

Colles semaine 5 : des séries aux *v.a.* discrètes

## 1 Séries géométriques et dérivées

- **Sommation géométrique**  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 1$ .

★) *Démonstration* :

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ qS_n = \quad q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1} \end{array}$$

- **Formule générale** pour  $|raison| < 1$ , on a  $\sum \text{géom.} = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme}}{1 - \text{raison}}$

- **Séries géométriques dérivées**

★) *Calcul de la somme partielle* : pour  $q \neq 1$  :

$$\sum_{k=0}^n kq^{k-1} = \left( \sum_{k=0}^n q^k \right)' = \left( \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2} + o(1)_{n \rightarrow \infty}$$

★) *Formulaires des sommes* : pour  $|q| < 1$  (on peut aussi partir de  $n = 0$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-1} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

★) *Application* : Calcul de sommes  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (an^2 + bn + c)q^n$  pour  $n_0 = 0, 1, 2$   
(on décompose le trinôme en termes de  $n(n-1)$ ,  $n$  et 1)

## 2 Formulaire des variables aléatoires discrètes

(L'exemple-« fil rouge » est la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ , pour laquelle **tout se calcule explicitement**)

- **Distribution de probabilités discrète**

Une suite  $(p_n)_{n \in S}$  avec ►  $\forall n \in S, p_n \geq 0$  (*positivité*)

►  $\sum_{n \in S} p_n$  converge (*si  $S$  infini*) et vaut 1.

Une variable aléatoire  $X$  suit cette loi si  $X(\Omega) = S$  (*support de  $X$* ) et  $\forall n \in S, \mathbb{P}(X = n) = p_n$

- **Événements  $X$ -mesurables** Pour  $A \subseteq S$ , on a  $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n \in A} \mathbb{P}(X = n)$

(*sommes des probabilités des événements élémentaires **favorables***)

- **Fonction de répartition**  $\forall N \in S, F_X(N) = \mathbb{P}(X \leq N) = \sum_{\substack{n \in S \\ n \leq N}} \mathbb{P}(X = n)$

- **Espérance** C'est la **moyenne** des valeurs prises par la variable aléatoire discrète  $X$ ,  
(*moyenne*) **pondérée** par les probabilités (**coefficients** de la moyenne, ou **poids relatifs**)

$$\text{soit } \mathbb{E}[X] = \sum_{n \in S} np_n \quad (\text{sous réserve de } \textbf{convergence absolue})$$

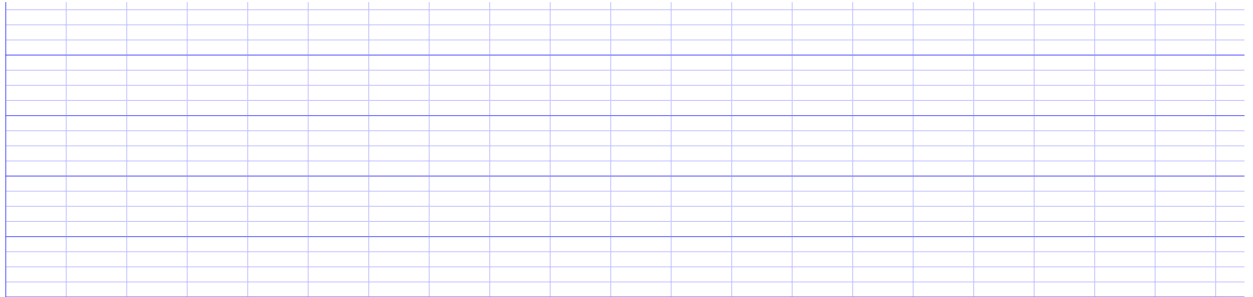
- **Transfert pour l'espérance** (*sous réserve de cv. absolue*)  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{n \in S} \varphi(n)p_n$ ,  
notamment  $\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{n \in S} n(n-1)p_n$ .

- **Variance** (*un bon indicateur de **dispersion***)

La formule de Koenig-Huygens (*orthographe !*)  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$   
et l'utile variante  $= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$ .

### 3 Les questions de cours

1. Énoncer et retrouver la formule de sommation d'une suite géométrique



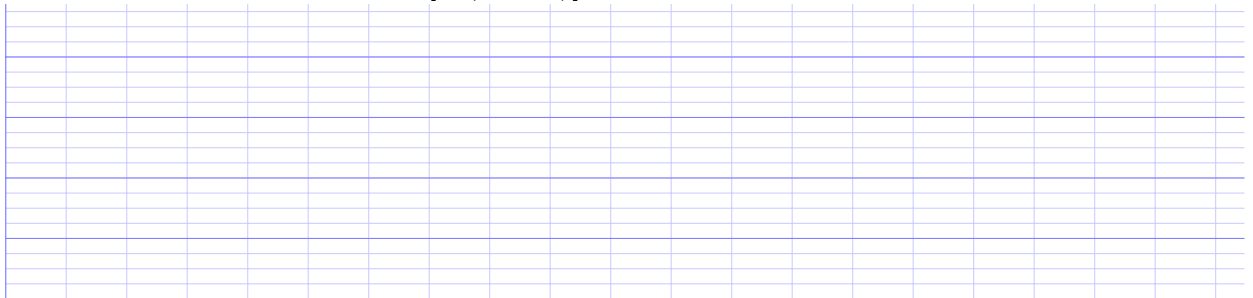
2. Les séries géométriques-et-dérivées



3. Calculer la fonction de répartition de  $\mathcal{G}(p)$



4. La formule de transfert pour  $\mathbb{E}[X(X-1)]$



5. La formule de Koenig-Huygens + orthographe + la variante avec  $\mathbb{E}[X(X-1)]$

