IO1 : espaces vectoriel, application linéaire

Sujet 1 :

Question de cours :

Soit E un espace vectoriel et F un sous ensemble de E. Ecrire la définition de « F est un sous espace vectoriel de E »

Application :

1. Montrer que l'ensemble F défini par F = $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ tels que $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ et $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous espace vectoriel.

Ecrire F comme un sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

2. Soit E = $\{ M \in \mathcal{M}_5(R)$ telles que $M - {}^tM = I_5 \}$. E est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_5(R)$?

Exercice 1 :

On se place dans $\mathcal{M}_3(R)$ et on pose $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit F = $\{ M \in \mathcal{M}_3(R)$ telles que $2M - {}^tM = AM \}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(R)$.
2. Caractériser par leurs coefficients les matrices M de F. En déduire une famille génératrice de F.
3. Cette famille est-elle une base de F ?

Exercice 2 :

On considère $A \in \mathcal{M}_3(R)$ et les ensembles suivants :

$E_1(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(R)$ telles que $AM = M \}$ et $E_2(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(R)$ telles que $A^2M = AM \}$.

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(R)$.
2. Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
3. Montrer que si A est inversible, $E_1(A) = E_2(A)$.

Sujet 2 :

Question de cours :

Soit ($\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, …, $\vec{f_n}$) une famille de vecteur. Ecrire la définition du sous espace vectoriel engendré par ($\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, …, $\vec{f_n}$) .

Exercice 1

Ecrire $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de la famille $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Exercice 2 :

Soit les deux ensembles E et I : E = { $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que x + y = 0}

et I = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que x + y = 0 et z = y}

Ecrire E comme un sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Faire de même avec I.

Exercice 3 :

Soit F = { $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que x + y = 1}

L'ensemble F ci-dessous est-il un espace vectoriel ?

Exercice 4 :

On se place dans $\mathcal{M}_3$(R) et on pose $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit F = { M $\in$ $\mathcal{M}_3$(R) telles que 2M – ^{t}M = AM }.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$(R).
2. Caractériser par leurs coefficients les matrices M de F. En déduire une famille génératrice de F.
3. Cette famille est-elle une base de F ?

Sujet 3 :

Question de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. Ecrire la définition du noyau de f. De quel espace vectoriel est-il un sous espace vectoriel ?

Exercice 1 :

Soit f l'application $\mathcal{M}_{3,1}(R) \to \mathcal{M}_{3,1}(R)$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y+5z \\ -x-3z \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice.

Déterminer Ker(f), puis déterminer une base de Ker(f)

Exercice 2 :

Soit E = $\mathcal{M}_{2,1}(R)$ et soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ sa base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$\forall(x,y) \in R^2$, $f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) = (2x + y)\vec{e_1} + (x - y)\vec{e_2}$.

Montrer que f est une application linéaire. Déterminer sa matrice.

Exercice 3 :

Soit f l'application de $R_2[X]$ dans R^3 définie, pour tout polynôme P de $R_2[X]$ par :

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2))$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $R_2[X]$ dans R^3
2. Déterminer Ker(f)
3. Donner une base de $R_2[X]$
4. Ecrire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 4 :

On considère $A \in \mathcal{M}_3(R)$ et les ensembles suivants :

$E_1(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(R)$ telles que $AM = M \}$ et $E_2(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(R)$ telles que $A^2M = AM \}$.

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(R)$.
2. Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
3. Montrer que si A est inversible, $E_1(A) = E_2(A)$.