Ejercicios Clase 3

Michelle Wachs

(1) Recuerde que $H(z) := \sum_{n\geq 0} h_n z^n$ y que ps denota la especialización principal estable.
  (a) Muestre que
$$\mathrm{ps}(H(z)) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}.$$
  (b) Muestre que tomando la especialización principal estable de
$$\frac{(1-t)H(z)}{H(zt)-tH(z)}$$
  y luego reemplazando z por $z(1-q)$, se obtiene
$$\frac{(1-t)\exp_q(z)}{\exp_q(tz)-t\exp_q(z)}.$$

(2) Verifique que
$$\sum_{i\in \mathrm{DEX}(\sigma)} i = \mathrm{maj}(\sigma) - \mathrm{exc}(\sigma) \tag{1}$$
para cada una de las siguientes permutaciones.
  (a) $\sigma = 41637852$
  (b) $\sigma = 54321$
  (c) para todo $\mathfrak{S}_3$
  (d) para todo $\mathfrak{S}_{(4)}$.

(3) Demuestre (1) para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(4) Explique porque h-positividad implica Schur-positividad and p-positividad.

(5) (a) Muestre que si una función simétrica homogenea f de grado n es Schur-positiva y
$$\mathrm{ps}(f) = \frac{g(q)}{(1-q)\dots(1-q^n)}$$
  entonces $g(q)$ es un polinomio con coeficientes positivos.
  (b) Porque Schur-unimodalidad de $\sum_{j\geq 0} Q_{\lambda,j}t^j$ implica q-unimodalidad de $A_\lambda(q,t)$?.

(6) Dibuje todos los ornamentos de tipo $\lambda = (4)$, peso $x_2x_3x_6^2$, con dos letras rojas.

(7) Para $\sigma = 32675814$ y la sucesión $s = (9,9,8,7,7,3,3,1)$, dé el ornamento que corresponde usando la biyección.

(8) Sea $\Gamma_{n,i}$ el coeficiente de $t^i(1+t)^{n-1-2i}$ en la expansión de $\sum_{j=0}^{n-1} Q_{n,j}t^j$. Muestre que
$$\mathrm{ps}(\Gamma_{n,i}) = \frac{\sum_\sigma q^{\mathrm{maj}(\sigma^{-1})}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$
donde la suma en el numerador es sobre todas las permutaciones que no tengan descensos dobles ni descenso al final y con i descensos.

(9) Encuentre una demostración combinatoria del hecho que $Q_{\lambda,j}$ es una función simétrica para todo λ y j. Sugerencia: Use la caracterización de ornamentos.