Remise en route dérivation/intégration

(d'après Ecricome ECT *2014)*

Soient f, g, h fonctions définies pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$, $g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right)$, $h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Soit $x \geqslant 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que : $h(x) = -f'(x)$ et $f(x) = g'(x)$.

Soit $A \geqslant 0$.

2. Justifier que : $\displaystyle\int_0^A h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - f(A)$. Que vaut $\displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$?

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^A x.h(x)\,\mathrm{d}x = -Af(A) + g(A) - g(0)$.

4. **a)** La fonction h est-elle continue en 0 ? *(Une réponse argumentée est attendue.)*

b) Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

5. Montrer que Z possède une espérance et donner la valeur de $\mathbb{E}[Z]$.

Bonus

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

7. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(Z \geqslant \ln(2))$, $\mathbb{P}(\ln(2) \leqslant Z \leqslant \ln(8))$ et $\mathbb{P}_{[Z\geqslant\ln(2)]}(Z \leqslant \ln(8))$

(On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.)

8. Déterminer la médiane de Z. *(c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $H(x) = \frac{1}{2}$)*