TP Scilab 3 : Simulation de lois discrètes

le 27 septembre 2016

Le fichier `fonctionsTP3.sci` est un résumé des fonctions construites dans le dernier TP.

Fonction	Loi modélisée	Valeurs
`densGauss(mu, sigma, x)`	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$ *(densité)*
`loiUnif(n)`	$\mathcal{U}(0:n)$	$\{0:n\}$
`loiGeom(p, n)`	$\mathcal{G}(p)$	$\{1:n\}$
`loiPois(lambda, n)`	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\{0:n\}$

1 Avec le générateur `grand`

Le générateur aléatoire `grand` permet d'obtenir un échantillon des lois usuelles, avec la syntaxe :

`grand (lignes, colonnes, "loi", arguments)`

Loi de probabilités		Paramètre	Arguments			
uniforme discrète	$\mathcal{U}\{m:n\}$	`"uin"`	`Low`	$(=m)$	`High`	$(=n)$
binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	`"bin"`	`n`	$(=n)$	`p`	$(=p)$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	`"poi"`	`mu`	$(=\lambda)$		
géométrique (de Pascal)	$\mathcal{G}(p)$	`"geom"`	`p`	$(=p)$		

Exercice 1 (*Fonctions statistiques usuelles*)

1. Obtenir un échantillon `echBin` de 100 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{10}\right)$.
   Tracer l'histogramme obtenu.
2. Quelle est la moyenne des valeurs de `echBin` ? *(`help mean`)*
3. Quel est l'écart-type des valeurs de `echBin` ?
4. Quelles sont les valeurs extrémales de `echBin` ?

Exercice 2 (*Confronter un histogramme à la distribution théorique*)

1. Obtenir un échantillon `echBin` suffisant de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{10}\right)$. Tracer l'histogramme obtenu.
2. Tracer par dessus de cet histogramme la distribution théorique *(commande `binomial`)*

En utilisant les fonctions `loiGeom(p, n)` et `loiPois(lambda, n)` dans `fonctionsTP3.sci` ;

3. mêmes questions pour la distribution $\mathcal{P}(5)$
4. mêmes questions pour la distribution $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 3 (***Approximation binomiale-normale : « Tcl binomial »***)

Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, et $p \in]0\,;1[$ raisonnable :

1. Obtenir un échantillon `echBin` de 10^5 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}(N,p)$.
   Tracer l'histogramme obtenu.
2. Tracer la densité normale de même espérance et écart-type sur l'histogramme.
   Que constate-t-on ?

2 Un exemple direct de simulation

Exercice 4 (***Opérations par colonnes, lignes***)

1. Que retourne la fonction `uneMatrice()` ?
2. Calculer la somme de toutes les valeurs de la matrice `A` obtenue.
3. Que retournent les commandes `sum(A, "r")` et `sum(A, "c")` ?
4. Quelles autres fonctions que `sum` peut-on tester avec les mêmes modes ?

(`min`, `max`, `prod`)

Exercice 5 (***Simulation de la loi binomiale par sommation de Bernoulli***)

1. Que modélise la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{10}\right)$?
2. Obtenir un échantillon rectangulaire à 5 lignes et 10 colonnes de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{3}{10}\right)$.
3. Quelle version de `sum` utiliser pour obtenir un échantillon de 5 valeurs de la loi $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{10}\right)$?
4. Vérifier cette méthode de simulation avec la commande `histplot` et `binomial`.

Proposition 1 (***Stabilité additive de la loi de Poisson***)

Soient $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires.

On suppose que
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, la $v.a. X_i$ est de Poisson : $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$
- les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont **mutuellement indépendantes**.

Alors leur somme $S = X_1 + \dots + X_n$ est une $v.a.$de Poisson : $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Exercice 6 (***Stabilité de la loi de Poisson***)

En s'inspirant de l'exercice précédent, mettre en œuvre une expérience en Scilab permettant de vérifier la Proposition 1.