# Colles semaine 16 - Couples de variables aléatoires

### 1 Lois d'un couple aléatoire discret

- ightharpoonup Couple de variables aléatoires Notation (X,Y): avec X,Y variables marginales
- ▶ Loi conjointe écriture en tableau à double entrée, et exploitation (calcul de probas)

| $X\downarrow$ | $Y \rightarrow$ | $y_1$    |          | $y_m$    | Loi de $X$ |
|---------------|-----------------|----------|----------|----------|------------|
| $x_1$         |                 | $p_{11}$ |          | $p_{1m}$ | $p_{1.}$   |
| :             |                 | ÷        |          | :        | :          |
| $x_n$         |                 | $p_{n1}$ |          | $p_{nm}$ | $p_{n}$ .  |
| Loi de Y      | 7               | $p_{.1}$ | $p_{.2}$ | $p_{.m}$ | 1          |

- ightharpoonup Lois marginales de X, Y une par une « dans l'absolu ». Lien à la loi conjointe.
- ▶ Cas de variables indépendantes (+ reconnaître et montrer la non-indépendance)

#### 2 Problèmes de transfert

- Formule de transfert  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) \cdot p_i$  et  $\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{\substack{i \in I \ j \in J}} \psi(x_i, x_j) \cdot p_{i,j}$ .
- ▶ Exemples simples de transfert de loi Z = f(X, Y). (notamment S = X + Y) Calcul des probas des valeurs de Z grâce à la loi conjointe.
- Cas du max  $M = \max(X, Y)$ 
  - Égalité des événements  $[M \leqslant m] = [X \leqslant m, Y \leqslant m]$
  - $\qquad \text{D'où } \underbrace{\mathbb{P}(M \leqslant m)}_{F_M(m)} = \mathbb{P}(X \leqslant m, Y \leqslant m) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{P}(M = m) = F_M(m) F_M(m-1).$
  - ▶ Cas où X, Y sont indépendantes. Alors  $\forall m: \mathbb{P}(M \leqslant m) = \mathbb{P}(X \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant m)$

### 3 Covariance d'un couple de variables aléatoires

(toutes propriétés sous réserve de convergence absolue des séries)

- ▶ Linéarité de l'espérance  $\mathbb{E}[aX + bY] = a \mathbb{E}[X] + b \mathbb{E}[Y]$  (a, b ∈  $\mathbb{R}$  cst. déterministes)
- ▶ Produit indépendant Si X, Y sont indépendantes, alors :  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X]$ .
- ▶ Notion de variance ▶ Par définition :  $Var(X) = \mathbb{E}[(X \mathbb{E}[X])^2]$ 
  - ► Kænig-Huygens :  $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] (\mathbb{E}[X])^2$ .
  - Écart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$
  - ► Homogénéité :  $\operatorname{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \operatorname{Var}(X), \quad (où \lambda \in \mathbb{R})$
- ▶ Notion de covariance ▶ Par définition :  $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X \mathbb{E}[X]) \cdot (Y \mathbb{E}[Y])]$ 
  - ► Keenig-Huygens :  $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
  - Lien à la variance : Cov(X, X) = Var(X)
  - $\blacktriangleright$ Bilinéarité-symétrie « règles de calcul pour  $\mathrm{Cov}(X,Y)$  »
- Formule de polarisation  $Cov(X,Y) = \frac{1}{2} \cdot \left[ Var(X+Y) Var(X) Var(Y) \right].$

Deux variables indépendantes sont décorrélées : Cov(X, Y) = 0.

- Corrélation linéaire, principe de la régression linéaire

Coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ Cauchy-Schwarz  $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1.$ 

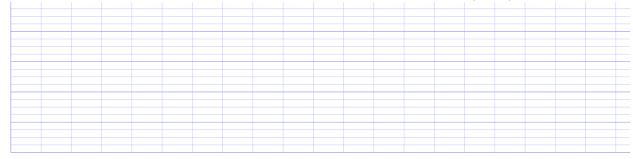
Corrélation totale : pour  $\rho(X,Y)=\pm 1$ , alors on peut écrire Y=aX+b, où  $a,b\in\mathbb{R}$ .

Principe de la régression linéaire Droite qui suit le nuage de point.

Interprétation du signe de  $\rho(X,Y)$  X,Y varient plutôt « ensemble » ou « en sens opposé »

## 4 Questions de cours

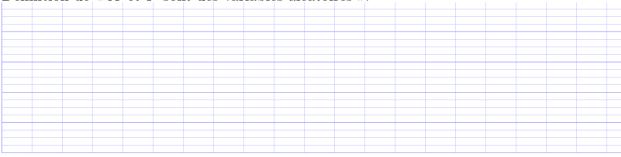
1. Définition de la covariance et formule de Kœnig-Huygens pour Cov(X,Y).



2. Formule de transfert pour l'espérance à une et à deux variables.



3. Définition de « X et Y sont des variables aléatoires ».



**4.** Principe de l'étude du maximum  $M = \max(X, Y)$ .



**5.** Expression de Var(X + Y) et formule de polarisation.

