1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

- Pour X v.a.à valeurs entières $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$: **probabilités élémentaires** $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
- Probabilité d'un événement $\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum_{k \in A} p_k$,
- **Fonction de répartition** *(définie sur $\mathbb{R}$ par)* $\forall N$: $F_X(N) \overset{(\text{def})}{=} \mathbb{P}(X \leqslant N) = \sum_{k \leqslant N} p_k$
- **Espérance :** moyenne *(des valeurs)* de X *(pondérée par ses proba élémentaires)* : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_k$
- **Variance**
  - **Définition** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
  - **König-Huygens** *(Orthographe !)* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X])^2$ et l'astuce de calcul : $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$.
- **Définition sous réserve** Si $X(\Omega)$ est infini *(p. ex. $X(\Omega) = \mathbb{N}$)*, alors $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$ sont définies **sous réserve de convergence absolue** des séries $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k$ *(Moments d'ordre 1 et 2)*

2 Lois discrètes usuelles au programme d'Ece

Le processus de Bernoulli

- Il décrit la répétition d'une épreuve de Bernoulli à 2 issues : Échec / Succès
- modélisée par des v.a. **indépendantes et identiquement distribuées** $\epsilon_1 \dots \epsilon_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- Résultat codé par une suite de **bit** *(chiffres binaires 0 ou 1)* *(exemple :* 0010011101*)*

Définitions associées

- Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ dénombre ces suites pour longueur $= n$, nb. de succès $= k$
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$: modélise le **nombre de succès** après cette répétition. *(ici : 5)*
- **Loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$: **rang d'apparition** du 1^er succès *(répétition infinie)*. *(ici : 3)*

Sommes et séries usuelles en probabilités

- **Formule du binôme et dérivées** $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Série géométrique et dérivées** Les séries suivantes convergent *ssi* $|q| < 1$, et l'on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- **Définitions de l'exponentielle** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ *(convergence $\forall \lambda$)*

$$\exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \exp(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Loi		**Paramètres**	**Valeurs** $k \in X(\Omega)$	**Proba** $\mathbb{P}(X=k)$	**Espérance** $\mathbb{E}[X]$	**Variance** $\mathrm{Var}(X)$
de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$0<p<1$	$k=0,\ 1$	$q,\ p$	p	pq
Uniforme	$\mathcal{U}\{a:b\}$	$a \leqslant b \in \mathbb{Z}$	$a \leqslant k \leqslant b$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N},\ p$	$0 \leqslant k \leqslant n$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$0<p<1$	$k \geqslant 1$	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda>0$	$k \geqslant 0$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

FIGURE 1 – Lois discrètes au programme d'ECE

Interprétation de $\mathcal{P}(\lambda)$: approximation des événements rares

Si N est grand, et p petit, avec $\lambda = pN$ « raisonnable », alors $\mathcal{B}(N,p) \sim \mathcal{P}(\lambda)$
(Semestre 2 : c'est un phénomène de ***convergence en loi*** *, noté :)*

$$\mathcal{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda) \qquad \text{pour } N \to \infty$$