Suites de variables aléatoires

- **Notion d'indépendance pour un couple**
  - $\star$) *d'événements :* A, B indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
  - $\star$) *de va discrètes :*
    X, Y indép. si $\forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$
    (la loi conjointe est le produit des deux marginales)
- **Généralisation : l'indépendance mutuelle d'une suite** $(X_1, ..., X_n)$
  - $\star$) *Définition par l'ensemble de conditions :*
    $\forall (x_1, ..., x_n) \in (X_1, ..., X_n)(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \left[\mathbb{P}\left(X_i = x_i\right)\right]$
    soit $\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times ... \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$
  - $\star$) *Variables indépendantes et identiquement distribuées :*
    modélisation d'une suite de lancers de « dés/pièces/tirages avec remise *etc.* »
- **Le principe des coalitions**
  Si $X_1 ... X_r, X_{r+1} ... X_{r+n}$ sont mutuellement indépendantes, alors deux variables s'écrivant $Y = f(X_1, ..., X_r)$ et $Z = g(X_{r+1}, ..., X_{r+n})$ sont indépendantes *(Y et Z coalitions disjointes)*

Exemples et transfert de lois

- **Espérance et variance d'une somme**
  - On a toujours *(sous réserve de convergence)* $\mathbb{E}[X_1 + ... + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_n]$
  - Pour des va. **indépendantes,** *(s.rés. de cv.)* $\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + ... + \mathrm{Var}(X_n)$
- **Le processus de Bernoulli** Cas particulier important *(explicitement tractable)*
  - modélise la répétition d'une épreuve de Bernoulli à 2 issues : Échec (0) / Succès (1)
  - toutes de loi $\forall i$, $\epsilon_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $0 < p < 1$ *(la « même » épreuve à chaque rép.)*
  - elles sont **mutuellement indépendantes** *(processus sans mémoire)*
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$
  - $\star$) *elle modélise le nb. de succès :*
    parmi n essais d'un processus de Bernoulli $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ sans mémoire *(iid)*
  - $\star$) *Stabilité en loi par la somme indépendante :* Soient X_1, X_2 va. On suppose :
    - $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$
    - X_1, X_2 indépendantes

    Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ *(Lemme des coalitions aux sommes des n_1 premiers/n_2 derniers tirages)*
- **Loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$
  - $\star$) *elle modélise le rang d'apparition T du premier succès :*
    dans un processus de Bernoulli $\epsilon_1, \epsilon_2, ... \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ sans mémoire *(iid)*
  - $\star$) *Fonction d'anti-répartition :* $\mathbb{P}(T > n) = q^n$.
  - $\star$) *Min de 2 géométriques indépendantes :* Savoir retrouver :
    - pour $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$
    - T_1, T_2 indépendantes et $I = \min(T_1, T_2)$

    alors : $\mathbb{P}(I > n) = \mathbb{P}(T_1 > n) \times \mathbb{P}(T_2 > n) = (q_1 q_2)^n$, d'où $I \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.
- **Stabilité de la loi de Poisson par somme indépendante**
  - $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$
  - X_1, X_2 indépendantes

  Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ *(par l'étude de la loi conjointe)*
  Généralisation pour une somme de « Poisson » mutuellement indépendantes