Devoir sur table n° 3

le 24/11/2016

Exercice 1

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $M = \frac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1. Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.

2. **a)** Vérifier qu'on a $I = \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $N^n = a_n A + b_n B$, avec $\begin{cases} a_{n+1} = 12a_n \\ b_{n+1} = \ \ 4b_n. \end{cases}$

c) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et de b_n en fonction de n.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $M^n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n B$.

3. Un particulier a acheté une poule. Chaque semaine, la poule pond entre 0 et 3 œufs.
Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine *(elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes)*.
On note pour tout entier n non nul, les événements suivants :

- U_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond un œuf »,
- D_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond deux œufs »,
- T_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond trois œufs ».

On note u_n, d_n et t_n leurs probabilités respectives.

3.a) Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

On suppose que la première semaine la poule pond un œuf.

3.b) Expliciter le vecteur X_1.

On suppose que pour tout entier n non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} = \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} = \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

3.c) Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.d) Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.e) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $\begin{cases} u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{cases}$

3.f) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.
Que représente ce nombre ?

3.g) Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa valeur.
Que représente ce nombre ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, et donc en particulier, on a $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calcul de u_0.

a) Trouver les deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \neq \pm 1$, on ait : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \ln(2)$.

c) En déduire $u_0 = \dfrac{\ln(3)}{2}$.

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $[0\,;\frac{1}{2}]$ par

- $f(x) = \ln(1-x)$,
- $g(x) = \ln(1+x)$,
- $h(x) = \ln(1-x^2)$.

2. **a)** Montrer que les fonctions f, g, h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$.

b) Pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, calculer les dérivées $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

c) Pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.

d) En déduire : $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

3. **a)** Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

b) En déduire les valeurs de u_2 et de u_3.

4. **a)** Étudier le signe de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire le sens de variations de (u_n).

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. **a)** Montrer que pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, on a : $\dfrac{1}{1-x^2} \leqslant \dfrac{4}{3}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$.

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

6. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Déduire de la question **5.b)** que la série de terme général $S_n = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.

b) Rappeler, pour $x \neq 1$, l'expression sous forme de fraction, de la somme : $1+x+\cdots+x^n$.

c) Établir l'égalité : $$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

d) Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement : $$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2u_{n+1}.$$

e) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ comme une intégrale.

f) Pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, réduire au même dénominateur l'expression : $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1+x}$.

g) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = 1$.

En déduire la valeur explicite de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 3

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de format 3×3.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a)** Trouver une base et la dimension des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

b) Calculer A^2 et A^3 .

c) En déduire A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

2. On définit le **commutant** A comme l'ensemble de matrices :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telles que : } AM = MA\}.$$

a) Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A-t-on $M_1 \in \mathcal{C}$? A-t-on $M_2 \in \mathcal{C}$?

(Les matrices M_1, M_2 n'ont valeur que d'exemple, et ne seront pas spécialement à réutiliser...)

b) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension finie et que $\dim(\mathcal{C}) \leqslant 9$.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $AM - MA = \begin{pmatrix} u & v-a & w-b \\ x & y-u & z-v \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}$.

d) Montrer que les matrices appartenant à $\mathcal{C}$ sont celles de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

e) En déduire que la famille (I, A, A^2) forme une base de $\mathcal{C}$. En déduire $\dim(\mathcal{C})$.

3. Cette question montre qu'il n'existe pas de matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $N^2 = A$.

a) Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait : $AN = NA$.

b) Justifier qu'on peut écrire $N = aI + bA + cA^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Montrer alors que $N^2 = a^2 I + 2abA + (b^2 + 2ac)\, A^2$.

d) En déduire qu'une matrice N vérifiant $N^2 = A$ n'existe pas.

4. **Exemples de calculs d'inverses**

a) Justifier que la matrice $I - A$ est inversible.

b) Développer le produit $(I - A)\,(I + A + A^2)$.
En déduire l'inverse de la matrice $I - A$ en fonction de A et de A^2.

c) Résoudre de même l'équation $(I + A)(aI + bA + cA^2) = I$, d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{R}$.

d) En déduire l'inverse de la matrice $(I + A)$.

5. Cette question étudie les matrices $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $PA = P - A$

a) Soit P une matrice vérifiant : $PA = P - A$. Calculer $P(I - A)$.

b) En déduire l'expression de P en fonction de A et A^2.