# Une étude de suite récurrente par accroissements finis

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $\forall x > 0,\quad \left|\begin{array}{l} f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x), \\ g(x) = f(x) - x. \end{array}\right.$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left|\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n). \end{array}\right.$

**1.** *(Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.)*

On a $\forall x > 0$, $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x$

- **Limite en $0^+$** Pour $x \to 0^+$ $\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln(x) \to +\infty \\ 2 - x \to 2 \end{array}\right.$ Donc on a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
- **Limite en $+\infty$** Pour $x \to +\infty$ $\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln(x) \to -\infty \\ 2 - x \to -\infty \end{array}\right.$ Donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

**2.** *(Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.)*

- **Dérivation**

  On a $\forall x > 0,\quad g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x.$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

  Il vient $g'(x) = -\dfrac{1}{2x} - 1 = -\dfrac{2x+1}{2x}.$
- **Variations de $g$**

  On a $\forall x > 0$, $g'(x) < 0$, donc la fonction $g$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

**3.** **a)** *(Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée $\alpha$, sur $]0\,;+\infty[$.)*

La fonction $g$ est :
- continue sur $]0\,;+\infty[$
- strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection monotone sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $g$ réalise une bijection : $]0\,;+\infty[ \to ]\lim\limits_{+\infty} f\,;\lim\limits_{0^+} f[ = ]-\infty\,;+\infty[ = \mathbb{R}$.

En particulier, le réel 0 admet un unique antécédent $\alpha = g^{-1}(0) \in ]0\,;+\infty[$ par $g$.

**b)** *(Justifier que : $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.)*

On a :
- $g(1) = 2 - \frac{1}{2}\ln(1) - 1 = 1 \geqslant 0$
- $g(\mathrm{e}) = 2 - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} = \frac{3}{2} - \mathrm{e} \leqslant 0$ *(car $\mathrm{e} > 2 > \frac{3}{2}$).*

Ainsi $g$ change de signes sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$, donc s'y annule. On a donc bien $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.

**Rédaction alternative** ***(plus élégante ?)***

> Ainsi, on a $g(\mathrm{e}) \leqslant 0 \leqslant g(1)$, donc par décroissance *(de $g^{-1}$)* : $1 \leqslant g^{-1}(0) = \alpha \leqslant \mathrm{e}$.

**c)** *(Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.)*

On a $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$. *(Le réel $\alpha$ est l'unique point fixe de $f$.)*

**4.** *(Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ et préciser les variations de la fonction $f$.)*

- **Dérivation**

  On a $\forall x > 0,\quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x).$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

  Il vient $f'(x) = -\dfrac{1}{2x}.$
- **Variations de $f$.** Pour $x > 0$, $f'(x) < 0$, donc $f$ est strict$^{\mathrm{t}}$ décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

**5.** **a)** *(Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$.)*

Par décroissance de $f$, donc pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, l'inégalité $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$
donne $f(\mathrm{e}) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

Or, on a :
- $f(1) = 2 - \frac{1}{2}\ln(1) = 2 \in [1\,;\mathrm{e}]$
- $f(\mathrm{e}) = 2 - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{3}{2} \in [1\,;\mathrm{e}]$

Ainsi, pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$.

**b)** *(Démontrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ *.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ $(H_n)$
- **Initialisation** On a bien : $u_0 = 1 \in [1\,;\mathrm{e}]$ $(H_0)$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose $(H_n)$ soit : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ D'après la question **5.a)** avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x) = f(u_n) = u_{n+1} \in [1\,;\mathrm{e}]$, soit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$ $(H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence $(H_n)$ est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ $(H_n)$

**6. a)** *(Vérifier que :* $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$*.)*
Pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2x}$, donc $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$ et on a donc bien : $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

**b)** *(Par l'inégalité des accroissements finis, déduire :* $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$*.)*
On a $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, donc l'application de l'inégalité des accroissements finis entre les points $x \in [1\,;\mathrm{e}]$ et $\alpha$ donne : $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$

soit : $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

**c)** *(En déduire que l'on a :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$*.)*

On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$. Il vient $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

**7.** *(Démontrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$*.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$. $(H_n)$
- **Initialisation** On a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^0}$ $(H_0)$ car $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose $(H_n)$ soit : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$.

  D'après la question précédente, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

  On applique $(H_n)$, et il vient : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n} = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^{n+1}}$. $(H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence $(H_n)$ est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$. $(H_n)$

**8.** *(Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.)*
On a montré la « majoration de l'erreur » : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$, où $\dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le th. de convergence par encadrement *(« des gendarmes » version valeur absolue)* on a donc

$$|u_n - \alpha| \to 0, \quad \text{soit} \quad (u_n) \to \alpha$$