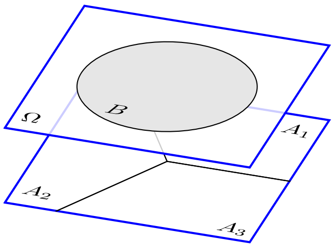
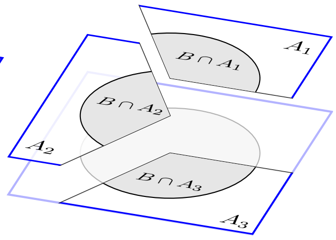
Colles semaine 17 - Conditionnement, chaînes de Markov

1 Conditionnement





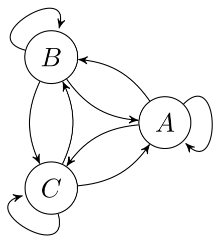
- **Système complet d'événements :** *(principe de la disjonction des cas)*
  - ⋆) *deux-à-deux incompatibles :* $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$
  - ⋆) *collectivement exhaustifs :* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$
- **Formule des probabilités totales**

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{\substack{\text{proba.}\\ \text{conditionnantes}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}_{A_i}(B)}_{\substack{\text{proba.}\\ \text{conditionnelles}}}$$

- **Pour un couple de variables aléatoires**
  Conditionnement de Y par X : *(de chaque $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ par les $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$)*

$$\underbrace{\mathbb{P}(Y = y_j)}_{\substack{\text{marginale}\\ \text{conditionnée}}} = \sum_{i \in I} \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}_{\text{loi conjointe}} = \sum_{i \in I} \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}_{\substack{\text{marginale}\\ \text{conditionnante}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}_{X = x_i}(Y = y_j)}_{\substack{\text{loi}\\ \text{conditionnelle}}}$$

2 Notion de chaîne de Markov



- une **succession d'épreuves** *(pour $n \in \mathbb{N}$)* aléatoires
- une évolution aléatoire sur un ensemble fini d'**états** *(ici A, B, C)*
- ⇝ une suite de **systèmes complets d'événements** A_n, B_n, C_n
- **l'état probabiliste** au temps n *(donnée des probatés de chaque état)*
- **vecteur de probabilités** $\vec{V}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$
- la **matrice de transition** T est formée avec les **proba. de transition** *(p.ex. $p_{[A \rightsquigarrow B]} = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$).*

$$\begin{array}{cccc} \text{depuis } A & \text{depuis } B & \text{depuis } C & \\ \end{array}$$
$$T = \begin{bmatrix} p_{[A \rightsquigarrow A]} & p_{[B \rightsquigarrow A]} & p_{[C \rightsquigarrow A]} \\ p_{[A \rightsquigarrow B]} & p_{[B \rightsquigarrow B]} & p_{[C \rightsquigarrow B]} \\ p_{[A \rightsquigarrow C]} & p_{[B \rightsquigarrow C]} & p_{[C \rightsquigarrow C]} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{vers } A \\ \to \text{vers } B \\ \to \text{vers } C \end{array}$$

(si la chaîne de Markov est une suite de v.a. *(X_n), alors T = loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n)*

La **formule des probabilités totales** s'écrit : $\underbrace{\vec{V}_{n+1}}_{\substack{\text{marg.}\\ \text{cond}^{\text{née}}}} = \underbrace{T}_{\substack{\text{loi}\\ \text{cond}^{\text{nelle}}}} \cdot \underbrace{\vec{V}_n}_{\substack{\text{marg.}\\ \text{cond}^{\text{nante}}}}$

3 Réduction matricielle et chaînes de Markov

- **Puissances de la matrice de transition** On a $\vec{V}_n = T^n \cdot \underbrace{\vec{V}_0}_{\text{état init.}}$.
- **Application de la réduction** pour $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$, on a alors $T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- ***(Variante)*** décompos$^{\text{n}}$ de l'état initial $\vec{V}_0$ dans une base de vecteurs propres ⇝ calcul de V_n
- **Convergence vers un état probabiliste limite** quand $n \to +\infty$.
- **Interprétation du s-esp. propre** *($\lambda = 1$)* comme donnant un état stationnaire

4 Questions de cours

1. La formule des probabilités totales

2. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles d'un couple de variables discrètes

3. La matrice de transition d'une chaîne de Markov

4. Décomposition d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

5. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.