DL 5 - vacances d'Octobre

Exercice 1

(Esc 2005)

Une urne contient initialement trois boules indiscernables au toucher :
- deux boules rouges
- une boule bleue

On appelle « épreuve » la séquence suivante. On tire une boule de l'urne, puis :
- si la boule tirée est **bleue**, on la remet dans l'urne.
- si la boule tirée est **rouge**, alors :
  — on ne la remet **pas** dans l'urne
  — mais on remet une boule **bleue** dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour $n \geqslant 1$, on note :
- $Y_n =$ le nombre de boules rouges dans l'urne suite à la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
- $R_n =$ « À la $n^{\text{ème}}$ épreuve on tire de l'urne une boule **rouge**. »
- $B_n =$ « À la $n^{\text{ème}}$ épreuve on tire de l'urne une boule **bleue**. »

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.

2. **a)** Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où $n \geqslant 2$?

b) Pour $n \geqslant 1$ un entier, justifier que : $\mathbb{P}(Y_n = 2) = \frac{1}{3^n}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.

b) Par la formule des probabilités totales sur Y_n, montrer : $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

Pour $n \geqslant 1$ entier, on pose : $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$.

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. En déduire v_n en fonction de n et de v_1.
Établir enfin que pour $n \geqslant 1$, on a : $u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.

d) Déduire des résultats précédents, pour $n \neq 0$, la probabilité $\mathbb{P}(Y_n = 0)$.

4. Calculer l'espérance de Y_n.

5. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

a) Donner l'ensemble des valeurs possibles $Z(\Omega)$.

b) Soit un entier $k \geqslant 2$.
Exprimer l'événement $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

c) En déduire la loi de Z.

Exercice 2

(Esc 2008)

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, on définit les matrices :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On note :
- f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$, et
- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. **a)** Calculer $(A-2I)^2$, puis vérifier que $(A-2I)^3 = 0_3$ *(la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.)*

b) Pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, montrer l'équivalence : $A\vec{v} = 2\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{v} \in \operatorname{Ker}(A-2I)$.
Résoudre cette équation. On écrira l'ensemble des solutions sous la forme $\vec{v} \in \operatorname{Vect}(\vec{v}_0)$.

c) Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel des solutions ?

2. Montrer par la méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

3. On note dans toute la suite les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'unique vecteur $\vec{u}_3$ de la forme $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que : $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
Montrer à l'aide de la question **2.** que P est inversible puis justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Exprimer $f(\vec{u}_1)$ en fonction de $\vec{u}_1$, puis $f(\vec{u}_2)$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = 2I + N$.
Justifier en une seule ligne, la relation $A = PTP^{-1}$.

Soit S l'ensemble des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation : $f \circ h = h \circ f$. (**R**)

4. **a)** On note M' la matrice de l'endomorphisme h dans la base $\mathcal{B}'$.
Montrer l'équivalence (**R**) $\Longleftrightarrow$ $[N \cdot M' = M' \cdot N]$.

b) En posant $M' = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$, montrer l'équivalence : (**R**) $\Longleftrightarrow M' = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = \operatorname{Vect}\big(\mathrm{Id}, f - 2\,\mathrm{Id}, (f - 2\,\mathrm{Id})^2\big)$.

5. On considère les deux familles :
- $\mathcal{G} = \big(I, N, N^2\big)$,
- $\mathcal{F}' = \big(\mathrm{Id}, f, f^2\big)$.

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.

b) Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.