Relations de comparaison, développements limités, applications aux formes indéterminées

1 Les relations $\sim$ (équivalent à) et o (négligeable devant)

On parle ici de suites, mais tout s'adapte aux fonctions en $\pm\infty$, en x_0.

→ **Négligeabilité** Notation $u_n = o(v_n)$ pour $u_n = \epsilon_n v_n$ avec $\epsilon_n \to 0$.

→ **Autres définitions :** $o(v_n) = v_n.o(1)$, et $\frac{o(v_n)}{v_n} \to 0$.

→ **Équivalence** Notation $u_n \sim v_n$ pour $u_n = (1+\epsilon_n)v_n$ avec $\epsilon_n \to 0$.

→ **Autres définitions :** $u_n = (1+o(1))v_n = v_n + o(v_n)$, et $\frac{u_n}{v_n} \to 1$.

→ **Interprétation graphique** Allure de deux suites équivalentes, d'une suite nég. devant une autre. Conjecturer un résultat d'après un affichage Scilab.

→ **Linéarité** $\lambda o(v_n) + \mu o(v_n) = o(v_n)$, mais **on n'additionne pas des équivalents !**

→

Multiplicativité	**Transitivité**
$o(u_n).o(v_n) = o(u_n v_n)$	Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
si $a_n \sim a'_n$ et $b_n \sim b'_n$, alors $a_n b_n \sim a'_n b'_n$.	Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

2 Développements limités à l'ordre 2

→ **Formule de Taylor** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors $x \to x_0$, et $h \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\,(x-x_0)^2 \\ f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

→ **Cas des trinômes du second degré** : La formule est alors exacte !

→ **Formulaire** pour $x \to 0$

e^x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a,\ a \in \mathbb{R}$
$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

→ **Cas particuliers pour** $(1+x)^a$ **:** On reconnaît le début de :

- ⋆ $a = n \in \mathbb{N}$: la formule du **binôme de Newton** pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

- ⋆ $a = -1$: la **somme des termes d'une suite géométrique :**

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \underbrace{\frac{q^{n+1}}{1-q}}_{=o_{q\to 0}(q^n)}, \qquad \text{où } q = -x \neq 1$$

3 Application aux formes indéterminées

→ **Principe des croissances comparées**

- ⋆ La limite des monômes en $r^n n^\alpha (\ln(n))^\beta$, pour $n \to \infty$. Variante pour les fonctions.
- ⋆ Principe des comparaisons entre monômes de ce type.
- ⋆ Trouver un équivalent d'une comb. lin. de tels monômes : le **terme prépondérant**.

→ **Utiliser les dév. lim.** pour lever des FI simples. Interprétation de taux d'accroissement.

→ **Exemple archiclassique** : Pour $x \in \mathbb{R}$: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$ (Euler ca.1730).