

# Colles semaine 4 : Séries numériques : compléments

## 1 Sommes finies

- ▶ **Généralités** nombre de termes, indice de sommation, valeur moyenne
- ▶ **Propriétés** Linéarité, croissance (*majorer, minorer une somme*), relation de Chasles
- ▶ **Sommation télescopique** Formule  $\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$  et variantes
  - ▶ On décompose la série par linéarité, puis changement d'indice.  
(*éventuellement approche directe : on développe la somme avec des ... + ... + ... et on simplifie*)
  - ▶ Télescopage de décomposition en éléments simples. L'exemple  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

## 2 Convergence

### 2.1 Définitions

La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge si la **suite des sommes partielles**  $\left( S_N = \sum_{n=0}^N a_n \right)$  converge.

- ▶ **Somme de la série** La somme de la série est alors la limite  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ .
- ▶ **Exemple** Calcul de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .
- ▶ **Divergence grossière** Pour que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge, il **faut** que  $a_n \xrightarrow{\infty} 0$ .  
(*mais cette condition n'est **pas suffisante**, comme pour  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , divergente*)

### 2.2 Séries à termes positifs (SÀTP)

- ▶ **Sommes partielles** Si  $(a_n)$  est  $\geq 0$ , alors la suite  $\left( S_n = \sum_{k=0}^n a_k \right)$  est **croissante**.
- ▶ **Alternative des suites croissantes.** Pour  $(S_n)$  croissante, alors (*de deux choses l'une*) :
  - ▶  $(S_n)$  est majorée, et alors  $(S_n)$  converge,
  - ▶  $(S_n)$  n'est pas majorée, et alors  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- ▶ **Exemples** de maj-minoration des sommes partielles. Application : convergence de SÀTP.

### 2.3 Convergence par comparaison (*pour les séries à termes positifs*)

- ▶ Pour chacun des cas  $\left| \begin{array}{l} u_n \leq v_n, \\ \text{ou } u_n \sim v_n, \\ \text{ou } u_n = o(v_n) \end{array} \right|$  si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  aussi.
- ▶ **Séries de référence**
  - ★ *Séries géométriques* : La série  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge ssi  $|q| < 1$ , (la somme est alors  $\frac{1}{1-q}$ )
  - ★ *Séries de Riemann* : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$
- ▶ **Utilisation notable** si  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

### 2.4 Convergence absolue

- ▶ **Définition** La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge absolument si la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n|$  converge.
  - ▶ **Propriété fondamentale** Toute série absolument convergente est aussi convergente.
  - ▶ **La réciproque est fautive**
- La série alternée  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1}$  converge (*vers  $\ln(2)$  !*), mais **n'est pas** absolument convergente.
- ▶ **Relation de comparaisons et convergence absolue**
- Les résultats de 2.3 s'appliquent aussi avec  $|u_n|$  par convergence absolue.