TD 4 -Indépendance de variables aléatoires

Définition 1 (*Indépendance de* va *discrètes*)

Soient X,Y deux *v.a.* discrètes.
On dit que X,Y sont **indépendantes** si on a :
$\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}_{\text{probabilité conjointe}} = \underbrace{\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)}_{\text{le produit des proba. marginales}}$$

Proposition 2 (*Expression de probabilités*)

Soient X,Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**.
Pour un ensemble A du plan $\mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\mathbb{P}\big((X,Y)\in A\big) = \sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$$

(somme des probabilités élémentaires favorables)

1 Événements avec un couple indépendant

Exercice 1 (*Dénombrer sur la loi conjointe*)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose :
- $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,6]\!]\big)$ et
- $Y \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,5]\!]\big)$.

1. Quels événements représentent les points des tableaux ci-dessous ?
Combien vaut la probabilité associée à chacun d'eux ?

2. Repérer sur chaque tableau l'événement, et en déduire la probabilité de chacun.

$A = [X = Y]$,

$Y\downarrow$ $X=$	1	2	3	4	5	6
1	∘	∘	∘	∘	∘	∘
2	∘	∘	∘	∘	∘	∘
3	∘	∘	∘	∘	∘	∘
4	∘	∘	∘	∘	∘	∘
5	∘	∘	∘	∘	∘	∘

$B = [X + Y = 8]$,

$Y\downarrow$ $X=$	1	2	3	4	5	6
1	∘	∘	∘	∘	∘	∘
2	∘	∘	∘	∘	∘	∘
3	∘	∘	∘	∘	∘	∘
4	∘	∘	∘	∘	∘	∘
5	∘	∘	∘	∘	∘	∘

$C = [\max(X,Y) = 4]$,

$Y\downarrow$ $X=$	1	2	3	4	5	6
1	∘	∘	∘	∘	∘	∘
2	∘	∘	∘	∘	∘	∘
3	∘	∘	∘	∘	∘	∘
4	∘	∘	∘	∘	∘	∘
5	∘	∘	∘	∘	∘	∘

$D = [5X + Y = 13]$.

$Y\downarrow$ $X=$	1	2	3	4	5	6
1	∘	∘	∘	∘	∘	∘
2	∘	∘	∘	∘	∘	∘
3	∘	∘	∘	∘	∘	∘
4	∘	∘	∘	∘	∘	∘
5	∘	∘	∘	∘	∘	∘

3. Trouver la loi des variables aléatoires définies par :
- $S = X + Y$,
- $M = \max(X,Y)$,
- $U = 5X + Y$.

Exercice 2 (*Reconnaître la non-indépendance*)

Soient X, Y deux variables aléatoires géométriques $\mathcal{G}(a)$ qui sont indépendantes.

1. Soient $I = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

a) Montrer que l'on a :
- $\mathbb{P}(M = 1) = a^2$.
- $\mathbb{P}(I = 2) \geqslant a^2 \cdot (1-a)^2$.
- $\mathbb{P}(M = 1, I = 2) = 0$.

b) En déduire que les variables aléatoires M et I ne sont pas indépendantes.

2. Soient $S = X + Y$, et $D = X - Y$.

a) Montrer l'encadrement : $-S \leqslant D \leqslant S$.

b) Montrer que les variables S et D ne sont pas indépendantes. *(on s'inspirera de la qn **1.**)*

3. Soient $S = X + Y$, et $P = X \cdot Y$.

a) Montrer l'inégalité : $P \leqslant \left(\frac{S}{2}\right)^2$.

b) En déduire que les variables S et P ne sont pas indépendantes.

(On pourra par exemple vérifier : $\mathbb{P}(S = 3, P = 4) = 0$*.)*

4. Les variables aléatoires $D = X - Y$ et $P = X \cdot Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (*Comparaison de va géométriques indépendantes*)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives : $\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{G}(a) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{G}(b). \end{cases}$

1. Pour $m, n \geqslant 1$, montrer : $\mathbb{P}(X = m, Y = n) = ab \cdot (1-a)^{m-1} \cdot (1-b)^{n-1}$.

2. L'événement $A = [X = Y]$

a) Décomposer l'événement A en événements élémentaires $[X = m, Y = n]$.

b) En déduire que : $\mathbb{P}(A) = ab \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big[(1-a)(1-b)\big]^{n-1}$.

c) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

3. L'événement $B = [X > Y]$ Pour $n \geqslant 1$, on note : $B_n = B \cap [Y = n]$.

a) Montrer l'égalité d'événements : $B = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

b) Montrer, pour $n \geqslant 1$, l'expression : $\mathbb{P}(B_n) = b \cdot (1-b)^{n-1} \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a \cdot (1-a)^{k-1}$.

c) En déduire : $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b \cdot (1-a) \cdot \big[(1-a)(1-b)\big]^{n-1}$.

d) Calculer $\mathbb{P}(B)$.

4. À quoi correspondent les probabilités $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ et $1 - \mathbb{P}(B)$?

Exercice 4 (*Différence de deux géométriques*)

Soient X, Y variables indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note :
- $U = \min(X, Y)$
- $V = |X - Y|$.

1. Montrer que $U(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. Soit $u \geqslant 1$. Montrer que : $\mathbb{P}(U = u, V = 0) = \mathbb{P}(X = Y = u)$.
3. Montrer pour $u, v \geqslant 1$, l'égalité : $\big[(U,V) = (u,v)\big] = \big[(X,Y) = (u, u+v)\big] \sqcup \big[(X,Y) = (u+v, u)\big]$.
4. En déduire pour $u \geqslant 1$, $v \geqslant 0$, que : $\mathbb{P}(U = u, V = v) = \begin{cases} p^2 \cdot q^{2(u-1)} & \text{pour } v = 0 \\ 2p^2 \cdot q^{2(u-1)} \cdot q^v & \text{pour } v \geqslant 1. \end{cases}$
5. Déterminer les lois de U et V.
   En déduire que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

2 Min et max de variables indépendantes

Proposition 3 (*Max de deux* va)

Soient X, Y deux variables aléatoires.
Notons : $M = \max(X, Y)$.
Alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités d'év$^{\text{ts}}$:

$$[M \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$$
$$[M \geqslant x] = [X \geqslant x] \cup [Y \geqslant x]$$

Proposition 4 (*Fonc^n de répartition du max*)

Soient X, Y deux *v.a.* **indépendantes**.
Notons : $M = \max(X, Y)$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(M \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant x)$$

Proposition 5 (*Min de deux* va)

Soient X, Y deux variables aléatoires.
Notons : $I = \max(X, Y)$.
Alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités d'év$^{\text{ts}}$:

$$[I \leqslant x] = [X \leqslant x] \cup [Y \leqslant x]$$
$$[I \geqslant x] = [X \geqslant x] \cap [Y \geqslant x]$$

Proposition 6 (*Fonc^n d'anti-répart^{on} du min*)

Soient X, Y deux *v.a.* **indépendantes**.
Notons : $I = \min(X, Y)$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(I > x) = \mathbb{P}(X > x) \cdot \mathbb{P}(Y > x)$$

Exercice 5 (*Min de deux géométriques*)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives :
- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$
- $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(b)$

On étudie la variable aléatoire : $I = \min(X, Y)$.

1. Calculer la fonction d'anti-répartition de X, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $A_X(n) = \mathbb{P}(X > n)$.
2. Montrer pour $n \geqslant 1$, l'égalité d'événéments : $[I > n] = [X > n] \cap [Y > n]$.
   Exprimer la fonction d'anti-répartition A_I de I en fonction de celles de X et Y.
3. En déduire que I suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   Exprimer $\mathbb{E}[I]$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
4. La variable aléatoire définie par $S = \max(X, Y)$ est-elle aussi de loi géométrique ?

Exercice 6 (*Max de deux variables uniformes*)

Soient U, V deux variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
On étudie la variable aléatoire $S = \max(U, V)$.

1. Quelles sont les valeurs possibles $S(\Omega)$ pour la variable S ?

2. Fonction de répartition

a) Rappeler la fonction de répartition de U et V.

b) Montrer, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité d'événements : $[S \leqslant k] = [U \leqslant k] \cap [V \leqslant k]$

c) En déduire, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que : $\mathbb{P}(S \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$.

3. Probabilités et espérance

a) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer l'événement $[S = k]$ en termes de $[S \leqslant k-1]$ et $[S \leqslant k]$.
En déduire : $\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{n^2} \cdot (2k - 1)$.

b) Montrer que : $\mathbb{E}[S] = \frac{1}{6n} \cdot (n+1) \cdot (4n-1)$.
Donner un équivalent de $\mathbb{E}[S]$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7 (*Min de deux variables uniformes*)

Soient U, V deux variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
On étudie la variable aléatoire $I = \min(U, V)$.

1. a) Rappeler la fonction de répartition de U et V.

b) En déduire pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(U > k)$.

2. Fonction d'anti-répartition

a) Montrer, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'égalité d'événements : $[I > k] = [U > k] \cap [V > k]$

b) En déduire, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que : $\mathbb{P}(I > k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2$.

3. Calcul *a priori* de l'espérance

a) Soit X une v.a. à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer : $\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$.

b) En déduire : $\mathbb{E}[I] = \frac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} (n-k)^2$.

Montrer enfin : $\mathbb{E}[I] = \frac{1}{6n} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$. *(On reconnaîtra une somme des carrés.)*

c) On rappelle que pour $S = \max(U, V)$, on a : $\mathbb{E}[S] = \frac{1}{6n} \cdot (n+1) \cdot (4n-1)$.
Que remarque-t-on pour $\mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[S]$?

Exercice 8 (*Maximum multiple*)

Soient $U_1, U_2, \dots, U_\ell$ une famille de ℓ variables aléatoires. *(avec $\ell \geqslant 1$)*

On suppose qu'elles sont :
- mutuellement indépendantes, et
- toutes de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

1. a) Rappeler, pour $i \in \llbracket 0,\ell \rrbracket$, la fonction de répartition de U_i.

   b) En déduire que, pour $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$, on peut écrire : $\mathbb{P}\big(U_1 \leqslant k, \dots, U_\ell \leqslant k\big) = \left(\frac{k}{n}\right)^\ell$.

On note $S = \max(U_1, \dots, U_\ell)$.

2. a) Déduire de **1.b)** la fonction de répartition de S.

   b) On suppose n pair. Simplifier la probabilité $\mathbb{P}(S \leqslant \frac{n}{2})$.

   c) Montrer que l'on a $S(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$ et que : $\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^\ell - \left(\frac{k-1}{n}\right)^\ell$.

3. **Asymptotique $\ell \to +\infty$ des probabilités** *(« échantillon infini »)*

   a) Interpréter en termes des variables $U_1, U_2, \dots, U_\ell$ l'événement $[S = n]$.

   b) Montrer que, pour $\ell \to +\infty$, on a : $\mathbb{P}(S = n) \longrightarrow 1$.

   c) Quelle est la limite $\ell \to +\infty$ de la probabilité $\mathbb{P}(S < n)$? *(Interprétation ?)*

4. **Asymptotique $n \to +\infty$ de l'espérance** *(« passage au continu »)*

   a) Soit X une v.a. à valeurs dans $\llbracket 0,n \rrbracket$. Montrer : $\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$.

   En déduire : $\mathbb{E}[X] = n + 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \leqslant k)$.

   b) En reconnaissant une somme de Riemann, montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\ell \right] = \frac{1}{\ell+1}$.

   c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[S]$ quand $n \to +\infty$.

3 Sommes de variables indépendantes

Proposition 7 (*Loi de la somme*)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes.

Supposons :
- $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
- X, Y indépendantes.

On définit : $S = X + Y$.

Alors $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)$$

Nécessité de l'indépendance

Si X, Y ne sont pas indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)$$

Adapter la formule

Souvent, les variables X et Y ne prennent pas toutes les valeurs $\in \mathbb{N}$.

(Par exemple, pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.)

Dans ce cas, il faut adapter les bornes de sommation dans la formule.

Exercice 9 (*Somme de variables de Poisson* (*Cours!*))

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ deux variables de Poisson, avec $a,b \geqslant 0$
On suppose que X et Y sont **indépendantes**, et on s'intéresse à la loi de la variable $S = X + Y$.

1. Rappeler $X(\Omega)$, et, $\forall n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$.
Donner aussi l'expression de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2. **a)** Déterminer l'ensemble des valeurs $S(\Omega)$.

b) À quelle condition sur X,Y a-t-on $S = 0$? En déduire la probabilité $\mathbb{P}(S = 0)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Décomposer l'événement $[S = n]$ comme réunion d'événements $[X = i, Y = j]$.

b) En déduire la formule : $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)$.

c) Rappeler la formule du binôme de Newton pour $(a + b)^n$. *(On écrira $\binom{n}{k}$ en factorielles.)*

d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S = n)$. *(On pourra mettre $\frac{1}{n!}$ en facteur de la somme.)*

4. **a)** En déduire la loi de la variable S.

b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.
Exprimer l'espérance et la variance de S en fonction de celles de X et Y.

Exercice 10 (*Somme de deux variables géométriques*)

Soient X,Y deux variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes deux de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.

2. Montrer que la loi conjointe de (X,Y), pour $i, j \geqslant 1$ s'écrit : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p^2 \cdot q^{i+j-2}$.

On note $S = X + Y$.

3. **a)** Déterminer l'ensemble des valeurs $S(\Omega)$.

b) Quels couples de valeurs de X,Y donnent $S = 2$? $S = 3$? $S = 4$?

c) Pour $n \geqslant 2$, décomposer l'événement $[S = n]$ comme union d'év$^{\text{ts}}$ $[X = i, Y = j]$.

d) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)$.
En déduire que la loi de S est donnée par : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(S = n) = p^2 \cdot (n - 1) \cdot q^{n-2}$.

4. **a)** Vérifier par le calcul qu'on a bien : $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n) = 1$.

b) Vérifier par le calcul que l'on a : $\mathbb{E}[S] = \frac{2}{p}$.

c) Combien vaut $\mathrm{Var}(S)$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}[S^2]$.

Définition 8 (*Indépendance mutuelle*)

On dit que les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour toute collection $A_1 \ldots A_n$ de parties de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in A_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Fonctions de répartition

Cette condition équivaut à :
$\forall x_1,\ldots x_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i).$$

Proposition 9 (*Cas discret*)

Si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont discrètes, la condition d'indépendance mutuelle s'écrit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Lemme 10 (*Coalitions*)

Soient $X_1,\dots,X_n$ mut^{nt} indépendantes.
Posons $Y = f(X_1,\dots,X_r)$ où $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$.

(avec $r \leqslant n$)

Alors $Y, X_{r+1},\dots,X_n$ sont mut^{nt} indép^{tes}.

Démonstration : Résultat admis. ■

Exercice 11 (*Somme de trois variables géométriques*)

Soient X,Y,Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de loi $\mathcal{G}(p)$.
On note $S = X + Y$ et $T = X + Y + Z$.

1. **a)** Quelle relation a-t-on entre les variables T et S ? Sont-elles indépendantes ?

b) Justifier que S et Z sont indépendantes.

On a montré dans l'ex. 10 que la loi de S est donnée pour $n \geqslant 2$ par : $\mathbb{P}(S = n) = p^2\cdot(n-1)\cdot q^{n-2}$.

2. Soit $n \geqslant 3$.

a) Décomposer l'événement $[T = n]$ selon les $[S = i, Z = j]$. *(où $i \geqslant 1, j \geqslant 1$.)*

b) En déduire que : $\mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=2}^{n-1} p^3 \cdot (k-1)\cdot q^{n-3}$.

c) Conclure : $\mathbb{P}(T = n) = p^3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot q^{n-3}$.

3. Combien valent $\mathbb{E}[T]$ et $\mathrm{Var}(T)$?

Exercice 12 (*Somme de géométriques $\mathcal{G}'(p)$*)

Soient $X_1, X_2,\dots$ v.a. indépendantes telles que $\forall k \geqslant 1$:
- $X_k(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X_k = n) = q\cdot p^n$.

On étudie la loi de la somme : $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k,\quad m \geqslant 1$.

On définit une famille de suites comme suit :
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{1,n} = 1$
- $\forall m \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} u_{m,k}$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(S_1 = n) = u_{1,n}\cdot p\cdot q^n$.

Par le lemme des coalitions, pour tout $m \geqslant 1$, les variables S_m et X_{m+1} sont indépendantes.

2. En écrivant $S_{m+1} = S_m + X_{m+1}$, montrer : $\mathbb{P}(S_{m+1} = n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_m = k)\cdot\mathbb{P}(X_{m+1} = n-k)$.

3. Montrer que $\forall m \geqslant 1, n \geqslant 0$, on a : $\mathbb{P}(S_m = n) = u_{m,n}\cdot p^m\cdot q^n$. *(on fera une récurrence sur m.)*

4. **Bonus : détermination de la suite double $u_{m,n}$**

a) Montrer que pour tout $m \geqslant 1$, on a : $u_{m,0} = 1$.

b) Montrer pour tout $m \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$, la relation : $u_{m+1,n} + u_{m,n+1} = u_{m+1,n+1}$.

c) En déduire pour $m \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$, l'expression : $u_{m,n} = \binom{n+m-1}{n}$.

Exercice 13 (*Irwin-Hall discret* *(d'après Ecricome 2017)*)

Soient $U_1, U_2, U_3, \dots$ v.a. telles que :
- $\forall k \geqslant 1$, on a $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$
- les $(U_k)_{k\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes.

Pour $k \geqslant 1$, on note : $S_k = \sum_{j=1}^{k} U_j$.

1. **a)** Rappeler, pour $j,k \geqslant 1$, la formule de Pascal liant les coefficients $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

b) En déduire que, pour $1 \leqslant k < i$, on a : $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$.

2. Soit $k \geqslant 1$.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour S_k ?

b) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et U_{k+1}.

c) Montrer que S_k et U_{k+1} sont indépendantes.

3. **a)** En déduire pour $i \in \llbracket k+1,n \rrbracket$, que : $\mathbb{P}(S_{k+1}=i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k=j)$.

(soit : $\mathbb{P}(S_{k+1}=i) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(S_k < i)$.)

b) Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$, on a : $\mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1}$. *(Récurrence sur $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$.)*

Exercice 14 (*La mitrailleuse à* $\{0,1\}$ *(plus formel)*)

Soit $E_1, E_2, E_3, \dots$ une suite *(infinie)* de v.a. qui sont :
- mutuellement indépendantes
- toutes de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

1. On définit une suite de variables aléatoires par :
- $U_1 = E_1$, et
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + 2^n \cdot E_{n+1}$.

a) Justifier, pour $n \geqslant 1$, que $U_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot E_k$.

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, que U_n est indépendante de E_{n+1}.

c) Montrer par récurrence pour $n \geqslant 1$, que U_n suit la loi uniforme : $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket)$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on pose : $X_n = \frac{1}{2^n} \cdot U_n$.

a) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0;1[$, on a : $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \frac{\lfloor 2^n \cdot x \rfloor + 1}{2^n}$. *(où $\lfloor \cdot \rfloor$ = partie entière)*

b) Montrer, pour $x \in [0;1]$ que l'on a : $\left| x - F_{X_n}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

c) En déduire, pour $x \in [0;1]$, que l'on a : $\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = x$.

À quelle loi à densité, la fonction de répartition limite *(pour $n \to +\infty$)* correspond-elle ?

3. Montrer que X_n a la même loi que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{2^k}$.

(C'est-à-dire que E_k est le $k^{\text{ème}}$ chiffre dans l'écriture binaire de ce nombre.)

4 Correction

Corrigé Ex (Différence de deux géométriques)

Soient X, Y variables indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note :
- $U = \min(X, Y)$
- $V = |X - Y|$.

1. *Montrer que* $U(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *et* $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

- **Valeurs de** U On a $U = \min(X, Y)$, avec X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
  Les valeurs possibles pour U sont donc aussi dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
  Par indépendance toutes les valeurs sont possibles.
- **Valeurs de** V On a $V = |X - Y|$.
  Les valeurs possibles pour $X - Y$ sont entières *(dans $\mathbb{Z}$)*.
  Par passage à la valeur absolue, $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
  Là encore par indépendance, toutes les valeurs sont possibles : $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. *Soit $u \geqslant 1$. Montrer que :* $\mathbb{P}(U = u, V = 0) = \mathbb{P}(X = Y = u)$.

On a l'égalité d'événements : $[U = u, V = 0] = \big[\min(X,Y) = u, |X - Y| = 0\big]$

$$= \big[\min(X,Y) = u, X = Y\big] = \big[\min(X,X) = u, X = Y\big].$$

On passe aux probabilités dans l'égalité trouvée : $[U = u, V = 0] = [X = Y = u]$,

d'où : $\mathbb{P}(U = u, V = 0) = \mathbb{P}(X = Y = u)$.

3. *Montrer pour $u, v \geqslant 1$, l'égalité :* $\big[(U,V) = (u,v)\big] = \big[(X,Y) = (u, u+v)\big] \sqcup \big[(X,Y) = (u+v, u)\big]$.

On utilise, pour $a > 0$ l'équivalence : $\big[|x| = a\big] \Longleftrightarrow [x = a \text{ ou } -x = a]$.

Il vient la réunion disjointe : $\big[(U,V) = (u,v)\big] = \big[U = u, |X - Y| = v\big]$

$$= \big[U = u, X - Y = v\big] \sqcup \big[U = u, Y - X = v\big]$$

Dans le premier cas, on a : $\big[U = u, X - Y = v\big] = \big[\min(X,Y) = u, X = Y + v\big]$

$$= \big[\min(Y + v, Y) = u, X = Y + v\big]$$
$$= \big[Y = u, X = Y + v\big] = \big[X = u + v, Y = u\big]$$

De même : $\big[U = u, X - Y = v\big] = \big[X = u, Y = X + v\big] = \big[X = u, Y = u + v\big]$.

4. *En déduire pour $u \geqslant 1$, $v \geqslant 0$, que :* $\mathbb{P}(U = u, V = v) = \begin{cases} p^2 \cdot q^{2(u-1)} & \textit{pour } v = 0 \\ 2p^2 \cdot q^{2(u-1)} \cdot q^v & \textit{pour } v \geqslant 1. \end{cases}$

On explicite la loi conjointe du couple (X,Y) de variables $\mathcal{G}(p)$, où $q = 1 - p$.

Pour $x, y \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$.

$$= p \cdot q^{x-1} \cdot p \cdot q^{y-1} = p^2 \cdot q^{x+y-2}$$

On remplace pour trouver l'expression de $\mathbb{P}(U = u, V = v)$.

- **Cas** $v = 0$ Il vient : $\mathbb{P}(U = u, V = 0) = \mathbb{P}(X = u, Y = u) = p^2 \cdot q^{2u-2}$.
- **Cas** $v \geqslant 1$ Il vient : $\mathbb{P}(U = u, V = v) = \mathbb{P}(X = u + v, Y = u) + \mathbb{P}(X = u, Y = u + v)$
  $$= p^2 \cdot q^{2u+v-2} + p^2 \cdot q^{2u+v-2} = 2 \cdot p^2 \cdot q^{2u+v-2}.$$

5. *Déterminer les lois de U et V.*

En déduire que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

- **Loi de** U Pour trouver la loi marginale, on somme la loi conjointe

  (décomposition dans le système complet associé à V)

Pour $u \geqslant 1$, il vient : $\mathbb{P}(U=u) = \sum_{v=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U=u, V=v) = \mathbb{P}(U=u, V=0) + \sum_{v=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U=u, V=v)$

$= p^2 \cdot q^{2u-2} + \sum_{v=1}^{+\infty} 2 \cdot p^2 \cdot q^{2u+v-2} = p^2 \cdot q^{2u-2} + \frac{2 \cdot p^2 \cdot q^{2u-1}}{1-q}$.

On a reconnu une série géométrique de raison q, et on remarque que $1-q=p$.

Il reste : $\mathbb{P}(U=u) = p^2 \cdot q^{2u-2} + 2 \cdot p \cdot q^{2u-1} = p \cdot (p+2q) \cdot q^{2u-2}$

$= p \cdot (1+q) \cdot \left(q^2\right)^{u-1}$

Ainsi, U suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

- **Loi de** V Même principe, en sommant sur les valeurs de U. D'abord le cas $v=0$.

  On trouve : $\mathbb{P}(V=0) = \sum_{u=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U=u, V=0) = \sum_{u=1}^{+\infty} p^2 \cdot q^{2u-2} = \frac{p^2}{1-q^2}$.

  On a reconnu une série géométrique de raison q^2, et on simplifie par la relation $1-q=p$.

  Il reste : $\mathbb{P}(V=0) = \frac{p^2}{(1-q)\cdot(1+q)} = \frac{p}{1+q}$.

  Pour le cas $v \geqslant 1$, c'est le même calcul, mais avec un facteur $2 \cdot q^v$.

  Il reste : $\mathbb{P}(V=v) = \frac{2 \cdot p}{1+q} \cdot q^v$.

- **Conclusion : indépendance**

  On vérifie bien, pour $u \geqslant 1$, $v \geqslant 0$, la relation : $\mathbb{P}(U=u, V=v) = \mathbb{P}(U=u) \times \mathbb{P}(V=v)$.