

Carrés magiques, d'après HEC 2014

1 Notations

► Espace des matrices

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

► Base canonique

On rappelle que la base canonique, notée \mathcal{B} , de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est formée des 9 matrices $(E_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1,3 \rrbracket}}$,
où :

- tous les coefficients la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont nuls,
- sauf pour un coefficient 1, à l'intersection des $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

(on a $E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, p. ex^{de}.)

► Sommes

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note :

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^3 a_{1,j}, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^3 a_{2,j}, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3,j} \quad (\text{somme des coefficients des lignes})$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,1}, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,2}, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,3} \quad (\text{somme des coefficients des colonnes})$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i}, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,4-i}, \quad (\text{somme des coefficients des diagonales})$$

On s'intéresse aux « carrés magiques », dont la somme

- sur chaque ligne,
- sur chaque colonne,
- sur chacune des deux diagonales,

des coefficients vaut **toujours** 0.

2 Énoncé du problème

1. Soit \mathcal{E} l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

a) Calculer la valeur de s_7 sur chacune des 9 matrices de la base canonique : $(E_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1,3 \rrbracket}}$.
Parmi celles-ci, lesquelles appartiennent à \mathcal{E} ? (il y en a 6 sur les 9)

b) Pour que $A(a) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ soient dans \mathcal{E} , combien doivent valoir a et de b ?

c) Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d) En s'aidant des questions 1.a) et 1.b), construire une base de \mathcal{E} .

(Cette base sera formée de 8 matrices.)

On étudie l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^8$, qui à toute matrice A ,
fait correspondre le vecteur : $f(A) = (s_k(A))_{k \in \llbracket 1,8 \rrbracket}$.
(ainsi, on a : $f(A) = \begin{bmatrix} s_1(A) \\ s_2(A) \\ s_3(A) \\ s_4(A) \\ s_5(A) \\ s_6(A) \\ s_7(A) \\ s_8(A) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8$.)

2. a) Montrer que l'application f est linéaire.

b) Calculer, pour

- les 9 matrices $(E_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1,3 \rrbracket}}$
- les 8 valeurs $s_k(E_{i,j})$,
avec $k \in \llbracket 1,8 \rrbracket$.

On donnera le résultat sous la forme du tableau ci-contre.

	E_{11}	E_{21}	E_{31}	E_{12}	E_{22}	E_{32}	E_{13}	E_{23}	E_{33}
$s_1(\cdot)$
$s_2(\cdot)$
$s_3(\cdot)$
$s_4(\cdot)$
$s_5(\cdot)$
$s_6(\cdot)$
$s_7(\cdot)$
$s_8(\cdot)$

On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^8 .

c) À la lumière de la question 2.b), justifier l'énoncé :

« la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est F »,
 (avec des « · » pour les « 0 »)

$$\text{où } F = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

3. On note \mathcal{G} l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)$$

a) Montrer que \mathcal{G} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de l'application linéaire f .

b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

Montrer que si :
 ▶ $M \in \mathcal{G}$, alors $f(M) = 0$.
 ▶ et de plus, $s_7(M) = 0$,

c) Montrer aussi la réciproque de l'énoncé précédent.

En déduire que : $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker}(f)$.

4. On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. (Ainsi : $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.)

a) Calculer $f(J)$.

Soit G une matrice quelconque telle que : $G \in \mathcal{G}$.

b) Montrer que $f(G) = s_7(G) \cdot f(J)$.

c) Pour que $G - t \cdot J$ soit dans $\text{Ker}(f)$, quelle doit être la valeur de t ?

d) En déduire que toute matrice de \mathcal{G} est la somme :
 ▶ d'une matrice de $\text{Ker}(f)$, et
 ▶ d'une matrice de $\text{Vect}(J)$.

e) Trouver une base de $\text{Ker}(f)$.