Concours blanc *(type Ecricome)*

le mercredi 8 novembre 2016

Exercice 1 *(CB)*

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

2. Étude de la fonction f

a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b) Faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
On fera apparaître les limites en $\pm\infty$.

c) Étudier le signe de la fonction f''.
En déduire que la fonction f admet un unique point d'inflexion, que l'on précisera.

3. Tracé de la fonction f sur $[0\,;3]$
On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}37$ et $\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}14$.
On utilisera
- la même échelle en abscisse et en ordonnée.
- une échelle d'au moins 4cm *(= 5 grands carreaux)* par unité.

a) Tracer l'asymptote représentant la limite de f en $+\infty$.

b) Donner la valeur de $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$, et le cas échéant une valeur approchée.
Placer les points sur le graphique.

c) Donner la valeur de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$, et le cas échéant une valeur approchée.
Tracer les tangentes sur le graphique.

d) Tracer la courbe de la fonction f sur le segment $[0\,;3]$.

4. L'équation $f(x) = x$**.**

a) Montrer que pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}$. *(on pourra utiliser la question* **2.c)***)*

b) En déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution ℓ sur $[0\,;+\infty[$.

d) Montrer que $\ell \in [1\,;2]$.

e) Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \geqslant 0$.

5. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant \ell$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.

d) Montrer grâce à la question **4.a)** que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell)$.

e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - \ell \leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$.

f) Combien de termes de (u_n) calculer pour approcher ℓ avec une précision $\leqslant 10^{-3}$?
(on rappelle $\ln(2) \simeq 0{,}69$ *et* $\ln(10) \simeq 2{,}3$*)*

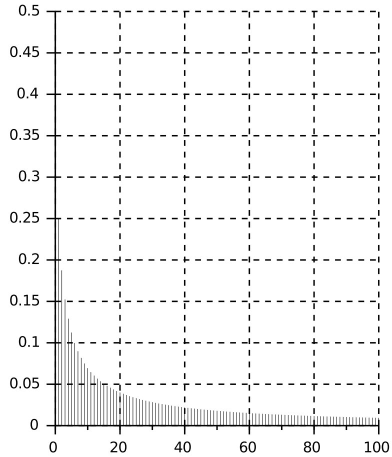
Exercice 2 *(inspiré d'Hec Bl 2012)*

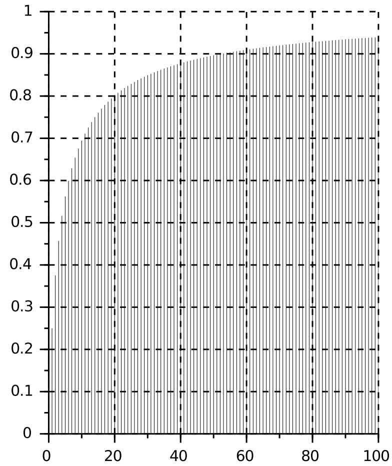
On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \,]0\,;1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.
On l'a programmée grâce à Scilab :

dessins/suitesShort.sce

```
N = 100
x = 0.5
suite = [x]
for k = 1:N
  x = x - x^2
  suite = [suite , x]
end
scf(0) // graphique de gauche
plot2d3(0:N, suite)

scf(1) // graphique de droite
plot2d3(0:N, (0:N).*suite)
```





1. Le graphique de gauche

- **a)** À quoi correspond le paramètre `N` ?
- **b)** Quelle valeur de x_0 a été choisie ?
- **c)** Donner un ordre de grandeur de x_{100}.
- **d)** Conjecturer le comportement (x_n).

2. Le graphique de droite

- **a)** Quelle est la suite représentée ?
- **b)** Conjecturer son comportement.
- **c)** Qu'en déduire alors sur (x_n) ?

3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - x^2$.

4. **a)** Montrer que la suite (x_n) est monotone.
- **b)** En déduire que la suite (x_n) converge.
- **c)** Déterminer la limite de la suite (x_n).

5. **a)** Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 < x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
- **b)** Retrouver ainsi la limite de la suite (x_n).
- **c)** En déduire que la série de terme général (x_n^2) est convergente.

6. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = nx_n$.
- **a)** Montrer que la suite (v_n) est croissante.
- **b)** En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ *(on ne demande pas ici de calculer ℓ).*
- **c)** Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.

7. **a)** Soit (a_n) une suite telle que $a_n \sim \frac{\alpha}{n}$, avec $\alpha \neq 0$. La série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est-elle convergente ?
- **b)** Soit (b_n) une suite telle que $nb_n \to \beta$. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est convergente. Combien vaut alors β ?

8. Soit (z_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = v_{n+1} - v_n + x_n^2$.
- **a)** Montrer que la série de terme général (z_n) est convergente.
- **b)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $nz_n = (1 - v_n)v_n$.
- **c)** En déduire que $\lim(nz_n) = (1 - \ell)\ell$.

9. **a)** En appliquant le résultat de la question **7.b)**, déduire que $\ell = 1$.
- **b)** En déduire un équivalent de la suite (x_n).
- **c)** Conclure sur la conjecture de la question **2.**.

Exercice 3 *(adapté d'Esc Ece 2005)*

Une urne contient initialement trois boules indiscernables au toucher :
- une boule blanche et
- deux boules rouges.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est rouge :
  - elle n'est pas remise dans l'urne,
  - mais, à la place, on y remet une boule **blanche**.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :
- $B_n =$ « on obtient une boule **blanche** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,
- $R_n =$ « on obtient une boule **rouge** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,

et X_n le nombre de boules rouges contenues dans l'urne **à l'issue** du $n^{\text{ème}}$ tirage.
Par convention, on pose $X_0 = 2$.

1. Donner la loi de probabilité de la variable X_1.

2. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

a) Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n)$?

b) Justifier l'égalité d'événements : $\forall n \geqslant 1,\ [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.

c) En déduire que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
Donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = 2)$, pour $n \geqslant 1$.

3. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 1)$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X_n = 1]$ en terme de $[X_{n-1} = 1]$, $[X_{n-1} = 2]$, B_n, R_n.

b) En appliquant soigneusement la formule des probabilités totales, déduire pour $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

c) Montrer la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\, u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$, et préciser u_0.

d) Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, est géométrique.

e) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression $\mathbb{P}(X_n = 1) = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.

4. Conclusion de l'étude de X_n

a) Déduire des résultats précédents $\mathbb{P}(X_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer l'espérance de X_n.

5. On note T le rang du tirage où l'on tire la dernière boule rouge de l'urne.

a) Donner $Z(\Omega)$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $[T = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.

d) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
En déduire que T est une variable aléatoire bien définie.

e) Établir : $\mathbb{E}[T] = \frac{9}{2}$

f) Montrer que $\mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{45}{2}$. En déduire la variance $\mathrm{Var}(T)$.