Ejercicios Clase 1

Michelle Wachs

(1) Encuentre el tipo según los ciclos (cycle type) de cada una de las siguientes permutaciones.
  (a) [397468152]
  (b) [234561]
  (c) [1234]

(2) Para $\lambda \vdash n$, sea $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots$, donde m_i es el numero de ocurrencias de i en λ. Muestre que el numero de permutaciones que tienen tipo λ según los ciclos es $\frac{n!}{z_\lambda}$.

(3) En este problema mostraremos que las diversas caracterizaciones de los polinomios Eulerianos $A_n(t)$ son consistentes entre sí y con la definición original de Euler:

$$\sum_{i \geq 1} i^n t^i = \frac{t\, A_n(t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

  (a) Usando la definición original de Euler de $A_n(t)$, demuestre la formula para su función generadora exponencial

$$\sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{z^n}{n!} = \frac{1-t}{e^{(t-1)z} - t}.$$

  (b) Usando la definición original de Euler de $A_n(t)$, demuestre que los coeficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia

$$\left\langle {n \atop j} \right\rangle = (n-j) \left\langle {n-1 \atop j-1} \right\rangle + (j+1) \left\langle {n-1 \atop j} \right\rangle$$

  (c) Usando la caraterización combinatoria de $A_n(t)$ relacionada con la estadística des, demuestre que los coefficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia anterior.
  (d) Usando la caraterización combinatoria de $A_n(t)$ relacionada con la estadística exc, demuestre que los coefficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia anterior.

(4) Encuentre una demostración bijectiva de que des y exc tienen la misma distribución en $\mathfrak{S}_n$.

(5) Sea C_n el conjunto de permutaciones $\mathfrak{S}_n$ de tipo (n) según los ciclos. Encuentre una formula para

$$\sum_{\sigma \in C_n} t^{\mathrm{exc}(\sigma)}.$$

(6) Un árbol binario es un árbol sembrado en el cual cada nodo tiene a lo sumo dos hijos y cada hijo es un hijo por izquierda o un hijo por derecha. Un árbol binario incremental es un árbol binario con n nodos etiquetados con $1, 2, \ldots, n$ de tal

manera que cada nodo tenga una etiqueta que es mayor a la etiqueta de su padre. Sea $\mathcal{T}_n$ el conjunto de árboles binarios incrementales con n nodos. Para $T \in \mathcal{T}_n$, sea $l(T)$ el número de hijos por izquierda en T. Demuestre que

(a)
$$\sum_{T\in\mathcal{T}_n} t^{l(T)} = A_n(t).$$

(b)
$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \gamma_{n,k}\, t^k (1+t)^{n-1-2k},$$

en donde $\gamma_{n,k} = |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma$ no tiene descensos dobles, ni descenso final, y $\mathrm{des}(\sigma) = k\}|$.

(7) Muestre que γ-positividad implica palindromicidad y unimodalidad, pero la conversa es falsa.

(8) Demuestre:

(a)
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = [n]_q!.$$

(b) Sea $\mathfrak{S}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ el conjunto de permutaciones del multiconjunto $\{1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, m^{k_m}\}$. En otras palabras $\mathfrak{S}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ es el conjunto de palabras con k_i i's para cada i. Demuestre que
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \end{bmatrix}_q.$$

(9) Sea
$$A_n(q,t) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)-\mathrm{exc}(\sigma)} t^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$
y sea Alt_n el conjunto de permutaciones σ in $\mathfrak{S}_n$ tal que
$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \sigma(5) > \cdots < \sigma(n).$$
Demuestre que
$$A_n(q,-1) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\sigma\in\mathrm{Alt}_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}.$$

(10) Demuestre la formula
$$A_n(q,t) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \sum_{k_1,\ldots,k_m \geq 2} \begin{bmatrix} n \\ k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m \end{bmatrix}_q t^{m-1} \prod_{i=1}^{m} [k_i - 1]_t$$