Rappels de première année : fonctions numériques

1 Régularité des fonctions numériques *(« fonction de classe $\mathcal{C}^k$ »)*

1.1 Rappels de cours

*(Dans tout ce rappel, I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$.)*

Définition 1 (*Classe d'une fonction numérique*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** *(pour un entier $n \in \mathbb{N}$)* si
  - f est n fois dérivable **et**
  - sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue.
- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** si f est dérivable « autant de fois que l'on veut ».

Remarque : fonctions usuelles

Les fonctions usuelles ci-dessous sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

- **polynomiales** définies sur $\mathbb{R}$
- **fractions rationnelles** s'écrivant $r(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ *(pour n, d fonctions polynomiales)*, avec r définie en dehors des zéros du dénominateur $d(x)$
- **logarithme** définie sur $]0\,;+\infty[$
- **exponentielle** définie sur $\mathbb{R}$
- **puissances** $x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$ définies sur $]0\,;+\infty[$, *(pour $a \in \mathbb{R}$ une constante quelconque)*.

La vérification de la régularité d'une fonction numérique est le plus souvent une routine grâce à la proposition suivante :

Proposition 2 (*Opérations usuelles et régularité*)

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables *(respectivement de classe $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$)*
Alors chaque fonction f définie ci-dessous est aussi dérivable *(resp. de classe $\mathcal{C}^n$, resp. $\mathcal{C}^\infty$)* :

- **Combinaison linéaire** soit $f = \lambda u + \mu v$
- **Produit** soit $f = u \times v$
- **Quotient *défini*** soit $f = \frac{u}{v}$ *(le dénominateur v ne **s'annulant pas** sur I !)*
- **Composition** soit $f = u \circ v$, c'est-à-dire $f(x) = u(v(x))$,

*(les fonctions u et v étant **composables** dans l'ordre indiqué !)*
(ces fonctions u et v n'ont pas besoin d'être définies sur le même intervalle)

Fonctions problématiques

Les problèmes de régularité seront donc toujours *(?)* liés à l'un des trois cas de figure suivants :

- **Valeur absolue**
- **Partie entière**
- **Problèmes de recollement :** le problème le plus courant dans les sujets : des fonctions « définies suivant des cas » *(par exemple pour $x < 0$ et $x \geqslant 0$, voir Exercice 1)*.

1.2 Exercices

Exercice 1 (*Un exemple de recollement*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les demi-tangentes en 0. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

3. Représenter le graphe de la fonction f. *(De quelle densité f est-elle la fonction de répartition ?)*

Exercice 2 (*Un calcul de dérivée*)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{ax}$.

1. Montrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

2. Vérifier l'équation $f_n' = f_{n-1} + af_n$.

3. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (*Dérivées successives*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

3. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \neq 1, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

2 Théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection

2.1 Rappels de cours

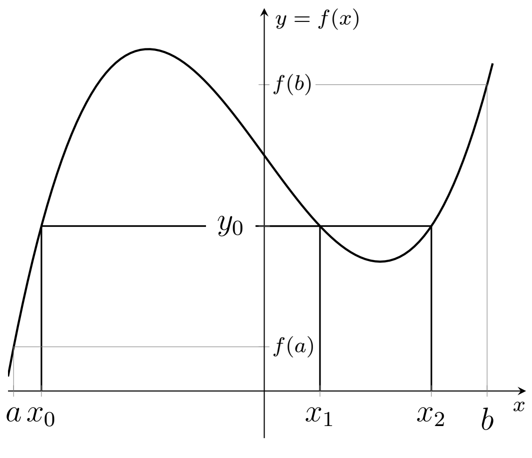
Proposition 3 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue, et $a < b \in I$.

Soit y_0 dans le segment $[f(a)\,;f(b)]$ *(ou $[f(b)\,;f(a)]$)*

Alors la valeur y_0 est prise **au moins une fois** par f entre les abscisses a et b :

$$\exists x_0 \in [a\,;b], \quad \text{tel que} \quad f(x_0) = y_0.$$



Reformulation de la conclusion

L'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une solution** pour $x \in [a\,;b]$.

Le plus souvent, on utilisera **directement** le théorème de la bijection monotone :

Théorème 4 (*de la bijection monotone*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que :

- f est **continue** sur I,
- f est **strictement monotone** sur I.

Alors la fonction f **définit une bijection** de I sur l'intervalle $f(I)$.

Remarques

- **Bijectivité de f**

Dire que la fonction f est bijective de I vers $J = f(I)$ signifie que pour **chaque** $y_0 \in J$, **l'équation des antécédents** $y_0 = f(x)$ admet **une solution et une seule** $x = x_0 \in I$.
*(Exprimer ce x en fonction de y revient à calculer la **bijection réciproque** f^{-1} de f.)*

- **Explicitation de $f(I)$**

De plus l'intervalle $f(I)$ est **délimité** par les valeurs / limites de f aux bornes de l'intervalle I.

2.2 Exercices

Exercice 4 (*D'après* Esc Ect *2013*)

*(On ne traitera que les questions **1.**, **2.** et **5.**)*
On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour $x > 0$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. *(on donne* $\ln(2) \simeq 0{,}7$.*)*

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b) Dresser le tableau de variations de f. On fera figurer :
- les limites aux bornes,
- $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *(exact + approx.)*

3. Établir que f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

4. **a)** Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\,;+\infty[$.

5. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0\,;+\infty[$ avec $\alpha < \beta$.

b) Justifier que $\beta \in]1\,;2[$.

6. Tracer l'allure de la $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. On donne $\alpha \simeq 0{,}06$ $\beta \simeq 1{,}79$.

Exercice 5 (*D'après* Ecricome Ect *2012*)

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $\forall x \in [1\,;+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

1. Donner la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Variations de f

a) Calculer $f'(x)$, pour $x \in [1\,;+\infty[$.

b) Préciser le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

3. Étude d'une réciproque

a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$.

b) Soit $t \in [1\,;+\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.

c) Soit $t \in [1\,;+\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(x) = t$.

3 Intégration

3.1 Sur un segment

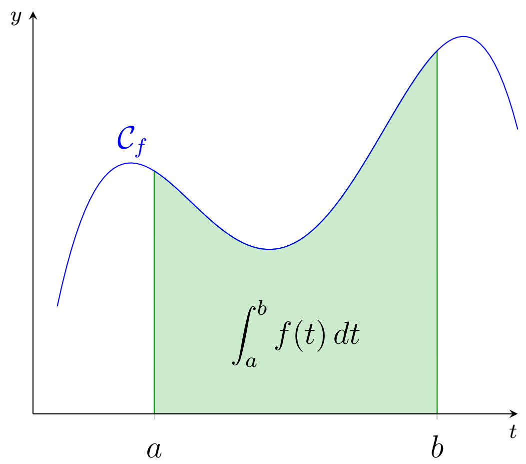
Proposition 5 (*Intégrale et primitive*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout segment $[a\,;b] \subseteq I$ sur lequel f est définie :

1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sur un segment est bien définie et $\in \mathbb{R}$.

2. la fonction f admet une **primitive** F sur I, unique à une constante près.

3. on a la relation : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b$



Remarque

La relation intégrale-primitive peut *(dans une certaine mesure...)* être prise à la fois pour définition de l'intégrale ou d'une primitive *(!)*.

On a aussi la merveilleuse technique de calcul suivante :

Proposition 6 (*Intégration par parties*)

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\underbrace{\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{int. du prod. croisé}} = \underbrace{\Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b}_{\text{terme tout intégré}} - \underbrace{\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{int. de l'}\textbf{autre}\text{ prod. croisé}}$$

Rédaction de l'intégration par parties pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$

> Les fonctions u, v définies ci-dessous sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'intégration $[1\,;2]$.
>
> $$\begin{cases} u &= \ln(t) \\ v' &= 1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u' &= \frac{1}{t} \\ v &= t \end{cases}$$
>
> On peut donc procéder à l'intégration par parties sur $I = \displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$, et il vient :
>
> $$I = \big[t\ln(t)\big]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1 = \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$$

Exercices

Exercice 6 (*Intégrations par parties Eulériennes*)

On définit $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ chacune de ces intégrales est-elle bien-définie ?

2. Calculer $F(x)$ et $G(x)$ par la bonne intégration par parties.

Exercice 7 (*Primitivation d'une fraction rationnelle*)

On définit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ cette intégrale est-elle bien-définie ?

2. Par une intégration par parties, montrer que $\forall x > -1, \quad F(x) = -\dfrac{x}{1+x} + \ln(1+x)$.

3. Retrouver la même formule en identifiant les deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \neq 1, \quad \frac{t}{(1+t)^2} = \frac{a}{(1+t)^2} + \frac{b}{(1+t)}$$

(pour retrouver la même primitive, on utilisera sans doute l'écriture : $-\frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x} - 1$)

3.2 Convergence

Étudier la convergence d'une intégrale **impropre** *(ou **indéfinie**)*, c'est étudier **la limite sur une des bornes** de l'intégrale sur un segment générique.

Définition 7 (*Deux cas de convergence*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On définit deux notions d'intégrales convergentes hors d'un segment.

- **Convergence en** $+\infty$ *(On suppose que I contient $[a\,;+\infty[$.)*

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si la limite $J = \lim\limits_{X\to+\infty} \underbrace{\int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t}_{J_X}$ existe.

On note alors $$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = J = \lim_{X\to+\infty} J_X = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **Convergence en** 0 *(On suppose que I est l'intervalle ouvert $]0\,;1]$.)*

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si la limite $K = \lim\limits_{\epsilon\to0} \underbrace{\int_\epsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t}_{K_\epsilon}$ existe.

On note alors $$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = K = \lim_{\epsilon\to0} K_\epsilon = \lim_{\epsilon\to0} \int_\epsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercices

Exercice 8 (*Intégrales convergentes de référence*)

- **Intégrales exponentielles**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge *ssi* $a > 0$ et qu'elle vaut alors $\dfrac{1}{a}$.

- **Intégrales de Riemann**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$ et qu'elle vaut alors $\dfrac{1}{\alpha-1}$.

Exercice 9 (*Convergence des intégrales Eulériennes*)

On utilisera les expressions obtenues à l'exercice 6

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.