Examen 2 O&C

Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica

Davalos González Erick Christopher

1.- El precio nodal se obtiene resolviendo un OPF, este refleja el costo incremental de servir una demanda adicional de energía en el nodo, considerando:

- Costo por generación, • Perdidas en la red.
- Restricciones de las lineas.

En general, es la suma del costo marginal de producción de la energía, un ajuste debido a la congestión de las lineas determinado por el multiplicador de Lagrange y un ajuste por las perdidas en caso de que se consideren.

- Función Objetivo $\min\limits_{P_G} \sum_{i=1}^{N_G} C_i(P_{G_i})$

- Restricciones $P_{G_k} - P_{D_k} = \sum_j B_{kj}(\theta_k - \theta_j)$ y $|F_\ell| \leq F_\ell^{MAX}$

  donde $F_\ell = B_\ell(\theta_m - \theta_n)$ para los nodos m y n (linea).

- Lagrangiano

asociado al balance de potencia.

Multiplicador asociado a la congestión.

$$\mathcal{L} = \sum_i C_i(P_{G_i}) + \sum_k \lambda_k \left[P_{G_k} - P_{D_k} - \sum_j B_{kj}(\theta_k - \theta_j)\right] + \sum_\ell \mu_\ell (F_\ell - F_\ell^{MAX})$$

Cuando se resuelve el OPF λ_k representa el costo marginal de atender demanda adicional en ese nodo.

Si existen perdidas y congestion el LMP o precio nodal tiene que incluir estos componentes.

$$LMP_k = \underbrace{\lambda_{ref}}_{\text{precio base del nodo.}} + \sum_{\ell} \mu_\ell \underbrace{\frac{\partial F_\ell}{\partial P_k}}_{PTDF_{\ell,k}} + \lambda_{ref} \frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_k}$$

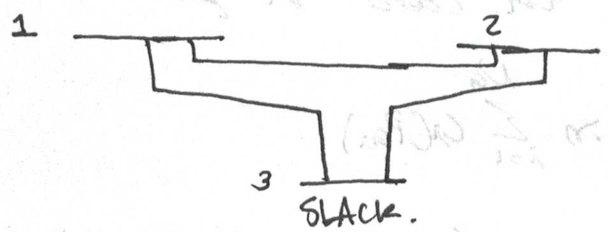
Si la línea no esta saturada $\mu_\ell = 0$.

$\lambda_k = \lambda_{ref}$ (no congestión, no perdidas)

$$LMP_k = \lambda_{ref} + \sum_{\ell} \mu_\ell \cdot PTDF_{\ell,k} + \lambda_{ref} \frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_k}$$

Ejemplo:

Supongamos 3 nodos (1,2,3) e inyectamos 1MW en cada uno



$PTDF_{1-2,1} = 0.5$

$PTDF_{1-2,2} = -0.5$

$PTDF_{1-2,3} = 0$.

Supongamos que el precio base en el nodo 3 es de \$25/MWh y solo la línea 1,2 se encuentra saturada con $\mu_{1-2} = \$5/MWh$.

$LMP_1 = 25 + 5 \times 0.5 = \$27.5/MWh$

$LMP_2 = 25 + 5 \times (-0.5) = \$22.5/MWh$.

$LMP_3 = 0$.

Es más barato inyectar en el nodo 2. para extraer en ~~1~~ 3.

2.- En el metodo de precio por zonas cada zona se trata como un supernodo, dentro de cada zona se asigna el mismo precio para todos los nodos de la zona.

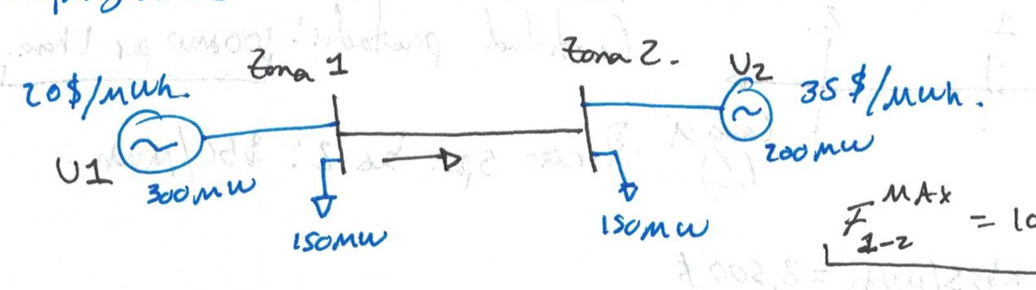
Este método ignora las congestiones internas de cada zona, es una aproximación más simple del precio nodal. Reduce la cantidad de información y facilita la operación, sin embargo, puede generar ineficiencias si hubiera congestiones internas en las zonas.

El modelo matematico es similar al del precio nodal.

3.-

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_G} C_i(P_{Gi}) + \sum_{z=1}^{M} \overbrace{\lambda_z}^{\text{Precio zonal base.}} \Big[\underbrace{\sum P_{Gi} - \sum P_{Di}}_{\text{Inyección neta en la zona}} - \overbrace{\sum F_{z-w}}^{\text{Flujo }\cancel{\text{límite}}\text{ del enlace}} \Big] + \underbrace{\sum \mu_{zw}}_{\text{costo en la congestión de la interconexión}} \left(|F_{z-w}| - \underbrace{F_{z-w}^{MAX}}_{\text{límite del enlace}} \right)$$

Supongamos un sistema de dos zonas con 1 interconexión.



$F_{1-2}^{MAX} = 100MW$

Sin congestión la unidad U1 puede suministrar la carga en ambas zonas por 20$/MWh. $\lambda_1 = \lambda_2 = 20\$/MWh$

Con congestión (límite 100MW) la zona 2 debe suministrar 50MW a la carga en su zona y traer energía (100MW) de la zona 1.

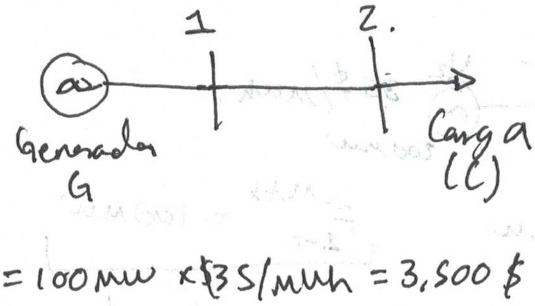
El precio zonal de la zona 2 ahora es de 35$/MWh.

La diferencia de $\lambda_2 - \lambda_1 = 15\,\$/MWh$ es la señal de congestión de la interconexión. Mientras no haya saturación (congestión) en los enlaces los precios zonales son los mismos. Cuando hay congestión los precios zonales se separan y el costo de la zona se determina por el costo marginal de generación que cubre la demanda de la zona. También puede ser el generador más caro de la zona.

$$\lambda_z = \frac{dC_{zona}}{dP_{demanda}}.$$

4.- Un contrato bilateral es un acuerdo privado entre dos participantes en el sistema eléctrico, por ejemplo un generador y una carga para la compra-venta de energía a un precio pactado durante un periodo de tiempo determinado.
La transacción de energía de un punto a otro puede estar sujeta a cargos de transmisión adicionales.

Ejemplo:



Precio pactado: \$35/MWh.
Cantidad pactada: 100MW por 1 hora.

Precio spot bus 2: \$50/MWh.

Pago = 100MW x \$35/MWh = 3,500 \$

Si la carga consume lo contratado no hay diferencias pero supongamos que consume 50MW más, entonces estos 50MW los paga al precio spot (50\$/MWh). El contrato bilateral transfiere el riesgo de fluctuaciones en el spot. Si el spot sube, el consumidor se protege, si baja el generador se beneficia.

5.- El despacho económico ordena los generadores desde el más barato hasta el más caro para cubrir la demanda. El último generador (más caro) que entra para cubrir la demanda es el generador marginal y el precio marginal es el costo incremental de ese generador.

$$\lambda_k = \frac{dC_{marginal}}{dP}.$$

El precio que determina el despacho económico ES el precio marginal del sistema. Aunque la diferencia aparece en la siguiente situación:

• Sin restricciones	• Con restricciones.
Precio de despacho es igual al precio marginal. en todo el sistema.	El despacho se vuelve un OPF y el precio deja de ser único y se convierte en precio por nodo.

6.- El LMP es el precio marginal de inyectar o consumir energía eléctrica en un punto (nodo) específico del sistema, este considera los costos de generación y las restricciones físicas del sistema así como las pérdidas.
Si no hay restricciones físicas ni pérdidas todos los LMP son iguales y equivalen al costo marginal del sistema.
Formula utilizando DC-OPF.

$$LMP_k = \lambda_{ref} + \sum_{\ell} \mu_\ell PTDF_{\ell k} + \lambda_{ref} \frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_k}$$

7.- El precio que determina el despacho es el precio marginal, cuando se refiere a LMP (precios nodales), este se determina realizando un despacho optimo mediante OPF, es decir LMP considera las restricciones y perdidas de la red es por eso que el precio en cada nodo varía.

8.- Es un término matemático que se utiliza para resolver problemas de optimización sujetos a restricciones.
Transforma un problema con restricciones en uno más facil de resolver, las restricciones se pueden incluir en la función objetivo.

multiplicador de Lagrange.

$$\min_{x} f(x)$$
$$\text{s.a} \quad h_j(x)=0 \quad \forall_j$$

Cada restricción debe tener su multiplicador de Lagrange asociado.

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_j \lambda_j h_j(x).$$

Variable de decisión

En general nos sirve para saber como se modifica el valor optimo de la función objetivo si la restricción se relaja una unidad.

En el despacho economico utilizando OPF cada nodo lleva una restricción de balance de potencia por ende lleva un multiplicador de Lagrange asociado el cual es el LMP.

9.-. Para una función de costo $F(P)$, donde P es la potencia que genera la unidad en ese momento.

El costo marginaal es lo que cuesta producir una unidad más de energía según la función de costo de la maquina, esto es, la derivada de la funcion de costo $F(P)$, entonces:

$$CI = \frac{dF(P)}{dP} \leftarrow \text{función típicamente cubica ó cuadratiza.}$$

Por ejemplo:

Una turbina de vapor tiene la función de costo igual a

$$F(P) = 0.01P^2 + 10P + 1000$$

Su costo incremental es:

$$CI = \frac{dF(P)}{dP} = 10 + 0.02P$$

Supongamos la maquina se encuentra entregando 300MW:

$$CI = 10 + 0.02(300) = 16\ \$/MWh$$

Si la maquina esta generando 200MW tendriamos un costo total de 3400 \$/MWh, si se lleva la turbina a 201MW tendriamos un costo total de 3416 \$/MWh.

10.- Panorama general:

Modelo	Propósito	Variables	Problema	Red
Flujos de Potencia	Verificar flujos y volltajes para un despacho dado.	V_i, θ_i	Sistema no lineal. No función objetivo.	Se modela completa con interacciones.
Despacho Económico	Asignar niveles de generación para minimizar costo. No hay restricciones en la red.	P_{Gi}	Optimización Continua y Convexa	Perdidas constantes. Sin congestión.
Unit Commitment	Elegir qué unidades estan encendidas y a qué potencia.	$u_{i,t} \in \{0,1\}, P_{i,t}$	No convexo, MILP/ LAGANGE	Sin restricciones en las líneas
Optimal Power Flow	Minimizar el costo con toda la física y restricciones de la red.	P_{Gi}, V_i, θ_i	DC-OPF: QP/LP	Red completa con límites.

Flujos de potencia

$$AC: \quad P_i = V_i \sum_j V_j \left(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij} \right)$$

$$Q_i = V_i \sum_j V_j \left(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij} \right).$$

No hay función objetivo: Buscamos punto factible.

$$DC: \quad P_i = \sum_j B_{ij} (\theta_i - \theta_j).$$

Despacho económico (ED)

$$\min_{P_{Gi}} \sum_i F_i(P_{Gi})$$

$$\text{s.a} \quad \sum_i P_{Gi} = D_{TOT} + P_{LOSS}$$

$$P_{Gi}^{min} \le P_{Gi} \le P_{Gi}^{MAX}.$$

Un único multiplicador de Lagrange: Sólo una ecuación de balance.

Resultado valido sin congestión en la red.

Unit Commitment - (UC)

$$\min_{u_{i,t}, P_{i,t}} \sum_t \sum_i \left[\underline{F_i(P_{i,t})\, u_{i,t}} + C_{i,t}^{arranque} \right]$$

$$\text{s.a} \quad \sum_i P_{i,t}(u_{i,t}) = D_t$$

$$P_i^{min} u_{i,t} \le P_{i,t} \le P_i^{MAX} u_{i,t}.$$

- Problema mixto entero.
- Despacho economico se encuentra en cada ~~conjunto~~ conjunto de unidades encendidas

Flujos optimos de potencia (OPF)

$$\min_{P_{Gi}, V_i, \theta_i} \sum_i F_i(P_{Gi})$$

s.a. Ecuaciones de AC de Flujos de potencia.

$$|P_{nm}| \le P_{nm}^{MAX}, \quad V_i^{min} \le V_i \le V_i^{max}$$

$$P_{Gi}^{min} \le P_{Gi} \le P_{Gi}^{MAX}.$$

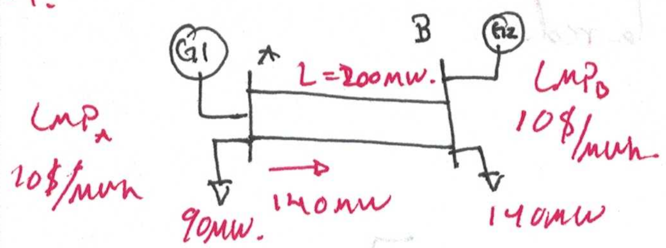
Flujos optimos de potencia combina ED y Flujos de potencia

LMPs aparecen como precios marginales por nodo

La version de DC linealiza las ecuaciones y utiliza los factores PTDF y LODF.

La solución de AC es un problema no convexo, la aproximación de DC lo hace convexo.

11.-



G_1: 200MW @ 5\$/MWh

100MW @ 10\$/MWh.

G_2: 150MW @ 15\$/MWh.

Para analizar el ejercicio se supone el modelo de DC y sin otras restricciones.

Desde OPF:

$$\min_{P_1, P_2, P_{nm}} \quad C_1(P_1) + C_2(P_2)$$

$$\text{s.a} \quad P_1 - L_1 - P_{nm} = 0 \quad (\lambda_A)$$

$$P_2 - L_2 + P_{nm} = 0 \quad (\lambda_B)$$

$$-P_{nm}^{MAX} \leq P_{nm} \leq P_{nm}^{MAX} \quad (\mu_e)$$

$$0 \leq P_1 \leq 300 \quad 0 \leq P_2 \leq 150$$

$$-200 \leq P_{nm} \leq 200$$

Despacho optimo y LMPS:

La carga total $D_t = 230$ MW.

G_1 cubre sus primeros 200 MW a 5 \$/MWh y los 30 restantes a 10\$/MWh. G_2 no se despacha porque su costo es más alto que G_1.

La linea no tiene congestión, $\lambda_A = \lambda_B$ el costo marginal de G_1 dicta el costo marginal en ambos buses.

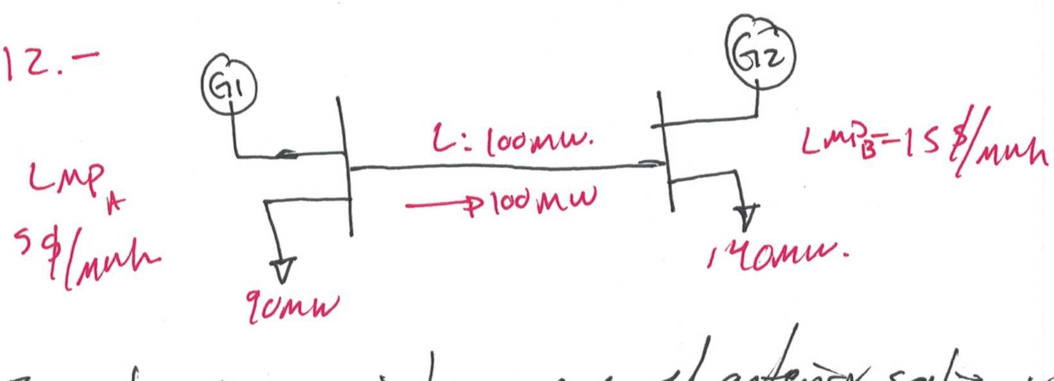
Si hubiera congestión:

$$LMP_A = 10 \text{ \$/MWh} \text{ ó } 5 \text{ \$/MWh}.$$

$$LMP_B = 10 + \mu PTDF_{A-B,B} \; ; \; PTDF_{A,B,A \to B} = 1$$

Todo el costo extra recae sobre el LMP_B, esto subira el LMP_B al costo marginal de G_2 (15 \$/MWh) es decir: $\mu = 5$ \$/MWh.

12.-



Es el mismo sistema que el anterior, salio una linea de operación y la linea se congestionó.

$$\min_{P_1, P_2, P_{nm}} \; C_1(P_1) + C_2(P_2)$$

$$\text{s.a. } P_1 - P_{nm} = 90 = L_1$$

$$\Leftrightarrow P_1 - L_1 - P_{nm} = 0$$

$$P_2 - L_2 + P_{nm} = 0$$

$$0 \leq P_1 \leq 300 \quad 0 \leq P_2 \leq 150$$

$$-100 \leq P_{nm} \leq 100.$$

En estas condiciones el nodo B tiene un LMP de 15\$/MWh debido a que cada MW extra lo tiene que suministrar la maquina G2 y esta tiene ese precio.

El valor del multiplicador de Lagrange $\mu_L = 10\$/MWh$, este es el costo por relajar el límite de 100MW. en la linea A-B. $\mu_L = LMP_B - LMP_A$

Se puede observar que la congestión ocasiona dispersión en los precios y revela la importancia de ampliar la capacidad de las lineas.

13.- Modelo analítico DC-OPF del sistema de 4 nodos.

* $\underset{\text{Buses}}{N} = \{1,2,3,4\}$, * $\underset{\text{Gen}}{G} = \{1,2,4\}$ * $\underset{\text{lineas}}{L} = \{(1,2),(1,3);(1,4),(2,3),(3,4)\}$

* $P_{D2} = 1\ pu$, $P_{d3} = 1.1787\ pu$, $P_{d1} = P_{d4} = 0$

* $x_l = 0.1\ pu$. * Limite termico : $P_{nm} = \overset{50\ MW}{\cancel{200\ MW}}$ $(\overset{0.5pu}{\cancel{2.0pu}})$

* $0.5 \leq P_{G1} \leq 2$ $\quad 0.375 \leq P_{G2} \leq 1.5$ $\quad 0.45 \leq P_{g4} \leq 1.8$

* \$/pu·Mwh $s_1 = 1307$, $s_2 = 1211$, $s_4 = 1254$.

* $A \in \mathbb{R}^{|L| \times |N|}$ Matriz de incidencia

$D = \text{diag}(b_l) \in \mathbb{R}^{|L| \times |L|}$

$B = A^T D A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Tenemos:

$$\min_{P_G, \theta, P_{nm}} \sum_{k \in G} s_k P_{gk}$$

s.a $\underline{P_k = P_{gk} - P_{dk}}$

inyecciones $k = 1 \ldots 4$.

$\underline{P = B\theta}$

DC Flujos de potencia

Balance nodos $P \in \mathbb{R}^4$

$\underline{P_{nm} = DA\theta}$ Flujo en las lineas

$P_{nm} \in \mathbb{R}^5$

$-P_{nm}^{MAX} \leq P_{nm} \leq P_{nm}^{MAX}$ $\quad P_{gk}^{min} \leq P_{gk} \leq P_{gk}^{max}$

$\theta_1 = 0$

Costo total de la energía es: $\underline{2705.76\ \$/h}$

$P_{G_1} = 0.5_{pu}$ $P_{G_2} = 1.2287_{pu}$ $P_{G_4} = 0.45_{pu}$.

Flujo 1-2	Flujo de 1-3	1-4	2-3	3-4
$P_{12} = 0.0955$	0.4197_{pu}	0.0152	0.3242	-0.4348.

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -0.0095$ rad $\theta_3 = -0.042$ rad $\theta_4 = 0.0015$.

Se desconecta la línea 1-2.

La línea 1-2 transporta únicamente 0.0955 pu, esta pequeña transferencia de energía se redistribuye por otras líneas

Seguimos teniendo el costo total de 2705.76 \$/h.

Ahora los Flujos son:

Flujo 1-3	Flujo 1-4	Flujo 2-3	Flujo 3-4
0.4833	0.0167	0.2287	-0.4667.

Todos los flujos de potencia se encuentran por debajo de 0.5pu lo que aún es posible encontrar solución.

Se desconecta la línea 1-3.

Esta línea transporta 0.4197 pu, es decir, casi cerca del límite, el bus 3 tiene una carga de 1.1787, los caminos para llevar energía directamente al bus 3 son 2-3 y 3-4 ambos con límite de 0.5 pu por lo que lo máximo que se le podría entregar al bus 3 son 1.0 pu.

Este estado es inestable, hace que colapse el bus 3.

Resultados de PowerWorld

El costo marginal del sistema es de 12.11 $/MWh, recordemos que el costo marginal es el costo por 1 MW extra en la red debido a que el generador del Bus 1 y Bus 4 están funcionando al mínimo y el generador del Bus 2 es el más barato y aún puede entregar potencia, la energía la inyecta en el Bus 2 a un precio de 12.11 $/MWh esto fue posible debido a que no hay líneas congestionadas. La línea 1-3 al 84% y la 4-3 al 87%.

Desconexión línea 1-2.

La capacidad de las líneas es de 50 MW, con la desconexión de la línea 1-2, las líneas 1,3 y 4,3 se encuentran al 97% y 94% respectivamente, las otras líneas no sufrieron gran cambio, el LMP sigue siendo igual, sigue sin haber congestión y el generador 2 puede satisfacer la carga.

Desconexión línea 1-3.

En el script de CPLEX este estado NO es factible ya que las líneas 2-3 y 4-3 se encuentran saturadas, arriba de sus límites, esto impide que el bus 3 reciba energía. La línea 4-3 esta al 129% de su capacidad y la 2-3 al 107%. LMP del bus 3 es de 1012.11 $/MWh. Líneas Saturadas.

Desconexión del generador ~~2~~ 4

El costo marginal del sistema ahora es de 13.07 $/MWh, este precio lo marca el generador 1 ya que el generador entregó toda su potencia, el generador 1 debe entregar el sig MW.

--- DC-OPF (línea desconectada: ninguna) ---

Costo total = 2705.76 $/h

Pg (pu): 1=0.5000, 2=1.2287, 4=0.4500

Flujos (pu): 1-2=0.0955, 1-3=0.4197, 1-4=-0.0152, 2-3=0.3242, 3-4=-0.4348

Ángulos (rad): 1=0.0000, 2=-0.0095, 3=-0.0420, 4=0.0015

--- DC-OPF (línea desconectada: 1-2) ---

Costo total = 2705.76 $/h

Pg (pu): 1=0.5000, 2=1.2287, 4=0.4500

Flujos (pu): 1-3=0.4833, 1-4=0.0167, 2-3=0.2287, 3-4=-0.4667

Ángulos (rad): 1=0.0000, 2=-0.0255, 3=-0.0483, 4=-0.0017

--- DC-OPF (línea desconectada: ninguna) ---

Costo total = 2705.76 $/h

Pg (pu): 1=0.5000, 2=1.2287, 4=0.4500

Flujos (pu): 1-2=0.0955, 1-3=0.4197, 1-4=-0.0152, 2-3=0.3242, 3-4=-0.4348

Ángulos (rad): 1=0.0000, 2=-0.0095, 3=-0.0420, 4=0.0015

No factible (línea desconectada: 1-3)

```
from docplex.mp.model import Model
def solve_opf_dc(disconnect_line=None):
  """
  DC-OPFpara red de 4 buses
  Generadores en 1,2,4; cargas en 2 (1.000 pu), 3 (1.1787 pu)
```

```
líneas: (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)

Slack:theta=0

Inyección neta: Pk = Pgk - Pdk

Balance

Flujos de lineas

Límites

Objetivo: minimizar s_i·Pgi

"""

# 1. Datos en pu

buses    = [1,2,3,4]

gens     = [1,2,4]

Pd       = {1:0.0, 2:1.000, 3:1.1787, 4:0.0}

s_cost   = {1:1307, 2:1211, 4:1254}

Pmin     = {1:0.5,   2:0.375, 4:0.45}

Pmax     = {1:2.0,   2:1.5,   4:1.8}

all_lines = [(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)]

b_sus    = 1/0.1

Pnm      = 0.5

ang_lim   = 3.1416


#Filtrar línea desconectada

if disconnect_line:

   i, j = map(int, disconnect_line.split('-'))

   lines = [ℓ for ℓ in all_lines if ℓ != (i,j) and ℓ != (j,i)]

else:

   lines = all_lines
```

```
# 2Construcción del modelo
mdl = Model(name='DC_OPF_with_disconnect')

# Variables
Pg    = {i: mdl.continuous_var(lb=Pmin[i], ub=Pmax[i], name=f'Pg{i}') for i in gens}
theta = {i: mdl.continuous_var(lb=-ang_lim, ub=ang_lim, name=f'theta{i}') for i in
buses}
F     = {l: mdl.continuous_var(lb=-Pnm, ub=Pnm, name=f'F{l[0]}{l[1]}') for l in lines}

# 3 Restricciones

# Slack bus
mdl.add_constraint(theta[1] == 0, 'slack_bus')

# Balance nodal:
for k in buses:
    gen_term = Pg[k] if k in Pg else 0.0
    inflow   = mdl.sum(F[(i,j)] for (i,j) in lines if j == k)
    outflow  = mdl.sum(F[(i,j)] for (i,j) in lines if i == k)
    mdl.add_constraint(gen_term - Pd[k] + inflow - outflow == 0, f'balance_{k}')

# Ecuaciones de flujo
for (i,j) in lines:
    mdl.add_constraint(F[(i,j)] == b_sus * (theta[i] - theta[j]), f'flow_eq_{i}_{j}')
```

```python
    # 4. Objetivo: minimizar costo total
    mdl.minimize(mdl.sum(s_cost[i] * Pg[i] for i in gens))

    # 5. Resolver
    sol = mdl.solve(log_output=False)
    scenario = disconnect_line or 'ninguna'
    if not sol:
        print(f"No factible (línea desconectada: {scenario})")
        return

    # 6. Resultados
    print(f"\n--- DC-OPF (línea desconectada: {scenario}) ---")
    print(f"Costo total = {sol.objective_value:.2f} $/h")
    print("Pg (pu):", ", ".join(f"{i}={Pg[i].solution_value:.4f}" for i in gens))
    print("Flujos (pu):", ", ".join(f"{i}-{j}={F[(i,j)].solution_value:.4f}" for (i,j) in lines))
    print("Ángulos (rad):", ", ".join(f"{i}={theta[i].solution_value:.4f}" for i in buses))

if __name__ == "__main__":
    # Caso base
    solve_opf_dc()
    # desconectar línea 1-2
    solve_opf_dc(disconnect_line='1-3')
```