Exemples de convergence en loi

le 14 février 2017

1 Avec des histogrammes

Exercice 1 (*Loi de Poisson*)

1. Rappeler la formule pour les probabilités de la loi de Poisson.

2. Pour n grand, de quelle loi de Poisson la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ est-elle proche ?

3. Obtenir un histogramme de la loi $\mathcal{B}\left(10000, \frac{1}{1000}\right)$.

4. Confronter avec une loi de Poisson bien choisie.

Exercice 2 (*Théorème de la limite central*)

1. Rappeler la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

2. Pour n grand, de quelle loi normale la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est-elle proche ?

3. Obtenir un histogramme de la loi $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

4. Confronter avec la densité d'une loi normale bien choisie.

2 Avec des quantiles empiriques

Exercice 3 (*La commande* `perctl`)

1. Obtenir les percentiles d'un échantillon de loi binomiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

2. Les comparer avec ceux d'un échantillon de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 4 (*La commande* `gsort`)

1. Trier un échantillon de loi binomiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

2. Tracer la courbe obtenue. Qu'observe-t-on ?

3 Convergence en loi

3.1 Le théorème central limite : version informelle

- **Contexte : un échantillon infini**
  Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite infinie de variables aléatoires. On suppose que les $X_k,\ k \geqslant 1$ sont :
  - **mutuellement indépendantes**
  - **identiquement distribuées** : elles suivent la loi d'une « variable modèle » X.
- **Hypothèses sur la loi**
  On suppose que la loi commune de X admet un moment d'ordre 2. En d'autres termes, la variable X *(et ses copies X_i)* admet une espérance et une variance.

- **Moyenne empirique**

  Pour $n \geqslant 1$, on note $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ la moyenne empirique des n premières copies de X.

  Alors $\qquad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}[X] \qquad$ et $\qquad \mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n}$.

  Par conséquent on a la convergence en probabilités $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$.

- **Une première formulation du Tcl**

  Quand n est grand, la loi de $\overline{X}_n$ est proche de la loi normale : $\mathcal{N}\left(m, \frac{1}{n}\sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

3.2 La notion de convergence en loi

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, et une « variable limite » X.

Définition 1 (*Convergence en loi*)

On dit que l'on a **convergence en loi** des distributions associées aux (X_n) vers celle de X si les **fonctions de répartition** de (X_n) **convergent** ***(simplement ou ponctuellement)*** vers celle de X.

On note : $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$

Plus précisément, on demande à avoir : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

(pour tout réel x où la fdr *F_X est continue.)*

Proposition 2 (*Caractérisations*)

- **Suite de lois discrètes entières**

  Si toutes les variables impliquées $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X sont à valeurs entières *($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$)*, alors on a convergence en loi si les distributions convergent **ponctuellement** soit :

$$\forall x \in X(\Omega), \text{ on a : } \mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = x)$$

- **Loi limite continue**

  Si la loi limite est continue : si F_X n'a pas de discontinuité *(= « atomes de probabilité »)*, alors on a convergence en loi si les probabilités d'encadrement passent à la limite :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \quad \text{avec } a \leqslant b, \quad \text{on a : } \mathbb{P}(a \leqslant X_n \leqslant b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$$

Proposition 3 (*Convergences de la loi binomiale*)

- **Loi des événements rares de Poisson**

  Si p_n est une suite de probabilités telles que $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, soit $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, alors on a la convergence en loi des distributions binomiales vers la loi de Poisson :

$$\mathcal{B}(n, p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

- **Théorème central limite binomial**

  Quand n est grand *($n \gg 1$)* et $p > 0$ fixé :

$$\mathcal{B}(n, p) \underset{n\gg 1}{\approx} \mathcal{N}(np, npq)$$

  Plus rigoureusement, si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, pq)$.