# Suites récurrentes : application des accroissements finis

## 1 Rappels : convergence des suites récurrentes

**Théorème 1 (*du point fixe*)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)$ une suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

- **On suppose que**
  - la fonction $f$ est continue sur $I$.
  - la suite $(u_n)$ converge et sa limite $\ell$ appartient à $I$.
- **Alors** la limite $\ell$ de $(u_n)$ est un point fixe de $f$, soit l'équation $f(\ell) = \ell$.

**Remarque : pas un critère de convergence**

Cette propriété ne montre pas la convergence *(**sous réserve** de convergence, elle aide à trouver $\ell$).*

**Théorème 2 (*de convergence par majoration de l'erreur*)**

Soit $(u_n)$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel

- **On suppose que**
  - l'on a une inégalité de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n$
  - pour une suite $(\epsilon_n) \to 0$.
- **Alors**
  - la suite $(u_n)$ converge
  - $\lim(u_n) = \ell$.

**Démonstration :** On a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - \epsilon_n \leqslant u_n \leqslant \ell + \epsilon_n$.
Par le critère de convergence par encadrement *(th. « des gendarmes »)*, on a donc $\lim(u_n) = \ell$. ■

**Vocabulaire : vitesse de convergence**

1. On dit que la suite $(\epsilon_n)$ est une **estimation de l'erreur** de $\ell$ par $u_n$
2. Supposons de plus $(\epsilon_n)$ géométrique, *(soit $\forall n \in \mathbb{N},\ \epsilon_n = \epsilon_0\, q^n$, où $0 < q < 1$)* alors on dit que

   la **vitesse de convergence** de $(u_n)$ vers $\ell$ est *(au moins)* géométrique de raison $q$.

Dans chaque diagramme, combien de valeurs de la suite parvient-on à distinguer avant qu'elles soient trop proches de la limite ?

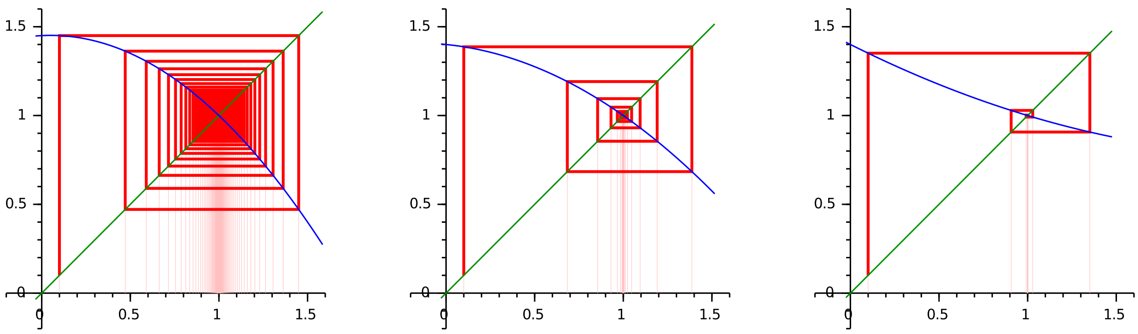


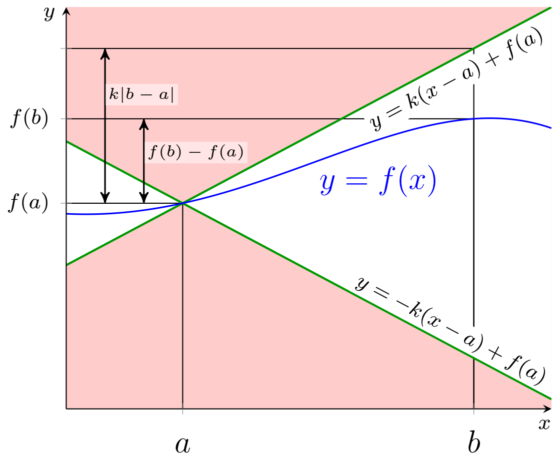

FIGURE 1 – Convergences géométriques de raison $q = 95\%$ *(g.)*, $q = 70\%$ *(m.)* et $q = 30\%$ *(d.)*

# 2 Accroissements finis et convergence géométrique

**Théorème 3 (*Inégalité des accroissements finis*)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- **On suppose que** pour $k \geqslant 0$ fixé,
$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$$
- **Alors** pour $a, b \in I$, on a
$$|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|\,.$$




**Interprétation graphique**

La courbe de $f$ reste dans le cône laissé blanc et n'entre pas dans la zone colorée.

## 2.1 En pratique : plan-type d'étude

1. Montrer que toutes les valeurs de la suite sont dans un certain intervalle $J \subseteq I$.
2. Trouver un point fixe $\ell$ de $f$ *($\ell \in J$, résolu explicitement ou avec le théorème de la bijection).*
3. Obtenir sur $J$, une majoration, avec $0 < k < 1$, de la forme $\forall x \in J,\ |f'(x)| \leqslant k$
4. Appliquer les accroissements finis entre $u_n$ et $\ell$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{|f(u_n) - f(\ell)|}_{=|u_{n+1}-\ell|} \leqslant k\,|u_n - \ell|$
5. Par récurrence, on obtient donc l'encadrement de l'erreur : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \underbrace{k^n\,|u_0 - \ell|}_{\text{estim. géom. de l'erreur}}$.

## 2.2 Approximation du point fixe par calcul de $(u_n)$

approxAlpha.sce

```
// CONSTANTES : les données du problème
U0 = 1                    // premier terme de u_n
ESTIM_ERREUR_INIT = %e - 1 // majorant de l'erreur initiale
RAISON_ESTIM_ERREUR = 1/2  // constante des accroissements finis
PRECISION = 10^(-3)        // précision souhaitée sur la limite
function y = f(x)          // fonction itérée
  y = 2 - log(2)/2
endfunction

// initialisation
u = U0                          // de la suite
estimErreur = ESTIM_ERREUR_INIT // de l'estimation de l'erreur

// la boucle
while (estimErreur > PRECISION)
  u = f(u)                                   // terme suivant de la suite
  estimErreur = estimErreur * RAISON_ESTIM_ERREUR // de l'estimation de l'erreur
end

// affichage du résultat
disp("approximation de alpha à 10^(-3) près :")
disp(u)     // retourne 1.7268515 // vérif : disp(f(u)) proche
```