Exercice 1 : Étude de fonction

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. *(Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.)*

On a $I = \underbrace{2\int_0^1 \mathrm{d}x}_{=2} \underbrace{-2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{=J}$. Calculons par parties $J = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$:

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

Il vient donc :

$$J = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\,\mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-1} - \Big[\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = -\,\mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-1} - 1) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi : $I = 2 - 2(\underbrace{1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}}_{=J}) = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.

2. Étude de la fonction f

a) *(Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.)*

Les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto -2x$ *(fonction polynomiale)*, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *(fonction exponentielle)*

Ainsi leur produit $x \mapsto -2x\,\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$.

Par ajout de constante additive, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc aussi $\mathcal{C}^2$.

b) *(Faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ + limites en $\pm\infty$.)*

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$

d'où : $$f'(x) = -2(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On obtient donc pour f' et f le tableau de signes-variations à droite.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^{-x}			$+$		
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	2

- **Calcul de $\lim\limits_{-\infty} f$**

  Pour $x \to -\infty$, on a $f(x) = 2 \underbrace{-2x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\to+\infty} \to +\infty$.

- **Calcul de $\lim\limits_{+\infty} f$**

  Pour $x \to +\infty$, on a $f(x) = 2 \underbrace{-2x}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\to 0}$.

  On obtient une forme indéterminée. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0$.

  Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 2$.

- **Calcul de $f(1)$**

  On a $f(1) = 2 - \mathrm{e}^{-1}$.

c) *(Étudier le signe de la fonction f'' + unique point d'inflexion.)*
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

d'où : $$\begin{aligned} f''(x) &= 2(\mathrm{e}^{-x} - (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 2(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On trouve le tableau de signes ci-contre.
La dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe une seule fois : en 2.
C'est donc l'unique point d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2\,\mathrm{e}^{-x}$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		convexe		concave	

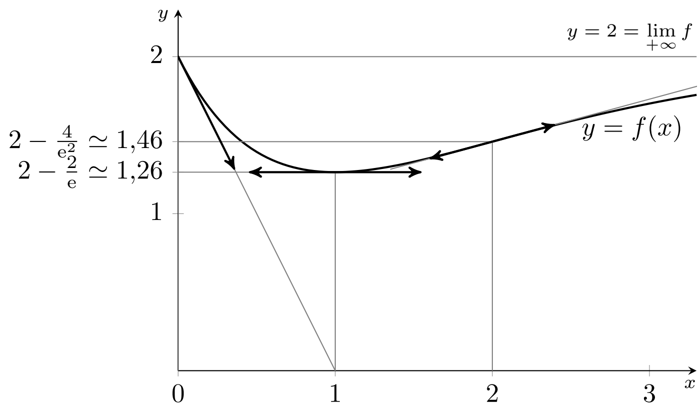
inflexion

3. Tracé de la fonction f sur $[0\,;3]$ *(On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}37$ et $\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}14$.)*

a) *(Tracer l'asymptote représentant la limite de f en $+\infty$.)*
L'asymptote est horizontale, à l'ordonnée $y = 2$.

c) *(Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ (+ approx).)*

- $f(0) = 2$.
- $f(1) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$
  $\simeq 2 - 2 \times 0{,}37 = 1{,}26$.
- $f(2) = 2 - 4\,\mathrm{e}^{-2}$
  $\simeq 2 - 4 \times 0{,}14 = 1{,}44$



d) *(Calculer $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ (approx).)*

- $f'(0) = -2$.
- $f'(1) = 0$.
- $f'(2) = 2\,\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}28$.

4. L'équation $f(x) = x$. On définit la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}$

a) *(Montrer que pour $x \geqslant 1$, on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}$.)*
On a trouvé le tableau de signes ci-contre pour la dérivée seconde f''.
On en déduit le tableau de variations pour f'.
On obtient bien l'inégalité :
$$\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}.$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

b) *(En déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.)*
La fonction g est dérivable et on a $\forall x \geqslant 1,\ g'(x) = f'(x) - 1$. Par la question précédente :
$$\forall x \geqslant 1, \quad g'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2} - 1 < 0.$$
Ainsi la fonction g est bien strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$. *(sur $]0\,;+\infty[$ aussi.)*

c) *(Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution ℓ sur $[0\,;+\infty[$.)*
Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction g est
- continue
- strictement décroissante.

Par le théorème de la bijection monotone, la fonction g réalise donc une bijection $]0\,;+\infty[\to]\lim\limits_{+\infty} g\,; g(0)[$. Or $\left\{\begin{array}{c} g(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$ donc $0 \in]\lim\limits_{+\infty} g\,; g(0)[$, et il existe un unique $\ell \in]0\,;+\infty[$ tel que $g(\ell) = 0$.

d) *(Montrer que $\ell \in [1\,;2]$.)*
Calculons $\begin{cases} g\,(1) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1} > 0 \\ g\,(2) = -4\,\mathrm{e}^{-2} \quad < 0 \end{cases}$
Ainsi, la fonction g change de signes entre 1 et 2, donc s'y annule, et $1 < \ell < 2$.

e) *(Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \geqslant 0$.)*
La fonction g est st$^{\mathrm{t}}$ décroissante, et s'annule en ℓ.
On trouve donc le tableau de signes ci-contre.
Remarquons que $\quad g(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant x$.

x	1		ℓ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) *(Montrer que $\forall n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant \ell$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $\quad u_n \geqslant \ell \qquad (H_n)$
- **Initialisation** On a bien d'après la question **4.d)** : $\quad u_0 = 2 \geqslant \ell \qquad (H_0)$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $u_n \geqslant \ell$.
  D'après la question **4.d)**, et (H_n), on a : $u_n \geqslant \ell \geqslant 1$.
  La fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, *(Q **2.b)**)*, d'où : $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(\ell) = \ell$.
  Ainsi, il vient bien : $\quad u_{n+1} \geqslant \ell \qquad (H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant \ell \qquad (H_n)$

b) *(Étudier le sens de variation de la suite (u_n).)*
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$. *(d'après **4.e)**)*
Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) *(Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.)*

- **Convergence de (u_n)** La suite (u_n) est
  - décroissante, par **5.b)**, et
  - minorée par ℓ, par **5.a)**.

  Par le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge et $\lim(u_n) \geqslant \ell$.
- **Limite de (u_n)**
  - La suite (u_n) satisfait $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, et
  - la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

  D'après le théorème du point fixe, la limite $\lim(u_n)$ est un point fixe $\geqslant 1$ de f.
  D'après la question **4.c)**, le seul point fixe de f qui soit $\geqslant 1$ est le réel ℓ.
  Ainsi $\lim(u_n) = \ell$.

d) *(Montrer grâce à la question **4.a)** que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell)$.)*
La fonction f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour $1 \leqslant a \leqslant b$, on a :

$$0 \leqslant f(b) - f(a) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}\,.$$

On applique, pour $n \in \mathbb{N}$, entre $a = \ell$, et $b = u_n$: *(on a bien $1 \leqslant \ell \leqslant u_n$)*

$$0 \leqslant \underbrace{u_{n+1} - \ell}_{f(u_n) - f(\ell)} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2}(u_n - \ell).$$

e) *(En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n \, e^{-2n}$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n \, e^{-2n}$ (H_n)
- **Initialisation** On a $\ell \geqslant 1$, donc : $0 \leqslant u_0 - \ell \leqslant 2 - 1 = 1$ (H_0)
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n \, e^{-2n}$
  D'après la question **5.d)** $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2 \, e^{-2}(u_n - \ell) \leqslant 2 \, e^{-2} \, 2^n \, e^{-2n} = 2^{n+1} \, e^{-2(n+1)}$.
  Ainsi, il vient bien : $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant 2^{n+1} \, e^{-2(n+1)}$ (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant 2^n \, e^{-2n}$ (H_n)

f) *(Combien de termes de (u_n) calculer pour approcher ℓ avec une précision $\leqslant 10^{-3}$?)*

(on rappelle $\ln(2) \simeq 0{,}69$ *et* $\ln(10) \simeq 2{,}3$*)* Pour $n \in \mathbb{N}$, l'erreur commise en approchant ℓ par u_n est $\leqslant 2^n \, e^{-2n}$.
Pour que celle-ci soit $\leqslant 10^{-3}$, on souhaite donc avoir :

$$2^n \, e^{-2n} \leqslant 10^{-3} \iff n \ln(2 \, e^{-2}) \leqslant -3 \ln(10) \iff n[2 - \ln(2)] \geqslant 3 \ln(10)$$

$$\iff n \geqslant \frac{3 \ln(10)}{2 - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2{,}3}{2 - 0{,}7} = \frac{6,9}{0{,}6} = 11{,}5$$

Pour obtenir ℓ avec une précision $\leqslant 10^{-3}$, il suffit donc de calculer u_{12}.