Sujet 1

Questions de cours :

Ecrire la formule des probabilités totales et la formule des probabilités composées

Exercice 1 :

Soit a un réel, $a \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right[$.

Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser. Dans un modèle mathématiques, on considère que :

- Le 1er jour, le titre est stable.
- Si un jour n le titre monte, le jour n+1, il montera avec la probabilité 1 – 2a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec le probabilité a.
- Si un jour n le titre est stable, le jour n+1, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité 1-2a et baissera avec le probabilité a.
- Si un jour n le titre baisse, le jour n+1, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec le probabilité 1-2a.

On note M_n (respectivement S_n et B_n) l'évènement « le titre monte » (respectivement « le titre est stable » et « le titre baisse ») le jour n.

1. On pose $p_n = P(M_n)$, $q_n = P(S_n)$ et $r_n = P(B_n)$
   a) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n, puis q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
   b) Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire r_n en fonction de p_n et q_n.
2. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) sont arithmético-géométriques.
3. Déterminer les expressions de p_n et q_n en fonction de n.
4. Donner la limite de chacune de ces 3 suites. Interpréter le résultat.

Sujet 2

Question de cours :

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $P(\lambda)$.
   Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $P(\mu)$.
   Quel est la loi de X + Y ?
2. Définir la loi de Bernoulli B(p). Définir la loi binomiale B(n,p)
3. Ecrire la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p.
On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi de U puis la loi de V.
2. Déterminer la loi du couple (U, V).
3. Les deux variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place est donnée libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante : si la place est réservée le jour n, elle le sera encore le jour n+1 avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Si la place est libre le jour n, elle sera réservée le jour n+1 avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour tout $n \in N$, on note r_n la probabilité que la place soit réservée le jour n. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
2. Déterminer l'expression explicite de r_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} r_n$

Sujet 3

Questions de cours :

Ecrire le principe de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.

Exercice 1 :

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place est données libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante : si la place est reservées le jour k, elle le sera encore le jour k+1 avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Si la place est libre le jour k, elle sera reservée le jour k+1 avec le probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour tout $n \in N$, on note r_n la probabilité que la place soit réservée le jour n. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
2. Déterminer l'expression explicite de r_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} r_n$

Exercice 2 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p.
On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi de U puis la loi de V.
2. Déterminer la loi du couple (U, V).
3. Les deux variables U et V sont-elles indépendantes ?