EJERCICIOS - JUEVES- ECCO 2016

SYLVIE CORTEEL

Los ejercicios marcados con * son recomendados para practicar lo aprendiido en el curso.

1. Subsecuencias crecientes

Ejercicio 1. Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Una subsecuencia creciente de una permutación $w = w_1 \ldots w_n$ es una secuencia $w_{i_1} < \ldots < w_{i_k}$ tal que $i_1 < \ldots < i_k$.

0.* Cual es la subsecuencia creciente mas larga de $(1, 6, 4, 3, 5, 2)$?
0b.* Cuales son todas las subsecuencias crecientes de $(3, 2, 1)$ y $(2, 4, 1, 3)$?
1. Muestre que si aplicamos el algoritmo de la regla local a una matriz de permutación, la longitud de la secuencia creciente más larga es igual al tamaño de la primera parte de la TSY (Tableau standard de Young).
2.* Cual es la secuencia decreciente más larga de $(3, 2, 1)$ y $(2, 4, 1, 3)$? Cómo podemos leer la longitud de la subsecuencia decreciente más larga en la forma de λ.

Ejercicio 2. Dada una permutación σ sea (P, Q) los TSY obtenidos con el algoritmo de Robinson-Schensted. Suponga que la longitud de una secuencia creciente de una permutación σ es igual al tamaño de la primera parte de la forma de P y la longitud de la subsecuencia decreciente más larga es igual al numero de partes de la forma de Q.

1.* Demuestre que una permutación de S_{mn+1} tiene una subsecuencia creciente de tamaño $m + 1$ ó una secuencia decreciente de tamaño $n + 1$.
2. Deduzca que el valor promedio de la longitud de la subsecuencia creciente mas largo de una permutación de S_n es mayor ó igual a $\sqrt{n}/2$.
3.* Cuantas permutaciones de S_{mn} tienen subsecuencia creciente más larga de longitud m y una subsecuencia decreciente más larga de longitud n? (Pista: la fórmula de longitud de ganchos!)
4.(más difícil) Pruebe 1. utilizando permutaciones y sin Robinson-Schensted (Pista: el principio de casillas).

Ejercicio 3.* 0.* Encuentre la permutación de tamaño $n = 2, 3, 4$ sin subsecuencia creciente de tamaño 3.

Date: Junio 16th, 2016.

1. Muestre que el número de permutaciones de S_n sin subsecuencia creciente de tamaño 3 es igual al número de Catalán $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

2. Tableaux semi-standard de Young y triángulos de Gelfand Tsetlin

Recuerde que un tableau semi-standard de Young (TSSY) es un llenado del diagrama de λ con enteros que es creciente en filas y estrictamente creciente en columnas.

Un triángulo de Gelfand-Tsetlin (GT) es un triángulo donde la fila i consiste en una partición con i partes no negativas y las filas se entrelazan:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{row } m & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & \ldots & & a_{1n} \\
 & & a_{22} & & a_{22} & & \ldots & & a_{2n} & \\
\vdots & & & a_{33} & & \ldots & & a_{3n} & & \\
 & & & & \ddots & & \iddots & & & \\
\text{row } 2 & & & & & & & & & \\
\text{row } 1 & & & & & a_{nn} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
a_{ij} & & a_{i,j+1} \\
 & \searrow_{\geq} \; {}^{\leq}\nearrow & \\
 & a_{i+1,j+1} &
\end{array}$$

La función biyectiva entre TSSY y triángulos GT es la siguiente: la fila i del triángulo es la forma de los valores que son las menos i en el tableau.

0.* Cual es el triángulo Gelfand Tsetlin correspondiente al tableau semi-standard de Young (TSSY)

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 3 & & & & \\
3 & & & & & &
\end{array}$$

1.* Cual es el TSSY correspondiente al siguiente triángulo de Gelfand Tsetlin.

$$\begin{array}{ccccccccc}
5 & & 4 & & 3 & & 1 & & 0 \\
 & 5 & & 4 & & 3 & & 0 & \\
 & & 5 & & 3 & & 3 & & \\
 & & & 5 & & 3 & & & \\
 & & & & 4 & & & &
\end{array}$$

2. Applique la involución de Bender-Knuth en el TSSY de la parte 1. para intercambiar el número de 2s y 3s. Calcule el triángulo GT correspondiente.

3.(más difícil) Encuentre la involución en los triángulos Gelfand-Tsetlin que prueba la demostración de la simetría de los polinomios de Schur.

3. Regla local y particiones entrelazas

Si fijamos dos permutaciones μ y ν. Dos particiones α y β se entrelazan si

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots$$

Esto lo escribimos como $\alpha \succ \beta$.

Ejercicio 0.* Es que $(3, 2, 2)$ y $(3, 2, 1, 1)$ se entrelazan? Es que $(5, 2, 2, 1, 1)$ y $(4, 2, 1, 1)$ se entrelazan? Es que $(5, 2, 2, 1, 1, 1)$ y $(4, 2, 1, 1)$ se entrelazan?

La "regla local" es una función biyectiva entre

- (λ, x) con λ una partición tal que $\lambda \prec \mu$ y $\lambda \prec \nu$ y $x \in \mathbb{N}$ y
- ρ es una partición tal que: $\rho \succ \mu$ y $\rho \succ \nu$ y $|\mu|+|\nu| = |\rho|+|\lambda|+x$.

Se puede definir como: $\rho_1 = \max(\mu_1, \nu_1) + x$ y para $i > 1$, $\rho_i = \max(\mu_i, \nu_i) + \min(\mu_{i-1}, \nu_{i-1}) - \lambda_{i-1}$.

1.* Ejemplo

- Aplique la regla local a $\mu = (3, 2, 2)$, $\lambda = (2, 2)$, $\nu = (4, 2)$ con $x = 2$
- Es que ρ es una partición? Es que ρ y μ se entrelazan?
- Dé la inversa de esta función biyectiva.

2. Ahora queremos probar el siguiente enunciado general. Muestre que ρ siempre es una partición y muestre que $\rho \succ \mu$.