

Ejercicios Clase 1

Michelle Wachs

- (1) Encuentre el tipo según los ciclos (cycle type) de cada una de las siguientes permutaciones.
- (a) [397468152]
 - (b) [234561]
 - (c) [1234]

- (2) Para $\lambda \vdash n$, sea $z_\lambda = 1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\cdots$, donde m_i es el numero de ocurrencias de i en λ . Muestre que el numero de permutaciones que tienen tipo λ según los ciclos es $\frac{n!}{z_\lambda}$.

- (3) En este problema mostraremos que las diversas caracterizaciones de los polinomios Eulerianos $A_n(t)$ son consistentes entre sí y con la definición original de Euler:

$$\sum_{i \geq 1} i^n t^i = \frac{t A_n(t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

- (a) Usando la definición original de Euler de $A_n(t)$, demuestre la formula para su función generadora exponencial

$$\sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{z^n}{n!} = \frac{1-t}{e^{(t-1)z} - t}.$$

- (b) Usando la definición original de Euler de $A_n(t)$, demuestre que los coeficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\rangle = (n-j) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\rangle + (j+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \right\rangle$$

- (c) Usando la caraterización combinatoria de $A_n(t)$ relacionada con la estadística des, demuestre que los coeficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia anterior.
- (d) Usando la caraterización combinatoria de $A_n(t)$ relacionada con la estadística exc, demuestre que los coeficientes de $A_n(t)$ satisfacen la recurrencia anterior.

- (4) Encuentre una demostración bijectiva de que des y exc tienen la misma distribución en \mathfrak{S}_n .

- (5) Sea C_n el conjunto de permutaciones \mathfrak{S}_n de tipo (n) según los ciclos. Encuentre una formula para

$$\sum_{\sigma \in C_n} t^{\text{exc}(\sigma)}.$$

- (6) Un árbol binario es un árbol sembrado en el cual cada nodo tiene a lo sumo dos hijos y cada hijo es un hijo por izquierda o un hijo por derecha. Un árbol binario incremental es un árbol binario con n nodos etiquetados con $1, 2, \dots, n$ de tal

manera que cada nodo tenga una etiqueta que es mayor a la etiqueta de su padre. Sea \mathcal{T}_n el conjunto de árboles binarios incrementales con n nodos. Para $T \in \mathcal{T}_n$, sea $l(T)$ el número de hijos por izquierda en T . Muestre que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} t^{l(T)} = A_n(t).$$

(7) Muestre que γ -positividad implica palindromicidad y unimodalidad, pero la converso es falsa.

(8) Demuestre:

(a)

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)} = [n]_q!.$$

(b) Sea $\mathfrak{S}_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ el conjunto de permutaciones del multiconjunto $\{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, m^{k_m}\}$. En otras palabras $\mathfrak{S}_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ es el conjunto de palabras con k_i i 's para cada i . Demuestre que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k_1, k_2, \dots, k_m}} q^{\text{inv}(\sigma)} = \left[\begin{matrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \end{matrix} \right]_q.$$

(9) Sea

$$A_n(q, t) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma) - \text{exc}(\sigma)} t^{\text{exc}(\sigma)}$$

y sea Alt_n el conjunto de permutaciones σ in \mathfrak{S}_n tal que

$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \sigma(5) > \dots < \sigma(n).$$

Demuestre que

$$A_n(q, -1) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\sigma \in \text{Alt}_n} q^{\text{inv}(\sigma)} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}.$$

(10) Demuestre la formula

$$A_n(q, t) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 2} \left[\begin{matrix} n \\ k_1 - 1, k_2, \dots, k_m \end{matrix} \right]_q t^{m-1} \prod_{i=1}^m [k_i - 1]_t$$