Colles semaine 5 : des séries aux *v.a.* discrètes

1 Séries géométriques et dérivées

- **Sommation géométrique** $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$.

  ⋆) *Démonstration :*
$$\begin{array}{rl} S_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\ qS_n &= \phantom{1 +{}} q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \\ \hline (1-q)S_n &= 1 - q^{n+1} \end{array}$$

- **Formule générale** pour $|\text{raison}| < 1$, on a $\sum \text{géom.} = \dfrac{1^{\text{er}} \text{ terme}}{1 - \text{raison}}$
- **Séries géométriques dérivées**

  ⋆) *Calcul de la somme partielle :* pour $q \neq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)' = \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} + o(1)_{n\to\infty}$$

  ⋆) *Formulaires des sommes :* pour $|q| < 1$ *(on peut aussi partir de $n = 0$)*
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-1} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

  ⋆) *Application :* Calcul de sommes $\sum_{n=n_0}^{\infty} (an^2 + bn + c)q^n$ pour $n_0 = 0, 1, 2$

  (on décompose le trinôme en termes de $n(n-1)$, n et 1)

2 Formulaire des variables aléatoires discrètes

*(L'exemple-« fil rouge » est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, pour laquelle **tout se calcule explicitement**)*

- **Distribution de probabilités discrète**

Une suite $(p_n)_{n\in S}$ avec
- $\forall n \in S,\ p_n \geqslant 0$ *(positivité)*
- $\sum_{n\in S} p_n$ converge *(si S infini)* et vaut 1.

Une variable aléatoire X suit cette loi si $X(\Omega) = S$ *(support de X)* et $\forall n \in S,\ \mathbb{P}(X = n) = p_n$

- **Événements X-mesurables** Pour $A \subseteq S$, on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n\in A} \mathbb{P}(X = n)$

  *(sommes des probabilités des événements élémentaires **favorables**)*
- **Fonction de répartition** $\forall N \in S,\ F_X(N) = \mathbb{P}(X \leqslant N) = \sum_{\substack{n\in S\\ n\leqslant N}} \mathbb{P}(X = n)$
- **Espérance** C'est la **moyenne** des valeurs prises par la variable aléatoire discrète X, *(moyenne)* **pondérée** par les probabilités *(**coefficients** de la moyenne, ou **poids relatifs**)*

  soit $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in S} np_n$ *(sous réserve de **convergence absolue**)*
- **Transfert pour l'espérance** *(sous réserve de cv. absolue)* $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{n\in S} \varphi(n)p_n$,

  notamment $\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{n\in S} n(n-1)p_n$.
- **Variance** *(un bon indicateur de **dispersion**)*

La formule de Kœnig-Huygens *(orthographe !)* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

et l'utile variante $= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$.

3 Les questions de cours

1. Énoncer et retrouver la formule de sommation d'une suite géométrique

2. Les séries géométriques-et-dérivées

3. Calculer la fonction de répartition de $\mathcal{G}(p)$

4. La formule de transfert pour $\mathbb{E}[X(X-1)]$

5. La formule de Kœnig-Huygens + orthographe + la variante avec $\mathbb{E}\left[X(X-1)\right]$