CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Glosario (III).

3. Flips. Grafo de triangulaciones

- **Triangulaciones de un circuito**: Un circuito C con circuito orientado (C^+, C^-) tiene exactamente dos triangulaciones
$$T^+ = \{C \setminus \{c_i\} \mid c_i \in C^+\} \qquad \text{y} \qquad T^- = \{C \setminus \{c_i\} \mid c_i \in C^-\}.$$
- **Link:** El link de una cara F de una triangulación T es $\{G \mid F \cup G \in T, F \cap G = \emptyset\}$.
- **Flips biestelares, grafo de triangulaciones:** Sea $\mathcal{T}$ una triangulación de V. Supongamos que existe un circuito C en V tal que $\mathcal{T}$ contiene a una de las dos triangulaciones de C, por ejemplo $\mathcal{T}^+$, y supongamos además que los links en $\mathcal{T}$ de todas las celdas de $\mathcal{T}^+$ son idénticos. Sea $L = \{L_1, \dots, L_k\}$ dicho link.

  Entonces es posible construir una nueva triangulación $\mathcal{T}'$ de V de la siguiente manera:
$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \{T \cup L_i : T \in T^+, L \in \text{Ł}\} \cup \{T \cup L_i : T \in T^-, L \in \text{Ł}\}.$$
  Es decir, eliminamos $\mathcal{T}^+$ (junto con su link) de $\mathcal{T}$ e insertamos $\mathcal{T}^-$ (con el mismo link). Esta operación se llama **flip (geométrico biestelar)** y se dice que $\mathcal{T}'$ es adyacente a $\mathcal{T}$. El conjunto de todas triangulaciones de V, bajo adyacencia por flips, forma el *grafo de triangulaciones*, o *grafo de flips*, de V.

  Si $|C^+| = i$ y $|C^-| = j$ decimos que un flip es **de tipo** (i, j).
- **Flips en términos de paredes (o "cómo detectar y contar flips")** Llamamos **paredes** de una subdivisión a las caras de codimensión uno. Una **pared interior** es una pared que separa dos celdas (por el contrario, una **pared de borde** es una pared contenida en una faceta de $\mathrm{conv}(V)$).

  Sea F es una pared interior en a triangulación $\mathcal{T}$. Las dos celdas S_1, S_2 incidentes a F tienen $d+2$ puntos en total. (Cada una es un d-símplice, con $d+1$ puntos, pero d de los puntos están en su intersección F). Por lo tanto, S_1 y S_2 contienen un único circuito orientado (C^+, C^-), que podemos suponer que está orientado de manera que los puntos de $S_1 \setminus S_2$ y $S_2 \setminus S_1$ están en C^+.[1] Puede ocurrir entonces que $\mathcal{T}$ contenga la triangulación $\mathcal{T}^+$ de dicho circuito y podamos efectuar el flip en ese circuito. Si esto ocurre, decimos que la pared F es **testigo del flip**.

Lema 4 *Un flip de tipo (i, j) y con link $L = \{L_1, \dots, L_k\}$ tiene exactamente por $k\binom{i}{2}$ paredes testigo. En particular:*

1. *Todo flip tiene al menos una pared testigo, excepto los de tipo $(1, j)$.*
2. *Los flips de tipo $(1, j)$ sólo pueden darse si $\mathcal{T}$ no usa todos los puntos de V. De hecho, existe exactamente uno por cada punto que $\mathcal{T}$ no usa.*

[1] Ejercicio: ¿Por qué es siempre cierto que estos dos puntos están en el circuito, y en el mismo lado del mismo?

Triangulaciones de politopos. Glosario (IV)

4. Triangulaciones y subdivisiones regulares

- **Subdivisión regular:** Sea $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$ y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector. La subdivision regular de V inducida por el **vector de levantamiento** α se define como sigue:

(i) Tómese $\tilde{v}_i = (v_i, \alpha_i)$ para cada i y determínense las facetas de $\tilde{V} := \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$.

(ii) Proyéctense las facetas inferiores de $\tilde{V}$ a $\mathbb{R}^d$.

Aquí, una **faceta inferior** de $Q = \text{conv}(\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\})$ es una faceta que es visible desde abajo. Es decir, una faceta cuyo vector normal externo tiene la última coordenada negativa.

Obsérvese que el paso de "proyección" es combinatorialmente trivial. Simplemente, para cada faceta inferior $\{\tilde{v}_{i_1}, \ldots, \tilde{v}_{i_k}\}$ de Q añadimos la celda $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ a nuestra subdivisión, sin necesidad de hacer ningún cálculo.

Por ejemplo, con $\alpha = 0$ tenemos la subdivisión trivial. Si α tiene una única coordenada no nula α_i, correspondiente a un cierto punto $p_i \in V$, entonces obtenemos la siguiente subdivisión, dependiendo del signo de α_i:

- **Tirar de un punto p_i:** Tomando $\alpha_i < 0$, obtenemos la subdivisión

$$\{F \cup \{p_i\} : F \text{ es una faceta de } V \text{ que no contiene a } p_i\}.$$

En particular, si p_i está en el interior de conv(V) entonces la subdivisión es un **cono sobre el borde** de V con ápice en p_i.

- **Empujar un punto p_i:** Tomando $\alpha_i > 0$, obtenemos la subdivisión

$$\{V \setminus \{p\}\} \cup \{F \cup v : F \text{ es una faceta de } V \setminus \{p\} \text{ visible desde } p\}.$$

Aquí, decimos que una faceta F de $V \setminus \{p_i\}$ es **visible desde** p_i si p_i está en el lado opuesto del hiperplano que contiene a F que el resto de puntos de $V \setminus F$. En particular, si p_i no es un vértice de V entonces la subdivisión es $\{V \setminus \{p_i\}\}$, la subdivisión trivial de $V \setminus \{p_i\}$.

Otro ejemplo famoso de subdivisión regular es la **subdivisión de Delaunay** obtenida cogiendo $\alpha_i = ||v_i||$. La subdivisión de Delaunay no cambia al trasladar puntos, pero cambia con otras transformaciones afines más generales (por ejemplo, si se cambia la escala en una coordenada).

- **Subdivisión lexicográfica**: Sea W un subconjunto de los puntos de V, dado con un orden específico (este orden no tiene por qué ser el orden original de V, pero lo denotaremos $W = \{p_1, \dots, p_k\}$ para simplificar la notación). Para cada uno de esos puntos escojamos un signo $\epsilon_i \in \{+, -\}$. La subdivisión lexicográfica de V inducida por esa lista ordenada de puntos y signos es la subdivisión obtenida a partir de la subdivisión trival por la secuencia de "empujones" y "tirones" indicados por la lista de puntos y la lista de signos. Es decir: comenzando con la subdivisión trivial, considérense los puntos $p_1, \dots, p_k$ en orden y en cada paso:

    - Si $\epsilon_i = +$, empújese el punto p_i en todas las celdas que contengan a p_i de la subdivisión previamente construida.
    - Si $\epsilon_i = -$, tírese del punto p_i en todas las celdas que contengan a p_i de la subdivisión previamente construida.

  En cada paso, las celdas que no contienen a p_i permanecen inalteradas. (Nota: aquí es importante considerar las celdas como subconjuntos de V, no como politopos; cuando decimos que p_i está contenido en una celda S queremos decir que $p_i \in S$, no $p_i \in \operatorname{conv}(S)$).

  Lema 5 *La subdivisión lexicográfica coincide con la subdivisión regular obtenida eligiendo números positivos $\lambda_1 \gg \cdots \gg \lambda_k \gg 0$ y tomando $\alpha_i = \epsilon_i \lambda_i$ para cada punto de la lista y $\alpha_i = 0$ para cada punto que no esté en la lista.*

  Los números λ_i en el lema no son importantes, con tal que cada uno sea suficientemente mayor que el siguiente.

- **Polytopo secundario:** El poset de todas las subdivisions regulares de V bajo refinamiento tiene la siguiente estructura notable. El politopo $\Sigma(V)$ que aparece en el teorema se llama el **politopo secundario** de V.

  Teorema 6 (Gel'fand-Kapranov-Zeevinsky) *Sea V una configuración de n puntos y dimensión d. Entonces, existe un politopo $\Sigma(V)$ de dimensión $n - d - 1$ cuyo poset de caras (no vacías) es isomorfo al poset de refinamiento de subdivisiones regulares de V. En particular:*

    1. *Los vertices de $\Sigma(V)$ están en biyección con las triangulaciones regulares de V.*
    2. *Las aristas de $\Sigma(V)$ se corresponden con flips entre triangulaciones regulares.*
    3. *Por tanto, toda triangulación regular tiene al menos $n - d - 1$ flips, y el grafo de flips entre triangulaciones regulares es conexo (y $(n - d - 1)$-conexo).*

  Estas últimas propiedades ($\geq n - d - 1$ flips y grafo conexo) las cumplen también las triangulaciones no regulares en dimensión dos, pero no en dimensión mayor: a partir de dimensión tres hay triangulaciones con menos de $n - d - 1$ flips, en dimensión 6 las hay sin flips. En dimensión 5 o más hay conjuntos V con grafo de flips no conexo. No se sabe si los hay también en dimensiones 3 y 4.

CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Glosario (Apéndice)

Apéndice: Cono secondary, abanico secundario, politopo secundario

Incluimos aquí una versión más explícita del Teorema 6 que explica la construcción del politopo secundario y lo relaciona con las transformadas de Gale de la Sección 2.

- **Cono (lineal), abanico poliédrico**: Un cono lineal, o un cono, es un subconjunto $\mathbb{C}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^d$ que es cerrado bajo suma de vectores y bajo multiplicación por un escalar positivo. Es decir, si $x, y \in \mathbb{C}$ y $\lambda \geq 0$ entonces $x + y$ y λx están en $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ es un **cono poliédrico** si es el conjunto de soluciones de un sistema finito de desigualdades lineales homogéneas. Es decir, si

  $$\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\},$$

  donde $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ es una matriz, $b \in \mathbb{R}^m$ es un vector, y $Ax \leq b$ significa que el vector de la izquierda es menor o igual, coordenada a coordenada, que el vector de la derecha. Un cono poliédrico es un tipo especial de **poliedro** o "**politopo no acotado**". En particular todo cono poliédrico tiene caras, borde, etc. Un complejo poliédrico cuyas caras son conos es un **abanico poliédrico**. Si la unión de todas las celdas es $\mathbb{R}^d$ entonces el abanico es **completo**.

- **Abanico normal de un politopo:** Un ejemplo de abanico completo es el **abanico normal de un politopo** P, cuyas caras son los **conos normales** de las caras de P. Dada una cara F de P, el cono normal de F es el conjunto de funcionales lineales f que alcanzan su máximo en F. Las celdas (caras maximales) en el abanico normal son los conos normales de los vértices de P. Las paredes son los conos normales de las aristas, etc.

- **Cono secundario, abanico secundario**: Dada una subdivisión regular $\mathcal{S}$ de un conjunto de puntos V con n elementos, el cono secundario de $\mathcal{S}$, denotado $\mathbb{C}(V, \mathcal{S})$ es el conjunto de vectores de levantamiento α que inducen $\mathcal{S}$ como subdivisión regular. Es un cono poliédrico en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los conos secundarios de subdivisiones regulares de V es un abanico completo en $\mathbb{R}^n$, cuyas celdas son los conos secundarios de triangulaciones regulares.

- **El GKZ-vector:** Sea $\mathcal{T}$ una triangulación de $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Definamos el vector $z(\mathcal{T}) = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ con $z_i = \sum \mathrm{vol}(F)$, donde la suma se realiza sobre todos los d-símplices F en $\mathcal{T}$ que tengan a p_i como vértice. $z(T)$ se llama el **GKZ-vector** de $\mathcal{T}$, en honor a Gel'fand, Kapranov and Zelevinsky.

- **Politopo secundario:** El politopo secundario $\Sigma(V)$ es la envolvente convexa de los GKZ-vectores de todas las triangulaciones de V.

Teorema 7 (Gel'fand-Kapranov-Zeevinsky)

1. *$\Sigma(V)$ tiene dimensión $n-d-1$. Su clausura afín está determinada por las $d+1$ ecuaciones*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = (d+1)\operatorname{vol}(P), \quad \textit{and} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i p_i = (d+1)\operatorname{vol}(P)c, \tag{1}$$

donde c es el baricentro de $P = \operatorname{conv}(V)$.

2. *El poset de caras (no vacías) de $\Sigma(V)$ es isomorfo al poset de todas las subdivisiones regulares de V, parcialmente ordenadas por refinamiento:*

   - *Dada una subdivisión regular $\mathcal{S}$ de V, los vectores de volumen de todas las triangulaciones regulares que refinan a $\mathcal{S}$ son los vértices de una cara $F_{\mathcal{S}}$ de $\Sigma(V)$. Esta cara también contiene a los vectores de volumen de las triangulaciones no regulares que refinan a $\mathcal{S}$, pero estos nunca son vértices.*
   - *El abanico normal de $\Sigma(V)$ coincide con el abanico secundario de V. Es decir, un vector de levantamiento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ produce una subdivisión regular $\mathcal{S}$ si y solo si α está en el cono normal de $F_{\mathcal{S}}$ en $\Sigma(V)$.*
   - *Haciendo el cociente del abanico secundario por las evaluaciones lineales en V (las cuales no cambian la subdivisión regular que produce cada vector de levantamiento) se obtiene un abanico isomorfo, de manera natural, al* complejo de cámaras *de la transformada de Gale de V. Aquí, llamamos complejo de cámaras de una configuración de vectores de rango k al abanico poliédrico obtenido tomando como paredes todos los $(k-1)$-conos generados por vectores de V. Dicho de otro modo, es el refinamiento común de todos los abanicos que se puede construir tomando los vectores de V como rayos. (Pero obsérvese que en este refinamiento común aparecen nuevos rayos, puesto que las parejas de conos típicamente no se intersecan bien).*

Más propiedades del politopo secundario son:

1. Los vértices de $\Sigma(V)$ son los GKZ-vectores de las triangulaciones regular de V. Dos triangulaciones no regulares, o una regular y una no regular, tienen siempre GKZ-vectores distintos.

2. Si dos triangulaciones $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ corresponden a vértices adyacentes de $\Sigma(V)$ (es decir, a los extremos de una arista) entonces son adyacentes pro un flip. (El recíproco no es siempre cierto: ocurre a veces que dos triangulaciones regulares son vecinas por un flip pero no son una arista del politopo seciundario. Hablamos en ese caso de **flips no regulares**).