TD 8 : compléments sur l'intégration

1 Intégration sur un segment *(compléments)*

1.1 Techniques de calcul

Exercice 1 (*Série de Taylor de l'exponentielle*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer, pour $n \geqslant 1$, et $x \in \mathbb{R}$, que : $S'_n(x) = S_{n-1}(x) = S_n(x) - \frac{x^n}{n!}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = S_n(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, que $f'_n(x) = -\frac{x^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

b) Étudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \geqslant 0$, que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x$.

3. **a)** Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, que : $1 - f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$

b) En déduire pour $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!} \, \mathrm{d}t$.

c) Montrer pour $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \mathrm{e}^x$.

Conclure, pour $x \geqslant 0$, sur la convergence et la somme de la série : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 2 (*Pratique du changement de variables*)

1. **a)** Rappeler une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.

b) Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x) \, \mathrm{d}x}{x(1 + \ln^2(x))}$.

2. Calculer $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{1 + \ln(x) + \ln^5(x)}{x} \, \mathrm{d}x$ par le changement de variables $t = \ln(x)$.

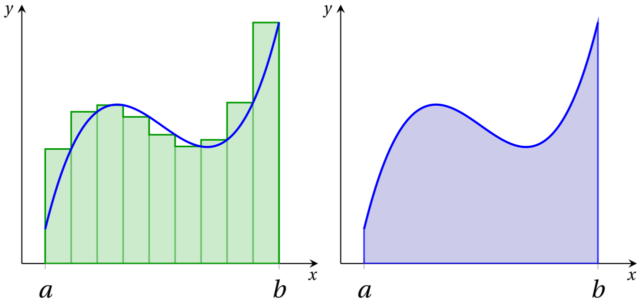
3. Par le ch$^{\text{gt}}$ de variables $t = x^2$, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$, et $L = \displaystyle\int_0^1 x^3 \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$.

1.2 Reconnaître des sommes de Riemann

Proposition 1 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \to +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Exercice 3 (*Avec des sommes de Riemann (I)*)

1. Rappeler les hypothèses pour avoir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

2. a) En déduire la limite des suites : $\displaystyle a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1, \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2.$

   b) Comparer le résultat avec les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1, \sum_{k=1}^{n} k$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2.$

Exercice 4 (*Avec des sommes de Riemann (II) : Restes harmoniques*)

1. Montrer que l'on peut écrire : $\displaystyle\forall n \geqslant 1, \quad H_{2n} - H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}.$
2. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[H_{2n} - H_n\right] = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}.$ *(On écrira : $\displaystyle H_{2n} - H_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$.)*
3. Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[H_{2n} - H_n\right] = \ln(2).$
4. Montrer de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[H_{3n} - H_n\right] = \ln(3).$
   (On écrira : $\displaystyle H_{3n} - H_n = \frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+2\frac{i}{2n}} \to \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.)
5. En calculant de deux façons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[H_{6n} - H_n\right]$, montrer que $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$.

Exercice 5 (*Avec des sommes de Riemann (III)*)

1. a) Pour $a > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a.$ *(pourquoi $a > 0$?)*

   b) En déduire un équivalent pour $n \to +\infty$, de la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^a.$

2. a) Grâce à une somme de Riemann, montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = 2\ln(2) - 1.$

   b) Montrer qu'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \ln\left[(2n)!\right] - \ln(n!) - n\ln(n).$

   c) En déduire un équivalent de la suite : $\displaystyle u_n = \ln\left(\frac{(2n)!}{n!}\right).$

2 Convergence et calcul par passage à la limite

Exercice 6 (*Intégrations par parties*)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad I_3 = \int_1^{\infty} \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t, \qquad I_4 = \int_0^{\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$I_5 = \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad I_7 = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad I_8 = \int_{-\infty}^1 (t-1)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Que donne le changement de variables $x = \ln(t)$ dans celles « à logarithme » ?

Exercice 7 (*Intégrales Eulériennes (version exponentielles)*)

On fixe $a > 0$;

1. **a)** Montrer que pour $x \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}$.

b) En déduire convergence et valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$.

2. Montrer pour $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}\,x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{n+1}{a}\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$

3. En passant à la limite $x \to +\infty$, montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{a}\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$

4. En déduire par récurrence l'expression : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{a^{n+1}}.$

Exercice 8 (*Intégrales Eulériennes (version logarithmes)*)

1. **a)** Montrer pour $x \to 0^+$, le comportement asymptotique : $\displaystyle\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

c) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

2. Montrer de même *(convergence puis valeur)* que : $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

3. Par le changement de variables $x = \mathrm{e}^{-t}$, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

4. De même, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

5. *(Pour creuser)* On pourra montrer : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln(x)}{\overset{\text{ch}^{\text{t}}\text{ var.}}{=}} (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$$\underset{\text{récu.}}{=} (-1)^n\,n!$$

Exercice 9 (*Une suite d'intégrales*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}$.

1. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}$, les variations de f_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$

2. Montrer pour $t \geqslant 0$, que : $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}$.
En déduire la convergence de l'intégrale I_n.

3. **a)** Montrer pour $n \geqslant 2$ et $t \geqslant 1$, que : $f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

4. **a)** Montrer, pour $t \geqslant 0$, que : $0 \leqslant e^{-t} - f_n(t) \leqslant t^n$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}$.

5. *Étude d'une fonction définie par des limites.*

a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$. *(On distinguera $t<1$, $t=1$, $t>1$.)*

On définit la fonction limite, pour $t \geqslant 0$, par : $h(t) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

b) Montrer que h est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

c) Étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$. Vérifier que cette intégrale est la limite de (I_n).

3 Comparaisons série-intégrale

Exercice 10 (*Comparaison séries-intégrales (principe)*)

1. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue **décroissante**.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $f(t)$ pour $t \in [n; n+1]$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire pour $n \geqslant 2$, l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$

d) En déduire que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 (*Comparaison séries-intégrales (Applications)*)

1. Application pour la fonction $f : \begin{cases}]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}. \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{cases}$

   a) Par comparaison série-intégrale *(Ex. 10)* montrer : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$

   b) En déduire la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *(série harmonique)*.

2. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}$, avec $\alpha > 0$, pour $\alpha \neq 1$,

   a) Par comparaison série-intégrale montrer : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \underbrace{\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}}_{=\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}+\text{cst.}}.$

   b) En déduire le critère de convergence pour la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$. *(critère de Riemann)*

Exercice 12 (*Un équivalent de* $\ln(n!)$)

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $\ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$.

2. Par une comparaison série-intégrale *(Attention au sens de variations!)*, montrer pour une certaine fonction F à expliciter :

$$\forall n \geqslant 2, \quad F(n) - F(1) \leqslant \ln(n!) \leqslant F(n+1) - F(2).$$

3. En déduire pour $n \to \infty$, l'équivalent $\ln(n!) \sim n \cdot \ln(n)$.

4 Autour des fonctions densité

Exercice 13 (*Une densité utile en statistique*)

1. Soit $\theta > 0$ et $k \geqslant 0$ un entier.
   Montrer que la fonction $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit une densité : $f_\theta : x \mapsto \begin{cases} \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\, x^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité.

   a) Calculer la fonction de répartition de X. *(Quel est le rapport avec* $[0\,;\theta]$ *?)*

   b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 14 (*Une densité pour s'entraîner*)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x} & \text{pour } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{5}\ln^2(x) & \text{pour } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ définit une densité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (*Gaussiennes*)

1. **a)** Montrer pour $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \leqslant \exp(-x)$.

   b) En déduire la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

2. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$. Rappeler sa valeur *(c'est du cours)*.

3. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$. Par changement de variables affine, en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$.

4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$?

Exercice 16 (*Moments de la loi exponentielle*)

Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Rappeler l'expression de la densité f de X.

2. Montrer que X admet un moment à tout ordre et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(X) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.
   (on utilisera l'Exercice 7)

3. Retrouver la valeur de la variance : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 17 (*La loi d'Erlang*)

Soit $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

On définit une fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f_n : x \mapsto \begin{cases} \lambda^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n!} \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f_n est une fonction densité.
   (On utilisera le résultat de l'Exercice 7)

2. Quelle densité reconnaît-on pour $n = 0$?

3. Pour quelle valeur de x la densité $f_n(x)$ est-elle maximisée ? *(le **mode** de la distribution)*

Soit X une variable aléatoire admettant f_n pour densité. *($X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda, n)$: loi d'Erlang)*

4. Montrer que la variable X admet une espérance et que : $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{\lambda}$.

5. Montrer que la variable X admet moment d'ordre 2 et que : $\mathbb{E}[X^2] = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}$.

6. En déduire que X admet une variance et que $\text{Var}(X) = \frac{n+1}{\lambda^2}$.