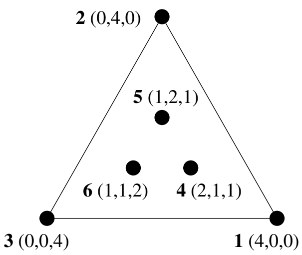
CIMPA Research School:
Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2016

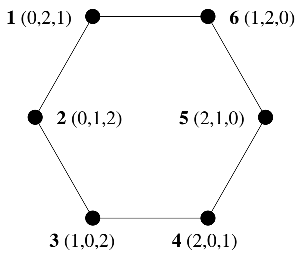
Triangulaciones de politopos. Hoja de problemas.

1 Triangulaciones y subdivisiones

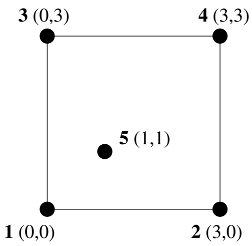
1. *Dibuja todas las triangulaciones de alguna de las siguientes configuraciones. El número en negrita es para que puedas referirte al triángulo formado por los puntos 1, 2 y 3 simplemente como "123", etc. Las dos primeras viven en un plano en $\mathbb{R}^3$. Si esto te confunde, olvida la tercera coordenada; esto produce una biyección afín de ese plano a $\mathbb{R}^2$ que conserva el conjunto de triangulaciones:



La m.o.a.e. [1]



Hexágono



5 puntos en el plano

2. (a) *Construye todas las subdivisiones de un prisma triangular (el producto de un triángulo y un segmento). Pista: módulo simetría hay solo tres subdivisiones: triangulaciones (todas equivalentes entre sí), la subdivisión trivial, y otra tercera clase. Dibuja el poset de subdivisiones (las relaciones de refinamento entre subdivisiones).
   (b) Describe todas las triangulaciones de $\Delta_k \times \Delta_1$, el producto de un k-símplice y un segmento. Pista: hay una biyección entre estas triangulaciones y las permutaciones de $\{1, \ldots, k+1\}$, donde los the $k+1$ símbolos se corresponden con los vértices de Δ_k.

3. *Sea V un conjunto de 4 puntos en $\mathbb{R}^2$, no todos en una recta (es decir, generan afínmente $\mathbb{R}^2$). Prueba que hay tres subdivisiones de V, sean cuales sean los puntos: la subdivisión trivial y dos triangulaciones.

4. *Haz lo mismo para 5 puntos en $\mathbb{R}^3$, no todos en un plano…

5. …y para $d+2$ puntos en $\mathbb{R}^d$, no todos en un hiperplano. Para ello:
   (a) Observa que sólo hay una dependencia afín entre los puntos (módulo multiplicación por una constante). Sean V^+ y V^- los conjuntos de puntos con coeficiente positivo y negativo en ella.

[1] "Mother Of All Examples"; madre de todos los ejemplos

(b) Prueba que los todos los símplices d-dimensionales de V son de la forma $V \setminus \{v_i\}$ donde v_i está en $V^+ \cup V^-$.

(c) Prueba que dos de esos símplices $V \setminus \{v_i\}$ y $V \setminus \{v_j\}$ se intersecan bien (es decir, satisfacen la propiedad (IP)) si y sólo si v_i y v_j están en el mismo subconjunto V^+ o V^-.

(d) Prueba que $\{V \setminus \{v_i\} : v_i \in V^+\}$ y $\{V \setminus \{v_i\} : v_i \in V^-\}$ son triangulaciones, y que no hay más subdivisones, aparte de la trivial.

6. (a) *Sea V el conjunto de vértices de una rejilla 1×2. Es decir, $V = \{(i, j) : i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2\}\}$. Construye todas sus triangulaciones. ¿Cuántas usan todos los puntos?

   (b) Sea V el conjunto de vértices de una rejilla $1 \times k$. Es decir, $V = \{(i, j) : i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, \dots, n\}\}$. Demuestra que V tiene $\binom{2k}{2}$ triangulaciones que usan todos los puntos.

7. Demuestra que el cubo regular de dimensión 3 tiene seis clases de triangulaciones (módulo simetría): una con cinco tetraedros y cinco con seis tetraedros. (Pista: demuestra primero que toda triangulación utiliza bien uno de los dos tetraedros regulares inscritos en el cubo, o bien una de las cuatro diagonales entre vértices opuestos. En el primer caso eso determina la triangulación; en el segundo caso, piensa en las posibles configuraciones de tetraedros alrededor de esa diagonal).

8. Para cada $n \geq 3$, sea T_n el conjunto de triangulaciones de un n-gono (polígono convexo con n lados). Vamos a demostrar que $|T_n|$ es igual a $\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$. Para ello:

   (a) Prueba que toda triangulación del n-gono tiene $2n-3$ aristas (los n lados del n-gono más $n-3$ diagonales internas). Deduce que el grado medio de los vértices en la triangulación es $4 - \frac{6}{n}$.

   (b) Fija un vértice, digamos el 1. Explica por qué el grado medio de *ese vértice* entre *todas las triangulaciones* es también $4 - \frac{6}{n}$.

   (c) Considera la aplicación $f : T_{n+1} \to T_n$ que "contrae" la arista $\{1, n+1\}$, convirtiendo cada triangulación del $(n+1)$-gono en una triangulación del n-gono.[2] Demuestra que para cada triangulación $\mathcal{T} \in T_n$ del n-gono, el número de triangulaciones del $(n+1)$-gono en $f^{-1}(G)$ es $\deg_{\mathcal{T}}(1)$ (el grado del vértice 1 en $\mathcal{T}$).

   (d) Concluye de (b) y (c) que el tamaño *medio* de $f^{-1}(\mathcal{T})$ es exactamente $\frac{4n-6}{n}$.

   (e) Deduce que

$$|T_{n+1}| = \frac{4n-6}{n}|T_n|,$$

   y demuestra por inducción la fórmula para $|T_n|$.

[2] Consideramos los vértices del n-gono etiquetados del 1 al n en orden cíclico.

Nota: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ son los llamados *números de Catalan*. El ejercicio demuestra que $|T_n|$ es el $(n-2)$-ésimo número de Catalan C_{n-2}.

9. Encuentra una biyección entre los siguientes conjuntos (Pista: la biyección es más facil de visualizar si pintas el n-gono como media arepa, con una arista $1n$ horizontal arriba y una cadena de $n-1$ aristas cortas debajo):

   (a) Triangulaciones de un $(n+2)$-gono. Por ejemplo, para $n = 3$ hay $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$.

   (b) Maneras de colocar n parejas de paréntesis en el producto de $(n+1)$ términos $a_1 \cdots a_{n+1}$, para expresarlo como n productos de 2 términos. Por ej., para $n = 3$ hay cinco maneras: $(((a_1a_2)a_3)a_4)$, $((a_1(a_2a_3))a_4)$, $(a_1((a_2a_3)a_4))$, $(a_1(a_2(a_3a_4)))$, $((a_1a_2)(a_3a_4))$.

10. Encuentra una biyección entre los conjuntos anteriores y los *caminos de Dyck* de longitud $2n$: caminos monótonos de $(0,0)$ a (n,n) en la rejilla entera y que van por encima de la diagonal $x = y$. Por ejemplo, para $n = 3$ hay cinco caminos: $NNNEEE$, $NNEENE$, $NENNEE$, $NENENE$, $NNENEE$. Aquí N y E denotan un paso hacia el "norte" y "este", respectivamente.