CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulations of polytopes. Problem sheet.

5 Politopos secundarios

1. Dibuja el abanico secundario de la tercera configuración del ejercicio 1.1. (Puesto que $n = 5$ y $d = 2$, lo puedes dibujar como un abanico de dimensión dos, eligiendo dos coordenadas para las que los puntos de las otras tres coordenadas formen un triángulo en V. Dicho de otro modo, mira solo a los vectores de levantamiento que den altura zero a ese triángulo, sin pérdida de gneralidad).

2. Sea S una subdivisión de una configuración A con n puntos. Sea $\mathcal{C}(A, S) \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores de levantamiento $\alpha \in \mathbb{R}^n$ que producen S como subdivisión regular. Prueba que:

   (a) $\mathcal{C}(A, S)$ tiene dimensión completa si, y solo si, S s una triangulación.

   (b) $\mathcal{C}(A, S)$ es un cono poliédrico convexo y relativamente abierto. Es decir, es el conjunto de soluciones de un sistema de igualdades lineales y desigualdades lineales estrictas.

   (c) β está en la clausura de $\mathcal{C}(A, S)$ si, y sólo si, la subdivisión regular producida por β es refinada por S.

3. Dibuja el grafo de flips entre triangulaciones *regulares* de las primeras dos configuraciones del ejercicio 1.1 e interprétalos como los grafos de dos politopos de dimensión 3 (los politopos secundarios).

4. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ una configuración de n puntos en dimensión d. El politopo secundario $\Sigma(A)$ de A vive en $\mathbb{R}^n$ pero tiene dimensión $n-d-1$. Para demostrar que $\dim \Sigma(A) \geq n-d-1$, muestra que empujando los puntos de A de uno en uno se obtiene una cadena de longitud $n-d-1$ en el poset de subdivisiones regulares de A, que es el poset de caras de $\Sigma(A)$. Para demostrar que $\dim \Sigma(A) \leq n-d-1$, prueba que las siguientes $d+1$ ecuaciones afines son independientes y se satisfacen en los GKZ-vectores de todas las triangulaciones. Sea $c = (c_1, \ldots, c_d)$ el baricentro de $P = \mathrm{conv}(A)$ y sea $z = (z_1, \ldots, z_n)$ el GKZ-vector de una triangulación. Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} z_i &= (d+1)\,\mathrm{vol}(P), \\ \sum_{i=1}^{n} z_i a_i^j &= = (d+1)\,\mathrm{vol}(P) c_j, \forall j \in \{1, \ldots, d\}. \end{aligned}$$

Nota: las ecuaciones admiten la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} z = (d+1)\,\mathrm{vol}(P) \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. En la primera configuración del problema 1.1 (m.o.a.e.), considera los GKZ-vectores de las ocho triangulaciones que usan todos los puntos. (Puesto que el politopo secundario es de dimensión tres, puedes usar solo tres coordenadas; estarás projectando $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ mediante la aplicación que olvida tres coordenadas. Para mantener la simetría, usa las coordenadas de los tres puntos exteriores). Haciendo o sin hacer cálculos, prueba que:

   (a) Estos ocho puntos están en un plano afín.

   (b) Las dos triangulaciones no regulares producen el mismo GKZ-vector.

   (c) Los GKZ- vectores de las cuatro parejas de triangulaciones "opuestas" tienen el mismo punto medio.

   Por simetría, esto implica que las seis triangulaciones regulares producen como GKZ-vectores los vértices de un hexágono regular, con las dos triangulaciones no regulares en su centro.

6. Ahora haz lo mismo, pero girando ligeramente uno de los dos triángulos concéntricos con respecto al otro.

   (a) ¿Están los ocho GKZ-vectores en un plano?

   (b) ¿Aún producen las dos triangulaciones (antes) regulares el mismo GKZ-vector?

   (c) ¿Aún son iguales los puntos medios de las cuatro parejas de triangulaciones opuestas?

   Contestando a estas (u otras) preguntas, deduce que esos ocho puntos son los vértices de un paralelepípedo de dimensión tres. ¿Qué efecto tiene esto en el politopo secndario, o en el conjunto de triangulaciones regulares?