#### Généralités sur les espaces vectoriels 1

- ▶ Notion d'espace vectoriel Un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs »  $\vec{u} \in E$ :
  - ▶ il y a un « vecteur nul » 0.
  - on y fait des **combinaisons linéaires** de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ :  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  (règles de calcul usuelles).
- ▶ **Appliquer le vocabulaire** sur les exemples au programme :
  - Les espaces cartésiens  $\mathbb{R}^n$  (à coordonnées)
  - ▶ Les espaces de matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Les espaces de polynômes  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$
- ▶ L'espace des fonctions  $f: D \to \mathbb{R}$ , définies sur  $D \subseteq \mathbb{R}$ , noté  $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ .
- ▶ L'espace des suites réelles  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- **Combinaisons linéaires** de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p$ :

les vecteurs qui s'écrivent  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \lambda_k \vec{u}_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i$  pour des coef<sup>ts</sup>  $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ .

### 2 **Sous-espaces vectoriels**

Appliquer la définition

Un **sous-espace vectoriel** F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble  $F \subseteq E$  qui

est non-vide.

(On vérifie que F contient le **vecteur nul**, soit :  $\vec{0} \in F$ .)

- est **stable** par combinaisons linéaires : pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a encore :  $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$ .  $\vec{u}, \vec{v} \in F$
- Lecture d'une définition ensembliste

L'énoncé:  $F = \{\vec{u} \in E, \text{ "équation / prop}^{\text{té}} \text{ de "} \vec{u}\}$ 

se lit: F est l'ensemble des vecteurs  $\vec{u} \in E$  qui vérifient «équation / prop<sup>té</sup>».

$$\rightsquigarrow$$
 pour vérifier :  $\vec{u} \in F$  on montre : «équation / prop<sup>té</sup>»

▶ **Sous-espace engendré** par des vecteurs  $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$ , noté  $\text{Vect}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)$ .

C'est l'**ensemble** des vecteurs qui sont **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$ .

Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Si F et G sont deux s-e.v. de E, alors  $F \cap G$  est aussi un s-e.v. de E.

 $(où F \cap G = \{vecteurs de E qui appartiennent à la fois à F et à G\})$ =  $\{vecteurs\ de\ F\ qui\ appartiennent\ aussi\ a\ G\}$ 

## **Applications linéaires**

Linéarité

 $f: E \rightarrow F$  est **linéaire** si :

$$\begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \forall \, \vec{u}, \, \vec{v} \in F \end{array} \right\} \qquad \underbrace{ f \left( \lambda \, \vec{u} + \mu \, \vec{v} \right) }_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{ \lambda f \left( \vec{u} \right) + \mu f \left( \vec{v} \right) }_{\text{c.l. des images}}$$

### Vocabulaire (\*-morphismes)

	quelconque	E = F (E est stable par f)
qcque	app. lin.	endom.
bijectif	<b>iso</b> m.	autom.

▶ Noyau d'une applon linéaire  $f: E \rightarrow F$ 

L'ensemble des vecteurs annulés :  $Ker(f) = {\vec{v} \in E, f(\vec{v}) = \vec{0}}.$ 

- ▶ Le noyau de  $f: E \rightarrow F$  est un sous-espace vectoriel de E.
- L'application f est injective ssi  $Ker(f) = \{\vec{0}\}.$
- ▶ Image d'une application linéaire l'ensemble des valeurs :  $Im(f) = \{\vec{y} \in F, \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x})\}$
- ▶ Opérations sur les applications linéaires comb<sup>ns</sup> linéaires ( $\mathcal{L}(E,F)$  est un (ev.)), compositions.
- $\varphi_A : \begin{cases} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ \vec{X} \mapsto A \cdot \vec{X}. \end{cases}$ ▶ Appl<sup>n</sup> lin. associée à une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

# 4 Questions de cours

**1.** Expliquer la structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .



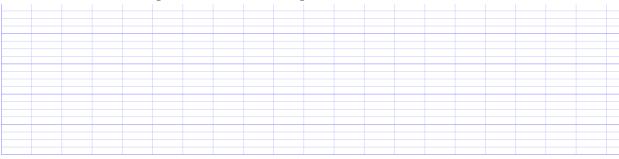
**2.** Montrer que  $\{P \in \mathbb{R}[X], P(5) = 0\}$  est un espace vectoriel.



**3.** Définition du noyau d'une applin. De quel espace vectoriel est-ce un *s-e.v.*?



**4.** Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace E.



**5.** Définition du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ .

