Correction DL 1

Soient f, g, h fonctions définies pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$, $g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right)$, $h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. *(Soit $x \geqslant 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que : $h(x) = -f'(x)$ et $f(x) = g'(x)$.)*

Les fonctions f,g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, comme fractions rationnelles *(sans valeur interdites)* et composées de fonctions usuelles $\mathscr{C}^\infty$.

Pour $x \geqslant 0$, on dérive : $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$, $\quad g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right)$

$f'(x) = \frac{2\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$, $\quad g'(x) = -2\cdot\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

On a donc bien $f'(x) = -h(x)$, et $g'(x) = -2\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{e^x+1} = f(x)$.

Soit $A \geqslant 0$.

2. *(Justifier que : $\int_0^A h(x)\,dx = 1 - f(A)$. Que vaut $\int_0^A f(x)\,dx$?)*

On a montré que h est une primitive de $-f$.

On obtient donc : $\int_0^A h(x)\,dx = \int_0^A -f'(x)\,dx = -\left[f(x)\right]_0^A = f(0) - f(A) = 1 - f(A)$.

De même, on vu que $\forall x \geqslant 0$, $g(x) = f'(x)$.

Il vient donc : $\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A g'(x)\,dx = \left[g(x)\right]_0^A = g(A) - g(0) = 2\ln(2) - 2\ln\left(1+e^{-A}\right)$.

3. *(À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^A x.h(x)\,dx = -Af(A) + g(A) - g(0)$.)*

On intègre par parties : $J_A = \int_0^A x.h(x)\,dx$.

Les fonctions u,v ci-contre sont bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0;A]$: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = h(x) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -f(x) \end{cases}$

Par intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} J_A &= \int_0^A u(x)\cdot v'(x)\,dx \\ &= \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_0^A - \int_0^A u'(x)\cdot v(x)\,dx \\ &= -A\cdot f(A) + \int_0^A f(x)\,dx = -A\cdot f(A) + g(A) - g(0), \end{aligned}$$

où l'a conclu en utilisant le résultat de la question **2.**

4. **a)** *(La fonction h est-elle continue en 0 ?* *(Une réponse argumentée est attendue.))*

On a :
- $h(0) = \frac{2\cdot e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$

La fonction h n'est donc pas continue en 0.

b) *(Prouver que h est une densité de probabilité.)*

On vérifie les trois hypothèses d'une fonction densité :

- h **continue par morceaux sur** $\mathbb{R}$
- $h \geqslant 0$ **sur** $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ **converge et vaut 1** D'abord, $h \equiv 0$ sur $]-\infty;0[$, donc $\int_{-\infty}^0 h(x)\,dx = 0$.

  Étudions cvgce et valeur de $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}(1 - f(A))$

  Or on a $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A) = \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{2}{1+e^A} = 0$, d'où la convergence de : $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = 1$.

  On a donc bien $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 h(x)\,dx + \int_0^{+\infty} h(x)\,dx = 0 + 1 = 1$.

La fonction h est donc bien une densité de probabilités.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

5. *(Montrer que Z possède une espérance et donner la valeur de $\mathbb{E}[Z]$.)*

La variable Z admet une espérance *ssi* l'intégrale $\mathbb{E}[Z] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot h(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.

- **Intégrale sur** $]-\infty;0[$ Comme ci-dessus, on a bien convergence absolue $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- **Intégrale sur** $]0;+\infty[$

  On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} -Af(A)+g(A)-g(0)$ *(ss res de cv.)*

  Or : ▸ $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A\cdot f(A) = \lim_{A\to+\infty}\frac{2A}{1+\mathrm{e}^A} = 0$ par croissances comparées.

  ▸ $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \lim_{A\to+\infty} -2\ln(1+\mathrm{e}^A) = -2\lim_1 \ln = 0.$

  On trouve donc que l'intégrale converge et vaut : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x = -g(0) = 2\ln(2)$.
- **Conclusion** Les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\ldots = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ldots = 2\ln(2)$ convergent absolument

  (l'intégrande est $\geqslant 0$.)

  Ainsi, l'espérance existe et vaut $\mathbb{E}[Z] = 2\ln(2)$.

6. *(Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$)*

- Cette fonction H est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0.
- On vérifie que $H' = h$. Pour $x\geqslant 0$: $H(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$

  $$H'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\cdot(\mathrm{e}^x+1)-(\mathrm{e}^x-1)\cdot\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = h(x).$$
- On a $\displaystyle\lim_{-\infty} H = 0$.

Ainsi la fonction H est bien la fonction de répartition de Z.

7. *(Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(Z\geqslant\ln(2))$, $\mathbb{P}(\ln(2)\leqslant Z\leqslant\ln(8))$ et $\mathbb{P}_{[Z\geqslant\ln(2)]}(Z\leqslant\ln(8))$ (On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.))*

On trouve :

- $\mathbb{P}(Z\geqslant\ln(2)) = 1-H(\ln(2)) = 1-\frac{2-1}{2+1} = \frac{2}{3}$.
- $\mathbb{P}(\ln(2)\leqslant Z\leqslant\ln(8)) = H(\ln(8))-H(\ln(2)) = \frac{7}{9}-\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.
- $\mathbb{P}_{[Z\geqslant\ln(2)]}(Z\leqslant\ln(8)) = \frac{\mathbb{P}(\ln(2)\leqslant Z\leqslant\ln(8))}{\mathbb{P}(Z\geqslant\ln(2))} = \frac{2}{3}$.

8. *(Déterminer la médiane de Z. (c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $H(x) = \frac{1}{2}$))*

On résout l'équation : $H(x) = \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^x-1 = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{e}^x+1) \iff \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^x = \frac{3}{2} \iff \mathrm{e}^x = 3$.

La médiane de Z est donc $\ln(3)$.

Remarque

> La fonction H vérifie les hypothèses du théorème de la bijection monotone sur $[0;+\infty[$:
>
> - H est continue
> - H est strictement croissante
>
> Ainsi H réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $[H(0);\lim_{+\infty} H[= [0;1[$.
>
> Comme $\frac{1}{2}\in[0;1[$, il existe bien un unique $m\in]0;+\infty[$ tel que : $H(m) = \frac{1}{2}$.