Programme 11 - Variables aléatoires indépendantes

1 Indépendance d'un couple

▶ Définition (couple discret) X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : \ \mathbb{P}(X=x,Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$$

- ▶ Non-indépendance (souvent) recherche d'impossibilités (ex. : $\mathbb{P}(X > Y) \stackrel{(?)}{\leadsto} X, Y$ pas indép^{tes})
- \triangleright Tableau des issues du couple (X,Y) à double entrée : valeurs de X, valeurs de Y
- ▶ Calcul de probabilité d'un évén^{nt} portant sur le couple $(ex. : A = [X = Y], B = [X \ge Y])$
 - 1. Recherche des issues favorables à l'év t \longrightarrow repérage de l'év t sur le tableau
 - 2. Sommation des probabilités élémentaires $\mathbb{P}(X=x,Y=y)$ favorables à l'év^t
- \blacktriangleright Lois classiques l'expression des probabilités élémentaires pour X,Y de loi \blacktriangleright uniformes
 - géométriques
 - ▶ de Poisson

2 Exemples de transfert

- Cas classiques D'abord trouver les valeurs possibles pour Z = f(X, Y), puis la loi

 - $M = \max(X, Y)$ via la fonction de répartition :
 - 1. $F_M(n) = \mathbb{P}(M \leqslant n) \stackrel{\text{max}}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n, Y \leqslant n) \stackrel{\text{ind}^{\text{ce}}}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant n)$
 - **2.** Calcul de $F_M = F_X \cdot F_Y \implies \text{loi de } M : \mathbb{P}(X = n) = F_M(n) F_M(n-1).$
- ightharpoonup Propriétés de la somme pour X,Y admettant un moment d'ordre 2:
 - \star) Linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ (même si X,Y pas indépendantes)
 - $\star) \ \textit{Additivit\'e de la variance} : \ \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \qquad \textit{(si X,Y ind\'ependantes)}$
 - *) Stabilité de la loi de Poisson : pour $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda)$ $Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mu)$ indép^{tes} $\Rightarrow X + Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda + \mu)$.

3 Indépendance multiple

▶ Définition des v.a. discrètes, X_1, \ldots, X_n sont mutuellement indépendantes si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

▶ Lemme des coalitions Soient $X_1, ..., X_n$ mut^{nt} indépendantes.

Posons
$$Y = f(X_1, ..., X_r)$$
 où $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, avec $r \leq n$.

Alors Y, X_{r+1}, \ldots, X_n sont encore mutuellement indépendantes.

▶ Exemples de transfert multiples

Seulement dans les cas très simples et dans des situations favorables

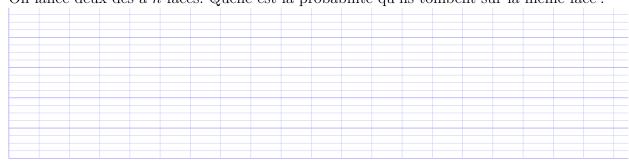
- ▶ min et max (on procède comme pour deux variables, mutatis mutandis)
- ▶ somme (classique mais pas évident : somme de variables géométriques en DL)

4 Questions de cours

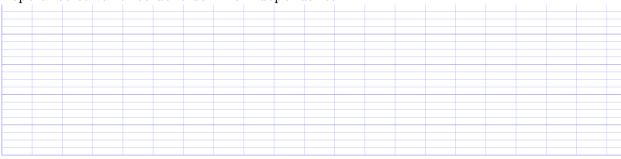
1. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes



 ${f 2.}$ On lance deux dés à n faces. Quelle est la probabilité qu'ils tombent sur la même face?



3. Espérance et variance de la somme indépendante.



4. La stabilité de la loi de Poisson par addition.



5. La méthode pour trouver la loi du max indépendant.

