TD 17 : Fonctions de deux variables

1 Dérivation

Définition 1 (*Gradient d'une fonction*)

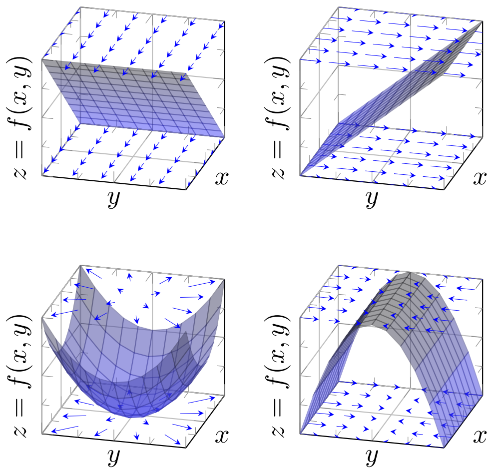
- Le **gradient** de f en un point $(x,y) \in U$ est un vecteur, noté $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$.
- **Le champ de gradient** : le gradient forme un **champ de vecteurs**, c'est-à-dire un vecteur qui varie en fonction du point (x,y) où on l'évalue : $\nabla f : \left| \begin{array}{lcl} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\nabla f)(x,y) \end{array} \right.$.

Interprétation du gradient

Le gradient d'une fonction indique la direction de **plus grande pente** de la surface graphe $z = f(x,y)$. C'est un vecteur, dont l'intensité est proportionnelle à la pente, et qui pointe « dans la direction où ça monte »

Ci-contre les fonctions

- $f(x,y) = x$ avec $\nabla f = \binom{1}{0}$
- $f(x,y) = y$ avec $\nabla f = \binom{0}{1}$
- $f(x,y) = x^2 + y^2$ avec $\nabla f = \binom{2x}{2y}$
- $f(x,y) = -y^2$ avec $\nabla f = \binom{0}{-2y}$



Proposition 2 (*Formule du développement limité d'ordre 1*)

On peut écrire $f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). *(Résultat non exigible.)*

Exercice 1 (*Pratiquer la dérivation*)

Calculer

- **le champ de gradient** $(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- **le champ de Hessienne** $(\nabla^2 f)(x,y) = \begin{bmatrix} \partial^2_{1,1} f & \partial^2_{1,2} f \\ \partial^2_{2,1} f & \partial^2_{2,2} f \end{bmatrix}(x,y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

- $f_1(x,y) = x$
- $f_2(x,y) = y$
- $f_3(x,y) = 2x - y$
- $f_4(x,y) = x^2 + y^2$
- $f_5(x,y) = xy$
- $f_6(x,y) = (1+x^2)^y$
- $f_7(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$
- $f_8(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$
- $f_9(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

2 Études de points critiques

Définition 3 (*Point critique*)

- On appelle **point critique** de f un point $c_0 = (x_0, y_0) \in U$ tel que $\nabla f\,(x_0, y_0) = \vec{0}$.
- Le point critique c_0 est dit **non-dégénéré** si sa Hessienne $\nabla^2 f\,(x_0, y_0)$ est **inversible**

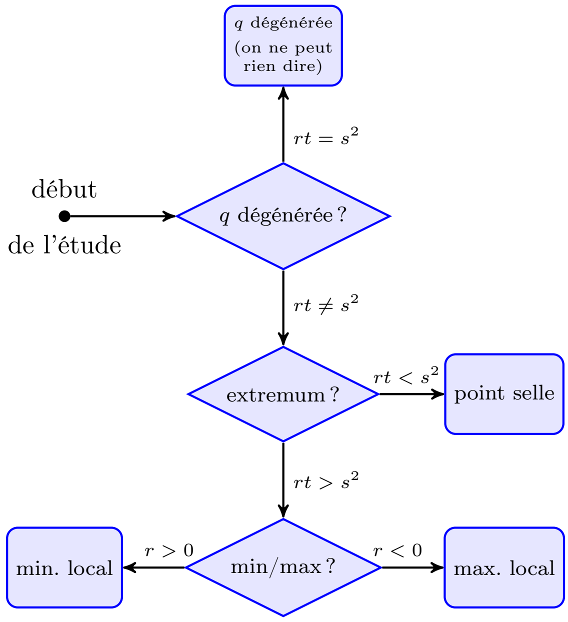
Forme quadratique

Une **forme quadratique** s'écrit : $q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$, où $r, s, t \in \mathbb{R}$.
Pour la matrice symétrique : $Q = \left[\begin{smallmatrix} r & s \\ s & t \end{smallmatrix}\right]$, on a l'écriture : $q(x,y) = (x,y) \cdot Q \cdot \binom{x}{y}$.

- Le gradient s'écrit alors aussi matriciellement : $\nabla q(x,y) = \binom{2rx+2sy}{2sx+2ty} = 2Q\binom{x}{y}$.
- La matrice Hessienne de q est alors la matrice $2Q$.

Proposition 4 (*Classification des points fixes*)

1. L'origine $\binom{0}{0}$ est un point critique de la forme quadratique q associée à $Q = \left[\begin{smallmatrix} r & s \\ s & t \end{smallmatrix}\right]$
2. Il est non-dégénéré ***ssi*** $rt - s^2 \neq 0$.
   *(c'est le **déterminant*** $\det(Q)$*)*
3. Dans ce cas :
   - si $rt - s^2 > 0$, on a un **extremum local**,
     (et alors r et t ont même signe)
     - si $r > 0$, on a un **minimum local**
     - si $r < 0$, on a un **maximum local**
   - si $rt - s^2 < 0$, alors le point critique, n'est **pas un extremum local**.
     *(on parle de **point selle**.)*



Exercice 2 (*Points critiques de formes quadratiques*)

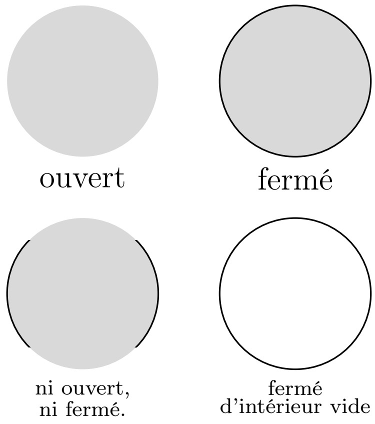
En calculant le gradient et la Hessienne,

- trouver le *(les)* point critique *(s'il y en a)* $(\nabla f)(x_0, y_0) = \vec{0}$,
- en discuter la nature par l'étude de la Hessienne $\left(\nabla^2 f\right)(x,y) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$

pour chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x,y) = x + y$
- $f_2(x,y) = x^2 + y^2$
- $f_3(x,y) = -(x^2 + y^2)$
- $f_4(x,y) = xy$
- $f_5(x,y) = x^2 - y^2$
- $f_6(x,y) = x^2 - xy + y^2$
- $f_7(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $f_8(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + 3x + y - 5$

3 Éléments de topologie du plan $\mathbb{R}^2$



Définition 5 (*Ouverts, fermés de* $\mathbb{R}^2$)

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite

- fermé si U contient son bord :
  (il ne manque à U aucun des points du bord)
- ouvert si U ne rencontre pas son bord :
  (U ne contient aucun des points du bord)

Définition 6 (*Partie bornée*)

Une partie U est dite bornée si l'une des conditions équivalentes est satisfaite *(et les deux autres le sont alors aussi)*

- les éléments de U ont leurs deux coordonnées bornées :

$$\exists A > 0,\ \forall (x,y) \in U, -A \leqslant x, y \leqslant A$$

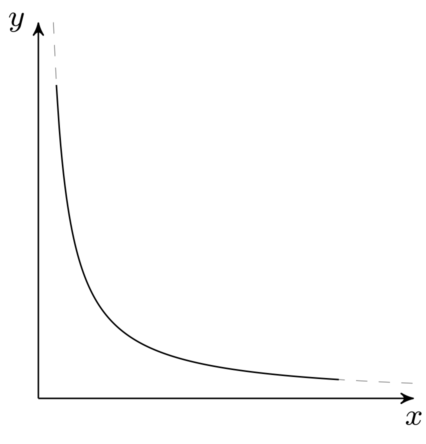
- l'ensemble U est inclus dans un disque *(on peut l'entourer par un cercle)*
- l'ensemble U est inclus dans un pavé *(on peut l'encadrer par un rectangle)*

Théorème 7 (*des bornes de Weierstrass*)

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ une partie fermée et bornée.
Alors, toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée sur K et atteint ses bornes sur K.

Le théorème des bornes ne s'applique que sur un fermé borné.
Ainsi, la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ *(ci-contre)* est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, ni fermé, ni borné.
On a $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$, ainsi :

- f n'est pas majorée,
- f est minorée, et $\inf(f) = 0$.
  *(mais **la borne n'est pas atteinte** !)*



Exercice 3 (*Problèmes de domaine*)

1. Représenter les ensembles suivants du plan :

$$U = [0\,;+\infty[\times \mathbb{R} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 2 \right\} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \right\}$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$.
Discuter l'existence d'extrema de f sur U, V, W et déterminer $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$.

3. Mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x,y) = x + 2$.

4 Problèmes typiques

Exercice 4 (*D'après* Esc *éco 2005*)

Sur l'ouvert $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, on définit une fonction f par : $f(x,y) = x^2\ln(y) - y\ln(x)$

1. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$.

a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et calculer $g'(t), g''(t)$ pour $t > 0$.

b) Étudier les variations de g' puis de g sur $]0\,;+\infty[$. *(Préciser les limites aux bornes)*

c) En déduire que l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution notée α.

d) Vérifier que : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$

2. a) Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur U.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f , alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{x_0^2}{\ln(x_0)}$.

d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
En déduire que le point $M\left(\mathrm{e}^{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{2\alpha}\right)$ est le seul point critique de f.

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) En utilisant la relation de la question **1.d)**, montrer que $2\ln(y_0) + \dfrac{y_0}{x_0^2} = \dfrac{2}{\alpha}$.
En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

(puis étude d'une fonction densité)

Exercice 5 (*D'après* Esc *éco 2007*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx - \mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$ *(On précisera les limites aux bornes)*.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique notée u_n.

c) Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{n})$ puis justifier que $0 < u_n < \frac{1}{n}$.

d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Montrer que $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$, et trouver un équivalent de u_n pour $n \to \infty$.

On considère les fonctions :
- g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.
- h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} + 2x^2$.

2. a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.

c) Montrer que le seul point critique de g est le point $M = (u_2, u_2)$ où le réel u_2 est l'unique solution de l'équation $2x - \mathrm{e}^{-x} = 0$, vue au **1.b)**.

d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2u_2(2 + u_2)$.

3. a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \geqslant h(x)$.

b) Étudier les variations de h et montrer que $x = u_2$ est un minimum global de h.

c) En déduire que M est un minimum global pour g.

(puis une programmation de l'algorithme de dichotomie pour calculer u_2)