Amplificateurs de probabilités

Pour un sport à deux joueurs, on étudie deux règles de départage les deux opposants A et B.

On suppose que :
- le jeu se dispute par manches indépendantes les unes des autres.
- chacune est remportée par l'un avec probabilités :

vainqueur	A	B
probabilité	p	q

(avec $p+q=1$)

1 Un score fixé à atteindre

1.1 Cas général

D'abord, on déclare victorieux le premier joueur à avoir remporté $k \in \mathbb{N}^*$ manches « en tout ».

1. À partir de combien de manches jouées est-on sûr de pouvoir départager les deux joueurs ?

On suppose que les joueurs décident de jouer ces $2k-1$ parties de toutes façons.

(quitte à ce que les dernières manches n'aient aucune chance de changer le résultat du match)

Le nombre de sets remportés par le joueur A est modélisé par la variable aléatoire N.

2. Montrer que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m,r)$ pour deux paramètres m, r à préciser.

3. Rappeler :
- les valeurs possibles $N(\Omega)$ et les probabilités associées
- l'espérance $\mathbb{E}[N]$ et la variance $\mathrm{Var}(N)$.

1.2 Cas général

On choisit maintenant $k=2$: il faut remporter deux manches en tout pour remporter le match.

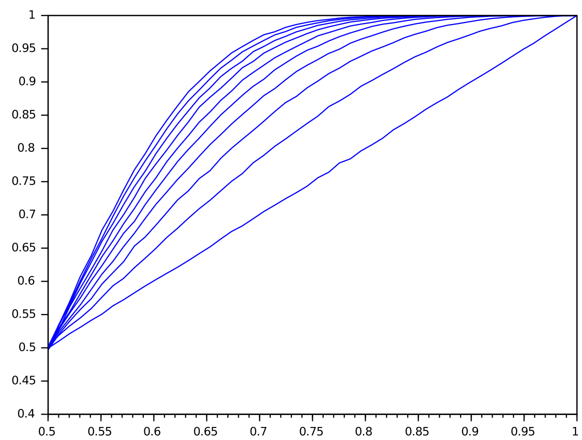
4. **a)** Expliciter alors la loi binomiale $\mathcal{B}(m,r)$ suivie.

b) En déduire la probabilité $f_1(p) = \mathbb{P}(N \geqslant 2)$.
On montrera l'expression : $f_1(p) = 3 \cdot p^2 - 2 \cdot p^3$.

5. Montrer les propriétés :
- $\forall p \geqslant \frac{1}{2}, \quad f_1(p) \geqslant p,$
- $\forall p \in]0;1[, \quad f_1(1-p) = 1 - f(p),$
- $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$
- f_1 croissante.

1.3 Simulation avec Scilab

```
1  ECHANTILLON=10^5
2  t=linspace(.5,1,50)
3  for k=1:10
4      f=[]
5      for p=t
6          x=grand(1,ECHANTILLON,"bin",2*k-1,p)
7          probaEmpirique=mean((x>=k)*1)
8          f=[f,probaEmpirique]
9      end
10     plot(t,f)
11 end
```



6. Commenter les lignes 2 et 6 : quelles sont les valeurs prises par `p` dans la boucle `for` ?

a) À quelles valeurs de `k` correspondent les courbes obtenues ?

b) À quelle valeur de `k` la courbe formée d'un segment correspond-elle ?

c) Quel profil de courbe obtiendrait-on si on prenait une valeur élevée pour `k` ?

2 Deux manches d'affilée

On nomme maintenant vainqueur le premier à gagner deux manches successivement *(« d'affilée »)*.
On considère donc l'événement : D_A = « le joueur A remporte le match »
= « A est le premier à gagner deux manches d'affilée »

2.1 Conditionnement par le premier tirage

Dans cette partie, on suppose que le premier set a été remporté par le joueur A. *(soit l'événement A_1)*
On calcule la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}_{A_1}(D_A)$

- ▸ **Séquence 1** AA
- ▸ **Séquence 2** ABB
- ▸ **Séquence 3** $ABAA$
- ▸ **Séquence 4** $ABABB$

7. Pour chacune des séquences ci-contre, donner le gagnant

8. On note T le rang d'apparition de la première répétition.

a) Pour chacune des séquences, donner la valeur de T.

b) À quelle condition sur T le joueur A remporte-t-il la partie ?

c) Justifier les probabilités ci-contre :

$k=$	2	4	6
$\mathbb{P}_{A_1}(T=k)=$	p	qp^2	$qpqp^2$

Proposer, en fonction de l'entier $n \geqslant 1$, l'expression de la probabilité : $\mathbb{P}_{A_1}(T=2n)$.

9. **a)** Montrer la convergence et donner la somme de la série $S = 1 + pq + (pq)^2 + (pq)^3 + \dots$

b) En déduire que : $\mathbb{P}_{A_1}(D_A) = \frac{p}{1-pq}$.

2.2 Conclusion

10. **a)** Justifier : $\mathbb{P}_{B_1}(D_A) = 1 - \frac{q}{1-pq}$.

b) Par la formule des probabilités totales, en déduire : $\mathbb{P}(D_A) = \frac{(1+q)\cdot p^2}{1-pq}$.

11. Vérifier, pour $f_2(p) = \mathbb{P}(D_A)$, les quatre hypothèses de la question **5.**

3 Un certain nombre de jeux d'avance

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
On déclare maintenant victorieux le premier joueur à avoir une avance de n manches remportées.

3.1 Modélisation

On note a_i la probabilité *(conditionnelle!)* que le joueur A remporte le match *(arrive à n manches d'avance)* lorsqu'il a i points d'avance. *(...sachant que...)*

Plus précisément :

Soit X_k (resp. Y_k) le score, k manches après le début du match, en nombre de manches, de A (resp. B).
Alors pour n'importe quelle valeur de $k \in \mathbb{N}$ avant la fin du match, on a : $a_i = \mathbb{P}_{[X_k=Y_k+i]}(A \text{ gagne le match})$

12. Justifier :
- ▸ $a_n = 1$ et $a_{-n} = 0$,
- ▸ a_0 est la probabilité absolue que le joueur A remporte le match.

13. Par la formule des probabilités totales lorsque le score est i, montrer : $a_i = p \cdot a_{i+1} + q \cdot a_{i-1}$.

3.2 Résolution

14. Vérifier que l'on peut écrire $p \cdot (a_{i+1} - a_i) = q \cdot (a_i - a_{i-1})$.
En déduire que les $(a_i - a_{i-1})_{i \in [\![-n+1,n]\!]}$ forment une progression géométrique.

15. **a)** Par sommation télescopique, justifier : $\sum\limits_{i=k}^{\ell}(a_i - a_{i-1}) = a_\ell - a_{k-1}$.

b) En déduire que :
- $\sum\limits_{i=-n+1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = 1$,
- $\sum\limits_{i=-n+1}^{0}(a_i - a_{i-1}) = a_0$.

16. Grâce aux questions **14.** et **15.b)**, montrer : $a_{-n+1} \cdot \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2n}}{1-\frac{q}{p}} = 1$.

17. En déduire que : $a_0 = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2n}}$ puis montrer : $a_0 = p^n \cdot \dfrac{q^n - p^n}{q^{2n}-p^{2n}}$.

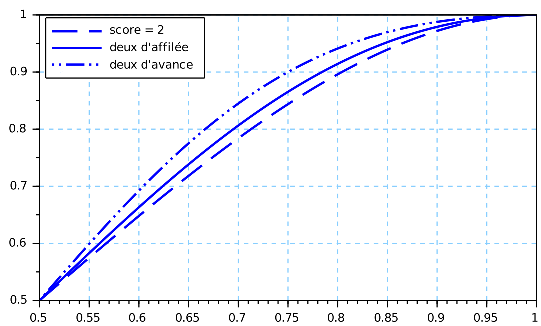
18. **a)** Simplifier l'expression de a_0 pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

b) Que se passe-t-il si $q = p = \frac{1}{2}$?

4 Comparaison des trois approches

```
2  function y=score_de_Deux(p)
3    y = 3*p^2 - 2*p^3
4  endfunction
5
6  function y=deux_d_affilee(p)
7    q = 1-p
8    y = ___
9  endfunction
10
11 function y=deux_d_avance(p)
12   q = 1-p
13   y = p^2 / (p^3+p^2*q+p*q^2+q^3)
14 endfunction
```

```
20 p = linspace(.5,1)
21 plot(p,score_de_Deux,'--')
22 plot(p,deux_d_affilee)
23 plot(p,deux_d_avance,':')
```



19. Compléter *(ligne 8)* la fonction `deux_d_affilee` selon le modèle des deux autres.

20. Si le joueur A a 3 chances sur 4 de gagner chaque manche, quelle est la probabilité qu'il gagne le match, sous la modalité « deux d'affilée » ?

21. Quelle méthode parmi les trois illustrées semble le mieux départager les joueurs ?

22. Quel est l'*(énorme!)* avantage **pratique** de la méthode « score fixé à atteindre » sur les deux autres ?