Colles semaine 13 - Vocabulaire des éléments propres

1 Définitions

- **Équation des couples propres** Le couple $(\lambda, \vec{X})$ est **propre** pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si :
$$A\vec{X} = \lambda\vec{X} \qquad \text{avec } \vec{X} \neq \vec{0}$$
- **Vocabulaire** dans l'équation ci-dessus, on dit que :
  - λ est une **valeur propre** de A.
  - $\vec{X}$ est un **vecteur propre** de A, associé à la valeur propre λ.
- **Spectre d'une matrice carrée A :** l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}(A)$, des valeurs propres de A

	$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$	*($\Leftrightarrow$ λ valeur propre de A)*
ssi	$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$	*($E_\lambda(A)$ sous-espace propre associé)*
ssi	$A - \lambda I_n$ n'est **pas** inversible	*($\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_n$ a « du noyau »)*

- **Vérifier si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$** ***($\lambda$ donnée)* :** pivot de Gauss *(résol^n de $A\vec{X} = \lambda\vec{X} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\cdot\vec{X} = \vec{0}$)*
- **Sous-espace propre** associé à une valeur propre λ. C'est : $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$

$\longrightarrow$ Comment réduire le champ d'étude à un petit nombre de λ ?

2 Approche directe *(seulement dans quelques cas)*

Matrice 2×2

La matrice $A-\lambda I_2 = \begin{bmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{bmatrix}$ a « du noyau » *ssi* ses 2 vecteurs colonnes sont colinéaires *ssi* *(règle de trois)* $(a-\lambda)(d-\lambda) = bc$

Matrice triangulaire *(T **triangulaire supérieure** si tous ses coeff^{ts} **sous-diag^x** sont **nuls**.)*

- **Critère d'inversibilité des matrices triangulaires**
  T inversible *ssi* tous ses coefficients diagonaux sont $\neq 0$.
- **Valeurs propres d'une matrice triangulaire** *(Elles sont « déjà » sur sa diagonale)*
  - Les **valeurs propres** d'une matrice triangulaire **sont** ses coefficients diagonaux.
  - Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble de** ses coefficients diagonaux

Pivot de Gauss à paramètres ***(Approche déconseillée en général !)***

On écrit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ pas inversible *(puis pivot de Gauss avec discussion selon λ)*

Exemple d'application *(à savoir retrouver sur des exemples par pivot de Gauss à paramètre)*

> Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ *(A : matrice compagnon)* Les **valeurs propres** de A sont les **racines du polynôme** $R(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

3 Avec un polynôme annulateur *(méthode plus générale)*

- **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.
- **Recherche d'un polynôme annulateur** par calcul des premières puissances de A.
- **Polynôme annulateur et calcul d'inverse**
- **Condition nécessaire de valeur propres** *(**Si** λ est une vp de A, **alors** $P(\lambda) = 0$.)*
  (En testant toutes les racines λ de P, on est sûr de ne manquer aucune vp de A.)

4 Questions de cours

1. Définition d'une matrice triangulaire supérieure. Le spectre d'une matrice triangulaire.

2. Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ. Lien avec l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$.

3. Inverser une matrice grâce à un polynôme annulateur.

4. Valeurs propres et polynôme annulateur.

5. Plan d'étude d'une suite linéaire récurrente à deux termes.