Colles semaine 2 : suites et puissances de matrices *(rappels)*

1 Rappels sur les suites numériques

1.1 Suites de référence

- **Suites arithmétiques**
  - Relation de récurrence, pour une raison $r \in \mathbb{R}$ **constante** : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$.
  - Terme général $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + rn$.
  - Formule de sommation $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$, *(en particulier $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.)*
- **Suites géométriques**
  - Relation de récurrence, pour une raison $q \in \mathbb{R}$ **constante** : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\, u_n$.
  - Terme général $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, q^n$.
  - Formule de sommation *($q \neq 1$)* $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$, *(en partic. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$)*
- **Suites arithmético-géométriques**
  - Relation de récurrence , pour $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b$,
  - Équation du point fixe : on trouve $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = a\ell + b$.
  - Obtention d'une suite géométrique en soustrayant : $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$
  - Conclusion terme général $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$

1.2 Exemples de suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

- Transformation de relations $f(x) \longleftrightarrow x$ en relations $u_{n+1} \longleftrightarrow u_n$
  *(**exemple :** « $\forall x, \ f(x) \leqslant x$ » implique « $\forall n, \ u_{n+1} \leqslant u_n$ », soit (u_n) décroissante)*
- Exploitation de telles relations par récurrence
  *(**exemple :** « $\forall x, \ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{2}$ » implique « $\forall n, \ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$ »)*
- **le théorème de la limite monotone**

  Une suite numérique **croissante** et **majorée** converge.
  Une suite numérique **décroissante** et **minorée** converge.
- **le théorème de convergence par encadremnt** *(« des gendarmes »)*

  Si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, où $(a_n), (b_n)$ convergent vers **la même** limite ℓ, alors (u_n) converge aussi, et $\lim(u_n) = \ell$.

2 Exemples de calculs de puissances de matrices

Soit A une matrice carrée *(« petite » : 2×2 ou 3×3)*

- Verification par récurrence d'une formule pour A^n, $n \in \mathbb{N}$.
- Formule de puissance *(exponentiation)* pour les matrices diagonales.
- Exemples de formule de similitude $A = PDP^{-1}$.
  Vérification *a posteriori* de la formule $\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = PD^nP^{-1}$.
- Exemples de matrices N **nilpotentes** ; telles que N^2 ou N^3
  (Exploitation pour simplifier l'écriture des puissances de (p.ex.) $T = I_2 + N$.*)*
- Reconnaître des suites remarquables *(1.1)* pour des coef. de A^n et déduction de terme g[al].