1 Généralités sur les espaces vectoriels

- **Notion d'espace vectoriel** Un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$:
  - il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
  - on y fait des **combinaisons linéaires** de $\vec{u}, \vec{v}$: $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ *(règles de calcul usuelles)*.
- **Appliquer le vocabulaire** sur les exemples au programme :
  - Les espaces cartésiens $\mathbb{R}^n$ *(à coordonnées)*
  - Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$
  - L'espace des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, définies sur $D \subseteq \mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.
  - L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- **Combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p$:
  les vecteurs qui s'écrivent $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \lambda_k \vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i$ pour des coef^{ts} $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

2 Sous-espaces vectoriels

- **Appliquer la définition**
  Un **sous-espace vectoriel** F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui
  - est **non-vide**. *(On vérifie que F contient le **vecteur nul**, soit : $\vec{0} \in F$.)*
  - est **stable** par combinaisons linéaires : pour tous $\left.\begin{array}{l}\lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \vec{u}, \vec{v} \in F\end{array}\right\}$ on a encore : $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.
- **Lecture d'une définition ensembliste**
  L'énoncé : $F = \{\vec{u} \in E,$ « équation / prop^{té} de » $\vec{u}\}$
  se lit : F est l'ensemble des vecteurs $\vec{u} \in E$ qui vérifient « équation / prop^{té} ».
  $\rightsquigarrow$ pour vérifier : $\vec{u} \in F$ on montre : « équation / prop^{té} »
- **Sous-espace engendré** par des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, noté $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.
  C'est l'**ensemble** des vecteurs qui sont **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$.
- **Intersection de deux sous-espaces vectoriels**
  Si F et G sont deux *s-e.v.* de E, alors $F \cap G$ est aussi un *s-e.v.* de E.
  *(où $F \cap G = \{$vecteurs de E qui appartiennent **à la fois** à F et à $G\}$)*
  *$= \{$vecteurs de F qui appartiennent **aussi** à $G\}$*

3 Applications linéaires

- **Linéarité**
  $f : E \to F$ est **linéaire** si :
  $$\left.\begin{array}{l}\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in F\end{array}\right\} \quad \underbrace{f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}}$$
- **Vocabulaire** *($\star$-morphismes)*

	quelconque	$E = F$ *(E est stable par f)*
qcque	app. lin.	**endom**.
bijectif	**isom**.	**autom**.

- **Noyau d'une appl^{on} linéaire** $f : E \to F$
  L'ensemble des vecteurs annulés : $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v} \in E,\ f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
  - Le noyau de $f : E \to F$ est un **sous-espace vectoriel** de E.
  - L'application f est injective *ssi* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.
- **Image d'une application linéaire** l'ensemble des valeurs : $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in F, \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x})\}$
- **Opérations sur les applications linéaires** comb^{ns} linéaires *($\mathcal{L}(E,F)$ est un (ev.))*, compositions.
- **Appl^{n} lin. associée à une matrice** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $\varphi_A : \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ \vec{X} \mapsto A \cdot \vec{X}.\end{array}\right.$

4 Questions de cours

1. Expliquer la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que $\left\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(5) = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

3. Définition du noyau d'une applin. De quel espace vectoriel est-ce un *s-e.v.* ?

4. Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace E.

5. Définition du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$.