

Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Table des matières

1	Introduction : rappels sur \mathbb{R}^n	2
1.1	Généralités : définitions	2
1.2	Le plan \mathbb{R}^2 , ses droites vectorielles	3
1.3	L'espace \mathbb{R}^3 , ses droites et plans vectoriels	4
2	Familles de vecteurs : généralités	5
2.1	Le vocabulaire des espaces vectoriels	5
2.2	Sous-espaces vectoriels, familles génératrices	5
2.3	Familles liées, familles libres	7
3	Théorie de la dimension	9
3.1	Définitions	9
3.2	Dimension et sous-espaces vectoriels	10
3.3	Rang d'une famille de vecteurs	11
4	Applications linéaires	12
4.1	Calcul de noyau et d'image	12
4.2	La formule du rang	12

1 Introduction : rappels sur \mathbb{R}^n

1.1 Généralités : définitions

Définitions

On note $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur générique de \mathbb{R}^n . Les x_i sont des réels, les coordonnées cartésiennes de \vec{v} . On représente \mathbb{R}^n pour $n = 1, 2, 3$ comme une droite, un plan, un espace tridimensionnel.

Opérations sur les vecteurs

- **Addition** On peut additionner des vecteurs de même format, composante par composante
- **Multiplication par un scalaire** On peut multiplier un vecteur par un scalaire, composante par composante

Combinaison linéaire

Étant donnés des vecteurs $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p$ de même format, on dit que \vec{v} est combinaison linéaire de ces vecteurs si on peut écrire : $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

- $2(1, 2) - 3(2, -2)$.
- Vérifier que $(1, -1)$ est combinaison linéaire de $(2, 3)$ et $(1, 2)$.
- À quelle condition sur a, b, c la vecteur (a, b, c) est-il combinaison linéaire de $(1, 0, 1)$, et $(1, -1, -1)$?

Définition 1 (*Matrice d'une famille de vecteurs*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

La **matrice de la famille \mathcal{F}** est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les \vec{u}_i , soit

$$\text{la matrice } A = \left[\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}} \right\} p \text{ colonnes}$$

$n \text{ lignes}$

Matrice de la famille et combinaisons linéaires

$$\text{Pour } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}, \text{ un } \mathbf{vecteur \ des \ coefficients}, \text{ on a } \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = A\Lambda.$$

($\Lambda = \lambda \text{ majuscule} = \text{Lambda}$)

L'algorithme du pivot de Gauss

Matrice augmentée
échelonnée équivalente
à un système linéaire
(fournie par l'alg. du pivot de Gauss)

$$\text{Système échelonné} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 + \text{---} = \dots \\ \pi_2 + \text{---} = \dots \\ 0 = \kappa_1 \\ 0 = \kappa_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Équations « efficaces »} \\ \text{Conditions de compatibilité} \end{array}$$

► **Vocabulaire des systèmes échelonnés**

- ★) *Inconnue principale* : associée à un des pivots $\pi_i \neq 0$
- ★) *Inconnue secondaire* : **pas** associée à un pivot. Elle joue le rôle de paramètre.
- ★) *Compatibilité* : le système admet des solutions *ssi* on a 0 en face des lignes nulles.

$$\text{Système échelonné} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 + \text{---} = \dots \\ \pi_2 + \text{---} = \dots \\ 0 = \kappa_1 \\ 0 = \kappa_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Équations « efficaces »} \\ \text{Conditions de compatibilité} \end{array}$$

1.2 Le plan \mathbb{R}^2 , ses droites vectorielles

On s'intéressera plus particulièrement aux droites du plan qui passent par l'origine :

Définition 2 (*Droite vectorielle, vecteur directeur*)

Une **droite vectorielle** \mathcal{D} est un sous-ensemble du plan $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dont les vecteurs sont exactement les multiples d'un certain vecteur $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ (*fixé*) non-nul ($\vec{d} \neq 0$).

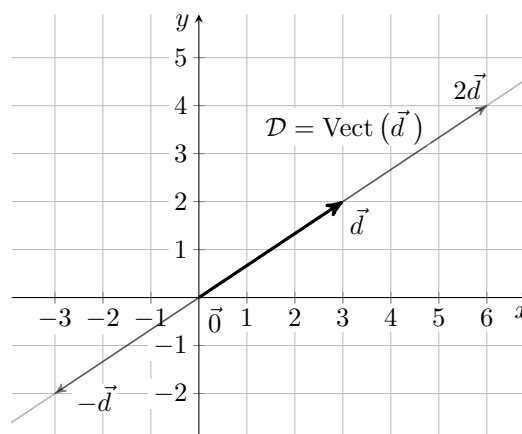
- On note alors $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$.
- On dit que la droite \mathcal{D} est la droite **engendrée** (ou **dirigée**) par le vecteur \vec{d} .
- On dit que le vecteur \vec{d} est un **vecteur directeur** de la droite \mathcal{D} .

Remarque

La droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{d})$ est la (*seule !*) droite du plan \mathbb{R}^2 qui passe par l'origine $\vec{0}$ et par l'extrémité du vecteur directeur \vec{d} .

Exemple graphique : Ci-contre on a choisi $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$ est donc formée de tous les multiples de \vec{d} , parmi lesquels on a placé $2\vec{d}$ et $-\vec{d}$.



Proposition 3 (*Équation de droite*)

$$ax + by = 0.$$

Proposition 4 (*Intersection de deux droites*)

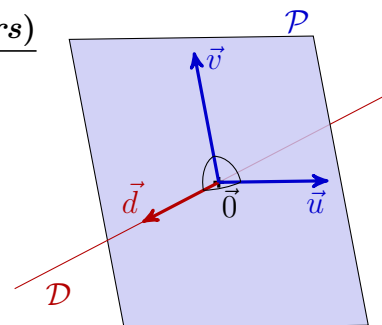
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 distinctes ($\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$) du plan \mathbb{R}^2 .

Alors l'intersection de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ est l'origine : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{ \vec{0} \}$.

1.3 L'espace \mathbb{R}^3 , ses droites et plans vectoriels

Définition 5 (*Sous-espaces vectoriels, vecteurs directeurs*)

- Droite vectorielle $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$
- Plan vectoriel $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$



Proposition 6 (*Équation de plan*)

$$ax + by + cz = 0.$$

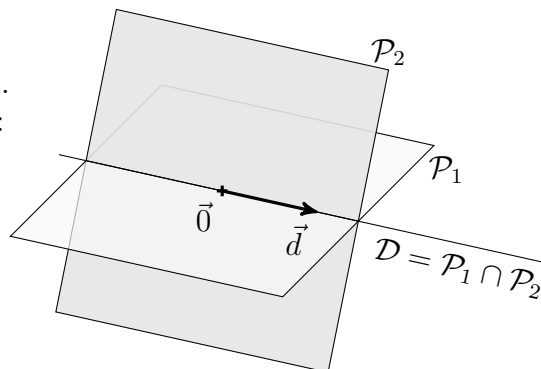
Proposition 7 (*Système d'équation d'une droite*)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (*Intersection de deux plans*)

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux plans distincts de l'espace \mathbb{R}^3 .
Alors leur intersection est une droite vectorielle :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d}).$$



2 Familles de vecteurs : généralités

2.1 Le vocabulaire des espaces vectoriels

Définition 9 (*Vocabulaire des espaces vectoriels*)

► **Espace vectoriel**

C'est un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$.

- Il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$, l'**addition** $\vec{u} + \vec{v}$ fait sens
- Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, et vecteur $\vec{u} \in E$, le **produit** $\lambda \cdot \vec{u}$ fait sens.
- Ces deux opérations satisfont aux mêmes règles de calcul formel que celles pour \mathbb{R}^n .

► **Combinaisons linéaires**

Ces deux opérations permettent de former des **combinaisons linéaires** :

★) *de deux vecteurs* : $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

★) *d'une famille finie* : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k$

Exemples d'espaces vectoriels :

- Les espaces cartésiens \mathbb{R}^n
- Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$
- L'espace des applications $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
- L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.2 Sous-espaces vectoriels, familles génératrices

Définition 10 (*Sous-espace vectoriel*)

Soit E un espace vectoriel.

On appelle **sous-espace vectoriel** de E un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui

- est non-vidé et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
- est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel

- Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P'(2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $\{y' = y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\{y' = y + 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 11 (*Sous-espace vectoriel engendré*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F}** l'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaison linéaire des vecteurs composent \mathcal{F} .

En d'autres termes : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p, \text{ pour } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$.

Caractérisation

Comme son nom laisse à penser, l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .
 En fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est même le **plus petit** *s-e. v.* contenant les vecteurs de la famille \mathcal{F} .
 Plus précisément, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est inclus dans tous les *s-e. v.* $G \subseteq E$ contenant la famille \mathcal{F} .

Remarque dans \mathbb{R}^n : les deux présentations d'un sous-espace vectoriel

Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n par l'alg. du pivot.

► équations \rightsquigarrow base

1. on échelonne le système d'équations
2. on exprime les inconnues principales en termes des inc. secondaires (*paramètres*)
3. on fait apparaître des vecteurs à droite (*eq. tautologique pour les paramètres*)

► base \rightsquigarrow équations

1. on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice \mathcal{F}
2. les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.

Trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel engendré :

Définition 12 (*Famille génératrice*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est **génératrice** si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

On dit alors aussi que l'espace E est engendré par $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$.

Montrer le caractère générateur : Soit \mathcal{F} la famille formée des vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Cherchons l'équation de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on l'équivalence :

$$\left[\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right] \iff \left[\text{le système } \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{v} \quad (\mathcal{S}) \text{ est compatible.} \right]$$

On échelonne le système (\mathcal{S}) :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{v} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = y \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -3x + 2y \\ \lambda_2 = 2x - y \end{cases}$$

Ce système est donc compatible pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La famille \mathcal{F} est donc génératrice.

Proposition 13 (*Décomposition dans une famille génératrice*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille d'un espace vectoriel E .

Alors \mathcal{F} est génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des \vec{u}_i .

2.3 Familles liées, familles libres

Définition 14 (*Dépendance linéaire*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

► **Relation de dépendance linéaire** (abrégé en : *rel. de dép. lin.*)

Une relation de dépendance linéaire entre $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est une équation de la forme :

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0} \quad (\text{soit } \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}),$$

pour un certain p -uplet de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

(les λ_i sont appelés les **coefficients** de la relation de dépendance linéaire)

► **La relation triviale, les relations non-triviales**

On a **toujours** (pour *n'importe quelle* famille de vecteurs) : $0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$.

Cette relation de dépendance linéaire avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0$ est dite **triviale**.

Les autres rel. de dép. lin. (celles dont au moins un des λ_i est non-nul) sont dites **non-triviales**.

► **Famille liée**

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est **liée** si elle vérifie une rel. de dép. lin. non-triviale.

Recherche des relations de dépendance linéaire :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par \mathcal{F} .

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la famille \mathcal{F} vérifie la relation de dépendance linéaire : $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$. (on vérifie !)

Les autres relations de dépendance linéaire satisfaites par \mathcal{F} sont les multiples de celle-ci

Proposition 15 (*Réécriture d'une relation de dépendance linéaire*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On suppose que \mathcal{F} est liée.

Alors l'un des vecteurs \vec{u}_j de \mathcal{F} s'écrit comme combinaison linéaire des autres :

$$\text{il existe } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ et il existe } \lambda_1, \dots, \underbrace{\widehat{\lambda_j}, \dots, \lambda_p}_{(\text{« } \lambda_j \text{ manquant »})}, \text{ tels que : } \vec{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \lambda_i \vec{u}_i$$

Pour la rel. de dép. lin. de l'exemple 2.3 :

La rel. de dép. lin. $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ peut aussi s'écrire des trois façons suivantes : $\vec{u}_1 = \frac{2}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{u}_3$

$$\vec{u}_2 = \frac{3}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_3$$

$$\vec{u}_3 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3.$$

Définition 16 (Indépendance linéaire)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

► **Indépendance linéaire**

On dit que les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ sont **linéairement indépendants** s'ils ne vérifient aucune relation de dépendance linéaire non-triviale.

► **Famille libre**

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ si les vecteurs qui la composent sont linéairement indépendants.
(c'est donc un **simple synonyme**)

Remarques

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille libre dans espace vectoriel E . Alors :

- Aucun des \vec{v}_i n'est nul.
- Les \vec{v}_i sont tous différents.
- Les sous-familles de \mathcal{F} sont libres aussi.

Exemple : montrer qu'une famille est libre :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par \mathcal{F} .

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} +\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la seule rel. de dép. lin. satisfaite par la famille \mathcal{F} est triviale : $0\vec{u}_1 - 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = \vec{0}$.

La famille \mathcal{F} est donc libre.

Approche matricielle

(dans \mathbb{R}^n) On trouve si \mathcal{F} est liée en résolvant $AX = \vec{0}$, pour A matrice de la famille.

La proposition suivante étudie la **complétion d'une famille libre** par un nouveau vecteur :

Proposition 17 (Appendice à une famille libre)

Soit $\mathcal{F} = \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille libre, et \vec{v} un vecteur quelconque.

Alors de deux choses l'une :

- le vecteur \vec{v} **est** combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$: $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

Alors la famille $\mathcal{F} \parallel \vec{v}$ est **liée**

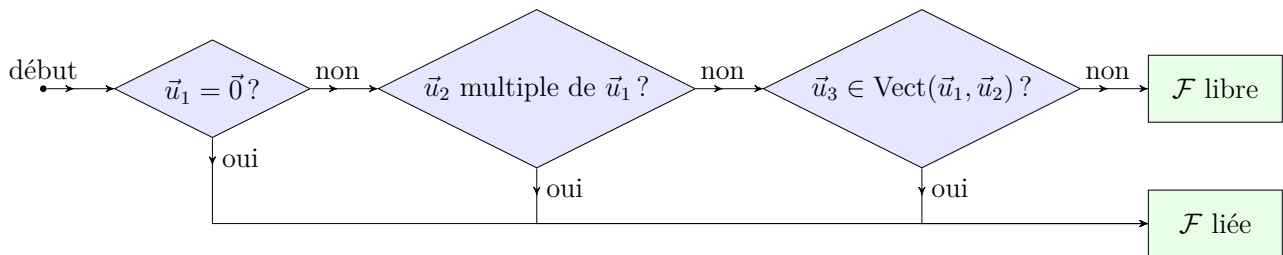
- le vecteur \vec{v} **n'est pas** combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$:

Alors la famille $\mathcal{F} \parallel \vec{v}$ est **libre**

Application : montrer qu'une famille est libre

En pratique, pour montrer qu'une famille de trois vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre, on peut utiliser la rédaction par étapes :

1. vérifier que $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$,
2. vérifier que \vec{u}_2 n'est pas colinéaire à \vec{u}_1 ,
3. montrer que \vec{u}_3 n'est pas coplanaire à \vec{u}_1, \vec{u}_2 .



3 Théorie de la dimension

La notion générale en mathématiques de **dimension** formalise la hiérarchisation entre :

- **dimension 0** : les points isolés (*un grain de sable, un atôme à la Démocrite*)
- **dimension 1** : les lignes ou courbes (*un câble, un spaghetti*)
- **dimension 2** : les surfaces (*un drap étendu, une feuille de papier*)
- **dimension 3** : les volumes (*une brique, l'eau contenue dans une bouteille*)

On en développe une définition pour les (*sous*-)espaces vectoriels, et quelques propriétés, notamment la **formule du rang**.

L'intuition qui en découle forme un outil puissant en algèbre linéaire et permet souvent :

- de s'épargner de longs et fastidieux calculs,
- et de vérifier aisément les résultats obtenus.

3.1 Définitions

Définition 18 (Base d'un espace vectoriel E)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille (*finie !*) de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une **base** de E , si :

- \mathcal{B} est libre (*pas de relation de dépendance linéaire non-triviale entre les vecteurs de \mathcal{B}*) et
- \mathcal{B} est génératrice : $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ (*tout entier*)

Proposition 19 (Décomposition dans une base)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini, et soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base.

Alors tout vecteur $\vec{v} \in E$ peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs des vecteurs de \mathcal{B} .

$$\forall \vec{v} \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_p \vec{u}_p = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$$

Réciproque

Cette propriété (*existence et unicité de la décomposition*) caractérise les bases parmi les familles de vecteurs de E .

Bases canoniques :

- ▶ Base canonique de \mathbb{R}^n
- ▶ Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- ▶ Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Définition 20 (*-Proposition : dimension*)

Soit E un espace vectoriel.

1. On dit que E est de dimension finie si E admet une base (*finie !*) $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
2. (**Proposition**) Toutes les bases de E sont alors formées du même nombre de vecteurs :
si $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E , alors toute autre base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E contient le même nombre de vecteurs que \mathcal{B} .
(*c'est-à-dire que $p = n$.*)
3. Le nombre de vecteurs dans une base quelconque \mathcal{B} est appelé **dimension de E** .
On note $\dim(E) \in \mathbb{N}$ cet invariant de E .

Démonstration : Admis. ■

Dimension des espaces vectoriels usuels :

- ▶ \mathbb{R}^n on a : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- ▶ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a : $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$
- ▶ $\mathbb{R}_n[X]$ on a : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ (*attention !*)

Droites et plans vectoriels

- ▶ Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une **droite vectorielle**
- ▶ Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un **plan vectoriel**

3.2 Dimension et sous-espaces vectoriels

Proposition 21 (*Dimension d'un sous-espace vectoriel*)

Si $F \subseteq E$ avec E de dim. finie, alors :

- ▶ F est de dim. finie aussi, et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- ▶ il y a égalité ssi $F = E$ (*tout entier*) .

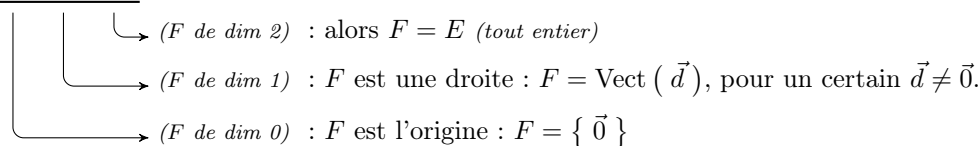
Démonstration : Admis. ■

Interprétation du cas d'égalité

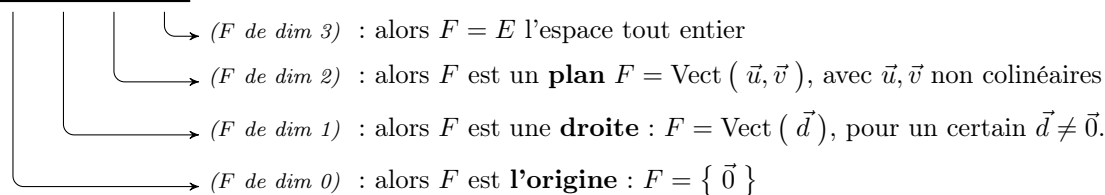
- Ainsi :
- ▶ un point ne contient pas d'autre point que lui-même,
 - ▶ une droite ne contient pas d'autre droite qu'elle-même.
 - ▶ un plan ne contient pas d'autre plan que lui-même,
 - ▶ un espace (*de dim. 3*) ne contient pas d'autre espace (*de dim. 3*) que lui-même.

Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 :

dim(F)	0	1	2
nb. d'éq ^{ns}	2	1	0

**Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 :**

dim(F)	0	1	2	3
nb. d'éq ^{ns}	3	2	1	0

**3.3 Rang d'une famille de vecteurs**

Dans tout ce qui suit (*Subsection 3.3*) :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E tel que $\dim(E) = n$.

Définition 22 (*Rang d'une famille de vecteurs*)

On appelle **rang de la famille \mathcal{F}** , la dimension du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} .
On note $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.

Proposition 23 (*Calcul dans \mathbb{R}^n*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n , et $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$ sa matrice.

Alors, une fois la matrice A échelonnée (= à la fin du pivot de Gauss), le nombre de pivots restant est égal au rang $\text{rg}(\mathcal{F})$ de la famille de vecteurs \mathcal{F} .

Les majorations automatiques du rang

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E tel que $\dim(E) = n$.

Alors on a à la fois $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ (nb de vecteurs) et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ (dimension)

Proposition 24 (*Liberté, génération en terme de rang*)

Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Notons $p = \text{Card}(\mathcal{F})$ et $n = \dim(E)$. Alors :

- ▶ La famille \mathcal{F} est **libre** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ (rang = nb de vecteurs de \mathcal{F})
- ▶ La famille \mathcal{F} est **génératrice** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ (rang = dimension de E)
- ▶ La famille \mathcal{F} est **une base** ssi $p = n$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = n$ (bon nb de vecteurs)

Démonstration : Admis. ■

Reformulation opératoire du dernier point

Si $p = n$, il suffit d'avoir \mathcal{F} libre **ou** génératrice pour déduire que \mathcal{F} est une **base**

4 Applications linéaires

4.1 Calcul de noyau et d'image

(Remarque utile pour vérifier la résolution d'un système linéaire)
trouver le noyau en « calcul mental »

- ▶ On résout le syst. d'équa^{ns} $A.\vec{X} = \vec{0}$ pour $\vec{X} = (x_1, \dots, x_p)_{\text{col.}}$ (1 équation par ligne)
- ▶ (Après échelon^{nt} : alg. du pivot de Gauss :) les **inconnues principales** (« à pivot ») s'expriment en fonction des (svt 1 seule) **inc. secondaires** (paramètres)
- ▶ On ajoute des éq^{ns} tautologiques pour écrire $A.\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{X} = z_1\vec{v}_1 + \dots + z_\nu\vec{v}_\nu$,
- ▶ On conclut : $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\nu)$ et $\nu = \dim[\text{Ker}(A)]$ (= nullité)

4.2 La formule du rang

rg(M)	0	1	2	3
dim[Ker(M)]	3	2	1	0

