

Colles semaine 12 - Dérivation : compléments

1 Dérivation

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- **Dérivabilité** équation de la tangente, l'écriture $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.
- **Formes indéterminées** Application aux taux d'accroissement $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
- **Application aux inégalités** $[f(x) \geq g(x)] \iff \underbrace{[f(x) - g(x) \geq 0]}_{=u(x)}$ puis étude de $u(x)$.

2 Développements limités (à l'ordre 2)

expression	dev ^{nt} limité
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\ln(1+h) =$	$h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
$\ln(x) =$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$

expression	dev ^{nt} limité
$(1+x)^a =$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
et exemples, notamment :	
$(1+x)^2 =$	$1 + 2x + x^2$
$(1+x)^3 =$	$1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} =$	$1 - x + x^2 + o(x^2)$

- **Principe** approximation de $f(x)$ par un polynôme de degré ≤ 2 , avec une erreur $o(x - x_0)^2$.
- **Formes indéterminées** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1 - ax}{x^2}$
- **Formule de Taylor à l'ordre 2** Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 , alors pour $x \rightarrow x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) \quad (\text{où } h = x - x_0 \rightarrow 0)$$

3 Convexité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- **Inégalité de convexité** f est **convexe** si : $\underbrace{\text{image de la moyenne (sur la courbe)}}_{f((1-t)a + tb)} \leq \underbrace{\text{moyenne des images (sur la corde)}}_{(1-t)f(a) + tf(b)}$
 $\forall a, b \in I, \quad t \in [0; 1], \quad f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$
- **Caractérisation** Pour f de classe \mathcal{C}^2 : $[f \text{ convexe sur } I] \iff [f'' \geq 0 \text{ sur } I]$.
- **Recherche de points d'inflexion** où la dérivée seconde s'annule **en changeant de signe**
- **Tangentes** Pour $f \begin{cases} \text{dérivable,} \\ \text{et convexe,} \end{cases}$ sur I et $x, x_0 \in I$, on a : $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- **Fonction concave** $[f \text{ concave}] \iff [-f \text{ convexe}]$ (on renverse tout ci-dessus)

4 Inégalité des accroissements finis

- **Inégalité des accroissements finis**

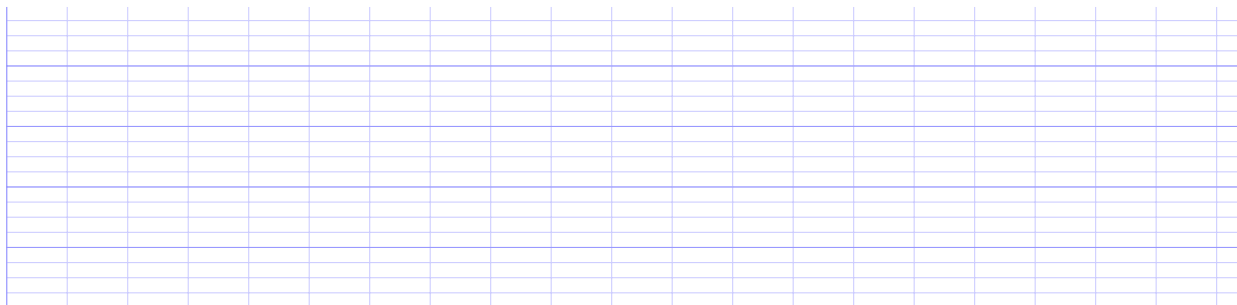
Si on a $k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$, alors $\forall a, b \in I, \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq k$.
 (la version la plus utile, mais aussi les versions sans valeur absolue)

- **Application aux suites récurrentes** Soit (u_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

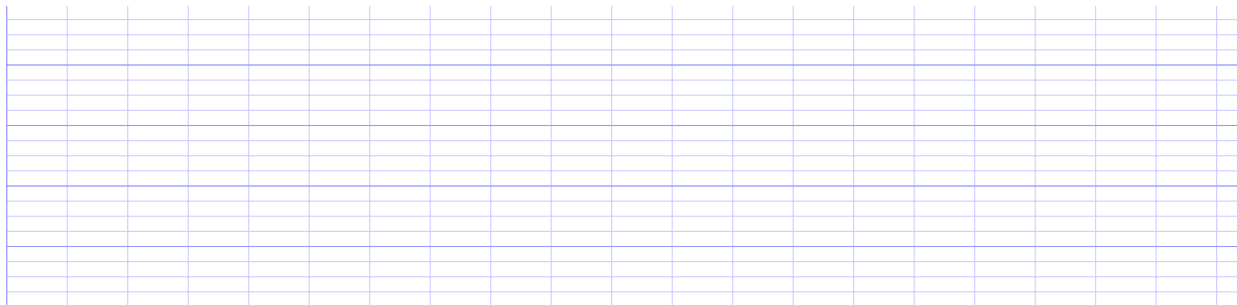
Pour $a = \ell$ (un pt fixe : $f(\ell) = \ell$), et $b = u_n$, on a $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$. (k comme ci-dessus)
 On trouve alors par récurrence : $|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$.

5 Questions de cours

1. Équation de la tangente, et formule de Taylor à l'ordre 2.



2. Les trois développements limités limités au programme



3. L'inégalité de convexité (*version graphe / corde*)



4. Convexité et position relative graphe / tangentes (*en écrivant inégalité*)



5. L'inégalité des accroissements finis (*version valeur absolue*)

