CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Glosario (I)

0. Politopos, geometría afín

- **Combinación afín, dependencia afín:** Una **combinación afín** de puntos $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ es cualquier punto de la forma

  $$\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n$$

  con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\sum \lambda_i = 1$.

  Una **dependencia afín** es una expresión válida de la forma

  $$\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n = 0$$

  con $\sum \lambda_i = 0$.

  Toda combinación afín $p = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n$ de n puntos induce una dependencia afín entre ellos y el nuevo punto: $\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n - p = 0$. A la inversa, cada punto con coeficiente no nulo en una dependencia afín se puede escribir como una combinación afín del resto.

- **Espacio afín, clausura afín:** Decimos que un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es un (sub)-espacio afín, o un **flat** si es cerrado bajo combinaciones afines.

  La clausura afín de $V \subset \mathbb{R}$ es el espacio afín más pequeño que contiene a V. Equivalentemente, es el conjunto de los puntos que son combinación afín de V. Se denota $\text{aff}(V)$.

- **Envolvente convexa:** Una **combinación convexa** es una combinación afín con coeficientes no negativos. Un conjunto es **convexo** si es cerrado bajo combinaciones convexas.

  La **envolvente convexa** de un conjunto V es el conjunto convexo más pequeño que contiene a V. Equivalentemente, es el conjunto de puntos que son combinaciones convexas de V. Se denota $\text{conv}(V)$.

- **Politopo:** Un politopo P es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos V. Su **dimensión** es la dimensión de su clausura afín $\text{aff}(P) = \text{aff}(V)$.

Para cada funcional lineal $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ llamamos **cara** de P inducida por f al conjunto

$$P^f := \{x \in P : f(x) \geq f(y) \ \forall y \in P\}$$

que maximiza f. El conjunto vacío es considerado una cara (de dimensión -1) y toda cara de un politopo es un politopo. El **borde** de P es la unión de todas sus caras propias, cuyas dimensiones van desde -1 (el conjunto vacío), 0 (**vértices**), 1 (**aristas**), $2, \ldots,$ to $d-1$ (**facetas**). El conjunto de vértices se denota $\mathcal{V}(P)$.

- Un **complejo politopal (o poliédrico)** es una colección finita, no vacía, $\mathcal{S} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ de politopos en $\mathbb{R}^d$ tal que toda cara de cada $P_i \in \mathcal{S}$ está en $\mathcal{S}$, y tal que $P_i \cap P_j$ es siempre una cara común a ambas (posiblemente vacía).

  Los elementos de $\mathcal{S}$ los llamamos **caras de $\mathcal{S}$**, y los elementos maximales son **celdas**. Conocer las celdas de $\mathcal{S}$ es suficiente para conocer el resto, dado que toda cara del complejo es cara de alguna celda.

  Un complejo es **puro de dimensión** k si todas las celdas son k-dimensionales. El **i-esqueleto** de $\mathcal{S}$ es el complejo i-dimensional de las caras de dimensión a lo sumo i.

  Por ejemplo, si P es un d-politopo, sus caras son un complejo puro d-dimensional con una única celda (P mismo). Su $(d-1)$-esqueleto es el borde de P (un complejo puro $(d-1)$-dimensional) y su 1-esqueleto es usualmente llamado el **grafo de** P.

- **Símplice:** Un símplice d-dimensional es un d-politopo con exactamente $d+1$ vértices. Equivalentemente, es la envolvente convexa de un conjunto de puntos afínmente independiente. Llamaremos d-símplice tanto al politopo como a su conjunto de vértices.

  Toda cara de un símplice es un símplice, y cada subconjunto de vértices define una cara. Es decir, un d-símplice tiene $\binom{d+1}{i+1}$ caras de cada dimensión $i = -1, 0, \ldots, d$. (El *poset* (conjunto parcialmente ordenado) de caras de un símplice es un poset booleano).

- **Complejo simplicial:** Un complejo simplicial es un complejo politopal cuyas celdas son símplices.

1. Triangulaciones y subdivisiones de configuraciones

De ahora en adelante, V será un conjunto finito d-dimensional con n puntos (a veces lo llamamos **configuración de puntos**).

No hay (mucha) pérdida de generalidad en suponer que V es de dimensión máxima (es decir, $V \in \mathbb{R}^d$) porque si $V \in \mathbb{R}^D$ y $\dim(V) = d < D$ entonces podemos obviar algunas coordenadas y obtener una configuración d-dimensional V' en $\mathbb{R}^d$ que es afínmente isomorfa a V; *todo lo que hacemos es invariante módulo isomorfismo afín.* Pero algunas veces necesitaremos considerar un subconjunto W de V como una configuración en sí misma y, por supuesto, esta puede ser de dimensión menor.

- **Caras de un conjunto:** Sea W un subconjunto de V. Decimos que W es una **cara de** V si hay una cara F del politopo $P = \mathrm{conv}(V)$ tal que $W = V \cap F$. Obsérvese que W puede incluir puntos que no sean vértices de F.

- **Subdivisión:** Una **subdivisión (poliédrica) de** V es una colección finita $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de V, llamadas **celdas**, que verifica:

  (DP) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $P_i := \mathrm{conv}(S_i)$ es d-dimensional (un d-politopo);

  (UP) P es la unión de $P_1, \ldots, P_m$; y

  (IP) Si $i \neq j$ entonces $F := S_i \cap S_j$ es una cara propia (posiblemente vacía) de S_i y de S_j, y $P_i \cap P_j = \mathrm{conv}(F)$.

  Por ejemplo, $\{1245, 1345\}$ y $\{124, 134\}$ son subdivisiones de la configuración de la Figura 1, y las consideramos distintas. Observa que la segunda no usa el punto 5, pero eso está permitido. Sin embargo $\{1245, 134\}$ no es una subdivisión. Los triángulos $\mathrm{conv}\{1245\}$ y $\mathrm{conv}\{134\}$ intersectan en una cara común (la arista de 1 a 4) pero los *conjuntos* $\{1245, 134\}$ no: su intersección es $\{14\}$, que no es una cara de $\{1245\}$.

  La colección de politopos $P_1, \ldots, P_m$, junto con sus caras, es un complejo politopal puro.

  Cuando V es el conjunto de vértices de un politopo P decimos que $\mathcal{S}$ es una **subdivisión de** P sin vértices extra.

- **Triangulación:** Una subdivisión de V es una triangulación si toda celda es afínmente independiente (un símplice). Dado que cada subconjunto de un símplice es una cara del mismo, para las triangulaciones, la propiedad (IP) se reduce a

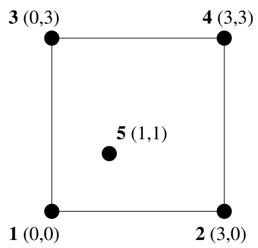

Figura 1: 5 puntos en el plano

(IP) Si $i \neq j$ entonces $\mathrm{conv}(S_i) \cap \mathrm{conv}(S_j) = \mathrm{conv}(S_i \cap S_j)$.

Por ejemplo, $\{124, 134\}$ es una triangulación pero $\{1245, 1345\}$ no es una triangulación en la configuración de puntos de arriba.

- **Refinamiento de una subdivisión:** Supongamos que $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ y $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ son dos subdivisiones de V. Decimos que $\mathcal{T}$ es un refinamiento de $\mathcal{S}$ si para cada j, $1 \leq j \leq m$, existe i, $1 \leq i \leq l$, tal que $T_j \subseteq S_i$. Escribimos $\mathcal{T} \preceq \mathcal{S}$ si $\mathcal{T}$ refina a $\mathcal{S}$ porque el refinamiento de subdivisiones es un orden parcial (poset). El único elemento maximal en el poset es la **subdivision trivial** (la subdivision $\{V\}$ con una única celda, el conjunto V). Los elementos minimales son las **triangulaciones**.

  Por ejemplo, en la anterior configuración tenemos la siguiente cadena desde una triangulación hasta la subdivisión trivial:

$$\{124, 134\} \preceq \{1245, 1345\} \preceq \{12345\}$$

CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Glosario (II).

2. Matroides orientadas

- **Dependencias afines y evaluaciones afines** Sea $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un conjunto de n puntos con $\dim(V) = d$.

  Consideraremos cada **dependencia afín** $\sum \lambda_i p_i = 0$ con $\sum \lambda_i = 0$ como un vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Del mismo modo, estamos interesados en **evaluaciones afines**: para cada función afín $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la evaluación afín producida por f es el vector $(f(p_1), \ldots, f(p_n)) \in \mathbb{R}^n$. Es fácil demostrar que:

  Lema 1 *Las dependencias afines y las evaluaciones afines de V forman subespacios lineales complementarios de $\mathbb{R}^n$, de dimensiones $n - d - 1$ y $d + 1$, respectivamente.*

  De hecho, dado que todo funcional afín es de la forma $f(x_1, \ldots, x_d) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d$, las evaluaciones afines correspondientes a un funcional constante y a las d coordenadas generan el espacio vectorial de todas las evaluaciones afines. El hecho de que V tenga dimensión máxima implica que estas $d+1$ evaluaciones son vectores independientes en $\mathbb{R}^n$.

  Una manera más compacta de mirar a las dependencias y evaluaciones es considerar la matriz $(d + 1) \times n$

  $$A = \begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

  En estas condiciones:

  Lema 2 *Las dependencias afines son el núcleo de A y las evaluaciones afines son el subespacio lineal generado por las filas de A (que es igual a la imagen de A^t).*

- **Signatura** de un vector. La signatura de un vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$ es el vector $(s_1, \ldots, s_n) \in \{-1, 0, +1\}^n$ de signos de λ. (Es decir, $s_i = \lambda_i / |\lambda_i|$, donde 0/0 es 0). Normalmente representaremos la signatura de un vector como un par (S^+, S^-) donde

$$S^+ := \{i : \lambda_i > 0\} \qquad \text{y} \qquad S^- := \{i : \lambda_i < 0\}.$$

Es decir, hay una biyección entre las posibles signaturas de vectores en $\mathbb{R}^n$ y los pares (S^+, S^-) de subconjuntos disjuntos de $\{1, \ldots, n\}$.

- **Circuitos (orientados), Particiones de Radón:** Un circuito es un conjunto $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ de puntos afínmente dependientes tales que cualquier subconjunto propio es afínmente independiente. Esto implica, en particular, que $k = \dim(V)+2$ y que hay una única (módulo producto por un escalar) dependencia afín $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de V. Dado que λ no tiene ninguna coordenada nula, la signatura (C^+, C^-) de λ es una partición de V en dos partes. (Aquí estamos identificando cada punto c_i con su etiqueta i). Esta partición se llama **circuito orientado** o **partición de Radon** de V y es la única partición de V en dos subconjuntos disjuntos tales que $\mathrm{conv}(C^+) \cap \mathrm{conv}(C^-) \neq \emptyset$.

  Para un V genérico, llamamos **circuitos de** V a los subconjuntos minimales afínmente dependientes y **circuitos orientados de** V a las correspondientes signaturas. Cada circuito produce dos circuitos orientados opuestos. Dicho de otra manera: *los circuitos orientados de V son las signaturas de las dependencias con soporte minimal.*

  Como ejemplo ilustrativo, la siguiente es la lista completa de circuitos de la configuración en la Figura 1. Para abreviar, los conjuntos están escritos como sequencias de etiquetas. Es decir, 123 denota el conjunto $\{1, 2, 3\}$ o el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$.

$$\begin{array}{cccc} (14,5), & (123,5), & (14,23), & (45,23), \\ (5,14), & (5,123), & (23,14), & (23,45). \end{array}$$

- **Cocircuitos (orientados):** Tiene sentido hacer para las evaluaciones lo mismo que hemos hecho para las dependencias. Llamamos **cocircuitos** de V a los soportes minimales de evaluaciones afines en V, y llamamos *cocircuitos orientados* a sus signaturas. Cada cocircuito produce dos cocircuitos orientados opuestos. Por ejemplo, la lista de cocircuitos de nuestro ejemplo habitual es:

$$\begin{array}{ccccccc} (\emptyset,125), & (\emptyset,135), & (\emptyset,245), & (\emptyset,345), & (1,24), & (1,34), & (2,3), \\ (125,\emptyset), & (135,\emptyset), & (245,\emptyset), & (345,\emptyset), & (24,1), & (34,1), & (3,2). \end{array}$$

- **Matroide orientada de una configuración de puntos V:** La matroide orientada de una configuración de puntos V es su conjunto de circuitos orientados, o su conjunto de cocircuitos orientados (ambos llevan la misma información sobre V). Obsérvese que a partir de la matroide orientada de V se pueden recuperar diversas cosas:

- Las facetas de V (como configuración) son los complementarios de los cocircuitos positivos. Es decir, F es una faceta si y sólo si $(V \setminus F, \emptyset)$ es un cocircuito.
- Las caras de V son todas las posibles intersecciones de facetas.
- Si W es un subconjunto de V, los circuitos de S son los circuitos de V contenidos en W y los cocircuitos de W son algunas de las restricciones a W de los cocircuitos de V (explicación: toda evaluación en V, restringida a W, es una evaluación en W. Pero algunas de las evaluaciones que tienen soporte minimal en V pueden no tener soporte minimal cuando las restringimos a W; ésas hay que descartarlas de la lista de cocircuitos de W).
- En particular, podemos calcular las caras de todos los subconjuntos de V.
- Los subconjuntos afínmente independientes de V son aquellos que no contienen ningún circuito. En particular, a partir de la matroide orientada de V podemos calcular la dimensión de V y de cualquiera de sus subconjuntos.

Con un poco más de trabajo se puede demostrar lo siguiente:

Theorem 3 *Sea S una colección de subconjuntos de un conjunto V de puntos. Entonces, conociendo la matroide orientada de V (y olvidando los puntos) se tiene suficiente información para averiguar si S es una subdivisión de V, y si es una triangulación.*

- **Matroide orientada de una configuración de *vectores* V:**

  Las matroides orientadas se pueden definir (y se suelen definir) para **configuraciones de vectores**. Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una configuración de vectores (un subconjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$), definimos sus dependencias, evaluaciones, circuitos y cocircuitos igual que hemos hecho arriba, cambiando sólamente la palabra *afín* por *lineal* en todos lados. Por supuesto, alguien puede decir que configuraciones de puntos y configuraciones de vectores son la misma cosa, subconjuntos finitos de $\mathbb{R}^d$. Lo que cambia es hacer *geometría afín* o hacer *álgebra lineal* en ese $\mathbb{R}^d$.

  Obsérvese que la matroide orientada de una *configuración de puntos* $\{p_1, \dots, p_n\}$ es la misma que la de la *configuración de vectores* $\left\{\binom{p_1}{1}, \dots, \binom{p_n}{1}\right\}$.

- **Transformada de Gale, matroide orientada dual**: Sean V y W dos configuraciones de vectores con n elementos en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^l$, con $k + l = n$, y representémoslas como una matriz A de tamaño $k \times n$ y una matriz B de tamaño $l \times n$, respectivamente (poniendo los vectores como columnas). Decimos que W es una **transformada de Gale** de V si los espacios de filas de A y de B son complemento ortogonal el uno del otro.

Si esto ocurre, entonces las dependencias lineales de V son las evaluaciones lineales de W, y viceversa; por tanto los circuitos de V son cocircuitos de W y viceversa, con las mismas orientaciones. Decimos que las matroides orientadas de V y W son **duales** la una de la otra.

Para todo V hay alguna transformada de Gale W. No hay más que escribir W como una matriz A, calcular una base del complemento ortogonal al espacio de filas de A, y usar esos vecotres como filas de una matriz B a cuyas columnas llamamos W.

Un truco para calcular la transformada de Gale es como sigue: sin pérdida de generalidad, supongamos que los primeros k vectores de W son independientes (si no es así, reordenemos los vectores) y hagamos un cambio de coordenadas para que esos k vectores sean la base canónica de $\mathbb{R}^k$. Es decir, tu matriz A tiene la forma $(I|A')$ donde I es la matriz identidad y A' es una matriz de tamaño $k \times (n-k)$. Entonces, basta con definir

$$B = (-A'^t|I)$$

y tomar como W las columnas de B.

Hagamos esto con la configuración de puntos de la Figura 1. Su matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una transformada de Gale es la que sigue (compruébese que los espacios de filas de A y de B son complementos ortogonales), que está dibujada como conjunto de vectores en la Figura 2.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

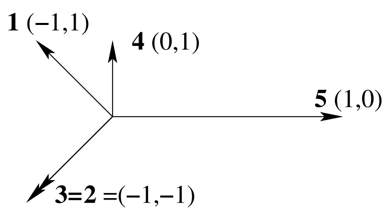

Figura 2: 5 vectores en el plano

Obsérvese que los vectores 2 y 3 son iguales. Esto concuerda con el hecho de que $(2,3)$ era un cocircuito en V (correspondiente a la evaluación $(0,3,-3,0,0)$ del functional $x-y$), así que $(2,3)$ debe ahora ser un circuito, y $(0,3,-3,0,0)$ una dependencia lineal. Estos dos vectores "iguales" deben ser considerados elementos distintos de la matroide orientada y de la configuración de vectores, distinguidos por su etiqueta.