangular de amplitude unitária e duração T , definido da seguinte maneira:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ \frac{1}{2}, & t = 0, t = T \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Por definição, a versão amostrada instantaneamente de $m(t)$ é dada por

$$m_\delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (7.6)$$

sendo $\delta(t - nT_s)$ uma função delta deslocada no tempo. Portanto, convoluindo m_δ com o pulso $h(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} m_\delta(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} m_\delta(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_\delta(nT_s)\delta(\tau - nT_s)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_\delta(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s)h(t - \tau)d\tau \quad (7.8)$$

$$(7.9)$$

usando a propriedade da função delta temos

$$m_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)h(t - nT_s)$$

Portanto tem-se que o sinal $s(t)$ é matematicamente equivalente à convolução de $m_\delta(t)$ com o pulso $h(t)$, e pelas propriedades da transformada de Fourier tem-se

$$S(\omega) = M_\delta(\omega)H(\omega)$$

e como

$$M_\delta(\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(\omega - k\omega_s)$$

tem-se

$$S(\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(\omega - k\omega_s)H(\omega) \quad (7.10)$$

Exercício 14 Analise a influência da largura do pulso T no espectro $S(\omega)$ na Equação 7.10

7.2 Modulação por Codificação de Pulsos

Conhecida como PCM, do inglês *Pulse-Code Modulation* é a modulação em pulso mais utilizada. Basicamente, PCM é um método de converter um sinal analógico em um sinal digital (conversão A/D). Para isso utiliza-se a amostragem e a quantização, isto é, uma aproximação dos valores das amostras para níveis pré-definidos. Considerando que as amplitudes do sinal analógico $m(t)$ variam no intervalo $(-m_p, m_p)$, esse espaço é particionado em L sub-intervalos, cada um de tamanho $\Delta v = 2m_p/L$, em seguida cada amostra é aproximada para um dos L pontos que esteja mais próximo. O sinal obtido é chamado de digital.

Como exemplo observe a Figura 7.5, nela uma senóide de frequência F_c é amostrada com uma frequência $f_s \geq 2f_c$ em seguida são realizadas duas quantizações distintas, um com $L = 2$ e outra $L = 4$ níveis. Observe que para $L = 2$ a senóide é aproximada por um sinal quadrado, e com $L = 4$ mesmo não sendo uma aproximação exata já tem-se um formato de senóide.

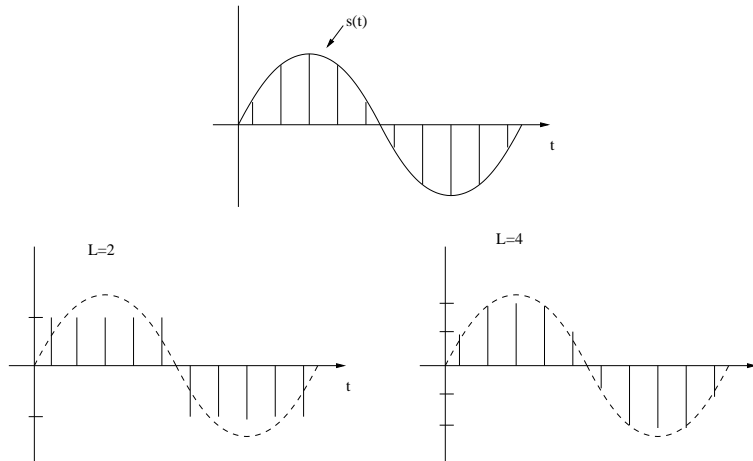


Figura 7.5: Senóide amostrada e em seguida quantizada com $L = 2$ níveis e com $L = 4$ níveis.

O processo seguinte é associar a cada um dos L níveis um conjunto de bits. Se para cada nível for associada a sua representação em binário tem-se o código natural binário (NBC, do inglês *natural binary code*).

Como exemplo um sinal de áudio tem largura de banda de 15KHz, mas mostra-se que a inteligibilidade não é afetada se esse sinal for filtrado em 3400Hz e o sinal resultante é amostrado a 8000 amostras por segundo (8 KHz), maior que a taxa de Nyquist que seria de 6,8KHz, e cada amostra é quantizada em 256 níveis ($L = 256$) que necessitam de um grupo de oito bits para cada amostra, assim um sistema telefônico necessita de $8 \times 8000 = 64000$ pulsos binários por segundo.

O CD (*compact disk*) o sinal de som não é filtrado e é utilizada uma taxa de amostragem de 44.1KHz, maior que o 30KHz necessários, e o sinal é quantizado em $L = 65.536$ níveis para reduzir o erro de quantização. No DVD a taxa de amostragem pode chegar a 192KHz e cada amostra pode usar 24 bits podendo o sinal ser quantizado a $L = 16.777.216$ níveis.

7.2.1 Quantização

A quantização consiste em aproximar os valores das amostras para níveis pré-definidos. Para isso vamos limitar a amplitude do sinal mensagem $m(t)$ para o intervalo $(-m_p, m_p)$, caso o pico de amplitude de $m(t)$ seja maior que m_p os valores acima serão fixados em m_p . Assim m_p não é um parâmetro do sinal mais do quantizador, em seguida divide-se o intervalo $(-m_p, m_p)$ em L subintervalos, cada um com $\Delta v = 2m_p/L$ e os valores amostrados são aproximados para o valor do intervalo que ele pertence. As amostras quantizadas são codificadas em seguida transmitidas por pulsos binários. No receptor tenta-se recuperar o sinal transmitido a partir das amostras.

Se $m(kT_s)$ é a k -ésima amostra do sinal $m(t)$, e $\hat{m}(kT_s)$ é a amostra quantizada correspondente, então da fórmula de interpolação tem-se que

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

e

$$\hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

sendo $\hat{m}(t)$ o sinal reconstruído das amostras quantizadas. A componente de distorção no sinal reconstruído é dada por

$$\begin{aligned} q(t) &= \hat{m} - m(t) \\ &= \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \\ &= \sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \end{aligned} \quad (7.11)$$

sendo $q(kT_s)$ o erro de quantização na k -ésima amostra. O sinal $q(t)$ é indesejado logo é chamado de **erro de quantização**. Uma medida importante é a potência do erro de quantização, ou seja

$$\begin{aligned} \overline{q^2(t)} &= \lim_{T \leftarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt \\ &= \lim_{T \leftarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi B - k\pi) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (7.12)$$

sabendo que os sinais $\text{sinc}(2\pi Bt - m\pi)$ e $\text{sinc}(2\pi Bt - n\pi)$ são ortogonais tem-se

$$\overline{q^2(t)} = \lim_{T \leftarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt \quad (7.13)$$

Os níveis de quantização são separados por $\Delta v = 2m_p/L$ e como o erro de quantização ocorre dentro de um desses intervalos, esse erro está entre $(-\Delta v/2, \Delta v/2)$. Assumindo que o erro é equiprovável em qualquer dos intervalos, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{q^2(t)} &= \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} q^2(t) dt \\ &= \frac{(\Delta v)^2}{12} \\ &= \frac{m_p^2}{3L^2}.\end{aligned}\tag{7.14}$$

Assumindo que o erro de detecção do pulso no receptor é desprezível, o sinal $\hat{m}(t)$ pode ser escrito como

$$\hat{m}(t) = m(t) + q(t)$$

Considerando a potência do sinal mensagem como $m^2(t)$ pode-se definir uma relação sinal ruído como

$$\frac{S}{N} = 3L^2 \frac{m^2(t)}{m_p^2}\tag{7.15}$$

e como m_p é a amplitude do sinal que o quantizador aceita e é um parâmetro do quantizador, quanto maior esse valor menor a relação sinal ruído.

7.3 Quantização não Uniforme

Os intervalos de quantização sendo uniformes $\Delta v = 2m_p/L$ trazem um problema, como o ruído de quantização $N_q = (\Delta v)^2/12$ é proporcional a Δv se pudermos usar intervalos de quantização menor diminuiremos o ruído. Isso é feito usando intervalos menores para amplitudes menores do sinal de entrada e é conhecido como quantização não uniforme.

Pode-se realizar a quantização não uniforme de diversas maneiras, uma delas é conhecida como lei μ utilizada no sistema de telefonia norte americano e japonês e o outro é conhecido como lei A usado no sistema europeu, brasileiro e no resto do mundo. A lei μ para amplitudes positivas é dada por

$$y = \frac{1}{\ln(1 + \mu)} \ln \left(1 + \frac{\mu m}{m_p} \right), \quad 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq 1$$

A lei A para amplitudes positivas é dada por

$$y = \begin{cases} \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{m}{m_p} \right) & 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{Am}{m_p} \right) & \frac{1}{A} \leq \frac{m}{m_p} \leq 1 \end{cases}$$

Os parâmetro μ ou A determinam o grau de compressão.

No receptor as amostras devem ser restauradas para o seu valor original e para isso usa-se um expensor com uma característica complementar a do compressor.

7.3.1 Largura de banda

Em PCM associa-se um grupo de n bits a cada um dos L níveis de quantização, ou seja,

$$L = 2^n \text{ ou } n = \log_2 L.$$

Como o sinal $m(t)$ limitado em B Hz requer no mínimo $2B$ amostras por segundo, necessita-se de $2nB$ bits por segundo. Sabendo que uma largura de banda de 1 Hz pode transmitir no máximo duas peças de informação por segundo, necessita-se de

$$B_T = nB \text{ Hz}$$

de largura de banda para transmitir um sinal PCM.

7.4 Multiplexação por Divisão no Tempo

Um sinal amostrado terá valor zero entre as amostras, os intervalos de tempo entre as amostras podem ser usados para transmitir outros sinais, esse é o princípio da multiplexação por divisão no tempo (TDM, do inglês *Time Division Multiplexing*).

Um esquema TDM simples pode ser visto na Figura 7.6. Várias entradas são pré-filtradas pelos filtros passa baixas e em seguida são amostradas. O amostrador rotatório ou comutador extrai uma amostra de cada entrada por volta e essas amostras podem ser enviadas por um PAM. No receptor, um equipamento chamado de distribuidor irá entregar cada amostra a uma saída para que em seguida os sinais sejam reconstruídos.

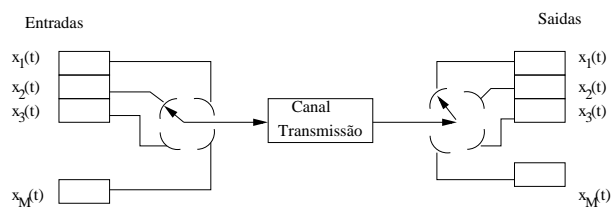


Figura 7.6: Representação de um sistema TDM.

Se todas as entradas têm a mesma largura de banda B , o comutador deve girar a uma taxa $f_s \geq 2B$ de tal sorte que as amostras sucessivas de qualquer uma das entradas é espaçada de $T_s = 1/f_s$. O intervalo T_s contém uma amostra de cada entrada e é chamado de quadro. Se existem M canais de entrada, o espaço de um pulso deve ser T_s/M , então o número total de pulsos por segundos é

$$r = Mf_s \geq 2MB$$

que representa a taxa de sinalização de um sinal TDM.

7.4.1 Sistemas de Modulação Digital

Vimos em capítulos anteriores que um sinal pode ser transmitido usando a modulação AM ou em ângulo. Naquele momento, o sinal mensagem $m(t)$ era analógico. Agora que já sabemos como digitalizar um sinal vamos analisar como são realizadas as modulações com sinais mensagens digitais.

Os sinais digitais são representados por sequências de zero e uns, se representarmos o zero como ausência de sinal e um como presença de sinal e usarmos o sinal resultante para modular uma portadora em amplitude teremos que, quando um zero tiver que ser transmitido a presença da portadora e quando for o bit um a presença da portadora, como está ilustrado na Figura 7.7. Esse tipo de modulação é chamado de chaveamento liga-desliga (OOK, do inglês *on-off keying*) ou ainda como chaveamento de amplitude (ASK, do inglês *amplitude-shift keying*).

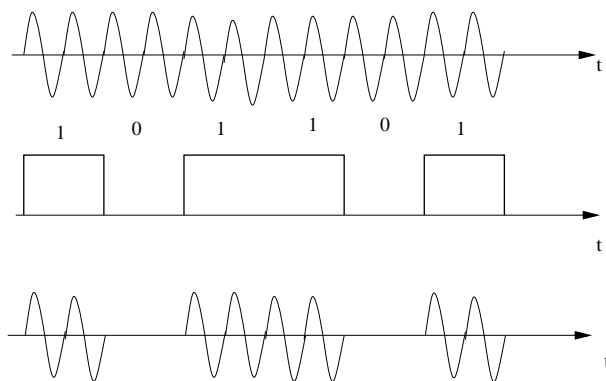


Figura 7.7: Modulação ASK.

Caso a representação seja polar, um é representado pelo pulso $p(t)$ e zero por $-p(t)$ (ou vice-versa) o sinal modulado em amplitude terá o formato mostrado na Figura 7.8 e será chamado de PSK - *phase-shift keying*. Quando os dados são enviados por variações de frequência temos a modulação FSK - *frequency-shift keying*.

Qualquer sinal modulado por um pulso em banda básica digital pode ser escrito como

$$S(t) = A[x_i(t) \cos(\omega_c t + \theta) = x_q(t) \sin(\omega_c t + \theta)]$$

sendo f_c a frequência da portadora, A a amplitude e θ a fase todos constantes. $x_i(t)$ e $x_q(t)$ são as componentes em fase e quadratura que contêm a mensagem. Considerando $x_i(t)$ e $x_q(t)$ estatisticamente independentes e ao menos uma com médio zero, tem-se que espectro desse sinal é dado por

$$S(\omega) = \frac{A^2}{4}[G_i(\omega - \omega_c) + G_i(\omega + \omega_c) + G_q(\omega - \omega_c) + G_q(\omega + \omega_c)]$$

sendo G_i e G_q os espectros de potência das componentes i e q respectivamente.

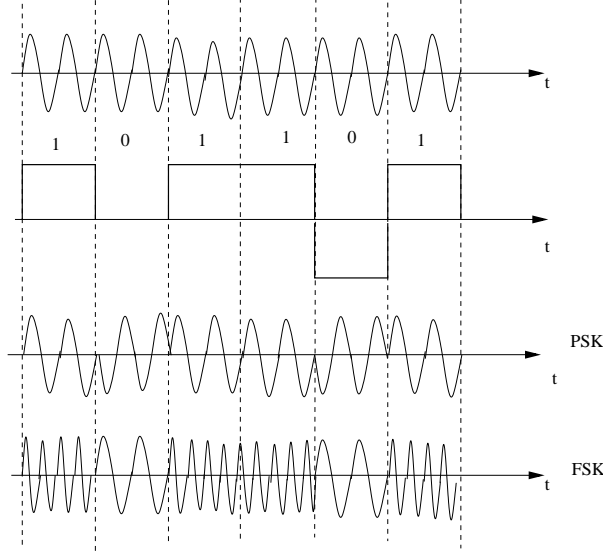


Figura 7.8: Modulações PSK e FSK.

Suponha que a componente i de um sinal M -ário digital é dada por

$$x_i(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

sendo a_k a sequência de dígitos da fonte gerados com uma taxa $r = 1/D$. Assumindo que os dígitos da fonte são equiprováveis, estatisticamente independentes e descorrelacionados tem-se que

$$G_i(\omega) = \sigma_a^2 r |P(\omega)|^2 + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(\omega - nr)$$

sendo σ_a e m_a a média e a variância dos símbolos.

Considerando $p(t)$ um pulso quadrado tem-se que

$$|P(\omega)|^2 = \frac{1}{r^2} \text{sinc}^2 \frac{\omega}{r}.$$

Vamos considerar inicialmente uma sinal M -ário ASK, que contém $M - 1$ amplitudes discretas e uma amplitude zero. Como nesse sinal não existe reversão da fase ou outras variações, pode-se fazer a componente q igual a zero e a componente i como

$$x_i(t) = \sum_k a_k p(t - kD), \quad a_k = 0, 1, \dots, M - 1$$

e a média e variância da sequência digital sendo

$$m_a = \frac{M - 1}{2} \quad e \quad \sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{2}$$

de onde tem-se que

$$S(\omega) = \frac{M^2 - 1}{12r} \text{sinc}^2 \frac{f}{r} + \frac{(M - 1)^2}{4} \delta(\omega)$$

O espectro $S(\omega)$ da equação acima não é limitado em banda, porém contém maioria da potência na faixa $\omega_c \pm 2\pi r/2$ e outra parte da energia que cai inversamente proporcional a $|\omega - \omega_c|^2$, sugerindo que a largura de banda desses sinais é aproximadamente $B_T \approx r$.

Outra forma de enviar é usar a modulação em quadratura de amplitude (QAM - *quadrature amplitude modulation*) que pode ser obtida transmitindo os sinais em fase e quadratura, ou seja se fizermos

$$\begin{aligned} p_i(t) &= a_i p(t) \cos \omega_c t + b_i p(t) \sin \omega_c t \\ &= r_i p(t) \cos(\omega_c t - \theta_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 16 \end{aligned} \quad (7.16)$$

sendo

$$r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \text{ e } \theta_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$$

Capítulo 8

Modulação Digital

Modulação em Fase

A informação é enviada pela mudança de fase da portadora. Como a fase varia entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se quisermos enviar M informações distintas, nesse caso enviaremos $k = \log_2 M$ bits, serão usadas as fases $\theta_m = 2\pi m/M$, para $m = 0, 1, \dots, M-1$. Como exemplo seja $M = 2$, nesse caso temos $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \pi$.

A representação geral para uma modulação em fase M -ária é dada por

$$s_m(t) = Ag_T(t) \cos\left(\omega_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$$

$m = 0, 1, \dots, M-1$, $g_T(t)$ o pulso cujo formato é escolhido para determinar as características espectrais do sinal enviado e A é a amplitude do sinal enviado. Esse tipo de modulação é chamado de **PSK - Phase Shift Keying**.

Quando g_T é um pulso retangular, definido por

$$g_T(t) = \sqrt{2T}, \quad 0 \leq t \leq T$$

e fazemos $A = \sqrt{E_s}$ temos

$$s_m(t) = \sqrt{2E_s} \cos\left(\omega_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$$

Na Figura abaixo temos os sinais PSK para $M = 4$

Vamos considerar esquemas de modulação cujo sinal mensagem é digital, denominadas a partir desse ponto de modulação digital. Nesse esquemas, a informação gerada pelo transmissor será amostrado na frequência de Nyquist, quantizada e seguida convertida para sua representação binária, portanto a partir desse capítulo será considerado que o modulador recebe a sequência de bits a ser transmitida e realiza a modulação de uma portadora com esses bits.

Qualquer sinal modulado pode ser escrito no formato fase e quadratura da seguinte forma

$$s(t) = A_c[x_i(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) + x_q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta)]$$

sendo A_c , f_c e θ constantes, $x_i(t)$ e $x_q(t)$ componentes que contêm a mensagem. Considerando $x_i(t)$ e $x_q(t)$ estatisticamente independentes e ao menos um deles com média zero tem-se

$$S(f) = \frac{A_c^2}{4} [X_i(f - f_c) + X_i(f + f_c) + X_q(f - f_c) + X_q(f + f_c)].$$

Para uma representação mais compacta, vamos definir uma representação passa baixa como

$$X_{pb} = X_i(f) + X_q(f)$$

e então

$$S(f) = \frac{A^2}{4} [X_{pb}(f - f_c) + X_{pb}(f + f_c)]$$

Entretanto, $x_i(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$ sendo a_k a sequência de dígitos da fonte gerada com taxa $r = 1/D$ e daí tem-se que

$$X_i(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(f - nr)$$

sendo m_a e σ_a^2 a média e a variância de a_k . A mesma expressão vale para $X_q(f)$.

Considerando $p(t)$ como um pulso retangular tem-se que

$$|P(f)|^2 = D^2 \text{sinc}^2 fD = \frac{1}{r^2} \text{sinc}^2 \frac{f}{r}$$

8.1 Modulações em Amplitude

Considerando inicialmente a modulação em amplitude, se fizermos o bit zero como o ausência de sinal e o bit 1 como o pulso $p(t)$ temos a modulação OOK (*On-Off Keying*), também conhecida como ASK - *Amplitude Shift Keying*, e a componente $x_q(t)$ pode ser feita igual a zero pois não haverá inversão de fase. Assim

$$x_i(t) = \sum_k a_k p(t - kD), \quad a_k = 0, 1, \dots, M - 1$$

para um sinal M -ário que tem média e variância dados por

$$m_a = \frac{M - 1}{2} \text{ e } \sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{12}$$

e assim

$$\begin{aligned} S(f) = & \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{(M^2 - 1)}{12r} \text{sinc}^2 \frac{(f - f_c)}{r} + \frac{(M - 1)^2}{4} \delta(f - f_c) \right. \\ & \left. + \frac{(M^2 - 1)}{12r} \text{sinc}^2 \frac{(f + f_c)}{r} + \frac{(M - 1)^2}{4} \delta(f + f_c) \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

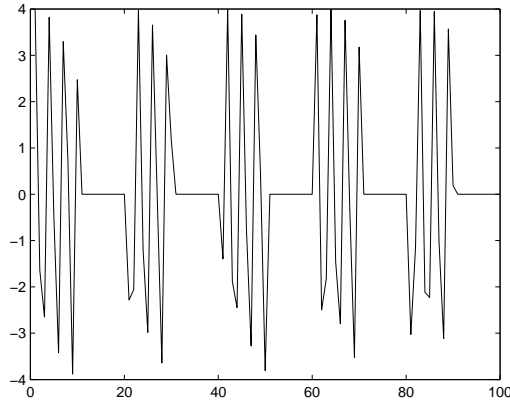


Figura 8.1: Sinal OOK.

Exemplo 39 Fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ temos na Figura 8.1 a representação do sinal OOK no tempo para a sequência $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$ e

$$S(f) = \left[\frac{1}{r} \text{sinc}^2 \left(\frac{f-5}{r} \right) + \delta(f-5) + \frac{1}{r} \text{sinc}^2 \left(\frac{f+5}{r} \right) + \delta(f+5) \right] \quad (8.2)$$

e na Figura 8.3 a parte positiva do espectro do sinal OOK para $r = 1$ e $r = 5$. Observe que o impulso não foi representado nessa figura, mas que a largura de banda do sinal aumenta a medida que r aumenta (ou D diminui), o que é esperado pois nesse caso a taxa de transmissão aumenta.

Além disso, observe que a maior parte da energia está concentrada a uma distância de r Hz da frequência da portadora.

8.2 Modulação em fase

Um sinal modulado em fase por uma informação digital será chamado de PSK - *Phase Shift Keying*. Um sinal PSK M -ário tem deslocamento de fase ϕ_k no intervalo de tempo $kD < t < (k+1)D$ e pode ser expresso por

$$s(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \phi_k) p(t - kD)$$

e as componentes em quadratura e fase podem ser expressas por

$$x_i(t) = \sum_k I_k p(t - kD) \quad e \quad x_q(t) = \sum_k Q_k p(t - kD)$$

sendo

$$I_k = \cos \phi_k \quad e \quad Q_k = \sin \phi_k$$

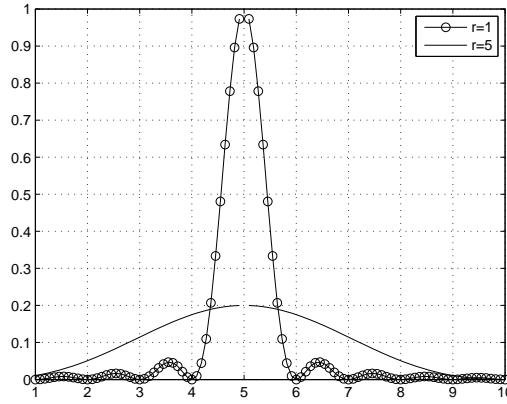


Figura 8.2: Parte positiva do espectro de um sinal OOK para $r = 1$ e $r = 5$ sem mostrar o impulso em f_c .

e a relação entre a_k e ϕ_k é dada por

$$\phi_k = \frac{\pi(2a_k + N)}{M}, \quad a_k = 0, 1, \dots, M-1$$

sendo N um valor inteiro, usualmente 0 ou 1.

Pode-se mostrar que

$$\bar{I}_k = \bar{Q}_k = 0, \quad \bar{I}_k^2 = \bar{Q}_k^2 = 1/2 \text{ e } \overline{I_k Q_j} = 0$$

Como as componentes em fase e quadratura são estatisticamente independentes tem-se

$$S_{pb}(f) = 2 \frac{r}{2} |P(f)|^2 = \frac{1}{r} \text{sinc}^2 \frac{f}{r}$$

e

$$S(f) = \frac{A^2}{4} \left[\frac{1}{r} \text{sinc}^2 \frac{(f - f_c)}{r} + \frac{1}{r} \text{sinc}^2 \frac{(f + f_c)}{r} \right].$$

Observe na expressão acima que não existe o impulso, logo PSK é mais eficiente do que ASK.

Exemplo 40 Vamos repetir o exemplo anterior para PSK fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ e $N = 1$, daí temos

$$S(f) = \frac{1}{r} \left[\text{sinc}^2 \frac{(f - 5)}{r} + \text{sinc}^2 \frac{(f + 5)}{r} \right] \quad (8.3)$$

e na Figura 8.3 a parte positiva do espectro do sinal PSK para $r = 1$ e $r = 5$. Observe que o espectro obtido é similar ao da ASK porém sem o impulso, o que indica que PSK é mais eficiente do que ASK.

Além disso, observe que a maior parte da energia está concentrada a uma distância de r Hz da frequência da portadora.

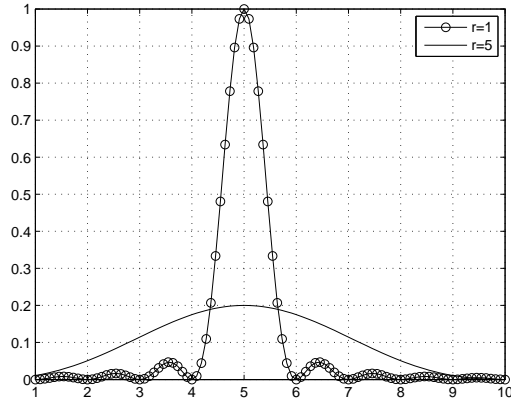


Figura 8.3: Parte positiva do espectro de um sinal BPSK para $r = 1$ e $r = 5$.

8.3 Modulação em Frequência

Aqui teremos a modulação conhecida como FSK - *Frequency Shift Keying* que terá frequência

$$f_k = f_c + f_d a_k, \quad a_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$$

onde assume-se que M é par. Assim,

$$s(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \omega_d a_k t) p(t - kD)$$

Vamos fazer $M = 2$, $D = T_b = 1/r_b$, $N = 1$ e $f_d = r_b/2$. Sendo $p(t) = u(t) = u(t - kT_b)$ te-se

$$f_d = r_b/2.$$

Fazendo $a_k = \pm 1$ teremos

$$\cos \omega_d a_k t = \cos \omega_d t \quad \sin \omega_d a_k t = a_k \sin \omega_d t$$

a componente em fase se reduz a

$$x_i(t) = \cos \pi r_b t$$

a componente em quadratura será dada por

$$\begin{aligned} x_q(t) &= \sum a_k \sin(\pi r_b t) p(t - kD) \\ &= \sum a_k \sin(\pi r_b t) [u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)] \end{aligned} \quad (8.4)$$

fazendo

$$Q_k = (-1)^k a_k$$

e

$$p_1(t) = \sin(\pi r_b t)[u(t) - u(t - T_b)]$$

tem-se

$$x_q(t) = \sum_k Q_k p(t - kT_b).$$

A componente em fase só contribui com impulsos em $r_b/2$ e daí

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{1}{4} \left[\delta(f - f_c - \frac{r_b}{2}) + \delta(f - f_c + \frac{r_b}{2}) \right] - r_b |P(f - f_c)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left[\delta(f + f_c - \frac{r_b}{2}) + \delta(f + f_c + \frac{r_b}{2}) \right] - r_b |P(f + f_c)|^2 \right] \end{aligned} \quad (8.5)$$

e

$$|P(f)|^2 = \frac{1}{4 * r_b^2} \left[\text{sinc} \frac{f - r_b/2}{r_b} + \text{sinc} \frac{f + r_b/2}{r_b} \right]^2$$

Exemplo 41 *Repetindo os exemplo anteriores, fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ e $N = 1$, temos na Figura 8.4 a parte positiva do espectro do sinal PSK para $r = 1$ e $r = 5$.*

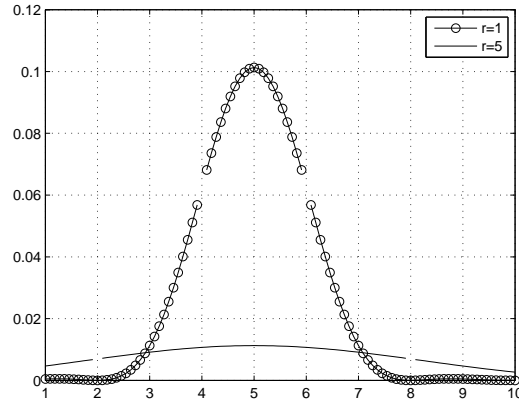


Figura 8.4: Parte positiva do espectro de um sinal FSK para $r = 1$ e $r = 5$ sem mostrar os impulsos.

Na Figura 8.5 tem o espectro do PSK e do FSK. Observe que FSK apesar de ter dois impulsos tem bandas laterais mais baixas.

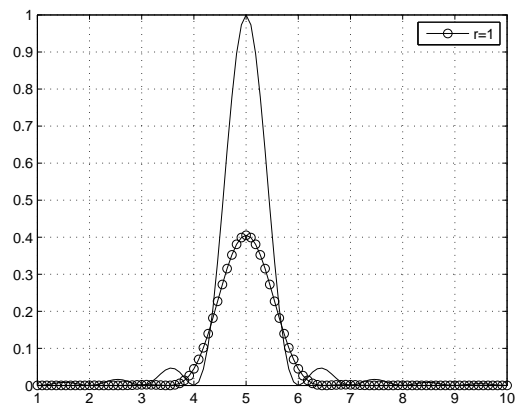


Figura 8.5: Parte positiva do espectro dos sinais PSK e FSK para $r = 1$ sem mostrar os impulsos.

Capítulo 9

Introdução a Codificação

Na transmissão digital os erros implicam em troca ou perda de bits. Uma forma de evitar esses erros é codificar a informação para que seja possível detectar e corrigir erros na sequência recebida. Para isso usa-se os códigos controladores de erro que consistem, basicamente, na adição sistemática de bits redundantes que não transportam informação mais tornam possível detectar e até corrigir erros ocorridos durante a transmissão.

Os códigos controladores de erro podem ser divididos em

- Códigos de Bloco
 - Solicitação de repetição automática - ARQ (*Automatic Repeat Request*)
 - Correção de erro em avanço - FEC (*Forward Error Correction*)
- Código convolucionais

Os métodos ARQ normalmente exigem um canal de retorno entre o receptor e o transmissor, pois ao detectar erro de recepção um sinal é enviado ao transmissor para que ele repita os dados recebidos com erro. Esse método normalmente só detecta erros.

Já o método FEC utiliza a redundância inserida pelo transmissor para verificar se os dados recebidos estão corretos. Dependendo da quantidade de redundância pode-se além de detectar o erro descobrir onde ele ocorreu e assim corrigi-lo. Entretanto, vale salientar que detectar erros é mais fácil que corrigir, portanto os códigos com o primeiro objetivo somente são mais simples do que os códigos que se propõem a corrigir erros.

Neste texto nos determos aos códigos FEC, deixaremos a descrição e análise dos ARQs para outra oportunidade.

Como exemplo considere o ISBN (*International Standard Book Number*) que consiste num conjunto de 10 caracteres que identifica univocamente um livro. Nesse conjunto de 10 número o último é usado como dígito verificador, ou seja, os números x_1, x_2, \dots, x_{10} são tais que

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i = 0(\text{mod } 11).$$

Como exemplo, o número 0-19-511009-9 (ISBN do Lathi) é válido pois

$$\begin{aligned} & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 9 + 4 \times 5 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 0 + 8 \times 0 + 9 \times 9 + 10 \times 9 \\ &= 0 + 2 + 27 + 20 + 5 + 6 + 0 + 0 + 81 + 90 \\ &= 231 = 0 \pmod{11} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Outro local onde se utiliza um código para verificação de erros no Brasil é no nosso cadastro de pessoas físicas (CPF). O CPF é composto por onze algarismos, onde os dois últimos são chamados de dígitos verificadores, ou seja, os dois últimos dígitos são criados a partir dos nove primeiros. O cálculo é feito em duas etapas utilizando o módulo de divisão 11.

Para exemplificar melhor, iremos calcular os dígitos verificadores de um CPF imaginário, por exemplo, 222.333.666-XX. Para gerar o primeiro dígito verificador vamos fazer a soma

$$\sum_{i=10}^2 ix_{i-9} \pmod{11}$$

que no exemplo fica

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 162 \pmod{11} = 8$$

e o resultado é subtraído de 11 (se for menor que 2 vira zero), logo no exemplo acima o dígito verificador é $11 - 8 = 3$. Para gerar o segundo dígito verificador vamos fazer a soma

$$\sum_{i=11}^2 ix_{i-10} \pmod{11}$$

e agora inclui-se o primeiro dígito verificador, que no exemplo fica

$$2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 201 \pmod{11} = 3$$

e o resultado é subtraído de 11 (se for menor que 2 vira zero), logo no exemplo acima o dígito verificador é $11 - 3 = 8$. E o CPF final será 222.333.666-38

9.1 Códigos de Bloco

De uma forma geral, como está representado na Figura 9.1 os sistemas de comunicações que utilizam codificação podem ser representado por uma fonte, que gera a informação e que a partir desse ponto consideraremos que a saída da fonte já foi amostrada e quantizada, portanto a informação já está em um formato digital. Os bits da fonte serão codificados e em seguida enviados através de um canal de comunicações, que devido ao ruído pode inserir erros que consistem inicialmente em troca de bits. O receptor utiliza um decodificador que recebe os bits da saída do canal e tenta corrigir os erros inseridos pelo canal.

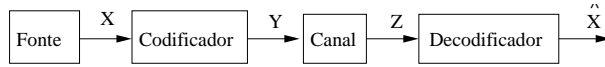


Figura 9.1: Representação de um sistema de comunicações que utiliza codificação.

Nesta seção considerarmos que a sequência de símbolos da fonte são agrupadas em blocos de tamanho k e que o codificador transforma cada um desses blocos em blocos de tamanho n , acrescentando $n - k$ bits de redundância, como está ilustrado na Figura 9.2. Esse tipo de codificação é conhecido como **código de bloco**. Um parâmetro importante é a taxa do código definida como

$$R = \frac{k}{n}$$

pois nos dá uma indicação do quanto de redundância será inserido pelo código.

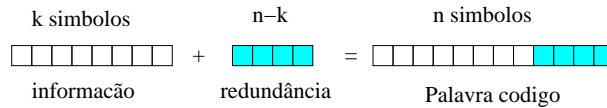


Figura 9.2: Adição de redundância em um código de bloco.

Observe que as palavras código pertencem a um conjunto de tamanho 2^n e que desse conjunto são escolhidas 2^k palavras. Essa escolha é feita de modo a minimizar a probabilidade de erro, para isso as palavras escolhidas tem o maior número de bits distintos possível. A menor quantidade em que duas palavras código quaisquer é conhecida como **distância do código**.

Duas palavras de um código com distância mínima d diferem dessa quantidade de bits, logo, se tivermos $t < d/2 - 1$ erros podemos corrigir a palavra recebida, logo para corrigir t erros deve-se ter

$$d_{min} = 2t + 1.$$

Já para detectar t error necessitamos de

$$d_{min} = t + 1.$$

Portanto, Um código que detecte t erros é mais simples do que um que corrige t erros.

9.2 Códigos de Bloco Lineares

Sejam $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ uma palavra código e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ uma palavra de informação, pode-se escrever

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}G$$

sendo $G_{k \times n} = [I_{k \times k} : P_{k \times m}]$ sendo $I_{k \times k}$ uma matriz identidade e $P_{k \times m}$ com $m = n - k$ a matriz de paridade.

Exemplo 42 *Seja*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então tem-se

<i>Palavra de informação</i>	<i>Palavra código</i>
000	000000
001	001110
010	010011
011	011101
100	100101
101	101011
110	110110
111	111000

Observe que em um código linear a soma de duas palavras código ainda é uma palavra código, e que a palavra código composta de zeros sempre está presente no código.

Para os códigos lineares pode-se construir a matriz

$$H = [P^T : I_m]$$

tal que $\mathbf{c}H^T = 0$. Essa matriz é conhecida com matriz de teste de paridade.

Exemplo 43 *Para o código do exemplo anterior tem-se*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que qualquer palavra que não seja do código, por exemplo $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$, gera um vetor diferente de zero, ou seja

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}H^T \tag{9.2}$$

$$= (\mathbf{c} + \mathbf{e})H^T \tag{9.3}$$

$$= \mathbf{c}H^T + \mathbf{e}H^T \tag{9.4}$$

$$= \mathbf{e}H^T \tag{9.5}$$

o vetor \mathbf{s} é conhecido como **síndrome**.

9.2.1 Correção de erros usando síndromes

Considere todos os vetores de erro de peso mínimo e calcule \mathbf{s} para cada um deles.

Exemplo 44

Palavra de informação	Palavra código
000001	001
000010	010
...	...
100000	101

Ao receber um vetor \mathbf{r}_i calcula-se a síndrome $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \mathbf{H}^T$ e verifica-se na tabela a qual linha essa síndrome corresponde e encontra-se o erro.

	<i>Erro</i>	<i>Síndrome</i>
	000001	101
	000010	110
Exemplo 45	000100	011
	001000	001
	010000	010
	100000	100

Na decodificação, ao receber um \mathbf{r}_i calcula-se a síndrome $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \mathbf{H}^T$ e verifica-se na tabela a qual linha essa síndrome está associada e encontra-se qual o erro correspondente. Para um código (n, k) linear tem-se $d_{min} = 1 + n - k$ e um código de Hamming tem como característica $(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m)$ sendo $m = n - k$.

Capítulo 10

Outros Tópicos

10.1 Phase-Locked Loop

Um *phase-locked loop* consiste de uma malha fechada na qual acompanhasse a fase do sinal de entrada. Essa malha tem três componentes básicos:

1. Um oscilador controlado por tensão (VCO - *voltage-controlled oscillator*)
2. Um multiplicador
3. Um filtro passa baixas $H(s)$

agrupados como está representado na Figura abaixo.

FIGURA

É um oscilador controlado por tensão a frequência de oscilação varia linearmente com a tensão de entrada. Sendo $e_0(t)$ o sinal de entrada do VCO sua frequência instantânea será dada por

$$\omega(t) = \omega_c + ce_0(t)$$

sendo c uma constante do VCO e ω_c a frequência livre do VCO, obtida quando a entrada é zero.

Considerando que a entrada do PLL é o sinal $A \sin(\omega_c t + \theta_i)$ e que a saída do VCO é $B \cos(\omega_c t + \theta_0)$, após a multiplicação temos

$$x(t) = AB$$

Capítulo 11

Filtro de Resposta Finita

11.1 Projeto de filtros usando série de Fourier

Deseja-se obter uma série que se aproxime da função de transferência desejada, denotada por

$$H_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

sendo C_n os coeficientes de série de Fourier complexa. Usando um frequência normalizada ν tal que $\nu = f/F_N$, sendo F_N a frequência de Nyquist, $F_N = F_s/2$, pode-se escrever

$$H_d(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi\nu}$$

sendo $\omega T = 2\pi f/F_s = \pi\nu$ e $|\nu| < 1$. Os coeficientes C_n são definidos como

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_d(\nu) e^{-jn\pi\nu} d\nu \quad (11.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_d(\nu) (\cos n\pi\nu - j \sin n\pi\nu) d\nu \quad (11.2)$$

se $H_d(\omega)$ for uma função par, então

$$C_n = \int_0^1 H_d(\nu) \cos n\pi\nu, \quad n \geq 0$$

pois a integral sobre $H_d(\nu) \sin n\pi\nu$ é igual a zero. Além disso $C_n = C_{-n}$.

A série acima tem um número infinito de termos, o que é impossível de ser implementado, logo deve-se truncar obtendo-se

$$H_d(\nu) = \sum_{n=-Q}^Q C_n e^{jn\pi\nu}.$$

Façamos agora $z = e^{j\pi\nu}$, então

$$H_d(z) = \sum_{n=-Q}^Q C_n z^n.$$

que tem como resposta ao impulso os coeficiente $C_{-Q}, C_{-Q+1}, \dots, C_Q$ o que implica em um sistema não causal, para contar essa situação podemos introduzir de Q amostras, obtendo

$$H(z) = z^{-Q} H_d(z) = \sum_{n=-Q}^Q C_n z^{n-Q}.$$

fazendo $n - Q = -i$, temos

$$H(z) = \sum_{i=0}^{2Q} C_{Q-i} z^{-i}$$

façamos $h_i = C_{Q-i}$ e $N - 1 = 2Q$, então

$$H(z) = \sum_{i=0}^{2Q} h_i z^{-i}$$

sendo $h_0 = C_Q, h_1 = C_{Q-1}, \dots, h_{2Q} = C_{-Q}$. Os coeficientes da resposta ao impulso são simétricos ao entorno de h_Q , pois $C_n = C_{-n}$.

A ordem do filtro é $N = 2Q + 1$. Por exemplo se $Q = 5$ o filtro tem ordem 11 e coeficiente h_0, \dots, h_{10} .

Para cada tipo de filtro os coeficientes podem ser encontrados seguindo a regra:

1. Passa-baixas: $C_0 = \nu_1$ e

$$C_n = \frac{\sin n\pi\nu_1}{n\pi}$$

2. Passa altas: $C_0 = 1 - \nu_1$ e

$$C_n = -\frac{\sin n\pi\nu_1}{n\pi}$$

3. Passa faixa: $C_0 = \nu_2 - \nu_1$ e

$$C_n = \frac{\sin n\pi\nu_2 - \sin n\pi\nu_1}{n\pi}$$

4. Rejeita faixa: $C_0 = 1 - (\nu_2 - \nu_1)$ e

$$C_n = \frac{\sin n\pi\nu_1 - \sin n\pi\nu_2}{n\pi}$$

sendo ν_1 e ν_2 as frequências de corte normalizadas.

Exemplo 46 Vamos determinar os coeficientes de um filtro FIR com $N = 11$, uma frequência de amostragem de 10kHz , e uma frequência de corte $f_c = 1\text{kHz}$.

Do item 1 temos que

$$C_0 = \nu_1 = \frac{f_c}{F_N} = 0.2$$

sendo $F_N = f_s/2$ e

$$C_n = \frac{\sin 0.2n\pi}{n\pi}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5$$

e

$$\begin{array}{lll} h_0 = h_{10} = 0 & h_1 = h_9 = 0.0468 & h_2 = h_8 = 0.1009 \\ h_3 = h_7 = 0.1514 & h_4 = h_6 = 0.1009 & h_5 = 0.2 \end{array}$$

Exercício 15 Esboce o gráfico $C_n \times n$ para o filtro acima.