Diagonalisation et chaînes de Markov

le 17 janvier 2017

1 Diagonalisation avec Scilab

Exercice 1 (*Première diagonalisation*)

Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont : $u_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j & \textit{(sur la diagonale)} \\ 1 \text{ si } i \neq j & \textit{(partout ailleurs)} \end{cases}$

1. Définir une fonction Scilab `matriceU(n)` qui retourne U_n. *(on écrira : $U_n = (?) - I_n$.)*

On choisit `M = 1/3 * matriceU(4)`.

2. Dessiner le graphe de Markov dont M est la matrice.

3. Valeurs propres

a) Trouver le spectre de U_4 grâce à la commande `spec(M)`.

b) 1 est-il valeur propre de M ?

c) Vérifier que l'autre « les autres » valeurs propres sont dans le segment $]-1\,;1[$.

4. a) Trouver la diagonalisation $M = PDP^{-1}$ de M avec la syntaxe `[P,D] = spec(M)`.

b) Calculer D^{99}. Définir `S` la matrice limite de D^n quand $n \to \infty$?

c) Calculer M^{99}. Vérifier que l'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = P \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} D^n\right) \cdot P^{-1}$.

Exercice 2 (*Apparition de nombres complexes*)

1. Définir dans Scilab la matrice suivante : $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Vérifier que $R^2 = -I_2$. En déduire qu'un polynôme annulateur de R est $X^2 + 1$.

3. Quelles sont les valeurs propres possibles pour R ? Que donne la commande `spec(R)` ?

2 Convergence de chaînes de Markov

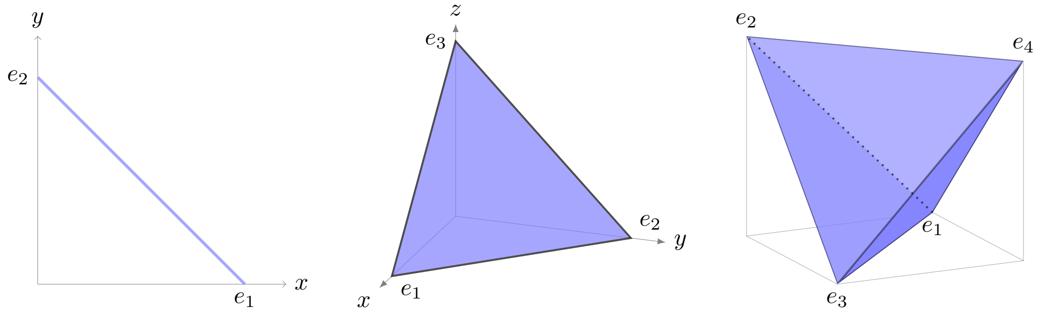
2.1 Vecteurs de probabilités

- **Définition**

Un vecteur de probabilités est un état probabiliste sur l'espace d'états fini $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
C'est une suite finie de réels $\vec{p} = (p_i)_{i=1\dots n}$ telle que : $\begin{cases} \forall i = 1\dots n,\ p_i \geqslant 0 & \textit{(positivité)} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1 & \textit{(proba. totale)} \end{cases}$

- **Espace des vecteurs de proba**

Les vecteurs de probabilités forment un tétraèdre de dimension $n - 1$

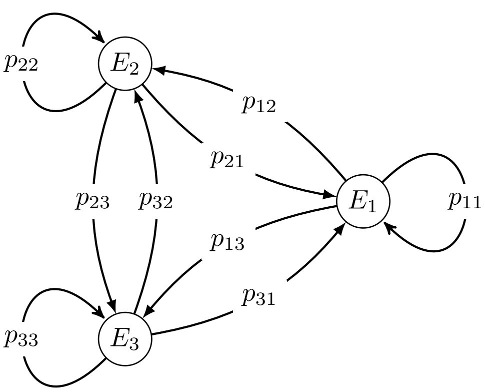


- **États déterministes**
  Les états eux-mêmes correspondent à la base canonique : $e_1 \leftrightarrow (1, 0, \ldots)$, *etc.*
  Les états déterministes forment les **sommets** de ce tétraèdre.
- **Moyennes d'états déterministes** Tous les vecteurs probabilistes s'écrivent comme une moyenne pondérée *(un barycentre)* des états déterministes.
- **Équiprobabilité**
  La situation d'équiprobabilité correspond au vecteur $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(e_1 + \ldots + e_n)$, soit le centre de gravité *(isobarycentre)* du tétraèdre.

2.2 Convergence d'une chaîne de Markov

Une **chaîne de Markov** est un **processus stochastique**

(une famille de variables aléatoires liées entre elles)



C'est une suite $X_0, X_1, \ldots X_n \ldots$ de *va* à valeurs dans un **ensemble d'états** $E = \{e_1, e_2, e_3 \ldots\}$.

Ces *va* sont liées par les probabilités conditionnelles, dite de **transition** $\mathbb{P}_{[X_t = e_j]}(X_{t+1} = e_i)$

(probabilité de passer de l'état j à l'instant t à l'état i en $t+1$)

Le graphe des transitions entre les états E_1, E_2, E_3 est décrit par la matrice de transition : $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$.

Caractère Markovien

> C'est la propriété que cette probabilité conditionnelle ne change pas si on ajoute des conditions portant sur les états passés $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_1, X_0$.

On s'intéresser particulièrement aux chaînes de Markov :

- à espace d'état **fini**
- **homogènes** : $\mathbb{P}(X_{t+1} = e_i | X_t = e_j) = p_{i,j}$ ne dépend pas de $t \in \mathbb{N}$.

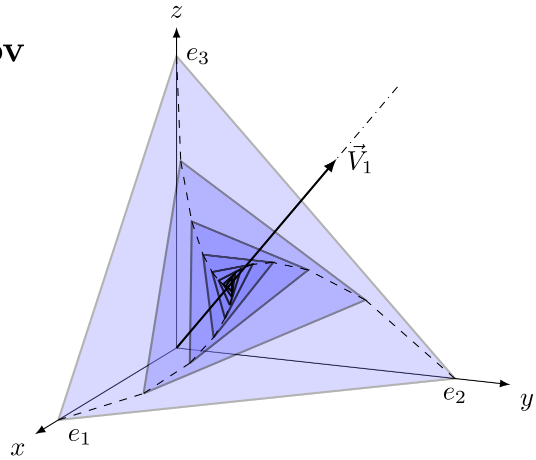
Proposition 1 (*Évolution du vecteur de proba :*)

Si $V_t = (\mathbb{P}(X_t = e_1), \mathbb{P}(X_t = e_2), \ldots, \mathbb{P}(X_t = e_n))$ est le vecteur décrivant la probabilité de chaque état au temps t, alors on a (formule des probabilités totales)

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad V_{t+1} = PV_t,$$
$$\forall t_0, t \in \mathbb{N}, \quad V_{t_0+t} = P^t V_{t_0} \quad \textit{(}V_0 \textit{ : vecteur proba initial)}$$

2.3 Convergence des chaînes de Markov

Exemple de convergence



La convergence de la dynamique de la matrice de transition $P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.05 & 0.25 & 0.7 \end{bmatrix}$

Le v⃗p associé à la valeur propre 1 est $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

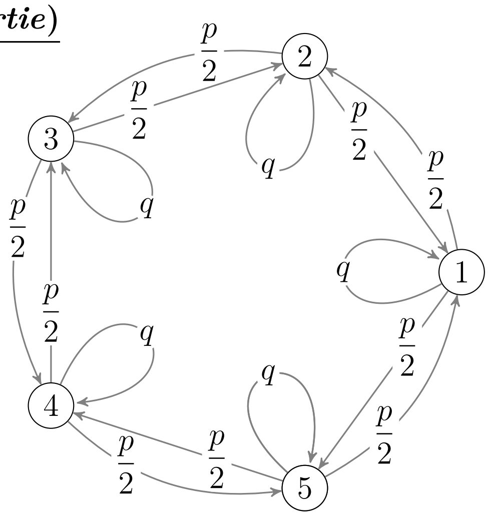
Aussi la distribution stationnaire est uniforme.

Vérif : $P^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

```
-->P
 P  =
   0.75      0.05      0.2
   0.2       0.7       0.1
   0.05      0.25      0.7
```

```
-->P^20
 ans  =
   0.3333   0.3333   0.3333
   0.3333   0.3333   0.3333
   0.3333   0.3333   0.3333
```

Exercice 3 (*Marche de Bernoulli symétrique amortie*)



Soient $p, q \in]0\,;1[$ tels que $p + q = 1$. *(p. ex. $p = 10\%$)*
On s'intéresse au graphe Markovien ci-contre :

1. Donner la matrice de transition T de ce graphe.

(On écrira $T = \frac{p}{2} \cdot M + q \cdot I_4$.)

Soit C la matrice obtenue par l'appel :

`C = circulante(4)`

(voir le fichier `circulante.sci`)

2. Écrire la matrice M en fonction de C et C^{-1}.

3. Trouver le spectre de la matrice M *(`spec(M)`.)*

4. Trouver le sous-espace propre associé à la *vp* 1. *(`kernel(M - eye)`)*

5. Quel est l'état stationnaire de la chaîne de Markov ?

6. Vérifier que les autres *vp* de M sont dans $]-1\,;1[$.

7. Que dire des valeurs propres de T ?

8. Y-a-t'il convergence vers l'état stationnaire ?