1 Recherche de valeurs propres

- **Spectre d'une matrice carrée A :** l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}(A)$, des valeurs propres de A

	$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$	*($\Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de A)*
ssi	$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$	*($E_\lambda(A)$ sous-espace propre associé)*
ssi	$A - \lambda I_n$ n'est **pas** inversible	*($\Leftrightarrow A$ - λI_n a « du noyau »)*

- **Vérifier si λ *(donnée)* $\in \mathrm{Sp}(A)$** : *(pas difficile)* pivot de Gauss *(résolution de $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$)*

$\longrightarrow$ Comment réduire le champ d'étude à un petit nombre de λ ?

1.1 Approche directe *(seulement dans quelques cas)*

Matrice 2×2

La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{bmatrix}$ a « du noyau » *ssi* ses 2 vecteurs colonnes sont colinéaires *ssi* *(règle de trois)* $(a-\lambda)(d-\lambda) = bc$

Matrice triangulaire *(T **triangulaire supérieure** si ts ses coefficients **sous-diag** sont **nuls.**)*

- **Critère d'inversibilité des matrices triangulaires**
  T inversible *ssi* tous ses coefficients diagonaux sont $\neq 0$.
- **Valeurs propres d'une matrice triangulaire** *(Elles sont « déjà » sur sa diagonale)*
  - Les **valeurs propres** d'une matrice triangulaire **sont** ses coefficients diagonaux.
  - Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble de** ses coefficients diagonaux

Pivot de Gauss à paramètres ***(Approche déconseillée en général !)***

On écrit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ pas inversible *(puis pivot de Gauss avec discussion selon λ)*

Exemple d'application *(à savoir retrouver sur des exemples par pivot de Gauss à paramètre)*

Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ *(A : matrice compagnon)* Les **valeurs propres** de A sont les **racines du polynôme** $R(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

1.2 Avec un polynôme annulateur *(méthode plus générale)*

- **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.
- **Exemples de recherches de polynômes annulateurs** *(et application au calcul de A^{-1})*
- **Condition nécessaire** Si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.
  (En testant toutes les racines λ de P, on est sûr de ne manquer aucune vp *de A.)*

2 Pratique de la diagonalisation

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si l'on peut écrire $A = P\,D\,P^{-1}$
avec *(c'est une formule de changement de base)*

- D **diagonale** : « la matrice des **valeurs** propres » *(matrice dans une nouvelle base)*
- P **inversible** : « la matrice des **vecteurs** propres » *(matrice de passage)*

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable *ssi***
la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ vaut n