TD 8 : compléments sur l'intégration

1 Compléments : Intégration sur un segment

Exercice 1 (*La formule de Taylor pour* e^1)

1. Calculer les intégrales : $I_0 = \int_0^1 e^{-t}\, dt$, $\quad I_1 = \int_0^1 t\, e^{-t}\, dt$, $\quad$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{2} e^{-t}\, dt$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad I_{n+1} = \frac{e^{-1}}{n!} + I_n$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + I_0$.

c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t}\, dt$.

3. Étude de la convergence pour $n \to 0$

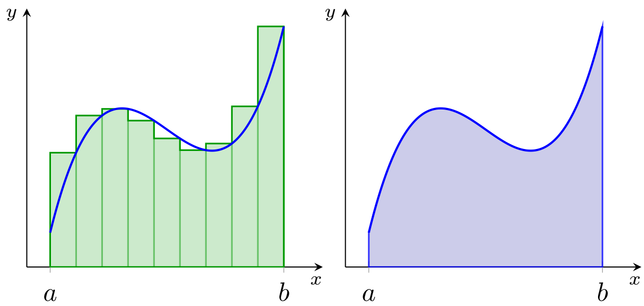
a) Montrer l'encadrement $0 \leqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t}\, dt}_{= e\, I_{n+1}} \leqslant e^1 \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\, dt$.

b) En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Proposition 1 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \to +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\, dt.$$



Exercice 2 (*Avec des sommes de Riemann* (I))

1. Rappeler les hypothèses pour avoir : $\quad \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\, dt.$

2. a) En déduire la limite des suites : $\quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2.$

b) Comparer le résultat avec les formules donnant $\quad \sum_{k=1}^{n} 1, \sum_{k=1}^{n} k$, et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 3 (*Avec des sommes de Riemann* (II))

1. Montrer que l'on peut écrire : $\forall n \geqslant 1, \quad H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

2. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big[H_{2n} - H_n\Big] = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. *(On écrira : $H_{2n} - H_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$.)*

3. Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big[H_{2n} - H_n\Big] = \ln(2)$.

4. Montrer de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big[H_{3n} - H_n\Big] = \ln(3)$.

(On écrira : $H_{3n} - H_n = \dfrac{2}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{1+2\frac{i}{2n}} \to \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.)

5. En calculant de deux façons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big[H_{6n} - H_n\Big]$, montrer que $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$.

Exercice 4 (*Avec des sommes de Riemann* (III))

1. **a)** Pour $a > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^a$. *(pourquoi $a > 0$?)*

b) En déduire un équivalent pour $n \to +\infty$, de la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^a$.

2. **a)** Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = 2\ln(2) - 1$.

b) Montrer qu'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \ln\Big[(2n)!\Big] - \ln(n!) - n\ln(n)$.

c) En déduire un équivalent de la suite : $\quad u_n = \ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)$.

Exercice 5 (*Pratique du changement de variables*)

1. **a)** Rappeler une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.

b) Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)\,\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2(x))}$.

2. Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{1+\ln(x)+\ln^5(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. Par le changement de variables $t = x^2$, calculer l'intégrale $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

2 Convergence et calcul par passage à la limite

Exercice 6 (*Intégrations par parties*)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t, \quad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad I_3 = \int_1^{\infty} \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t, \quad I_4 = \int_0^{\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$I_5 = \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad I_7 = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad I_8 = \int_{-\infty}^1 (t-1)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Que donne le changement de variables $x = \ln(t)$ dans celles « à logarithme » ?

Exercice 7 (*Intégrales Eulériennes* (version exponentielles))

On fixe $a > 0$;

1. **a)** Montrer que pour $x \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}$.

b) En déduire convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$.

2. Montrer pour $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{n+1}{a}\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$.

3. En passant à la limite, montrer la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{a}\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$.

4. En déduire par récurrence l'expression : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Exercice 8 (*Intégrales Eulériennes* (version logarithmes))

1. **a)** Montrer pour $x \to 0^+$, le comportement asymptotique : $\displaystyle\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

2. Montrer de même *(convergence puis valeur)* que $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

3. Par le changement de variables $x = \mathrm{e}^{-t}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

4. De même, montrer : $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

5. De même, on pourra montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{récu.}}{=} \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 (*Comparaison séries-intégrales*)

1. Soit $f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue **décroissante**.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $f(t)$ pour $t \in [n\,;n+1]$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire pour $n \geqslant 2$, l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$

d) En déduire que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{cases}$.

a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b) En déduire la divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

3. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}$, avec $\alpha > 0$, pour $\alpha \neq 1$.

a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \underbrace{\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}}_{=\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}+\text{cst.}}$.

b) En déduire l'énoncé du critère de convergence pour la série de Riemann : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 10 (*Un équivalent de* $\ln(k)$)

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

2. Par une comparaison série-intégrale *(Attention au sens de variations !)*, montrer pour une certaine fonction F à expliciter :

$$\forall n \geqslant 2, \quad F(n) - F(1) \leqslant \ln(n!) \leqslant F(n+1) - F(2).$$

3. En déduire pour $n \to \infty$, l'équivalent $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

3 Autour des probas

Exercice 11 (*Densité*)

1. Soit $\theta > 0$ et $k \geqslant 0$ un entier.
Montrer que la fonction $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit une densité : $f_\theta : x \mapsto \begin{cases} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité.

a) Calculer la fonction de répartition de X. *(Quel est le rapport avec $\mathcal{U}[0\,;\theta]$?)*

b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 12 (*Une densité*)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2x} & \text{pour } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{5}\ln^2(x) & \text{pour } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ définit une densité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (*Gaussiennes*)

1. **a)** Montrer pour $x \geqslant 1$, l'encadrement : $\quad 0 \leqslant \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \leqslant \exp(-x)$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Rappeler sa valeur *(c'est du cours)*.

3. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$. Par changement de variables affine, en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$.

4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 14 (*Moments de la loi exponentielle*)

Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Rappeler l'expression de la densité f de X.

2. Montrer que X admet un moment à tout ordre et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(X) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.
(on utilisera l'Exercice 7)

3. Retrouver la valeur de la variance : $\quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 15 (*La loi d'Erlang*)

Soit $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

On définit une fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f_n : x \mapsto \begin{cases} \lambda^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f_n est une fonction densité.
(On utilisera le résultat de l'Exercice 7)

2. Quelle densité reconnaît-on pour $n = 0$?

3. Pour quelle valeur de x la densité $f_n(x)$ est-elle maximisée ? *(le **mode** de la distribution)*

Soit X une variable aléatoire admettant f_n pour densité. *($X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda, n)$: loi d'Erlang)*

4. Montrer que la variable X admet une espérance et que : $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{\lambda}$.

5. Montrer que la variable X admet moment d'ordre 2 et que : $\mathbb{E}[X^2] = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}$.

6. En déduire que X admet une variance et que $\mathrm{Var}(X) = \frac{n+1}{\lambda^2}$.