# DL 3 - Minimum de deux variables géométriques

On considère dans tout ce sujet

- $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires seront définies.
- $p$ un réel de $]0;1[$; on note $q = 1-p$.
- $X$ et $Y$ deux variables aléatoires de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et **indépendantes**.

**1.** **a)** Rappeler l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ et pour $k \geqslant 1$, l'expression de $\mathbb{P}(X=k)$.

**b)** Calculer la fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ ainsi que $\mathbb{P}(X > n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

**2.** On définit la variable aléatoire : $Z = \min(X,Y)$.

**a)** Justifier, pour $k \in \mathbb{N}$, l'égalité d'événements : $[Z>k] = [X>k] \cap [Y>k]$.

**b)** En déduire, pour $k \geqslant 1$, la probabilité : $\mathbb{P}(Z>k)$.

**c)** Établir que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z>k-1) - \mathbb{P}(Z>k)$

**d)** En déduire que $Z$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

**3.** On définit une variable aléatoire $T$ par : $T = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ prend une valeur paire,} \\ \frac{X+1}{2} & \text{si } X \text{ prend une valeur impaire.} \end{cases}$

**a)** En écrivant $\left\{ \begin{array}{ll} X = 2n & \text{si } X \text{ prend une valeur paire} \\ X = 2n-1 & \text{si } X \text{ prend une valeur impaire} \end{array} \right\}$ vérifier que $T = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.

En déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

**b)** Pour $k \geqslant 1$, quelles valeurs de $X$ conduisent à l'événement $[T=k]$ ?

**c)** En déduire, pour $k \geqslant 1$, la probabilité $\mathbb{P}(T=k)$.

Vérifier que $T$ suit la même loi que $Z$. *(soit : $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)$.)*

**4.** On veut simuler les variables $X$ et $Y$.

On donne les programmes incomplets suivants :

**a)** On lance une pièce donnant « Pile » avec proba $p$.
On prend $X =$ le rang du premier « Pile » obtenu.
Compléter le programme :

```
function x = simulerX(p)
  x = 0
  lancer = 1
  while (lancer > p)
    x = ___
    lancer = rand()
  end
endfunction
```

*(simulation de $\mathcal{G}(p)$ comme temps d'attente)*

**b)** Compléter pour simuler $T$.

```
function t = simulerT(p)
  x = simulerX(p)
  if (modulo(x,2) == 0)
    then        // Si x est pair
      t = ___
    else
      t = ___
  end
endfunction
```

*(Variante possible :* `t = floor((x+1)/2)`*)*