Colles semaine 13 - Réduction des endomorphismes

1 Applications linéaires

1.1 Vocabulaire

- **Linéarité** $f : E \to F$ est **linéaire** si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u}, \vec{v} \in E :\ \underbrace{f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}}$
- **Isomorphisme**
  $f : E \to F$ inversible *(bijective)*. Sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$.
- **Endomorphisme**
  Une application linéaire $f : E \to E$. *(on dit que E est **stable par** f)*
- **Automorphisme** Un endomorphisme inversible

1.2 Endomorphismes : représentation matricielle dans une base

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$ une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_B(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
C'est la matrice (a_{ij}) définie par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f(\vec{u}_j) = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{u}_n$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\vec{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \to \vec{u}_1 \\ \to \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \to \vec{u}_n \end{array}$$

2 Diagonalisation d'une matrice

2.1 Application linéaire associée

La « correspondance canonique » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \quad \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ [f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n] \longleftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \ldots & \vec{C}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \uparrow \\ \vec{C}_1 \\ \downarrow \end{bmatrix}}\right\} n \text{ lignes} \end{array} \right.$$

est donnée par :

$$f(\vec{X}) = A\vec{X} = x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \ldots + x_p\vec{C}_p$$
$$\vec{C}_1 = f(\vec{e}_1),$$
$$\vec{C}_2 = f(\vec{e}_2),$$
$$\vdots$$
$$\vec{C}_p = f(\vec{e}_p)$$

2.2 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si l'on peut écrire $A = P\,D\,P^{-1}$
avec *(c'est une formule de changement de base)*

- D **diagonale** : « la matrice des **valeurs** propres » *(matrice dans une nouvelle base)*
- P **inversible** : « la matrice des **vecteurs** propres » *(matrice de passage)*

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable *ssi***
la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ vaut n

2.3 Compléments

- **Autres exemples de réduction** *(si A pas diagonalisable)*
  formule de changement de base $A = PTP^{-1}$ *(par exemple T triangulaire supérieure)*
- **Matrices symétriques** toute matrice symétrique est diagonalisable.
- **Application aux calculs de puissances** Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

3 Questions de cours

1. Définition d'une application linéaire.

2. Principe de la représentation matricielle d'un endomorphisme.

3. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

4. Puissances d'une matrice diagonalisée.

5. L'équation matricielle de diagonalisation. Comment trouver P et D ?