Définition 1 (*Pour une famille*)

Pour $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\Big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\Big).$$

Définition 2 (*Pour une matrice*)

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\Big(\mathrm{Im}(A)\Big).$$

Théorème 3 (*Formule du rang*)

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$p = \dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big) + \mathrm{rg}(A)$$

Proposition 4 (*Les 2 définitions*)

Pour $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p).$$

Formule du rang : interprétation équations

Chaque équation *(efficace)* d'un système linéaire diminue de 1 la dimension de l'espace des solutions :

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big) = p - \mathrm{rg}(A)$$

$\mathrm{rg}(A)$ → Nombre d'équations efficaces

p → Nombre total d'inconnues

$\dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big)$ → Nombre de paramètres *(inconnues secondaires)*

Formule du rang : interprétation familles

Chaque relation de dépendance linéaire *(efficace)* sur une famille de vecteurs diminue de 1 la dimension du sous-espace engendré :

$$\mathrm{rg}(A) = p - \dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big)$$

$\dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big)$ → Nombre de relations de dépendance linéaire

p → Nombre de vecteurs dans la famille

$\mathrm{rg}(A)$ → Dimension du sous-espace engendré

Soit E un *e-v*, avec $n = \dim(E)$, et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Proposition 5 (*Calcul par pivot*)

Une fois la matrice A échelonnée :
le rang est le nombre de pivots.

Proposition 6 (*Majorations automatiques*)

On a :
- $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$ *(par la dimension ambiante)*
- $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *(par son nb. de vecteurs)*

Proposition 7 (*Caractérisations*)

$\mathcal{F}$ est **génératrice** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = n$ *($= \dim(E)$)*

$\mathcal{F}$ est **libre** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$ *($= \mathrm{Card}(\mathcal{F})$)*

Proposition 8 (*Conditions nécessaires*)

Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$ *(assez de vecteurs)*

Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$ *(pas trop de vecteurs)*

Si $\mathcal{F}$ est une base, alors $p = n$ *(bon nb de vecteurs)*

Proposition 9 (*Impossibilités*)

Si $p > n$, alors $\mathcal{F}$ n'est **pas libre** *(elle est **liée**)*.

Si $p < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est **pas génératrice**.

Proposition 10 (*« Bon nombre de vecteurs »*)

Si $p = n$, il y a équivalence :

$\mathcal{F}$ est **une base** $\iff$ $\mathcal{F}$ est **libre**

$\iff$ $\mathcal{F}$ est **génératrice**