Correction DL 3 : une suite de tirages aléatoires

Une urne contient initialement
- une boule blanche et
- deux boules rouges.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :
- B_n = « on obtient une boule **blanche** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,
- R_n = « on obtient une boule **rouge** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,

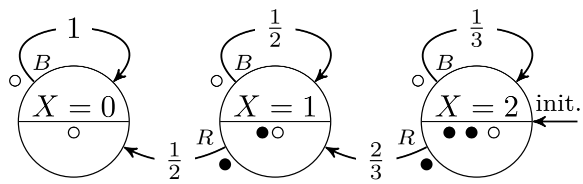
et X_n le nombre de boules rouges contenues dans l'urne **à l'issue** du $n^{\text{ème}}$ tirage.

Remarque préliminaire : chaîne de Markov

Il y a 3 configurations accessibles au cours de l'expérience : les contenus possibles de l'urne *(le nombre de boules rouges : $X = 0, 1$ ou 2).*

On parle des **états du système**.

Selon l'issue de chaque tirage, *(R ou B)* le contenu de l'urne est modifié selon le graphe des transitions à droite.



Ces changements d'états ont lieu, conditionnellement à l'état présent, avec une probabilité décrite sur chaque flèche.

Remarques de rédaction

- **Décrire une situation Markovienne**
  Je vous conseille à l'avenir, si vous détectez une situation Markovienne, de la décrire assez précisément pour et de faire sur votre copie le graphe des transitions comme ci-dessus en explicitant
- **Référer au graphe des transitions** *(Exemple pour la question 3.)*
  Sur le graphe des transitions, il y a exactement 2 flèches qui aboutissent à l'état $X = 1$:
  - celle qui provient de $[X = 2]$, associée à l'événement R
  - celle qui provient de $[X = 1]$, associée à l'événement B
- **Attention !**
  La simple invocation de la notion de « chaîne de Markov » n'est pas une solution qui vous exonère d'une rédaction rigoureuse et précise

1. Le début de l'expérience

a) *(Justifier que l'on a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la probabilité de chaque valeur* (la loi de X_1).*)*

- **Support de X_1** Le contenu initial de l'urne est une boule blanche et deux rouges.
  Après le premier tirage, il peut donc rester :

une boule blanche et deux rouges,	si on tire la boule blanche	alors $X_1 = 2$
une boule blanche et une rouge,	si on tire une boule rouge	alors $X_1 = 1$

  Ainsi on a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.

- **Loi de X_1** On a l'égalité d'événements suivante :

$$[X_1 = 2] = B_1 = \text{« on tire la boule blanche parmi les 3 de l'urne. »}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$.

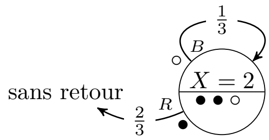
b) *(Justifier que l'on pose $X_0 = 2$.)*
Avant le premier tirage, on a 2 boules rouges dans l'urne.

2. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

a) *(À quelles conditions sur le $n^{\text{ième}}$ tirage restera-t-il 2 boules rouges à son issue ?)*

Il reste 2 boules rouges dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage *ssi*

- avant le $n^{\text{ième}}$ tirage, l'urne contient 2 boules rouges,
- on tire la boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage.



b) *(En déduire l'égalité d'événements : $\forall n \geqslant 1,\ [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.)*
On a donc bien $\forall n \geqslant 1$, l'égalité d'événements qui redit la conclusion de la question précédente :

$$[X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n.$$

c) *(Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n)$?)*
On conditionne par l'événement $[X_{n-1} = 2]$.
Sous cette hypothèse, il reste donc 2 boules avant le $n^{\text{ième}}$ tirage.
La probabilité conditionnelle de tirer la boule blanche est donc $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n) = \frac{1}{3}$

d) *(En déduire que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner son terme général.)*
Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 2) &= \mathbb{P}([X_{n-1} = 2] \cap B_n)\\ &= \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n) \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) = \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_{n-1} = 2)\,.\end{aligned}$$

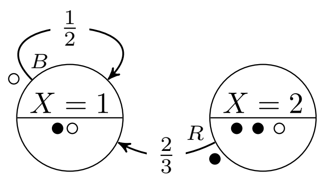
Cette suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3^n}.$$

3. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 1)$

a) *(Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X_n = 1]$ en terme de $[X_{n-1} = 1]$, $[X_{n-1} = 2]$, B_n, R_n.)*

- **Disjonction selon l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage**
  - si B_n, alors il restait **une boule rouge** à l'issue du $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage.
    Ainsi $[X_n = 1] \cap B_n = [X_{n-1} = 1] \cap B_n$
  - si R_n, alors il restait **deux boules rouges** à l'issue du $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage.
    Ainsi $[X_n = 1] \cap R_n = [X_{n-1} = 2] \cap R_n$



- **Expression ensembliste**
  On obtient donc la décomposition selon le système complet (B_n, R_n) :

$$\begin{aligned}[X_n = 1] &= ([X_n = 1] \cap B_n) \quad \sqcup ([X_n = 1] \cap R_n)\\ &= ([X_{n-1} = 1] \cap B_n) \sqcup ([X_{n-1} = 2] \cap R_n)\end{aligned}$$

b) *(Par les probabilités totales, déduire pour $n \geqslant 1$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$.)*
On passe aux probabilités, et il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 1) &= \mathbb{P}\Big[\Big([X_{n-1} = 1] \cap B_n\Big) \sqcup \Big([X_{n-1} = 2] \cap R_n\Big)\Big] \\ &= \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(B_n) \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(R_n) \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) \\ &= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. On a donc : $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.

c) *(Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \dfrac{4}{3^n}$, est géométrique.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{4}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\,u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}} + \dfrac{4}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\,u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
Ainsi $v_{n+1} = \frac{1}{2}\,v_n$, et a suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) *(En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{4}{2^n} - \dfrac{4}{3^n}$.)*
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \frac{1}{2^n} = (u_0 + \frac{4}{3^0}) \times \frac{1}{2^n} = \frac{4}{2^n}$.
Ainsi, on a $\mathbb{P}(X_n = 1) = u_n = v_n - \frac{4}{3^n}$ soit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{4}{2^n} - \dfrac{4}{3^n}$

4. On note T le rang du tirage où l'on tire une boule rouge pour la deuxième fois.

a) *(Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité d'événements $[T \leqslant n] = [X_n = 0]$.)*
On a en effet

$[X_n = 0]$ = « L'urne ne contient plus de boules rouges après le $n^{\text{ième}}$ tirage »
= « On a tiré la dernière boule rouge $n^{\text{ième}}$ tirage ou avant » $= [T \leqslant n]$

b) *(En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)$.)*
On a l'égalité d'événements : $[T = n] = [T \leqslant n] \setminus [T \leqslant n-1]$.
$= [X_n = 0] \setminus [X_{n-1} = 0]$
En passant aux probabilités, il vient bien : $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)$.

c) *((Variante) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$.)*
L'événement $[T = n]$ = « On a tiré la dernière boule rouge $n^{\text{ième}}$ tirage »
signifie « Il restait exactement une boule rouge avant le $n^{\text{ième}}$ tirage,
et on a tiré celle-ci au $n^{\text{ième}}$ tirage »
c'est-à-dire : $[T = n] = [X_{n-1} = 1] \cap R_n$
Il vient donc bien : $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}([X_{n-1} = 1] \cap R_n) = \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(R_n)$
soit $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$.

d) *(En déduire l'expression de la probabilité $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T = n) = 2\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right]$.)*
On a bien : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = 2\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right]$.

e) *(Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.)*
On calcule les sommes des deux séries convergentes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}$.
Il vient donc bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 2 \times 2 - 2 \times \frac{3}{2} = 1$
Ainsi, avec probabilité $= 1$, on a $T \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Par conséquent, $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ et T est une **variable aléatoire bien définie**.

f) *((Bonus) Établir :* $\mathbb{E}[T] = \frac{7}{2}$ $\quad \mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{23}{2}$ $\quad \mathrm{Var}(T) = \frac{11}{4}$*.)*

- **Espérance**

  On a, sous réserve de convergence absolue :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times 4\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \\ &= 4\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}\right] \\ &= 4\left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2\right] = 4\left[4 - \frac{9}{4}\right] = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

  La série est à termes positifs. La convergence absolue équivaut donc à la convergence simple.

  Les séries géométriques dérivées qui apparaissent étant convergentes, il y a bien convergence absolue aussi.

- **Calcul intermédiaire** de $\mathbb{E}[T(T-1)]$

  Sous réserve de convergence absolue, on décompose de même, en dégageant l'exposant $n-2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(T-1)] &= 4\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^{n-2}}\right] \\ &= 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^3\right] = 4\left[4 - \frac{9}{8}\right] = \frac{23}{2}\end{aligned}$$

  De même, cette série est
  - à termes positifs
  - convergente.

  Il y a donc bien convergence absolue et l'espérance est bien définie.

- **Variance**

  Par la formule de Kœnig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= \mathbb{E}[T(T-1)] + \mathbb{E}[T] - (\mathbb{E}[T])^2 \\ &= \frac{23}{2} + \frac{7}{2} - \frac{49}{4} \\ &= \frac{11}{4}.\end{aligned}$$