

Colles semaine 13 - Vocabulaire des éléments propres

1 Définitions

- ▶ **Équation des couples propres** Le couple (λ, \vec{X}) est **propre** pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X} \quad \text{avec } \vec{X} \neq \vec{0}$$
- ▶ **Vocabulaire** dans l'équation ci-dessus, on dit que :
 - ▶ λ est une **valeur propre** de A .
 - ▶ \vec{X} est un **vecteur propre** de A , associé à la valeur propre λ .
- ▶ **Spectre d'une matrice carrée A** : l'ensemble, noté $\text{Sp}(A)$, des valeurs propres de A

	$\lambda \in \text{Sp}(A)$	$(\Leftrightarrow \lambda \text{ valeur propre de } A)$
<i>ssi</i>	$\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$	$(E_\lambda(A) \text{ sous-espace propre associé})$
<i>ssi</i>	$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible	$(\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ a « du noyau »})$

- ▶ **Vérifier si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ (λ donnée)** : pivot de Gauss (*résolⁿ* de $A\vec{X} = \lambda\vec{X} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot \vec{X} = \vec{0}$)
- ▶ **Sous-espace propre** associé à une valeur propre λ . C'est : $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

→ Comment réduire le champ d'étude à un petit nombre de λ ?

2 Approche directe

(seulement dans quelques cas)

Matrice 2×2

La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{bmatrix}$ a « du noyau » *ssi* ses 2 vecteurs colonnes sont colinéaires
ssi (règle de trois) $(a - \lambda)(d - \lambda) = bc$

Matrice triangulaire (*T triangulaire supérieure si tous ses coeff^{ts} sous-diag^x sont nuls.*)

- ▶ **Critère d'inversibilité des matrices triangulaires**
T inversible *ssi* tous ses coefficients diagonaux sont $\neq 0$.
- ▶ **Valeurs propres d'une matrice triangulaire** (*Elles sont « déjà » sur sa diagonale*)
 - ▶ Les **valeurs propres** d'une matrice triangulaire **sont** ses coefficients diagonaux.
 - ▶ Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble** de ses coefficients diagonaux

Pivot de Gauss à paramètres

(*Approche déconseillée en général !*)

On écrit $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ pas inversible (*puis pivot de Gauss avec discussion selon λ*)

Exemple d'application

(à savoir retrouver sur des exemples par pivot de Gauss à paramètre)

Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ (A : matrice compagnon) Les **valeurs propres** de A sont les **racines du polynôme** $R(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

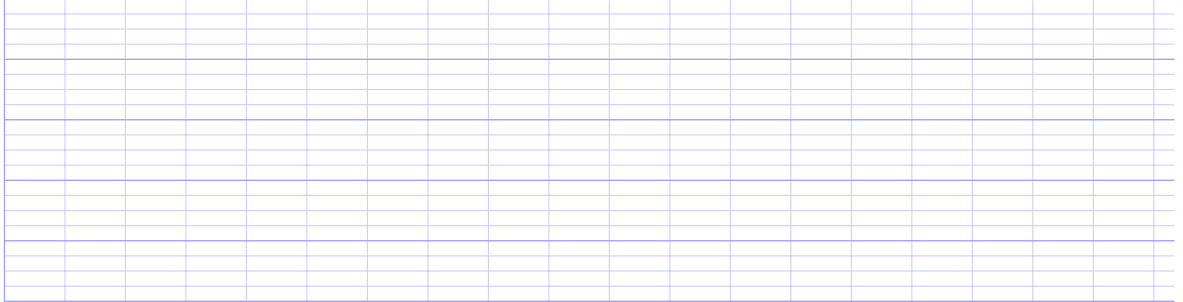
3 Avec un polynôme annulateur

(méthode plus générale)

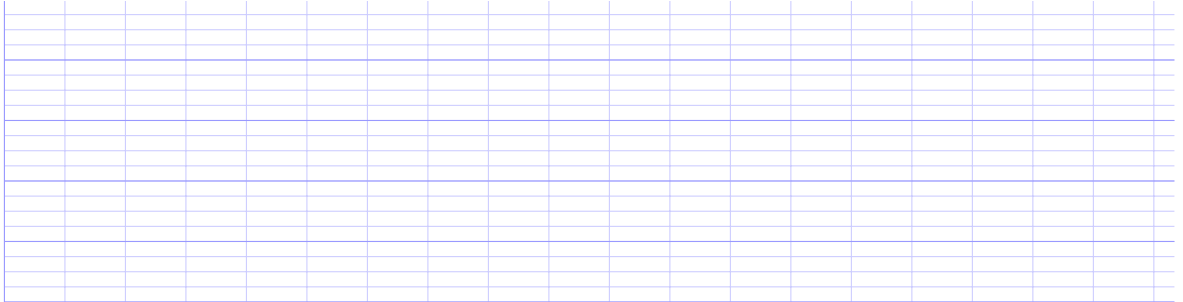
- ▶ **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.
- ▶ **Recherche d'un polynôme annulateur** par calcul des premières puissances de A .
- ▶ **Polynôme annulateur et calcul d'inverse**
- ▶ **Condition nécessaire de valeur propres** (*Si λ est une vp de A , alors $P(\lambda) = 0$.*)
 (*En testant toutes les racines λ de P , on est sûr de ne manquer aucune vp de A .*)

4 Questions de cours

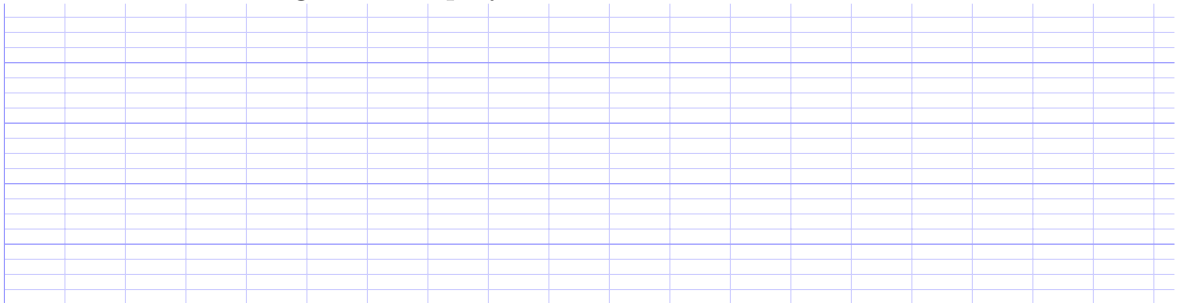
1. Définition d'une matrice triangulaire supérieure. Le spectre d'une matrice triangulaire.



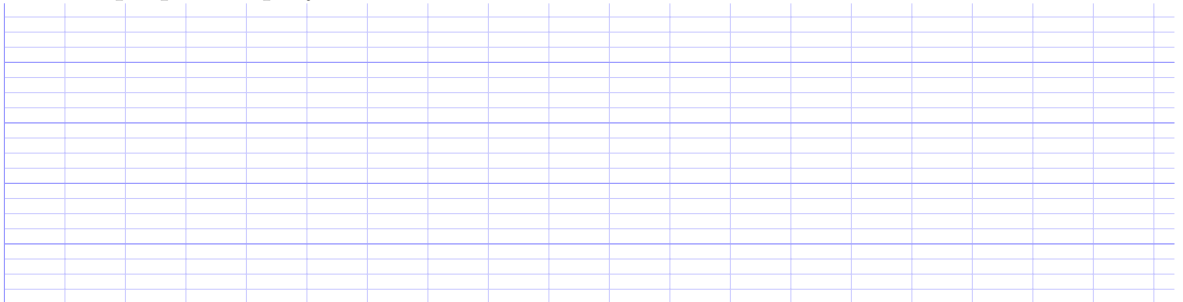
2. Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ . Lien avec l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$.



3. Inverser une matrice grâce à un polynôme annulateur.



4. Valeurs propres et polynôme annulateur.



5. Plan d'étude d'une suite linéaire récurrente à deux termes.

