CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulaciones de politopos. Hoja de problemas.

2 Matroides orientadas

1. *Prueba que cinco puntos en posición general (=no hay 3 alineados) en el plano solo pueden producir tres matroides orientadas distintas.

2. *Escribe todos los circuitos y cocircuitos de las dos primeras configuraciones del Problema 1.1. (Pista: puesto que están en posición general, habrá exactamente $\binom{6}{4}$ circuitos y $\binom{6}{2}$ parejas de cocircuitos en cada uno.

3. Escribe los circuitos y cocircuitos de la siguiente configuración de vectores de rango 3: $\{(0,2,1),(0,-1,-2),(1,0,2),(-2,0,-1),(2,1,0),$ $(-1,-2,0)\}$. Deduce que es dual de los vértice de un hexágono.

4. Prueba que los vectores del problema anterior son una transformada de Gale de los vértices del hexágono dados en el Problema 1.1. Nota: gracias a que en el problema 1.1 tenemos ya una coordenada extra (la configuración tiene dimensión dos pero está en $\mathbb{R}^3$) no hace falta añadir una nueva coordenada igual a 1 a cada vector. Observa que esa coordenada extra sería de hecho combinación lineal de las tres que ya tienes, porque los puntos están en el plano $(x_1 + x_2 + x_3)/4 = 1$ de $\mathbb{R}^3$.

5. *Construye una transformada de Gale de m.o.a.e. (la primera configuración del Problema 1.1). Mismo comentario que en problema anterior.

6. *Considera versiones de m.o.a.e en las que el triángulo interior se gira con respecto al exterior. (Es decir, tus seis puntos son los vértices de dos triángulos reglares con el mismo centro y uno dentro de otro). Convéncete de lo siguiente: si la rotación es pequeña, ni la matroide orientada ni el conjunto de triangulaciones cambian. A medida que rotamos más, hay un momento preciso en el que tanto la matroide orientada como el conjunto de triangulaciones cambian. Intenta describir el cambio. (¿Cuántos y cuáles de los circuitos, cocircuitos y triangulaciones cambian?)

7. **Matroide orientada de un grafo dirigido.** Sea G un grafo dirigido con n aristas y k vértices: un par (V, E) donde $V = \{1, \ldots, k\}$ es un conjunto de vértices y E una lista de aristas dirigidas (una arista dirigida es una pareja $\overrightarrow{ij} := (i, j)$ con $i, j \in V$). Sea A la matriz de incidencia de G: la matriz $k \times n$ cuya i-ésima columna es el vector $e_i - e_j$, donde i y j son la cabeza y la cola de la arista i-ésima. Sea V

el conjunto de columnas de A (los elementos de V son vectores que corresponden a las aristas de G y con tantas coordenadas como vértices en G). Prueba que:

(a) Un subconjunto de V es linealmente dependiente si, y solo si, las correspondientes aristas de G contienen un ciclo. (Pista: para el 'si', piensa cómo cada ciclo produce una dependencia; para el 'solo si', observa que si tus aristas no contienen ningún ciclo entonces hay un vértice que está solo en una de ellas. Usa eso para hacer inducción en el número de vértices: quitando esa arista de tu conjunto se reduce en uno el rango del conjunto de vectores).

(b) Por tanto, los circuitos de V se corresponden con ciclos (quizá no bien-dirigidos) en G.

(c) Para cada ciclo de G, los dos lados del correspondiente circuito orientado lo forman las aristas que van en una y en la otra dirección en el ciclo.

8. (a) *Escribe los circuitos y cocircuitos (orientados) de la configuración de puntos $V = \{(6,0),(3,0),(2,2),(0,0),(0,3),(0,6)\}$. (Pista: son siete circuitos y siete cocircuitos).

(b) *Usando las partes (b) y (c) del problema anterior (aunque no lo hayas resuelto), escribe los circuitos orientados de la matroide orientada del grafo $G = (\{1,2,3,4\}, \{\overrightarrow{12}, \overrightarrow{13}, \overrightarrow{14}, \overrightarrow{23}, \overrightarrow{24}, \overrightarrow{34}\})$. (El grafo completo con 4 vértices, dirigido en orden de las etiquetas).

(c) *Como has obtenido los mismos circuitos, estas dos matroides orientadas son iguales. ¿Qué son, en el grafo G, los cocircuitos de la matroide?