DL 2 : Étude de la série exponentielle

(pour le mercredi 27/09)

Cet exercice est consacré à l'étude de la suite de sommes définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Étude de la suite (S_n).

a) Rappeler :
- la valeur de $0!$
- l'expression, pour $n \in \mathbb{N}$, de $(n+1)!$ en fonction de $n!$ et de n,
- la limite de la suite $(n!)$

b) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3. *(On présentera les résultats comme un tableau de fractions irréductibles.)*

c) Pour $n \geqslant 0$, calculer $S_{n+1} - S_n$. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2. Étude d'une suite intermédiaire On définit la suite (S'_n) par $\forall n \geqslant 1$: $S'_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$.

a) Déterminer le sens de variation de la suite (S'_n).

b) Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

c) En déduire que les suites (S_n) et (S'_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n \leqslant \ell \leqslant S'_n$.

On se propose de montrer que cette limite commune est $\mathrm{e} = \exp(1)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0.

b) Par une intégration par parties, calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de : $I_{n+1} - I_n$.

c) En déduire que la suite $(S_n + I_n)$ est constante.
Quelle est sa valeur ?

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale J_n.

b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement : $J_n \leqslant n! \cdot I_n \leqslant \mathrm{e} \cdot J_n$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, puis que $\ell = \mathrm{e}$. *(c'est-à-dire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}$.)*

5. Un encadrement plus fin, et un équivalent

a) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $(1-t) \cdot \mathrm{e}^t - 1 \leqslant 0$.
En déduire le signe, pour $n \geqslant 1$, de $n! \cdot I_n - J_{n-1}$.

b) En déduire l'inégalité : $I_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}$

c) Grâce à **4.b)**, déduire pour $n \geqslant 1$, l'encadrement : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}$.

d) Déduire enfin l'équivalent : $I_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$.

6. Retrouver l'encadrement : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}$ grâce à celui de la question **2.c)**, et **4.b)**.