TP Scilab 4 : Marches de Bernoulli

le 11 octobre 2016

1 Quelques outils

Exercice 1 (*Rappels : matrices usuelles*)

1. Que retourne `ones(lignes,colonnes)` ?
2. Que retourne `zeros(lignes,colonnes)` ?
3. Que retourne `eye(lignes,colonnes)` ?
4. Que retournent `sum(eye(5,6),"c")` et `max(eye(5,6),"r")` ?

Exercice 2 (*La commande* `cumsum`)

1. Que retourne `a=1:2:10` ?
2. Que retourne `cumsum(a)` ?
3. Utiliser la fonction `cumsum`, et obtenir et tracer de la suite harmonique $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. La commande `cumsum` fonctionne-t-elle aussi par ligne `"c"` ou par colonnes `"r"` ? *(oui.)*

Exercice 3 (*Booléens et extraction*)

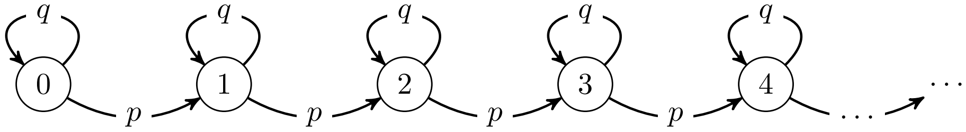
1. Faire la liste `puissances` des 10 premières puissances de 3.
2. Que retournent `puissances(:)` et `puissances($)` ?
3. Que retourne `booleen = (puissances > 1000)` ?
4. Que retourne `puissances(booleen)` ?
5. Calculer la somme des puissances de 3 qui sont dans $[100\,;30000]$ *(avec* `bool1&bool2`*)*.

2 Marches de Bernoulli

2.1 La marche de Bernoulli croissante

Soit une suite d'épreuves de Bernoulli *(succès/échec)* qui sont
- indépendantes
- de probabilité de succès p.

On s'intéresse au score X_t *(le nombre de succès)* après $t \in \mathbb{N}$ essais.



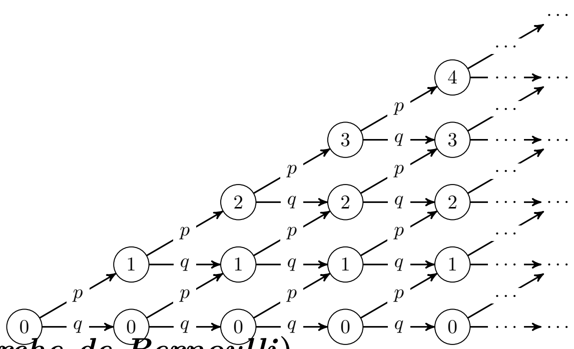
Le graphe des transitions se résume par la « matrice » infinie vers le bas et la droite :

$$\begin{array}{cccc} q & 0 & \cdots & \\ p & q & \ddots & \\ 0 & p & q & \ddots \\ \vdots & \ddots & p & \ddots \end{array}$$

En notant

$$\epsilon_k = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si succès au } k^{\text{ième essai}} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. ,$$

on a donc : $\forall t \in \mathbb{N}, \quad X_t = \sum_{k=1}^{t} \epsilon_k$. Ainsi pour $t \geqslant 0$, la variable aléatoire X_t suit la loi binomiale : $X_t \hookrightarrow \mathcal{B}(t,p)$.



Exercice 4 (*Simulation simple de la marche de Bernoulli*)

1. Obtenir une suite de 10 variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ *(suite de succès/échecs)*.
2. En utilisant la commande `cumsum`, obtenir la marche de Bernoulli associée.
3. Tracer la trajectoire de la marche *(avec* `plot2d2`*)*
4. Que retourne `find(marche==1, 1)` ?

Exercice 5 (*Simulation multiple, en temps long*)

Avec le programme `marcheBernoulli.sce`

1. À quoi correspondent les paramètres `T` et `N` ?
2. Qu'observe-t-on si on simule un grand nombre de trajectoires sur un temps court ?
3. Qu'observe-t-on quand on simule des trajectoires sur un temps long ?

Exercice 6 (*Simulation de la loi géométrique*)

1. Que retourne `rand()<0.5` ?
2. Dans une fonction `compteur = premierSucces(p)`, écrire une boucle pour compter le nombre d'essais nécessaires pour retourner le rang d'apparition du premier succès de probabilité `p`.
3. Dans une fonction `echGeom = echantillonGeometrique(n, p)`, écrire une deuxième boucle pour pour obtenir un échantillon de `n` valeurs de la loi géométrique.
4. Comparer les performances avec le programme `echantillonGeom.sce`

2.2 La marche de Bernoulli centrée

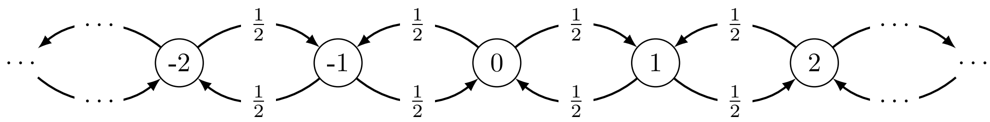
Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots \epsilon_t \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes avec, cette fois :

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

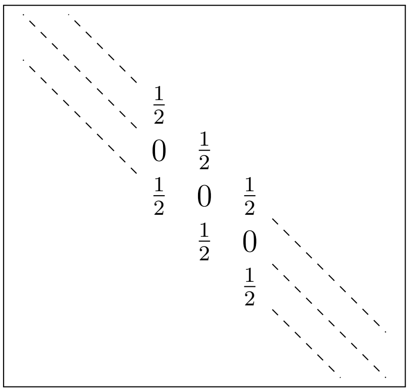
On considère alors la « trajectoire aléatoire » à temps discret : $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ définie par :

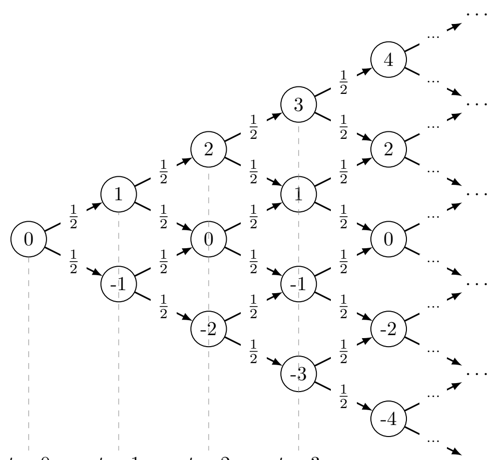
$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad X_t = \sum_{k=1}^{t} \epsilon_k.$$

On a donc le graphe de transitions suivant :



soit la « matrice de transition » infinie des deux côtés verticalement et horizontalement.





Exercice 7 (*Simulation*)

1. Comment transformer un nombre aléatoire $\in \{0,1\}$ en nombre aléatoire $\in \{-1,1\}$?
2. Modifier le programme programme `marcheBernoulli.sce` pour simuler la marche de Bernoulli centrée.
3. Les trajectoires obtenues ressemblent-elles à celles de la marche de Bernoulli croissante ?

2.3 La syntaxe de la commande `grand` avec l'option `"markov"`

Exercice 8 (*Matrice de transition*)

Utiliser le programme `circulante.sci` pour définir une matrice de transition correspondent à la marche de Bernoulli centrée.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Syntaxe de la commande `grand` avec option `"markov"`

```
//A est la matrice de transition choisie
traj = grand (100 , "markov" , A' , 1 )  ;  // retourne une trajectoire de Markov
scf ; plot (traj)
```

```
e = gce () ,
legend ("une trajectoire") ;
```