Colles semaine 4 : Séries numériques : compléments

1 Sommes finies

- **Généralités** nombre de termes, indice de sommation, valeur moyenne
- **Propriétés** Linéarité, croissance *(majorer, minorer une somme)*, relation de Chasles
- **Sommation télescopique** Formule $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_m$ et variantes
  - On décompose la série par linéarité, puis changement d'indice.
    (éventuellement appoche directe : on développe la somme avec des ... + ... + ... et on simplifie)
  - Télescopage de décomposition en éléments simples. L'exemple $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

2 Convergence

2.1 Définitions

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si la **suite des sommes partielles** $\left(S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n\right)$ converge.

- **Somme de la série** La somme de la série est alors la limite $S=\lim_{N\to\infty} S_N$.
- **Exemple** Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$.
- **Divergence grossière** Pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, il **faut** que $a_n \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$.
  *(mais cette condition n'est **pas suffisante**, comme pour $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, divergente)*

2.2 Séries à termes positifs (SÀTP)

- **Sommes partielles** Si (a_n) est $\geqslant 0$, alors la suite $\left(S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ est **croissante**.
- **Alternative des suites croissantes.** Pour (S_n) croissante, alors *(de deux choses l'une)* :
  - (S_n) est majorée, et alors (S_n) converge,
  - (S_n) n'est pas majorée, et alors (S_n) tend vers $+\infty$.
- **Exemples** de maj-minoration des sommes partielles. Application : convergence de SÀTP.

2.3 Convergence par comparaison ***(pour les séries à termes positifs)***

- **Pour chacun des cas** $\left|\begin{array}{c} u_n \leqslant v_n, \\ \text{ou } u_n \sim v_n, \\ \text{ou } u_n = o(v_n) \end{array}\right|$ **si** $\sum v_n$ converge, **alors** $\sum u_n$ aussi.
- **Séries de référence**
  - ⋆) *Séries géométriques :* La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge *ssi* $|q|<1$, *(la somme est alors $\frac{1}{1-q}$)*
  - ⋆) *Séries de Riemann :* La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha>1$
- **Utilisation notable** si $u_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2.4 Convergence absolue

- **Définition** La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument si la série $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|$ converge.
- **Propriété fondamentale** Toute série absolument convergente est aussi convergente.
- **Contre-exemple de la réciproque**

La série alternée $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge *(vers* $\ln(2)$ *!)*, mais n'est pas absolument convergente.

- **Relation de comparaisons et convergence absolue**

Les résultats de 2.3 s'appliquent aussi avec $|u_n|$ par convergence absolue.