Colles semaine 8 - Compléments intégration

1 Intégration sur un segment

- **Intégrabilité automatique** pour une fonction **continue sur un segment**.
- **Propriétés générales** Linéarité, Chasles, positivité, intégrale d'une constante.
- **Intégrale et primitive** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et $F' = f$.
- **Intégration par parties** pour u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

  *(**Stratégie :** on essaie de se rapprocher de la sortie du calcul)*
- **Changement de variables** *(le changement de variables est indiqué par l'énoncé)*

  ⋆) *Hypothèses :* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, f continue sur $u([a,b])$.

  ⋆) *Formule :* $\displaystyle\int_a^b f\big(u(t)\big)\cdot u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

  (On remplace tous les $u(t)$ par des x, et $u'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$.)

  ⋆) *Notation :* on a posé $x = u(t)$ et $dx = u'(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $t = a \rightsquigarrow x = u(a)\ldots$
- **Extension aux fonctions continues par morceaux**

Sur un segment, on dit que f est **continue par morceaux** si :

- f admet un nombre fini de **points de discontinuité**,
- f admet une **limite** à gauche et à droite en chacun.

On a convergence automatique de l'intégrale sur un segment pour une fonction **cpm**.

2 Intégration sur un intervalle quelconque

- **Convergence d'une intégrale** étude en $\pm\infty$, en un point $x_0^{\pm}$.
- **Intégrales convergentes de référence**
  - Fonctions exponentielles e^{-ax}, $a > 0$ sur $[0;+\infty[$.
  - En $+\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
  - En 0^+ : $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha < 1$. *(retournement de ci-dessus)*
- **Critère de convergence absolue** par comparaison $= o(g(t))$, $\sim g(t)$ ou $|.| \leqslant g(t)$.
  - souvent $\frac{1}{t^2}$ pour une intégrale en $+\infty$.
  - souvent $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour une intégrale en 0^+.
- **Extension en cas de discontinuités sur un intervalle** *(nombre fini de points de discontinuité)*

On étudie chaque « problème », puis calcul par Chasles

3 Principe de la comparaison série-intégrale

- **Encadrement d'intégrales**

  Pour f continue **décroissante**, on a l'encadrement : $\displaystyle f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$.
- **Encadrement de sommes partielles**

  Obtention d'encadrement de sommes partielles $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n)$ *(Chasles pour comparer à $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.)*
- **Études de suites** $\displaystyle a_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k)$ et $\displaystyle b_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

4 Questions de cours

1. Énoncer le critère de convergence de Riemann en $+\infty$ et en 0^+.

2. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Énoncer le principe du changement de variables pour une intégrale sur un segment.

4. Énoncer le principe de l'intégration par parties sur un segment.

5. Comparaison série-intégrale pour montrer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Passage à la limite $n \to +\infty$.