EJERCICIOS - ECCO 2016

SYLVIE CORTEEL

Los ejercicions con una * son los más fáciles.

1. Particiones, esquinas y ganchos

Una partición $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ es una sequencia de enteros positivos tal que

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k.$$

λ es una partición de n si $\sum_i \lambda_i = n$. Escribimos esto como $\lambda \vdash n$.

El diagrama de Young de λ es el diagrama que consiste en celdas indentadas a la izquiera tal que hay λ_i celdas en la fila i.

Ejercicio 0.*
Dibuje los diagramas de Ferrer de las particiones de 5.

Ejercicio 1.* Dada una partición λ, sea $c(\lambda)$ el número de equinas de λ (i.e. el número de is tal que $\lambda_i > \lambda_{i+1}$). Sea $p(n)$ el número de particiones de n.

Demuestre que

$$\sum_{\lambda \vdash n} c(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i).$$

Ejercicio 2.*
Un número triangular es el número $k(k+1)/2$ donde $k \in \mathbb{N}$. El gancho de la celda es el número de celdas a la derecha y abajo (incluida la celda).

Demuestre que el número de ganchos impares menos el número de ganchos pares en un diagrama de Young siempre es un número triangular.

2. Contando caminos en el retículo de Young

El retículo de Young es el grafo infinito cuyos vértices son particiones de enteros ordenadas si el diagrama de Young de una está contenida en el diagrama de otra.

Date: Junio 13th, 2016.

Recuerde que U y D son transformaciones lineales que actual sobre particiones de enteros tal que

$$U(\lambda) = \sum_{\mu \rhd \lambda} \mu, \quad D(\lambda) = \sum_{\mu \lhd \lambda} \mu,$$

donde $\mu \rhd \lambda$ quiere decir que μ y λ son particiones y el diagrama de μ es el diagrama de λ con una celda extra.

Un camino de tipo $w = A_n \dots A_i$ de $\emptyset$ a λ es una secuencia $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n)}$ tal que $\lambda^{(i-1)} \rhd \lambda^{(i)}$ si $A_i = D$ y $\lambda^{(i-1)} \lhd \lambda^{(i)}$ si $A_i = U$.

Ejercicio 0.*
Enumere los caminos de tipos $UUUUU$ de $\emptyset$ a $(2,2,1)$. Enumere los caminos de tipo $UUDUU$ de $\emptyset$ a $(2,1)$.

Ejercicio 1.* Muestre que para todo $i > 0$,

$$DU^i = U^i D + iU^{i-1}.$$

Utilice inducción para mostrar que para todo $i > 0$

$$U^n D^n = (UD - (n-1)I) \dots (UD - I)UD.$$

Ejercicio 2 Sea $w = A_m \dots A_1$ una palabra en el alfabeto $\{U, D\}$ tal que el número de Us menos el número de Ds es n.
Suponga que

$$\begin{array}{rcl} r_{i,j}(w) & = & 0; \;\; \text{if } i < 0 \text{ or } j < 0 \text{or } i - j \neq n \\ r_{0,0}(\emptyset) & = & 1 \\ r_{i,j}(Uw) & = & r_{i-1,j}(w); \\ r_{i,j}(Dw) & = & r_{i,j-1}(w) + (i+1) r_{i+1,j}(w). \end{array}$$

Sea $S_w = \{i \mid A_i = D\}$ y $a_i = \#\{j < i \mid A_j = U\}$ y $a_i = \#\{j < i \mid A_j = D\}$. Muestre que

$$r_{n,0}(w) = \prod_{i \in S_w} (a_i - b_i).$$

*Recuerde que $\alpha(w, \lambda)$ es el número de caminos de tipo w en el retículo de Young que comienzan en la partición vacía y terminan en la partición λ. Utilice esto para demostrar que

$$\alpha(w, \lambda) = f^\lambda \prod_{i \in S_w} (a_i - b_i).$$

Exercise 3.* Utilice el ejercicio anterior para mostrar que

$$\alpha(D^n U^n, \emptyset) = n!.$$

Calcule

$$\alpha((DU)^n, \emptyset).$$

Ejercicio 4.* Recuerde que $w = A_n \ldots A_1$ es una palabra λ-valida en el retículo de Young si hay por lo menos un camino de $\emptyset$ a λ de tipo w. Muestre que el número de palabras $\emptyset$-validas de longitud $2n$ es igual al número $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$, el número de Catalán.

Ejercicio 5.

Queremos calcular $\beta(\ell)$, el número de caminos de longitud ℓ en el retículo de Young que comienzan en la partición vacía y terminan en la partición vacía. Es decir :

$$\beta(\ell) = \langle\emptyset| \, (U + D)^\ell \, |\lambda\rangle \, .$$

1.* Muester que $\beta(\ell)$ es igual a cero si ℓ es impar.

2.* Aplique $DU = UD+I$ y muestre que si $(U+D)^\ell = \sum_{i,j} B_{i,j}(\ell) U^i D^j$ entonces

$$B_{i,j}(\ell+1) = B_{i,j-1}(\ell) + (i+1)B_{i+1,j}(\ell) + B_{i-1,j}(\ell).$$

para $i, j, \ell \geq 0$ con $B_{0,0}(0) = 1$ y $B_{i,j}(\ell) = 0$ si $i, j < 0$ ó $\ell < i + j$.

3. Muester que $B_{i,0}(\ell) = \binom{\ell}{i}(\ell - i - 1)!!$ con $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots 3 \cdot 1$.

4.* Deduzca que $\beta(\ell) = (\ell - 1)!!$.

5. Recuerde que un apareamiento perfecto en ℓ es una involución en ℓ sin puntos fijos. De una función biyectiva entre los caminos contados por $\beta(\ell)$ y apareamientos perfectos en ℓ.

Ejercicio 6.

Sea $\beta(\ell, \lambda)$ el número de caminos de longitud ℓ en el retículo de Young que comienzan en la partición vacía y terminan en λ donde λ es una partición de n.

1.* Demuestre que $\beta(\ell, \lambda)$ es cero si $\ell - n$ es impar.

2. Demuestre que $\beta(\ell, \lambda) = \binom{\ell}{n}(\ell - n - 1)!! f^\lambda$.