Compléments : dérivation et convexité

Table des matières

1 Continuité

1.1 Définitions

(reconduction du programme de ECE 1*)*

1.2 Propriété des valeurs intermédiaires

(reconduction du programme de ECE 1*)*

1.3 Continuité et suites

Proposition 1 (*Passage à la limite*)

Soit (u_n) une suite et $f : I \to \mathbb{R}$.
On suppose que :
- $\lim(u_n) = \ell \in I$,
- la fonction f est continue en ℓ.

Alors, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

L'exemple de la limite d'Euler : On montre, pour $a \in \mathbb{R}$, la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a) = \mathrm{e}^a$.
Posons, pour $n > 0$ la suite definie par : $e_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, pour $a \in \mathbb{R}$.
Alors pour $n > -a$, on a : $e_n > 0$. Passons au logarithme : $\ln(e_n) = n \cdot \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$.
On va utiliser la forme indéterminée : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. *(taux d'accroissement du logarithme* ln.*)*
En posant $h = \frac{a}{n}$, il vient donc : $\ln(e_n) = a \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}$.
Quand $n \to \infty$, on a : $h = \frac{a}{n} \to 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(e_n) = a \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = a$.
On compose par l'exponentielle, qui est continue.
Il vient bien : $e_n = \exp\big(\underbrace{\ln(e_n)}_{\to a}\big) \to \exp(a)$.

Application : le théorème du point fixe *(Programme du chapitre suivant)*

On peut appliquer le passage à la limite au cas des suites d'itérées.
Soit une suite est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente, et si f est continue, alors : $\lim(u_{n+1}) = \lim\big(f(u_n)\big)$.
$= f\big(\lim(u_n)\big)$
La limite $\ell = \lim(u_n)$ doit donc alors vérifier : $\ell = f(\ell)$ *(équation du point fixe.)*

2 Généralités

Introduction : une remarque sur les fonctions affines

Définition 2 (*Fonctions affines*)

Une **fonction affine** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrivant, pour $x \in \mathbb{R}$, comme : $f(x) = ax + b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Interprétation graphique

Le graphe de la fonction f est alors une droite $\mathcal{D}$ *(qui n'est pas verticale)*
Les coefficients a,b s'interprètent comme suit :
- a : le coefficient directeur de $\mathcal{D}$,
- b : son ordonnée à l'origine : $b = f(0)$.

Le coefficient directeur a s'obtient aussi comme le **taux d'accroissement** : $a = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, pour x_0, x_1 quelconques, avec $x_0 \neq x_1$.

Changement de point

On peut aussi écrire l'équation de droite comme : $y = a' \cdot (x - x_0) + b'$
avec les nouveaux coefficients : $\begin{cases} a' = a \\ b' = b + ax_0 = f(x_0) \end{cases}$

2.1 Définitions

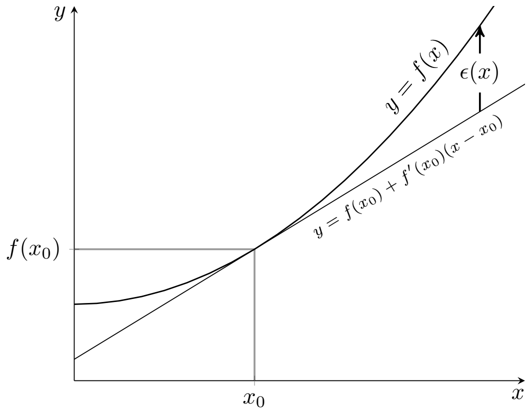
Définition 3 (*Dérivabilité, nombre dérivé*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$.

- On dit que f est **dérivable** en x_0 si, pour $x \to x_0$, on peut écrire **l'approximation** :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$
pour $a \in \mathbb{R}$ une constante.

- La droite d'équation $y = f(x_0) + a(x - x_0)$ est alors la **tangente** au graphe de f en x_0.
- Son coefficient directeur est noté $a = f'(x_0)$, le **nombre dérivé** de f en x_0,



avec $\epsilon(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right]$

En réécrivant, pour $x \to x_0$, la formule : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$

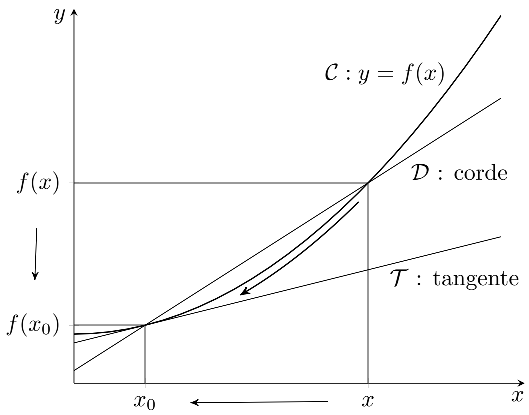
comme : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}_{=o(1)\longrightarrow 0}$,

on retrouve la formulation familière :

Proposition 4 (*Limite du taux d'accroissement*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$.
Alors f est **dérivable** en x_0 *ssi* : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *(le taux d'accroissement)* a une **limite** pour $x \to x_0$.
Si c'est le cas, alors le nombre dérivé vérifie :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



(La corde s'approche de la tangente)

Définition 5 (*Fonction dérivée*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- On dit que f est **dérivable sur l'intervalle** I si f est dérivable en tout point $\forall x_0 \in I$.
- La **fonction dérivée** $x \mapsto f'(x)$ est alors bien définie sur I.

Exemples : dérivation de puissances :

- **La fonction carré** $f(x) = x^2$.

  On pose $x = x_0 + h$, et alors $x \to x_0 \Longleftrightarrow h \to 0$. On trouve alors :

$$f(x) = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = \underbrace{x_0^2 + 2x_0\, h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{h^2}_{=o(h)}$$

  Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 2x_0$ *(soit $\left(x^2\right)' = 2x$).*

- **La fonction cube** $f(x) = x^3$.

  On trouve alors : $f(x) = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 = \underbrace{x_0^3 + 3x_0^2\, h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{=o(h)}$.

  Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 3x_0^2$ *(soit $\left(x^3\right)' = 3x^2$).*

- **La fonction inverse** $f(x) = \frac{1}{x}$. *(un peu plus subtil!)*

  Pour se donner des idées, on commence par calculer le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x_0 x}}{x - x_0} = \frac{-1}{x_0 x},$$

  soit la formule : $f(x) = f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_0} \times f(x)$ ou $f(x_0 + h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0 + h)$.

  Par suite il vient $f(x_0 + h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0}\left[f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0 + h)\right]$ soit :

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) - f(x_0)\frac{h}{x_0}}_{\text{affine en } h} + \underbrace{f(x_0 + h)\frac{h^2}{x_0^2}}_{=o(h)}.$$

2.2 L'inégalité des accroissements finis

Proposition 6 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On suppose f dérivable sur $]a;b[$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}$.

   Supposons que la **dérivée** f' est **majorée** par M : si $\forall x \in]a;b[, \quad f'(x) \leqslant M$,

   alors le **taux** d'accroissement $\tau_{a,b} f$ **l'est aussi** : alors $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

2. Soit $k \geqslant 0$.

   Supposons que la **dérivée** f' est **bornée** par k : si $\forall x \in]a;b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$,

   alors le **taux** d'accroissement $\tau_{a,b} f$ **l'est aussi** : alors $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant k$.

Résumé de la proposition :
Le taux d'accroissement est la valeur moyenne de la dérivée : $\overbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}^{\text{taux d'accroissement de } f} = \underbrace{\frac{1}{x_1-x_0}\cdot\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{valeur moyenne de } f'}$

Ainsi, si la dérivée vérifie une certaine inégalité **sur tout l'intervalle** I, alors les taux d'accroissement satisfont « la même inégalité ».
En particulier, l'énoncé **1.** s'étend *mutatis mutandis* pour

- une minoration $m \leqslant f'(x)$ *(on retourne l'inégalité pour le taux d'accroissement),*
- un encadrement $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ *($\rightsquigarrow$ un encadrement du taux d'accroissement),*
- des inégalités strictes $m < f'(x)$ ou $f'(x) < M$. *($\rightsquigarrow$ inégalité stricte sur le taux d'accroissement).*

Remarque sur la portée du résultat

Par définition, la dérivée **s'obtient à partir du** taux d'accroissement *(par passage à la limite)*.
L'inégalité des accroissements finis nous permet de faire **le trajet en sens inverse** :

partant d'informations sur la dérivée, **on conclut sur** le taux d'accroissement.

Démonstration ***(Si f est $\mathcal{C}^1$)*** **:** Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ *(au lieu de « seulement dérivable »).*
Alors la dérivée f' est continue et on peut l'intégrer sur le segment $[x_0\,;x_1]$.
Il vient : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_{x_0}^{x_1} = f(x_1)-f(x_0)$.
Si on a $\forall t\in I, f'(t)\leqslant M$, alors : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_1} M\,\mathrm{d}t = M\cdot(x_1-x_0)$. *(on rappelle que $x_0 \leqslant x_1$!)*
Il vient donc bien alors : $f(x_1)-f(x_0) \leqslant M(x_1-x_0)$. ∎

Proposition 7 (*Sens de variations*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable.

1. La fonction f est **croissante** *ssi* $f' \geqslant 0$ sur I.
2. Si $f' > 0$ sur I, alors la fonction f est **strictement croissante**.

2.3 Règles de dérivation

(reconduction du programme de ECE 1*)*

3 Convexité

3.1 Définition

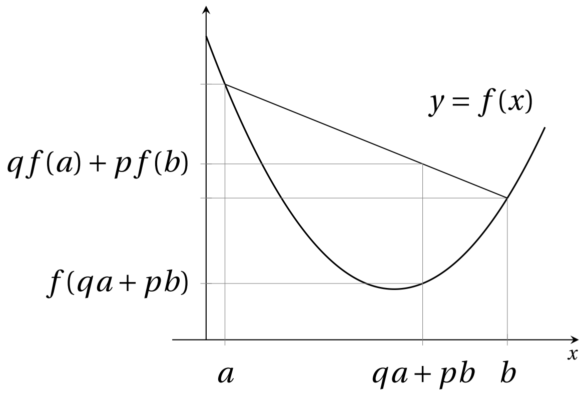
Définition 8 (*Fonction convexe sur un intervalle*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que f est **convexe** sur I si pour tous
- $a, b \in I$, et
- $p, q \in \,]0\,;1[$, avec $p+q=1$,

on a l'inégalité : $\underbrace{f(qa+pb)}_{\substack{\text{image de}\\ \text{la moyenne}}} \leqslant \underbrace{qf(a)+pf(b)}_{\substack{\text{moyenne}\\ \text{des images}}}$

Interprétation graphique par les cordes

La **corde** de la fonction entre deux abscisses $a,b \in I$ est le **segment** joignant les points du **graphe** à ces abscisses.
Une fonction est **convexe** si son **graphe** est **en dessous** de ses cordes.



Exemple : Convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0;1[$, avec $p+q=1$.

On trouve : $\quad q \cdot f(a) + p \cdot f(b) - f(qa+pb) = q \cdot a^2 + p \cdot b^2 - (qa+pb)^2$

$$= (q-q^2)\cdot a^2 + (p-p^2)\cdot \cdot b^2 - 2pq \cdot ab$$

$$= pq \cdot (a^2 - 2ab + b^2).$$

Ainsi : $\quad q\cdot f(a) + p \cdot f(b) = f(qa+pb) + pq\cdot(a-b)^2.$

On obtient bien l'inégalité de convexité pour f, soit : $\quad q \cdot f(a) + p \cdot f(b) \geqslant f(qa+pb).$

Remarques *(pour f une fonction convexe)*

- Notamment pour $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient : $\quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$
- **Généralisation**

  Si on a davantage de coefficients $p_1, p_2, ..., p_n$, avec
  - $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad p_i \geqslant 0,$
  - $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *(=100%)*,

  on a aussi, pour toute suite $(a_i) \in I^n$, l'inégalité : $\quad f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(a_i).$

3.2 Convexité et dérivation

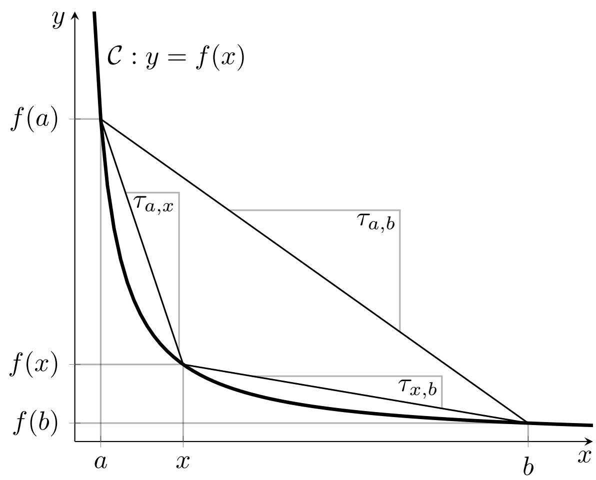
Avec des taux d'accroissements

On écrit ici : $x = qa+pb$, et on a donc : $x-a = p(b-a)$. et $b - x = q(b-a)$.
L'inégalité de convexité $f(qa+pb) \leqslant qf(a)+pf(b)$ s'écrit :

$$f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

On regroupe avec la formule $\quad \dfrac{b-x}{b-a} + \dfrac{x-a}{b-a} = 1,$
et on obtient les deux reformulations suivantes pour cette inégalité : $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x},$

ou encore $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



(On note ici $\tau_{a,b}$ le taux d'accroissements de f entre a et b, et idem pour $\tau_{a,x}$, $\tau_{x,b}$.)

Convexité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:
Soient $a, x, b \in]0;+\infty[$ avec $a < x < b$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est : $\tau_{a,b} = \dfrac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b-a} = \dfrac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \dfrac{-1}{ab}$.
De même : $\tau_{a,x} = \frac{-1}{ax}$, et $\tau_{x,b} = \frac{-1}{xb}$.
Comme $0 < a < x < b$, on a bien $\frac{-1}{ax} \leqslant \frac{-1}{xb} \leqslant \frac{-1}{xb}$, soit $\tau_{a,x} \leqslant \tau_{a,b} \leqslant \tau_{x,b}$.
Ainsi f est bien convexe sur $]0;+\infty[$.

Proposition 9 (*Croissance de la dérivée*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Alors f est convexe sur I *ssi* sa dérivée f' est croissante sur I.
- Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe *ssi* f'' est positive ($\geqslant 0$) sur I.

Démonstration ***(hors-progamme, et que l'on peut omettre)*** **:**

- **f convexe $\Longrightarrow$ f' croissante** On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe.
  Montrons que si $a, b \in I$ vérifient $a \leqslant b$, alors $f'(a) \leqslant f'(b)$.
  D'après la Remarque 3.1, pour $x \in]a;b[$, on a :
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, et
  - $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

  On passe à la limite pour $x \to b$ et $x \to a$ respectivement. Il vient :
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$
  - $f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

  Ainsi on a bien : $f'(a) \leqslant f'(b)$, et f' est croissante.
- **f' croissante $\Longrightarrow$ f convexe** On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et f' croissante.
  Soient $a \leqslant b \in I$, et $x \in]a;b[$.
  Par les accroissements finis, et la croissance de f', on a :
  - $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geqslant f'(x)$ et
  - $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(x)$.

  Ainsi : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
  Or le taux d'accroissement $\tau_{a,b}$ s'écrit comme une moyenne de $\tau_{a,x}$ et $\tau_{x,b}$:
  $$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\tau_{a,b}} = \underbrace{\frac{x-a}{b-a}}_{q} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\tau_{a,x}} + \underbrace{\frac{b-x}{b-a}}_{p} \cdot \underbrace{\frac{f(b)-f(x)}{b-x}}_{\tau_{x,b}}.$$
  On a donc bien : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
  La fonction f est donc convexe par la Remarque 3.1. ■

Proposition 10 (*Caractérisation par les tangentes*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Alors f est convexe
- *ssi* le graphe de f est au-dessus de ses tangentes,
- c'est-à-dire *ssi* $\forall a, x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$.

Démonstration : On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a donc $f''(t) \geqslant 0$ pour $t \in I$.
On va écrire $f(x)$ en faisant apparaître une intégrale avec $f''(t)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a) + \Big[(t-x)f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

où l'on a fait l'intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = f'(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = f''(t) \\ v(t) = t - x. \end{cases}$

Ainsi : $\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\int_a^x (x-t) f''(t)\, \mathrm{d}t}_{\geqslant 0}$, d'où $\quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$.

■

3.3 Exemples d'application

Exercice 1 (*Une estimée de la queue Gaussienne*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est concave.
2. En déduire que pour $a, x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad -\frac{x^2}{2} \leqslant -\frac{a^2}{2} - a \cdot (x-a)$.
3. En déduire, pour $a > 0$, l'inégalité : $\quad \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \cdot \frac{1}{a}$.

Exercice 2 (*Inflexions de la Gaussienne*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où $\alpha > 0$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Faire l'étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Faire l'étude de la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, où sont le max, et les inflexions de $g : x \mapsto \alpha \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$?

*(**réponse :** maximum : en μ, inflexion : en $\mu \pm \sigma$)*

Exercice 3 (*Moyenne harmonique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\quad \frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

On rappelle, pour $a, b > 0$, la définition de :
- la moyenne harmonique : $\quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$,
- la moyenne arithmétique : $\quad A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.

3. Montrer, pour $a, b > 0$, que : $\quad H(a,b) \leqslant A(a,b)$. $\quad$ Déterminer les cas d'égalité.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a : $\quad a < H(a,b) < b$.

Exercice 4 (*Moyenne géométrique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\frac{1}{2}\left[\ln(a) + \ln(b)\right] \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
3. Conclure que la moyenne harmonique $G(a,b) = \sqrt{ab}$ est majorée par la moyenne arithmétique $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a $a < G(a,b) < b$.

Exercice 5 (*Relation entre les trois moyennes*)

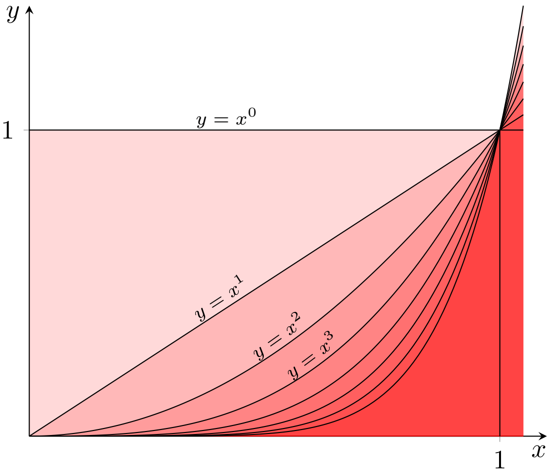
Pour deux réels $a, b > 0$, on définit :
- leur moyenne **arithmétique** par : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
- leur moyenne **harmonique** par : $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$
- leur moyenne **géométrique** par : $G(a,b) = \sqrt{ab}$.

1. Calculer le produit $A(a,b) \times H(a,b)$.
2. En déduire la moyenne géométrique de $A(a,b)$ et de $H(a,b)$.
3. En déduire l'encadrement $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$.

4 Développements limités à l'ordre 2

4.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Pour $n > 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$.
La vitesse de cette convergence dépend de n.
La tendance $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ est d'autant plus rapide que l'exposant n est élevé.
Plus précisément, si $n > m$, alors, on a : $x^n = o\big(x^n\big)$



Définition 11 (*Développement limité à l'ordre 2*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Un **développement limité** à l'ordre 2 en $x_0 \in I$ s'écrit, pour $x \to x_0$:

$$f(x) = \underbrace{a + b\cdot(x-x_0) + c\cdot(x-x_0)^2}_{\text{partie principale : un trinôme}} + \underbrace{o\big((x-x_0)^2\big)}_{\text{terme d'erreur}}.$$

Proposition 12 (*Unicité*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et $x_0 \in I$.
Si f admet un développement limité en x_0, celui-ci est unique.
En d'autres termes, si l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= a + b\cdot(x-x_0) + c\cdot(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big), \\ &= a' + b'\cdot(x-x_0) + c\cdot'(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big) \end{aligned}$$

pour $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, alors on a nécessairement : $\begin{cases} a = a'. \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

4.2 La formule de Taylor à l'ordre 2

Développements limités à l'ordre 1 *(On s'intéresse, comme dans la suite, à l'étude en 0.)*

On a l'approximation de $f(x)$ pour $x \to 0$, par une fonction affine, grâce à la dérivée :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\cdot x}_{\text{fonction affine}} + \underbrace{o(x)}_{\text{terme d'erreur}}.$$

Pour une fonction **affine** $f(x) = ax + b$, cette formule est **exacte**.
En effet le terme d'erreur est alors nul, car on a : $\begin{cases} f(0) = b, \\ f'(0) = a. \end{cases}$

Recherche d'un analogue pour un polynôme de degré 2

Pour une fonction donnée par : $f(x) = ax^2 + bx + c$,
on a : $f'(x) = 2ax + b$,
et : $f''(x) = 2a$.

En prenant $x = 0$, on trouve ainsi l'expression des coefficients : $\begin{cases} c = f(0), \\ b = f'(0). \\ a = \frac{f''(0)}{2}. \end{cases}$

Pour f fonction polynomiale de degré 2, on a obtenu : $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$.

En général, la formule ci-dessus persiste, à un terme d'erreur près :

Proposition 13 (*Formule de Taylor à l'ordre 2*)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors $x \to x_0$, et $h \to 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + o\,(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + o(h^2)$$

4.3 Cas à connaître

e^x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a,\ a \in \mathbb{R}$
$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$

Pour la fonction exponentielle

Proposition 14 (*Développement limité de* exp)

Pour $x \to 0$

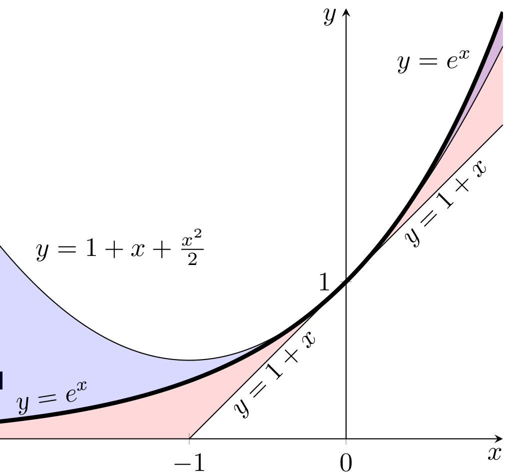
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Démonstration :

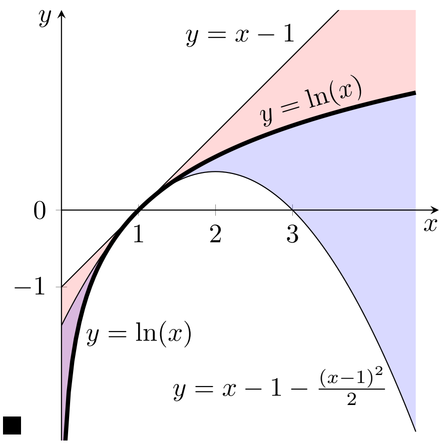
Pour la fonction $\exp : x \mapsto e^x$, on a : $\exp'' = \exp' = \exp$.

Les valeurs en 0 sont donc : $\exp''(0) = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

Le développement limité s'ensuit de la formule de Taylor. ■



Pour la fonction logarithme



Proposition 15 (*Développement limité de* ln)

Pour $x \to 1$, on a : $\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.
Pour $h \to 0$, on a : $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

Démonstration :

On a : $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$, et $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Ainsi il vient : $\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ \ln'(1) = 1 \\ \ln''(1) = -1 \end{cases}$.

Le développement limité s'ensuit de la formule de Taylor. ■

Pour les fonctions puissances

Proposition 16 (*Dév^t limité de* $(1+x)^a$)

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors, pour $x \to 0$, on a :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} \cdot x^2 + o\left(x^2\right)$$

Démonstration :

Pour $x > 0$, notons $f(x) = (1+x)^a$.

Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour $x > 0$, on a : $f'(x) = a \cdot (1+x)^{a-1}$
$f''(x) = a(a-1) \cdot (1+x)^{a-2}$

Ainsi : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = a \\ f''(1) = a(a-1) \end{cases}$ ■

Les cas $(1+x)^a$, pour $a \in \mathbb{N}$

On développe par la formule du **binôme de Newton** :

$$(1+x)^0 = 1$$
$$(1+x)^1 = 1 + x$$
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(1+x)^4 = \underbrace{1 + 4x + 6x^2}_{\text{dev}^t\text{ lim.}_2} + \underbrace{4x^3 + x^4}_{=o(x^2)}$$

En général, de la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ on ne garde pour développement limité que les trois premiers termes, soit : $\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$.

Le cas $a = -1$ *(la fraction $\frac{1}{1+x}$)*

On peut écrire : $\frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} = 1 - x \cdot \frac{1}{1+x}$.

On réinjecte : $\frac{1}{1+x} = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right) = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right)\right)$.

On a trouvé la formule du développement limité à l'ordre 2 : $\frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2}_{\text{dev. lim}_2} - \underbrace{\frac{x^3}{1+x}}_{=o(x^2)}$.

(en itérant, on trouve $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$, etc.)

Le cas $a = \frac{1}{2}$, la racine $\sqrt{1+x}$

Pour l'exposant $a = \frac{1}{2}$, on trouve : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + o\big(x^2\big)$.

On vérifie que : $\big(1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2\big)^2 = 1 + x - \overbrace{\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{64} \cdot x^4}^{=o(x^2)}$

$= 1 + x + o(x^2)$.

Le sujet Ecricome ECE 2017 demandait d'appliquer cette formule dans un contexte matriciel.

4.4 Application aux formes indéterminées

Formes indéterminées simples

On connaît déjà le principe pour taux d'accroissement : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Il vient en particulier :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h)}{h} = 1$.
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^a-1}{h} = a$ et : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} = 1$.

Formes indéterminées doubles

Si on a un développement limité à l'ordre 2 de la forme : $f(x) = a + bx + cx^2 + o\big(x^2\big)$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \big[f(x) - a - bx\big] = c$.

Par la formule de Taylor, pour f de classe $\mathcal{C}^2$ en 0, il vient ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}$.

Il vient en particulier :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$ et : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h)-h}{h} = -\frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^a-1-ah}{h^2} = \frac{a(a-1)}{2}$ et : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^a-1-a(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{a(a-1)}{2}$.