# Probabilités discrètes (rappels)

le 10 octobre 2016

## 1 Probabilités, événements, dénombrement

**Exercice 1 (*Arbre de probabilités, d'après Bac* Es *2016*)**

Un téléphone portable permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

Le téléphone contient en mémoire 3200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae ... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

On note :
- $R$ l'évènement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- $F$ l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

1. Calculer $p(R)$, la probabilité de l'évènement $R$.
2. Parmi les chansons de la catégorie rock, 35 % sont interprétées en français. Traduire cette donnée en utilisant les évènements $R$ et $F$.
3. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
4. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
5. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français.
   Montrer que $p\left(F \cap \overline{R}\right) = 0,28$.
6. En déduire $p_{\overline{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

**Exercice 2 (*Avec des cartes*)**

On tire sans remise 3 cartes dans un jeu de 32. Calculer les probabilités des événements :

- $A =$ « Les trois cartes sont des As »
- $B =$ « Il y a au moins un Coeur »
- $C =$ « Elles sont toutes de même couleur »
- $D =$ « Deux *(au moins)* ont même valeur »
- $E =$ « On a une suite »
- $F =$ « On a une paire et une figure »

**Exercice 3 (*Code secret*)**

On installe une serrure à code, formée d'une combinaison de 4 chiffres, chacun $\in [\![1, 4]\!]$.
Combien de combinaisons :

1. sont-elles possibles au total ?
2. ne contiennent qu'un seul des 4 chiffres ?
3. contiennent un chiffre répété exactement 3 fois ?
4. contiennent deux des quatre chiffres, chacun répété 2 fois ?
5. contiennent les quatre chiffres ?
6. contiennent trois des quatre chiffres ?
7. En moyenne, combien de chiffres apparaissent dans une combinaison choisie au hasard ?
   *($\frac{700}{256} = \frac{175}{64} = 2{,}734375$)*

**Exercice 4 (*Couple de dés*)**

On lance un dé $D_1$ à 6 faces et un dé $D_2$ à 4 faces. Calculer les probabilités des événements :

- $A =$ « $D_1 = D_2$ »
- $B =$ « $D_1 \geqslant D_2$ »
- $C =$ « $D_1 > D_2$ »
- $D =$ « $D_1$ et $D_2$ pairs »
- $E =$ « $D_1 + D_2$ est pair »
- $F =$ « $D_1 + D_2$ pair et $\geqslant 4$ »

**Exercice 5 (*Une chaîne de Markov*)**

On a deux urnes :
- l'urne $A$ avec 1 bille rouge et 2 verte,
- l'urne $B$ avec 1 bille rouge et 4 vertes.

Tour-à-tour, on pioche avec remise une bille dans une urne.

- Si la bille piochée est rouge, on change d'urne où piocher.
- Si la bille piochée est verte, on continue à piocher dans la même urne.

On commence par piocher dans une des deux urnes au hasard.

On note :
- $R_n =$ « on pioche une bille rouge au $n^{\text{ème}}$ tour »
- $V_n =$ « on pioche une bille verte au $n^{\text{ème}}$ tour »
- $A_n =$ « on pioche dans l'urne $A$ au $n^{\text{ème}}$ tour », et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$
- $B_n =$ « on pioche dans l'urne $B$ au $n^{\text{ème}}$ tour », et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$

**1.** Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_n}(R_n)$, $\mathbb{P}_{A_n}(V_n)$ et $\mathbb{P}_{B_n}(R_n)$, $\mathbb{P}_{B_n}(V_n)$

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}$, appliquer la formule des probabilités totales, et montrer
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{5}b_n$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{5}b_n.$$

**3.** Justifier pour $n \in \mathbb{N}$, que $a_n + b_n = 1$. Déduire :
$$a_{n+1} = \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{5}$$
$$b_{n+1} = \frac{7}{15}b_n + \frac{1}{3}.$$

**4.** Que peut-on dire des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ? En déduire qu'elles convergent, et leurs limites.

**5.** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $r_n = \mathbb{P}($« on change d'urne après le $n^{\text{ème}}$ tour »$)$ selon $a_n, b_n$.
Faire le passage à la limite. Que constate-t-on ?

# 2 Variables alétoires, lois usuelles

**Exercice 6 (*Reconnaître une loi, d'après EML Eco 2009*)**

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est $p$ et la proportion de boules noires est $q$. Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note $T$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et $U$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

**1.** **a)** Reconnaître la loi de $T$.

**b)** Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $\mathbb{P}(T = k)$ et rappeler espérance et variance de $T$.

**2.** En déduire que $U$ admet une espérance et une variance. Déterminer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathrm{Var}(U)$.

**Exercice 7 (*Simulation informatique, d'après Ecricome 2014*)**

On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut $p \in [0\,;1]$.

**1.** Écrire en Scilab une fonction `function valeur = lancer(p)` qui crée un nombre aléatoire dans $[0\,;1]$ et renvoie
- 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $p$
- et 0 sinon.

**2.** Écrire en Scilab une fonction `function rang = premierPile(p)` qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués. *(Si on le souhaite, on pourra utiliser la fonction* `lancer` *en la répétant convenablement.)*

**3.** Écrire une `function rang = deuxiemePile(p)` qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second « PILE », et affiche le nombre de « FACE » obtenus en tout. *(On pourra utiliser la fonction* `premierPile` *en la répétant convenablement.)*

**Exercice 8 (*Temps d'atteinte du deuxième succès, d'après Ecricome 2014*)**

On effectue une suite illimitée de lancers d'une pièce retournant PILE avec proba $p \in [0\,;1]$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la *v.a.* égale au nombre de PILE lors des $n$ premiers lancers.
- Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note $F_j$ l'événement : « La pièce donne FACE lors du $j$-ième lancer » ;
- On note $Y$ la *v.a.* égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $X_n$.
Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}[X_n]$ et de sa variance $\text{Var}(X_n)$.

**2.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $Y$.

**3.** Donner les valeurs des probabilités : $\mathbb{P}(Y=0)$, $\mathbb{P}(Y=1)$ et $\mathbb{P}(Y=2)$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité d'événements : $(Y=n) = (X_{n+1}=1) \cap \overline{F_{n+2}}$.

**5.** Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=n) = (n+1)p^2q^n$

**6.** Vérifier par le calcul que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n) = 1$

**7.** Démontrer que la variable aléatoire $Y$ possède une espérance $\mathbb{E}[Y]$ et donner sa valeur.

**Exercice 9 (*Interprétation d'un énoncé, d'après Em Lyon 2014*)**

On considère une urne contenant 3 boules numérotées.

On effectue une succession de 4 tirages d'une boule avec remise et l'on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Pour $k \in [\![1,4]\!]$, on note $N_k$ la *v.a.* égale au numéro obtenu au $k$-ième tirage.

**1. a)** Exprimer l'évenement $(X=4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables $N_1, N_2, N_3$. En déduire $\mathbb{P}(X=4)$.

**b)** Montrer que $\mathbb{P}(X=2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(X=3)$.

**2.** Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 10 (*Match-match, adapté d'après Ecricome Ece 2012*)**

On dispose d'un jeu de deux paires de cartes : deux cartes sont numérotées « 1 »
les deux autres « 2 »

Initialement, les quatre cartes sont retournées et indistingables.
Tour-à-tour, tant qu'il reste des cartes retournées, on en révèle aléatoirement deux :

- si elles portent le même numéro, on les garde révélées,
- sinon, on les retourne de nouveau.

Soit $T$ la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour révéler toutes les cartes.

1. Calculer $a = \mathbb{P}(\text{« à l'issue du } 1^{\text{er}} \text{ essai, toutes les cartes restent retournées »})$
2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$ : $\mathbb{P}(T = k) = (1-a)\, a^{k-2}$.
3. Justifier que la variable $S = T-1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de $T$ en fonction de $a$

**Exercice 11 (*Tirage sans remise de trois jetons*)**

D'une urne remplie de 3 jetons, numérotés 1, 2, 3, on tire les 3 jetons un-à-un sans remise, on note $J_1, J_2, J_3$ le résultat dans l'ordre du tirage.

On dit qu'on a une *rencontre* pour le $k$-ième jeton si $J_k = k$. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de rencontres une fois le tirage terminé.

1. Décrire l'ensemble des résultats observables. Comment est-il probabilisé ?
2. Donner la loi de $X$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $X$.
4. En moyenne combien de fois a-t-on $J_k \geqslant k$ lors d'un tel tirage ?

**Exercice 12 (*Max de deux dés*)**

On note $M$ le plus grand des résultats obtenus au jet de 2 dés à $n$ faces *(num. de $1$ à $n \geqslant 1$)*.

On va déterminer la fonction de répartition de $M$, grâce à celles de $D_1, D_2$, puis on en déduira la loi de $M$.

1. Exprimer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité $F_{D_1}(k) = \mathbb{P}(D_1 \leqslant k)$ *(resp. $F_{D_2}(k)$)*.
2. Exprimer l'événement $[M \leqslant k]$, *($k \in [\![1, n]\!]$)* en utilisant les variables aléatoires $D_1$ et $D_2$.
3. En déduire, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction de répartition $F_M(k)$ selon $F_{D_1}(k)$ et $F_{D_2}(k)$.
Faire le calcul de $F_M(k)$.
4. Exprimer $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\mathbb{P}(M = k)$ grâce à la fonction de répartition $F_M$.
Terminer le calcul pour trouver : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(M = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$.

*(Voir TD 4, exercice 8 pour le calcul de l'espérance de $M$)*