TD 11 : Fonctions d'une variable (compléments)

1 Dérivation

1.1 Définition et développements limités

Exercice 1 (*Calculs de taux d'accroissements*)

1. Montrer que pour les fonctions suivantes, le taux d'accroissement entre a et x est donné par les formules ci-contre.
2. En faisant le passage à la limite $x \to a$, retrouver les dérivées de ces fonctions.

fonction	taux d'acc^{t}
$f_1(x) = x^2$	$a + x$
$f_2(x) = x^3$	$a^2 + ax + x^2$
$f_3(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{-1}{ax}$
$f_4(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

Exercice 2 (*Étude du taux d'accroissement de* exp)

Soit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \tau(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction τ est continue.
2. Montrer que pour $x \neq 0$, on a : $\tau'(x) = e^x \cdot \dfrac{e^{-x} - (1-x)}{x^2}$.
3. En déduire que τ est croissante.
4. a) Montrer que pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{\tau(x) - 1}{x} = \dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$.
   b) Grâce au développement limité de la fonction exp, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tau(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$.
   c) En déduire que τ est dérivable en 0.
5. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \tau'(x) = \frac{1}{2}$.
   b) En déduire que la fonction τ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Développements limités

express^{n}	dev^{nt} limité
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=}$	$h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
$\ln(x) \underset{x\to 1}{=}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)$

expression	dev^{nt} limité
$(1+x)^a =$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
$(1+x)^1 =$	$1 + x$
$(1+x)^2 =$	$1 + 2x + x^2$
$(1+x)^3 =$	$1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} =$	$1 - x + x^2 + o(x^2)$

Exercice 3 (*Applications des développements limités*)

Lever les formes indéterminées suivantes quand $t \to 0$

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \qquad B = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \qquad C = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1 + t}{t^2} \qquad D = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}t}{t^2}$$

Exercice 4 (***Applications des développements limités** (bornes du programme)*)

Lever les formes indéterminées suivantes quand $t \to 0$

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{t} \qquad B = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-2t}-1+2t}{t^2} \qquad C = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$$

$$D = \lim_{t\to 0} \frac{a(1+t)^b - b(1+t)^a + b - a}{t^2} \qquad E = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2) - t^2}{t^4}$$

Proposition 1 (***Formule de Taylor à l'ordre 2***)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors pour $x \to x_0$, et $h \to 0$: *(avec $h = x - x_0$)*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + o(h^2)$$

Exercice 5 (***Application de la formule de Taylor***)

Soit f, g les fonctions définies $\forall x \in]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, et $g(x) = 2 - \frac{4}{1+x}$.

1. Calculer la dérivée et la dérivée seconde de f et g en $x_0 = 1$.
2. En déduire que f et g admettent en 1 le dévt limité : $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)$.
3. De quelle fonction de référence reconnaît-on ici le développement limité ?

1.3 La méthode de Newton

Exercice 6 (***Méthode de Newton***)

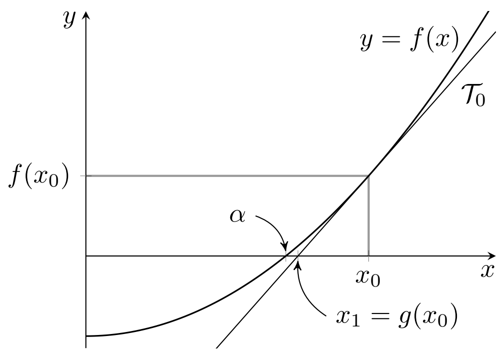
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

- f' ne s'annule pas
- f s'annule une seule fois, en α.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{T}_0$ la tangente en x_0.

1. La tangente $\mathcal{T}_0$ coupe l'axe des abscisses.
   Calculer l'abscisse $x_1 = g(x_0)$ de l'intersection.

Si $x_0 \simeq \alpha$, alors x_1 est une estimation encore meilleure.



La **méthode de Newton** définit une suite (x_n) par $\forall n \geqslant 0, x_{n+1} = g(x_n)$.

2. Trouver les points fixes de g. En déduire que si (x_n) converge, c'est vers α.
3. Quelle est la fonction g pour $f(x) = x^2 - 2$?

1.4 Études de fonctions

Exercice 7 (*Études de fonctions*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier les variations, et proposer un encadrement sur le domaine indiqué :

1. $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;+\infty[$,
2. $g_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$,
3. $h_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $[0;+\infty[$.

Exercice 8 (*Inégalités et études de fonction*)

Montrer les inégalités suivantes, et trouver les conditions d'égalité.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1+x \quad$ puis $\quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}$.
2. $\forall x > 0, \quad 1-\frac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x-1$.
3. $\forall x \geqslant 0, \quad 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$. *(Et pour $x \in [-1;0]$?)*
4. $\forall x \geqslant 0$, et $n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+x \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x$.

1.5 L'inégalité des accroissements finis

Exercice 9 (*Une suite récurrente*)

On considère la fonction $f : \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x}. \end{cases}$

1. a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
   En déduire que f est strictement croissante.
   b) Résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$, d'inconnue ℓ.
   c) Étudier le signe de $f(x)-x$, pour $x \in]0;+\infty[$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) converge.
   Préciser sa limite. *(il vient donc $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)*
3. a) Montrer que $\forall t \in [0;\ell]$, on a $f'(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
   b) En déduire que $\forall x \in [0;\ell]$, on a $\ell - f(x) \leqslant \frac{\ell - x}{2}$.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.

2 Convexité

2.1 Inégalités de convexité

Exercice 10 (*Concavité de* ln)

1. Montrer que : $\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ \frac{x-1}{\mathrm{e}-1} \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$
2. Montrer que : $3\ln(6) \geqslant \ln(4) + 2\ln(7)$. *(« En déduire » que $216 \geqslant 196$).*
3. Minorer $\ln(13)$ en fonction de $\ln(5)$ et $\ln(17)$.

Exercice 11 (*Loi normale*)

1. Montrer que pour $x \geqslant 1$, on a : $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{-x+\frac{1}{2}}$.
2. En déduire que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}} \simeq 0{,}24$.

2.2 Convexité et inflexions

Exercice 12 (*Inflexions de la Gaussienne*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où $\alpha > 0$.

1. Montrer que la fonction f est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Faire l'étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Faire l'étude de la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, où sont le max, et les inflexions de $g : x \mapsto \alpha \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$?

*(**réponse :** maximum : en μ, inflexion : en $\mu \pm \sigma$)*

Exercice 13 (*Recherche de points d'inflexion*)

Rechercher les points d'inflexion sur $]0;+\infty[$ des fonctions :

1. $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. *(**réponse :** max en 1, inflexion en 2)*
2. $g_n : x \mapsto x^n \ln(x)$. *(**réponse :** min en $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$, inflexion en $\mathrm{e}^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$)*

2.3 Moyennes

Définition 2 (*Moyennes*)

Soient $a, b > 0$. On définit leurs moyennes :

- **arithmétique** par : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
- **géométrique** par : $G(a,b) = \sqrt{ab}$.
- **harmonique** par : $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$

Exercice 14 (*Propriété de moyenne*)

Montrer que pour $a \leqslant b$, on a bien

$$a \leqslant A(a,b) \leqslant b$$
$$a \leqslant G(a,b) \leqslant b$$
$$a \leqslant H(a,b) \leqslant b$$

Exercice 15 (*Moyenne harmonique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.
3. Conclure que l'on a : $H(a,b) \leqslant A(a,b)$.

Exercice 16 (*Moyenne géométrique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\dfrac{1}{2}\big[\ln(a)+\ln(b)\big] \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.
3. Conclure que l'on a : $G(a,b) \leqslant A(a,b)$.

Exercice 17 (*Moyenne géométrique des deux autres*)

1. Calculer le produit $A(a,b) \times H(a,b)$.
2. En déduire la moyenne géométrique de $A(a,b)$ et de $H(a,b)$.
3. En déduire l'encadrement $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$.

2.4 Intégration et convexité

Exercice 18 (*Intégrale d'une fonction convexe*)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On s'intéresse à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. *(où $a < b$)*

1. a) Montrer que pour $x \in [a;b]$, on a : $f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$.

   b) En déduire que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. On suppose que f est dérivable.

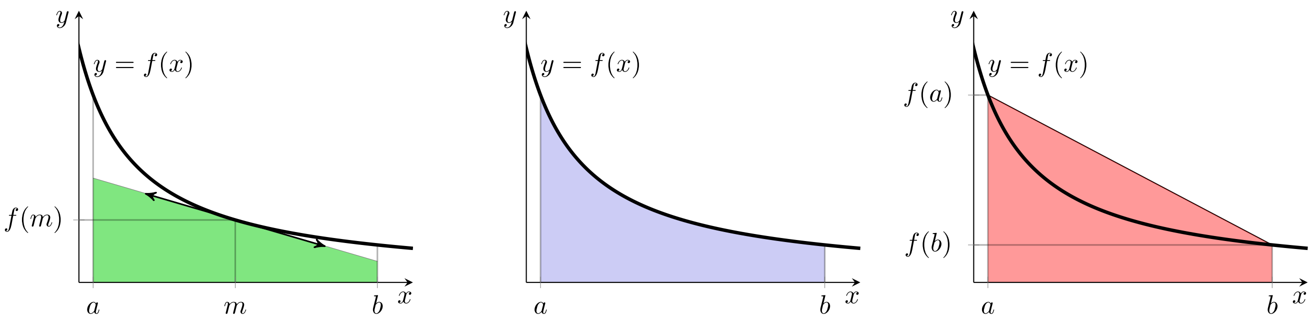
   a) Montrer pour $m \in [a;b]$, que $\forall t \in [a;b]$: $f(t) \geqslant f(m) + f'(m) \cdot (t-m)$.

   b) On pose $m = \frac{a+b}{2}$. En déduire que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (b-a) \cdot f(m)$.
3. a) Que changer pour une fonction concave ?

   b) Montrer que dans le cas où f est une fonction affine, on a égalité.

   c) Montrer que si f est un trinôme du second degré, on a : *(formule de Simpson)*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{2}{3} \cdot f(m)\right].$$



Remarque

On a donc obtenu l'encadrement valable pour toutes les fonctions convexes :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(avec l'estimation de gauche « en moyenne » (trinôme) 2 fois meilleure que celle de droite)

(on peut reconnaître à gauche l'inégalité de Jensen : $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *)*

Exercice 19 (***Application à la fonction inverse***)

1. Montrer pour $0 < a \leqslant b$, que : $(b-a) \cdot \frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{2} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$.

2. En déduire que $\forall x \geqslant 1$, on a : $2 - \frac{4}{1+x} \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$
Que se passe-t-il pour $x \in\,]0;1]$?

3. Vérifier pour $x > 0$: $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right) = A\left(x-1, 1-\frac{1}{x}\right) \\ 2 - \frac{4}{1+x} = H\left(x-1, 1-\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$

3 Compléments : exemples d'inégalités et de convergences

3.1 Inégalités

Exercice 20 (***Inégalité géométrique-arithmétique***)

1. Soient $r > 0$, et $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier sur $[0;+\infty[$ les variations de la fonction $f : t \mapsto t^{n+1} - (n+1)r^n t$.

b) Montrer que pour $t \geqslant 0$, on a : $-nr^{n+1} \leqslant t^{n+1} - (n+1)r^n t$.

Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels > 0.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, *(moyenne **arithmétique** des n premiers termes)*
- $g_n = \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} u_k \Big)^{\frac{1}{n}}$. *(moyenne **géométrique** des n premiers termes)*

2. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, on a : $n \cdot (a_n - g_n) \leqslant (n+1) \cdot (a_{n+1} - g_{n+1})$.

(On posera : $u_{n+1} = t^{n+1}$ et $g_n = r^{n+1}$.)

3. Montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.

4. **a)** Pour $n \geqslant 1$, on pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer alors : $n! \geqslant \left(\frac{n}{h_n}\right)^n$

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer de même : $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 21 (***Application de l'inégalité arithmético-harmonique***)

1. Soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de réels > 0. On définit :

- $a = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
- $d = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ et $h = \frac{1}{d}$.

a) Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer, pour $u > 0$, l'inégalité : $\frac{u}{\alpha} + \frac{\beta}{u} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

b) Montrer la minoration : $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{h} + \frac{a}{x_i}\right) \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{h}} \cdot n$.

c) En déduire l'inégalité : $h \leqslant a$.

2. Soit $(\epsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de réels tels que :

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i = 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \epsilon_i > -1$

Pour $t \in [0;1]$, on note : $p(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \epsilon_i \cdot t)$.

a) Montrer, pour $t \in [0;1]$, les formules : $\frac{p'(t)}{p(t)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_i \cdot t} = \frac{n}{t} \cdot \Big(1 - \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\epsilon_i \cdot t}\Big)$.

b) Montrer, pour $t \in [0;1]$, que : $\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (1 + \epsilon_i \cdot t) = 1$.

c) Par l'inégalité de la question **1.c)**, en déduire, pour $t \in]0;1]$ que : $p'(t) \leqslant 0$

d) Montrer : $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \epsilon_i) \leqslant 1$.

3. Soient n réels > 0 dont la somme est n. Déduire que leur produit est $\leqslant 1$.

Exercice 22 (*Inégalité de Jensen*)

1. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que φ est dérivable.

Soient $p_1, \dots, p_n \in [0;1]$ tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Soient $u_1, \dots, u_n \in I$. On définit : $m = \sum\limits_{k=1}^{n} p_i \cdot u_i$. *($m$ est la **moyenne** des u_i, avec les coef^ts^ p_i.)*

a) Montrer que : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot (u_i - m) = 0$.

b) Montrer que pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\varphi(u_i) \geqslant \varphi(m) + \varphi'(m) \cdot (u_i - m)$.

c) En déduire que : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi(u_i) \geqslant \varphi\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot u_i\Big)$. *(moyenne des images, image de la moyenne.)*

2. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note : $u_i = \ln(x_i)$.

a) Montrer que : $\exp\Big(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\Big) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \exp(u_i)$.

b) En déduire : $\Big(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. *(inégalité moyennes géométrique/arithmétique.)*

3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que φ est dérivable.

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X et $\varphi(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que : $\varphi(X) \geqslant \varphi\big(\mathbb{E}[X]\big) + \varphi'\big(\mathbb{E}[X]\big) \cdot (X - \mathbb{E}[X])$.

b) En déduire que : $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geqslant \varphi\big(\mathbb{E}[X]\big)$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction densité.

Montrer, sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varphi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

3.2 Autour de la formule de Taylor

Exercice 23 (*Série de Taylor de l'exponentielle*)

Soit $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer que $S'_n(x) = S_{n-1}(x) = S_n(x) - \frac{x^n}{n!}$.

2. On pose $f_n(x) = S_n(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que $f'_n(x) = -\frac{x^n}{n!}$.

b) Étudier les variations de f_n sur $[0;+\infty[$.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \geqslant 0$, que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x$.

3. **a)** Montrer que $1 - f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

b) En déduire pour $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer pour $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \mathrm{e}^x$.

Conclure, pour $x \geqslant 0$, sur la convergence et la somme de la série : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 24 (*Sommes de Taylor*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour $b \in I$, on considère la fonction définie pour $t \in I$, par : $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \cdot \frac{(b-t)^k}{k!}$.

1. Par une sommation télescopique, montrer pour $t \in I$ que : $S_n'(t) = f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}$.

2. Soient $a, b \in I$. Déduire la formule : $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!} \, dt$.

3. Soit la fonction f définie pour $x \in]-1;1[$, par : $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Montrer $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) Pour $x \in]-1;1[$, en déduire : $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \int_0^x \frac{(n+1)\cdot(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}} \, dt$.

4. Soit la fonction f définie pour $x \in]-1;1[$, par : $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

a) Montrer : $f^{(n)}(x) = \frac{(n+p)!}{p!} \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+p+1}}$.

b) Pour $x \in]-1;1[$, en déduire : $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k+p}{p} \cdot x^k + \binom{n+p}{p} \cdot \int_0^x \frac{(n+p+1)\cdot(x-t)^n}{(1-t)^{n+p+2}} \, dt$.

3.3 Autour de la formule $\left(1+\frac{x}{n}\right) \to e^x$

Exercice 25 (*Adjacence de suites eulériennes*)

Soit $p_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

1. **a)** Montrer que $p_n'(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$.

b) Montrer que la fonction p_n est positive et croissante sur $]-n;+\infty[$.

c) Pour $x \geqslant -n$, montrer l'inégalité : $p_n(x) \geqslant 1+x$. *(On pourra utiliser la convexité de p_n)*

2. On définit sur $]-n;+\infty[$ la fonction $q_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

a) Montrer que la dérivée de q_n est donnée, pour $x \geqslant -n$, par : $q_n'(x) = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{x}{n(n+1)}$.

b) En déduire les variations de la fonction q_n sur $]-n;+\infty[$.

c) Montrer que pour $x \geqslant -n$, on a : $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$.

3. Pour $x \in]-n;n[$, on définit : $f_n(x) = \frac{1}{p_n(-x)}$.

a) Pour $x \in]-n;n[$, montrer : $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$.

b) Montrer l'identité : $\frac{p_n(x)}{f_n(x)} = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$.

c) En déduire l'encadrement : $1-\frac{x^2}{n} \leqslant \frac{p_n(x)}{f_n(x)} \leqslant 1$. *(On appliquera l'inégalité **1.c)** à $p_n\left(-\frac{x^2}{n}\right)$.)*

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit deux suites, pour $n > |x|$, par :

- $a_n = p_n(x)$,
- $b_n = f_n(x)$.

Déduire des résultats précédents que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 26 (*Convergence de la suite d'Euler*)

On définit : $p_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que : $p_n'(x) = p_n(x) \cdot \frac{n}{n+x}$.

2. Soit $u_n(x) = p_n(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que : $u'(n)(x) = -\frac{x}{n+x} \cdot u_n(x)$.

b) Étudier les variations de u_n sur $]-n;+\infty[$

c) En déduire : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x$.

3. a) Montrer que pour $x > -n$, on a : $\left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{|x|}{n+x}$.

b) En applicant l'inégalité des accroissements finis, déduire : $1 - \frac{x^2}{n+x} \leqslant u_n(x) \leqslant 1$.

c) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

3.4 Autour de la formule de Stirling

Exercice 27 (*Fonction Digamma*)

Pour $x \geqslant 0$, et $n \geqslant 1$, on définit : $c_n(x) = \ln(n+x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x}$. *($c_0(x) = \ln(x)$ est définie pour $x > 0$)*

On rappelle que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

1. a) En déduire que la suite $c_n(0)$ est convergente et que : $\lim c_n(0) = -\gamma$.

b) Montrer, pour $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, que : $c_n(x) - c_n(0) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{k(k+x)}$.

c) Montrer la convergence de la série : $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{x}{k(k+x)}$.

d) En déduire l'existence de la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(x)$.

On note, pour $x \geqslant 0$, $\alpha(x) = \lim c_n(x)$. On admet que la fonction α est continue sur $[0;+\infty[$.

2. a) Pour $n \geqslant 1, x \geqslant 0$, montrer : $c_n(x+1) - c_{n+1}(x) = \frac{1}{x+1}$.

b) Pour $x \geqslant 0$, en déduire : $\alpha(x+1) - \alpha(x) = \frac{1}{x+1}$.

3. a) Montrer, pour $n \geqslant 1$, que : $\displaystyle\int_0^1 c_n(t)\,\mathrm{d}t = n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 c_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On admet que : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} c_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 c_n(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire que : $\displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

4. Pour $x \geqslant 0$, on note : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier : $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$.

b) Pour $x \geqslant 0$, montrer : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x+1)$. *(Dériver : $\varphi(x+1) - \varphi(x) - \ln(x+1)$.)*

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\varphi(n) = \ln(n!)$.

Exercice 28 (*Formule de Stirling*)

1. **a)** Calculer, pour $n \geqslant 0$: $\ln\big((n+1)!\big) - \ln(n!)$ et, pour $n \geqslant 1$: $\ln(n!) - \ln\big((n-1)!\big)$.

b) Montrer que la fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$.

Soit F la fonction définie , pour $x > 0$, par : $F(x) = x \cdot \ln(x) - (x-1)$.

c) Montrer, pour $x > 0$, que : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$

2. **a)** Montrer, pour $n \geqslant 1$, et $t > 0$, que : $\ln(t) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n} \cdot (t-n)$.

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, que : $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n)$.

On définit une suite, pour $n \geqslant 0$, par : $a_n = \ln(n!) - F\big(n + \frac{1}{2}\big)$.

c) En déduire, pour $n \geqslant 1$, que : $a_n - a_{n-1} \geqslant 0$.

3. **a)** Montrer, pour $n \geqslant 1$, et $t > 0$, que : $\ln(t) \geqslant (n+1-t) \cdot \ln(n) + (t-n) \cdot \ln(n+1)$.

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, que : $\frac{1}{2} \cdot (\ln(n) + \ln(n+1)) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

On définit une suite, pour $n \geqslant 1$, par : $b_n = \ln(n!) - F(n) - \frac{1}{2} \cdot \ln(n)$.

c) En déduire, pour $n \geqslant 1$, que : $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$.

4. **a)** Montrer, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement : $\frac{1}{2} \cdot \ln(n) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} \cdot \ln(n+1)$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F\big(n + \tfrac{1}{2}\big) - F(n) - \tfrac{1}{2} \cdot \ln(n) = 0$.

c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. On note $\ell = \lim(a_n)$.

Montrer alors l'équivalent : $n! \sim \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \cdot \mathrm{e}^\ell \cdot \sqrt{n}$. *(Formule de Stirling)*