# Colles semaine 7 : Vocabulaire des espaces vectoriels

### 1 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Algèbre linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Représentation des vecteurs dans le plan (interprétation de la colinéarité)
  - Droites vectorielles : présentation par un vecteur directeur (not.  $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$ )
  - Équations de droite vectorielle ax + by = 0, et aller-retour : équation  $\longleftrightarrow$  vect. dir.
- Algèbre linéaire dans  $\mathbb{R}^3$ 
  - Droites, plans vect.: présent<sup>n</sup> par vecteur, couple directeur  $(\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}), \mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d}))$
  - Équation de plan vectoriel : ax + by + cz = 0, et aller-retour :  $\acute{e}q^n \longleftrightarrow$  couple dir.
  - Intersection de deux plans vectoriels

#### 2 Généralités sur les espaces vectoriels

- ▶ Notion d'espace vectoriel Un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs »  $\vec{u} \in E$ :
  - il y a un « vecteur nul »  $\vec{0}$ .
  - on y fait des combinaisons linéaires de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ :  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  (règles de calcul usuelles).
- ▶ Appliquer le vocabulaire sur les exemples au programme :
  - Les espaces cartésiens  $\mathbb{R}^n$  (à coordonnées)
- L'espace des applications  $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ , où
- Les espaces de matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $D \subseteq \mathbb{R}$ .
- Les espaces de polynômes  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$
- L'espace des suites réelles  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- Combinaisons linéaires de  $\mathcal{F} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_p})$ :

elles s'écrivent  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + ... + \lambda_p \vec{u_p} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u_i}$  pour des coefficients  $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

$$(\mathbb{R}^n): \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u_i} = U\vec{\Lambda}, \text{ où } A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \ddots & \uparrow \\ \vec{u_1} & \vec{u_2} & \cdots & \vec{u_p} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \text{ (mat. de la fam. F) et } \vec{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} \text{ (vect des coeff.)}.$$

#### 3 Sous-espaces vectoriels

Définition

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble  $F\subseteq E$  qui

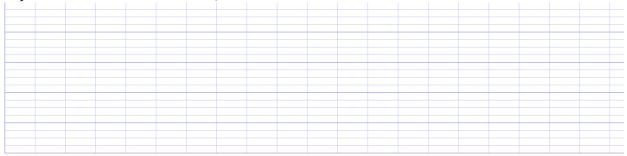
- est non-vide et contient le vecteur nul :  $\vec{0} \in F$  et qui
- est stable par combinaisons linéaires :  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$ .
- ▶ Sous-espace engendré par une famille  $\mathcal{F}$ , (not. Vect( $\mathcal{F}$ )): l'ensemble des c.l. de  $\mathcal{F}$ .
- ▶ Dans  $\mathbb{R}^n$

Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  par l'alg. du pivot.

- $\star$ ) équations  $\leadsto$  base :
  - on échelonne le système d'équations
  - on exprime les inc. principales en termes des inc. secondaires (paramètres)
  - on fait apparaître des vecteurs à droite (éq. tautologique pour les paramètres)
- $\star$ ) base  $\rightsquigarrow$  équations :
  - ightharpoonup on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice  $\mathcal F$
  - les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.

## 4 Les questions de cours

1. Équation d'une droite dans  $\mathbb{R}^2$ , et vecteur directeur.



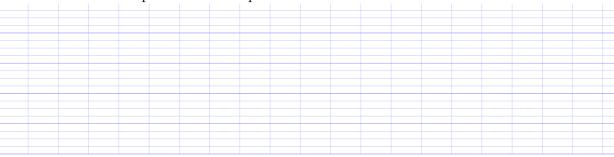
2. Équation d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$ . Intersection de deux plans.



3. La structure d'espace vectoriel sur  $\operatorname{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$ .



4. Conditions à vérifier pour un sous-espace vectoriel.



5. Le sous-espace vectoriel engendré par une famille  $\mathcal{F}$ .

