Processamento Digital de Sinais - Análise de Sistemas no Tempo Discreto

Edmar Candeia Gurjão

Universidade Federal de Campina Grande

Abril de 2021

- Um sistema linear invariante ao deslocamento tem relação entrada $x(n)$, saída $y(n)$ dada por

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

sendo $h[n]$ a resposta ao impulso do sistema.

- Aplicando a Transformada z

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- Para analisar no domínio da frequência, fazemos $z = re^{j\omega}$ e faremos $r = 1$, logo

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

e devemos analisar as relações de módulo e fase

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|,$$
$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

- Filtro Ideal
  - Seja um filtro passa-baixas ideal, dado por

$$H_{pb}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

lembrando que essa função é periódica, com período 2π.

  - No tempo

$$h_{pb}(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

Como ficam o módulo e a fase?

- Distorção de Fase e Atraso
  - Seja o sistema linear de atraso ideal

$$h(n) = \delta(n - n_d)$$

com

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \; e \; |H(e^{j\omega})| = 1, \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \; |\omega| < \pi.$$

  - Para tornarmos o filtro ideal um sistema realizável, vamos inicialmente deslocar sua resposta de n_d posições, ou seja, vamos convoluir $h_{pb}(n)$ com $h(n)$ do atraso ideal, e obteremos

$$H_{pb}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d} & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

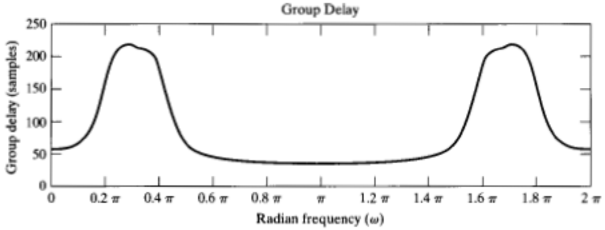
e assim

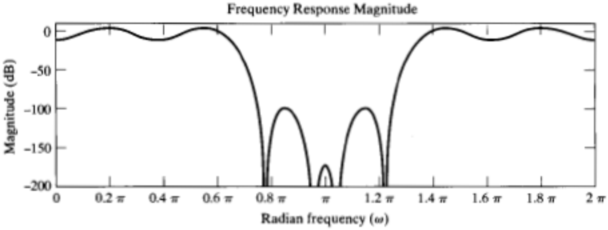
$$h_{pb}(n) = \frac{\sin \omega_c (n - n_d)}{\pi (n - n_d)}, \; -\infty < n < \infty$$

- Atraso de grupo (*Group Delay*)

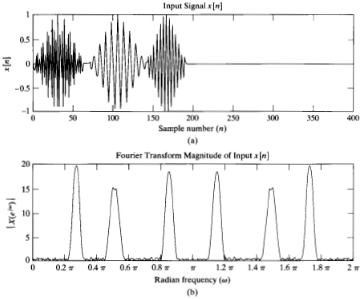
$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\angle H(e^{j\omega})\}$$

  - O desvio de $\tau(\omega)$ de uma constante indica o grau de não linearidade da fase.
  - Sinal com três pulsos faixa estreita com frequências $\omega = 0,85\pi$, $\omega = 0,25\pi$ e $\omega = 0,5\pi$, e um filtro com as seguintes características

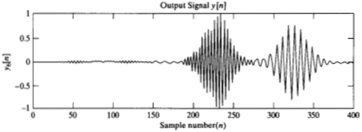

Group Delay
Group delay (samples)
250
200
150
100
50
0
0
0.2 π
0.4 π
0.6 π
0.8 π
π
1.2 π
1.4 π
1.6 π
1.8 π
2 π
Radian frequency (ω)
(a)


Frequency Response Magnitude
Magnitude (dB)
0
-50
-100
-150
-200
0
0.2 π
0.4 π
0.6 π
0.8 π
π
1.2 π
1.4 π
1.6 π
1.8 π
2 π
Radian frequency (ω)
(b)

- Sinal de entrada



- Sinal de saída



- Filtro Média
  - Seja o sistema representado pela equação

$$y(n) = \frac{[x(n) + x(n-1)]}{2}$$

  - Aplicando a Transformada z temos

$$Y(z) = (1/2)X(z) + (1/2)X(z)z^{-1} \text{ e}$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1/2) + (1/2)z^{-1}$$

  - Aplicando a transformada inversa

$$h(n) = (1/2)\delta(n) + (1/2)\delta(n-1)$$

- Na frequência, $r = 1$

$$H(e^{j\omega}) \;=\; 1/2 + (1/2)e^{-j\omega}$$

$$\begin{aligned}
|H(e^{j\omega})| &= |(1/2) + (1/2)e^{-j\omega}| = |(1/2 + (1/2)\cos\omega) - j(1/2)\sin\omega| \\
&= \sqrt{(1/2 + (1/2)\cos\omega)^2 + ((1/2)\sin\omega)^2} \\
&= \sqrt{1/4 + (1/2)\cos\omega + (1/4)\cos^2\omega + (1/4)\sin^2\omega} \\
&= \sqrt{1/2 + (1/2)\cos\omega} \qquad (1)
\end{aligned}$$

- Na frequência, $r = 1$

$$\angle H(e^{j\omega}) = tan^{-1}\left(\frac{-(1/2)\sin\omega}{1/2+(1/2)\cos\omega}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-\sin\omega}{1+1\cos\omega}\right) \tag{2}$$

- Gráficos de módulo e fase.
- Fase é linear

- $h(n)$ tem zero em $z = -1$

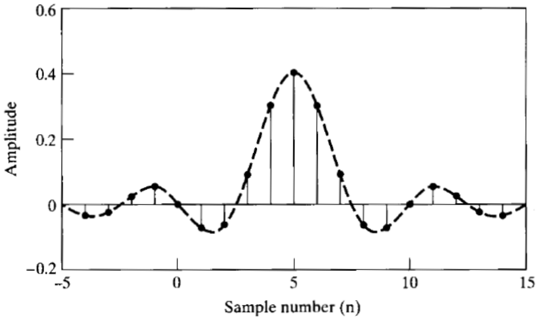
$$1/2 + (1/2)z^{-1} = 0 \rightarrow z^{-1} = -1.$$

- $h(n)$ é uma função limitada, logo é estável.

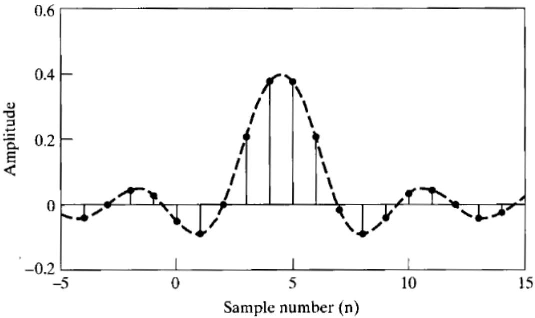
- Sistemas lineares com fase linear
  - Como vimos, um sistema causal que não distorce o sinal de entrada é dado por
$$|H(e^{j\omega})| = 1 \text{ e } \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha$$
  - Seja o filtro passa-baixas ideal dado por
$$H_{pb}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$
no tempo discreto
$$h_{pb}(n) = \frac{\sin \omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}$$

- Sistemas lineares com fase linear.
  - Vamos observar $h_{pb}(n)$ para $\omega_c = 0,4\pi$, e $\alpha = 5$. Nesse caso, a resposta ao impulso é simétrica ao entorno de $\alpha = n_d$, logo

$$h_{pb}(2n_d - n) = \frac{\sin \omega_c(2n_d - n - n_d)}{\pi(2n_d - n - n_d)} = \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} = h_{pb}(n)$$



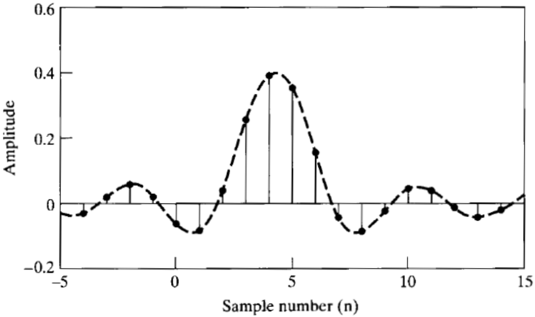
- Para $\alpha = 4,5$.



- Como 2α é inteiro, há simetria

$$h_{pb}(2\alpha - n) = h_{pb}(n)$$

- Para $\alpha = 4,3$.



- Como 2α não é inteiro, não há simetria.

- Fase linear generalizada.
  - De forma genérica podemos escrever

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\phi}$$

    sendo α e ϕ constantes, e $A(e^{j\omega})$ uma função real de ω.
  - Vamos procurar um forma de obter a simetria de $h(n)$, pois isso garante a fase linear.
  - Fazendo

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{-j\omega\alpha+j\phi}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{e^{j\phi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega \qquad (3) \end{aligned}$$

- Fase linear generalizada
  - Lembremos que escolhemos $\alpha = \frac{k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$;
  - Podemos escrever

$$h(2\alpha - n) = \frac{e^{j\phi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega(2\alpha-n-\alpha)}d\omega = \frac{e^{j\phi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega(\alpha-n)}d\omega$$

  - Como $A(e^{j\omega})$ é real

$$\begin{aligned} h^*(2\alpha - n) &= \frac{e^{-j\phi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A^*(e^{j\omega})e^{-j\omega(\alpha-n)}d\omega \\ &= \frac{e^{-j\phi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

- Fase linear generalizada
  - Com isso chegamos a

$$h(n) = e^{j2\phi} h^*(2\alpha - n)$$

  - $h(n)$ terá que ser uma função causal e de duração limitada em $0 \leq n \leq M$ logo $\alpha = \frac{M}{2}$ e

$$h(n) = e^{j2\phi} h^*(M - n)$$

  - Se escolhermos fazer os coeficientes reais $h(n) = h^*(n)$ necessitamos $\phi = \frac{k\pi}{2},\ j \in \mathbb{Z}$ e

$$h(n) = (-1)^k h(M - n),\ k \in \mathbb{Z}$$

  - Com as escolhas anteriores chegamos a

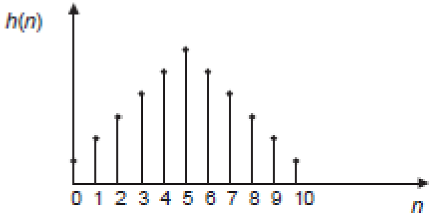
$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j\frac{M}{2} + j\frac{k\pi}{2}}$$

- Fase linear generalizada
  - Com
$$h(n) = (-1)^k h(M - n),\ k \in \mathbb{Z}$$
quando $k = 2$ e $k = 3$ temos os casos para $k = 0$ e $k = 1$ apenas fazendo $A(e^{j\omega}) \leftarrow -A(e^{j\omega})$, assim temos os filtros
    - Tipo I: $k = 0$ e M par;
    - Tipo II: $k = 0$ e M ímpar;
    - Tipo III $k = 1$ e M para;
    - Tipo IV $k = 1$ e M ímpar.

- Fase linear generalizada
  - Com $k = 0$ e M par (Tipo I), temos

$$h(n) = h(M - n), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

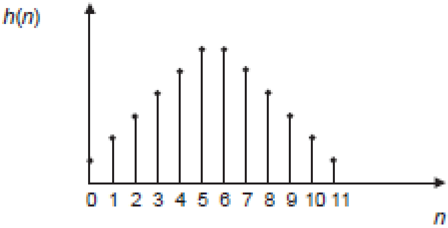
e como $M/2$ é inteiro, $h(n)$ simétrico, haverá um ponto central de simetria, e $h(n)$ terá o formato



- Fase linear generalizada
  - Com $k = 0$ e M ímpar, temos

$$h(n) = h(M - n), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

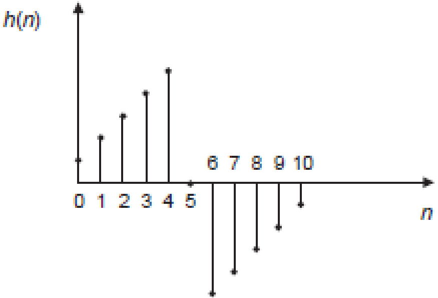
e como $M/2$ é inteiro, $h(n)$ é simétrico, haverá dois pontos centrais de simetria, e $h(n)$ terá o formato



- Fase linear generalizada
  - Com $k = 1$ e M ímpar, temos

$$h(n) = -h(M - n), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

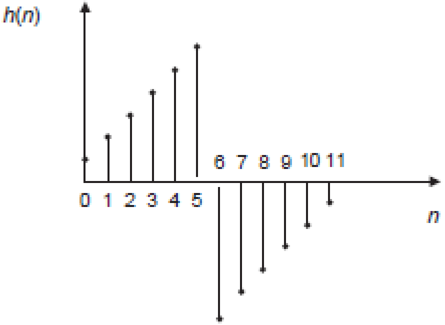
e como $M/2$ é inteiro e $h(n)$ simétrico, haverá um ponto central de simetria, que deverá ser zero, e $h(n)$ terá o formato



- Fase linear generalizada
  - Com $k = 0$ e M ímpar, temos

$$h(n) = -h(M-n),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

e como $M/2$ é inteiro, e $h(n)$ simétrico, haverá dois pontos centrais de simetria, e $h(n)$ terá o formato



- Sistema FIR Fase Linear Tipo I.
  - Tem resposta ao impulso simétrica

$$h(n) = h(M-n),\ 0 \leq n \leq M$$

M um inteiro par, logo $M/2$ é um inteiro, então podemos escrever

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{M}{2}\right)z^{-M/2} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(M-n)}] + h\left(\frac{M}{2}\right)z^{-\frac{M}{2}} \end{aligned} \tag{6}$$

- Sistema FIR Fase Linear Tipo I.
  - Na frequência

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega M/2} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n][e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(M-n)}] + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega M/2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

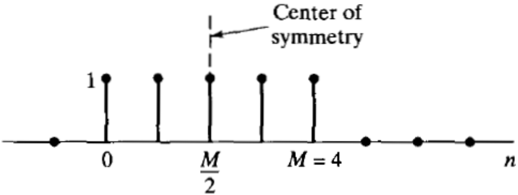
que devido a simetria

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k]\cos\omega k\right)$$

sendo

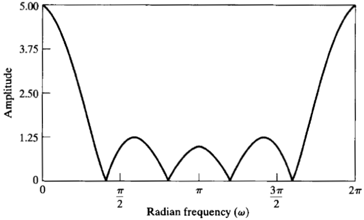
$$a[0] = h[M/2],\ \ a[k] = 2h[M/2-k], k = 1, 2, ..., M/2.$$

- Sistema FIR Fase LInear Tipo I.

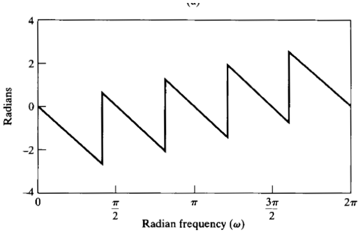


- Exemplo Sistema FIR Fase Linear Tipo I.

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & c.c \end{cases} \quad e \;\; H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{sen(5\omega/2)}{sen(\omega/2)}.$$



(A)



(B)

- Sistema FIR Fase Linear Tipo II.
  - Tem resposta ao impulso simétrica

$$h[n] = h[M-n], \; 0 \leq n \leq M$$

M um inteiro ímpar, então

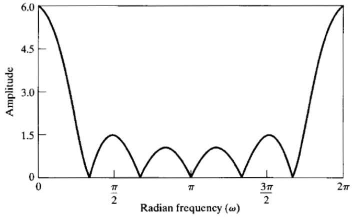
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=0}^{(M+1)/2} b[k] \cos \omega (k - \frac{1}{2} \right)$$

sendo

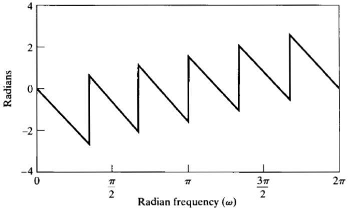
$$b[k] = 2h[(M+1)/2 - k], k = 1, 2, ..., (M+1)/2.$$

- Exemplo Sistema FIR Fase Linear Tipo II.

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & c.c \end{cases} \quad e \ H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{5}{2}\omega} \frac{sen(3\omega)}{sen(\omega/2)}.$$



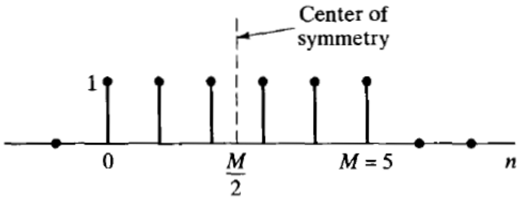
(C)



(D)

Como a resposta em frequência é dada por uma soma de cossenos que se anula em $\omega = \pi$, filtros do tipo II não são adequados para aproximações de filtros passa alta e rejeita faixa.

- Sistema FIR Fase Linear Tipo II.



- Sistema FIR Fase Linear Tipo III.
  - Tem resposta ao impulso ante-simétrica

$$h[n] = -h[M-n],\ 0 \leq n \leq M$$

M um inteiro par, então

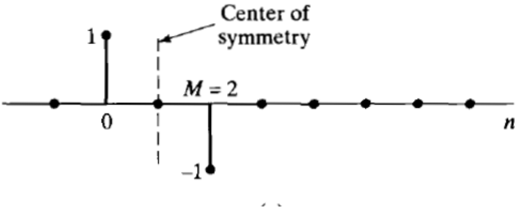
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2} c[k]\sin\omega k\right)$$

sendo

$$c[k] = 2h[M/2-k], k = 1, 2, ..., M/2.$$

  - Como a resposta em frequência deste tipo de filtro se anula em $\omega = 0$ e $\omega = \pi$, eles são bastante adequados para realização de filtros passa faixa. Não podem ser passa alta, passa baixa ou rejeita faixa.

- Sistema FIR Fase LInear Tipo III.



- Sistema FIR Fase Linear Tipo IV.
  - Tem resposta ao impulso ante-simétrica

$$h[n] = -h[M-n],\ 0 \leq n \leq M$$

M um ímpar, então

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=0}^{(M+1)/2} d[k] \sin \omega (k - \frac{1}{2}) \right)$$

sendo

$$d[k] = 2h[(M+1)/2 - k], k = 1, 2, ..., (M+1)/2.$$

  - Como a reposta em frequência deste tipo de filtro se anula em $\omega = 0$, eles não são adequados para implementações de filtros passa baixa.

- Sistema FIR Fase LInear Tipo IV.