TP Scilab 6 : Divers (intégrales, indépendance de *v.a.*)

1 Estimation d'intégrale

Exercice 1 (*Calcul d'intégrale par méthode des rectangles*)

1. Combien vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$? Calculer $\ln(2)$ avec Scilab.
2. Définir la fonction `function y = f(x)` représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Obtenir le vecteur `x` donnant la subdivision régulière à `N+1` pas du segment $[0\,;1]$.
4. `plot`ter `x` contre `y=f(x)`,
   - une fois avec `plot2d2`
   - une fois avec `plot2d`
5. Calculer la moyenne de `y`. Comparer avec $\ln(2)$.
6. Soit `xBis` défini ci-contre :
   a) Comparer `x` et `xBis`
   b) Quelle est la meilleure approximation de $\ln(2)$ parmi les deux valeurs suivantes :
      - `mean(f(x))`
      - `mean(f(xBis))`

xbis.sce

```
N = 11
x = linspace(0, 1, N)

xBis = ( x(1:$-1) + x(2:$) ) / 2
```

Exercice 2 (*Transfert simple et la méthode de Monte-Carlo*)

1. Obtenir un échantillon `X` de taille `N` de la loi uniforme $\mathcal{U}[0\,;1]$. Calculer sa moyenne.
2. Obtenir l'échantillon `Y = f(X)`. Calculer sa moyenne. Comparer avec $\ln(2)$.
3. `plot`ter `X` contre `Y`, avec la cosmétique convenable.
4. Les échantillons `X` et `Y` sont-ils indépendants ?
   Calculer le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$, grâce à `correl(X, Y)`.

2 Indépendance de deux variables aléatoires

Exercice 3 (*Coefficient de corrélation et indépendance*)

1. Obtenir deux échantillons `X` et `Y`, de taille `N`, indépendants, de loi $\mathcal{E}(2)$.
2. `plot`ter `X` contre `Y`, avec la cosmétique convenable.
   (copier-coller la cosmétique précédente mais commenter la ligne avec `data_bounds`*.)*
3. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$? *(encore* `correl(X, Y)`*.)*
   *(**Vocabulaire :** on dit que X et Y sont **décorrélées** si $\sigma(X, Y) = 0$.)*
4. Calculer la moyenne du produit : `mean(X.*Y)`
   et le produit des moyennes : `mean(X) * mean(Y)`

Exercice 4 (*Fréquences empiriques*)

1. Définir un échantillon `X = alea(1,8)`.
2. Afficher `X < .5`. À quoi correspondent les `T` et `F` ? *(booléens)*
3. a) Que donne `1 * (X < .5)` ?

   b) Comment compter le nombre de `T` ? La fréquence des `T` ?

Exercice 5 (*Médiane et un test d'indépendance*)

On reprend les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

1. Obtenir les médianes de `X` et `Y`.

Définir `booleenX = 1 * (X < median(X))` et `booleenY = 1 * (Y < median(Y))`.

2. Combien retournent `mean (booleenX)` et `mean (booleenY)` ?
3. Combien retourne `mean (booleenX .* booleenY)` ? Interpréter en terme d'indépendance.

Exercice 6 (*Min. et max. exponentielles*)

On reprend les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

1. Définir leur minimum `minim` et leur maximum `maxim`.
2. `plot`ter `minim` contre `maxim`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `minim` et `maxim` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(I, M)$? *(encore* `correl(minim, maxim)`*)*

Exercice 7 (*Somme et différence exponentielles*)

On reprend les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

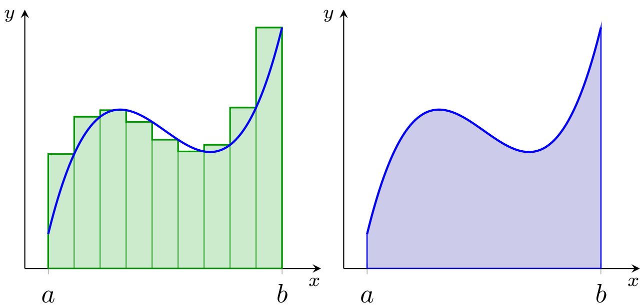
1. Définir leur somme `somme` et leur différence `diffe`.
2. `plot`ter `somme` contre `diffe`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `somme` et `diffe` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(\Sigma, \Delta)$? *(encore* `correl(somme, diffe)`*)*
5. Conclure sur : $\Big[X \text{ et } Y \text{ décorrélées}\Big] \overset{?}{\longleftrightarrow} \Big[X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\Big]$

3 Compléments (maths)

Proposition 1 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a\,; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \to +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Proposition 2 (*Formule de transfert pour l'espérance*)

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0\,;1]$ une variable uniforme continue « standard ».
Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue *(ou cpm.)*. Alors on a :

$$\mathbb{E}[f(U)] = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$$

Définition 3 (*Covariance*)

Sous réserve de convergence, on définit la covariance de deux variables X, Y comme

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big) \cdot \big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big].$$

Proposition 4 (*König-Huygens*)

On retrouve aussi une formule de König-Huygens pour la covariance, sous la forme :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Définition 5 (*Corrélation*)

Soient X et Y deux v.a. admettant une variance finie $\neq 0$.
On appelle **coeff. de corrélation** de X, Y :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}.$$

On a : $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.

Proposition 6 (*Indép. : cond. néc.*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.
On suppose X, Y **indépendantes**.
Alors sous réserve d'existence :

1. $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

2. X, Y sont **décorrélées** :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(X,Y) = 0.$$