Universidade Federal de Campina Grande

Departamento de Engenharia Elétrica

Notas de Aula: Princípios de Comunicações

Bruno Barbosa Albert e Edmar Candeia Gurjão
albert@dee.ufcg.edu.br e ecandeia@dee.ufcg.edu.br

Abril de 2008

Capítulo 1

Modulação Digital

Vamos considerar esquemas de modulação cujo sinal mensagem é digital, denominadas a partir desse ponto de modulação digital. Nesse esquemas, a inormação gerada pelo transmissor será amostrado na frequência de Nyquist, quantizada e seguida convertida para sua repesentação binária, portanto a partir desse capítulo será considerado que o modulador recebe a sequência de bits a ser transmitida e realiza a modulação de uma portadora com esses bits.

Qualquer sinal modulado pode ser escrito no formato fase e quadratura da seguinte forma

$$s(t) = A_c[x_i(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) + x_q(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)]$$

sendo A_c, f_c e θ constantes, $x_i(t)$ e $x_q(t)$ componentes que contêm a mensagem. Considerando $x_i(t)$ e $x_q(t)$ estatisticamente independentes e ao menos um deles com média zero tem-se

$$S(f) = \frac{A_c^2}{4}[X_i(f-f_c) + X_i(f+f_c) + X_q(f-f_c) + X_q(f+f_c)].$$

Para uma representação mais compacta, vamos definir uma representação passa baixa como

$$X_{pb} = X_i(f) + X_q(f)$$

e então

$$S(f) = \frac{A^2}{4}\left[X_{pb}(f-f_c) + X_{pb}(f+f_c)\right]$$

Entretanto, $x_i(t) = \sum_k a_k p(t-kD)$ sendo a_k a sequência de dígitos da fonte gerada com taxa $r = 1/D$ e dai tem-se que

$$X_i(f) = \sigma_a^2 r \mid P(f) \mid^2 + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid P(nr) \mid^2 \delta(f - nr)$$

sendo m_a e σ_a^2 a média e a variância de a_k. A mesma expressão vale para $X_q(f)$.

Considerando $p(t)$ como um pulso retangular tem-se que

$$\mid P(f) \mid^2 = D^2 sinc^2 fD = \frac{1}{r^2} sinc^2 \frac{f}{r}$$

1.1 Modulações em Amplitude

Considerando inicialmente a modulação em amplitude, se fizermos o bit zero como o ausência de sinal e o bit 1 como o pulso $p(t)$ temos a modulação OOK (*On-Off Keying*), também conhecida como ASK - *Amplitude Shift Keying*, e a componente $x_q(t)$ pode ser feita igual a zero pois não haverá inversão de fase. Assim

$$x_i(t) = \sum_k a_k p(t - kD), \quad a_k = 0, 1, ..., M - 1$$

para um sinal M-ário que tem média e variância dados por

$$m_a = \frac{M-1}{2} \text{ e } \sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

e assim

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{A_c^2}{4}\left[\frac{(M^2-1)}{12r} sinc^2 \frac{(f-f_c)}{r} + \frac{(M-1)^2}{4}\delta(f-f_c)\right. \\ &+ \left.\frac{(M^2-1)}{12r} sinc^2 \frac{(f+f_c)}{r} + \frac{(M-1)^2}{4}\delta(f+f_c)\right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Exemplo 1 *Fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ temos na Figura 1.1 a representação do sinal OOK no tempo para a sequência $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$ e*

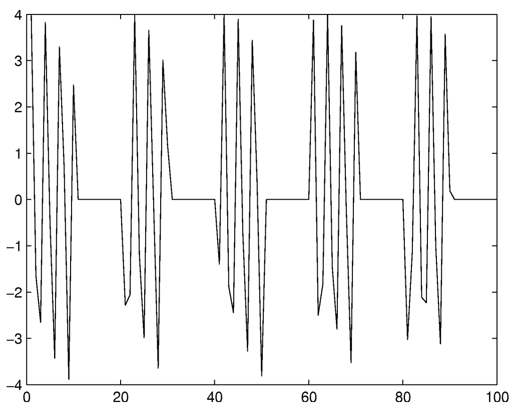

Figura 1.1: Sinal OOK.

$$S(f) = \left[\frac{1}{r} sinc^2 \frac{(f-5)}{r} + \delta(f-5) + \frac{1}{r} sinc^2 \frac{(f+5)}{r} + \delta(f+5)\right] \tag{1.2}$$

e na Figura 1.3 a parte positiva do espectro do sinal OOK para $r = 1$ e $r = 5$. Observe que o impulso não foi representado nessa figura, mas que a largura de banda do sinal aumenta a *medida que r aumenta (ou D diminui), o que é esperado pois nesse caso a taxa de transmissão aumenta.*

Além disso, observe que a maior parte da energia está concentrada a uma distância de r Hz da frequência da portadora.

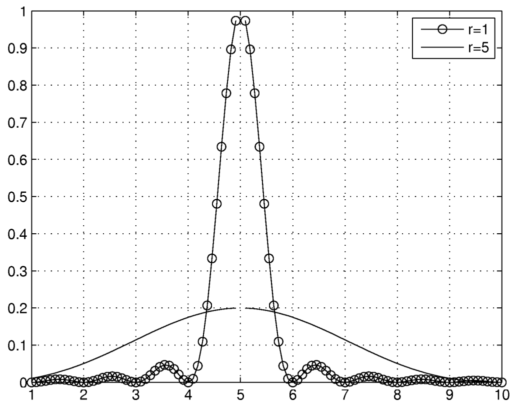

Figura 1.2: Parte positiva do espectro de um sinal OOK para $r = 1$ r $r = 5$ sem mostrar o impulso em f_c.

1.2 Modulação em fase

Um sinal modulado em fase por uma informação digital será chamado de PSK - *Phase Shift Keying*. Um sinal PSK M-ário tem deslocamento de fase ϕ_k no intervalo de tempo $kD < t < (k+1)D$ e pode ser expresso por

$$s(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \phi_k) p(t - kD)$$

e as componentes em quadratura e fase podem ser expressas por

$$x_i(t) = \sum_k I_k p(t - kD) \quad e \quad x_q(t) = \sum_k Q_k p(t - kD)$$

sendo

$$I_k = cos\phi_k \quad e \quad Q_k = \sin\phi_k$$

e a relação entre a_k e ϕ_k é dada por

$$\phi_k = \frac{\pi(2a_k + N)}{M}, \quad a_k = 0, 1, ..., M-1$$

sendo N um valor inteiro, usualmente 0 ou 1.

Pode-se mostrar que

$$\overline{I}_k = \overline{Q}_k = 0, \quad \overline{I^2}_k = \overline{Q^2}_k = 1/2 \ e \ \ \overline{I_k Q_j} = 0$$

Como as componentes em fase e quadratura são estatisticamente independentes tem-se

$$S_{pb}(f) = 2\frac{r}{2} \mid P(f) \mid^2 = \frac{1}{r} sinc^2 \frac{f}{r}$$

e

$$S(f) = \frac{A^2}{4}\left[\frac{1}{r} sinc^2 \frac{(f-f_c)}{r} + \frac{1}{r} sinc^2 \frac{(f+f_c)}{r}\right].$$

Observe na expressão acima que não existe o impulso, logo PSK é mais eficiente do que ASK.

Exemplo 2 *Vamos repetir o exemplo anterior para PSK fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ e $N = 1$, daí temos*

$$S(f) = \frac{1}{r}\left[sinc^2 \frac{(f-5)}{r} + sinc^2 \frac{(f+5)}{r}\right] \tag{1.3}$$

e na Figura 1.3 a parte positiva do espectro do sinal PSK para $r = 1$ e $r = 5$. Observe que o espectro obtido é similar ao da ASK porém sem o impulso, o que indica que PSK é mais eficiente do que ASK.

Além disso, observe que a maior parte da energia está concentrada a uma distância de r Hz da frequência da portadora.

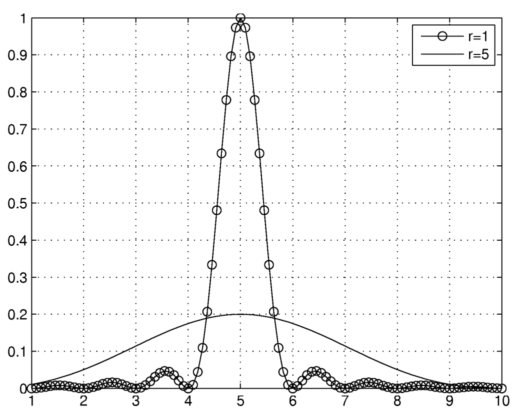

Figura 1.3: Parte positiva do espectro de um sinal BPSK para $r = 1$ r $r = 5$.

1.3 Modulação em Frequência

Aqui teremos a modulacão conhecida como FSK - *Frequency Shift Keying* que terá frequência

$$f_k = f_c + f_d a_k, \quad a_k = \pm 1, \pm 3, ..., \pm(M-1)$$

onde assume-se que M á par. Assim,

$$s(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \omega_d a_k t) p(t - kD)$$

Vamos fazer $M = 2$, $D = T_b = 1/r_b$, $N = 1$ e $f_d = r_b/2$. Sendo $p(t) = u(t) = u(t - kT_b)$ te-se

$$f_d = r_2/2.$$

Fazendo $a_k = \pm 1$ teremos

$$\cos \omega_d a_k t = \cos \omega_d t \qquad \sin \omega_d a_k t = a_k \sin \omega_d t$$

a componente em fase se reduz a

$$x_i(t) = \cos \pi r_b t$$

a componenente em quadratura será dada por

$$\begin{aligned} x_q(t) &= \sum a_k \sin(\pi r_b t) p(t - kD) \\ &= \sum a_k \sin(\pi r_b t)[u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)] \end{aligned} \tag{1.4}$$

fazendo

$$Q_k = (-1)^k a_k$$

e

$$p_1(t) = \sin(\pi r_b t)[u(t) - u(t - T_b)]$$

tem-se

$$x_q(t) = \sum_k Q_k p(t - kTb).$$

A componente em fase só contribui com impulsos em $r_b/2$ e daí

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{1}{4} \left[\delta(f - f_c - \frac{r_b}{2}) + \delta(f - f_c + \frac{r_b}{2}) \right] - r_b \mid P(f - f_c) \mid^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \left[\delta(f + f_c - \frac{r_b}{2}) + \delta(f + f_c + \frac{r_b}{2}) \right] - r_b \mid P(f + f_c) \mid^2 \right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

e

$$\mid P(f) \mid^2 = \frac{1}{4 * r_b^2} \left[sinc \frac{f - r_b/2}{r_b} + sinc \frac{f + r_b/2}{r_b} \right]^2$$

Exemplo 3 *Reteprindo os exemplo anteriores, fazendo $M = 2$ (binário), $A_c = 4$, $f_c = 5$ e $N = 1$, temos na Figura 1.4 a parte positiva do espectro do sinal PSK para $r = 1$ e $r = 5$.*

Na Figura 1.5 tem o espectro do PSK e do FSK. Observe que FSK apesar de ter dois impulsos tem bandas laterais mais baixas.

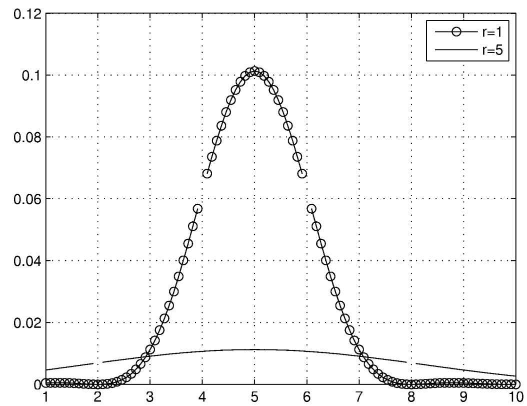

Figura 1.4: Parte positiva do espectro de um sinal FSK para $r = 1$ r $r = 5$ sem mostrar os impulsos.

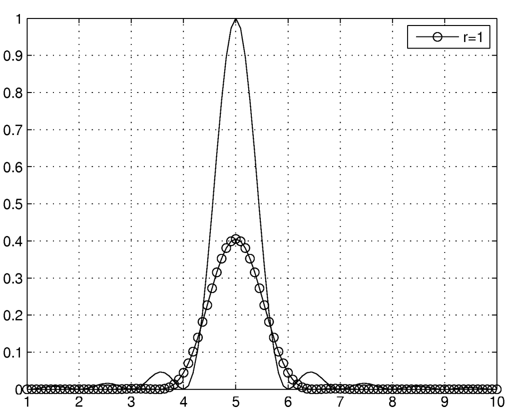

Figura 1.5: Parte positiva do espectro dos sinais PSK e FSK para $r = 1$ sem mostrar os impulsos.