Programme 11 - Variables aléatoires indépendantes

1 Indépendance d'un couple

- **Définition** ***(couple discret)*** X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : \; \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$$

- **Non-indépendance** *(souvent)* recherche d'impossibilités *(ex. : $\mathbb{P}(X>Y) \overset{(?)}{\rightsquigarrow} X, Y$ pas indép^{tes})*
- **Tableau des issues** du couple (X,Y) à double entrée : valeurs de X, valeurs de Y
- **Calcul de probabilité** d'un évén^{nt} portant sur le couple *(ex. : $A = [X=Y], B = [X \geqslant Y]$)*
  1. Recherche des issues favorables à l'év^{t} $\longrightarrow$ repérage de l'év^{t} sur le tableau
  2. Sommation des probabilités élémentaires $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ favorables à l'év^{t}
- **Lois classiques** l'expression des probabilités élémentaires pour X, Y de loi
  - uniformes
  - géométriques
  - de Poisson

2 Exemples de transfert

- **Cas classiques** D'abord trouver les valeurs possibles pour $Z = f(X,Y)$, puis la loi
  - $S = X + Y$ *(év^{ts} élémentaires $[S=n] = \bigcup_k [X=k, Y=n-k]$ « obliques » sur le tableau)*
  - $M = \max(X,Y)$ *via* la fonction de répartition :
    1. $F_M(n) = \mathbb{P}(M \leqslant n) \overset{\max}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n, Y \leqslant n) \overset{\text{ind}^{\text{ce}}}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant n)$
    2. Calcul de $F_M = F_X \cdot F_Y \implies$ loi de M : $\mathbb{P}(X=n) = F_M(n) - F_M(n-1)$.
- **Propriétés de la somme** pour X, Y admettant un moment d'ordre 2 :
  - $\star$) *Linéarité de l'espérance :* $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ *(même si X, Y pas indépendantes)*
  - $\star$) *Additivité de la variance :* $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ *(si X, Y indépendantes)*
  - $\star$) *Stabilité de la loi de Poisson :* pour $\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mu) \end{array}\right\}$ indép^{tes} $\Rightarrow$ $X + Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda + \mu)$.

3 Indépendance multiple

- **Définition** des v.a. discrètes, $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

- **Lemme des coalitions** Soient $X_1, \dots, X_n$ mut^{nt} indépendantes.
  Posons $Y = f(X_1, \dots X_r)$ où $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, avec $r \leqslant n$.
  Alors $Y, X_{r+1}, \dots, X_n$ sont encore mutuellement indépendantes.
- **Exemples de transfert multiples**
  Seulement dans les cas très simples et dans des situations favorables
  - min et max *(on procède comme pour deux variables,* mutatis mutandis*)*
  - somme *(classique mais pas évident : somme de variables géométriques en DL)*

4 Questions de cours

1. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes

2. On lance deux dés à n faces. Quelle est la probabilité qu'ils tombent sur la même face ?

3. Espérance et variance de la somme indépendante.

4. La stabilité de la loi de Poisson par addition.

5. La méthode pour trouver la loi du max indépendant.