Colles semaine 9 - Pratique de la diagonalisation

1 Définitions

- **Équation des couples propres** $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ avec $\vec{X} \neq \vec{0}$.
- **Vocabulaire** dans l'équation ci-dessus, on dit que :
- λ est une **valeur propre** de A.
- $\vec{X}$ est un **vecteur propre** de A, associé à la valeur propre λ.
- **Spectre d'une matrice carrée** A **:** l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}(A)$, des valeurs propres de A.
- **Vérifier si** $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ***(λ donnée)*** **:** pivot de Gauss *(résol^n de $A\vec{X} = \lambda\vec{X} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\cdot\vec{X} = \vec{0}$)*
- **Sous-espace propre** associé à une valeur propre λ. C'est : $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
- **Reformulation des valeurs propres** On a $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$.

2 Approche directe *(seulement dans quelques cas)*

- **Valeurs propres d'une matrice triangulaire** *(Elles sont « déjà » sur sa diagonale)*
- Les **valeurs propres** d'une matrice triangulaire **sont** ses coefficients diagonaux.
- Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble de** ses coefficients diagonaux
- **Pivot de Gauss à paramètre** *(Approche déconseillée sauf demande explicite)*
  On écrit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ pas inversible *(puis pivot de Gauss avec discussion selon λ)*

3 Avec un polynôme annulateur *(méthode plus générale)*

- **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.
- **Recherche d'un polynôme annulateur** par calcul des premières puissances de A.
- **Polynôme annulateur et calcul d'inverse**
- **Condition nécessaire de valeur propres** *(**Si** λ est une vp de A, **alors** $P(\lambda) = 0$.)*
  (En testant toutes les racines λ de P, on est sûr de ne manquer aucune vp de A.)

4 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si l'on peut écrire : $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$.
avec : *(c'est une formule de changement de base)*

- D **diagonale** : « la matrice des **valeurs** propres » *(matrice dans une nouvelle base)*
- P **inversible** : « la matrice des **vecteurs** propres » *(matrice de passage)*

Diagonalisabilité

L'existence d'une diagonalisation revient à l'existence d'une **base de vecteurs propres**.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable *ssi***
la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ vaut n

5 Questions de cours

1. Définir « P est un polynôme annulateur de A. » Que dire alors des valeurs propres de A ?

2. Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ. Lien avec l'équation $A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}$.

3. La somme des dimensions des sous-espaces propres.

4. La formule de diagonalisation.

5. Principe de la représentation matricielle d'un endomorphisme.