

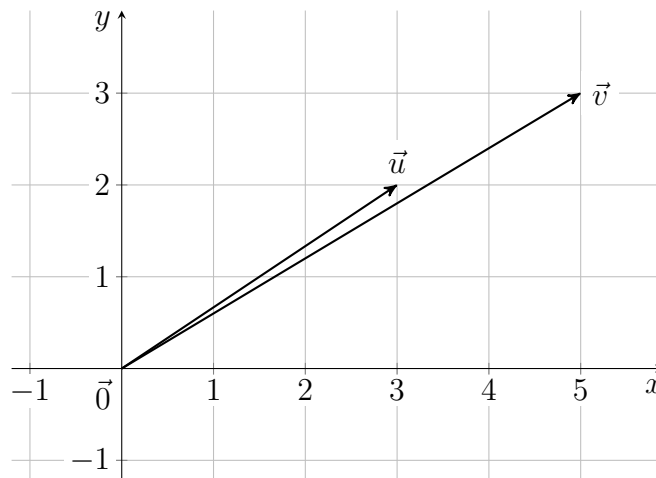
## DL 4 : Remise en route en algèbre linéaire

pour le jeudi 3 novembre

**Exercice 1** (*Une base de  $\mathbb{R}^2$* )

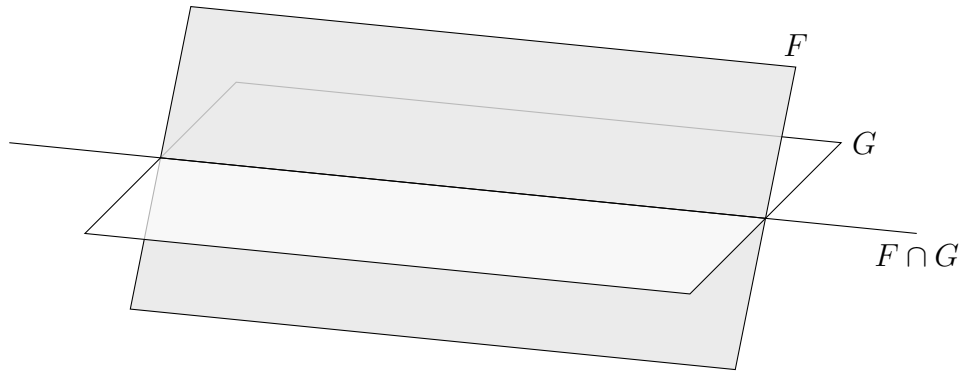
On considère les deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre l'équation  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$ , d'inconnues  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
Que peut-on en déduire sur la famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  ?
2. Résoudre l'équation  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , d'inconnues  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
3. Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , résoudre l'équation  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , d'inconnues  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
Que peut-on en déduire sur la famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  ?
4. Soit  $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .  
Que constate-t-on ?
5. On a représenté ci-dessous les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
Graphiquement, à quoi voit-on qu'ils forment une famille libre de  $\mathbb{R}^2$  ? une base de  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 2** (*Deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  (illustration page suivante)*)

Soit  $F$  le sous-ensemble (*un **plan***) de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + 2y + z = 0 \right\}$ .

1. Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Trouver une base de  $F$ .  
(on pourra appliquer l'algorithme du pivot de Gauss au « système d'équations »  $x + 2y + z = 0$ ).
3. Soit  $G = \text{Vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ . Trouver une équation du plan  $G$ .
4. Trouver une base de la droite  $F \cap G$ .



### Exercice 3

On étudie quelques propriétés de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

#### 1. Calcul des puissances de $A$

- Montrer que l'on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$  avec les relations :  $a_{n+1} = 2b_n$   
 $b_{n+1} = a_n + b_n$
- Montrer que les suites définies par  $u_n = a_n - b_n$  sont géométriques.  
 $v_n = a_n + 2b_n$
- Donner l'expression du terme général des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 2u_n + v_n$ , et trouver  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $b_n = \lambda u_n + \mu v_n$ .
- Conclure sur le terme général
- Vérifier  $\forall n \in \mathbb{N}$ , que :  $A^n = \frac{2^n}{3}E + \frac{(-1)^n}{3}F$  pour deux matrices  $E$  et  $F$  à détailler.

#### 2. Inversion de $A$

- Vérifier  $A^2 = A + 2I_3$
- En déduire que  $A \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$ .
- En déduire que la matrice  $A$  est inversible et donner l'expression de  $A^{-1}$ .

#### 3. Réduction Dans cette question, on utilise les notations suivantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Résoudre l'équation  $x^2 = x + 2$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ . (équation tirée de 2.a)
- Montrer que  $\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}(\vec{u})$ .
- Montrer que  $\text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ .
- Montrer que  $AP = PD$