1, Solucion por convolucion.

Sabemos que la respuesta impulso del sistema es:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

Luego:

$$y_{conv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(T) h(t-T) dT$$

$$= \int_0^t e^{-2T} [e^{-(t-T)} u(t-2)] dT$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{-2T} e^{T} dT = e^{-t} \int_0^t e^{-T} dT$$

$$= e^{-t} [-e^{-1}]_0^t$$

$$= e^{-t} (1 - e^{-t})$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

Se multiplica por $u(t)$ para anular en $t<0$

$$y(u(t)) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t) = y_{EDO}(t)$$

Ambas coinciden exactamente

) Comprobamos que $h(t)$ para $x(t) = d(t)$

$$y'(t) + y(t) = d(t), \quad y(0^-) = 0$$

$$y = Ce^{-1}$$

Se integra la EDO en un intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ al rededor de $t=0$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y'(t)\,dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{[y]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + o(\varepsilon) = 1}$$

Como $y(0^-)=0$ y el segundo termino tiende a cero al hacer $\varepsilon \to 0$, obtenemos $y(0^+) = 1$

* luego para $t>0$, $y(0^+) = 1$ es la condicion y la solucion homogenea es

$$h(t) = y(t) = 1\, e^{-t} = e^{-t} \quad t>0$$

* juntanto con $h(t) = 0$, para $t<0$

$$h(t) = e^{-t}\, u(t)$$

3) Comprobacion manual de la integral de convolucion

Partimos de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, h(t-T)\, dT$$

Con $x(T) = e^{-2T}\, u(T)$ y $h(t-T) = e^{-(t-T)}\, u(t-T)$

. Acotamos soportes

$x(1) \neq$ solo si $T \geq 0$

$h(t-T) \neq$ solo si $t-T \geq 0 \iff T \leq t$

$\rightarrow$ integracion efectiva desde $T = \max(0, t-\infty) = 0$ hasta $T = \min(t, 8) = t$

② Integral

$$y(t)=\int_0^t e^{-2t}\, e^{-(t-\tau)}\, dt = e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau}\, e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t d\tau = e^{-t}\left[-e^{\tau}\right]_0^t = e^{-t}(1-e^{-t})$$

③ Teniendo en cuenta Heaviside: para forzar $y(t)=0$ si $t<0$, se multiplica por $u(t)$.

$$y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\,u(t)$$

$\Rightarrow$ se verifica que la integral de convolución reproduce exactamente la solución obtenida por EDO.