

Résumé semaine 8 : Familles de vecteurs

1 Sous-espaces vectoriels

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

- **Combinaisons linéaires** Les vecteurs \vec{v} qui s'écrivent : $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.
- **Sous-espace vectoriel engendré** noté $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de \mathcal{F} .

C'est un sous-espace vectoriel de E , et il contient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$.

- **Matrice de la famille**

On a : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = A\Lambda$, avec $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix}$ et $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$.

2 Familles génératrices

- **Définition** La famille \mathcal{F} est génératrice dans E si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

- **Décompositions selon une famille génératrice**

\mathcal{F} génératrice ssi tout $\vec{v} \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

(la décomposition n'est pas unique en général)

- (dans \mathbb{R}^n) avec la matrice de la famille

\mathcal{F} génératrice si après échelonnement de A , on a un pivot par ligne \iff pas de ligne nulle

\iff pas de condition de compatibilité du système augmenté (compatibilité automatique)

3 Relat^{ns} de dépendance linéaire, familles liées ou libres

- **Relations de dépendance linéaire** C'est une équation de la forme

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$$

Si $\lambda_p \neq 0$, alors $\vec{u}_p = -\frac{1}{\lambda_p} [\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_{p-1} \cdot \vec{u}_{p-1}]$

- **Famille liée** Une famille qui vérifie une relation de dépendance linéaire non-triviale.

L'un des vecteurs se réécrit comme combinaison linéaire des autres.

- **Famille libre** Une famille \mathcal{F} qui n'est pas liée

\iff la seule relation de dépendance linéaire satisfaite par \mathcal{F} est triviale.

- **Vérifier la liberté** par appendices successifs

$$\mathcal{F}_1 = (\vec{u}_1) \rightsquigarrow \mathcal{F}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \rightsquigarrow \mathcal{F}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

(Vérif. chaque étape : le nouveau vecteur n'est pas combinaison linéaire des autres)

4 Bases

- **Définition** Une famille libre et génératrice

- **Coordonnées** $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de \mathcal{F}

$$\iff \forall \vec{v} \in E, \quad \exists! \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{coordonnées de } \vec{v}} \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{u}_n}_{\text{décomp}^n \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{F}}$$

- **Bases canoniques des espaces usuels** : $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$.

- (dans \mathbb{R}^n) **Inversibilité de la matrice de la famille**

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de \mathbb{R}^n et A la matrice de cette famille

1. \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}^n \iff A$ est inversible

2. Recherche des coordonnées du vecteur générique \vec{v} dans \mathcal{F}

\iff Inversion de la matrice A de la famille \mathcal{F} .

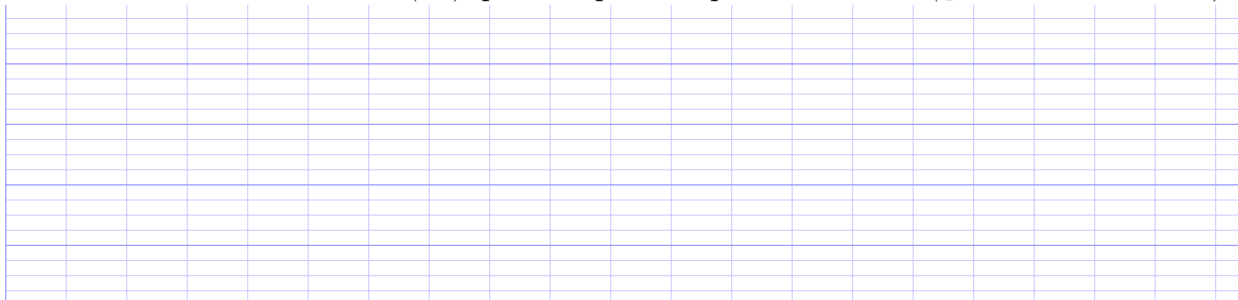
$$\text{Pour } a_1, \dots, a_n \text{ les coordonnées de } \vec{v} \text{ dans } \mathcal{F}, \text{ on a : } A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{v}$$

5 Questions de cours

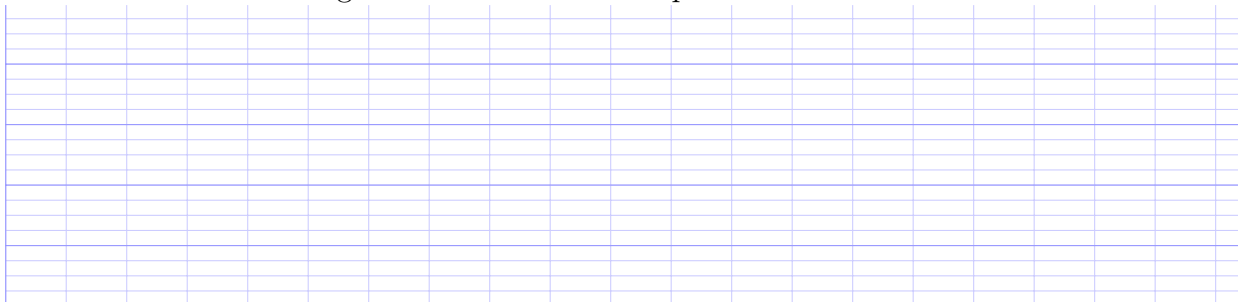
1. Matrice A d'une famille de vecteurs \mathcal{F} dans \mathbb{R}^n . Combinaisons linéaires en fonction de A ?



2. Définition d'une famille libre. (\mathbb{R}^n) quelles équations pour le montrer (*quelle solution attendue*)?



3. Définition d'une famille génératrice \mathcal{F} . Montrer que tout \vec{v} est alors comb. lin. de \mathcal{F} .



4. Définir les coordonnées d'un vecteur dans une base.



5. Montrer qu'une famille donnée est une base de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

