Programme 10 - Intégration : Compléments

1 Intégration sur un segment

- **Intégrabilité automatique** pour une fonction **continue sur un segment**.
  *(ou **continue par morceaux** : discontinuités avec limites finies.)*
- **Propriétés générales** Linéarité, Chasles, positivité, intégrale d'une constante.
- **Intégrale et primitive** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et $F' = f$.
- **Intégration par parties** pour u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'$.
  *(**Stratégie :** on essaie de se rapprocher de la sortie du calcul)*
- **Changement de variables** *(le changement de variables est indiqué par l'énoncé)*
  - $\star$) *Hypothèses :* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, f continue sur $u([a,b])$.
  - $\star$) *Formule :* $\displaystyle\int_a^b f\big(u(t)\big)\, u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\ \mathrm{d}x$
    (On remplace tous les $u(t)$ par des x, et $u'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$.)
  - $\star$) *Notation :* on a posé $x = u(t)$ et $dx = u'(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $t = a \rightsquigarrow x = u(a)$ ...

2 Intégration sur un intervalle quelconque

- **Convergence d'une intégrale** étude en $\pm\infty$, en un point $x_0^{\pm}$.
- **Intégrales convergentes de référence**
  - Fonctions exponentielles e^{-ax}, $a > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
  - En $+\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
  - En 0^+ : $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha < 1$. *(retournement de ci-dessus)*
- **Critère de convergence absolue** par comparaison $= o(g(t))$, $\sim g(t)$ ou $|.| \leqslant g(t)$.
  - souvent comparaison à $\frac{1}{t^2}$ pour une intégrale en $+\infty$.
  - souvent comparaison à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour une intégrale en 0^+.

3 Densités de probabilité

- **Définition** une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
  - continue sauf év$^{\mathrm{t}}$ en un nb. fini de points,
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \geqslant 0$, et
  - convergence et valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
- **Variable aléatoire à densité**
  une *v.a.r.* X admet pour densité f si $\forall a < b \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
- **Fonction de répartition associée** Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(déf)}}{=} F_X(x)$.
- **Espérance et moments, variance** Sous réserve de convergence absolue :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Var}(X) \overset{\text{(déf)}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big] \overset{\text{(K-H)}}{=} \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)$$

- **Densités usuelles**
  - Densité exponentielle
  - Densité uniforme
  - Densité normale

4 Questions de cours

1. Définition d'une fonction densité ? La densité de $\mathcal{E}(\lambda)$.

2. Énoncer le critère de convergence de Riemann en $+\infty$ et en 0^+.

3. Convergence et calcul de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Énoncer le principe du changement de variables pour une intégrale sur un segment.

5. Définir et exprimer le moment d'ordre n pour variable à densité f.