Un exemple de dérivation logarithmique

pour le jeudi 8 septembre

On se propose de faire l'étude des variations d'une famille de fonctions *(une suite de fonctions)*.

Approche directe

Pour $n \geqslant 1$ un entier, on définit la fonction : $f_n : \left| \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$

1. Valeurs de f_n
   - **a)** Calculer $f_n(0)$.
   - **b)** En appliquant le théorème des croissances comparées, calculer $\lim\limits_{\infty} f_n$
   - **c)** Étudier le signe de f_n sur son domaine de définition.

2. Dérivation de f_n
   - **a)** Montrer que la fonction f_n est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
   - **b)** Calculer la dérivée f_n' de f_n. *(on en donnera une écriture **factorisée**)*

3. En déduire le tableau de signes de f_n' et le tableau de variations de f_n.

4. Compléter le programme Scilab suivant pour qu'il trace la représentation graphique de f_1.

aCompleter.sce

```
XMAX = 5
x = linspace(0,XMAX)
y = ___       // <- Compléter cette ligne (sans recopier les autres sur la copie)
plot(x,y)
```

Approche logarithmique

On définit maintenant, pour $n \geqslant 1$ entier, la fonction : $\varphi_n : \left| \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_n(x) = \ln(f_n(x)) \end{array} \right.$

5. Justifier que la fonction φ_n est bien définie sur $]0\,;+\infty[$, et qu'elle aussi est continue et dérivable.

6. Vérifier l'expression suivante : $\forall x > 0,\ \varphi_n(x) = n\ln(x) - x$.

7. En déduire une écriture simple de la dérivée $\varphi_n'(x)$.

8. En déduire le tableau de signes de φ_n' et le tableau de variations de φ_n.

9. Conclusion
   - **a)** Exprimer f_n en fonction de φ_n.
   - **b)** Retrouver le tableau de variations de f_n obtenu à la question **3.**

Complément

Pour $n \geqslant 1$ entier, on considère $g_n : \left| \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \end{array} \right.$ et on pose $\psi_n = \ln \circ g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. En étudiant ψ_n, trouver en quel point la fonction g_n atteint son maximum sur $[0\,;+\infty[$.

(en quelques lignes !)