1 Espaces vectoriels de dimension finie

- **Base d'un espace vectoriel** E : c'est une famille finie $\mathcal{B}$ à la fois
  - libre *(pas de relation de dépendance linéaire non-triviale entre les vecteurs de $\mathcal{B}$)*
  - génératrice : $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ *(tout entier)*
- **Dimension finie**
  - $\star$) *Définition :* Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une base finie
  - $\star$) *Propriété :* Toutes les bases de E ont alors le même nombre $n \in \mathbb{N}$ de vecteurs *(cardinal)*
  - $\star$) *Dimension d'un* ev *:* Cet entier n *(card. d'une base)* est la dimension de E : notée $\dim(E)$
  - $\star$) *Vocabulaire en petite dimension :*

$n =$	0	1	2	3
E est ...	le singleton $\left\{\vec{0}\right\}$	une droite	un plan	« l'espace physique »

  - $\star$) *Dimension d'un sous-*ev *:* si $F \subseteq E$ avec E de dim. finie, alors :
    - F est de dim. finie aussi, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
    - il y a égalité *ssi* $F = E$ *(tout entier)* .
- **Rang d'une famille** de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de E où $\dim(E) = n$.
  - $\star$) *Définition :* le rang de la fam. est la dimension du sous-ev engendré : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.
  - $\star$) *Calcul dans $\mathbb{R}^n$:* $\text{rg}(\mathcal{F}) =$ **nb de pivots**, une fois la matrice de la fam. $\mathcal{F}$ échelonnée.
  - $\star$) *Majorations :* on a à la fois $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *(nb de vecteurs)* et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$ *(dimension)*
  - $\star$) *Famille libre, génératrice, base :*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **libre** *ssi* $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ *(nb de vecteurs)*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** *ssi* $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ *(dimension)*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **une base** *ssi* $p = n$ *(bon nb de vecteurs)* **et** $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = n$
    - **Si** $p = n$, il suffit d'avoir $\mathcal{F}$ libre **ou** génératrice pr déduire que $\mathcal{F}$ est une **base**

2 Vocabulaire et représentation des applications linéaires

- **Vocabulaire, notations**

  À chaque point, penser à l'interprétation pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $f \leftrightarrow A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

  ⋆) *Définition :* pour E, F espaces vectoriels, $f : E \to F$ est linéaire si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

  ⋆) *Espace des applications linéaires :* noté $\mathcal{L}(E, F)$, c'est un espace vectoriel.

  ⋆) *Composition d'applications linéaires :*

  Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, notion d'application inverse

- **Le cas des endomorphismes** Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes. On peut alors calculer des puissances.

  ⋆) *Règles de calcul générales :*

  ⋆) *Formule du binôme de Newton :* si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ **commutent** ($f \circ g = g \circ f$), alors $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$.

- **Représentation matricielle d'une application linéaire dans des bases**

  Construction de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ pour $f : (E, \mathcal{B}_E) \to (F, \mathcal{B}_F)$ colonne par colonne

- **Formule de changement de base** pour un endom. $f : E \to E$ avec $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases.

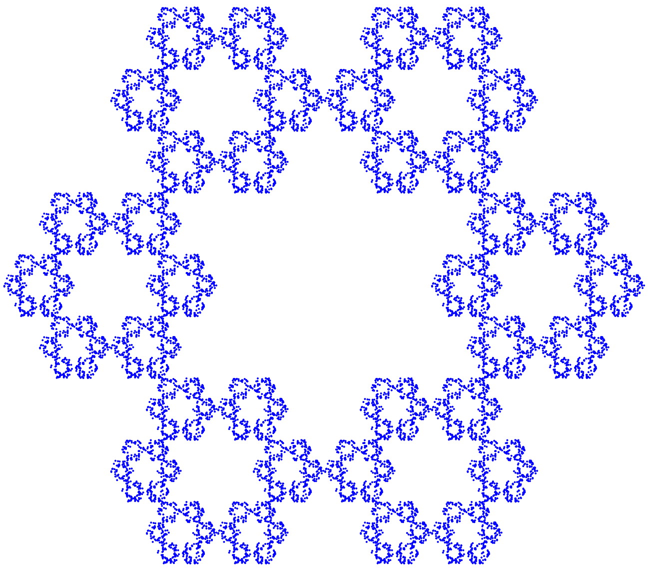
  Pour P la matrice de passage $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$, et avec $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ on a : $M = PM'P^{-1}$.

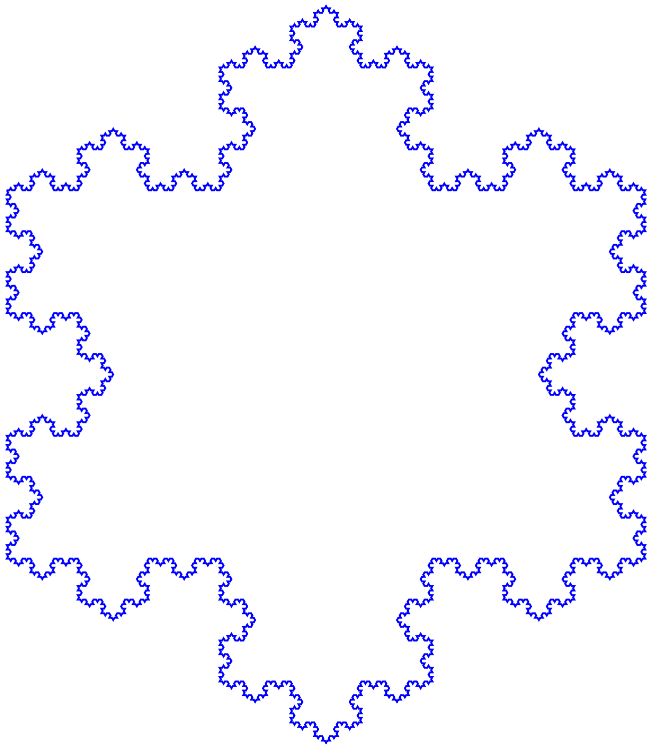
- **Notion de diagonalisation**

  Si l'on arrive à écrire $M = PDP^{-1}$, avec D diagonale, on a **diagonalisé** M.

  Exemple de l'application au calcul des puissances de M.

  (On verra bientôt comment trouver la matrice diagonale D et la matrice de passage P)





(... et bonne année 2016 !)