

Définition 1 (Pour une famille)

Pour $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$,
 $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.

Théorème 3 (Formule du rang)

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :
 $p = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$

Définition 2 (Pour une matrice)

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
 $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Proposition 4 (Les 2 définitions)

Pour $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$, on a :
 $\text{rg}(A) = \text{rg}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Formule du rang : interprétation équations

Chaque équation (*efficace*) d'un système linéaire **diminue de 1** la dimension de l'espace des solutions :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = p - \text{rg}(A)$$

\swarrow Nombre d'équations efficaces
 \searrow Nombre total d'inconnues
 \searrow Nombre de paramètres (*inconnues secondaires*)

Formule du rang : interprétation familles

Chaque relation de dépendance linéaire (*efficace*) sur une famille de vecteurs **diminue de 1** la dimension du sous-espace engendré :

$$\text{rg}(A) = p - \dim(\text{Ker}(A))$$

\swarrow Nombre de relations de dépendance linéaire
 \searrow Nombre de vecteurs dans la famille
 \searrow Dimension du sous-espace engendré

Soit E un $e-v$, avec $n = \dim(E)$, et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Proposition 5 (Calcul par pivot)

Une fois la matrice A échelonnée :
 le rang est le nombre de pivots.

Proposition 6 (Majorations automatiques)

On a :
 ▶ $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ (par la dimension ambiante)
 ▶ $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ (par son nb. de vecteurs)

Proposition 7 (Caractérisations)

\mathcal{F} est **génératrice** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ (= $\dim(E)$)
 \mathcal{F} est **libre** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ (= $\text{Card}(\mathcal{F})$)

Proposition 8 (Conditions nécessaires)

Si \mathcal{F} est génératrice, alors $p \geq n$ (*assez de vecteurs*)
 Si \mathcal{F} est libre, alors $p \leq n$ (*pas trop de vecteurs*)
 Si \mathcal{F} est une base, alors $p = n$ (*bon nb de vecteurs*)

Proposition 9 (Impossibilités)

Si $p > n$, alors \mathcal{F} n'est **pas libre** (*elle est liée*).
 Si $p < n$, alors \mathcal{F} n'est **pas génératrice**.

Proposition 10 (« Bon nombre de vecteurs »)

Si $p = n$, il y a équivalence :

\mathcal{F} est une base	\iff	\mathcal{F} est libre
	\iff	\mathcal{F} est génératrice