Correction DL 2 : suite récurrente et acc. finis

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $\forall x>0,\quad \left| \begin{array}{l} f(x)=2-\frac{1}{2}\ln(x), \\ g(x)=f(x)-x. \end{array}\right.$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left| \begin{array}{l} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n). \end{array}\right.$

1. *(Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.)*

On a $\forall x>0$, $g(x)=2-\frac{1}{2}\ln(x)-x$.
On trouve donc les limites :

limite en ...	0^+	$+\infty$
$-\frac{1}{2}\ln(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$2-x$	2	$-\infty$
$g(x)=2-x-\frac{1}{2}\ln(x)$	$+\infty$	$-\infty$

2. *(Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0\,;+\infty[$.)*

- **Dérivation**
  On a $\forall x>0,\quad g(x)=2-\frac{1}{2}\ln(x)-x.$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.
  Il vient $\quad g'(x)=-\dfrac{1}{2x}-1=-\dfrac{2x+1}{2x}.$
- **Variations de g**
  On a $\forall x>0$, $g'(x)<0$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. a) *(Prouver que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur $]0\,;+\infty[$.)*

La fonction g est :
- continue sur $]0\,;+\infty[$
- strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection monotone sur $]0\,;+\infty[$, la fonction g réalise une bijection : $]0\,;+\infty[\,\to\,]\lim\limits_{+\infty} f\,;\lim\limits_{0^+} f[\,=\,]-\infty\,;+\infty[\,=\mathbb{R}$.

En particulier, le réel 0 admet un unique antécédent $\alpha=g^{-1}(0)\in\,]0\,;+\infty[$ par g.

b) *(Justifier que : $\alpha\in[1\,;\mathrm{e}]$.)*

On a :
- $g(1)=2-\frac{1}{2}\ln(1)-1=1\qquad\geqslant 0$
- $g(\mathrm{e})=2-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})-\mathrm{e}=\frac{3}{2}-\mathrm{e}\leqslant 0$ *(car $\mathrm{e}>2>\frac{3}{2}$).*

Ainsi g change de signes sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$, donc s'y annule. On a donc bien $\alpha\in[1\,;\mathrm{e}]$.

Rédaction alternative ***(plus élégante ?)***

> Ainsi, on a $g(\mathrm{e})\leqslant 0\leqslant g(1)$, donc par décroissance *(de g^{-1})* : $1\leqslant g^{-1}(0)=\alpha\leqslant\mathrm{e}$.

c) *(Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$.)*

On a $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0$, donc $f(\alpha)=\alpha$. *(Le réel α est l'unique point fixe de f.)*

4. *(Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$ et préciser les variations de la fonction f.)*

- **Dérivation**
  On a $\forall x>0,\quad f(x)=2-\frac{1}{2}\ln(x).$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.
  Il vient $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{2x}.$
- **Variations de f.** Pour $x>0$, $f'(x)<0$, donc f est strict^{t} décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

5. a) *(Montrer que $\forall x\in[1\,;\mathrm{e}]$, on a $f(x)\in[1\,;\mathrm{e}]$.)*

Pour $x\in[1\,;\mathrm{e}]$, par décroissance de f, l'encadrement $\quad 1\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$
donne $\quad f(\mathrm{e})\leqslant f(x)\leqslant f(1)$.

Or, on a :
- $f(1)=2-\frac{1}{2}\ln(1)=2\in[1\,;\mathrm{e}]$
- $f(\mathrm{e})=2-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})=\frac{3}{2}\in[1\,;\mathrm{e}]$. Ainsi, pour $x\in[1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x)\in[1\,;\mathrm{e}]$.

b) *(Démontrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ *.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ (H_n)
- **Initialisation** On a bien : $u_0 = 1 \in [1\,;\mathrm{e}]$ (H_0)
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ D'après la question **5.a)** avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x) = f(u_n) = u_{n+1} \in [1\,;\mathrm{e}]$, soit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$ (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ (H_n)

6. a) *(Vérifier que :* $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$*.)*
Pour $x > 0$, on a $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{2x}\right| = \frac{1}{2x}$. Donc pour $x \geqslant 1$, on a bien $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

b) *(Par l'inégalité des accroissements finis, déduire :* $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ *.)*
On a vu que $\forall t \in [1\,;\mathrm{e}]$, $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, pour $a, b \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a donc $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b - a|$.
Entre les points $x \in [1\,;\mathrm{e}]$ et α, il vient donc : $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$
soit : $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

c) *(En déduire que l'on a :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ *.)*
On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$. Il vient $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

7. *(Démontrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$*.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$. (H_n)
- **Initialisation** On a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^0}$ (H_0) car $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$.
  Or d'après la question précédente, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
  On applique (H_n) à droite, et il vient : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^{n+1}}$. (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$. (H_n)

8. *(Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.)*
On a montré la « majoration de l'erreur » : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$, où $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le th. de convergence par encadrement *(« des gendarmes » version valeur absolue)* on a donc

$$|u_n - \alpha| \to 0, \quad \text{soit} \quad (u_n) \to \alpha$$