DL 4 - inspiré d'EDHEC 2013
Correction

On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. *(état n)*
Le contenu de l'urne évolue au cours d'une succession d'épreuves.
À chaque épreuve, on tire une boule de l'urne dans l'état $j \geqslant 1$ *(j blanches, $j+2$ noires)*, puis :

- Si la boule est blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne. *(nouvel état : $j-1$).*
- Si la boule est noire, elle est remise dans l'urne avec en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne. *(nouvel état : $j+1$).*

Lorsque, à une étape quelconque, l'urne atteint l'état 0, on arrête définitivement l'expérience.
En particulier, si $n = 0$ *(départ de l'état 0)*, l'expérience est sans objet, car aucun tirage n'a lieu.
On note X le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la première épreuve.

1. **a)** *Montrer que la variable X vérifie :* $X(\Omega) = \{n-1, n+1\}$.

Suite au premier tirage, l'urne peut être
- dans l'état $n-1$ *(tirage d'une boule blanche)*
- dans l'état $n+1$ *(tirage d'une boule noire)*

Ainsi, on a bien : $X(\Omega) = \{n-1, n+1\}$.

b) *Calculer* $\mathbb{P}(X = n-1)$ *et* $\mathbb{P}(X = n+1)$.

- **Calcul de** $\mathbb{P}(X = n-1)$ Il s'agit de la probabilité de tirer une boule blanche.
  Par équiprobabilité, il vient donc $\mathbb{P}(X = n-1) = \frac{\sharp \text{ blanches}}{\sharp \text{ total}} = \frac{n}{2n+2}$
- **Calcul de** $\mathbb{P}(X = n+1)$ De même, on trouve : $\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{\sharp \text{ noires}}{\sharp \text{ total}} = \frac{n+2}{2n+2}$

On fixe maintenant un entier $m \geqslant 1$.
On s'intéresse à l'événement E : « l'urne atteint l'état m **avant** l'état 0. »
La probabilité de cet événement dépend de l'état initial de l'urne.
On note donc e_n la probabilité de E lorsque l'état de l'urne est l'entier $n \in [\![0, m]\!]$.

2. *Montrer que* $e_0 = 0$. *Combien vaut* e_m *?*

- **Détermination de** e_0
  Si $n = 0$ *(départ de l'état 0)*, l'expérience s'arrête immédiatement, et aucun tirage n'a lieu.
  Il est alors impossible d'atteindre l'état m. Ainsi : $e_0 = 0$.
- **Détermination de** e_m
  Si $n = m$, l'état m est atteint immédiatement d'une façon certaine. Ainsi : $e_m = 1$.

3. **a)** *Justifier que :* $\mathbb{P}_{[X=n-1]}(E) = e_{n-1}$ *et* $\mathbb{P}_{[X=n+1]}(E) = e_{n+1}$.

- **Conditionnement par** $[X = n-1]$
  On suppose que suite au premier tirage, l'urne est dans l'état $(n-1)$.
  L'événement E requiert d'atteindre l'état m.
  Conditionnellement, tout se passe comme si on partait initialement de l'état $(n-1)$.
  On a donc bien : $\mathbb{P}_{[X=n-1]}(E) = e_{n-1}]$

- **Conditionnement par** $[X = n+1]$ C'est le même principe, mais pour l'état $(n+1)$.

  On trouve : $\mathbb{P}_{[X=n+1]}(E) = e_{n+1}$

b) *Montrer, pour $n \in [\![1,m-1]\!]$ que :* $e_n = \frac{n}{2n+2} \cdot e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot e_{n+1}$.

On applique la formule des probabilités totales selon la valeur de X.

Il vient : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(X = n-1) \cdot \mathbb{P}_{[X=n-1]}(E) + \mathbb{P}(X = n+1) \cdot \mathbb{P}_{[X=n+1]}(E)$.

On traduit avec les probabilités trouvées : $e_n = \frac{n}{2n+2} \cdot e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot e_{n+1}$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in[\![0,m]\!]}$ par : $u_n = (n+1) \cdot e_n$.

4. **a)** *Pour $n \in [\![1,m-1]\!]$ une expression de u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n+1}.*

Pour $n \in [\![0,m]\!]$, on a : $e_n = \frac{u_n}{n+1}$.

Pour $n \in [\![1,m-1]\!]$, on injecte dans l'équation : $e_n = \frac{n}{2n+2} \cdot e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot e_{n+1}$.

Il vient : $\frac{u_n}{n+1} = \frac{n}{2n+2} \cdot \frac{u_{n-1}}{n} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot \frac{u_{n+1}}{n+2}$.

On simplifie, et on trouve : $u_n = \frac{1}{2} \cdot u_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot u_{n+1}$.

b) *En déduire une relation entre $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$.*

Pour $n \in [\![1,m-1]\!]$, on a : $u_n = \frac{1}{2} \cdot (u_{n-1} + u_{n+1})$

d'où : $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$

soit : $(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = 0$

Ainsi : $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$.

La suite $(u_n - u_{n-1})_{n\in[\![1,m]\!]}$ est donc **constante**.

c) *Montrer que la suite (u_n) est arithmétique sur $[\![0,m]\!]$.*

La suite $(u_n - u_{n-1})_{n\in[\![1,m]\!]}$ est constante.

Pour $n \in [\![1,m]\!]$, on peut donc écrire donc : $u_n - u_{n-1} = u_1 - u_0 = a \in \mathbb{R}$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$.

On peut donc écrire pour $\forall n \in [\![0,m]\!]$, $u_n = a \cdot n + u_0$.

5. **a)** *Grâce aux valeurs trouvées à la question **2.**, trouver l'expression de u_n pour $n \in [\![0,m]\!]$.*

On connaît deux valeurs pour e_n, que l' on traduit pour u_n : $\begin{cases} e_0 = 0 & \rightsquigarrow & u_0 = 0 \\ e_m = 1 & \rightsquigarrow & u_m = (m+1) \end{cases}$

Par la formule $u_n = a \cdot n + u_0$, on trouve donc la raison arithmétique : $a = \frac{m+1}{m}$.

Il vient donc : $u_n = \frac{m+1}{m} \cdot n$.

b) *En déduire, pour $n \in [\![0,m]\!]$, l'expression :* $e_n = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n}{n+1}$.

On obtient en effet : $e_n = \frac{u_n}{n+1} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n}{n+1}$.

On s'intéresse au passage à la limite $m \to \infty$.

6. **a)** *Déterminer la limite, pour $n \in \mathbb{N}$:* $\lim\limits_{m\to\infty} e_n$.

Il vient : $\lim\limits_{m\to\infty} e_n = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

b) *Si on part de l'état 1 (1 boule blanche et trois noires), quelle est la probabilité que l'urne finisse par contenir un nombre arbitrairement élevé de boules blanches ?*

La probabilité d'atteindre une valeur m donnée est : $e_1 = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{2}$.

La probabilité d'avoir des valeurs arbitrairement élevées correspond à la limite $m \to \infty$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{2}$.