# Colles semaine 2 : Familles de vecteurs

## 1 Familles génératrices

▸ **Définition** La famille $\mathcal{F}$ est génératrice dans $E$ si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

▸ **Décompositions selon une famille génératrice**
$\mathcal{F}$ génératrice *ssi* tout $\vec{v} \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
*(la décomposition n'est pas unique en général)*

## 2 Relat$^{\text{ns}}$ de dépendance linéaire, familles liées ou libres

▸ **Relations de dépendance linéaire** C'est une **équation** de la forme

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$$

Si $\lambda_p \neq 0$, alors $\vec{u}_p = -\frac{1}{\lambda_p}\left[\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_{p-1} \cdot \vec{u}_{p-1}\right]$

▸ **Famille liée** Une famille qui vérifie une relation de dépendance linéaire non-triviale.
L'un des vecteurs se réécrit comme combinaison linéaire des autres.

▸ **Famille libre** Une famille $\mathcal{F}$ qui n'est **pas liée**
$\iff$ la seule relation de dépendance linéaire satisfaite par $\mathcal{F}$ est triviale.

▸ **Si un vecteur est combinaison linéaire des autres**
Si l'un des vecteurs *(p.ex. $\vec{u}_n$)* est combinaison linéaire des autres : $\vec{u}_n \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1})$,
soit $\vec{u}_n = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{u}_{n-1}$, alors on a la *rddl* : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n = \vec{0}$
*(la famille est alors **liée** !)*

## 3 Bases

▸ **Définition** Une famille libre et génératrice

▸ **Coordonnées** $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ base de $E$

$$\iff \forall \vec{v} \in E, \quad \exists!\, \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{coordonnées de } \vec{v}} \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{u}_1 + \ldots + x_n \cdot \vec{u}_n}_{\text{décomp}^{\text{n}} \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}}.$$

et

▸ **Bases canoniques des espaces usuels** : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.

▸ **Relat$^{\text{on}}$ de changement de bases** Pour deux bases de $E$ :
- $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *(ancienne base)*
- $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ *(nouvelle base)*

on peut exprimer les vecteurs $\vec{f}_i$ dans la base $\mathcal{B}$.

On forme alors la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ :

$$\text{Pas}\,\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & & \vec{f}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{F}_1 & \vec{F}_2 & \cdots & \vec{F}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \text{selon } \vec{e}_1 \\ \longrightarrow \text{selon } \vec{e}_2 \\ \quad\vdots \\ \longrightarrow \text{selon } \vec{e}_n \end{array}$$

▸ **Transformation des coordonnées**
Connaissant les coordonnées : $\vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + x_n \cdot \vec{e}_n}_{\text{décomp}^{\text{n}} \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}}$, on trouve $\vec{v} = \underbrace{y_1 \cdot \vec{f}_1 + \ldots + y_n \cdot \vec{f}_n}_{\text{décomp}^{\text{n}} \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}'}$

par la relation : $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\text{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}')}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{Y}} \iff \vec{Y} = P^{-1} \cdot \vec{X}$

# 4 Questions de cours

**1.** Définir : relation de dépendance linéaire, famille libre.

**2.** Définition d'une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $E$. Montrer que tout $\vec{v} \in E$ est alors comb. lin. de $\mathcal{F}$.

**3.** Définir « les coordonnées d'un vecteur dans une base ». La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

**4.** Définir : $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$. Que dire alors de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ ?

**5.** Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Qu'appelle-t-on les relations de changement de base $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$ ?