

# Modelado, linealización y simulación de un inversor trifásico de seis pulsos con conmutación a 180°

Erick Christopher Davalos Gonzalez  
Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Guadalajara  
Guadalajara, Jalisco, México  
erick.davalos2937@alumnos.udg.mx

Abel Ricardo Boza Veranes  
Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Guadalajara  
Guadalajara, Jalisco, México  
abel.boza0964@alumnos.udg.mx

**Resumen**—Este documento presenta el modelado, análisis y simulación de un convertidor CD-CA trifásico, se utiliza el modelo de funciones de conmutación, modelo de frecuencia fundamental y el modelo en coordenadas dq0 que posteriormente se linealiza en un punto de operación para obtener la función de transferencia del inversor. Se implementa un programa en MATLAB para simular los modelos planteados, se obtiene el diagrama de respuesta a la frecuencia (Bode) de la función de transferencia. Se comparan las señales obtenidas con las simulaciones realizadas con el programa PSIM. Los resultados obtenidos permiten evaluar el comportamiento del inversor trifásico conectado a una red eléctrica balanceada.

## I. INTRODUCCIÓN

Los inversores trifásicos son dispositivos clave en la conversión de corriente continua (CD) a corriente alterna (CA) en sistemas industriales, energías renovables y redes eléctricas. Un inversor trifásico estándar consta de seis conmutadores dispuestos en tres brazos, estos conmutadores pueden ser controlados mediante diferentes técnicas, principalmente en onda cuadrada o por modulación de ancho de pulso (PWM). En la conducción a 180°, cada interruptor conduce durante 180° del ciclo, manteniendo siempre tres interruptores activos simultáneamente. Este método genera un voltaje promedio mayor, sin embargo, también produce mayor contenido armónico.

El modelo de funciones de conmutación describe con detalle cada transición de los IGBT o MOSFET, útil para estudiar distorsiones armónicas y diseñar filtros. Por su parte, el modelo en frecuencia fundamental filtra armónicos para centrarse en la dinámica útil de la tensión y corriente de red.

Para el diseño de controladores, los modelos en coordenadas dq0 simplifican el sistema al proyectar las variables trifásicas en dos ejes ortogonales, facilitando el diseño de lazos de control. Sin embargo, la no linealidad de estos modelos requiere linealizar alrededor de un punto de operación para poder derivar una función de transferencia.

En este documento, se derivan todas las ecuaciones de los modelos mencionados, se simulan en PSIM y MATLAB, y se grafica el diagrama de Bode de la función de transferencia del modelo dq0 linealizado.

## II. INVERSOR TRIFÁSICO DE PUENTE COMPLETO CON TRANSFORMADOR DE ACOPLAMIENTO $\Delta-Y$

En el inversor mostrando en la Fig. 1 las corrientes de línea  $\mathbf{i} = [i_a, i_b, i_c]^T$  salen de los nodos de la red  $\mathbf{v}_s = [v_{sa}, v_{sb}, v_{sc}]^T$ . Atraviesan un filtro  $R_s-L_s$  por fase (línea de transmisión) y entran al inversor mediante un transformador ideal  $\Delta-Y$  1:1 con neutro aterrizado. El bus de corriente directa consiste en un condensador  $C$  cuya tensión es  $v_{dc}(t)$ . La corriente  $i_{dc}$  se define positiva entrando en el polo positivo de  $C$ .

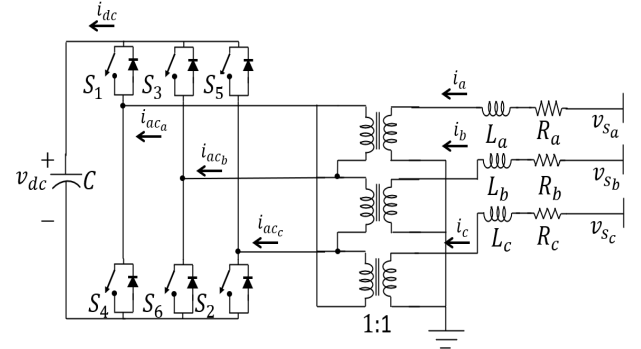


Fig. 1. Convertidor CD-CA Trifásico de puente completo con transformador de acoplamiento  $\Delta-Y$  y línea de transmisión (filtro RL)

## III. MODELO CONMUTADO

### A. Funciones de disparo

Cada pierna del inversor conmuta con  $S(t) \in \{+1, -1\}$ . Para la conducción a 180° se tiene:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \text{sgn}[\sin(\theta(t))] \\ \text{sgn}[\sin(\theta(t) - 120^\circ)] \\ \text{sgn}[\sin(\theta(t) + 120^\circ)] \end{bmatrix} \in \{+1, -1\}^3. \quad (1)$$

La función de conmutación  $S(t)$  nos entrega los valores discretos de la tabla I, el signo positivo indica la activación del MOSFET de la parte superior, el signo negativo la activación del MOSFET de la parte inferior de cada fase.

TABLA I  
TABLA DE DISPAROS (6 PULSOS, 180°)

Sector (°)	$S_a$	$S_b$	$S_c$
0-60	+1	-1	+1
60-120	+1	-1	-1
120-180	+1	+1	-1
180-240	-1	+1	-1
240-300	-1	+1	+1
300-360	-1	-1	+1

### B. Tensiones del sistema

Cada pierna del inversor produce  $\pm V_{dc}/2$  respecto a un neutro virtual:

$$v_{i,fase}(t) = S_i(t) \frac{v_{dc}(t)}{2}. \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{S}(t) = [S_a, S_b, S_c]^T$ . Las tensiones reales de línea a línea en la delta se pueden obtener de la siguiente manera:

$$v_{ll}^\Delta(t) = \frac{v_{dc}(t)}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} S(t). \quad (3)$$

El transformador  $\Delta$ -Y induce cada tensión de línea a línea de la  $\Delta$  en la fase correspondiente de la Y,  $\mathbf{v}_{ll}^\Delta(t) = \mathbf{v}_{fase}^Y(t)$ .

$$v_{ll}^Y(t) = \frac{v_{dc}(t)}{2} \mathbf{K}^2 S(t), \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

### C. Potencia absorbida y dinámica de $V_{dc}$

Definimos las corrientes en las ramas  $\Delta$  como:

$$\mathbf{i}_\Delta(t) = \mathbf{M} \mathbf{i}(t). \quad (5)$$

donde  $\mathbf{i}(t) = [i_a, i_b, i_c]^T$  son las corrientes en estrella y  $\mathbf{M} = \mathbf{K}^T$ .

Para un inversor ideal, la potencia que entrega del bus de CD debe ser igual a la potencia que recibe el circuito de CA o viceversa.

$$P_{dc} = V_{dc} i_{dc} = -P_{ac}.$$

Mediante LCK obtenemos la expresión y asumiendo que  $i_{dc}$  entra al condensador:

$$\dot{v}_{dc}(t) = \frac{1}{C} (i_{fuente}(t) + i_{dc}(t)) = \frac{1}{C} (0 + i_{dc}(t)) = \frac{1}{C} i_{dc}(t). \quad (6)$$

La tensión en las fases de la  $\Delta$  con las corrientes  $\mathbf{i}_\Delta$  se tiene

$$P_{ac} = -v_{i,fase}(t) i_\Delta = -\frac{V_{dc}}{2} S^T(t) \mathbf{M} \mathbf{i}(t). \quad (7)$$

El signo negativo aparece porque las corrientes  $\mathbf{i}$  se definieron saliendo de los nodos de red. Igualando potencias y despejando  $i_{dc}$ :

$$i_{dc} = \frac{1}{2} S(t)^T \mathbf{M} \mathbf{i}(t), \quad (8)$$

$$\dot{v}_{dc}(t) = \frac{i_{dc}}{C} = \frac{1}{2C} S(t)^T \mathbf{M} \mathbf{i}(t).$$

Obtenemos el modelo conmutado:

$$\dot{\mathbf{i}}(t) = -\frac{R_s}{L_s} \mathbf{i}(t) - \frac{v_{dc}(t)}{2L_s} \mathbf{K} S(t) + \frac{1}{L_s} \mathbf{v}_s(t), \quad (9)$$

$$\dot{v}_{dc}(t) = \frac{1}{2C} S^T(t) \mathbf{M} \mathbf{i}(t).$$

## IV. MODELO DE FRECUENCIA FUNDAMENTAL

El modelo de frecuencia fundamental de un inversor es una representación simplificada que se enfoca en la componente sinusoidal de la tensión de salida a la frecuencia deseada, ignorando los armónicos generados por la conmutación. Este modelo se obtiene mediante el análisis de Fourier de las funciones de conmutación y la extracción de la componente fundamental.

### A. Serie de Fourier de las funciones de conmutación y su componente fundamental

Se obtiene la serie de Fourier del vector de funciones de conmutación  $S(t)$  (Eq. 1). Como es una señal cuadrada con ciclo de trabajo del 50%, solo aparecen armónicos impares. Su expansión en serie de Fourier es

$$S_k(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} H_n \sin(n\omega t + \phi_k), \quad H_n = \frac{4}{n\pi}. \quad (10)$$

donde  $\phi_a = 0$ ,  $\phi_b = -120^\circ$ ,  $\phi_c = +120^\circ$ . El coeficiente fundamental ( $n = 1$ ) vale aproximadamente 1.273.

Despreciando  $n \geq 3$ , definimos la señal promedio fundamental:

$$S_1(t) = H_1 \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t - 120^\circ) \\ \sin(\omega t + 120^\circ) \end{bmatrix} = \frac{4}{\pi} \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t - 120^\circ) \\ \sin(\omega t + 120^\circ) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Esta aproximación filtra todo el rizo de la conmutación y deja solo la dinámica de  $f_1$ .

### B. Tensiones del sistema utilizando el modelo de frecuencia fundamental

Sustituyendo  $S_1(t)$  en la ecuación 3 de las tensiones de línea a línea de la  $\Delta$  tenemos para el componente ab

$$v_{ab,\Delta,1}(t) = \frac{V_{dc}}{2} \frac{4}{\pi} [\sin \theta - \sin(\theta - 120^\circ)]$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_{dc} \sin(\theta + 30^\circ). \quad (12)$$

Análogamente para  $v_{bc,\Delta,1}$  y  $v_{ca,\Delta,1}$ . La tensión de línea a línea de cada devanado de la  $\Delta$  se induce en cada devanado de la Y, en este caso es la tensión de fase a neutro de la Y.

$$v_{\phi n,1}(t) = v_{ll}^{\Delta,1}(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} v_{dc}(t) \begin{bmatrix} \sin(\theta + 30^\circ) \\ \sin(\theta - 90^\circ) \\ \sin(\theta + 150^\circ) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Para obtener las tensiones de línea a línea de la Y usamos

$$v_{ll}^{Y,1}(t) = \mathbf{K} v_{\phi n,1}(t), \quad (14)$$

$$v_{ab,Y,1}(t) = v_{an,1}(t) - v_{bn,1}(t) = \frac{6}{\pi} V_{dc} \sin \theta. \quad (15)$$

De modo que la amplitud pico es  $\frac{6}{\pi} V_{dc} \approx 1.909 V_{dc}$ .

La relación de amplitudes entre los voltajes de línea a línea de la Y de la  $\Delta$  es  $\sqrt{3}$  tal como corresponde a un transformador  $\Delta$ -Y.

$$\frac{|v_{ll}^{Y,1}|}{|v_{ll}^{\Delta,1}|} = \frac{\frac{6}{\pi} V_{dc}}{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_{dc}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \quad (16)$$

De la ecuación 9 del modelo conmutado obtenemos el modelo abc de frecuencia fundamental:

$$L_s \dot{i}(t) = -R_s i(t) - \frac{v_{dc}(t)}{2} \mathbf{K} S_1(t) + v_s(t), \quad (17)$$

$$\dot{v}_{dc}(t) = \frac{1}{2C} S_1(t)^T \mathbf{M} i(t).$$

El modelo tiene coeficientes que varían en el tiempo, se puede representar en forma de espacio de estados (Eq. 18).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{i}_b(t) \\ \dot{i}_c(t) \\ \dot{v}_{dc}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} I_3 & -\frac{1}{2L_s} \mathbf{K} S_1(t) \\ \frac{1}{2C} S_1(t)^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ v_{dc}(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} I_3 \\ 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \end{bmatrix}}_u. \quad (18)$$

### C. Resultados del modelo conmutado y fundamental

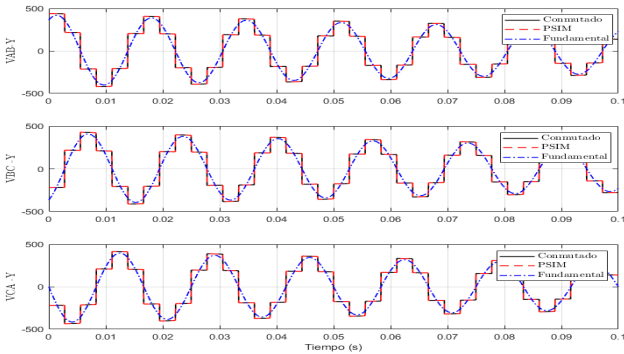


Fig. 2. Tensiones de Línea a Línea del Lado de la Estrella: Modelo Conmutado y de Frecuencia Fundamental

### V. MODELO UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE PARK

Para eliminar la variación senoidal en los coeficientes y obtener un sistema LTI, se lleva a un marco de referencia  $dq0$  que rota a velocidad angular  $\omega$  constante. La matriz de transformación  $abc \rightarrow dq0$  es:

$$T(\theta) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 120^\circ) & -\sin(\theta + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\theta(t) = \omega t.$$

Las nuevas variables en el marco de referencia  $dq0$  son:

$$\mathbf{i}_{dq0}(t) = T(\theta) \mathbf{i}_{abc}(t), \quad \mathbf{v}_{s,dq0}(t) = T(\theta) \mathbf{v}_{s,abc}(t). \quad (20)$$

Al derivar  $\mathbf{i}_{dq0} = T(\theta) \mathbf{i}_{abc}$  aparece un término adicional, esto se debe a la rotación del propio eje de referencia.

$$\frac{d\mathbf{i}_{dq0}}{dt} = T(\theta) \dot{\mathbf{i}}_{abc} + \underbrace{\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_J T(\theta) \mathbf{i}_{abc}. \quad (21)$$

Utilizando la ecuación 21, se transforma el modelo abc de frecuencia fundamental (17) a coordenadas  $dq0$  (23), donde  $T(\theta) \mathbf{K} S_1(t) = \left[ \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, -\frac{6}{\pi} \right]^T$ . Para diseñar un lazo de control de tensión en el lado del bus de DC se necesita introducir una variable de control que sea capaz de mover la dinámica del sistema, se introduce el ciclo de trabajo  $m = \sin(\frac{\alpha}{2})$  con  $0 \leq m \leq 1$ .

$$L_s (\dot{\mathbf{i}}_{dq0} - \omega \mathbf{J} \mathbf{i}_{dq0}) = -R_s \mathbf{i}_{dq0} - \frac{V_{dc}}{2} T(\theta) \mathbf{K} S_1(t) m + \mathbf{v}_{s,dq0}. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega i_q - \frac{m\sqrt{3}}{\pi L_s} V_{dc} + \frac{v_{sd}}{L_s}, \\ \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega i_d + \frac{3m}{\pi L_s} V_{dc} + \frac{v_{sq}}{L_s}, \\ \dot{v}_{dc} &= \frac{3m}{2\pi C} (\sqrt{3} i_d - 3 i_q). \end{aligned} \quad (23)$$

Se puede observar que existe un producto entre estados y entrada, el sistema bilineal se puede representar de la forma  $\dot{x} = A_0 x + B u + m G x$ . Para validar el modelo de la ecuación 23 se asigna  $m = 1$  y se realiza su transformada inversa para obtener las corrientes abc y la corriente del capacitor mediante  $i_{dc}(t) = 3 v_d(t) i_d(t) / 2 v_{dc}(t)$ , esta ecuación relaciona las corrientes y voltajes del eje directo validando el modelo como se muestra en las figuras 3 y 4.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_d(t) \\ \dot{i}_q(t) \\ \dot{v}_{dc}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & \omega & 0 \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \\ v_{dc}(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_{sd}(t) \\ v_{sq}(t) \end{bmatrix}}_u + m \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\pi L_s} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\pi L_s} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2\pi C} & -\frac{9}{2\pi C} & 0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \\ v_{dc}(t) \end{bmatrix}}_x. \quad (24)$$

### VI. MODELO LINEALIZADO

Mediante el método de pequeña señal se linealiza el sistema de la ecuación 24. Obteniendo los términos de primer orden:

$$\frac{\Delta v_{dc}(s)}{\Delta m(s)} = \frac{\frac{3}{2\pi C_{cap}} (\sqrt{3}\bar{i}_d - 3\bar{i}_q) s^2 + \left[ \frac{3(\sqrt{3}\bar{i}_d - 3\bar{i}_q)}{\pi C_{cap}} \left( \frac{R_s}{L_s} \right) - \frac{18\bar{m}\bar{V}_{dc}}{\pi^2 C_{cap} L_s} \right] s + \left[ \frac{3(\sqrt{3}\bar{i}_d - 3\bar{i}_q)}{2\pi C_{cap}} \left( \left( \frac{R_s}{L_s} \right)^2 + \omega^2 \right) - \frac{18\bar{m}\bar{V}_{dc} R_s}{\pi^2 C_{cap} L_s^2} \right]}{s^3 + 2\frac{R_s}{L_s} s^2 + \left( \left( \frac{R_s}{L_s} \right)^2 + \omega^2 + \frac{18\bar{m}^2}{\pi^2 L_s C_{cap}} \right) s + \frac{18\bar{m}^2 R_s}{\pi^2 L_s^2 C_{cap}}} \quad (25)$$

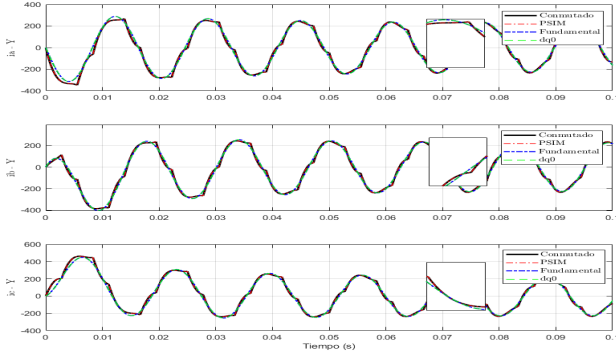


Fig. 3. Corrientes de Fase del Lado de la Estrella: Modelo Conmutado, de Frecuencia Fundamental y Utilizando la Transformada de Park.

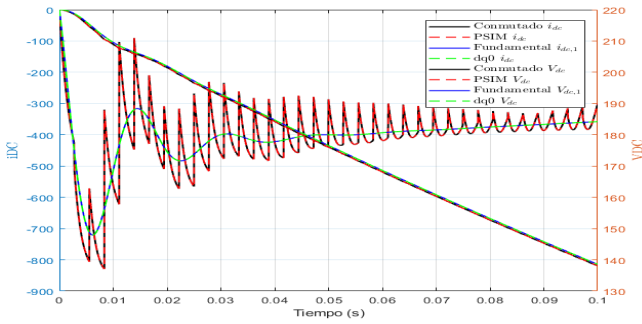


Fig. 4. Corriente y Voltaje del Condensador del Inversor: Modelo Conmutado, de Frecuencia Fundamental y Utilizando la Transformada de Park.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \dot{i}_d(t) \\ \delta \dot{i}_q(t) \\ \delta \dot{v}_{dc}(t) \end{bmatrix}}_{\delta \dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & \omega & -\frac{\sqrt{3}}{\pi L_s} \bar{m} \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & \frac{3}{\pi L_s} \bar{m} \\ \frac{3\bar{m}\sqrt{3}}{2\pi C} & -\frac{9\bar{m}}{2\pi C} & 0 \end{bmatrix}}_{A_{lin}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta i_d(t) \\ \delta i_q(t) \\ \delta v_{dc}(t) \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\pi L_s} \bar{V}_{dc} \\ 0 & \frac{1}{L_s} & \frac{3}{\pi L_s} \bar{V}_{dc} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\pi C} (\sqrt{3}\bar{i}_d - 3\bar{i}_q) \end{bmatrix}}_{B_{lin}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_{sd}(t) \\ \delta v_{sq}(t) \\ \delta m(t) \end{bmatrix}}_{\delta u} \quad (26)$$

El punto de equilibrio del inversor, es decir, cuando  $\dot{x} = Ax + Bu = 0$  es  $\bar{i}_d = -779$  A,  $\bar{i}_q = -450$  A,  $\bar{V}_{dc} = -166$  V. Un bus de DC negativo no es posible en un inversor funcionando como fuente de voltaje, esto nos indica que la combinación específica de parámetros del sistema y el punto de operación definido  $m = 1$  no tiene un punto de equilibrio físicamente admisible. Para continuar con el análisis se supondrá que el inversor de alguna manera se encuentra funcionando en ese punto de operación.

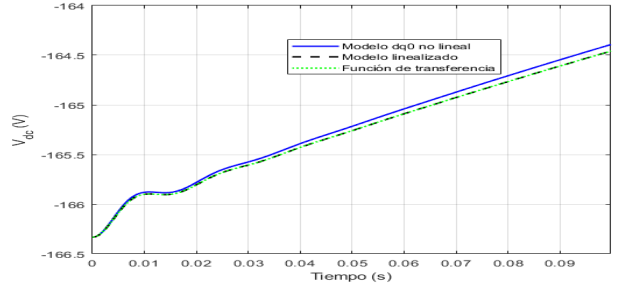


Fig. 5. Respuesta al Escalón Utilizando una Perturbación del 5% ( $m = 0.05$ ).

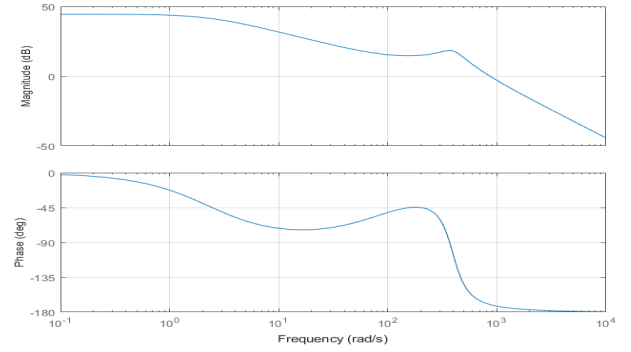


Fig. 6. Diagrama de Respuesta a la Frecuencia (Bode) de la Función de Transferencia.

## VII. CONCLUSIONES

A partir del análisis de la función de transferencia (Eq. 25) se puede identificar ciertas características de la dinámica del inversor que se presentan al intentar modificar el voltaje  $v_{dc}(t)$  con el índice de modulación  $m$  que se introdujo en la ecuación 23. Los polos  $(-0.9883 \pm 3.8150i, -0.0235) \times 10^{12}$  y el root locus de la función de transferencia muestran un par de polos complejos conjugados y un polo real en el semiplano izquierdo. Los ceros son  $(-1.3971 \pm -0.0000) \times 10^{18}$ .

En el diagrama de Bode de la Fig. 6 se muestra una alta ganancia en baja frecuencia la cual es favorable para la regulación de  $v_{dc}(t)$ . Se observa un pico de resonancia a aproximadamente 60Hz, esto representa un desafío de control por estar a la misma frecuencia que la red. Un desbalance en la red de AC inyecta una perturbación en la dinámica de  $v_{dc}(t)$ . El lazo de control al reaccionar a esta perturbación mediante un ajuste en  $m$ , puede excitar la resonancia en  $\frac{\Delta v_{dc}(s)}{\Delta m(s)}$  y amplificar la oscilación. El controlador debe de incorporar estrategias para mitigar la resonancia y asegurar la estabilidad del inversor.

## REFERENCIAS

- [1] M. H. Rashid, *Electronica de Potencia - Circuitos, dispositivos y aplicaciones*. Prentice Hall, 1999.