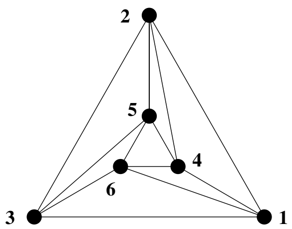
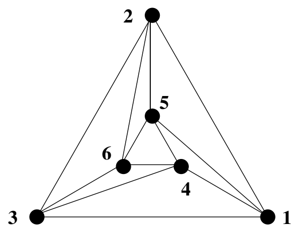
CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

Triangulations of polytopes. Problem sheet.

4 Triangulaciones y subdivisiones regulares

1. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ dos vectores de levantamiento tales que $\alpha - \beta$ ies una evaluación afín en V. Prueba que α y β producen la misma triangulación regular.
2. *Deduce de lo anterior que para construir las triangulaciones regulares de V, o para comprobar si una triangulación es regular o no, no hay pérdida de generalidad en elegir a priori $d+1$ puntos afínmente independientes (un d-símplice) y prescribir que esas $d+1$ coordenadas del vector de levantamiento sean zero.
3. *Prueba que las siguientes triangulaciones de m.o.a.e. son no regulares. Pista: por el problema anterior, puedes dar altura zero a los tres puntos interiores.





4. *Prueba que, a excepción de las dos triangulaciones no regulares del ejercicio anterior, todas las demás triangulaciones de los conjuntos del Problema 1.1 son lexicográficas (y, por tanto, no regulares).
5. Construye una triangulación regular que no sea lexicográfica.
6. *Sea B un subconjunto de V. Prueba que hay una subdivisión de V (de hecho, una regular) en la que B es una celda.
7. Sean $B1$ y B_2 dos subconjuntos de A con $\text{conv}(B_1) \cap \text{conv}(B_2) = \emptyset$. Prueba que hay una subdivisión de V (de hecho, una regular) en la que B_1 y B_2 son celdas.
8. Muestra que eso falla con *tres* conjuntos: tomando como V los vértices de un prisma triangular, encuentra tres subconjuntos B_1, B_2, B_3 con $\text{conv}(B_i) \cap \text{conv}(B_j) = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ pero sin que exista una subdivisión que tiene a B_1, B_2 y B_3 como celdas. Nota: en la m.o.a.e. existen B_1, B_2 y B_3 para los que no hay ninguna subdivisión *regular* que los tiene como celdas.