Colles semaine 3 : Convergence des suites numériques

1 Études de suites récurrentes

1.1 Généralités

- **Sens de variations** Critère $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (mais attention aux signes !)
- **Notion de bornes, de limites** Formes indéterminées
- **Suites de références** Arithmétiques, géométriques, arith-géométriques, leurs limites

1.2 Les 3 critères de convergence

- **Théorème de la limite monotone** une suite croissante majorée converge.
- **Théorème d'encadrement** (*th. des gendarmes*). Aussi la version $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n \to 0$.
- **Théorème des suites adjacentes.** Exemple d'application à $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$

1.3 Études de suites définies par récurrence

Rappels semaine dernière

> - Transformation de relations $f(x) \longleftrightarrow x$ en relations $u_{n+1} \longleftrightarrow u_n$
>
>   *(**exemple :** « $\forall x,\ f(x) \leqslant x$ » implique « $\forall n,\ u_{n+1} \leqslant u_n$ », soit (u_n) décroissante)*
> - Exploitation de telles relations par récurrence
>
>   *(**exemple :** « $\forall x,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{2}$ » implique « $\forall n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$ »)*

- **Théorème du point fixe** Pour (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, **si** (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Étude graphique.
- **Inégalité des accroissements finis**

Si on a $k > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$, alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant k \quad (a, b \in I)$

soit $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$.

- **Application aux suites récurrentes**

Pour $a = \ell$ *(un point fixe : $f(\ell) = \ell$)*, et $b = u_n$, on a *(k comme ci-dessus)* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
On trouve alors par récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.

*(on parle de **vitesse de convergence géométrique** de raison $k < 1$)*

2 Relations o (négligeable devant) et $\sim$ (équivalent à)

(On part toujours des définitions !)

- **Négligeabilité** Notation $u_n = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.
- **Pour les suites géométriques** pour $0 < q < r$, on a $q^n = o(r^n)$.
- **Pour les suites puissances** pour $a < b$, on a $n^a = o\left(n^b\right)$.
- **Exemples d'applications des croissances comparées**
  - $\forall a > 0, \qquad \ln(n) = o(n^a)$.
  - $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall q > 1, \qquad n^a = o(q^n)$.

    $\forall q \in]0\,;1[\qquad q^n = o(n^a)$.
- **Équivalence** Notation $u_n \sim (v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.
- **Exemples de recherche de terme prépondérant** dans des expressions usuelles et obtention d'équivalents.