EJERCICIOS - VIERNES - ECCO 2016

SYLVIE CORTEEL

Los ejercicios marcados con * son recomendados para practicar lo aprendiido en el curso.

1. Algoritmo RSK*

1. Aplique el algoritmo RSK a la matrix A

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

y obtenga dos tableaux semi standard de la misma forma.
2. Calcule la longitud de la primera fila de los tableaux de la matriz A.

3. Transforme el par de tableaux en un par de triángulos de Gelfand-Tsetlin.
Una partición del plano $\Pi = (\pi_{i,j})$ con $1 \leq i, j \leq n$ es una matriz de enteros no negativos tal que $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$ y $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$. El peso $|\Pi|$ es $\sum_{i,j} \pi_{i,j}$ y la traza $\mathrm{tr}(\Pi)$ es $\sum_i \pi_{i,j}$.

4. Pegue los dos triángulos para obtener una partición del plano.

5. Es posible calcular el peso de una partición del plano a partir de una matriz A? Si la matriz tiene n filas y m columnas, cuantas filas y columnas debe tener la partición?

2. Particiones del plano

Una partición del plano $\Pi = (\pi_{i,j})$ con $1 \leq i, j \leq n$ es una matriz de enteros no negativos tal que $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$ y $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$. El peso $|\Pi|$ es $\sum_{i,j} \pi_{i,j}$ y la traza $\mathrm{tr}(\Pi)$ es $\sum_i \pi_{i,i}$. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de estas particiones del plano.

Exercise 2.

Queremos calcular la función generatriz :

$$P_n(q,t) = \sum_{\Pi \in \mathcal{P}_n} q^{|\Pi|} t^{\mathrm{tr}(\Pi)}.$$

1. Utilice la descomposición de particiones del plano en dos TSSY de la misma forma, para mostrar que

$$P_n(q,t) = \sum_{\lambda} q^{-|\lambda|} t^{|\lambda|} s_\lambda(q, \ldots, q^n) s_\lambda(q, \ldots, q^n).$$

2. Muestre que

$$x^{|\lambda|} s_\lambda(q, \ldots, q^n) = s_\lambda(xq, \ldots, xq^n).$$

3. Utilice la identidad de Cauchy

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) s_\lambda(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i,j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

Date: Junio 17th, 2016.

para calcular $P_n(q,t)$.

2.1. **Particiones del plano inversas. Exercise 1** Una partición del plano inversa de forma λ es un llenado de las celdas de λ en enteros no negativos. Las entradas son crecientes en filas y columnas. El peso es la suma de sus entradas.

Por ejemplo

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & \end{matrix}$$

es una partición del plano inversa de forma $(3,3,2)$ y peso 26.

1.* Sea $\lambda = (3,3,2)$. Muestre que existe una función biyectiva que preserva el peso entre particiones del plano inversas de forma λ y secuencias de particiones $\Lambda = (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(6)})$ tal que $\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(6)} = \emptyset$ et

$$\lambda^{(0)} \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \succ \lambda^{(3)} \prec \lambda^{(4)} \succ \lambda^{(5)} \succ \lambda^{(6)}.$$

Recuerde que $\mu \succ \lambda$ si y sólo si $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots$.

Por ejemplo $\Lambda = (\emptyset, (1), (6,1), (4,0), (7,0), (7), \emptyset)$ es una tal secuencia.

2.* Deduzca que la función generatriz de tales particiones del plano inversas de forma $\lambda = (3,3,2)$ pueden ser escritas como :

$$\langle \emptyset | \, \Gamma_-(q^{-1})\Gamma_-(q^{-2})\Gamma_+(q^3)\Gamma_-(q^{-4})\Gamma_+(q^5)\Gamma_+(q^6) \, | \emptyset \rangle \, .$$

3.* Demuestre que esta series es igual a :

$$\frac{1}{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)(1-q^4)^2(1-q^5)}.$$

4. Calcule la serie para toda partición λ.

Ejercicio 2 1. Defina el polinomio

$$g_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\Pi} x^{\Pi},$$

donde la suma es sobre particiones del plano inversas Π con entradas $\leq m$ de forma λ. Calcule $g_{21}(x_0, x_1, x_2)$. Es g_λ simétrico? Is g_λ quasisimétrico?

2. Defina el polinomio

$$G_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\Pi} x_0^{c_0(\Pi)} x_1^{c_1(\Pi)} \cdots \, ,$$

donde la suma es sobre particiones inversas del plano de forma λ y $c_i(\Pi)$ es el número de columnas de Π con i. Calcule $g_{21}(x_0, x_1, x_2)$. Es esta función simétrica?