CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Hoja de problemas.

3 Flips. Grafo de triangulaciones

1. *Prueba que toda triangulación de un polígono convexo tiene exactamente $n-d-1 = n-3$ flips, donde n es el número de vértices y $d = 2$ es la dimensión.

2. *Prueba que toda triangulación de un prisma triangular $\Delta_2 \times \Delta_1$ tiene exactamente $n - d - 1 = 2$ flips, donde $n = 6$ es el número de vértices y $d = 3$ es la dimensión.

3. Si hiciste el problema 2.b de la hoja 1, muestra que los flips entre triangulaciones de $\Delta_k \times \Delta_1$ se corresponden con trasposiciones de elementos consecutivos en una permutación. En particular, todas las triangulaciones tienen exactamente $n - d - 1 = k$ flips, donde $n = 2k + 2$ es el número de vértices y $d = k + 1$ es la dimensión.

4. *Muestra que m.o.a.e. tiene triangulaciones con tres flips y triangulaciones con cuatro.

5. *Muestra que el 3-cubo tiene triangulaciones con cuatro y con seis flips.

6. *Dibuja el grafo de flips entre las triangulaciones que elegiste en el Problema 1.1.

7. *Dibuja el grafo de flips entre triangulaciones de los siguientes seis puntos: los cinco vértices de un pentágono regular, y su centro.

8. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$dos triangulaciones del n-gono. Prueba que:

   (a) *Si una de las dos es la triangulación que une in vértice con todos los demás, entonces se puede cambar de $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ haciendo como mucho $n - 3$ flips.

   (b) *Sean las que sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, se puede cambiar $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ haciendo como mucho $2n - 6$ flips.

   (c) De hecho, se puede también cambiar $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ haciendo como mucho $2n - 10$ flips.

   (d) Sea n par, y supongamos que $\mathcal{T}_1$ usa todas las orejas pares[3] y $\mathcal{T}_2$ usa todas las orejas impares[4]. Prueba que es imposible ir de $\mathcal{T}_1$

[3] o sea, supón que para todo i par, el triángulo $i-1, i, i+1$ está en $\mathcal{T}_1$

[4] lo mismo, para todo i impar

a $\mathcal{T}_2$ en menos de $\frac{3}{2}n - 5$ flips. Pista: divide las posibles diagonales del n-gón en tres tipos: las que van de par a par, de par a impar, y de impar a impar. Esto te da, para cada triangulación, un vector de tres coordenadas que cuenta los números de diagonales de cada tipo. Estudia cómo cambia ese vector por un flip (hay varios casos), y qué cambio necesitas para ir de $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$.

9. Sea $A = \{\pm e_i \pm e_j : i, j \in \{1,2,3\}\} \cup \{(0,0,0)\}$ (los vértices y el baricentro de un cubo-octaedro regular). Sea $\mathcal{T}$ una triangulación en la que todos los tetraedros tienen a $(0,0,0)$ como vértice (es decir, $\mathcal{T}$ es una de las 64 triangulaciones que se obtienen triangulando las 6 caras cuadradas del cubo-octaedro y haciendo el cono de todo el borde con el punto $(0,0,0)$). Prueba que:

   (a) El número de flips de $\mathcal{T}$ es 6 más dos veces el número de vértices de grado cuatro que veas en la triangulación del borde.

   (b) Hay dos triangulaciones con sólo 6 flips (observa que en este ejemplo $n - d - 1 = 9$).

   (c) ¿Hay triangulaciones con 8 flips?