Método del Punto Fijo: Ejemplo propuesto

Introducción

El método del punto fijo es particularmente útil cuando la ecuación original no tiene soluciones algebraicas fáciles de encontrar o cuando los métodos más complejos, como el de Newton-Raphson, no son aplicables o requieren un mayor esfuerzo computacional. Sin embargo, su efectividad depende en gran medida de la elección adecuada de la función g(x) y de la selección de una tolerancia adecuada, ya que no todas las funciones garantizan la convergencia.

En este análisis y la aplicación del **método del punto fijo**, ejemplificando su uso con una ecuación no lineal practica. Se detallan las iteraciones realizadas para encontrar la solución aproximada, se compara el resultado obtenido mediante un enfoque manual con el obtenido a través de un código computacional y se analizan las implicaciones de los resultados en términos de eficiencia y precisión.

Punto Fijo

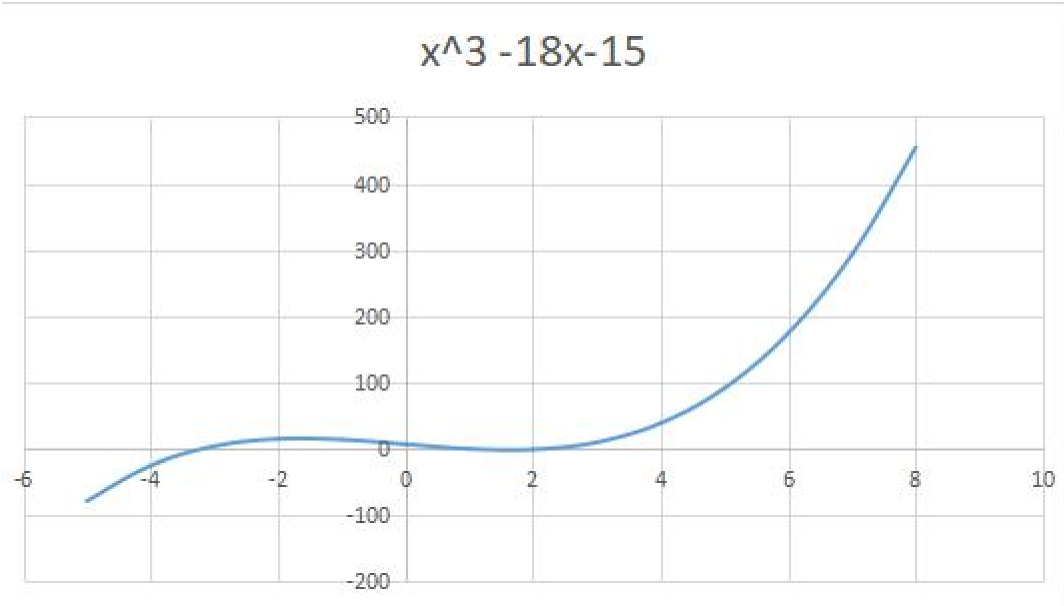
Un punto fijo de una función f(x) es un valor x tal que f(x)=x. El método del punto fijo utiliza esta propiedad para aproximar soluciones a ecuaciones no lineales al reescribir la ecuación f(x)=0 en una forma x=g(x), donde g(x) es una función iterativa. La convergencia del método depende de cómo se elige la función g(x), siendo importante que esta cumpla ciertas condiciones para garantizar que las iteraciones converjan hacia la solución correcta.

Ejemplo Práctico

Resolver la ecuación no lineal:

$$x^3 - 18x - 15 = 0$$

Graficando esta ecuacucio daria:



Reescribimos esta ecuación en forma de punto fijo:

$$g(x) = (18x + 15)^{1/3}$$

Iteraciones

Realizamos las iteraciones partiendo de un valor inicial x0 = 0. Usamos la fórmula x_{n+1} = g(x_n) hasta que la diferencia |x_{n+1} - x_n| sea menor que una tolerancia de 0.0005 . A continuación, se muestran las iteraciones:

#	x_i	g(x_i)	Ea%	tol
0	0	2.466212074		0.0005
1	2.466212074	3.901595169	100	
2	3.901595169	4.400769718	36.78964712	
3	4.400769718	4.550281429	11.34289183	
4	4.550281429	4.593201452	3.285768434	
5	4.593201452	4.60537535	0.934425018	
6	4.60537535	4.608816681	0.264341061	
7	4.608816681	4.609788549	0.074668415	
8	4.609788549	4.61006294	0.021082697	
9	4.61006294	4.610140404	0.005952011	
10	4.610140404	4.610162273	0.001680299	
11	4.610162273	4.610168446	0.000474357	
12	4.610168446	4.610170189	0.000133913	
13	4.610170189	4.610170681	3.78042E-05	
14	4.610170681	4.61017082	1.06723E-05	
15	4.61017082	4.610170859	3.01283E-06	

16	4.610170859	4.61017087	8.50535E-07
17	4.61017087	4.610170874	2.4011E-07
18	4.610170874	4.610170874	6.77839E-08
19	4.610170874	4.610170875	1.91357E-08
20	4.610170875	4.610170875	5.40208E-09
21	4.610170875	4.610170875	1.52503E-09
22	4.610170875	4.610170875	4.30529E-10
23	4.610170875	4.610170875	1.21528E-10
24	4.610170875	4.610170875	3.43121E-11
25	4.610170875	4.610170875	9.69061E-12
26	4.610170875	4.610170875	2.73572E-12
27	4.610170875	4.610170875	7.70625E-13
28	4.610170875	4.610170875	2.11922E-13
29	4.610170875	4.610170875	0

Tambien comprando con este codigo que calcula por el punto fijo:

```
def punto_fijo(g, x0, tol=0.0005, max_iter=100):
    """
    Método de iteración del punto fijo.
    :param g: Función g(x) para iterar.
    :param x0: Valor inicial.
    :param tol: Tolerancia para la convergencia.
    :param max_iter: Máximo número de iteraciones.
    :return: Aproximación de la raíz.
    """
    for i in range(max_iter):
        x1 = g(x0)
        if abs(x1 - x0) < tol:
            return x1, i  # Retorna la raíz y el número de iteraciones
        x0 = x1
    raise ValueError("El método no convergió.")

# Función g(x) reescrita correctamente
g = lambda x: (18*x + 15)**(1/3)

# Valor inicial
x0 = 2

# Ejecutamos el método
raiz, iteraciones = punto_fijo(g, x0)

print(f"Raíz aproximada: {raiz}")
print(f"Iteraciones: {iteraciones}")
```

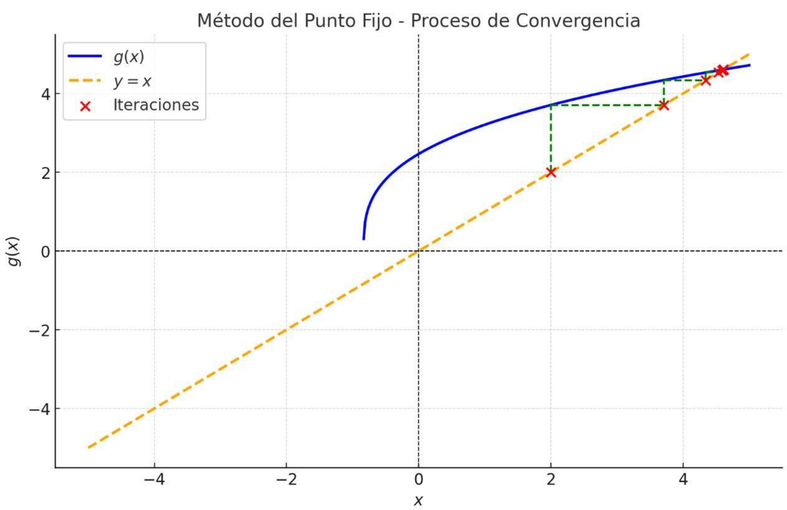
Saliendo el resultado de:

```
Raíz aproximada: 4.61003091509741
Iteraciones: 7
```

Resultado Final
La solución aproximada es x ≈ 4.610162273, obtenida después de 11 iteraciones con una tolerancia de 0.0005 y comparando con el codigo que da de 7 iteraciones con una tolerancia de 0.0005 es x ≈ 4.61003091509741 .

Gráfico del Método del Punto Fijo

El siguiente gráfico ilustra el proceso de convergencia:



Conclusion

La solución aproximada de la ecuación es x= 4.610162273 , obtenida después de 11 iteraciones con una tolerancia de 0.0005. Comparando este resultado con el obtenido por el código, que da x=4.61003091509741 en 7 iteraciones y la misma tolerancia, vemos que las soluciones son muy cercanas, con una diferencia mínima.

Esta pequeña discrepancia en los resultados puede deberse a la implementación particular de la función de iteración g(x), o a pequeñas variaciones en la precisión numérica de las computadoras al realizar los cálculos. Además, aunque ambos métodos alcanzan una precisión similar, el número de iteraciones varía. Esto sugiere que el código implementado puede ser más eficiente en términos de la cantidad de iteraciones necesarias para converger a una solución dentro de la misma tolerancia.

Es importante destacar que la convergencia del método de punto fijo depende de la elección de la función g(x) y de la tolerancia seleccionada. Una tolerancia más baja incrementa el número de iteraciones, pero permite obtener una solución más precisa. En este caso, tanto la solución obtenida manualmente como la solución del código son suficientemente cercanas para afirmar que el método ha funcionado correctamente.

El método de punto fijo demuestra ser una herramienta efectiva para aproximar las raíces de ecuaciones no lineales, aunque su eficiencia y exactitud dependen de varios factores, como la correcta reescritura de la ecuación en la forma x=g(x) y el manejo adecuado de la tolerancia.