

Suites récurrentes : application des accroissements finis

1 Rappels : convergence des suites récurrentes

Théorème 1 (du point fixe)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

- ▶ **On suppose que**
 - ▶ la fonction f est continue sur I .
 - ▶ la suite (u_n) converge et sa limite ℓ appartient à I .
- ▶ **Alors** la limite ℓ de (u_n) est un point fixe de f , soit l'équation $f(\ell) = \ell$.

Remarque : pas un critère de convergence

Cette propriété ne montre pas la convergence (*sous réserve de convergence, elle aide à trouver ℓ*).

Théorème 2 (de convergence par majoration de l'erreur)

Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel

- ▶ **On suppose que**
 - ▶ l'on a une inégalité de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \epsilon_n$
 - ▶ pour une suite $(\epsilon_n) \rightarrow 0$.
- ▶ **Alors**
 - ▶ la suite (u_n) converge
 - ▶ $\lim(u_n) = \ell$.

Démonstration : On a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \epsilon_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, \ell - \epsilon_n \leq u_n \leq \ell + \epsilon_n$.

Par le critère de convergence par encadrement (*th. « des gendarmes »*), on a donc $\lim(u_n) = \ell$. ■

Vocabulaire : vitesse de convergence

1. On dit que la suite (ϵ_n) est une **estimation de l'erreur** de ℓ par u_n
2. Supposons de plus (ϵ_n) géométrique, (*soit $\forall n \in \mathbb{N}, \epsilon_n = \epsilon_0 q^n$, où $0 < q < 1$*) alors on dit que la **vitesse de convergence** de (u_n) vers ℓ est (*au moins*) géométrique de raison q .

Dans chaque diagramme, combien de valeurs de la suite parvient-on à distinguer avant qu'elles soient trop proches de la limite ?

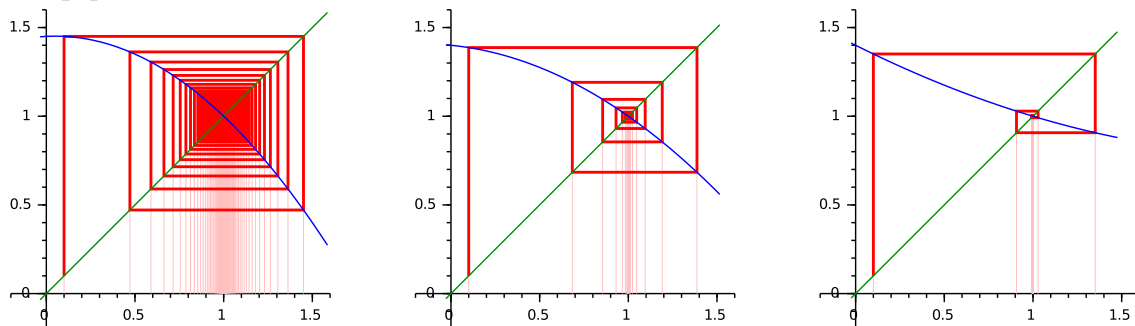


FIGURE 1 – Convergences géométriques de raison $q = 95\%$ (g.), $q = 70\%$ (m.) et $q = 30\%$ (d.)

2 Accroissements finis et convergence géométrique

Théorème 3 (Inégalité des accroissements finis)

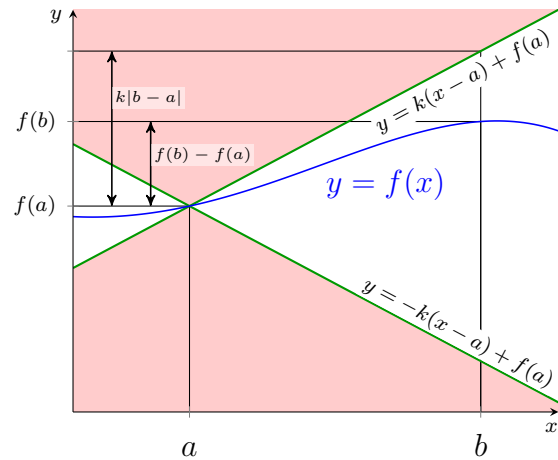
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

► On suppose que pour $k \geq 0$ fixé,

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$$

► Alors pour $a, b \in I$, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|.$$



Interprétation graphique

La courbe de f reste dans le cône laissé blanc et n'entre pas dans la zone colorée.

2.1 En pratique : plan-type d'étude

1. Montrer que toutes les valeurs de la suite sont dans un certain intervalle $J \subseteq I$.
2. Trouver un point fixe ℓ de f ($\ell \in J$, résolu explicitement ou avec le théorème de la bijection).
3. Obtenir sur J , une majoration, avec $0 < k < 1$, de la forme $\forall x \in J, |f'(x)| \leq k$
4. Appliquer les accroissements finis entre u_n et ℓ : $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{|f(u_n) - f(\ell)|}_{=|u_{n+1} - \ell|} \leq k |u_n - \ell|$
5. Par récurrence, on obtient donc l'encadrement de l'erreur : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \underbrace{k^n |u_0 - \ell|}_{\text{estim. géom. de l'erreur}}$

2.2 Approximation du point fixe par calcul de (u_n)

approxAlpha.sce

```

1 // CONSTANTES : les données du problème
2 U0 = 1 // premier terme de u_n
3 ESTIM_ERREUR_INIT = %e - 1 // majorant de l'erreur initiale
4 RAISON_ESTIM_ERREUR = 1/2 // constante des accroissements finis
5 PRECISION = 10^(-3) // précision souhaitée sur la limite
6 function y = f(x) // fonction itérée
7     y = 2 - log(x)/2
8 endfunction
9
10 // initialisation
11 u = U0 // de la suite
12 estimErreur = ESTIM_ERREUR_INIT // de l'estimation de l'erreur
13
14 // la boucle
15 while (estimErreur > PRECISION)
16     u = f(u) // terme suivant de la suite
17     estimErreur = estimErreur * RAISON_ESTIM_ERREUR // de l'estimation de l'erreur
18 end
19
20 // affichage du résultat
21 disp("approximation de alpha à 10^(-3) près :")
22 disp(u) // retourne 1.7268515 // vérif : disp(f(u)) proche

```