

Análisis del Convertidor Ćuk: Modelo Promedio y Dinámico Linealizado en Espacio de Estados

Erick Christopher Davalos Gonzalez
Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica
Universidad de Guadalajara
Guadalajara, Jalisco, México
erick.davalos2937@alumnos.udg.mx

Resumen—Se analiza el convertidor CD-CD tipo Ćuk utilizando modelos de funciones de conmutación, promedio en espacio de estados y linealización por el método de pequeñas perturbaciones. Se deriva la relación de conversión de voltaje bajo condiciones de estado estacionario periódico. A partir del método de pequeñas perturbaciones, se obtiene un modelo linealizado; posteriormente, se obtiene la función de transferencia y su diagrama de Bode. Los modelos se validan mediante simulaciones en PSIM y Matlab.

I. INTRODUCCIÓN

El convertidor Ćuk es una configuración de un convertidor de DC-DC se caracteriza por tener polaridad inversa en el voltaje de salida respecto al voltaje de entrada y mantener corrientes continuas tanto en la entrada como en la salida. A diferencia de otras configuraciones tradicionales, la transferencia de energía se realiza principalmente a través de un condensador de acoplamiento, lo que contribuye a una reducción significativa del rizo de corriente.

Para analizar el comportamiento dinámico del convertidor, se emplea el modelo promedio en espacio de estados. Esta técnica permite representar el sistema no lineal y conmutado como un sistema continuo equivalente en el tiempo, promediando las ecuaciones del circuito en cada subintervalo del ciclo de conmutación. Esto facilita el análisis de estabilidad, el diseño de controladores y la obtención de funciones de transferencia sin necesidad de simular las conmutaciones a alta frecuencia.

A partir del modelo promedio, se procede a la linealización mediante el método de pequeñas perturbaciones. Este enfoque es válido bajo la suposición de que el convertidor opera cerca de un punto de equilibrio (estado estacionario periódico) y que las variaciones en las variables del sistema son pequeñas respecto a sus valores nominales. Bajo estas condiciones, se pueden despreciar los términos no lineales.

El modelo linealizado permite obtener funciones de transferencia que relacionan las variaciones del voltaje de salida con perturbaciones en el ciclo de trabajo, lo cual es fundamental para el diseño de lazo de control y el análisis de la respuesta en frecuencia. Este tipo de análisis resulta esencial para comprender el comportamiento dinámico del convertidor.

Los modelos desarrollados se validan mediante simulaciones en PSIM y Matlab/Simulink, comparando los resultados

del modelo conmutado, el modelo promedio y el modelo linealizado. Esta comparación permite evaluar la validez de las aproximaciones utilizadas.

II. MODELADO EN ESPACIO DE ESTADOS DE UN CONVERTIDOR ĆUK

En esta sección se presenta la formulación completa del convertidor Ćuk en sus tres etapas:

- **Modelo conmutado**
- **Modelo promedio**
- **Modelo dinámico linealizado**

La Figura 1 muestra la configuración del circuito Ćuk, mientras que la Figura 2 ilustra los dos estados asumidos del conmutador: conducción y bloqueo.

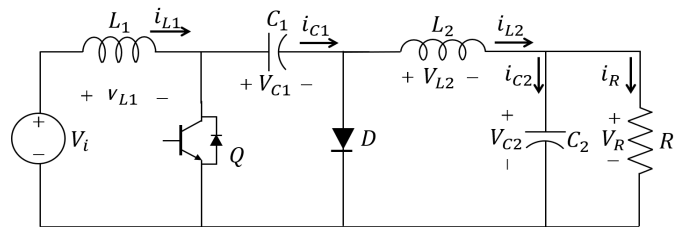


Fig. 1. Configuración del circuito Ćuk.

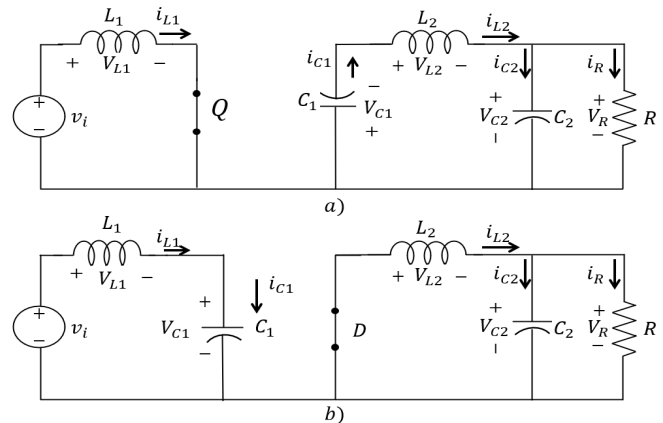


Fig. 2. Estados asumidos; a) conmutador encendido diodo apagado, b) conmutador apagado diodo encendido

El vector de variables de estado es:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

La carga se modela con una resistencia R , de modo que la corriente de carga es

$$i_R = \frac{v_{C2}}{R}. \quad (2)$$

La fuente de entrada es v_i . El transistor se describe con una función de conmutación binaria:

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{transistor ON, diodo OFF,} \\ 0, & \text{transistor OFF, diodo ON.} \end{cases}$$

A. Modelo Conmutado

Se definen dos conjuntos de ecuaciones (Fig. 2) que pueden escribirse en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} A_{ON} x + B_{ON} v_i, & q = 1, \\ A_{OFF} x + B_{OFF} v_i, & q = 0. \end{cases}$$

Si se desea medir la salida $y = v_{C2} = x_4$, se define

$$y = Cx, \quad \text{con } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estado 1 (Transistor ON, Diodo OFF):

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = v_i, \quad L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = -v_{C1} - v_{C2} \quad (3)$$

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{L2}, \quad C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{L2} - \frac{v_{C2}}{R}. \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}}_{A_{ON}} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{ON}} v_i. \quad (5)$$

1) Estado 2 (Transistor OFF, Diodo ON):

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = v_i - v_{C1}, \quad L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = -v_{C2} \quad (6)$$

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{L1}, \quad C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{L2} - \frac{v_{C2}}{R}. \quad (7)$$

En forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}}_{A_{OFF}} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{OFF}} v_i. \quad (8)$$

El modelo conmutado permite un análisis detallado de cada etapa ON/OFF y es la base para simulación en el dominio del tiempo sin suposiciones de un promedio.

B. Modelo Promedio

Para frecuencias de conmutación altas, introducimos el ciclo de trabajo $d \in [0, 1]$, que es la fracción de tiempo en que el transistor está ON dentro de cada período de conmutación. Bajo la hipótesis de que las variables de estado varíen lentamente en comparación con la conmutación, se define:

$$\frac{dx}{dt} = d (A_{ON} x + B_{ON} v_i) + (1-d) (A_{OFF} x + B_{OFF} v_i).$$

Reordenando:

$$\frac{dx}{dt} = [d A_{ON} + (1-d) A_{OFF}] x + [d B_{ON} + (1-d) B_{OFF}] v_i. \quad (9)$$

El **modelo promedio** toma la forma estándar:

$$\frac{dx}{dt} = A_{avg}(d) x + B_{avg}(d) v_i, \quad y = Cx. \quad (10)$$

Donde:

$$A_{avg}(d) = d A_{ON} + (1-d) A_{OFF}, \quad (11)$$

$$B_{avg}(d) = d B_{ON} + (1-d) B_{OFF}, \quad (12)$$

De manera explícita y simplificada el modelo promedio se puede expresar como:

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{v_i}{L_1} - \frac{(1-d)v_{C1}}{L_1}, \quad (13)$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{dv_{C1} + v_{C2}}{L_2}, \quad (14)$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{di_{L2} + (1-d)i_{L1}}{C_1}, \quad (15)$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(i_{L2} - \frac{v_{C2}}{R} \right), \quad y = v_{C2}. \quad (16)$$

Este modelo se emplea para analizar la respuesta de baja frecuencia, diseñar controladores y estudiar estabilidad a nivel general. Es una aproximación que ignora el rizo debido a la conmutación.

C. Relación de Conversión de Voltaje en Estado Estacionario

En estado estacionario, las derivadas de las variables de estado son cero. Reemplazando las variables por sus valores de estado estacionario:

$$0 = \frac{V_i}{L_1} - \frac{(1-D)V_{C1}}{L_1} \implies V_i = (1-D)V_{C1} \quad (17)$$

$$0 = -\frac{DV_{C1} + V_{C2}}{L_2} \implies DV_{C1} = -V_{C2} \quad (18)$$

$$0 = \frac{DI_{L2} + (1-D)I_{L1}}{C_1} \implies DI_{L2} = -(1-D)I_{L1} \quad (19)$$

$$0 = \frac{1}{C_2} \left(I_{L2} - \frac{V_{C2}}{R} \right) \implies I_{L2} = \frac{V_{C2}}{R} \quad (20)$$

Sustituyendo la ecuación 17 en la ecuación 18. Tenemos que la relación de conversión de voltaje en estado estacionario es:

$$\frac{V_{C2}}{V_i} = -\frac{D}{1-D} \quad (21)$$

D. Modelo Dinámico

Para obtener el modelo linealizado, introducimos pequeñas perturbaciones alrededor de un punto de operación en estado estacionario:

$$x = X + \tilde{x}, \quad v_i = V_i + \tilde{v}_i, \quad d = D + \tilde{d} \quad (22)$$

$$X = \begin{pmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{i}_{l1} \\ \tilde{i}_{l2} \\ \tilde{v}_{c1} \\ \tilde{v}_{c2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Sustituyendo estas variables en el modelo promedio y despreciando los términos de segundo orden y superiores en las perturbaciones, obtenemos el modelo linealizado.

La matriz $A_{\text{avg}}(d)$ y el vector $B_{\text{avg}}(d)$ dependen del ciclo de trabajo d . Para linealizar alrededor de un punto de operación d , consideramos $d = D + \tilde{d}$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_{\text{avg}}(D + \tilde{d}) &= (D + \tilde{d})A_{\text{ON}} + (1 - D - \tilde{d})A_{\text{OFF}} \\ &= (DA_{\text{ON}} + (1 - D)A_{\text{OFF}}) + \tilde{d}(A_{\text{ON}} - A_{\text{OFF}}) \\ &= A_{\text{avg}}(D) + \tilde{d}\Delta A \end{aligned} \quad (24)$$

donde $\Delta A = A_{\text{ON}} - A_{\text{OFF}}$. De manera similar,

$$\begin{aligned} B_{\text{avg}}(D + \tilde{d}) &= (D + \tilde{d})B_{\text{ON}} + (1 - D - \tilde{d})B_{\text{OFF}} \\ &= (DB_{\text{ON}} + (1 - D)B_{\text{OFF}}) + \tilde{d}(B_{\text{ON}} - B_{\text{OFF}}) \\ &= B_{\text{avg}}(D) + \tilde{d}\Delta B \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\Delta B = B_{\text{ON}} - B_{\text{OFF}}$. Sustituyendo las variables perturbadas:

$$\begin{aligned} \frac{d(X + \tilde{x})}{dt} &= (A_{\text{avg}}(D) + \tilde{d}\Delta A)(X + \tilde{x}) \\ &\quad + (B_{\text{avg}}(D) + \tilde{d}\Delta B)(V_i + \tilde{v}_i) \end{aligned} \quad (26)$$

Despreciando los términos de segundo orden, el modelo dinámico linealizado es:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= A_{\text{avg}}(D)\tilde{x} + B_{\text{avg}}(D)\tilde{v}_i + A_{\text{avg}}(D)\tilde{x} + \tilde{d}\Delta A X \\ &\quad + B_{\text{avg}}(D)\tilde{v}_i + \tilde{d}\Delta B V_i \end{aligned} \quad (27)$$

El término de estado estacionario es $A_{\text{avg}}(D)X + B_{\text{avg}}(D)V_i = 0$ y obtenemos.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= A_{\text{avg}}(D)\tilde{x} + (\Delta A X + \Delta B V_i)\tilde{d} + B_{\text{avg}}(D)\tilde{v}_i \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (28)$$

Calculando ΔB y $\Delta A X$:

$$\Delta B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta A X = \begin{pmatrix} \frac{V_{C1}}{L_1} \\ -\frac{V_{C1}}{L_2} \\ \frac{I_{L2} - I_{L1}}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

El modelo dinámico con el calculo de $\Delta A X + \Delta B V_i$ es:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A_{\text{avg}}(D)\tilde{x} + \begin{pmatrix} \frac{V_{C1}}{L_1} \\ -\frac{V_{C1}}{L_2} \\ \frac{I_{L2} - I_{L1}}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{d} + B_{\text{avg}}(D)\tilde{v}_i \quad (30)$$

E. Función de Transferencia del Modelo Linealizado

Para obtener la función de transferencia control-salida se considera $\tilde{v}_i = 0$. La representación en espacio de estados es:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A_{\text{avg}}(D)\tilde{x} + B_d\tilde{d} \quad (31)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} \quad (32)$$

donde

$$B_d = \begin{pmatrix} \frac{V_{C1}}{L_1} & -\frac{V_{C1}}{L_2} & \frac{I_{L2} - I_{L1}}{C_1} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (33)$$

En la ecuación 35 se muestra de manera explícita la función de transferencia que se obtuvo utilizando la ecuación 34 y la tabla I.

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones de espacio de estados con $\tilde{v}_i = 0$ se obtiene función de transferencia control-a-salida.

$$G_{vd}(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{\tilde{v}_{c2}(s)}{\tilde{d}(s)} = C(sI - A_{\text{avg}}(D))^{-1}B_d \quad (34)$$

TABLA I
PARÁMETROS DEL CONVERTIDOR ČUK ASEGURANDO RIZO PEQUEÑO

Parametros	Valor
Vin , Vout	12 V , -18V
Potencia de Salida , Carga (R)	40 W , 8.1 Ω
Frec. Conmutación	50 kHz
Ciclo de Trabajo	60%
Capacitor (C_1 , C_2)	30 μ F , 0.31 μ F
Inductor (L_1 , L_2)	0.86 mH , 1.3mH

III. SIMULACIONES Y RESULTADOS

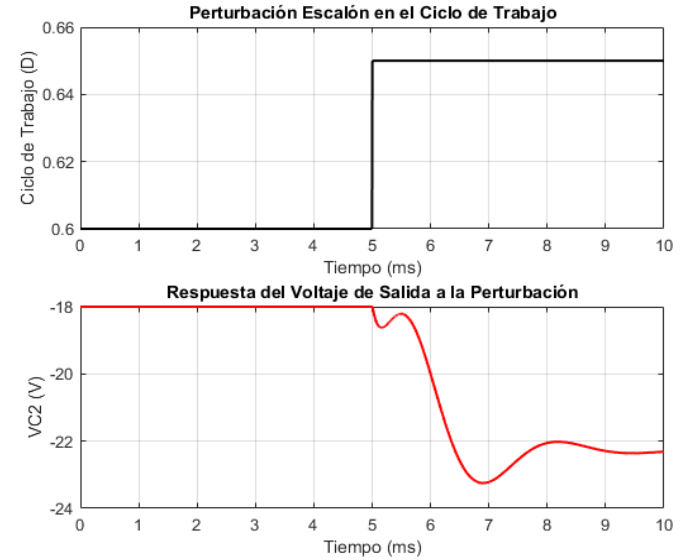


Fig. 3. Respuesta al escalón del modelo dinámico, variación del 0.6 al 0.65 del ciclo de trabajo (d).

$$G_{vd}(s) = \frac{-2.982 \times 10^{15} s^2 + 1.823 \times 10^{19} s - 9.860 \times 10^{22}}{3.457 \times 10^5 s^4 + 1.378 \times 10^{10} s^3 + 2.910 \times 10^{14} s^2 + 8.547 \times 10^{17} s + 3.649 \times 10^{21}} \quad (35)$$

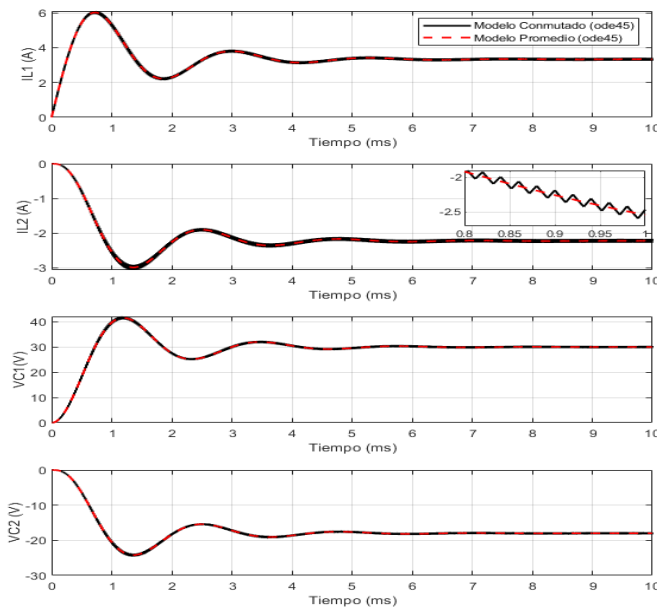


Fig. 4. Simulación en MATLAB de las formas de onda del modelo conmutado y del modelo promedio, método numérico ode45 con delta de tiempo de 1e-7.

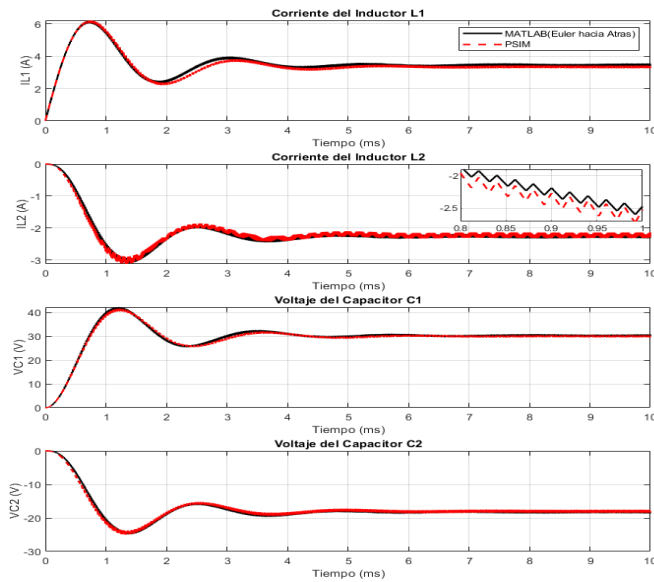


Fig. 5. Simulación con MATLAB y PSIM de las formas de onda del modelo conmutado, método numérico Euler hacia atrás con delta de tiempo de 1e-7.

IV. CONCLUSIONES

En este sistema de cuarto orden se identifican cuatro polos ubicados en el semiplano izquierdo y dos ceros complejos conjugados en el semiplano derecho. Estas ubicaciones determinan los cambios en magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema (Fig. 6).

A bajas frecuencias, la ganancia se mantiene elevada y estable alrededor de 40 dB. Conforme se incrementa la frecuen-

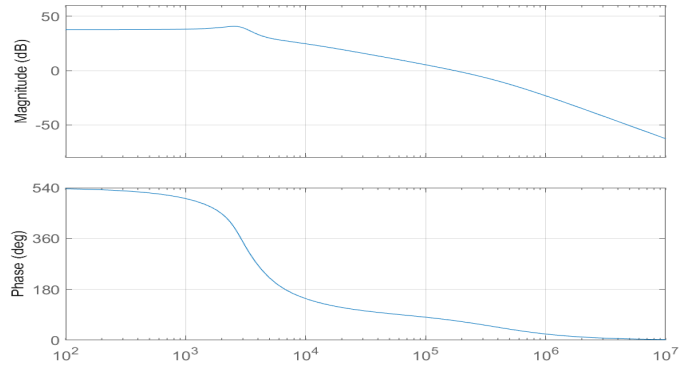


Fig. 6. Diagrama de Bode de la función de transferencia de la ecuación 35.

cia, la influencia de los ceros en el semiplano derecho provoca un ligero incremento en la magnitud, ya que estos aportan un adelanto de fase (+90°) en un rango de frecuencias cercano a su frecuencia característica. A medida que se aumenta la frecuencia, los cuatro polos, cada uno aportan un retraso de aproximadamente -90°, comienzan a dominar la respuesta, haciendo que la magnitud disminuya.

La respuesta de fase se observa una evolución que es el resultado de la contribución acumulativa de cada elemento. Cada polo y cada cero modifica la fase de forma gradual en un rango de frecuencias alrededor de su frecuencia característica. Aunque de manera ideal se asocia a cada polo un retraso de -90° y a cada cero un adelanto de +90°, en la práctica estas transiciones ocurren a lo largo de una banda de frecuencia. El diagrama de Bode revela que el sistema posee una ganancia elevada en bajas frecuencias, una ligera resonancia intermedia por los ceros y una atenuación progresiva en alta frecuencia por los polos.

Se realizó una comparación entre los convertidores Cuk y Zeta, simulándolos para una misma carga de 18V. El Cuk es más complejo en su diseño debido al condensador de acoplamiento, y la necesidad de mantener una polaridad invertida en la salida.

El Zeta tiene un diseño más sencillo, lo que puede hacerlo más fácil de implementar. El diseño es más intuitivo en cuanto a la salida de voltaje positivo, lo que lo hace más adecuado para circuitos con restricciones de polaridad.

La corriente de entrada en el convertidor Cuk se comporta de manera continua, mientras que el Zeta presenta discontinuidades y altas oscilaciones. La corriente que circula por el conmutador, en el Cuk presenta un alto nivel de rizado, a diferencia del Zeta; esto influye en la selección de un conmutador más robusto y caro para el convertidor Cuk.

REFERENCIAS

- [1] M. H. Rashid, *Electronica de Potencia - Circuitos, dispositivos y aplicaciones*. Prentice Hall, 1999.