Carrés magiques, d'après HEC 2014

1 Notations

- **Espace des matrices**
  On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
- **Base canonique**
  On rappelle que la base canonique, notée $\mathcal{B}$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est formée des 9 matrices $(E_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,3]\!] \\ j\in[\![1,3]\!]}}$,
  où :
  - tous les coefficients la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont nuls,
  - sauf pour un coefficient 1, à l'intersection des $i^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne.

  (on a $E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$, p. ex^{le}.)
- **Sommes** Pour toute matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note :

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}\ , \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j}\ , \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \qquad \textit{(somme des coefficients des lignes)}$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}\ , \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}\ , \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \qquad \textit{(somme des coefficients des colonnes)}$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}\ , \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}, \qquad \textit{(somme des coefficients des diagonales)}$$

2 Objectif et notations

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

a) Calculer la valeur de s_7 sur chacune des 9 matrices de la base canonique : $(E_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,3]\!] \\ j\in[\![1,3]\!]}}$.
Parmi celles-ci, lesquelles appartiennent à $\mathcal{E}$? *(il y en a 6 sur les 9)*

b) Pour que $A(a) = \begin{bmatrix} a&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$ et $B(b) = \begin{bmatrix} b&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$ soient dans $\mathcal{E}$, combien doivent valoir a et de b?

c) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d) En s'aidant des questions **1.a)** et **1.b)**, construire une base de $\mathcal{E}$.
(Cette base sera formée de 8 matrices.)

On étudie l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^8$, qui à toute matrice A, fait correspondre le vecteur : $f(A) = \left(s_k(A)\right)_{k\in[\![1,8]\!]}$. *(ainsi, on a : $f(A) = \begin{bmatrix} s_1(A)\\s_2(A)\\s_3(A)\\s_4(A)\\s_5(A)\\s_6(A)\\s_7(A)\\s_8(A) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8$.)*

2. **a)** Montrer que l'application f est linéaire.

b) Calculer, pour
- les 9 matrices $(E_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,3]\!] \\ j\in[\![1,3]\!]}}$
- les 8 valeurs $s_k(E_{i,j})$, avec $k \in [\![1,8]\!]$.

On donnera le résultat sous la forme du tableau ci-contre.

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} & E_{12} & E_{22} & E_{32} & E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{matrix} \\
\begin{matrix} s_1(\cdot)\\s_2(\cdot)\\s_3(\cdot)\\s_4(\cdot)\\s_5(\cdot)\\s_6(\cdot)\\s_7(\cdot)\\s_8(\cdot) \end{matrix} & \begin{bmatrix}
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\
\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots
\end{bmatrix}
\end{array}$$

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$.

c) À la lumière de la question **2.b)**, justifier l'énoncé :
« la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est F », où

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(avec des « · » pour les « 0 »)

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)$$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de l'application linéaire f.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.
Montrer que si :
- $M \in \mathcal{G}$,
- et de plus, $s_7(M) = 0$,

alors $f(M) = 0$.

c) Montrer aussi la réciproque de l'énoncé précédent.
En déduire que : $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f)$.

4. On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. *(Ainsi : $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.)*

a) Calculer $f(J)$.

Soit G une matrice quelconque telle que : $G \in \mathcal{G}$.

b) Montrer que $f(G) = s_7(G) \cdot f(J)$.

c) Pour que $G - t \cdot J$ soit dans $\mathrm{Ker}(f)$, quelle doit être la valeur de t ?

d) En déduire que toute matrice de $\mathcal{G}$ est la somme :
- d'une matrice de $\mathrm{Ker}(f)$, et
- d'une matrice de $\mathrm{Vect}(J)$.

e) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.