1 Récurrence

(tiré de la correction du DL 3)

1. *(Démontrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ *.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ (H_n)
- **Initialisation** On a bien : $u_0 = 1 \in [1\,;\mathrm{e}]$ (H_0)
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ D'après la question**??** avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x) = f(u_n) = u_{n+1} \in [1\,;\mathrm{e}]$, soit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$ (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ (H_n)

2 Théorème de la bijection

(tiré de la correction du DS 2)

1. *(Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ, sur $[0\,;+\infty[$.)*
La fonction g est :
- continue sur $[0\,;+\infty[$
- strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection monotone sur $[0\,;+\infty[$, la fonction g réalise une bijection :

$$g : [0\,;+\infty[\longrightarrow]\lim_{+\infty} g\,; g(0)] = \underbrace{]-\infty\,;2]}_{=g([0\,;+\infty[)}.$$

Ainsi $0 \in g([0\,;+\infty[) =]-\infty\,;2]$, et 0 admet donc un unique antécédent ℓ par la fonction g.
L'équation $g(x) = 0$, pour $x \in [0\,;+\infty[$, admet donc bien une unique solution $\ell \in [0\,;+\infty[$.

2. *(Justifier que :* $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.*)*
On a :
- $g(1) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-1} - 1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1} \geqslant 0$ *(car $\mathrm{e} \geqslant 2$, donc $2\,\mathrm{e}^{-1} \leqslant 1$)*
- $g(2) = 2 - 2 \times \mathrm{e}^{-2} - 2 = -2\,\mathrm{e}^{-2} \leqslant 0$

Ainsi g change de signes sur l'intervalle $[1\,;2]$, donc s'y annule. On a donc bien $\ell \in [1\,;2]$.

Rédaction alternative ***(plus élégante ?)***

> Ainsi, on a $g(2) \leqslant 0 \leqslant g(1)$, donc par décroissance *(de g^{-1})* : $1 \leqslant g^{-1}(0) = \ell \leqslant 2$.

3 Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ *(ou autre)*

Sur l'intervalle $[0\,;1[$, on définit les deux fonctions f, g par : $\forall x \in [0\,;1[, \quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{1-x}.$

1. *(Montrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.)*

- **f de classe $\mathcal{C}^\infty$?**
  La fonction f est le quotient des fonctions suivantes, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$:

- $n_f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *(fonction de référence)*
- $d_f : x \mapsto 1 - x$ *(fonction polynomiale)*

De plus le dénominateur d_f ne s'annule pas sur $[0\,;1[$, donc f est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.

- **g de classe $\mathcal{C}^\infty$?**
La fonction g est une fraction rationnelle *(quotient de polynômes)*, dont le dénominateur $x \mapsto 1 - x$ ne s'annule pas sur $[0\,;1[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.

4 Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$

5 Reconnaître la loi de X

- **Pour la loi binomiale**
- **Pour la loi exponentielle**

6 Appliquer la formule des probabilités totales

7 Intégration par parties

1. *(Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$.)*

On a $I = \underbrace{2\int_0^1 \mathrm{d}x}_{=2} - \underbrace{2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{=J}$. Calculons par parties $J = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$:

$$\left\{\begin{array}{rl} u &= x \\ v' &= \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} u' &= 1 \\ v &= -\,\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

Il vient donc :

$$J = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\,\mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-1} - \Big[\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = -\,\mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-1} - 1) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi : $I = 2 - 2(\underbrace{1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}}_{=J}) = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.