

Compléments : dérivation et convexité

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définitions	3
1.2	Inégalité des accroissements finis	4
1.3	Règles de dérivation	5
2	Convexité	5
2.1	Définition	5
2.2	Convexité et dérivation	6
2.3	Exemples d'application	7
3	Développements limités à l'ordre 2	8
3.1	Comparaison des fonctions au voisinage d'un point	8
3.2	La formule de Taylor à l'ordre 2	8
3.3	Cas à connaître	9
3.4	Application aux formes indéterminées	10
4	Exercices	10

1 Généralités

Introduction : une remarque sur les fonctions affines

Définition 1 (*Fonctions affines*)

Une **fonction affine** est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$, l'on puisse écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

Interprétation graphique

Le graphe de la fonction f est alors une droite \mathcal{D} (*qui n'est pas verticale*)

Les coefficients a, b s'interprètent comme suit : $\blacktriangleright a$: le coefficient directeur de \mathcal{D} ,

$\blacktriangleright b$: son ordonnée à l'origine, soit $b = f(0)$.

Le coefficient directeur a peut se retrouver par la formule du **taux d'accroissement** :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \text{pour } x_0, x_1 \text{ quelconques, avec } x_0 \neq x_1.$$

Changement de point

On peut aussi écrire l'équation de droite comme : $y = a'(x - x_0) + b'$ où : $\left| \begin{array}{l} a' = a \\ b' = b + ax_0 = f(x_0) \end{array} \right.$

1.1 Définitions

Définition 2 (*Dérivabilité, nombre dérivé*)

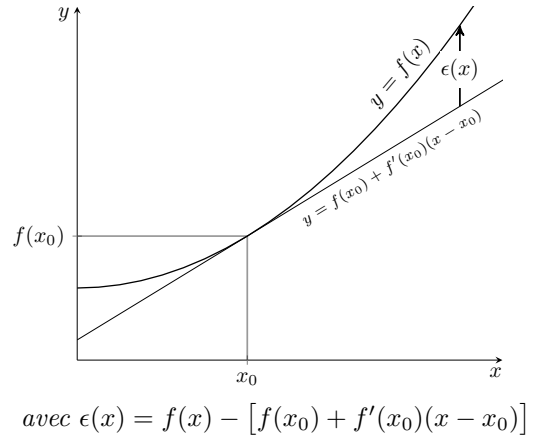
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$.

- On dit que f est **dérivable** en x_0 si, pour $x \rightarrow x_0$, on peut écrire l'approximation :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

pour $a \in \mathbb{R}$ une constante.

- La droite d'équation $y = f(x_0) + a(x - x_0)$ est alors la **tangente** au graphe de f en x_0 .
- Son coefficient directeur est noté $a = f'(x_0)$, le **nombre dérivé** de f en x_0 ,



En réécrivant, pour $x \rightarrow x_0$, la formule : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, comme :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(x - x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow 0},$$

on retrouve la formulation familière :

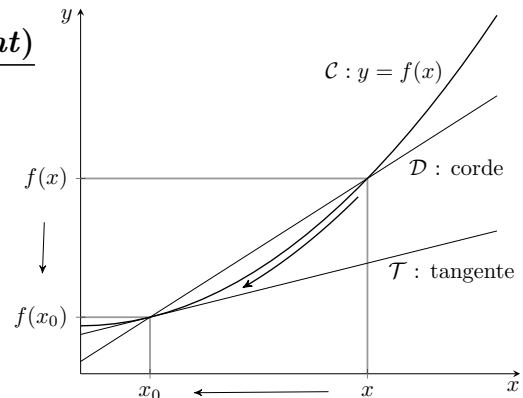
Proposition 3 (*Limite du taux d'accroissement*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$.

Alors f est dérivable en x_0 ssi la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe pour $x \rightarrow x_0$.

Si c'est le cas, alors le nombre dérivé vérifie :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



(La corde s'approche de la tangente)

Définition 4 (*Fonction dérivée*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- On dit que f est **dérivable sur l'intervalle I** si f est dérivable en tout point $\forall x_0 \in I$.
- La **fonction dérivée** $x \mapsto f'(x)$ est alors bien définie sur I .

Exemples : dérivation de puissances :

- La fonction carré $f(x) = x^2$.

On pose $x = x_0 + h$, et alors $x \rightarrow x_0 \iff h \rightarrow 0$. On trouve alors :

$$f(x) = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = \underbrace{x_0^2 + 2x_0 h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{h^2}_{=o(h)}$$

Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 2x_0$ (soit $(x^2)' = 2x$).

- La fonction cube $f(x) = x^3$.

On trouve alors : $f(x) = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 = \underbrace{x_0^3 + 3x_0^2 h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{=o(h)}$.

Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 3x_0^2$ (soit $(x^3)' = 3x^2$).

► **La fonction inverse** $f(x) = \frac{1}{x}$. (un peu plus subtil !)

Pour se donner des idées, on commence par calculer le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x_0 x}}{x - x_0} = \frac{-1}{x_0 x},$$

soit la formule : $f(x) = f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_0} \times f(x)$ ou $f(x_0 + h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0 + h)$.

Par suite il vient $f(x_0 + h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0} \left[f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0 + h) \right]$ soit :

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) - f(x_0) \frac{h}{x_0}}_{\text{affine en } h} + \underbrace{f(x_0 + h) \frac{h^2}{x_0^2}}_{=o(h)}.$$

1.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 5 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}$.

Supposons que la **dérivée** f' est **majorée** par M : si $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \leq M$,

alors le **taux d'accroissement** $\tau_{a,b} f$ l'est aussi : alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$.

2. Soit $k \geq 0$.

Supposons que la **dérivée** f' est **bornée** par k : si $\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k$,

alors le **taux d'accroissement** $\tau_{a,b} f$ l'est aussi : alors $\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq k$.

Résumé de la proposition :

Le taux d'accroissement s'interprète comme la valeur moyenne de la dérivée :

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{taux d'accroissement de } f} = \underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f'(t) \, dt}_{\text{valeur moyenne de } f'}$$

Ainsi, si la dérivée vérifie une certaine inégalité **sur tout l'intervalle** I , alors les taux d'accroissement satisfont « la même inégalité ».

En particulier, l'énoncé 1. s'étend *mutatis mutandis* pour

- une minoration $m \leq f'(x)$ (on retourne l'inégalité pour le taux d'accroissement)
- un encadrement $m \leq f'(x) \leq M$ (on obtient un encadrement du taux d'accroissement).
- des inégalités strictes $m < f'(x)$ ou $f'(x) < M$. (\leadsto inégalité stricte sur le taux d'accroissement)

Remarque sur la portée du résultat

Par définition, la dérivée **s'obtient à partir du** taux d'accroissement (par passage à la limite). L'inégalité des accroissements finis nous permet de faire **le trajet en sens inverse** :

partant d'informations sur la dérivée, **on conclut sur** le taux d'accroissement.

Démonstration (Si f est C^1): Supposons f de classe C^1 (au lieu de « seulement dérivable »).

Alors la dérivée f' est continue et on peut l'intégrer sur le segment $[x_0; x_1]$. Il vient :

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(t) dt = \left[f(t) \right]_{x_0}^{x_1} = f(x_1) - f(x_0).$$

Si on a $\forall t \in I, f'(t) \leq M$, alors $\int_{x_0}^{x_1} f'(t) dt \leq \int_{x_0}^{x_1} M dt = M(x_1 - x_0)$ (on rappelle que $x_0 \leq x_1$!)

Il vient donc bien alors $f(x_1) - f(x_0) \leq M(x_1 - x_0)$. ■

Proposition 6 (*Sens de variations*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable.

1. La fonction f est **croissante** ssi $f' \geq 0$ sur I .
2. Si $f' > 0$ sur I , alors la fonction f est **strictement croissante**.

1.3 Règles de dérivation

2 Convexité

2.1 Définition

Définition 7 (*Fonction convexe sur un intervalle*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On dit que f est **convexe** sur I si pour tous $\triangleright a, b \in I$, et
 $\triangleright p, q \in]0; 1[$, avec $p + q = 1$,

on a l'inégalité :

$$\underbrace{f(qa + pb)}_{\text{image de la moyenne}} \leq \underbrace{qf(a) + pf(b)}_{\text{moyenne des images}}$$

Convexité sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto x^2$:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0; 1[$, avec $p + q = 1$. On a :

$$\begin{aligned} qf(a) + pf(b) - f(qa + pb) &= qa^2 + pb^2 - (qa + pb)^2 \\ &= (q - q^2)a^2 + (p - p^2)b^2 - 2pqab = pq(a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

Ainsi $qf(a) + pf(b) = f(qa + pb) + pq(a - b)^2 \geq f(qa + pb)$ et f est donc bien convexe.

Remarques (*pour f une fonction convexe*)

► Notamment pour $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$

► Généralisation

Si on a davantage de coefficients p_1, p_2, \dots, p_n , avec $\triangleright \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0$
 $\triangleright \sum_{i=1}^n p_i = 1$ (=100%)

on a aussi, pour toute suite $(a_i) \in I^n$, l'inégalité : $f\left(\sum_{i=1}^n p_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$.

2.2 Convexité et dérivation

Avec des taux d'accroissements

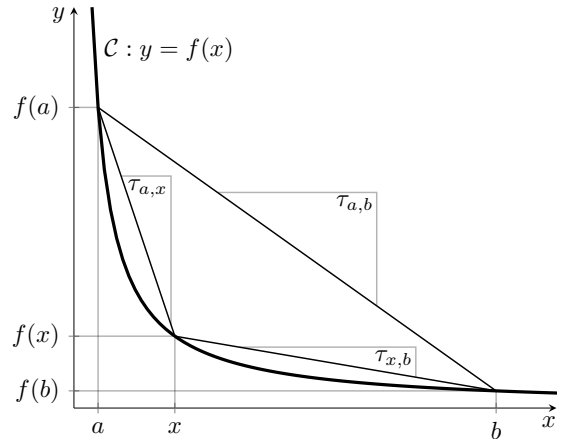
On écrit ici : $x = qa + pb$, et on a donc : $x - a = p(b - a)$.
 et $b - x = q(b - a)$.
 L'inégalité de convexité $f(qa + pb) \leq qf(a) + pf(b)$ s'écrit :

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

On regroupe avec la formule $\frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a} = 1$,
 et on obtient les deux reformulations suivantes pour
 cette inégalité :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x},$$

ou encore $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}$



(On note ici $\tau_{a,b}$ le taux d'accroissements de f entre a et b , et idem pour $\tau_{a,x}$, $\tau_{x,b}$.)

Convexité sur \mathbb{R}_+^* de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:

Soient $a, x, b \in]0; +\infty[$ avec $a < x < b$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est : $\tau_{a,b} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b-a} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \frac{-1}{ab}$.

De même : $\tau_{a,x} = \frac{-1}{ax}$, et $\tau_{x,b} = \frac{-1}{xb}$.

Comme $0 < a < x < b$, on a bien $\frac{-1}{ax} \leq \frac{-1}{xb} \leq \frac{-1}{ab}$, soit $\tau_{a,x} \leq \tau_{a,b} \leq \tau_{x,b}$.

Ainsi f est bien convexe sur $]0; +\infty[$.

Proposition 8 (Croissance de la dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Alors f est convexe sur I ssi sa dérivée f' est croissante sur I .
- Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi f'' est positive (≥ 0) sur I .

Démonstration (hors-programme, et que l'on peut omettre) :

- f convexe $\implies f'$ croissante On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe.

Montrons que si $a, b \in I$ vérifient $a \leq b$, alors $f'(a) \leq f'(b)$.

D'après la Remarque 2.1, pour $x \in]a; b[$, on a :

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, et
- $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On passe à la limite pour $x \rightarrow b$ et $x \rightarrow a$ respectivement. Il vient :

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$
- $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ainsi on a bien : $f'(a) \leq f'(b)$, et f' est croissante.

- f' croissante $\implies f$ convexe On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et f' croissante.

Pour $a \leq b \in I$, et $x \in]a; b[$, d'après les accroissements finis, et la croissance de f' , on a :

$$\frac{f(b) - f(x)}{b-x} \geq f'(x) \text{ et } \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq f'(x). \text{ Ainsi } \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}.$$

Or le taux d'accroissement $\tau_{a,b}$ s'écrit comme une moyenne de $\tau_{a,x}$ et $\tau_{x,b}$:

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\tau_{a,b}} = \underbrace{\frac{x-a}{b-a}}_q \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\tau_{a,x}} + \underbrace{\frac{b-x}{b-a}}_p \cdot \underbrace{\frac{f(b) - f(x)}{b-x}}_{\tau_{x,b}}.$$

On a donc bien $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, et f est convexe par la Remarque 2.1.



Proposition 9 (*Caractérisation par les tangentes*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Alors f est convexe

- ssi le graphe de f est au-dessus de ses tangentes,
- c'est-à-dire ssi $\forall a, x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Démonstration : On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 . On a donc $f''(t) \geq 0$ pour $t \in I$.

On va écrire $f(x)$ en faisant apparaître une intégrale avec $f''(t)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt \\ &= f(a) + \left[(t-x)f'(t) \right]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t) \, dt \end{aligned}$$

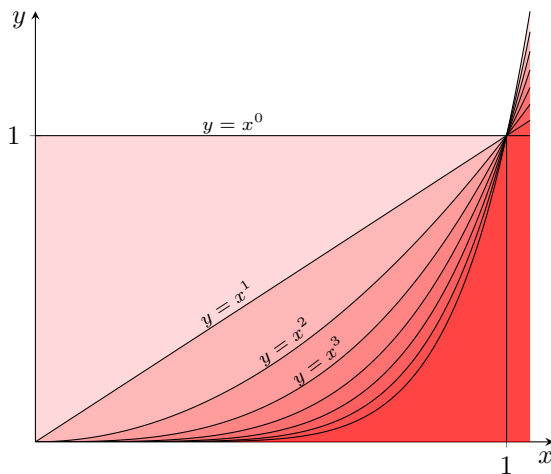
où l'on a fait l'intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = f'(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = f''(t) \\ v(t) = t - x. \end{cases}$

Ainsi : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\int_a^x (x-t)f''(t) \, dt}_{\geq 0}$, d'où $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. ■

2.3 Exemples d'application

3 Développements limités à l'ordre 2

3.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point



Proposition 10 (*Unicité*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, et $x_0 \in I$.

Si f admet un développement limité en x_0 , celui-ci est unique.

En d'autres termes, si l'on peut écrire : $f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$,
 $\quad \quad \quad = a' + b'(x - x_0) + c'(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$
 pour $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, alors on a nécessairement : $a = a', b = b'$, et $c = c'$.

3.2 La formule de Taylor à l'ordre 2

Développements limités à l'ordre 1 (On s'intéresse, comme dans la suite, à l'étude en 0.)

On a l'approximation de $f(x)$ pour $x \rightarrow 0$, par une fonction affine, grâce à la dérivée :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{fonction affine}} + \underbrace{o(x)}_{\text{terme d'erreur}}$$

Cette formule est exacte (le terme d'erreur = 0) pour une fonction affine en $f(x) = ax + b$, car alors, on a bien $f(0) = b$, et $f'(0) = a$.

Recherche d'analogue pour un polynôme de degré 2

Pour une fonction donnée par : $f(x) = ax^2 + bx + c$,

on a : $f'(x) = 2ax + b$,

et : $f''(x) = 2a$. Ainsi en prenant $x = 0$, on trouve l'expression

des coefficients : $c = f(0)$, $b = f'(0)$ et $a = \frac{f''(0)}{2}$.

On a obtenu, pour f fonction polynomiale de degré 2 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$.

Proposition 11 (Formule de Taylor à l'ordre 2)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 au voisinage de x_0 , alors $x \rightarrow x_0$, et $h \rightarrow 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2)$$

3.3 Cas à connaître

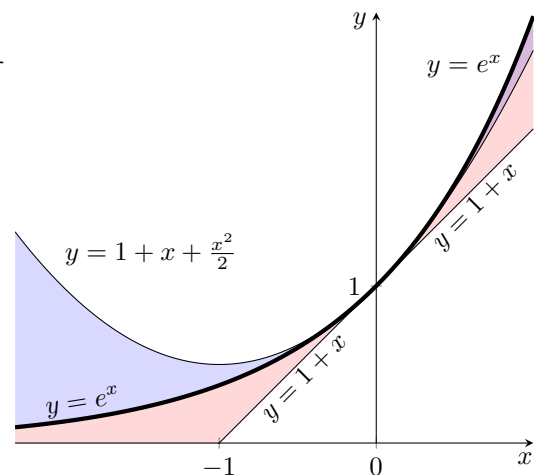
e^x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a, a \in \mathbb{R}$
$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Pour la fonction exponentielle

Proposition 12 (Développement limité de exp)

Pour $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$



Pour la fonction logarithme

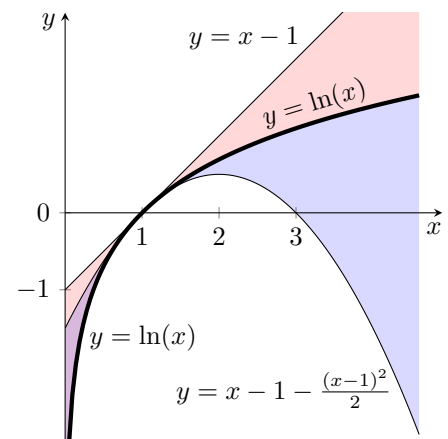
Proposition 13 (Développement limité de ln)

Pour $x \rightarrow 1$

$$\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

Pour $h \rightarrow 0$

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$



Démonstration : On a : $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$, et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ainsi : $\ln(1) = 0, \ln'(1) = 1, \ln''(1) = -1$.

Le développement limité suit par la formule de Taylor. ■

Pour les fonctions puissances

Proposition 14 (*Dév^t limité de $(1+x)^a$*) **Démonstration :**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Alors, pour $x \rightarrow 0$, on a :

$$(1+x)^a = 1 + ax \frac{a(a-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$$

Pour $x > 0$, notons $f(x) = (1+x)^a$.

Cette fonction est bien de classe \mathcal{C}^2 .

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ et

$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$, d'où :

$f(0) = 1$, $f'(0) = a$, et $f''(0) = a(a-1)$. ■

Les cas $(1+x)^a$, pour $a \in \mathbb{N}$

On développe par la formule du **binôme de Newton** : $(1+x)^0 = 1$

$$(1+x)^1 = 1+x$$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

$$(1+x)^4 = \underbrace{1+4x+6x^2}_{\text{dev. lim}_2} + \underbrace{4x^3+x^4}_{=o(x^2)}$$

En général, de la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ on ne garde pour développement limité que

les trois premiers termes, soit : $\sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$.

Le cas $a = -1$ (la fraction $\frac{1}{1+x}$)

On peut écrire : $\frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} = 1 - x \cdot \frac{1}{1+x}$.

On réinjecte : $\frac{1}{1+x} = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right) = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right)\right)$.

On a trouvé la formule du développement limité à l'ordre 2 : $\frac{1}{1+x} = \underbrace{1-x+x^2}_{\text{dev. lim}_2} - \underbrace{\frac{x^3}{1+x}}_{=o(x^2)}$.

(en itérant, on trouve $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$, etc.)

3.4 Application aux formes indéterminées

4 Exercices

Exercice 1 (*Calculs de taux d'accroissements*)

1. $f(x) = x^2$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $a+x$
2. $f(x) = x^3$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $a^2 + ax + x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $\frac{-1}{ax}$
4. En faisant le passage à la limite $x \rightarrow a$, retrouver les dérivées de ces fonctions.

Exercice 2 (*Moyenne harmonique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.
3. Conclure que la moyenne harmonique $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$ est majorée par la moyenne arithmétique $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a $a < H(a, b) < b$.

Exercice 3 (*Moyenne géométrique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\frac{1}{2} [\ln(a) + \ln(b)] \leq \ln \left(\frac{a+b}{2} \right)$.
3. Conclure que la moyenne harmonique $G(a, b) = \sqrt{ab}$ est majorée par la moyenne arithmétique $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a $a < G(a, b) < b$.

Exercice 4 (*Inflexions de la Gaussienne*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \alpha \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right)$, où $\alpha > 0$.

1. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Faire l'étude des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
4. Faire l'étude de la convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .
5. Pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, où sont le max, et les inflexions de $g : x \mapsto \alpha \exp \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$?
(réponse : maximum : en μ , inflexion : en $\mu \pm \sigma$)

Exercice 5 (*Relation entre les trois moyennes*)

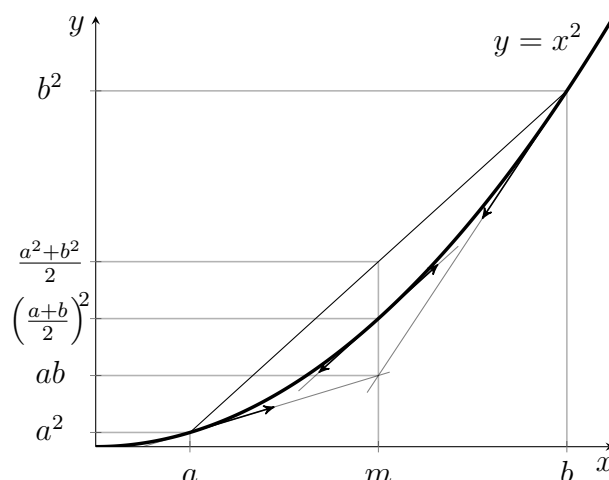
Pour deux réels $a, b > 0$, on définit :

- ▶ leur moyenne **arithmétique** par : $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$
- ▶ leur moyenne **harmonique** par : $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$
- ▶ leur moyenne **géométrique** par : $G(a, b) = \sqrt{ab}$.

1. Calculer le produit $A(a, b) \times H(a, b)$.
2. En déduire la moyenne géométrique de $A(a, b)$ et de $H(a, b)$.
3. En déduire l'encadrement $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$.

Exercice 6 (La parabole et la moyenne arithmétique)

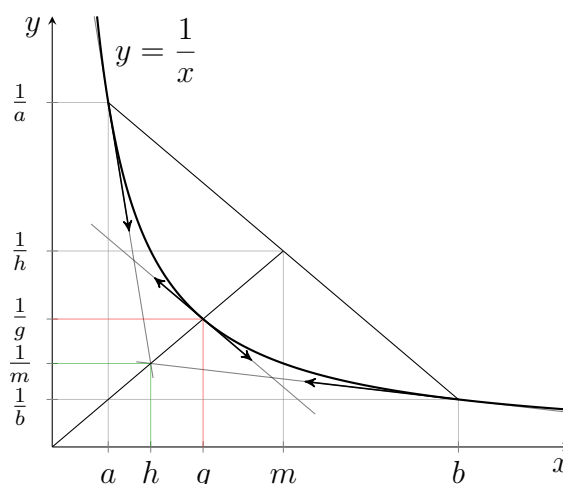
Même questions que ci-dessous en remplaçant l'hyperbole \mathcal{H} par la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$.

**Exercice 7 (L'hyperbole et les moyennes Pythagoriciennes)**

Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, et on place deux points $A_0 = (x_0, \frac{1}{x_0})$ et $A_1 = (x_1, \frac{1}{x_1})$ et où $x_0, x_1 > 0$.

On pose $a = \frac{x_0+x_1}{2}$, $g = \sqrt{x_0x_1}$ et $h = \frac{2x_0x_1}{x_0+x_1}$. Montrer que :

1. on a : $ah = g^2$ et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right)$.
2. le point $(a, \frac{1}{h})$ est le milieu du segment $[A_0A_1]$,
3. le point $(h, \frac{1}{a})$ est l'intersection des tangentes à \mathcal{H} en A_0 et A_1 ,
4. le point $(g, \frac{1}{g})$ est un point de \mathcal{H} où la tangente est parallèle à $[A_0A_1]$,
5. ces trois points sont alignés avec l'origine, sur la droite d'équation $y = g^2x$.

**Exercice 8 (Démonstration de la Proposition 8)**

Écrire un exercice pour arriver à la démonstration suivante :

Démonstration : On considère la fonction : $\varphi(t) = qf(x - t\ell) + pf(x + t\ell)$

Alors on a les deux valeurs remarquables :

- $\varphi(0) = f(x)$
- $\varphi(1) = qf(qa + pb - p(b-a)) + pf(qa + pb + q(b-a)) = qf(a) + pf(b)$

On dérive par rapport à t , tous les autres coefficients restant constants : $\varphi'(t) = -pqf'(x - t\ell) + pqf'(x + t\ell) = pq(f'(x + t\ell) - f'(x - t\ell))$ ■