Colles semaine 16 - Couples de variables aléatoires

1 Lois d'un couple aléatoire discret

- **Couple de variables aléatoires** Notation (X, Y) : avec X, Y **variables marginales**
- **Loi conjointe** écriture en tableau à double entrée, et exploitation *(calcul de probas)*

$X \downarrow$	$Y \rightarrow$	y_1	$\ldots$	y_m	Loi de X
x_1		p_{11}	$\ldots$	p_{1m}	$p_{1.}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n		p_{n1}	$\ldots$	p_{nm}	$p_{n.}$
Loi de Y		$p_{.1}$	$p_{.2}$	$p_{.m}$	1

- **Lois marginales** de X, Y une par une « dans l'absolu ». Lien à la loi conjointe.
- **Cas de variables indépendantes** *(+ reconnaître et montrer la non-indépendance)*

2 Problèmes de transfert

- **Formule de transfert** $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum\limits_{i \in I} \varphi(x_i) \cdot p_i$ et $\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \psi(x_i, x_j) \cdot p_{i,j}$.
- **Exemples simples de transfert de loi** $Z = f(X, Y)$. *(notamment $S = X + Y$)*
  Calcul des probas des valeurs de Z grâce à la loi conjointe.
- **Cas du max** $M = \max(X, Y)$
  - Égalité des événements $[M \leqslant m] = [X \leqslant m, Y \leqslant m]$
  - D'où $\underbrace{\mathbb{P}(M \leqslant m)}_{F_M(m)} = \mathbb{P}(X \leqslant m, Y \leqslant m) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{P}(M = m) = F_M(m) - F_M(m-1)$.
  - Cas où X, Y sont indépendantes. Alors $\forall m$: $\mathbb{P}(M \leqslant m) = \mathbb{P}(X \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant m)$

3 Covariance d'un couple de variables aléatoires

(toutes propriétés ***sous réserve de convergence absolue*** *des séries)*

- **Linéarité de l'espérance** $\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$ *($a, b \in \mathbb{R}$ cst. déterministes)*
- **Produit indépendant** Si X, Y sont indépendantes, alors : $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X]$.
- **Notion de variance**
  - Par définition : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
  - Kœnig-Huygens : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2$.
  - Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
  - Homogénéité : $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2\,\mathrm{Var}(X)$, *(où $\lambda \in \mathbb{R}$)*
- **Notion de covariance**
  - Par définition : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\Big]$
  - Kœnig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[X \cdot Y\right] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
  - Lien à la variance : $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
  - Bilinéarité-symétrie « règles de calcul pour $\mathrm{Cov}(X, Y)$ »
- **Formule de polarisation** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot \Big[\mathrm{Var}(X + Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)\Big]$.

Deux variables **indépendantes** sont **décorrélées** : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

- **Corrélation linéaire, principe de la régression linéaire**

Coefficient de corrélation linéaire	$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$
Cauchy-Schwarz	$-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
Corrélation totale : pour $\rho(X, Y) = \pm 1$,	alors on peut écrire $Y = aX + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Principe de la régression linéaire	Droite qui suit le nuage de point.
Interprétation du signe de $\rho(X, Y)$	X, Y varient plutôt « ensemble » ou « en sens opposé »

4 Questions de cours

1. Définition de la covariance et formule de Kœnig-Huygens pour $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

2. Formule de transfert pour l'espérance à une et à deux variables.

3. Définition de « X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ».

4. Principe de l'étude du maximum $M = \max(X, Y)$.

5. Expression de $\mathrm{Var}(X + Y)$ et formule de polarisation.