Correction DL 1 : dérivation logarithmique

Approche directe

Pour $n \geqslant 1$ un entier, on définit la fonction : $f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Valeurs de f_n

a) *(Calculer $f_n(0)$.)*
Pour n entier, avec $n \geqslant 1$, on a $0^n = 0$.
Ainsi $f_n(0) = 0$.

b) *(En appliquant le théorème des croissances comparées, calculer $\lim\limits_{\infty} f_n$)*
On a $\forall x \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}$. Or pour $x \to +\infty$, on a :
- $x^n \to +\infty$
- $\mathrm{e}^{-x} \to 0$.

Il s'agit donc de lever une forme indéterminée $\infty \times 0$.
Par croissances comparées, la limite est 0 *(c'est l'exponentielle « qui l'emporte »)*.

c) *(Étudier le signe de f_n sur son domaine de définition.)*
Pour $x \geqslant 0$, on a
- $x^n \geqslant 0$,
- $\mathrm{e}^{-x} > 0$

d'où $\forall x \geqslant 0$, $f_n(x) \geqslant 0$.
De plus, pour $x > 0$, on a $f_n(x) > 0$.

2. Dérivation de f_n

a) *(Montrer que la fonction f_n est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.)*
Les fonctions $u : x \mapsto x^n$ *(fonction polynomiale)* et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *(fonction de référence)* sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.
Leur produit f_n est donc aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.
En particulier f_n est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

b) *(Calculer la dérivée f_n' de f_n sous forme factorisée.)*
On a $\forall x \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}$

$$\text{d'où ; } f_n'(x) = \underbrace{nx^{n-1}}_{u'}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v} - \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'=-\mathrm{e}^{x}}$$

$$= (nx^{n-1} - x^n)\,\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}\,(n-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. *(En déduire le tableau de signes de f_n' et le tableau de variations de f_n.)*

x	0		n		$+\infty$
$n-x$		$+$	0	$-$	
$x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}$		$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$n^n\,\mathrm{e}^{-n}$	$\searrow$	0^+

4. *(Compléter le programme Scilab suivant pour qu'il trace la représentation graphique de f_1.)*

complete.sce

```
XMAX = 5;                    // borne de droite du dessin
x = linspace(0,XMAX);        // les 100 valeurs en abscisses
y = x .* exp(-x);            // <- ligne complétée par l'expression de f_1
plot(x,y)                    // tracer la courbe
```

Approche logarithmique

On définit maintenant, pour $n \geqslant 1$ entier, la fonction : $\varphi_n : \left| \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_n(x) = \ln(f_n(x)) \end{array} \right.$

5. *(Justifier que φ_n est bien définie sur $]0\,;+\infty[$, et qu'elle aussi est continue et dérivable.)*
Pour $x > 0$, on a $f_n(x) > 0$ *(question **1.c)**)*. La fonction $\varphi_n : x \mapsto \ln(f_n(x))$ est donc bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
Comme les fonctions $\begin{array}{ll} f_n & \textit{(d'après 2.a))} \\ \ln & \textit{(fonction de réf.)} \end{array}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur composée φ_n l'est aussi.
En particulier φ_n est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

6. *(Vérifier l'expression suivante : $\forall x > 0,\ \varphi_n(x) = n\ln(x) - x$.)*
On a bien $\forall x > 0, \quad \varphi_n(x) = \ln\left(x^n \,\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln(x^n) + \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = n\ln(x) - x$.

7. *(En déduire une écriture simple de la dérivée $\varphi_n'(x)$.)*
On dérive terme-à-terme l'écriture précédente. Il vient : $\forall x > 0, \quad \varphi_n'(x) = \frac{n}{x} - 1 = \frac{n-x}{x}$.

8. *(En déduire le tableau de signes de φ_n' et le tableau de variations de φ_n.)*

x	0		n		$+\infty$
$n-x$		$+$	0	$-$	
$\frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\phi_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$n^n\,\mathrm{e}^{-n}$	↘	$-\infty$

9. Conclusion

a) *(Exprimer f_n en fonction de φ_n.)*
Pour $x > 0$, on a $\varphi_n(x) = \ln(f_n(x))$, donc $f_n(x) = \exp(\varphi_n(x))$.

b) *(Retrouver le tableau de variations de f_n obtenu à la question **3.**)*
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc les variations de f_n sont les mêmes que celles de φ_n. On retrouve ainsi bien le tableau de variations de f_n.

Complément

Pour $n \geqslant 1$ entier, on considère $g_n : \left| \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \end{array} \right.$ et on pose $\psi_n = \ln \circ g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. *(En étudiant ψ_n, trouver en quel point la fonction g_n atteint son maximum sur $[0\,;+\infty[$.)*
On a $\forall x > 0, \psi_n(x) = \ln\left(x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \ln(x^n) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = n\ln(x) - \dfrac{x^2}{2}$.
Ainsi $\psi_n'(x) = \dfrac{n}{x} - x = \dfrac{n - x^2}{x} = \dfrac{\sqrt{n} + x}{x}\left(\sqrt{n} - x\right)$.
On obtient donc le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
$\sqrt{n}-x$		$+$	0	$-$	
$\psi_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}$	↘	$-\infty$

et le maximum de la fonction $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en $\sqrt{n}$.