Colles semaine 6 : Représentations matricielles des endomorphismes

1 La correspondance canonique $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$

On construit un **isomorphisme d'espaces vectoriels** $\Phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$, comme suit :

Applic$^{\text{on}}$ linéaire associée à une matrice

Soit l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n) \\ A \mapsto f_A, \end{cases}$

où l'application linéaire f_A **canoniquement associée** à A s'écrit : $\begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ \vec{X} \mapsto A\cdot\vec{X}, \end{cases}$.

Matrice canonique d'une *applin* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Sa réciproque est $\Phi^{-1} : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) \end{cases}$

où la **matrice canonique** de f est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

2 Endomorphismes : représentation matricielle dans une base

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1,\dots\vec{u}_n)$ une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
C'est la matrice (a_{ij}) définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\vec{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to \text{selon } \vec{u}_1 \\ \to \text{selon } \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \to \text{selon } \vec{u}_n \end{array}$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad f(\vec{u}_j) = a_{1j}\cdot\vec{u}_1 + a_{2j}\cdot\vec{u}_2 + \cdots + a_{nj}\cdot\vec{u}_n.$$

3 Similitude, relation de changement de base

- **Matrices semblables** Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices.
  On dit que A,B sont **semblables** s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** telle que : $A\cdot P = P\cdot B$
- **Opérations** La relation de similitude est compatible avec : produit, puissances, inversion.
- **Relation de changement de base pour $f \in \mathcal{L}(E)$**
  Pour deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation : $\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\text{ancienne matrice}} = \overbrace{\mathrm{Pas}\,\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'}^{\text{matrice de }\textbf{pas}\text{sage}}\cdot \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{nouvelle matrice}}\cdot \overbrace{\left(\mathrm{Pas}\,\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'\right)^{-1}}^{=\mathrm{Pas}\,\mathcal{B}'\rightsquigarrow\mathcal{B}}$.
- **Interprétation**
  Deux matrices semblables $A = P\cdot B\cdot P^{-1}$ représentent le même endomorphisme.
  (dans deux bases différentes, avec la matrice de passage P.)

4 Traduction endomorphismes $\longleftrightarrow$ matrices

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice dans une base. Menus exemples de traductions :

- **Automorphisme** [f est un automorphisme de E *(f bijectif)*] $\iff$ [A est inversible].
  (et A^{-1} est la matrice de f^{-1})
- **Relations entre endomorphismes**
  Ex$^{\text{ple}}$ des polynômes annul$^{\text{eurs}}$: $[(f-\mathrm{Id})^2\circ(f-2\,\mathrm{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}] \iff [(A-I_n)^2\cdot(A-2I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]$.
- **Sous-espaces associés**
  Recherche de sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ par les analogues pour A, puis traduction $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow E$.

5 Les questions de cours

1. La correspondance canonique $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

2. Décomposition d'un vecteur $\vec{v} \in E$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$. Définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

3. Compatibilité de la relation de similitude avec les opérations matricielles.

4. La relation de changement de bases.

5. Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire, d'une matrice.