DL 6 - réduction des endomorphismes

Exercice 0 *(application directe)*

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^2.
Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.

2. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?

3. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

4. Déterminer le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que l'on ait : $\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{w})$.

5. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On précisera la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}'$.

6. Montrer que la matrice D définie par l'équation : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ est diagonale.

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. **a)** Soit $u_1 = e_1 + e_2$.
Calculer les coordonnées de $f(u_1)$.
Que peut-on en déduire pour u_1 ?

b) On exécute le script suivant :

```
--> A=[-1 , 2 , -1 ;
       -4 , 5 , -3 ;
       -2 , 2 , -1]

--> I=eye(3,3)
--> disp((A-I)^3,"(A-I)^3=")
```

Le résultat obtenu est :

```
(A-I)^3=


0. 0. 0.
0. 0. 0.
0. 0. 0.
```

Que nous apprend ce calcul ?

c) Déduire que 1 est l'unique valeur propre de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

2. **a)** Déterminer u_2 sous la forme $u_2 = pe_2 + qe_3$, avec $p, q \in \mathbb{R}$, pour que : $f(u_2) = u_1 + u_2$.

b) Déterminer u_3 sous la forme $u_3 = re_1 + se_3$, avec $r, s \in \mathbb{R}$, pour que : $f(u_3) = 2u_2 + u_3$.

c) Vérifier alors que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

On considère la matrice carrée : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.

2. **a)** Calculer A^2, A^3, A^4.

b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de f.

c) Déterminer la dimension du noyau de f.

d) Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\mathcal{C}$ la famille $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$, où : $\epsilon_1 = e_1$, $\epsilon_3 = f(\epsilon_2)$,
$\epsilon_2 = f(\epsilon_1)$, $\epsilon_4 = f(\epsilon_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 3

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F,G,H) est une base de $\mathcal{S}_2$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.
On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \quad u(S) \in \mathcal{S}_2$.

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

c) Donner la matrice de u dans la base (F,G,H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M.
Déterminer, pour chacune de celles-ci une base du sous-espace propre associé.
La matrice M est-elle diagonalisable ?

2. Trouver une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, de première ligne $(4 \quad 4 \quad 1)$, telle que $M = PDP^{-1}$.

3. Donner un polynôme annulateur de D, puis en déduire un pour M, puis pour u.