

# Exercices de rentrée

## Exercice 1 (*Une étude de fonction*)

On considère la fonction :  $f : x \mapsto \ln(x) - \frac{x^2}{2}$ .

1. Rappeler le domaine de variations de  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est continue et dérivable.
3. Faire le tableau de variations de la fonction  $f$ . (*avec les limites et valeurs remarquables*)

## Exercice 2 (*Un calcul d'intégrales*)

On pose  $I = \int_0^1 x^4(1-x)^2 dx$ .

1. Quel est le signe de  $I$ ? Montrer que  $I \leq 1$ .
2. Calculer  $I$  en développant le carré.
3. Calculer  $I$  en faisant une intégration par parties.

## Exercice 3 (*Une étude de convexité*)

On pose  $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ .

1. Comment appelle-t-on une telle fonction?
2. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur son domaine de définition.
3. Faire le tableau de variations de  $f$ .
4. Trouver les points d'inflexion de  $f$  et faire le tableau de courbure de  $f$ .

## Exercice 4 (*Une inégalité classique*)

On va montrer l'inégalité (*archi-*)classique

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

1. Faire le tableau de variations de la fonction  $f : x \mapsto \ln(x) - x$
2. En utilisant le maximum trouvé, en déduire l'inégalité attendue.
3. Représenter graphiquement l'inégalité obtenue.