TD 5 - Situations markoviennes

1 Une chaîne de Markov à deux états

Exercice 1 (*Une chaîne de Markov*)

On a deux urnes :
- l'urne A avec 1 bille rouge et 2 verte,
- l'urne B avec 1 bille rouge et 4 vertes.

Tour-à-tour, on pioche avec remise une bille dans une urne.
- Si la bille piochée est rouge, on change d'urne où piocher.
- Si la bille piochée est verte, on continue à piocher dans la même urne.

On commence par piocher dans une des deux urnes au hasard.

On note :
- R_n = « on pioche une bille rouge au $n^{\text{ème}}$ tour »
- V_n = « on pioche une bille verte au $n^{\text{ème}}$ tour »
- A_n = « on pioche dans l'urne A au $n^{\text{ème}}$ tour », et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$
- B_n = « on pioche dans l'urne B au $n^{\text{ème}}$ tour », et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_n}(R_n)$, $\mathbb{P}_{A_n}(V_n)$ et $\mathbb{P}_{B_n}(R_n)$, $\mathbb{P}_{B_n}(V_n)$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, appliquer la formule des probabilités totales, et montrer $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{5}b_n$
$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{5}b_n$.
3. Justifier pour $n \in \mathbb{N}$, que $a_n + b_n = 1$. Déduire : $a_{n+1} = \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{5}$
$b_{n+1} = \frac{7}{15}b_n + \frac{1}{3}$.
4. Que peut-on dire des suites (a_n) et (b_n) ? En déduire qu'elles convergent, et leurs limites.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $r_n = \mathbb{P}($« on change d'urne après le $n^{\text{ème}}$ tour »$)$ selon a_n, b_n.
Faire le passage à la limite. Que constate-t-on ?

2 Autour de l'urne de Pólya

Exercice 2 (*Temps d'atteinte pour l'urne de Pólya classique*)

Une urne contient initialement un jeton de chaque couleur : rouge/vert.
On pioche successivement dans l'urne jusqu'à avoir pioché un jeton rouge.
Après chaque pioche, on remet le jeton dans l'urne, ainsi qu'un autre de la même couleur.
On note T le nombre de pioches nécessaires à l'obtention du premier jeton rouge.

1. **a)** Montrer que l'urne contient, à chaque pioche, au moins un jeton de chaque couleur.
Après n pioches, combien de jetons l'urne contient-elle ?
b) Quelles sont les valeurs possibles : $T(\Omega)$?
2. **a)** Si $T \geqslant n$, quel est le contenu de l'urne après la $n^{\text{ème}}$ pioche ?
b) En déduire que pour $n \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}_{[T \geqslant n]}(T \geqslant n+1) = \frac{n}{n+1}$.
c) En déduire pour $n \geqslant 1$, que : $\mathbb{P}(T \geqslant n) = \frac{1}{n}$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.
3. **a)** La variable T est-elle bien définie ? Proposer une interprétation probabiliste.
b) La variable T admet-elle une espérance ?

Exercice 3 (*Distribution pour l'urne de Pólya classique*)

Une urne contient initialement un jeton rouge et un vert.
On pioche successivement dans l'urne selon le protocole suivant.
Après chaque pioche, on remet le jeton dans l'urne, ainsi qu'un autre de la même couleur.
Pour $n \geqslant 1$, on introduit les notations :

- **contenu de l'urne** pour la $n^{\text{ème}}$ pioche, l'urne contient :
  - X_n jetons rouges
  - Y_n jetons verts
- **couleur piochée** à la $n^{\text{ème}}$ pioche, on pioche :
  - un jeton rouge $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ R_n
  - un jeton vert $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ V_n

1. **a)** Montrer l'égalité d'événements : $[X_{n+1}=k] = \big([X_n=k-1]\cap R_n\big) \sqcup \big([X_n=k]\cap V_n\big)$.

b) Déduire, pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, que : $\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{n-k+1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k)$.

c) En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$ que la variable X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}\big(\llbracket 1,n\rrbracket\big)$.

2. **a)** Quelle est la probabilité de l'événement R_n ?

b) En déduire que la variable $X_{n+1}-X_n$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}\big)$.
Cette variable est-elle indépendante de X_n ?

c) Déterminer, pour $n \geqslant 1$, et $k \in \llbracket 1,n\rrbracket$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{R_n}(X_n = k)$.

Exercice 4 (*Temps d'atteinte pour une urne de Pólya inversée*)

Soit une urne contenant des jetons *(verts et rouges)*. Son contenu initial est d'un jeton vert.
On pioche successivement dans l'urne jusqu'à avoir pioché un jeton rouge.
À chaque fois qu'un jeton vert est pioché :

- on le remet dans l'urne,
- on ajoute un jeton rouge dans l'urne.

On note T le nombre de pioches nécessaires à l'obtention du premier jeton rouge.

1. **a)** Montrer qu'au cours de l'expérience, l'urne ne peut contenir qu'un jeton vert.
Après n pioches, quel est le contenu de l'urne ?

b) Quel est le résultat de la première pioche ?
Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

2. **a)** Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}_{[T>n]}(T > n+1) = \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire pour $n \geqslant 1$, que : $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n!}$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.

3. **a)** Montrer que $\mathbb{E}[T] = \mathrm{e}$. Calculer de même $\mathbb{E}[T\cdot(T-2)]$.

b) Montrer : $\mathrm{Var}(T) = (3-\mathrm{e})\,\mathrm{e}$. *(On pourra vérifier :* $\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}[T\cdot(T-2)] - \mathbb{E}[T]\cdot\big(\mathbb{E}[T]-2\big)$.*)*

3 Autour de l'urne d'Ehrenfest

Exercice 5 (*Urne d'Ehrenfest : espérance*)

On place $n \geqslant 2$ puces dans un bocal fermé à deux compartiments (gauche/droite).
Périodiquement, une urne saute de son compartiment à l'autre.
Pour $t \in \mathbb{N}$, on note X_t le nombre de puces à gauche après t de ces sauts de puce.
Au début de l'expérience, toutes les puces sont dans le compartiment de droite.

1. Montrer qu'on a :
- $X_0 = 0$,
- $\forall t \in \mathbb{N},\ X_t(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.

2. Montrer, pour $t \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0,n]\!]$ que :
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k+1) = 1 - \frac{k}{n}$,
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k-1) = \frac{k}{n}$.

3. En déduire, pour $t \in \mathbb{N}$, que :
- $\mathbb{P}(X_{t+1} - X_t = 1) = 1 - \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}[X_t]$,
- $\mathbb{P}(X_{t+1} - X_t = -1) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}[X_t]$.

(On appliquera la formule des probabilités totales.)

4. Soit $t \in \mathbb{N}$. Calculer l'espérance : $\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t]$.
En déduire la relation : $\mathbb{E}[X_{t+1}] = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \mathbb{E}[X_t]$.

5. Conclure, pour $t \in \mathbb{N}$, que : $\mathbb{E}[X_t] = \frac{n}{2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t\right]$.

Exercice 6 (*Urne d'Ehrenfest : stabilité de la distribution $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$*)

On reprend le contexte de l'exercice précédent, mais avec une situation initiale différente.
Initialement, on place chacune des n puces aléatoirement dans l'un des deux compartiments.

1. **a)** En déduire que l'on doit avoir : $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

b) Rappeler, pour $k \in [\![0,n]\!]$, l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X_0 = k)$.

On rappelle, pour $t \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0,n]\!]$ que :
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k+1) = 1 - \frac{k}{n}$, *(saut droite→gauche)*
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k-1) = \frac{k}{n}$. *(saut gauche→droite)*

2. Montrer, pour $t \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, que : $\mathbb{P}(X_{t+1}=k) = \frac{n-k+1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t = k-1) + \frac{k+1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t = k+1)$.

3. En déduire que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, on a aussi : $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}$.

4. Que peut-on en déduire pour la loi de X_t, avec $t \in \mathbb{N}$?
Que dire de la suite $\left(\mathbb{E}[X_t]\right)_{t \in \mathbb{N}}$?

4 Temps d'atteinte

Exercice 7 (*Interprétation d'un énoncé, d'après Em Lyon 2014*)

On considère une urne contenant 3 boules numérotées.
On effectue une succession de 4 tirages d'une boule avec remise et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Pour $k \in [\![1,4]\!]$, on note N_k la *v.a.* égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

1. **a)** Exprimer l'évenement $(X = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(X = 4)$.

   b) Montrer que $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(X = 3)$.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 8 (*Reconnaître une loi, d'après EML Eco 2009*)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q. Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.
Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. **a)** Reconnaître la loi de T.

   b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $\mathbb{P}(T = k)$ et rappeler espérance et variance de T.

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $\mathbb{E}(U)$ et $\text{Var}(U)$.

Exercice 9 (*Simulation informatique, d'après Ecricome 2014*)

On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut $p \in [0;1]$.

1. Écrire en Scilab une fonction `function valeur = lancer(p)` qui crée un nombre aléatoire dans $[0;1]$ et renvoie $\begin{cases} 1 \text{ si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à } p \\ \text{et } 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

2. Écrire en Scilab une fonction `function rang = premierPile(p)` qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués. *(On pourra utiliser la fonction* `lancer` *en la répétant convenablement.)*

3. Écrire une `function rang = deuxiemePile(p)` qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second « PILE », et affiche le nombre de « FACE » obtenus en tout. *(On pourra utiliser la fonction* `premierPile` *en la répétant convenablement.)*

Exercice 10 (*Un temps d'atteinte* *(d'après Ecricome 2010)*)

Dans cet exercice, on étudie la répétition d'une paire de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une manche consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note D_1 (resp. D_2) le résultat du premier (resp. *deuxième*) dé
À chaque manche :

- l'événement $E_1 = [D_1 < D_2]$ rapporte 0 point,
- l'événement $E_2 = [D_1 = D_2]$ rapporte 2 point,
- l'événement $E_3 = [D_1 > D_2]$ rapporte 1 point.

Pour $n \geqslant 1$ entier, on note X_n le nombre de points marqués lors de la $n^{\text{ème}}$ manche.

1. Déterminer la probabilité des événements E_1, E_2, et E_3.
En déduire, pour $n \geqslant 1$, la loi de la variable aléatoire X_n.

On cumule maintenant les points marqués, et on joue jusqu'à atteindre un score donné.
Plus précisément, on note T_1 (resp. T_2) le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le **total de ses points** est $\geqslant 1$ (resp. $\geqslant 2$) pour la première fois. *(si cet événement se produit)*

2. **a)** Reconnaître la loi de la variable aléatoire T_1.

b) Rappeler la valeur de son espérance et de sa variance.

3. **a)** Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(T_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(T_2 = 2)$.

c) Montrer pour $k \geqslant 3$, que : $\mathbb{P}(T_2 = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \cdot (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$.
Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?

4. **a)** Établir que : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 = k) = 1$.

b) Qu'en déduire pour l'événement « on n'obtient jamais un score cumulé $\geqslant 2$ » ?

c) Calculer $\mathbb{E}[T_2]$.

Exercice 11 (*Temps d'atteinte du deuxième succès, d'après Ecricome 2014*)

On effectue une suite illimitée de lancers d'une pièce retournant PILE avec proba $p \in \,]0;1[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la *v.a.* égale au nombre de PILE lors des n premiers lancers.
- Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note F_j l'événement : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- On note Y la *v.a.* égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de X_n.
Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}[X_n]$ et de sa variance $\text{Var}(X_n)$.

2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

3. Donner les valeurs des probabilités : $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = 1)$ et $\mathbb{P}(Y = 2)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité d'événements : $(Y = n) = (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$.

5. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = (n+1)p^2q^n$

6. Vérifier par le calcul que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}[Y]$ et donner sa valeur.

Exercice 12 (*Match-match, adapté d'après Ecricome Ece 2012*)

On dispose d'un jeu de deux paires de cartes deux cartes sont numérotées « 1 »
les deux autres « 2 »
Initialement, les quatre cartes sont retournées et indistingables.
Tour-à-tour, tant qu'il reste des cartes retournées, on en révèle aléatoirement deux :

- si elles portent le même numéro, on les garde révélées,
- sinon, on les retourne de nouveau.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour révéler toutes les cartes.

1. Calculer $a = \mathbb{P}($« à l'issue du 1^{er} essai, toutes les cartes restent retournées »$)$

2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2 : \mathbb{P}(T = k) = (1-a)\, a^{k-2}$.

3. Justifier que la variable $S = T - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de T en fonction de a

Exercice 13 (*Tirages indépendants uniformes*)

On fait une suite illimitée de tirages dans des urnes contenant des jetons numérotés.
Pour $n \geqslant 1$, le $n^{\text{ème}}$ tirage se fait dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
Le numéro tiré à ce $n^{\text{ème}}$ tirage est noté : U_n.

1. Déterminer, pour $n \geqslant 1$, la loi de U_n.
Que dire de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geqslant 1}$?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le nombre de tirages nécessaires à tirer pour la première fois un n.

2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des valeurs $T_n(\Omega)$.

3. Pour $k \geqslant n$ entiers, exprimer l'événement $[T_n > k]$ en fonction de : $U_n, U_{n+1}, \ldots, U_k$.

4. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n$ que : $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{n-1}{k}$.
Vérifier que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire discrète. *(Pas de « valeur infinie ».)*

5. Déterminer, pour $n \geqslant 2$, la loi de la variable T_n.
Admet-elle une espérance ?

6. Les variables $T_2, T_3, T_4, \ldots$ sont-elles indépendantes ?

7. En moyenne, après combien de tirages obtient-on :

a) un numéro inférieur ou égal qu'au tirage précédent ?

b) le même numéro qu'au tirage précédent ?

5 corrections

Corrigé Ex ?? (Distribution pour l'urne de Pólya classique)

Une urne contient initialement un jeton rouge et un vert.
On pioche successivement dans l'urne selon le protocole suivant.
Après chaque pioche, on remet le jeton dans l'urne, ainsi qu'un autre de la même couleur.
Pour $n \geqslant 1$, on introduit les notations :

- **contenu de l'urne** pour de la $n^{\text{ème}}$ pioche, l'urne contient :
  - X_n jetons rouges
  - Y_n jetons verts
- **couleur piochée** à la $n^{\text{ème}}$ pioche, on pioche :
  - un jeton rouge $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ R_n
  - un jeton vert $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ V_n

1. **a)** Montrer l'égalité d'événements : $[X_{n+1}=k] = \big([X_n=k-1]\cap R_n\big) \sqcup \big([X_n=k]\cap V_n\big)$.

b) *Déduire, pour $1\leqslant k\leqslant n+1$, que :* $\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{n-k+1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k)$.

On applique la formule des probabilités totales dans le système complet (R_n,V_n).

Il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \mathbb{P}(R_n\cap[X_{n+1}=k]) + \mathbb{P}(V_n\cap[X_{n+1}=k])\\ &= \mathbb{P}(R_n\cap[X_n=k-1]) + \mathbb{P}(V_n\cap[X_n=k])\\ &= \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(R_n)\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(V_n)\cdot\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= \tfrac{k-1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \tfrac{n-k+1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k).\end{aligned}$$

c) *En déduire par récurrence sur $n\geqslant 1$ que la variable X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.*

Soit H_n $\forall k\in\llbracket 1,n\rrbracket, \mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{n}$.

2. **a)** *Quelle est la probabilité de l'événement R_n ?*

Comme (R_n,V_n) forme un système complet d'événement, on a $\mathbb{P}(R_n)+\mathbb{P}(V_n)=1$.

Par symétrie du problème, on a : $\mathbb{P}(R_n)=\mathbb{P}(V_n)$.

Il vient donc $\mathbb{P}(R_n)=\mathbb{P}(V_n)=\frac{1}{2}$.

b) *En déduire que la variable $X_{n+1}-X_n$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}\big)$.*

On a bien : $X_{n+1}-X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } R_n\\ 0 & \text{si } V_n.\end{cases}$

Il s'agit bien d'une variable de Bernoulli, de paramètre la probabilité $\mathbb{P}(R_n)=\frac{1}{2}$.

c) *Montrer que :* $\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}-X_n)=\frac{n-1}{12}$ *et en déduire* $\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1})=\frac{n(n+1)}{12}$.

On écrit :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}-X_n) &= \tfrac{1}{2}\cdot\big[\mathrm{Var}(X_n+X_{n+1}-X_n)-\mathrm{Var}(X_n)-\mathrm{Var}(X_{n+1}-X_n)\big].\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\big[\underbrace{\mathrm{Var}(X_{n+1})}_{\mathcal{U}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)}-\underbrace{\mathrm{Var}(X_n)}_{\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)}-\underbrace{\mathrm{Var}(X_{n+1}-X_n)}_{\mathcal{B}(\frac{1}{2})}\big]\end{aligned}$$

Il vient : $\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}-X_n)=\frac{1}{2}\cdot\big[\frac{(n+1)^2+1}{12}-\frac{n^2+1}{12}-\frac{1}{4}\big]=\frac{n-1}{12}$.

Par linéarité, on obtient aussi :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}) &= \mathrm{Cov}(X_n,X_n)+\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}-X_n)\\ &= \tfrac{n^2+1}{12}+\tfrac{n-1}{12}=\tfrac{n(n+1)}{12}.\end{aligned}$$

d) *En déduire que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(X_n,X_{n+1}-X_n)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(X_n,X_{n+1})=1$.

($\rho(X,Y)$ = coefficient de corrélation de X,Y.)

On trouve la limite : $\rho(X_n,X_{n+1}-X_n)=\frac{\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}-X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X_{n+1}-X_n)}}=\frac{\frac{n-1}{12}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{12}}\cdot\sqrt{4}}\sim\frac{\frac{n}{12}}{\frac{n}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{2}}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}$.

De même : $\rho(X_n,X_{n+1})=\frac{\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X_{n+1})}}=\frac{\frac{n(n+1)}{12}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{12}}\cdot\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{12}}}\sim\frac{\frac{n^2}{12}}{\sqrt{\frac{n^2}{12}}\cdot\sqrt{\frac{n^2}{12}}}=1$

Corrigé Ex 3 (Distribution pour l'urne de Pólya classique)

Une urne contient initialement un jeton rouge et un vert.
On pioche successivement dans l'urne selon le protocole suivant.
Après chaque pioche, on remet le jeton dans l'urne, ainsi qu'un autre de la même couleur.
Pour $n\geqslant 1$, on introduit les notations :

- **contenu de l'urne** pour la $n^{\text{ème}}$ pioche, l'urne contient :
  - X_n jetons rouges
  - Y_n jetons verts
- **couleur piochée** à la $n^{\text{ème}}$ pioche, on pioche :
  - un jeton rouge $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ R_n
  - un jeton vert $\longrightarrow$ év$^{\text{nt}}$ V_n

1. **a)** Montrer l'égalité d'événements : $[X_{n+1}=k] = \big([X_n=k-1]\cap R_n\big) \sqcup \big([X_n=k]\cap V_n\big)$.

b) *Déduire, pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, que :* $\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{n-k+1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k)$.

On applique la formule des probabilités totales dans le système complet (R_n, V_n).

Il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \mathbb{P}(R_n\cap[X_{n+1}=k]) + \mathbb{P}(V_n\cap[X_{n+1}=k])\\ &= \mathbb{P}(R_n\cap[X_n=k-1]) + \mathbb{P}(V_n\cap[X_n=k])\\ &= \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(R_n)\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(V_n)\cdot\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= \frac{k-1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{n-k+1}{n+1}\cdot\mathbb{P}(X_n=k).\end{aligned}$$

c) *En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$ que la variable X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.*

Soit H_n $\forall k\in\llbracket 1,n\rrbracket, \mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{n}$.

2. **a)** *Quelle est la probabilité de l'événement R_n ?*

Comme (R_n, V_n) forme un système complet d'événement, on a $\mathbb{P}(R_n)+\mathbb{P}(V_n)=1$.

Par symétrie du problème, on a : $\mathbb{P}(R_n)=\mathbb{P}(V_n)$.

Il vient donc $\mathbb{P}(R_n)=\mathbb{P}(V_n)=\frac{1}{2}$.

b) *En déduire que la variable $X_{n+1}-X_n$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}\big)$.*

Cette variable est-elle indépendante de X_n ?

On a bien : $X_{n+1}-X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } R_n\\ 0 & \text{si } V_n.\end{cases}$

Il s'agit bien d'une variable de Bernoulli, de paramètre la probabilité $\mathbb{P}(R_n)=\frac{1}{2}$.

c) *Déterminer, pour $n\geqslant 1$, et $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{R_n}(X_n=k)$.*

On écrit la formule de Bayes pour inverser l'ordre de conditionnement.

Il vient : $\mathbb{P}_{R_n}(X_n=k) = \frac{\mathbb{P}(X_n=k)}{\mathbb{P}(R_n)}\cdot\mathbb{P}_{[X_n=k]}(R_n) = \frac{1/n}{1/2}\cdot\frac{k}{n+1} = \frac{2k}{n(n+1)}$.

Corrigé Ex 6 (Urne d'Ehrenfest : stabilité de la distribution $\mathcal{B}\big(n,\frac{1}{2}\big)$)

On reprend le contexte de l'exercice précédent, mais avec une situation initiale différente.
Initialement, on place chacune des n puces aléatoirement dans l'un des deux compartiments.

1. **a)** *En déduire que l'on doit avoir :* $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\big(n,\frac{1}{2}\big)$

La variable X_0 modélise le nombre de puces à gauche initialement.

Dans cette expérience, les n puces au total sont réparties aléatoirement dans les deux compartiments.

On suppose implicitement que
- chaque compartiment est choisi avec proba $\frac{1}{2}$.
- il y a indépendance mutuelle pour chaque puce.

On reconnaît une situation de Bernoulli. Ainsi $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\big(n,\frac{1}{2}\big)$.

b) *Rappeler, pour $k\in\llbracket 0,n\rrbracket$, l'expression de la probabilité* $\mathbb{P}(X_0=k)$.

On écrit les probabilités de la loi binomiale : $\mathbb{P}(X_0=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$.

Ici $p=q=\frac{1}{2}$, et il vient donc : $\mathbb{P}(X_0=k)=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$.

On rappelle, pour $t \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0,n]\!]$ que :
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k+1) = 1 - \frac{k}{n}$, *(saut droite→gauche)*
- $\mathbb{P}_{[X_t=k]}(X_{t+1}=k-1) = \frac{k}{n}$. *(saut gauche→droite)*

2. *Montrer, pour $t \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, que :* $\mathbb{P}(X_{t+1}=k) = \frac{n-k+1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t=k-1) + \frac{k+1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t=k+1)$.

On applique la formule des probabilités totales en conditionnant par la direction du saut de puce précédent.

Il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+1}=k) &= \mathbb{P}(X_t=k-1, X_{t+1}=k) + \mathbb{P}(X_t=k+1, X_{t+1}=k)\\ &= \mathbb{P}_{[X_t=k-1]}(X_{t+1}=k) \cdot \mathbb{P}(X_t=k-1) + \mathbb{P}_{[X_t=k+1]}(X_{t+1}=k) \cdot \mathbb{P}(X_t=k+1)\\ &= \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t=k-1) + \frac{k+1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_t=k+1).\end{aligned}$$

3. *En déduire que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, on a aussi :* $\mathbb{P}(X_1=k) = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}$.

- **Calcul de** $\mathbb{P}(X_1=k)$ On prend $t=0$.

  On remplace $\mathbb{P}(X_t=k-1)$ $\mathbb{P}(X_t=k+1)$ par les probas de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

  Il vient :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=k) &= \frac{n-k+1}{n} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{k+1}{n} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \frac{1}{2^n}\\ &= \frac{n!}{n \cdot 2^n} \cdot \left[\frac{n-k+1}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{k+1}{(k+1)!(n-k-1)!}\right]\\ &= \frac{(n-1)!}{2^n} \cdot \left[\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!}\right]\\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right]\\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}\end{aligned}$$

- **Conclusion** La variable X_1 suit donc elle aussi la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

4. *Que peut-on en déduire pour la loi de X_t, avec $t \in \mathbb{N}$?*

Que dire de la suite $\left(\mathbb{E}[X_t]\right)_{t \in \mathbb{N}}$?

Par une récurrence immédiate, la variable X_t suit toujours la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

En particulier, on a toujours : $\mathbb{E}[X_t] = \frac{n}{2}$. *(c'est la limite trouvée à l'exercice précédent.)*