Résumé semaine 8 : Familles de vecteurs

1 Sous-espaces vectoriels

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- **Combinaisons linéaires** Les vecteurs $\vec{v}$ qui s'écrivent : $\vec{v}\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.
- **Sous-espace vectoriel engendré** noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.
  C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$.
  C'est un sous-espace vectoriel de E, et il contient $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p$
- **Matrice de la famille**
  On a : $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p = A\Lambda$, avec $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ et $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$.

2 Familles génératrices

- **Définition** La famille $\mathcal{F}$ est génératrice dans E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
- **Décompositions selon une famille génératrice**
  $\mathcal{F}$ génératrice *ssi* tout $\vec{v} \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
  (la décomposition n'est pas unique en général)
- ***(dans*** $\mathbb{R}^n$***)* avec la matrice de la famille**
  $\mathcal{F}$ génératrice si après échelonnement de A, on a un pivot par ligne $\iff$ pas de ligne nulle
  $\iff$ pas de condition de compatibilité du système augmenté *(compatibilité automatique)*

3 Relat$^{\text{ns}}$ de dépendance linéaire, familles liées ou libres

- **Relations de dépendance linéaire** C'est une **équation** de la forme
  $$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$$
  Si $\lambda_p \neq 0$, alors $\vec{u}_p = -\frac{1}{\lambda_p}\left[\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_{p-1} \cdot \vec{u}_{p-1}\right]$
- **Famille liée** Une famille qui vérifie une relation de dépendance linéaire non-triviale.
  L'un des vecteurs se réécrit comme combinaison linéaire des autres.
- **Famille libre** Une famille $\mathcal{F}$ qui n'est **pas liée**
  $\iff$ la seule relation de dépendance linéaire satisfaite par $\mathcal{F}$ est triviale.
- **Vérifier la liberté** par appendices successifs
  $$\mathcal{F}_1 = (\vec{u}_1) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{F}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{F}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_3).$$
  *(**Vérif. chaque étape :** le nouveau vecteur n'est **pas combinaison linéaire** des autres)*

4 Bases

- **Définition** Une famille libre et génératrice
- **Coordonnées** $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de $\mathcal{F}$
  $$\iff \forall \vec{v} \in E, \quad \exists! \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{coordonnées de } \vec{v},} \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{u}_n}_{\text{décomp}^{\text{n}} \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{F}}.$$
  et
- **Bases canoniques des espaces usuels** : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.
- ***(dans*** $\mathbb{R}^n$***)* Inversibilité de la matrice de la famille**
  Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de cette famille
  1. $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n \iff A$ est inversible
  2. Recherche des coordonnées du vecteur générique $\vec{v}$ dans $\mathcal{F}$
     $\longleftrightarrow$ Inversion de la matrice A de la famille $\mathcal{F}$.

  Pour $a_1, \dots, a_n$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{F}$, on a : $A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{v}$

5 Questions de cours

1. Matrice A d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^n$. Combinaisons linéaires en fonction de A ?

2. Définition d'une famille libre. *($\mathbb{R}^n$)* quelles équations pour le montrer *(quelle solution attendue)* ?

3. Définition d'une famille génératrice $\mathcal{F}$. Montrer que tout $\vec{v}$ est alors comb. lin. de $\mathcal{F}$.

4. Définir les coordonnées d'un vecteur dans une base.

5. Montrer qu'une famille donnée est une base de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.