Td 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (*Commutant d'une matrice*) `:commutantTD1:`

Soient les matrices : $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

On appelle **commutant** de D l'ensemble : $\mathcal{C}_D = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } D \cdot M = M \cdot D \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_D$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour une matrice quelconque $M = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$, résoudre l'équation : $D \cdot M - M \cdot D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
3. En déduire que, pour D_1 et D_2 matrices bien choisies, on peut écrire : $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(D_1, D_2)$.

On s'intéresse maintenant au commutant de A, soit : $\mathcal{C}_A = \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tels que } A \cdot N = N \cdot A\}$.

4. Comparer $P \cdot D$ et $A \cdot P$.
   En déduire la valeur de $P \cdot D \cdot P^{-1}$. *(Naturellement, on aura **d'abord** vérifié que P est inversible!)*
5. En déduire la condition nécessaire et suffisante : $\left[P \cdot M \cdot P^{-1} \in \mathcal{C}_A \iff M \in \mathcal{C}_D \right]$
6. Montrer que le sous-espace $\mathcal{C}_A$ s'écrit aussi sous la forme : $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(A_1, A_2)$.
   (avec A_1, A_2 deux matrices à préciser.)

Exercice 2 (*Une équation différentielle linéaire*) `:eqDifLin:`

Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
On s'intéresse à l'ensemble : $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \text{ telles que } f'(x) = f(x)\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour quelle valeur de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ vérifie-t-elle $e_\lambda \in \mathcal{S}$?
   En déduire un sous-espace vectoriel non-nul de $\mathcal{S}$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}$. On note $g : x \mapsto f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Que peut-on alors dire de la fonction g?
   Conclure sur l'expression du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$.

Exercice 3 (*Espace de suites linéaires récurrentes*) `:suitLinRec:`

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de réels.
On note : $F = \{(u_n) \in E \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. **Équation caractéristique** Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique. *(avec $q \in \mathbb{R}$)*
   a) Montrer que $g \in F$ *ssi* q est solution d'une certaine équation trinomiale du second degré à préciser.
   b) En déduire quelles sont les suites géométriques contenues dans F.
3. Soit $(u_n) \in F$ telle que $u_0 = u_1 = 0$. Montrer qu'alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 0$.
4. Montrer qu'il existe une unique suite $(f_n) \in F$ telle que $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$.
   Donner son expression comme une combinaison linéaire de deux suites géométriques.

2 Exemples d'applications linéaires

Exercice 4 (*Une application linéaire entre des espaces de matrices*) :sevMatAplin:

Soient les ensembles de matrices
- $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a = d \right\}$, et
- $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a+b+c+d = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Qu'en est-il de G?

On considère la matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. **a)** Montrer que si $M \in F$, alors $A \cdot M \in G$.

b) Montrer que l'application $f : M \mapsto A \cdot M$ définit une application linéaire $f : F \to G$.

3. L'application f est-elle bijective? Si non, déterminer son noyau et son image.

Exercice 5 (*Recherche d'une application linéaire*) :rechMatAplin:

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A : \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto A \cdot M, \end{cases}$ où E désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application φ_A définit bien un endomorphisme de E.

Soient F et G les ensembles définis par :
- $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a = d \right\}$, et
- $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a + d = 0 \right\}$.

On cherche les matrices A qui vérifient la propriété $(\star)$: $\left[\forall M \in F, \quad \varphi_A(M) \in G\right]$.

2. Justifier que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

3. Montrer que l'ensemble H des matrices vérifiant la propriété $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. En considérant $\varphi_A(M)$ avec $M \in F$ judicieusement choisie, montrer que $H \subset G$.

5. Montrer de même que si $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in H$, alors, on a : $\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \in G$ et $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in G$.

6. Conclure : pour une certaine matrice D non-nulle que l'on précisera, on a : $H = \mathrm{Vect}(D)$.

Exercice 6 (*Un endomorphisme matriciel* (inspiré de EmLyon 2014)) :endomMat2014Mini:

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

On définit : $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1. **a)** Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

b) Établir que $\mathcal{F}$ est stable par multiplication, c'est à dire : $\forall (M,N) \in \mathcal{F}^2, \quad M \cdot N \in \mathcal{F}$.

c) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{F}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{F}$.

Soit la matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pour toute matrice M de $\mathcal{F}$, on note $f(M) = TMT$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

3. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{F}$.

4. **a)** Montrer que $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$. *(on dit que $P(X) = (X-1)^2$ est un **polynôme annulateur** de f.)*

b) En déduire que l'automorphisme f a pour inverse est $f^{-1} = 2\,\mathrm{Id} - f$.

c) Calculer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. *(ce noyau est un **sous-espace propre** de f.)*

3 Manipulations formelles *(polynômes d'endomorphisme)*

On a parfois pu rencontrer des exercices du type des deux suivants, même s'ils ne sont pas très typiques des épreuves ECE

Exercice 7 (*Manipulation formelle d'endomorphismes : projections*) `:projectionsFormelles:`

Soit E un espace vectoriel. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Soit $p \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $p \circ p = p$.

1. Montrer que l'endomorphisme q défini par : $\forall x \in E, \quad q(x) = x - p(x)$ vérifie aussi $q^2 = q$.
2. Montrer que $\forall x \in E$, on a : $\quad p(q(x)) = q(p(x)) = 0$. En déduire que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
3. Réciproquement, montrer que si $q(x) = 0$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$.
   En déduire l'égalité des sous-espaces vectoriels : $\quad \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.
4. Montrer que si $p(x) = q(x)$, alors $x = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 8 (*Manipulation formelle d'endomorphismes : involution*) `:involutionsFormelles:`

Soit E un espace vectoriel. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Soit $s \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.
On note p et q les endomorphismes définis par : $\forall x \in E$,
- $p(x) = \frac{1}{2}(x + s(x))$,
- $q(x) = \frac{1}{2}(x - s(x))$.

1. Reconnaître les endomorphismes $p + q$ et $p - q$, ainsi que p^2 et q^2.
2. Calculer les compositions : $p \circ q$, $s \circ p$.
3. Montrer que la transposition $\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par : $\tau(M) = {}^tM$ vérifie $\tau^2 = \mathrm{Id}$.
   Quels sont les endomorphismes p et q associés ?
4. Montrer que l'endomorphisme $r \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[X])$ défini par : $r(P(X)) = P(-X)$ vérifie $r^2 = \mathrm{Id}$.
   Quels sont les endomorphismes p et q associés ?

4 Applications linéaires

Exercice 9 (*Crochet de deux endomorphismes sur les polynômes*) `:crochetPoly:`

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, et d, m les applications $E \to E$ définies pour $P \in E$, par :
- $d(P) = P'$,
- $m(P) = X \cdot P$.

1. **a)** Montrer que d, m sont deux endomorphismes de E.
   b) Déterminer le noyau de d et celui de m.
   c) Les applications d et m sont-elles surjectives ?
2. On note : $\quad f = d \circ m \quad$ et $\quad g = m \circ d$.
   a) Montrer que pour $P \in E$, on a : $f(P) = X \cdot P'(X) + P(X)$.
   b) En déduire une expression simple de l'endomorphisme $\quad d \circ m - m \circ d$.

Exercice 10 (*Une équation différentielle linéaire*) :eqDifLinApplin:

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables « autant de fois qu'on veut ».
Pour $f \in E$, on note $\varphi_f : x \mapsto f'(x) + f(x)$, et on considère φ l'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$.

1. Montrer que l'application φ définit un endomorphisme de E.
2. Pour quelle valeur de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ vérifie-t-elle $\varphi(e_\lambda) = 0$? En déduire un sous-espace vectoriel non-nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On note $g : x \mapsto f(x) \cdot \mathrm{e}^x$. Que peut-on alors dire de la fonction g ? Conclure sur l'expression du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 11 (*Dérivation et primivation*) :crochetDerPrim:

Dans l'espace vectoriel des fonctions $E = \mathcal{C}^\infty$, on considère les deux applications suivantes : $\delta, \sigma : E \to E$ définies pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ par :

- $\delta(f) = f'$,
- $\sigma(f) = F$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que les applications δ et σ sont des endomorphismes de E.
2. Calculer les composées $\delta \circ \sigma$ et $\sigma \circ \delta$.
3. Soit $f \in E$. Que peut-on dire de la fonction $g = \delta \circ \sigma(f) - \sigma \circ \delta(f)$?

Exercice 12 (*Décalage et sommes partielles*) :decalageSommesPartielles:

Dans l'espace vectoriel des suites réelles $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$, on considère les deux applications suivantes : $\delta, \sigma : E \to E$ définies pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ par :

- $\delta(u) = v$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$.
- $\sigma(u) = w$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que les applications δ et σ sont des endomorphismes de E.
2. Montrer que, pour $(u_n) \in E$, la suite (x_n) définie par : $\quad x = (\delta \circ \sigma - \sigma \circ \delta)(u) \quad$ est constante.
3. Calculer la composée $\delta \circ \sigma$ et en déduire la composée $\sigma \circ \delta$.

Exercice 13 (*Autre point de vue sur les suites linéaires récurrentes*) :suitLinRecAutrePdV:

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de réels. On s'intéresse à l'application $\varphi : E \to E$ définie pour $(u_n) \in E$, par : $\varphi((u_n)) = (v_n)$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} + 6u_n$.

1. Montrer que l'application φ est un endomorphisme de E.

On note $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

2. Pour $q \in \mathbb{R}$, calculer la suite $\varphi((q^n)_{n\in\mathbb{N}})$. *(on l'écrira comme une suite géométrique.)*
Pour quelles valeurs de q a-t-on $(q^n) \in F$?

Notons δ l'endomorphisme de E défini par $\delta((u_n)) = (v_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1}$.
On considère les deux endomorphismes ψ_1, ψ_2 définis par : $\psi_1 = \delta - 3\cdot\mathrm{Id}$ et $\psi_2 = \delta + 2\cdot\mathrm{Id}$.

3. a) Expliciter l'image d'une suite (u_n) par les endomorphismes ψ_1 et ψ_2.

b) Déterminer le noyau de ψ_1 et ψ_2.

4. a) Montrer que l'on a $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$.

b) En déduire que $\forall u \in E$, on a l'équivalence : $u \in F \Longleftrightarrow \psi_2(u) \in \mathrm{Ker}(\psi_1)$.

c) Résoudre l'équation $\psi_2(u) \in \mathrm{Ker}(\psi_1)$.

5. En déduire que le sous-espace F est engendré par deux suites géométriques.

5 Application linéaires d'ordre supérieur *(impliquant elles-mêmes des app.lin.)*

Exercice 14 (*Deux applications linéaires d'ordre supérieur sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*) :endomMultMat:

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 2×2.
Notons $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. *(L'ensemble $\mathrm{End}(E)$ est un espace vectoriel.)*
Pour toute matrice $A \in E$, on note $m_A : \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto A \cdot M. \end{cases}$
On considère alors l'application $m : \begin{cases} E \to \mathrm{End}(E) \\ A \mapsto m_A. \end{cases}$

1. Montrer que l'application m est linéaire.

2. On note $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E$ la matrice identité.
Déterminer l'endomorphisme $m(I_2)$.

Pour $\varphi \in \mathrm{End}(E)$ *(un endomorphisme)*, et toujours avec $I_2 \in E$, on note : $u_\varphi = \varphi(I_2)$.
On considère l'application $u : \begin{cases} \mathrm{End}(E) \to E \\ \varphi \mapsto u_\varphi = \varphi(I_2) \end{cases}$

3. Montrer que l'application u est linéaire.
Déterminer la matrice $u(\mathrm{Id}_E)$.

4. Pour $\tau \in \mathrm{End}(E)$ endomorphisme de transposition, calculer $u(\tau)$. *(où $\forall M \in E$, $\tau(M) = {}^tM$.)*

5. Montrer l'identité sur la composée : $u \circ m = \mathrm{Id}_E$.

6. En déduire que u est surjective, et que m est injective.

7. L'application u est-elle injective ? L'application m est-elle surjective ?

Exercice 15 (*Deux applications linéaires d'ordre supérieur sur* $\mathbb{R}[X]$) :endomMultPol:

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes.
Pour tout polynôme $P \in E$, on note $m_P : \begin{cases} E \to E \\ Q(X) \mapsto P(X) \cdot Q(X). \end{cases}$
On considère alors l'application $m : \begin{cases} E \to \mathrm{End}(E) \\ P \mapsto m_P. \end{cases}$

1. Montrer que l'application m est linéaire.
2. On note $1 \in \mathbb{R}[X] = E$ le polynôme constant $\equiv 1$.
   Déterminer l'endomorphisme $m(1)$.

Pour $\varphi \in \mathrm{End}(E)$ *(un endomorphisme)*, et toujours avec $1 \in E$, on note : $u_\varphi = \varphi(1)$.
On considère l'application $u : \begin{cases} \mathrm{End}(E) \to E \\ \varphi \mapsto u_\varphi = \varphi(1) \end{cases}$

3. Montrer que l'application u est linéaire.
   Déterminer le polynôme $u(\mathrm{Id}_E)$.
4. Calculer $u(d)$, pour $d \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme de dérivation. *(c-à-d : $\forall P \in E,\quad d(P) = P'$.)*
5. Montrer l'identité sur la composée : $u \circ m = \mathrm{Id}_E$.
6. En déduire que u est surjective, et que m est injective.
7. L'application u est-elle injective ? L'application m est-elle surjective ?

6 Corrections

Corrigé Ex ?? (Un sous-espace vectoriel matriciel)

:sevCorrec:

Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. On s'intéresse aux matrices M vérifiant l'équation $(\star)$: $\quad A \cdot M = M \cdot A$.
On considère l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation $(\star)$.

1. *Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

- **Vérifions que l'ensemble est non-vide :** $\quad \mathcal{C}_A \neq \varnothing$
  La matrice nulle $0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est clairement solution de l'équation $(\star)$.
  Ainsi $0 \in \mathcal{C}_A$, donc $\mathcal{C}_A \neq \varnothing$.
- **Stabilité par combinaison linéaire** Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_A$.
  On a donc $A \cdot M_1 = M_1 \cdot A$ *(idem pour M_2)*.
  Vérifions que la matrice $M' = \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{C}_A$, c'est-à-dire $A \cdot M' = M' \cdot A$.
  On développe : $\quad A \cdot M' = A \cdot (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) = \lambda_1 \cdot A \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot A \cdot M_2$
  $= \lambda_1 \cdot M_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot M_2 \cdot A \quad$ *(car M_1,M_2 vérifient $(\star)$.)*
  En regroupant, on a vérifié : $\quad A \cdot M' = M' \cdot A$, dont $M' = \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{C}_A$.
  Ainsi $\mathcal{C}_A$ est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi $\mathcal{C}_A$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. *À quelle condition sur les coef^{ts} a,b,c,$d \in \mathbb{R}$, la matrice $M = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ est-elle solution de $(\star)$?*

On calcule :
- $A \cdot M = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$
- $M \cdot A = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right]$

Ainsi l'équation $(\star)$ est vérifiée *ssi* $\left[\begin{smallmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right]$ soit : $\begin{cases} b = 0 & a = d\,. \\ 0 = 0 & b = 0 \end{cases}$

3. *Grâce aux équations trouvées en **2.**, montrer que toute $M \in F$ s'écrit $M = a \cdot E_1 + c \cdot E_2$.*

On résout les équations et on substitue : $M = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$.
Ainsi la matrice M est solution de $(\star)$ *ssi* elle s'écrit : $\quad M = a \cdot I_2 + c \cdot A$.

4. *En déduire que le sous-espace vectoriel F s'écrit comme $F = \mathrm{Vect}(E_1, E_2)$.*

Les solutions de l'équation $(\star)$ sont les combinaisons linéaires de I_2 et A.
On a ainsi : $\quad F = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Corrigé Ex 5 (Recherche d'une application linéaire)

:rechMatAplin:

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\quad \varphi_A : \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto A \cdot M, \end{cases} \quad$ où E désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que l'application φ_A définit bien un endomorphisme de E.*

- **Stabilité** Si $M \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on a bien $\varphi_A(M) = A \cdot M \in E$.
- **Linéarité** Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application φ_A est bien linéaire.

Soient F et G les ensembles définis par :
- $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a = d \right\}$, et
- $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{où } a + d = 0 \right\}$.

On cherche les matrices A qui vérifient la propriété $(\star)$: $\left[\forall M \in F, \quad \varphi_A(M) \in G\right]$.

2. *Justifier que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Les applications suivantes sont linéaires : $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mapsto a - d \end{cases}$, $\quad g : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mapsto a + d \end{cases}$

Les ensembles $F = \text{Ker}(f)$ et $G = \text{Ker}(g)$ sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On peut aussi remarquer que :
- $F = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ et
- $G = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

3. *Montrer que l'ensemble H des matrices vérifiant la propriété $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

- **l'ensemble H est non-vide** On montre que $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$.
  Si $A = 0$, alors l'application φ_A est nulle : $\forall M \in E$, on a : $\quad \varphi_A(M) = 0$.
  En particulier, si $M \in F$, alors $\varphi_A(M) = 0 \in G$, donc $A = 0 \in H$.
- **Stabilité par combinaison linéaire** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in H$. Vérifions que $\lambda A + \mu B \in H$.
  Soit $M \in F$. Comme $A, B \in H$, on a : $\quad \varphi_A(M) = A \cdot M \in G$, et $\varphi_B(M) = B \cdot M \in G$.
  Ainsi, comme G est un *s-e.v.*, on a aussi : $\quad \lambda A \cdot M + \mu B \cdot M = \underbrace{(\lambda A + \mu B) \cdot M}_{= \varphi_{\lambda A + \mu B}(M)} \in G$

  (Ceci étant vrai $\forall M \in F$,) Ainsi : $\quad \lambda A + \mu B \in H$.

L'ensemble H est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

4. *En considérant $\varphi_A(M)$ avec $M \in F$ judicieusement choisie, montrer que $H \subset G$.*

On a $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in F$.

Ainsi, si $A \in H$, on a en particulier $\varphi_A(I_2) \in G$, c'est-à-dire : $\quad A \in G$.

On a donc bien : $\quad H \subset G$.

5. *Montrer de même que si $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in H$, alors, on a : $\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \in G$ et $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in G$.*

Même principe, mais pour les deux autres matrices de la base trouvée de F

Si $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in F$, alors :
- $A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \in G$
- $A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in G$

6. *Conclure : pour une certaine matrice D non-nulle que l'on précisera, on a : $\quad H = \text{Vect}(D)$.*

Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in H$.

On a d'après les questions précédentes : $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in G$, $\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \in G$ et $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in G$

D'après l'équation $a + d = 0$ de G pour ces trois matrices, on trouve les relations : $\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Ainsi la matrice A doit s'écrire : $\quad A = \alpha \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{= D}$ soit : $\quad A \in \text{Vect}(D)$.

On vérifie que la réciproque est vraie : $\quad D \in H$.

Ainsi, on a bien : $\quad H = \text{Vect}(D)$.

Corrigé Ex 7 (Manipulation formelle d'endomorphismes : projections)

:projectionsFormelles:

Soit E un espace vectoriel. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Soit $p \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $p \circ p = p$.

1. *Montrer que l'endomorphisme q défini par : $\forall x \in E, \quad q(x) = x - p(x)$ vérifie aussi $q^2 = q$.*

Soit $x \in E$. On calcule : $\quad q^2(x) = q(q(x)) = q(x) - p(q(x))$
$$= x - p(x) + p(p(x)) - p(x)$$
Or, on a $p \circ p = p$. Il reste donc : $\quad q^2(x) = x - p(x) = q(x)$.
On a donc bien obtenu : $\quad q^2 = q$.

Remarque : par la formule du binôme de Newton

> Les endomorphismes Id et p commutant, on peut développer par la formule du binôme.
> Il vient : $\quad q^2 = (\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2$.
> Comme $p^2 = p$, on trouve bien : $\quad q^2 = \mathrm{Id} - p = q$.

2. *Montrer que $\forall x \in E$, on a : $\quad p(q(x)) = q(p(x)) = 0$. $\quad$ En déduire que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.*

- **Calcul de la composée $p \circ q$** On développe : $\quad p \circ q = p \circ (\mathrm{Id} - p) = p - p^2$.
  Or $p^2 = p$, donc il reste : $\quad p \circ q = p - p = 0$.
- **Calcul de la composée $q \circ p$** De même, on trouve : $\quad q \circ p = (\mathrm{Id} - p) \circ p = p - p^2 = 0$.
- **Inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$** Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que : $\quad y = p(x)$.
  Par le résultat précédent, on a donc : $\quad q(y) = q(p(x)) = 0$. $\quad$ Ainsi : $\quad y \in \mathrm{Ker}(q)$.
  On a ainsi vérifié l'inclusion : $\quad \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

3. *Réciproquement, montrer que si $q(x) = 0$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$.*
En déduire l'égalité des sous-espaces vectoriels : $\quad \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.

Soit x tel que $q(x) = 0$. On développe, et il vient : $\quad x - p(x) = 0$.
Ainsi $x = p(x)$. La formule est donc établie pour $x' = x$.

4. *Montrer que si $p(x) = q(x)$, alors $x = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{\vec{0}\}$.*

- **Nullité de x** Soit $x \in E$. On a $x = p(x) + q(x)$.
  Pour montrer $x = 0$, il suffit donc de montrer que : $\quad p(x) = q(x) = 0$.
  Supposons que $p(x) = q(x)$. Alors : $\quad p(p(x)) = p(q(x))$.
  On développe par les relations connues. Il reste : $\quad p(x) = 0$.
  Il vient donc bien $p(x) = q(x) = 0$, d'où $x = 0$.
- **Calcul de $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$**
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. On a donc :
  - $x \in \mathrm{Ker}(p)$, donc $p(x) = 0$,
  - $x \in \mathrm{Ker}(q)$, donc $q(x) = 0$.

  Comme $p(x) = q(x)$, le résultat précédent donne : $\quad x = 0$.
  Ainsi, on a bien montré : $\quad \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{\vec{0}\}$.

Corrigé Ex 8 (Manipulation formelle d'endomorphismes : involution)

:involutionsFormelles:

Soit E un espace vectoriel. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Soit $s \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.
On note p et q les endomorphismes définis par : $\forall x \in E$,

- $p(x) = \frac{1}{2}(x + s(x))$,
- $q(x) = \frac{1}{2}(x - s(x))$.

1. *Reconnaître les endomorphismes $p+q$ et $p-q$, ainsi que p^2 et q^2.*

- **Écriture de p,q** On a : $p = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+s)$, et $q = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}-s)$.
- **Détermination de $p+q, p-q$** Ainsi : $p+q = \mathrm{Id}$, et $p-q = s$.
- **Détermination de p^2 et q^2** Les endomorphismes Id et s commutent.
  On peut donc développer par la formule du binôme.
  Il vient : $p^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+s)\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot [\mathrm{Id}^2 + 2s + s^2] = \mathrm{Id}\,\frac{1}{4} \cdot [\mathrm{Id} + 2s + \mathrm{Id}] = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+s)$.
  Ainsi, on trouve : $p^2 = p$.
  De même, on obtient : $q^2 = q$.

2. *Calculer les compositions : $p \circ q$, $s \circ p$.*

On développe : $p \circ q = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+s) \circ \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}-s) = \frac{1}{4} \cdot \left(\mathrm{Id}^2 - s^2\right) = 0$.
On développe : $s \circ p = s \circ \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+s) = \frac{1}{2} \cdot (s + s^2) = \frac{1}{2} \cdot (s + \mathrm{Id}) = p$.
On trouve de même : $s \circ q = -q$.

3. *Montrer que la transposition $\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par : $\tau(M) = {}^tM$ vérifie $\tau^2 = \mathrm{Id}$.*
Quels sont les endomorphismes p et q associés ?

- **Vérification de $\tau^2 = \mathrm{Id}$** Soit $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
  La transposée s'écrit : $\tau(M) = {}^tM = (m_{j,i})$.
  Si on transpose deux fois, on retrouve M : : $\tau(\tau(M)) = {}^t\!\left({}^tM\right) = (m_{i,j}) = M$.
  Ainsi, on a bien : $\tau^2 = \mathrm{Id}$.
- **Interprétation de p, q.** On pose :
  - $p = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+\tau)$
  - $q = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}-\tau)$

  Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc :
  - $p(M) = \frac{1}{2} \cdot (M + {}^tM)$
    Cette matrice est symétrique : ${}^tp(M) = p(M)$.
  - $q(M) = \frac{1}{2} \cdot (M - {}^tM)$
    Elle est antisymétrique : ${}^tq(M) = -q(M)$.

  On a $M = p(M) + q(M)$. On dit que :
  - $p(M)$ est la **partie symétrique** de M,
  - $q(M)$ est sa **partie antisymétrique**.

4. *Montrer que l'endomorphisme $r \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[X])$ défini par : $r(P(X)) = P(-X)$ vérifie $r^2 = \mathrm{Id}$.*
Quels sont les endomorphismes p et q associés ?

- **Vérification de $r^2 = \mathrm{Id}$** On a bien $r^2(P) = r(r(P)) = r(P(-X)) = P(X)$.
- **Interprétation de p, q.** On pose :
  - $p = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}+r)$
  - $q = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}-r)$

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a donc :
- $p(P) = \frac{1}{2} \cdot (P(X) + P(-X))$
  Ce polynôme est pair : $p(P)(-X) = p(P)(X)$.
- $q(P) = \frac{1}{2} \cdot (P(X) - P(-X))$
  Ce polynôme est impair : $q(P)(-X) = -q(P)(X)$.

On a $\quad P = p(P) + q(P)$. On dit que :
- $p(P)$ est la **partie paire** de P,
- $q(P)$ est sa **partie impaire**.

Corrigé Ex 2 (Une équation différentielle linéaire)

:eqDifLin:

Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
On s'intéresse à l'ensemble : $\quad \mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),$ telles que $f'(x) = f(x)\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. *Pour quelle valeur de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ vérifie-t-elle $e_\lambda \in \mathcal{S}$?*
   En déduire un sous-espace vectoriel non-nul de $\mathcal{S}$.
   - **Recherche des valeurs de λ** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad e_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$
     $$e'_\lambda(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$
     Ainsi, on a l'équivalence : $\quad e_\lambda \in \mathcal{S} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \iff 1 = \lambda$.
   - **Sous-espace de $\mathcal{S}$** Comme on a $e_1 \in \mathcal{S}$, on a le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1) \subset \mathcal{S}$.
3. *Soit $f \in \mathcal{S}$. On note $g : x \mapsto f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Que peut-on alors dire de la fonction g ?*
   Conclure sur l'expression du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$.
   - **Étude de g** On dérive : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
     $$g'(x) = f'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} = \underbrace{(f'(x) - f(x))}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{S}} \cdot \mathrm{e}^{-x}$$
     Ainsi, pour $f \in \mathcal{S}$, on a $g' = 0$, donc $g = \mathrm{cst} = g(0) = f(0)$.
     On trouve donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot f(x) = f(0)$, donc $f(x) = f(0) \cdot \mathrm{e}^{x}$.
     On a donc montré que si $f \in \mathcal{S}$, alors $f = \lambda \cdot e_1$ *(avec $\lambda = f(0)$)*, soit $f \in \mathrm{Vect}(e_1)$.
   - **Conclusion** Ainsi : $\quad F = \mathrm{Vect}(e_1)$ par double inclusion.

Corrigé Ex 1 (Commutant d'une matrice)

:commutantTD1:

Soient les matrices : $\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad$ et $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
On appelle **commutant** de D l'ensemble : $\quad \mathcal{C}_D = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } D \cdot M = M \cdot D \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_D$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour une matrice quelconque $M = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$, résoudre l'équation : $\quad D \cdot M - M \cdot D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
3. *En déduire que, pour D_1 et D_2 matrices bien choisies, on peut écrire : $\quad \mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(D_1, D_2)$.*

- **Une base** On a : $D\cdot M = \begin{pmatrix} 2a & c \\ 2b & d\end{pmatrix}$ et $M\cdot D = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ b & d\end{pmatrix}$.
  Ces deux matrices sont égales *ssi* $b = c = 0$.
  Ainsi, les matrices de $\mathcal{C}_D$ sont les matrices diagonales : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}$.
  Une base de $\mathcal{C}_D$ est donc $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$

On s'intéresse maintenant au commutant de A, soit : $\mathcal{C}_A = \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A\cdot N = N\cdot A\}$.

4. Comparer $P\cdot D$ et $A\cdot P$.
En déduire la valeur de $P\cdot D\cdot P^{-1}$. *(Naturellement, on aura **d'abord** vérifié que P est inversible!)*

5. *En déduire la condition nécessaire et suffisante :* $[P\cdot M\cdot P^{-1}\in\mathcal{C}_A \iff M\in\mathcal{C}_D]$
On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}$. On vérifie que $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$.
On peut aussi vérifier que l'on a $A\cdot P = P\cdot D$, d'où $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$.

6. *Montrer que le sous-espace $\mathcal{C}_A$ s'écrit aussi sous la forme :* $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(A_1, A_2)$.
(avec A_1, A_2 deux matrices à préciser.)

Soient $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N = P\cdot M\cdot P^{-1}$.
On montre l'équivalence : $[M\in\mathcal{C}_D] \iff [N\in\mathcal{C}_A]$.
En effet :
$$\begin{aligned} N\cdot A - A\cdot N &= \left(P\cdot M\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right) - \left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot M\cdot P^{-1}\right) \\ &= P\cdot M\cdot D\cdot P^{-1} - P\cdot D\cdot M\cdot P^{-1} = P\cdot(M\cdot D - D\cdot M)\cdot P^{-1}.\end{aligned}$$
Ainsi : $[N\cdot A = A\cdot N] \iff [M\cdot D = D\cdot M]$.
Une base de $\mathcal{C}_A$ s'obtient grâce à celle de $\mathcal{C}_D$ en conjuguant par P.
On obtient donc : $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}\left(P\cdot D_1\cdot P^{-1}, P\cdot D_2\cdot P^{-1}\right)$.

Corrigé Ex 3 (Espace de suites linéaires récurrentes)

:suitLinRec:

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de réels.
On note : $F = \{(u_n)\in E$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.*

- F **non-vide?** On vérifie que la suite nulle $(z_n) = 0 \in F$.
  On a $\forall n\in\mathbb{N}$: $z_n = 0$. En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$, donc $z\in F$.
- **Stabilité par combinaisons linéaires**
  Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, et $u, v\in F$. Montrons que $w = \lambda\cdot u + \mu\cdot v\in F$.
  Pour $n\in\mathbb{N}$, on a
  $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda\cdot u_{n+2} + \mu\cdot v_{n+2} \\ &= \lambda\cdot(u_{n+1}+u_n) + \mu\cdot(v_{n+1}+v_n), \text{ car } u,v\in F \\ &= \lambda\cdot(u_{n+1}+u_n) + \mu\cdot(v_{n+1}+v_n) \\ &= \underbrace{(\lambda\cdot u_{n+1} + \mu\cdot v_{n+1})}_{w_{n+1}} + \underbrace{(\lambda\cdot u_n + \mu\cdot v_n)}_{w_n}\end{aligned}$$
  Ainsi $w\in F$, et F est donc stable par combinaison linéaire.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Équation caractéristique Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. *(avec $q\in\mathbb{R}$)*

a) *Montrer que $g \in F$ ssi q est solution d'une certaine équation trinomiale du second degré à préciser.*

On a $g \in F \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$.

$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$

$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad q^2 \cdot q^n = q \cdot q^n + q^n$

$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad (q^2 - q - 1) \cdot q^n = 0$

$\Longleftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$

b) *En déduire quelles sont les suites géométriques contenues dans F.*

On résout l'équation trinomiale $q^2 - q - 1 = 0$.

- **Discriminant** $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$
- **Solutions** Il y a donc 2 racines : $x_{\pm} = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{5})$.

  On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *(nombre d'or)* et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
- **Conclusion**

  Les suites géométriques *($\not\equiv 0$)* qui appartiennent à F sont celles de raison φ ou ψ.

3. *Soit $(u_n) \in F$ telle que $u_0 = u_1 = 0$. Montrer qu'alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad u_n = 0$.*

Démonstration par récurrence sans difficulté *(vraiment ennuyeuse, en fait!)*

4. *Montrer qu'il existe une unique suite $(f_n) \in F$ telle que $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$.*

Donner son expression comme une combinaison linéaire de deux suites géométriques.

- **Existence**

  Les deux suites géométriques $(a_n) = (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n) = (\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à F.

  Ainsi l'espace vectoriel F contient aussi $\text{Vect}((a_n),(b_n))$.

  On cherche une solution $(f_n) \in F$ telle que $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$ qui s'écrit comme $f = \lambda a + \mu b$.

  On résout donc : $\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\varphi^0 + b\psi^0 = 0 \\ a\varphi^1 + b\psi^1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a\varphi + b\psi = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a(\varphi - \psi) = 1 \end{cases}$

  On trouve pour unique solution $a = -b = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$.
- **Unicité**

  Soit (f_n) une solution. La suite $\epsilon = \left(f_n - \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}\right) \in F$ vérifie $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0$.

  Par la question précédente, la suite ϵ est donc nulle et on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
- **Conclusion**

  Il existe une unique suite (f_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ avec $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$.

  C'est la suite de Fibonacci. Elle s'écrit $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

  (avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.)