

Ds 1

le 15/09/2016

Exercice 1.*(d'après Bce 2013 Ect)*

Soit M la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$ pour tout entier naturel n .
2. Justifier que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite remarquable. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de b_n en fonction de n .
Établir que pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.
3. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n .
 - a) Justifier que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.
 - b) En déduire une expression de c_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = n2^{n-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de M^n pour tout entier n .
5. **Application au calcul d'une somme**
 - a) Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient :

$$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k, \quad \text{pour tout entier naturel } k$$

- b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.
- c) Pour tout entier naturel n , calculer $\sum_{k=0}^n 2^k$.
- d) Déduire des questions précédentes et de **3.c)** que $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrices $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Montrer en utilisant la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1} .
- b) Vérifier que $P^{-1}AP = M$.
- c) Établir que $P^{-1}A^nP = M^n$. En déduire les quatre coefficients de A^n .

Exercice 2.

(d'après Ecricome ect 2009 (adaptation libre))

On étudie la fonction f définie sur $[0; 1[$ par : $\forall x \in [0; 1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$

On définit aussi la fonction g définie sur $[0; 1[$ par : $\forall x \in [0; 1[, \quad g(x) = \frac{x}{1-x}$

Partie I : Étude de f et tracé de \mathcal{C}

1. Montrer que les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; 1[$.

2. Valeurs et limites de f

a) Calculer $f(0)$.

b) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, sous forme exacte et approchée (on utilisera $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$.)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

3. Étude de g

a) Quel est le signe de g sur $[0; 1[$?

b) Montrer que $\forall x \in [0; 1[, \quad g(x) = \frac{1}{1-x} - 1$.

c) Montrer que $\forall x \in [0; 1[, \quad g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

4. Variations de f

a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[, \quad f'(x) = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0; 1[,$ on a $f'(x) = f(x) g(x)$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 1[$.

5. Étude de la convexité de f

a) Montrer que $\forall x \in I, \quad f''(x) = \frac{x^2 + 1}{(1-x)^3} e^{-x}$.

(On pourra utiliser l'écriture de [4.b](#)) et en déduire $f''(x) = f(x) [g^2(x) + g'(x)]$)

b) En déduire la convexité de f sur $[0; 1[$.

6. Tracé de la courbe \mathcal{C} représentative de f

a) Que dire de la tangente à \mathcal{C} en 0 ?

b) Que dire de la courbe \mathcal{C} en 1 ?

c) Tracer la courbe \mathcal{C} avec une échelle adaptée.

On illustrera les réponses aux questions [6.a](#)) et [6.b](#)) et on placera $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie II : Encadrement de la valeur d'une intégrale

On se propose dans cette partie de déterminer deux encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx$$

On ne cherchera **pas** à **calculer** cette intégrale.

7. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question 6.c)

8. Montrer que $\forall x \in [0; \frac{1}{2}] \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

En déduire l'encadrement $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

9. Montrer que : $\forall x \in [0; \frac{1}{2}], \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$.

En déduire que : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx$.

10. Effectuer une intégration par parties pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} \, dx$.

11. En utilisant l'encadrement de 8., montrer que $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

En déduire un deuxième encadrement de I .

Exercice 3.

(d'après EmLyon 2013 Ece)

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; 1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t \ln(t) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0; 1]$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0; 1[$, l'intégrale $\int_x^1 g(t)dt$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ converge et que : $\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{4}$.

Partie II - Exemple de densité

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \begin{cases} -t \ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?
5. Etablir que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
6. Montrer que f est une densité.
7. a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; 1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0; 1[$.
b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0; 1[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
c) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, en mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie.

dichotomieACompleter.sce

```

1 function y = fPrime(x) ;
2     y = ___ // <- à compléter
3 endfunction
4
5 a = 1/%e ; // bornes de la dichotomie
6 b = 1 ;
7
8 while b-a > 10^(-3)
9     c = (a+b) / 2 // milieu du segment
10    if fPrime(a) * fPrime(c) > 0
11        then
12            ___ // <- à compléter
13        else
14            ___ // <- à compléter
15    end
16 end
17
18 disp(a) // afficher le résultat

```