

# Colles semaine 16 - Couples de variables aléatoires

## 1 Lois d'un couple aléatoire discret

- ▶ **Couple de variables aléatoires** Notation  $(X, Y)$  : avec  $X, Y$  **variables marginales**
- ▶ **Loi conjointe** écriture en tableau à double entrée, et exploitation (*calcul de probas*)

$X \downarrow$	$Y \rightarrow$	$y_1$	$\dots$	$y_m$	Loi de $X$
$x_1$		$p_{11}$	$\dots$	$p_{1m}$	$p_{1\cdot}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_n$		$p_{n1}$	$\dots$	$p_{nm}$	$p_{n\cdot}$
Loi de $Y$		$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot m}$	1

- ▶ **Lois marginales** de  $X, Y$  une par une « dans l'absolu ». Lien à la loi conjointe.
- ▶ **Cas de variables indépendantes** (+ reconnaître et montrer la non-indépendance)

## 2 Problèmes de transfert

- ▶ **Formule de transfert**  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) \cdot p_i$  et  $\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \psi(x_i, x_j) \cdot p_{i,j}$ .
- ▶ **Exemples simples de transfert de loi**  $Z = f(X, Y)$ . (notamment  $S = X + Y$ )  
Calcul des probas des valeurs de  $Z$  grâce à la loi conjointe.
- ▶ **Cas du max**  $M = \max(X, Y)$ 
  - ▶ Égalité des événements  $[M \leq m] = [X \leq m, Y \leq m]$
  - ▶ D'où  $\underbrace{\mathbb{P}(M \leq m)}_{F_M(m)} = \mathbb{P}(X \leq m, Y \leq m) \rightsquigarrow \mathbb{P}(M = m) = F_M(m) - F_M(m-1)$ .
  - ▶ Cas où  $X, Y$  sont indépendantes. Alors  $\forall m : \mathbb{P}(M \leq m) = \mathbb{P}(X \leq m) \cdot \mathbb{P}(Y \leq m)$

## 3 Covariance d'un couple de variables aléatoires

(toutes propriétés **sous réserve de convergence absolue des séries**)

- ▶ **Linéarité de l'espérance**  $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  cst. déterministes)
- ▶ **Produit indépendant** Si  $X, Y$  sont indépendantes, alors :  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ .
- ▶ **Notion de variance**
  - ▶ Par définition :  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
  - ▶ Kœnig-Huygens :  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ .
  - ▶ Écart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$
  - ▶ Homogénéité :  $\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X)$ , (où  $\lambda \in \mathbb{R}$ )
- ▶ **Notion de covariance**
  - ▶ Par définition :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$
  - ▶ Kœnig-Huygens :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
  - ▶ Lien à la variance :  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
  - ▶ Bilinearité-symétrie « règles de calcul pour  $\text{Cov}(X, Y)$  »
- ▶ **Formule de polarisation**  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot [\text{Var}(X + Y) - \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)]$ .

Deux variables **indépendantes** sont **décorrélées** :  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

- ▶ **Corrélation linéaire, principe de la régression linéaire**

Coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

Cauchy-Schwarz  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .

Corrélation totale : pour  $\rho(X, Y) = \pm 1$ , alors on peut écrire  $Y = aX + b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Principe de la régression linéaire Droite qui suit le nuage de point.

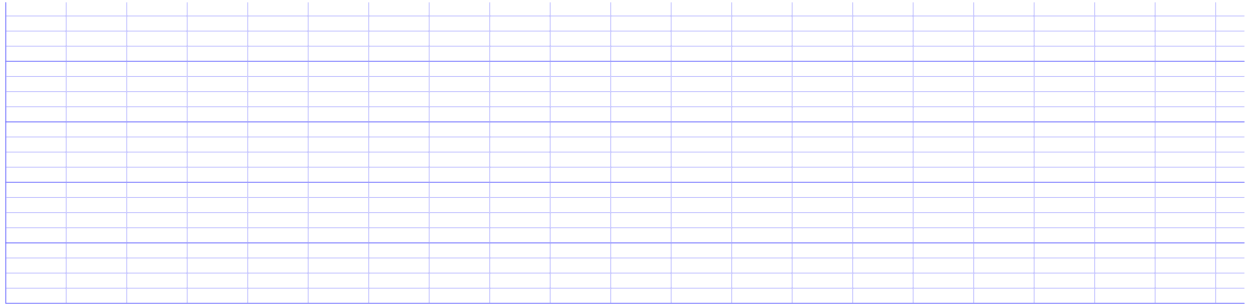
Interprétation du signe de  $\rho(X, Y)$   $X, Y$  varient plutôt « ensemble » ou « en sens opposé »

## 4 Questions de cours

1. Définition de la covariance et formule de Koenig-Huygens pour  $\text{Cov}(X, Y)$ .



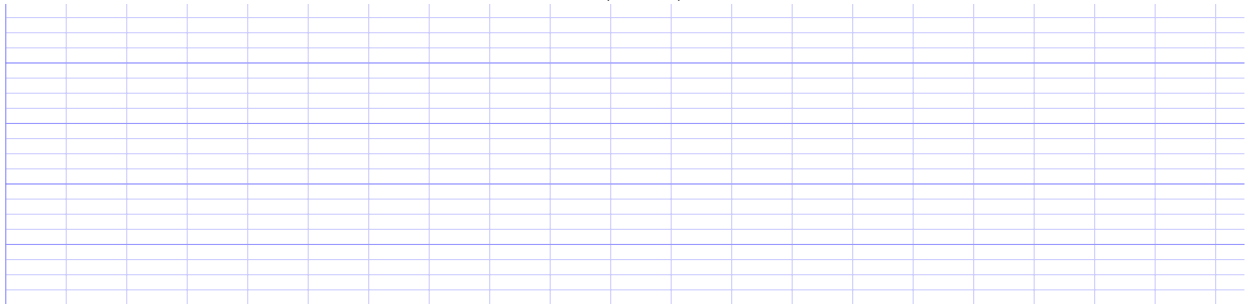
2. Formule de transfert pour l'espérance à une et à deux variables.



3. Définition de «  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes ».



4. Principe de l'étude du maximum  $M = \max(X, Y)$ .



5. Expression de  $\text{Var}(X + Y)$  et formule de polarisation.

