Correction du DST 2

Exercice 1 : Étude de fonction

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. *(Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.)*

On a $I = \underbrace{2\int_0^1 \mathrm{d}x}_{=2} - \underbrace{2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{=J}$. Calculons par parties $J = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$:

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

Il vient donc :

$$J = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-1} - \Big[\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-1} - 1) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi : $I = 2 - 2(\underbrace{1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}}_{=J}) = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.

2. Étude de la fonction f

a) *(Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.)*

Les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto -2x$ *(fonction polynomiale)*, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *(fonction exponentielle)*

Ainsi leur produit $x \mapsto -2x\,\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$.

Par ajout de constante additive, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc aussi $\mathcal{C}^2$.

b) *(Faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ + limites en $\pm\infty$.)*

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$

d'où :
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 2(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On obtient donc pour f' et f le tableau de signes-variations à droite.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^{-x}			$+$		
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	2

▸ **Calcul de $\lim\limits_{-\infty} f$**

Pour $x \to -\infty$, on a $f(x) = 2 \underbrace{-2x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\to+\infty} \to +\infty$.

- **Calcul de $\lim\limits_{+\infty} f$**
  Pour $x \to +\infty$, on a $f(x) = 2 \underbrace{-2x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\to 0}$.
  On obtient une forme indéterminée. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0$.
  Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 2$.
- **Calcul de $f(1)$**
  On a $f(1) = 2 - \mathrm{e}^{-1}$.

c) *(Étudier le signe de la fonction f'' + unique point d'inflexion.)*
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

d'où :
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(\mathrm{e}^{-x} - (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 2(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On trouve le tableau de signes ci-contre.
La dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe une seule fois : en 2.
C'est donc l'unique point d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2\,\mathrm{e}^{-x}$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		convexe		concave	

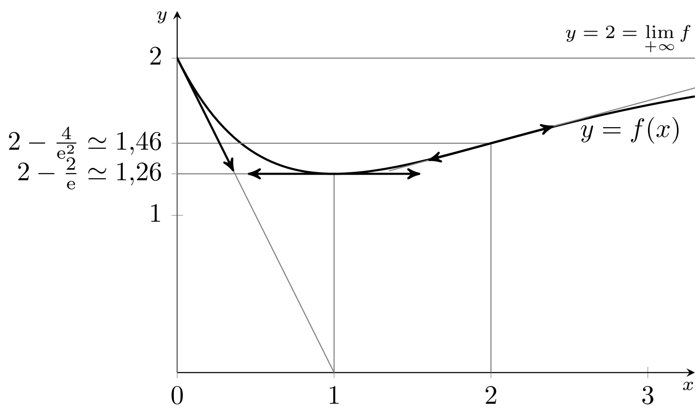
inflexion

3. Tracé de la fonction f sur $[0\,;3]$ *(On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}37$ et $\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}14$.)*

a) *(Tracer l'asymptote représentant la limite de f en $+\infty$.)*
L'asymptote est horizontale, à l'ordonnée $y = 2$.

b) *(Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ (+ approx).)*
- $f(0) = 2$.
- $f(1) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$
  $\simeq 2 - 2 \times 0{,}37 = 1{,}26$.
- $f(2) = 2 - 4\,\mathrm{e}^{-2}$
  $\simeq 2 - 4 \times 0{,}14 = 1{,}44$

c) *($f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$?)*
- $f'(0) = -2$.
- $f'(1) = 0$.
- $f'(2) = 2\,\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}28$.



4. L'équation $f(x) = x$. On définit la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}$

a) *(Montrer que pour $x \geqslant 1$, on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}$.)*
On a trouvé le tableau de signes ci-contre pour la dérivée seconde f''.
On en déduit le tableau de variations pour f'.
On obtient bien l'inégalité :
$$\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}.$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

b) *(En déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.)*
La fonction g est dérivable et on a $\forall x \geqslant 1$, $g'(x) = f'(x) - 1$. Par la question précédente :
$$\forall x \geqslant 1, \quad g'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2} - 1 < 0.$$
Ainsi la fonction g est bien strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$. *(sur $]0\,;+\infty[$ aussi.)*

c) *(Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution ℓ sur $[0\,;+\infty[$.)*

Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction g est
- continue
- strictement décroissante.

Par le théorème de la bijection monotone, la fonction g réalise donc une bijection $]0\,;+\infty[\to]\lim\limits_{+\infty} g\,;g(0)[$. Or $\left\{\begin{array}{c} g(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$ donc $0 \in]\lim\limits_{+\infty} g\,;g(0)[$, et il existe un unique $\ell \in]0\,;+\infty[$ tel que $g(\ell) = 0$.

d) *(Montrer que $\ell \in [1\,;2]$.)*

Calculons $\begin{cases} g\,(1) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1} > 0 \\ g\,(2) = -4\,\mathrm{e}^{-2} \quad < 0 \end{cases}$

Ainsi, la fonction g change de signes entre 1 et 2, donc s'y annule, et $1 < \ell < 2$.

e) *(Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \geqslant 0$.)*

La fonction g est st[t] décroissante, et s'annule en ℓ.
On trouve donc le tableau de signes ci-contre.
Remarquons que $\quad g(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant x$.

x	1		ℓ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) *(Montrer que $\forall n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant \ell$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $\quad u_n \geqslant \ell \qquad (H_n)$
- **Initialisation** On a bien d'après la question **4.d)** : $\quad u_0 = 2 \geqslant \ell \qquad (H_0)$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $u_n \geqslant \ell$.
  D'après la question **4.d)**, et (H_n), on a : $u_n \geqslant \ell \geqslant 1$.
  La fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, *(Q 2.b))*, d'où : $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(\ell) = \ell$.
  Ainsi, il vient bien : $\quad u_{n+1} \geqslant \ell \qquad (H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant \ell \qquad (H_n)$

b) *(Étudier le sens de variation de la suite (u_n).)*

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$. *(d'après 4.e))*

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) *(Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.)*

- **Convergence de (u_n)** La suite (u_n) est
  - décroissante, par **5.b)**, et
  - minorée par ℓ, par **5.a)**.

  Par le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge et $\lim(u_n) \geqslant \ell$.
- **Limite de (u_n)**
  - La suite (u_n) satisfait $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, et
  - la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

  D'après le théorème du point fixe, la limite $\lim(u_n)$ est un point fixe $\geqslant 1$ de f.
  D'après la question **4.c)**, le seul point fixe de f qui soit $\geqslant 1$ est le réel ℓ.
  Ainsi $\lim(u_n) = \ell$.

d) *(Montrer grâce à la question 4.a) que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell)$.)*
La fonction f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour $1 \leqslant a \leqslant b$, on a :

$$0 \leqslant f(b) - f(a) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}\,.$$

On applique, pour $n \in \mathbb{N}$, entre $a = \ell$, et $b = u_n$: *(on a bien $1 \leqslant \ell \leqslant u_n$)*

$$0 \leqslant \underbrace{u_{n+1} - \ell}_{f(u_n)-f(\ell)} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell).$$

e) *(En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$ (H_n)
- **Initialisation** On a $\ell \geqslant 1$, donc : $0 \leqslant u_0 - \ell \leqslant 2 - 1 = 1$ (H_0)
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$
  D'après la question **5.d)** $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}\,2^n\,\mathrm{e}^{-2n} = 2^{n+1}\,\mathrm{e}^{-2(n+1)}$.
  Ainsi, il vient bien : $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2^{n+1}\,\mathrm{e}^{-2(n+1)}$ (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$ (H_n)

f) *(Combien de termes de (u_n) calculer pour approcher ℓ avec une précision $\leqslant 10^{-3}$?)*

(on rappelle $\ln(2) \simeq 0{,}69$ et $\ln(10) \simeq 2{,}3$) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'erreur commise en approchant ℓ par u_n est $\leqslant 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}$.
Pour que celle-ci soit $\leqslant 10^{-3}$, on souhaite donc avoir :

$$2^n\,\mathrm{e}^{-2n} \leqslant 10^{-3} \iff n\ln(2\,\mathrm{e}^{-2}) \leqslant -3\ln(10) \iff n[2 - \ln(2)] \geqslant 3\ln(10)$$

$$\iff n \geqslant \frac{3\ln(10)}{2-\ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2{,}3}{2 - 0{,}7} = \frac{6,9}{0{,}6} = 11{,}5$$

Pour obtenir ℓ avec une précision $\leqslant 10^{-3}$, il suffit donc de calculer u_{12}.

Exercice 2 : une étude de suite

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0\,;1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.
On l'a programmée grâce à Scilab :

1. Le graphique de gauche

a) *(À quoi correspond le paramètre* `N` *?)*
C'est l'indice du dernier terme de la suite que le programme calcule.

b) *(Quelle valeur de x_0 a été choisie ?)*
La valeur initiale choisie est `x = 0.5`. Ainsi, on a choisi $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) *(Donner un ordre de grandeur de x_{100}.)*
Par lecture graphique, x_{100} est de l'ordre d'un centième : $x_{100} \simeq \frac{1}{100} = 0{,}01$.

d) *(Conjecturer le comportement (x_n).)*
La suite (x_n) semble décroissante et positive.
Si c'est le cas elle tend une limite $\geqslant 0$ *(vraisemblablement vers 0).*

2. Le graphique de droite

a) *(Quelle est la suite représentée ?)*
On trace `(0:n).*suite`, soit la suite $(n \cdot x_n)$.

b) *(Conjecturer son comportement.)*
Elle semble croissante et majorée par 1.
Si c'est le cas elle tend une limite $\leqslant 1$ *(vraisemblablement vers 1).*

c) *(Qu'en déduire alors sur (x_n) ?)*
Si $n \cdot x_n \to 1$, alors $x_n \sim \frac{1}{n}$.

3. *(Dresser le tableau de variations de la fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - x^2$.)*
La fonction polynomiale f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $x \in [0\,;1]$, on a : $f(x) = x - x^2$,
d'où : $f'(x) = 1 - 2x$
$= 2\left(\frac{1}{2} - x\right)$.
On trouve donc le tableau de signes et variations ci-contre :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$2\left(\frac{1}{2} - x\right) = f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

4. Convergence de (x_n)

a) *(Montrer que la suite (x_n) est monotone.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = -(x_n)^2 \leqslant 0$.
Ainsi, la suite (x_n) est décroissante.

b) *(En déduire que la suite (x_n) converge.)*

- **Minoration de (x_n)** Vérifions que la suite (x_n) est minorée en montrant qu'elle ne change pas de signe.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} = (1 - x_n)x_n$. Or par décroissance de x_n, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant x_0 \leqslant 1$, donc $(1 - x_n) \geqslant 0$. Ainsi x_{n+1} et x_n sont de même signe, et (x_n) est donc à valeurs positives.
- **Convergence de (x_n)** La suite (x_n) est
  - décroissante
  - minorée par 0.

Par le théorème de la limite monotone, la suite (x_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

c) *(Déterminer la limite de la suite (x_n).)*
La fonction f est continue, et la suite (x_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.
Par le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc un point fixe de f, soit $f(\ell) = \ell$.
On résout $\left[\ell - \ell^2 = \ell\right] \iff \left[\ell = 0\right]$, et il vient donc : $\lim(x_n) = 0$.

5. a) *(Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 < x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.)*
On va montrer cet encadrement par récurrence.

- **Calcul préliminaire** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons que $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+2}$.

  On a bien : $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \frac{n}{n^2+2n} = \frac{1}{n+2}$.

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $0 < x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ $\qquad (H_n)$

- **Initialisation** On a bien : $\quad 0 < x_0 \leqslant 1 = \frac{1}{1+0}$ $\qquad (H_0)$
  et $\quad 0 < x_1 = f(x_0) \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+1}$ $\qquad (H_1)$

- **Hérédité** Soit $n \geqslant 1$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $0 < x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
  La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\frac{1}{2}]$, ainsi : $\underbrace{f(0)}_{=0} < \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} \leqslant \underbrace{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\leqslant \frac{1}{n+2}}$.

  Il vient donc : $0 < x_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$ $\qquad$ soit (H_{n+1}).

- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée $n = 0$ et 1
  - héréditaire pour $n \geqslant 1$.

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad 0 < x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. $\qquad (H_n)$

b) *(Retrouver ainsi la limite de la suite (x_n).)*
Dans l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, on a : $0 = \lim \frac{1}{n+1}$.
Par le théorème de convergence par encadrement *(des gendarmes)*, il vient : $\lim(x_n) = 0$.

c) *(En déduire que la série de terme général (x_n^2) est convergente.)*
On a l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n^2 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$.
Or $\frac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente *(critère de Riemann)*, donc la série de terme général (x_n^2) est convergente aussi.

6. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = nx_n$.

a) *(Montrer que la suite (v_n) est croissante.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_{n+1} - v_n = (n+1)x_{n+1} - nx_n = (n+1)(x_n - x_n^2) - nx_n = x_n - (n+1)x_n^2$.
Ainsi $v_{n+1} - v_n = x_n(1 - (n+1)x_n) \geqslant 0$, car $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ d'après la question **5.a)**.
Ainsi la suite (v_n) est croissante.

b) *(En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ* (on ne demande pas ici de calculer ℓ).*)*
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $v_n = nx_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$.
La suite (v_n) est donc croissante et majorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

c) *(Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.)*
On a $v_0 = 0$ et $v_1 = x_1 > 0$.
Par croissance de (v_n), on a donc bien $\ell > 0$. Ainsi $0 < \ell \leqslant 1$.

7. **a)** *(Soit (a_n) une suite telle que $a_n \sim \frac{\alpha}{n}$, avec $\alpha \neq 0$. La série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est-elle convergente ?)*
La série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente *(critère de Riemann pour la série harmonique)*.
Ainsi la série de terme général $\frac{\alpha}{n}$ est divergente et la série de terme général équivalent a_n diverge.

b) *(Soit (b_n) une suite telle que $nb_n \to \beta$. On suppose que la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ est convergente. Combien vaut alors β ?)*
Si $\beta \neq 0$, d'après la question précédente, la série de terme général b_n est divergente.
Si la série de terme général (b_n) est convergente, on a donc $\beta = 0$.

8. Soit (z_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = v_{n+1} - v_n + x_n^2$.

a) *(Montrer que la série de terme général (z_n) est convergente.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $z_n = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\text{série télesc.}} + \underbrace{x_n^2}_{\text{série cv}}$
Or la suite (v_n) converge, donc la série télescopique $\sum_{n \geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$ est convergente.
Comme la série de terme général x_n^2 est convergente, la série de terme général z_n est convergente.

b) *(Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $nz_n = (1 - v_n)v_n$.)*
On réutilise le résultat du calcul de la question **6.a)** :

$$\begin{aligned} nz_n = n(v_{n+1} - v_n) + nx_n^2 n(x_n(1 - (n+1)x_n)) + nx_n^2 &= nx_n(1 - (n+1)x_n + x_n) \\ &= nx_n(1 - nx_n) \end{aligned}$$

d'où
$nz_n = v_n(1 - v_n)$.

c) *(En déduire que $\lim(nz_n) = (1 - \ell)\ell$.)*
On passe à la limite dans l'équation $nz_n = v_n(1 - v_n)$, avec $\ell = \lim(v_n)$.
Il vient : $\lim(nz_n) = (1 - \ell)\ell$.

9. **a)** *(En appliquant le résultat de la question **7.b)**, déduire que $\ell = 1$.)*
D'après la question **8.a)**, la série $\sum_{n \geqslant 0} z_n$ est convergente. On applique le résultat de la question **7.b)**, et il vient $\beta = (1 - \ell)\ell = 0$.
Or $\ell > 0$, donc $\ell = 1$.

b) *(En déduire un équivalent de la suite (x_n).)*
On a obtenu $1 = \ell = \lim(v_n) = \lim(nx_n)$. Ainsi $x_n \sim \frac{1}{n}$.

c) *(Conclure sur la conjecture de la question **2.**.)*
La conjecture émise à la question **2.** est donc vérifiée.

Exercice 3 : Une chaîne de Markov

Une urne contient initialement trois boules indiscernables au toucher :
- une boule blanche et
- deux boules rouges.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est rouge :
  - elle n'est pas remise dans l'urne,
  - mais, à la place, on y remet une boule **blanche**.

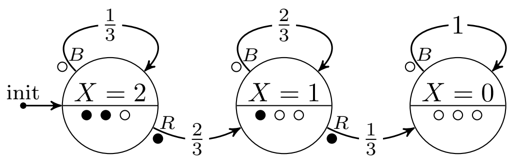
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :

- B_n = « on obtient une boule **blanche** lors du $n^{ème}$ tirage »,
- R_n = « on obtient une boule **rouge** lors du $n^{ème}$ tirage »,

et X_n le nombre de boules rouges contenues dans l'urne **à l'issue** du $n^{ème}$ tirage.
Par convention, on pose $X_0 = 2$.

Remarque préliminaire

> Le protocole aléatoire décrit par l'énoncé se prête à une modélisation par chaîne de Markov, dont le graphe de transitions est :



1. *(Donner la loi de probabilité de la variable X_1.)*
Le premier tirage a lieu dans une urne contenant :
- une boule blanche et
- deux boules rouges.

Deux issues sont alors possibles. Si la première boule tirée est :

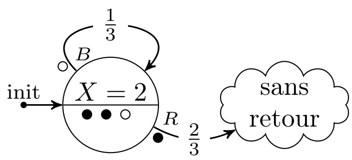
- blanche : *(événement B_1)*, elle est remise dans l'urne, et alors $X_1 = 2$.
- rouge : *(événement R_1)*, elle n'est pas remise, et alors $X_1 = 1$.

2. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

a) *(Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n)$?)*
On conditionne par l'événement $[X_{n-1} = 2]$.
Sous cette hypothèse, il reste donc 2 boules avant le $n^{\text{ième}}$ tirage.
La probabilité conditionnelle de tirer la boule blanche est donc $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n) = \frac{1}{3}$

b) *(Justifier l'égalité d'événements : $\forall n \geqslant 1,\ [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.)*
Le protocole ne prévoit pas de manière de remettre une boule rouge dans l'urne.
Ainsi, pour avoir 2 boules à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, la seule façon est donc :

- d'avoir 2 boules à l'issue du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage
- et de tirer la boule blanche *(pour la remettre)* au $n^{\text{ème}}$ tirage



En d'autres termes, pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien : $\qquad [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.

c) *(En déduire que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.*
Donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = 2)$, pour $n \geqslant 1$.)
Pour $n \geqslant 1$, on conditionne :

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = 2] \cap B_n\Big) = \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n).$$

On obtient donc la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$.

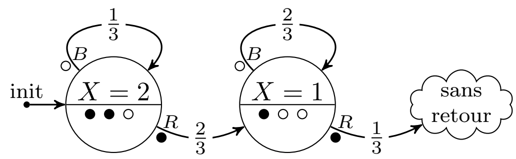
La suite $\Big(\mathbb{P}(X_n = 2)\Big)$ est donc bien géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Son terme général est donc $\mathbb{P}(X_n = 2) = \mathbb{P}(X_0 = 2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

3. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 1)$

a) *(Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X_n = 1]$ en terme de $[X_{n-1} = 1]$, $[X_{n-1} = 2]$, B_n, R_n.)*

- **Discussion selon le $n^{\text{ème}}$ tirage** On a
  - $[X_n = 1] \cap B_n = [X_{n-1} = 1] \cap B_n$ et
  - $[X_n = 1] \cap R_n = [X_{n-1} = 2] \cap R_n$



- **Relation demandée** On conditionne par le système complet (B_n, R_n). Il vient donc :

$$[X_n = 1] = \Big([X_{n-1} = 1] \cap B_n\Big) \bigcup \Big([X_{n-1} = 2] \cap R_n\Big).$$

De plus la réunion qui apparaît est celle de deux événements incompatibles.

b) *(Déduire par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$.)*

- **Application de la formule des probabilités totales** La formule des probabilités totales pour le système complet (B_n, R_n) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 1) &= \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = 1] \cap B_n\Big) + \mathbb{P}\Big([X_{n-1} = 2] \cap R_n\Big) \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) \cdot \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(B_n) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) \cdot \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(R_n) \end{aligned}$$

- **Calcul des probabilités conditionnelles**
  D'après le contenu de l'urne dans chaque cas :
  - $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(B_n) = \frac{2}{3}$
  - $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(R_n) = \frac{2}{3}$
- **Conclusion** Ainsi, il vient

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

c) *(Montrer la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\, u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$, et préciser u_0.)*

On remplace
- n par $n + 1$,
- $\mathbb{P}(X_n = 1)$ par u_n,
- $\mathbb{P}(X_n = 2)$ par $\frac{1}{3^n}$.

Il vient alors bien $u_{n+1} = \frac{2}{3}\, u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$, avec $u_0 = 0$.

d) *(Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, est géométrique.)*

On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \left(u_n + \frac{2}{3^n}\right)$$

soit la relation $v_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot v_n$, qui montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

e) *(En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression $\mathbb{P}(X_n = 1) = 2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.)*

- **Terme général de (v_n)**
  Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

  Or $v_0 = u_0 + \frac{2}{3^0} = 2$, d'où $v_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- **Terme général de** (v_n) On trouve $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \dfrac{2}{3^n} = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.

4. Conclusion de l'étude de X_n

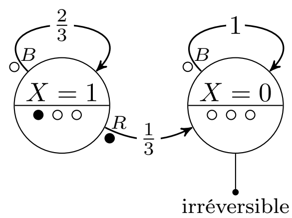
a) *(Déduire des résultats précédents $\mathbb{P}(X_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.)*
Les valeurs de X_n sont $\{0,1,2\}$, donc : $\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) = 1$.
Ainsi : $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{1}{3^n} - \left[2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right]$, soit $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{1}{3^n}$.

b) *(Calculer l'espérance de X_n.)*
La variable aléatoire X_n est finie. Elle a donc une espérance : $\mathbb{E}[X_n] = \sum\limits_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X_n = k)$.
Ainsi : $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3^n} + 2 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right] = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{3^n}$.

5. On note T le rang du tirage où l'on tire la dernière boule rouge de l'urne.

a) *(Donner $T(\Omega)$.)*
Il faut au moins deux tirages pour avoir tiré les deux boules rouges.
Il n'y a pas d'autre restriction, donc $T(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

b) *(Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $[T = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$.)*



L'état $[X_n = 0]$ est irréversible.
Ainsi l'identité $[T = n] = [T > n-1] \cap [T \leqslant n]$ se traduit par : $[T = n] = [X_n = 0] \cap [X_{n-1} \neq 0]$.
Or $[X_{n-1} \neq 0] = [X_{n-1} = 1] \cup [X_{n-1} = 2]$,
et $[X_n = 0] \cap [X_{n-1} = 2] = \varnothing$.
Ainsi, il vient bien :

$$[T = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0].$$

c) *(En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.)*
On a $[T = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0] = [X_{n-1} = 1] \cap B_n$.
On conditionne : $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) \cdot \underbrace{\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]} B_n}_{=\frac{1}{3}}$.
Il vient donc bien : $\mathbb{P}(T = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.

d) *(Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$. En déduire que T est une variable aléatoire bien définie.)*
La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$ converge car c'est une somme de probabilités d'événements incompatibles.
On décompose : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}\right] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{3^n}$.
Ces deux séries géométriques convergent bien et

- *(raison $= \frac{2}{3}$)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$
- *(raison $= \frac{1}{3}$)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

e) *(Établir : $\mathbb{E}[T] = \frac{9}{2}$.)*
Sous réserve de convergence $\mathbb{E}[T] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(T = n)$. On décompose la somme en deux

par linéarité, et on reconnaît des séries géométriques dérivées convergentes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{3}3^2 = 6\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{2}{3^n} &= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

f) *(Montrer que* $\mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{45}{2}$*. En déduire la variance* $\mathrm{Var}(T)$*.)*

- **Calcul de** $\mathbb{E}[T(T-1)]$

  Sous réserve de convergence $\mathbb{E}[T(T-1)] = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\cdot\mathbb{P}(T=n)$. On décompose la somme en deux par linéarité, et on reconnaît des séries géométriques dérivées secondes convergentes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\times 2\times 3^3 = 24\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{2}{3^n} &= \frac{2}{3^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} \\ &= \frac{2}{3^2}\times\frac{2\times 3^3}{2^3} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

  d'où $\mathbb{E}[T(T-1)] = 24 - \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$.

- **Calcul de la variance** Par Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= \mathbb{E}\left[T^2\right] - \left(\mathbb{E}[T]\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left[T(T-1)\right] + \mathbb{E}[T] - \left(\mathbb{E}[T]\right)^2 \\ &= \frac{45}{2} + \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2}\right) \\ &= \frac{90}{4} + \frac{18}{4} - \frac{81}{4} = \frac{27}{4}\end{aligned}$$