TD 3 : Séries numériques

1 Études de suites, relations de comparaison

Exercice 1 (*Deux suites adjacentes*) : :

On définit deux suites $(u_n),(v_n)$ par :
- $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$
- $\forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$

1. Déterminer le sens de variations des suites (u_n) et (v_n).

2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire u_n une somme et en déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Exercice 2 (*Application des croissances comparées*) : :

1. Trouver la limite des expressions suivantes quand $n \to \infty$.

$$a_n = \frac{\ln(n)}{n}, \qquad b_n = \frac{2^n}{n}, \qquad c_n = \frac{n^3 \cdot \ln(n)}{\mathrm{e}^n}, \qquad d_n = \frac{n \cdot 2^n}{4^n}, \qquad e_n = \mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^n.$$

2. Trouver le terme prépondérant dans les expressions suivantes et en déduire un équivalent.

$$a_n = n + n^2 + \ln(n), \qquad b_n = n + \frac{n}{2^n} + n\ln(n), \qquad c_n = n \cdot 3^n + n^3 \cdot 2^{2n}, \qquad d_n = 3^n + 2^{n^2}.$$

3. Déterminer la nature *(conv./div.)* des séries suivantes : *(on ne demande pas de calculer les séries)*

$$A = \sum \frac{n^2}{2^n} \qquad B = \sum \frac{\ln(n)}{n^3} \qquad C = \sum \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln(n)} \qquad D = \sum \frac{1}{n!} \qquad E = \sum \frac{\ln(n)}{n^2}$$

2 Exemples de sommations télescopiques

Exercice 3 (*Sommations télescopiques*) :entrainementSommTel:

1. Calculer les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

2. Par sommation télescopique, calculer les sommes partielles et totales des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+2n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 4 (*Convergence de la série de Bâle $\sum \frac{1}{k^2}$*) :serieBale:

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, l'on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$. *(On pourra sommer télescopiquement : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)*

2. Application à $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

b) En déduire que la suite des sommes partielles $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est majorée.

Conclure sur sa convergence et majorer sa somme.

Exercice 5 (*Séries en racines carrées*) :seriesRacCar:

1. Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression : $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'identité : $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
   Que dire de la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$?
3. Montrer, pour $N \in \mathbb{N}$, que : $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{N+1}$.
   La série associée converge-t-elle ?
4. Donner un équivalent du terme général de la série ci-dessus.
   En déduire la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 6 (*Deux sommations télescopiques, d'après Edhec 2012 et 2013*) :somTelEdhec:

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}. \end{cases}$

1. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On admet que la limite de la suite (u_n) est 1. *(théorème du point fixe)*

2. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la somme télescopique $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}-u_k\right)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $(u_{k+1}-u_k)$ en fonction de v_k.
   b) Donner la nature, et la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k^2$.

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

4. a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.
   b) Utiliser le résultat admis pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire l'écriture $u_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{\epsilon(n)}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$.

3 Manipulations de séries

Exercice 7 (*Une intégration terme-à-terme* (*développement Taylorien de* ln(2))) :serieLeibniz:

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^{0} t^n \,\mathrm{d}t$. En déduire que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^{0} \frac{1-t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left|\int_{-1}^{0} \frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{0} |t|^{N+1}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la limite quand $N \to +\infty$.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$.

Exercice 8 (*Relations entre les séries géométriques dérivées*) :relationsGeomDer:

On considère les suites et séries géométriques dérivées de raison $q \in]-1;1[$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = q^n$, $t_n = n \cdot q^{n-1}$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot q^{n-2}$ *(On admet que les séries cvg.)*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \quad T = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n \quad U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1. a) Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$.
   b) Par un changement d'indice, en déduire la relation : $S = 1 + q \cdot S$.
   c) Résoudre, pour trouver la valeur connue : $S = 1 + q \cdot S$.
2. a) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, la relation : $t_{n+1} = s_n + q \cdot t_n$.
   b) Par un changement d'indice, en déduire la relation : $T = S + q \cdot T$.
   c) Résoudre pour trouver la valeur connue : $T = \frac{1}{(1-q)^2}$.
3. a) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, la relation : $u_{n+1} = t_n + q \cdot u_n$.
   b) En déduire la relation : $U = T + q \cdot U$.
   c) Résoudre pour trouver la valeur : $U = \frac{1}{(1-q)^3}$.
   Retrouver ainsi la somme, connue, de la série géométrique dérivée seconde.

Exercice 9 (*Divergence de la série harmonique*) :divergenceSHarmonique:

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
   Pour cela on pourra : *(au choix!)*
   a) Utiliser l'inégalité $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$. *(ou bien : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$)*
   b) Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur le segment $[n;n+1]$.
   c) Écrire l'équation de la tangente au graphe $y = \ln(x)$ en $x_0 = n$.
   Conclure par concavité de ln.
   d) Faire le tableau de variations sur $]0;+\infty[$ de la fonction $u : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$.
   e) Encadrer l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $h_n \geqslant \ln(n+1)$.
3. En déduire que la série harmonique $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge.
4. On admet que pour $n \geqslant 1$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \geqslant \frac{1}{n+1}$.
   a) Montrer l'adjacence des suites définies par :
   - $a_n = h_n - \ln(n+1)$
   - $b_n = h_n - \ln(n)$

   b) Proposer un équivalent de la suite h_n.

Exercice 10 (*Une propriété de la série harmonique*) : :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *(on a donc $h_0 = 0$)* On rappelle l'équivalent : $h_n \sim \ln(n)$.

1. Montrer, pour $k \in \mathbb{N}$, la relation : $h_k^2 - h_{k-1}^2 = 2 \cdot \frac{h_k}{k} - \frac{1}{k^2}$.

2. Par une sommation télescopique, en déduire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_n^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$.

3. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{h_k}{k}$ est divergente.

Donner un équivalent des sommes partielles de cette série.

4. Pour $x \geqslant 1$, on pose : $I_x = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

a) Par une intégration par parties, montrer que : $I_x = \ln(x)^2 - I_x$.

b) En déduire l'expression de I_x.

Faire le rapprochement avec l'équivalent trouvé de la série ci-dessus.

4 Exemples de séries en probabilités

Exercice 11 (*Moments du temps de deuxième atteinte*) : :

On répète des issues indépendantes d'une expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ soit $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$.
On note T_2 le rang d'apparition du **deuxième** succès, avec $p \in]0;1[$, et $q = 1 - p$.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire T_2 peut-elle prendre ?

La loi de T_2 est donnée pour $k \geqslant 2$, par : *(formule admise)* $\mathbb{P}(T_2 = k) = \underbrace{(k-1)\,p\,q^{k-2}}_{\text{exact}^{\text{t}}\text{ 1 succès avant le temps } k}\,p$.

2. Vérifier que l'on définit ainsi une loi discrète de probabilités.

3. Démontrer que l'on a : $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2}{p}$.

4. On admet la formule : $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)q^{k-3} = \frac{6}{(1-q)^4}$.

a) En déduire la valeur de l'espérance : $\mathbb{E}\left[T_2(T_2 - 2)\right]$.

b) Montrer que : $\mathrm{Var}(T_2) = \frac{2q}{p^2}$.

Exercice 12 (*Exemples de calculs pour une loi finie*) : :

On note M le plus grand des résultats obtenus au jet de 2 dés à n faces *(num. de 1 à $n \geqslant 1$)*.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire M peut-elle prendre ?

On admet que la loi de M est donnée, pour $k \in [\![1, n]\!]$, par : $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k-1}{n^2}$

2. Vérifier que cette expression définit bien une loi discrète de probabilités.

3. Calculer la fonction de répartition de M.

4. Montrer que l'on a : $\mathbb{E}[M] = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$

5. *(Pour ceux qui aiment les calculs)* On donne $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrer que $\mathbb{E}\left[M^2\right] = \frac{3n^3+4n^2-1}{6n}$ et en déduire $\mathrm{Var}(M)$.

5 Corrections

Corrigé Ex (Deux suites adjacentes)

: :

On définit deux suites (u_n),(v_n) par :
- $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$
- $\forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$

1. *Déterminer le sens de variations des suites (u_n) et (v_n).*

- **Variations de (u_n)**
  On a $\forall n \geqslant 1$: $\quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.
  La suite (u_n) est donc croissante.
- **Variations de (v_n)**
  On a $\forall n \geqslant 1$: $\quad v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
  $$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0.$$
  La suite (v_n) est donc décroissante.

2. *En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*

On a bien les hypothèses :
- (u_n) croissante, (v_n) décroissante
- $\lim(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc bien adjacentes.

3. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire u_n une somme et en déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.*

On a : $\quad u_n = u_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
La suite (u_n) est convergente d'après le théorème des suites adjacentes.
Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

Corrigé Ex 3 (Sommations télescopiques)

:entrainementSommTel:

1. *Calculer les fractions suivantes :*

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

On réduit au même dénominateur :
- $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{4n^2-1}$.
- $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$.
- $\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)-2n(n+2)+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = 2 \cdot \frac{(n+1)^2-n(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.
- $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Par sommation télescopique, calculer les sommes partielles et totales des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+2n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Corrigé Ex 5 (Séries en racines carrées)

:seriesRacCar:

1. *Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression :* $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

On développe par l'identité remarquable $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

Il vient : $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2=1$.

2. *En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'identité :* $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Que dire de la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *?*

- **Obtention de la formule**

  On simplifie par $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ dans la formule : $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1$.

  On obtient bien : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

- **Calcul de la limite** On a donc : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$.

3. *Montrer, pour $N \in \mathbb{N}$, que :* $\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{N+1}$.

La série associée converge-t-elle ?

- **Calcul de la somme**

  On applique la formule trouvée pour la fraction, et une sommation télescopique.

  Il vient : $\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{N}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{N+1}-\sqrt{0}=\sqrt{N+1}$.

- **Convergence de la série ?**

  La suite des sommes partielles est donnée par $\sqrt{N+1}$. Elle est donc divergente.

  La série diverge donc. *(**Remarque** : son t.g. tend bien vers 0 : la divergence n'est donc pas grossière !)*

4. *Donner un équivalent du terme général de la série ci-dessus.*

En déduire la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

- **Équivalent du terme général**

  On a l'équivalent $\sqrt{n+1}\sim\sqrt{n}$, d'où : $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\sim\frac{2}{\sqrt{n}}$.

- **Conclusion**

  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est à termes $\geqslant 0$, et son terme général est équivalent à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

  Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ est divergente, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est aussi divergente.

  Série de Riemann

  > La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^a}$, pour $a=\frac{1}{2}$.
  >
  > La série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}$ en est une autre pour $a=1$.

Corrigé Ex 7 (Une intégration terme-à-terme *(développement Taylorien de* $\ln(2)$*)*)

:serieLeibniz:

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_{-1}^{0}t^n\,\mathrm{d}t$. *En déduire que* $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_{-1}^{0}\frac{1-t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

- **Calcul des intégrales**

  On calcule en primitivant : $\displaystyle\int_{-1}^{0} t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}\cdot t^{n+1}\right]_{-1}^{0} = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- **Sommation des intégrales** On somme les égalités obtenues par linéarité de l'intégrale.

  Il vient bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\int_{-1}^{0} t^k\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} t^k}_{\substack{\text{somme géom}\\ \text{de raison } t\neq 1}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

- **Plan d'étude** On étudie la convergence des sommes partielles.

  On a obtenu l'écriture : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_{-1}^{0}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_{-1}^{0}\frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

  La première intégrale est constante, et vaut $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \big[-\ln(1-t)\big]_{-1}^{0} = \ln(2).$

  Il nous reste donc à étudier la limite de la deuxième.

2. *Montrer* $\forall N\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\int_{-1}^{0}\frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{0}|t|^{N+1}\,\mathrm{d}t$, *et en déduire la limite quand* $N\to+\infty$.

Par inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\left|\int_{-1}^{0}\frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{0}\left|\frac{t^{N+1}}{1-t}\right|\mathrm{d}t$

Or l'intégrande $\displaystyle\left|\frac{t^{N+1}}{1-t}\right| = \frac{|t|^{N+1}}{1-t}$ est majoré par $|t|^{N+1}$, car pour $t\in[-1;0]$, on a : $1\leqslant 1-t\leqslant 2$.

Il vient donc bien : $\displaystyle\left|\int_{-1}^{0}\frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{0}|t|^{N+1}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1}t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+2}.$

3. *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ *converge et que sa somme vaut* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}$.

Par convergence par encadrement, la partie variable $\displaystyle\left|\int_{-1}^{0}\frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \longrightarrow 0.$

Il reste donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_{-1}^{0}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - \int_{-1}^{0}\frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d} \longrightarrow \ln(2).$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k+1}$ est donc convergente, et sa somme est $\ln(2)$.

Remarque : pas de convergence absolue

> On vient de voir que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k+1}$ est convergente.
> Cependant, la série des valeurs absolues $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k+1}$ est la série harmonique.
> La série harmonique est divergente, car c'est une série de Riemann d'exposant 1.
> La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k+1}$ *(série de Leibniz)* est donc un exemple de série convergente, mais qui n'est pas absolument convergente.

Corrigé Ex 8 (Relations entre les séries géométriques dérivées)

`:relationsGeomDer:`

On considère les suites et séries géométriques dérivées de raison $q\in\,]-1;1[$.
On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\quad s_n = q^n,\qquad t_n = n\cdot q^{n-1},\quad u_n = \frac{n(n-1)}{2}\cdot q^{n-2}$ *(On admet que les séries cvg.)*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \qquad T = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n \qquad U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1. **a)** *Montrer que :* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$.

On a bien : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = 1 + q \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$.

b) *Par un changement d'indice, en déduire la relation :* $S = 1 + q \cdot S$.

Par le changement d'indice $k = n-1$, on trouve : $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = S$.

Il reste donc bien la relation : $S = 1 + q \cdot S$.

c) *Résoudre, pour trouver la valeur connue :* $S = 1 + q \cdot S$.

On résout l'équation $S = 1 + q \cdot S$ pour trouver S.

Il vient : $(1-q) \cdot S = 1$, d'où $S = \frac{1}{1-q}$. *(la valeur bien connue!)*

2. **a)** *Montrer, pour* $n \in \mathbb{N}$, *la relation :* $t_{n+1} = s_n + q \cdot t_n$.

On a bien : $t_{n+1} = (n+1) \cdot q^n = q^n + q \cdot nq^{n-1} = s_n + q \cdot t_n$.

b) *Par un changement d'indice, en déduire la relation :* $T = S + q \cdot T$.

On écrit : $T = \sum_{n=1} t_n = \sum_{k=0} t_{k+1} = \sum_{k=0} (s_k + q \cdot t_k) = \sum_{k=0} s_k + q \cdot \sum_{k=0} t_k = S + q \cdot T$.

c) *Résoudre pour trouver la valeur connue :* $T = \frac{1}{(1-q)^2}$.

On résout l'équation $T = S + q \cdot T$ pour trouver T.

Il vient : $(1-q) \cdot T = S$, d'où $T = \frac{S}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$. *(la valeur bien connue!)*

3. **a)** *Montrer, pour* $n \in \mathbb{N}$, *la relation :* $u_{n+1} = t_n + q \cdot u_n$.

On a bien : $u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot q^{n-1} = n \cdot q^{n-1} + q \cdot \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2} = t_n + q \cdot u_n$.

b) *En déduire la relation :* $U = T + q \cdot U$.

On écrit : $U = \sum_{n=2} u_n = \sum_{k=0} u_{k+1} = \sum_{k=1} (t_k + q \cdot u_k) = \sum_{k=1} t_k + q \cdot \sum_{k=0} u_k = S + q \cdot U$.

c) *Résoudre pour trouver la valeur :* $U = \frac{1}{(1-q)^3}$.

Retrouver ainsi la somme, connue, de la série géométrique dérivée seconde.

On résout l'équation $U = T + q \cdot U$ pour trouver U.

Il vient : $(1-q) \cdot U = T$, d'où $U = \frac{T}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^3}$.

On a bien trouvé : $\sum_{n=2} n(n-1) \cdot q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$. *(la valeur bien connue!)*

Corrigé Ex 9 (Divergence de la série harmonique)

:divergenceSHarmonique:

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.

Pour cela on pourra : *(au choix!)*

a) *Utiliser l'inégalité* $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. *(ou bien :* $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$*)*

Par concavité de la fonction ln, la courbe de ln est en dessous de ses tangentes.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = x - 1$.

Ainsi, pour $x > 0$, on trouve $\ln(x) \leqslant x - 1$.

On prend $x = 1 + \frac{1}{n}$, il vient : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$. On a donc obtenu le résultat demandé.

b) *Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction* ln *sur le segment* $[n;n+1]$.

On applique l'inégalité des accroissements finis

Il vient alors bien : $\ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \Big(\sup\limits_{x\in[n;n+1]} \ln'(x)\Big)\cdot\big[(n+1)-n\big]$.

$$= \Big(\sup_{x\in[n;n+1]} \tfrac{1}{x}\Big)\times 1 = \tfrac{1}{n}$$

c) *Écrire l'équation de la tangente au graphe $y=\ln(x)$ en $x_0=n$.*

Conclure par concavité de ln.

La tangente en x_0 d'une fonction f a pour équation : $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Ici, il vient : $y=\ln(n)+\frac{1}{n}\cdot(x-n)$

Par concavité, on trouve donc : $\ln(n+1)\leqslant \ln(n)+\frac{1}{n}\cdot\big[(n+1)-n\big]$

d) *Faire le tableau de variations sur $]0;+\infty[$ de la fonction $u : x\mapsto \ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x}$.*

On dérive, pour $x>0$: $u(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x}$.

$$u'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}\cdot\left[x^2-x(x+1)+(x+1)\right]=\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}\geqslant 0$$

La fonction u est donc croissante.

De plus : $\lim\limits_{+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=0$.

Ainsi, $\forall x>0$, on a : $u(x)\leqslant \lim\limits_{+\infty} u = 0$.

On a donc trouvé $\forall x>0$, que : $\ln(x+1)-\ln(x)\leqslant\frac{1}{x}$.

e) *Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}$, pour $n\in\mathbb{N}$.*

On a bien : $\ln(n+1)-\ln(n)=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{n}=\frac{1}{n}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $h_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

2. *En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, que $h_n\geqslant\ln(n+1)$.*

On applique l'inégalité précédente, et une sommation télescopique.

On trouve bien : $h_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1)-\ln(k)\right]=\ln(n+1)-\ln(1)$

Ainsi, pour $n\geqslant 1$, on a : $h_n\geqslant\ln(n+1)$.

3. *En déduire que la série harmonique $\sum\limits_{k\geqslant1}\frac{1}{k}$ diverge.*

Pour $n\geqslant 1$, on a : $h_n\geqslant\underbrace{\ln(n+1)}_{\to+\infty}$.

Ainsi, la suite (h_n) tend vers $+\infty$. La série harmonique est donc bien divergente.

4. On admet que pour $n\geqslant 1$, on a $\ln(n+1)-\ln(n)\geqslant\frac{1}{n+1}$.

a) *Montrer l'adjacence des suites définies par :*
- $a_n=h_n-\ln(n+1)$
- $b_n=h_n-\ln(n)$

On vérifie :

- $(a_n)\nearrow$. $\forall n\geqslant 1$: $a_{n+1}-a_n=h_{n+1}-\ln(n+2)-[h_n-\ln(n+1)]$
$$=h_{n+1}-h_n-\big[\ln(n+2)-\ln(n+1)\big]$$
$$=\frac{1}{n+1}-\big[\ln(n+2)-\ln(n+1)\big]\geqslant 0$$
- $(b_n)\searrow$. $\forall n\geqslant 1$: $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln(n)]\leqslant 0$.
- $\lim(b_n-a_n)=0$. En effet, $b_n-a_n=\ln(n+1)-\ln(n)\to 0$.

b) *Proposer un équivalent de la suite h_n.*

On a montré que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une certaine limite $\gamma \in \mathbb{R}$.

On peut donc écrire : $b_n = h_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$, soit $h_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

On obtient donc l'équivalent : $h_n \sim \ln(n)$.

Corrigé Ex (Une propriété de la série harmonique)

: :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *(on a donc $h_0 = 0$)* On rappelle l'équivalent : $h_n \sim \ln(n)$.

1. *Montrer, pour $k \in \mathbb{N}$, la relation : $h_k^2 - h_{k-1}^2 = 2 \cdot \frac{h_k}{k} - \frac{1}{k^2}$.*

On écrit : $h_{k-1} = h_k - \frac{1}{k}$.

Il vient : $h_k^2 - h_{k-1}^2 = (h_k - h_{k-1}) \cdot (h_k + h_{k-1}) = \frac{1}{k} \cdot (2 \cdot h_k - \frac{1}{k}) = 2 \cdot \frac{h_k}{k} - \frac{1}{k^2}$.

2. *Par une sommation télescopique, en déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} = \frac{1}{2} \cdot (h_n^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$.*

On utilise le calcul précédent, puis une sommation télescopique après avoir séparé les termes.

Il vient : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left[h_k^2 - h_{k-1}^2 + \frac{1}{k^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left[h_k^2 - h_{k-1}^2\right] \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_n^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$.

3. *Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{h_k}{k}$ est divergente.*

Donner un équivalent des sommes partielles de cette série.

On a vu que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_n^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$.

Or
- $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^2 = \infty$
- la série $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ est convergente.

Ainsi la suite des sommes partielles : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} \longrightarrow +\infty$.

La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{h_k}{k}$ est divergente, et on a l'équivalent : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h_k}{k} \sim \frac{1}{2} \cdot h_n^2 \sim \frac{1}{2} \cdot \ln(n)$.

4. Pour $x \geqslant 1$, on pose : $I_x = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

a) *Par une intégration par parties, montrer que : $I_x = \ln(x)^2 - I_x$.*

On intègre par parties : $I_x = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \left[\ln(t)^2\right]_1^x - \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \ln(x)^2 - I_x$.

b) *En déduire l'expression de I_x.*

Faire le rapprochement avec l'équivalent trouvé de la série ci-dessus.

- **Calcul de I_x**

  On a donc : $2 \cdot I_x = \ln(x)^2$, d'où : $I_x = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)^2$.

  Calcul plus direct

  > En fait on peut tout simplement utiliser la primitive $\int u' \cdot u = \frac{u^2}{2}$.
  > Avec $u = \ln(x)$, on trouve immédiatement : $I_x = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)^2$.

- **Interprétation** On connaît l'équivalent : $\frac{h_k}{k} \sim \frac{\ln(k)}{k}$.
  On remplace ici la sommation par une intégrale *(sommation « continue »)*.
  On s'attend bien à retrouver le même équivalent *(*$\frac{\ln(n)^2}{2}$*)*.
  En effet, on a même égalité pour l'intégrale : $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(x)^2}{2}$.