DL 3 : une suite de tirages aléatoires avec/sans remise

pour le jeudi 13 octobre

Une urne contient initialement
- une boule blanche et
- deux boules rouges.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :
- $B_n =$ « on obtient une boule **blanche** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,
- $R_n =$ « on obtient une boule **rouge** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,

et X_n le nombre de boules rouges contenues dans l'urne **à l'issue** du $n^{\text{ème}}$ tirage.

1. Le début de l'expérience

a) Justifier que l'on a $X_0 = 2$.

b) Justifier que l'on a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.
Donner la probabilité de chaque valeur *(la loi de X_1)*.

2. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À quelles conditions sur le $n^{\text{ième}}$ tirage : le contenu précédent de l'urne
le résultat du tirage
restera-t-il 2 boules rouges à son issue ?

b) En déduire l'égalité d'événements : $\forall n \geqslant 1,\ [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.

c) Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n)$?

d) En déduire que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner son terme général.

3. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 1)$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X_n = 1]$ en terme de $[X_{n-1} = 1]$, $[X_{n-1} = 2]$, B_n, R_n.

b) En appliquant soigneusement la formule des probabilités totales, déduire pour $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. On a donc : $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.

c) Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \dfrac{4}{3^n}$, est géométrique.

d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{4}{2^n} - \dfrac{4}{3^n}$.

4. On note T le rang du tirage où l'on tire une boule rouge pour la deuxième fois.
(après ce tirage, il ne reste donc plus dans l'urne que la boule blanche.)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité d'événements $[T \leqslant n] = [X_n = 0]$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)$.

c) *(Variante)* Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$.

d) En déduire l'expression de la probabilité $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T = n) = 2\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right]$.

e) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

f) *(Bonus)* Établir : $\mathbb{E}[T] = \frac{7}{2}$ $\quad \mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{37}{2}$ $\quad \mathrm{Var}(T) = \frac{39}{4}$.