Sujet 1 :

Question de cours :

1. Ecrire un exemple de sommation télescopique
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Ecrire la définition de $u_n \sim v_n$
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Ecrire la définition de $u_n = o(v_n)$

Exercice 1 :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $\frac{1}{t}$ sur [k ; k+1]. En déduire un encadrement de $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$.
2. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Minorer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Retrouver alors la divergence de la série associée.

Exercice 2 :

1. Déterminer la nature de la série : $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$.
2. Calculer la somme après avoir justifié la convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 2^n}{2^{2n}}$

Sujet 2 :

Question de cours :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Ecrire la définition de $u_n \sim v_n$
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Ecrire la définition de $u_n = o(v_n)$
3. Définir la série de Riemann. Ecrire la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle converge.

Exercice 1 :

1. Déterminer la nature des séries : $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{n}+n^3}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$.
2. Calculer la somme après avoir justifié la convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$

Exercice 2 :

1. Soit $k \in$ N*. Donner un encadrement de $\frac{1}{t}$ sur [k ; k+1]. En déduire un encadrement de $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$.
2. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. Soit $n \in$ N*. Minorer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Retrouver alors la divergence de la série associée.

Sujet 3 :

Question de cours :

1. Définir la série géométrique et les séries géométriques dérivées premières et secondes. Quels sont les critères de convergence ?
2. Ecrire les convergences de séries par comparaison.

Exercice 1 :

1. Déterminer la nature des séries : $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{1+n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
2. Calculer la somme après avoir justifié la convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0 ; +\infty[$ et $\forall$ n $\in$ N, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $\forall$ k $\in$ N, $v_k - v_{k+1} = u_k$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
3. Montrer que $\forall$ n $\in$ N, $u_n > 0$.
4. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
5. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.