Tp Scilab 5 : Simulations de chaînes de Markov

1 Définitions

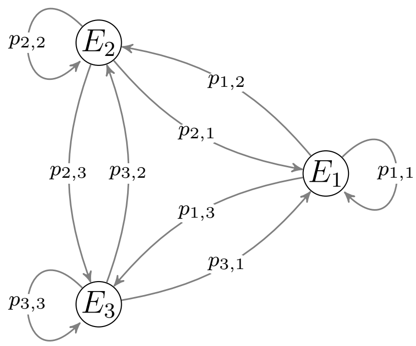
Une **chaîne de Markov** est un **processus stochastique** : une famille de variables aléatoires liées entre elles et que l'on étudie toutes ensembles.

En l'occurrence, elle prend la forme d'une suite $X_0, X_1, \dots X_n \dots$ de variables aléatoires toutes à valeurs dans un **ensemble d'états** $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots\}$.

Définition 1 (*Probabilités de transition*)

La chaîne de Markov est décrite par les probabilités conditionnelles dites de **transition** $\mathbb{P}(X_{t+1} = e_i | X_t = e_j)$:

la « proba. de passer »
- de l'état j à l'instant t
- à l'état i à l'instant suivant $t+1$.



Le graphe des transitions entre les états E_1, E_2, E_3 encode la matrice *(des probabilités)* de transition : $P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{bmatrix}$

La première colonne donne ainsi les probabilités de transition depuis l'état E_1, *etc.*

2 Simulation en Scilab

Syntaxe de la commande `grand` avec option "markov"

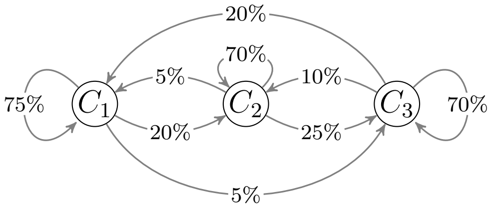
```
//A est la matrice de transition choisie
traj = grand (100 , "markov" , A' , 1 )  ;  // retourne une trajectoire de Markov
scf ; plot (traj)
e = gce () ,
legend ("une trajectoire") ;
```

Exercice 1 (*Simulations de classes sociales*)

On suppose que corps social d'une certain pays est subdivisé en trois strates C_1, C_2, C_3. On se propose de modéliser les trajectoires de mobilité sociale dans cette société pour les individus d'une même lignée par une chaîne de Markov sur ces trois états C_1, C_2, C_3.

Chaque individu de la lignée :
- naît dans une de ces classes C_n, puis
- acquiert son propre statut social C_a.

(la classe de naissance de ses enfants)



Au sein d'une lignée, la probabilité qu'un individu intègre chaque classe est déterminée par celle de sa naissance $\mathbb{P}(C_n \rightsquigarrow C_a)$selon le graphe suivant :

1. Entrer la matrice de transition sous Scilab : `P = [...]`
2. Simuler une lignée grâce à

2.1 Avec le fichier `circulante.sci`

Exercice 2 (*Matrice de transition*)

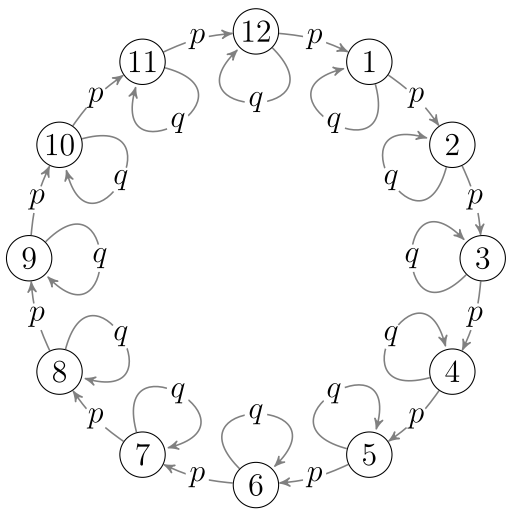
1. Utiliser le programme `circulante.sci` pour définir une matrice de transition correspondent à la marche de Bernoulli centrée.
2. Modéliser une trajectoire de Markov.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 (*L'horloge détraquée*)

Au passage de chaque heure, l'aiguille peut

- passer à la graduation suivante, avec probabilité p
- rester sur la même, avec probabilité $q = 1 - p$



1. Écrire la matrice de transition pour quelques états.
2. Décrire la matrice de transition pour l'état 12.
3. Entrer la matrice de transition grâce à la fonction `circulante`.