# Colles semaine 9 - Pratique de la diagonalisation

#### 1 Définitions

- Équation des couples propres  $A\vec{X} = \lambda \vec{X}$  avec  $\vec{X} \neq \vec{0}$ .
- ▶ Vocabulaire dans l'équation ci-dessus, on dit que :
- $\rightarrow \lambda$  est une **valeur propre** de A.
- $\vec{X}$  est un **vecteur propre** de A, associé à la valeur propre  $\lambda$ .
  - ightharpoonup Spectre d'une matrice carrée A: l'ensemble, noté Sp(A), des valeurs propres de A.
  - ▶ **Vérifier si**  $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$  ( $\lambda$  donnée): pivot de Gauss (résol<sup>n</sup> de  $A\vec{X} = \lambda \vec{X} \Leftrightarrow (A \lambda I_n) \cdot \vec{X} = \vec{0}$ )
  - ▶ **Sous-espace propre** associé à une valeur propre  $\lambda$ . C'est :  $E_{\lambda}(A) = \text{Ker}(A \lambda I_n)$ .
  - ▶ **Reformulation des valeurs propres** On a  $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \text{Ker}(A \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}.$

## 2 Approche directe

(seulement dans quelques cas)

Valeurs propres d'une matrice triangulaire

- (Elles sont « déjà » sur sa diagonale)
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.
- ▶ Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble de** ses coefficients diagonaux
  - ▶ Pivot de Gauss à paramètre On écrit  $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$  pas inversible

(Approche déconseillée sauf demande explicite)

(puis pivot de Gauss avec discussion selon  $\lambda$ )

### 3 Avec un polynôme annulateur

(méthode plus générale)

- ▶ **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si  $P(A) = 0_n$ .
- ▶ **Recherche d'un polynôme annulateur** par calcul des premières puissances de *A*.
- ▶ Polynôme annulateur et calcul d'inverse
- Condition nécessaire de valeur propres

(Si  $\lambda$  est une vp de A, alors  $P(\lambda) = 0$ .)

(En testant toutes les racines  $\lambda$  de P, on est sûr de ne manquer aucune vp de A.)

### 4 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est **diagonalisable** si l'on peut écrire :  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ . avec : (*c'est une formule de changement de base*)

ne jorniule de changement de base)

► D diagonale : « la matrice des valeurs propres »

(matrice dans une nouvelle base)

▶ *P* inversible : « la matrice des vecteurs propres »

(matrice de passage)

#### Diagonalisabilité

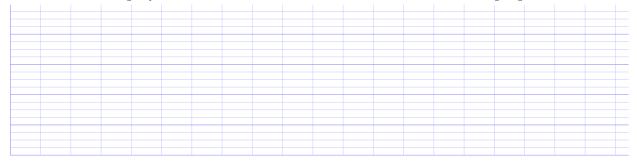
L'existence d'une diagonalisation revient à l'existence d'une base de vecteurs propres.

#### Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité:

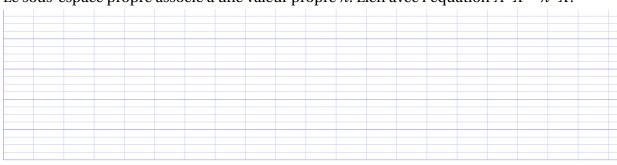
La matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est **diagonalisable** *ssi* la somme des dimensions de ses sous-espaces propres  $E_{\lambda}(A)$  vaut n

## 5 Questions de cours

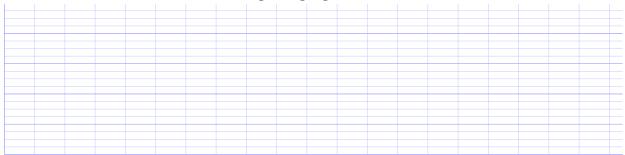
1. Définir « *P* est un polynôme annulateur de *A*. » Que dire alors des valeurs propres de *A*?



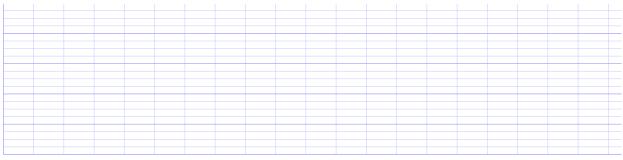
**2.** Le sous-espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$ . Lien avec l'équation  $A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}$ .



3. La somme des dimensions des sous-espaces propres.



4. La formule de diagonalisation.



5. Principe de la représentation matricielle d'un endomorphisme.

