Correction DL 4 : Algèbre linéaire 1

Ex.1 : Une base de $\mathbb{R}^2$

On considère les deux vecteurs $\vec{u} = \binom{3}{2}$ et $\vec{v} = \binom{5}{3}$.

1. *(Résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$. Que peut-on en déduire sur la famille $(\vec{u}, \vec{v})$?)*

On résout pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0}} \iff \begin{cases} 3\lambda + 5\mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases}$$

On trouve donc pour seule solution : $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$. La famille $\vec{u}, \vec{v}$ est donc **libre**.

(on remarque immédiatement que $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.)

2. *(Résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \binom{3}{5}$, d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.)*

On résout pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\lambda + 5\mu = 3 \\ 2\lambda + 3\mu = 5 \end{cases}$$

On trouve donc pour seule solution : $\begin{cases} \lambda = 16 \\ \mu = -9 \end{cases}$

3. *(Pour $x, y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \binom{x}{y}$. Qu'en déduit-on sur la famille $(\vec{u}, \vec{v})$?)*

De même on résout pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ inconnus le système de paramètres x, y : $\begin{cases} 3\lambda + 5\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \end{cases}$

On trouve pour seule solution : $\begin{cases} \lambda = -3x + 5y \\ \mu = 2x - 3y \end{cases}$

4. *(Soit $P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.)*

La matrice P est la matrice de la famille $\vec{u}, \vec{v}$ dans la base canonique.

On a résolu le système $P\binom{\lambda}{\mu} = \binom{x}{y}$ ci-dessus.

La solution s'écrit $P^{-1}\binom{x}{y} = \binom{\lambda}{\mu}$, où : $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. *(Graphiquement, à quoi voit-on que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$? une base de $\mathbb{R}^2$?)*

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : pas alignés avec l'origine *(ils forment un « angle »)*.

Ex.2 : Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Soit F le sous-ensemble *(un **plan**)* de $\mathbb{R}^3$ tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que} x + 2y + z = 0 \right\}$.

1. *(Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.)*

- **F est non-vide et $\vec{0} \in F$** Les coordonnées du vecteur nul $\vec{0}$ sont $x = y = z = 0$, et l'équation $x + 2y + z = 0$ est alors bien vérifiée, ainsi $\vec{0} \in F$.

- **F est stable par combinaisons linéaires**

  Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in F$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}$.

  On vérifie l'équation du plan F :

  $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\lambda_1(\underbrace{x_1 + 2y_1 + z_1}_{=0 \text{ car } \vec{v}_1 \in F}) + \lambda_2(\underbrace{x_2 + 2y_2 + z_2}_{=0 \text{ car } \vec{v}_1 \in F}) = 0$

  Ainsi on a bien $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \in F$, et F est donc stable par combinaison linéaire.

L'ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. *(Trouver une base de F.)*

On réecrit l'équation du plan F soit $x + 2y + z = 0$ pour paramétrer une coordonnée en fonction des deux autres, en ajoutant une équation tautologique pour $\begin{matrix} x = -2y - z \\ y = y \\ z = \quad z \end{matrix}$ Notons $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Ainsi, on a $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in F \Leftrightarrow \vec{X} = y\vec{u} + z\vec{v}$, et les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ forment donc une base de F.

3. *(Soit $G = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Trouver une équation du plan G.)*

On cherche une équation du plan G sous la forme $ax + by + cz = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On recherche les coefficients scalaires a, b, c, en traduisant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in G$.

Il vient : $\begin{matrix} a + b \quad = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{matrix}$ On trouve $b = -a$ et $c = -a$, et on peut choisir $a = 1$.

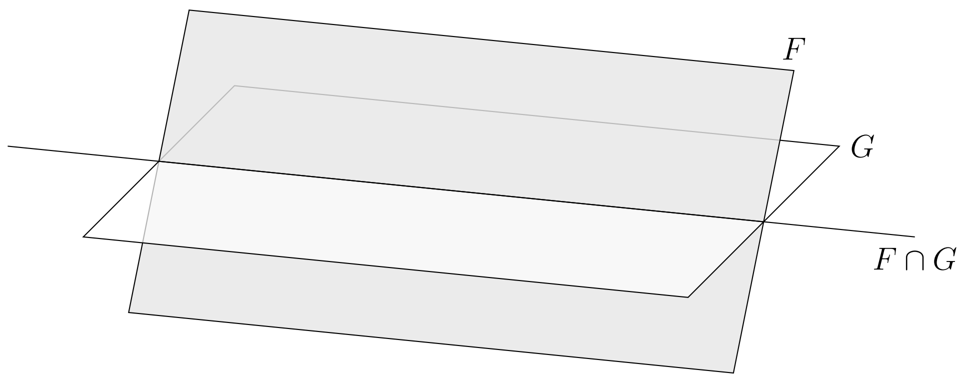
On a trouvé l'équation du plan G : $x - y - z = 0$.

4. *(Trouver une base de la droite $F \cap G$.)*

Résolvons le système de deux équations de l'intersection $F \cap G$ *(l'équation de F et celle de G)* :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - \ \ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + \ \ y \quad\ \ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x \quad + z = 0 \\ \ \ 2x + y \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = \ \ 3x \end{cases}$$

Ainsi, en notant $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a $\vec{x} \in F \cap G \iff \vec{X} = x\vec{d}$, et donc $F \cap G\,\mathrm{Vect}(\vec{d})$.



Ex.3 : Ma matrice 3×3 préférée

On étudie quelques propriétés de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calcul des puissances de A

a) *(Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$ avec les relations : $\begin{array}{l} a_{n+1} = \quad 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{array}$)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence :
  $$A^n \text{ est sous la forme : } \quad A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix} \qquad (H_n)$$
- **Initialisation** On a bien : $$A^0 = I_3 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & a_0 \end{bmatrix} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{array} \right. \qquad (H_0)$$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$ $\qquad (H_n)$
  $$\text{d'où } A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \end{bmatrix} \quad (H_{n+1})$$
  pour $\begin{array}{l} a_{n+1} = \quad 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{array}$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix} \qquad (H_n)$$
  avec les relations indiquées : $\begin{array}{l} a_{n+1} = \quad 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{array}$

b) *(Montrer que les suites définies par $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n + 2b_n$ sont géométriques.)*
On a : $\begin{array}{l} a_{n+1} = \quad 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{array}$ Il vient donc :
$$\begin{array}{l} u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = 2b_n - (a_n + b_n) = -a_n + b_n = -u_n \\ v_{n+1} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = 2b_n + 2(a_n + b_n) = 2a_n + 4b_n = 2v_n \end{array}$$
et les deux suites (u_n) et (v_n) sont géométriques, respectivement de raison -1 et 2.

c) *(Donner l'expression du terme général des suites (u_n) et (v_n).)*

- **Terme général de (u_n)**
  On a $u_0 = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1$. Ainsi on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.
- **Terme général de (v_n)**
  On a $v_0 = a_0 + 2b_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$. Ainsi on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n$.

d) *(Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$, et trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $b_n = \lambda u_n + \mu v_n$.)*

Approche

> Pour changer, on va utiliser une notation matricielle du système linéaire.

On a : $\begin{array}{l} u_n = a_n - b_n \\ v_n = a_n + 2b_n \end{array}$, soit $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Or la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible, avec $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *(Formule de Cramer)*.

La formule $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ donne donc les relations : $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}\Big(\ 2u_n + v_n\Big) \\ b_n = \dfrac{1}{3}\Big(-u_n + v_n\Big) \end{cases}$

e) *(Conclure sur le terme général des suites (a_n) et (b_n).)*

On a trouvé : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Ainsi : $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}\Big(\ 2(-1)^n + 2^n\Big) \\ b_n = \dfrac{1}{3}\Big(-(-1)^n + 2^n\Big) \end{cases}$

f) *(Vérifier $\forall n \in \mathbb{N}$, que : $A^n = \dfrac{2^n}{3}E + \dfrac{(-1)^n}{3}F$ pour deux matrices E et F à détailler.)*

On a trouvé : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$

On remplace $\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{3}\Big(\ 2(-1)^n + 2^n\Big) \\ b_n = \frac{1}{3}\Big(-(-1)^n + 2^n\Big) \end{array}$ et on regroupe les termes en 2^n et $(-1)^n$ dans deux matrices $\frac{1}{3}E$ et $\frac{1}{3}F$.

Chaque coefficient a_n contribue $\left|\begin{array}{l} \text{pour 1 à la matrice } E \\ \text{pour 2 à la matrice } F \end{array}\right|$ et chaque coefficient b_n contribue pour $\left|\begin{array}{l} \text{pour 1 à la matrice } E \\ \text{pour } -1 \text{ à la matrice } F. \end{array}\right|$

Ainsi on trouve bien : $A^n = \dfrac{2^n}{3}E + \dfrac{(-1)^n}{3}F$ pour $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Inversion de A

a) *(Vérifier $A^2 = A + 2I_3$.)*

On vérifie que les deux membres valent $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ils sont donc bien égaux.

b) *(En déduire que $A\frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$.)*
On a $A^2 = A + 2I_3$, soit $\frac{1}{2}\Big(A^2 - A\Big) = I$ d'où les formes demandées.

c) *(En déduire que la matrice A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.)*

On reconnaît la formule : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$, pour $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. Réduction Dans cette question, on utilise les notations suivantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *(Résoudre l'équation $x^2 = x + 2$, pour $x \in \mathbb{R}$.* (équation tirée de **2.a)**)*)*
On a $x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0$
L'ensemble des solutions est donc $\{-1, 2\}$.

b) *(Montrer que* $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.*)*

On a $A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. On résout le noyau pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\vec{X} \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

Ainsi $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ d'où $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

c) *(Montrer que* $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$.*)*
On a $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. On résout le noyau pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\vec{X} \in \mathrm{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = \quad y \\ z = \qquad z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et il vient donc $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

d) *(Montrer que $AP = PD$.)*

On vérifie qu'on a bien $AP = PD = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.