parte2 - laplace

Señal de entrada $= x(t) = e^{-at^2}$; $a \in \mathbb{R}^+$

El sistema A: $y_a(t) = x^2(t)$

El sistema B: un SLIT con respuesta al impulso:

$h_B(t) = Be^{-bt^2}$

* Salida del sistema en serie.

$x(t) \xrightarrow{h_B(t)} y(t) \longrightarrow y_A(t)$

prop.

1) $x(t) * h_B(t) \rightarrow y(t)$

2) $y_A(t) = y^2(t)$

① propiedad de convolución $x(t) * h_B(t)$

$$y(t) = x(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, h_B(t-T)\, dT$$

$$x(T) = e^{-aT^2} \cdot h_B(t-T) = Be^{-b(t-T)^2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-aT^2} \cdot Be^{-b(t-T)^2}\, dT$$

$$y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aT^2} \cdot e^{-b(t-T)^2}\, dT$$

$$\boxed{(t-T)^2 = t^2 - 2tT + T^2}$$

sustituir

$$y(t)=B\int_{\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2}\, e^{-b(t^2-2t\tau+\tau^2}\, d\tau$$

$$y(t)= Be^{-bt^2}\int_{\infty}^{\infty} e^{-(a+b)[\tau^2-\frac{2bt}{a+b}+\tau]}\, dt$$

Se completa el cuadrado.:

$$\tau^2-\frac{2bt}{a+b}\tau=(\tau-\frac{bt}{a+b})^2-(\frac{bt}{a+b})^2$$

Se sustituye:

$$y(t)=Be^{-bt^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)[(t-\frac{bt}{a+b})^2-(\frac{bt}{a+b})^2]}$$

$$= Be^{-bt^2}\, e^{\frac{b^2t^2}{a+b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)(\tau-\mu)}\, dt$$

donde

$$\mu=\frac{bt}{a+b}$$

la integral es Gaussiana, y su resultado es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K(\tau-\mu)^2}\, d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{K}},\quad K=a+b$$

$$y(t)=B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\frac{abt^2}{a+b}}$$

② Se aplica el Sistema A: $y_A(t)=y^2(t)$

$$y_A(t)=(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\frac{abt^2}{a+b}})^2$$

$$y(t)=B^2\cdot\frac{\pi}{a+b}\cdot e^{-2}\,\frac{abt^2}{a+b}$$

Powered by CamScanner

(b) Salida del Sistema en serie.

$$x(t) \xrightarrow{A} y_A(t) = x^2(t) \xrightarrow{h_B(t)} y(t)$$

1) Aplicar Sistema A directamente.

$$y_A(t) = x^2(t) = (e^{-at^2})^2$$

$$\boxed{y_A(t) = e^{-2at^2}}$$

(2) Aplicar Convolucion con $h_B(t) = Be^{-bt^2}$

$$y(t) = y_A(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau^2} Be^{-b(t-\tau)^2} d\tau$$

- Este calculo se considera analogo al anterior, simplemente se cambia el valor de a por 2a

$$y(t) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau^2} \cdot e^{-b(t-\tau)^2} d\tau$$

$$y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}} \cdot e^{-\frac{2abt^2}{2a+b}}$$