# Colles sem. 3 : relations de comparaison, séries

## Relations de comparaisons $o$ (négligeable devant) et $\sim$ (équivalent à)

- **Négligeabilité** Notation $u_n = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.
- **Croissances comparées** pour $0 < q < r$, on a $q^n = o(r^n)$, pour $a < b$, on a $n^a = o\left(n^b\right)$.
Comparaison de : suites géométriques $(q^n)$, puissances $(n^a)$ et logarithme $(\ln(n))$.
- **Équivalence** Notation $u_n \sim (v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$. Équivalence et terme prépondérant.

## Sommes finies

- **Généralités** nombre de termes, indice de sommation, valeur moyenne
- **Propriétés** Linéarité, croissance *(majorer, minorer une somme)*, relation de Chasles
- **Sommation télescopique** Formule $\sum\limits_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ et variantes
  - Pratique du changement d'indice. *(ou directement : on développe $\sum = ... + ... + ...$, on simplifie)*
  - Télescopage et décomposition en éléments simples. L'exemple $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

## Vocabulaire des séries

- **Convergence** La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge si la **suite des sommes partielles** $\left(S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right)$ converge.
- **Somme de la série** Notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$. Exemple de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. *(télescopage $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$)*
- **Divergence grossière** Pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, il **faut** que $a_n \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$.
*(condition **pas suffisante**, contre-exemple de $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$)*

## Sommes, séries de référence

- **Sommes finies** $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. *(pour $n \in \mathbb{N}, q \neq 1$)*
- **Séries géométriques et dérivées**
La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge *ssi* $|q| < 1$. Alors :
  - $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
  - $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
  - $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1} = \frac{2}{(1-q)^3}$
- **Séries de Riemann** La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$. *(Les cas particuliers : $\alpha = 1, \alpha = 2$)*

## Critères de convergence

- **Séries à termes $\geqslant 0$ :** convergence $\Longleftrightarrow$ les sommes partielles sont majorées *(conv. monotone)*
- **Comparaison pour** $(u_n), (v_n) \geqslant 0$ si $\sum v_n$ converge, et $\left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \textbf{ ou} \\ u_n \sim v_n \textbf{ ou} \\ u_n = o(v_n) \end{array}\right\}$ alors $\sum u_n$ converge.
- **Critère de Riemann** Comparaison avec une série de Riemann $\frac{1}{n^a}$. *(En particulier $\frac{1}{n^2}$)*
- **Convergence absolue**
  - $\left[\text{ convergence } \textbf{absolue} \text{ de } \sum a_n\right] \Longleftrightarrow \left[\text{ la série des v.a. } \sum |a_n| \text{ est convergente }\right]$
  - $\left[\sum a_n \text{ cv. abs.}\right] \Longrightarrow \left[\sum a_n \text{ cv.}\right]$ *(Toute série absolument convergente est convergente.)*
*(La réciproque est fausse : contre exemple de $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$)*
  - Application des critères de convergence à $|a_n|$ par convergence absolue.

# 1 Les questions de cours

**1.** Une formule *(ou un exemple)* de la sommation télescopique

**2.** Les relations de comparaisons $u_n \equiv v_n$ et $u_n = o(v_n)$. Croissances comparées entre $(n^a)$ et $(q^n)$.

**3.** Convergence des séries de Riemann. Convergence par comparaison

**4.** Les séries géométriques-et-dérivées

**5.** Le cours sur la notion de série absolument convergente