TD 6 - Représentations matricielles des endomorphismes

Définition 1 (***Applications linéaires***)

Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit $f : E \to F$ une application.
Alors f est **linéaire** si f préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u}, \vec{v} \in E,\quad \underbrace{f\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right)}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}} \qquad (1)$$

Définition 2 (***Vocabulaire *morphisme***)

- **Isomorphisme**
Une appl^{n} linéaire $f : E \to F$ **inversible**.
(bijective)
- **Endomorphisme**
Une application linéaire $f : E \to E$.
*(E est **stable** par f)*
- **Automorphisme**
Un endomorphisme inversible

Définition 3 (***Représentation matricielle d'un endomorphisme***)

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$ une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
C'est la matrice (a_{ij}) définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\vec{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \to \vec{u}_1 \\ \to \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \to \vec{u}_n \end{array}$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f(\vec{u}_j) = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{u}_n$$

1 Trouver la matrice d'un endomorphisme

Exercice 1 (***Un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]2$, d'après Edhec 2011***) : :

On note :
- $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$,
- $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E.

(Cette base est formée des polynômes : $e_0 = 1$, $e_1 = x$ et $e_2 = x^2$.)

On considère l'application $f : \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto f(P), \end{cases}$

où la fonction polynomiale $f(P)$ est donnée par : $[f(P)](x) = 2x \cdot P(x) - (x^2 - 1) \cdot P'(x)$.

1. **a)** Montrer que f est une application linéaire.

b) Expliciter $[f(P)](x)$ pour le polynôme P défini par : $P(x) = a + bx + cx^2$.

c) En déduire que f est un endomorphisme de E.

d) Écrire $\left(f(e_i)\right)_{i \in [\![0,2]\!]}$ dans la base $\mathcal{B}$, et en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. **a)** Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{Id})$.

3. **a)** Montrer que : $f^3 = 4 \cdot f$.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de f^{2n+1} en fonction de f.

Exercice 2 (***Un endomorphisme matriciel*** *(d'après EmLyon 2014)*) : :

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. **a)** Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{F}$.

b) Établir que $\mathcal{F}$ est stable par multiplication, c'est à dire : $\forall (M,N) \in \mathcal{F}^2, MN \in \mathcal{F}$.

c) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{F}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{F}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{F}$, on note : $f(M) = TMT$.

2. **a)** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

b) Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{F}$.

On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{F}$.

3. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A,B,C) et en déduire F.

4. **a)** Montrer que : $(f - \mathrm{Id})^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

b) En déduire que l'inverse de f est donné par : $f^{-1} = 2 \cdot \mathrm{Id} - f$.

c) Déterminer une base et la dimension du sous-espace $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. *(s-esp. propre.)*

5. On note $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calculer H^2. En déduire, pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ la puissance : $(I + a \cdot H)^n$.

b) Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $G^3 = F$.

c) Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{F}$ tel que : $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 3 (***Polynômes*** $\times\, \mathbf{e}^{-x}$) : :

Soit $n \in \mathbb{N}$, et l'ensemble de fonctions : $F_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\}$.

1. Montrer que F_n est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'application d définie par $d(f) = f'$ est un endomorphisme de F_n.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on définit la fonction $m_k : x \mapsto m_k(x) = \frac{x^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

3. Montrer que les fonctions $(m_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de F_n.
Quelle est la dimension de F_n ?

4. Déterminer la matrice M de l'endomorphisme d dans cette base.
Pour une matrice N à préciser, on écrira : $M = -(I_{n+1} - N)$.

5. Calculer N^{n+1}. En déduire que la matrice M admet pour inverse la matrice $\left(- \sum\limits_{k=0}^{n} N^k\right)$.

6. Trouver une primitive de la fonction m_n.
En déduire la valeur de l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 4 (***Produit extérieur***) : :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite **antisymétrique** si : ${}^tM = -M$.
On note A_3 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont antisymétriques.

1. Montrer que A_3 est un espace vectoriel.

Pour $M,N \in A_3$, on note : $M \wedge N = M \cdot N - N \cdot M$. *(« M extérieur N »)*

2. Montrer que pour $M,N \in A_3$, on a : $M \wedge N \in A_3$.
Que dire si $M = N$?

Soient $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, et $A = aX + bY + cZ$.

3. Montrer que $\mathcal{B} = (X,Y,Z)$ est une base de A_3.

4. Montrer que l'application p définie par $p(M) = A \wedge M$ est un endomorphisme de A_3.
S'agit-il d'un automorphisme de A_3 ?

5. Déterminer la matrice de l'endomorphisme p dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5 (***Accroissement de suites***) : :

Soit $q \in]-1;1[$, et l'ensemble de suites : $F = \left\{\left([an^2 + bn + c] \cdot q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ avec } a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

On définit trois suites pour $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = q^n$, $v_n = n \cdot q^{n-1}$, $w_n = n(n-1) \cdot q^{n-2}$.

2. Montrer que les suites u,v,w forment une base $\mathcal{B}$ de F.

3. Montrer que l'application d définie par $d((x_n)) = (x_{n+1} - x_n)$ est un endomorphisme de F.

4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme d dans la base $\mathcal{B}$.

5. Montrer que d admet pour inverse l'application $r : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(-\sum_{k=n}^{+\infty} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Déterminer l'expression des endomorphismes d^2 et de r^2.

2 Avec des valeurs propres

Exercice 6 (***Matrice de Fibonacci***) : :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que pour une certaine suite (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $F^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}$.
On précisera :

a) l'équation vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$ par les termes u_{n+2}, u_{n+1}, et u_n,

b) les valeurs de u_n pour $n \in [\![0,5]\!]$ présentées dans un tableau.

2. En utilisant la relation de récurrence double trouvée à la question **1.a)**, écrire la suite (u_n) comme combinaison linéaire de deux suites géométriques (ψ^n) et (φ^n), où $\psi < \varphi$.

3. **a)** Montrer que les vecteurs $\binom{1}{\psi}$ et $\binom{1}{\varphi}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans cette base.

Exercice 7 (*Suite linéaire récurrente triple*) :suiteLinéaireTriple:

Diagonalisation d'une matrice compagnon

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.
On note R le polynôme défini par : $R(X) = X^3 - 7X - 6$.

1. Trouver les racines du polynôme R.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $\vec{u}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

2. a) Donner, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(\vec{u}_\lambda)$. On fera intervenir $\lambda \cdot \vec{u}_\lambda$ et $R(\lambda)$.
   b) En déduire l'expression de : $f(\vec{u}_{-1})$, $f(\vec{u}_{-2})$, et $f(\vec{u}_3)$.
3. a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_{-1}, \vec{u}_{-2}, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner :
   - la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{F}$
   - la matrice D de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{F}$.

Application au terme général d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = 7x_{n+1} + 6x_n$, avec :
- $x_0 = 10$,
- $x_1 = x_2 = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$, et $\vec{Y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ le vecteur défini par : $\vec{Y}_n = P^{-1} \cdot \vec{X}_n$.

4. a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\vec{X}_{n+1} = A \cdot \vec{X}_n$.
   b) Calculer $\vec{Y}_{n+1}$ en termes de $\vec{Y}_n$.
   c) En déduire que les suites $(a_n),(b_n)$ et (c_n) sont géométriques.
5. a) Exprimer $\vec{X}_0$, puis vérifier que $a_0 = 15$, $b_0 = -6$, et $c_0 = 1$.
   b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression du terme général x_n. *(On écrira $\vec{X}_n$ en termes de $\vec{Y}_n$.)*

Exercice 8 (*Couple propre d'un endomorphisme*) : :

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$, tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Le couple $(\lambda, \vec{u})$ est dit **propre** pour f si : $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$. *($\lambda$: **valeur** propre, $\vec{u}$: **vecteur** propre.)*

1. Trouver les couples propres $(\lambda, \vec{u})$ dans le cas où $f = \mathrm{Id}$.
2. Soit $(\lambda, \vec{u})$ un couple propre de f. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n(\vec{u})$. *(la $n^{\text{ème}}$ composée $f(\dots f(\vec{u})))$*
3. Montrer l'équivalence : $\left[(\lambda, \vec{u}) \text{ couple propre de } f\right] \Longleftrightarrow \left[\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})\right]$.
4. Soient une famille de couples propres de f notée $(\lambda_i, \vec{u}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
   On suppose que $(\vec{u}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

3 Pratique du changement de base

Proposition 4 (*Formule de changement de base*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors on a

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\text{ancienne matrice}} = \underbrace{\mathrm{Pas}\,\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{nouvelle matrice}} \cdot \underbrace{\mathrm{Pas}\,\mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B}}_{=\mathrm{Pas}\,\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'^{-1}}$$

Exercice 9 (*Une étude de commutant*) : :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X}$, où $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que l'on a : $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Trouver les vecteurs $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tels que :
   - la 3ème coordonnée de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$ est 1.
   - on a : $f(\vec{u}) = \vec{u}$.
   - on a : $f(\vec{w}) = 2 \cdot \vec{w}$.
3. Trouver le vecteur $\vec{v}$ tel que :
   - la 3ème coordonnée de $\vec{v}$ est 0.
   - on a : $f(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$.
4. Montrer que la matrice de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est : $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Justifier que la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{F}$ est $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

7. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
8. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, et B la matrice de g dans la base $\mathcal{F}$.
   Montrer l'équivalence : $[g \in \mathcal{C}_f] \Longleftrightarrow [B \cdot T = T \cdot B]$.
9. Montrer l'équivalence : $[B \cdot T = T \cdot B] \Longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, pour $a,b,c \in \mathbb{R}$.
10. En déduire l'égalité de sous-espace vectoriels : $\mathcal{C}_f = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2)$.

Exercice 10 (*Détermination d'une application linéaire*) : :

1. Montrer, dans chaque cas, qu'il existe une unique application linéaire :
   (On donnera la matrice canoniquement associée.)
   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Pour quelle*(s)* valeur*(s)* de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
   - $h\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   - $h\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
   - $h\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (*Une diagonalisation manuelle*) : :

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1. Pour $P = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, calculer $A \cdot P$ et $P \cdot D$.
2. Montrer que les matrices A et D sont semblables.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n. En déduire celle de A^n.

Exercice 12 (*Être ou ne pas être semblables*) : :

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que les matrices A et $2A$ sont semblables.
(On pourra chercher une matrice de passage sous la forme : $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right]$.)
2. Soit $B = \left[\begin{smallmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right]$ et $C = B^2$. Montrer que les matrices B et C ne sont pas semblables.
3. Soient les matrices : $D = \left[\begin{smallmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right], E = \left[\begin{smallmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right]$
   a) Calculer D^2 et E^2.
   b) En déduire que D et E ne sont pas semblables.

4 Puissances de matrices

Proposition 5 (*Puissances d'une matrice diagonale*)

La puissance n-ième d'une matrice diagonale est la matrice diagonale des puissances n-ièmes.

Exercice 13 (*Diagonalisation et puissances*) :diagoPuissances:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Trouver deux vecteurs non-nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ tels que :
   - $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$,
   - $f(\vec{u}_2) = 2 \cdot \vec{u}_2$.
2. Montrer que ces deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ forment une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$.

On note P la matrice de passage dans cette nouvelle base $\mathcal{F}$, et D la matrice de f dans $\mathcal{F}$.

3. Déterminer D, ainsi, que pour $n \in \mathbb{N}$, la puissance D^n.
4. Montrer les relations $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.
5. En déduire l'expression de f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 6 (*Formule du binôme de Newton*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$.
On suppose que A et B commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$.
Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}$.

Exercice 14 (*Application*) :trigoPuissances:

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Pour quelle matrice a-t-on $A = \Delta + N$, avec $\Delta = 2I_3$?
2. Calculer N^3 et en déduire N^k pour $k \geqslant 3$.
3. Vérifier que les conditions d'application de la formule du binôme de Newton sont vérifiées.
4. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Corrections

Corrigé Ex 7 (Suite linéaire récurrente triple)

:suiteLinéaireTriple:

Diagonalisation d'une matrice compagnon
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.
On note R le polynôme défini par : $R(X) = X^3 - 7X - 6$.

1. *Trouver les racines du polynôme R.*

Il s'agit d'un polynôme de degré 3.

- **Racine évidente** On remarque que $R(-1) = 0$, donc -1 est une racine de R.
- **Factorisation par** $(X+1)$ On cherche a, b, c pour avoir : $R(X) = (X+1)\cdot(aX^2 + bX + c)$.
  On trouve la factorisation : $R(X) = (X+1)\cdot(X^2 - X - 6)$.
- **Conclusion sur les racines de** R Le trinôme $(X^2 - X - 6)$ admet deux racines : 3 et -2.
  Ainsi le polynôme $R(X)$ a trois racines. Ce sont : $-2, -1$, et 3.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $\vec{u}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

2. a) *Donner, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(\vec{u}_\lambda)$. On fera intervenir $\lambda \cdot \vec{u}_\lambda$ et $R(\lambda)$.*

On a : $f(\vec{u}_\lambda) = A \cdot \vec{u}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6+7\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R(\lambda) \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a trouvé : $f(\vec{u}_\lambda) = \lambda \cdot \vec{u}_\lambda - R(\lambda)\cdot \vec{e}_3$.

b) *En déduire l'expression de : $f(\vec{u}_{-1})$, $f(\vec{u}_{-2})$, et $f(\vec{u}_3)$.*

Pour ces trois valeurs λ, on a : $R(\lambda) = 0$.

Il reste donc : $f(\vec{u}_{-1}) = -\vec{u}_{-1}$, $f(\vec{u}_{-2}) = -2\vec{u}_{-2}$, et $f(\vec{u}_3) = 3\vec{u}_3$.

3. a) *Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_{-1}, \vec{u}_{-2}, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

La matrice de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_{-1}, \vec{u}_{-2}, \vec{u}_3)$ est : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

On vérifie par le pivot de Gauss que cette matrice est inversible.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) *Donner :*
- *la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{F}$*
- *la matrice D de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{F}$.*

- **Matrice de passage** C'est la matrice donnée ci-dessus.
- **Matrice dans la base** $\mathcal{F}$ On a : $f(\vec{u}_{-1}) = -\vec{u}_{-1}$, $f(\vec{u}_{-2}) = -2\vec{u}_{-2}$, et $f(\vec{u}_3) = 3\vec{u}_3$.
  Ainsi, on trouve : $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Application au terme général d'une suite récurrente
Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = 7x_{n+1} + 6x_n$, avec :
- $x_0 = 10$,
- $x_1 = x_2 = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$, et $\vec{Y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ le vecteur défini par : $\vec{Y}_n = P^{-1} \cdot \vec{X}_n$.

4. a) *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\vec{X}_{n+1} = A \cdot \vec{X}_n$.*

On calcule : $A \cdot \vec{X}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ 6x_n + 7x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \vec{X}_{n+1}$.

b) *Calculer $\vec{Y}_{n+1}$ en termes de $\vec{Y}_n$.*

On trouve : $\vec{Y}_{n+1} = P^{-1} \cdot X_{n+1} = P^{-1} \cdot A \cdot X_n = P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot X_n$.

Ainsi : $\vec{Y}_{n+1} = D \cdot Y_n$.

c) *En déduire que les suites (a_n),(b_n) et (c_n) sont géométriques.*

On développe la relation $\vec{Y}_{n+1} = D \cdot Y_n$. Il vient : $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n \\ b_{n+1} = -2b_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$

Les suites a,b,c sont donc bien géométriques.

5. **a)** *Exprimer $\vec{X}_0$, puis vérifier que $a_0 = 15$, $b_0 = -6$, et $c_0 = 1$.*

On a $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie que : $P \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{X}_0$. Ainsi, $\vec{Y}_0 = P^{-1} \cdot \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs initiales des suites sont donc bien : $a_0 = 15$, $b_0 = -6$, et $c_0 = 1$.

b) *En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression du terme général x_n.* *(On écrira $\vec{X}_n$ en termes de $\vec{Y}_n$.)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\vec{X}_n = P \cdot \vec{Y}_n$. En particulier, il vient : $x_n = a_n + b_n + c_n$.

Or les suites a,b,c sont géométriques. On les exprime par la formule : $u_n = u_0 \cdot q^n$.

Il vient : $x_n = 15 \cdot (-1)^n - 6 \cdot (-2)^n + 3^n$.