

Exercice 1 : Étude de fonction

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2x e^{-x}$.

1. (Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) \, dx$.)

On a $I = \underbrace{2 \int_0^1 dx}_{=2} - 2 \underbrace{\int_0^1 x e^{-x} \, dx}_{=J}$. Calculons par parties $J = \int_0^1 x e^{-x} \, dx$.

Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$:

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Il vient donc :

$$J = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} = -e^{-1} - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = 1 - 2e^{-1}$$

$$\text{Ainsi : } I = 2 - 2 \underbrace{(1 - 2e^{-1})}_{=J} = 4e^{-1}.$$

2. Étude de la fonction f

- a) (Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .)

Les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} :

$x \mapsto -2x$	(fonction polynomiale)
$x \mapsto e^{-x}$	(fonction exponentielle)

Ainsi leur produit $x \mapsto -2x e^{-x}$ l'est aussi sur \mathbb{R} .

Par ajout de constante additive, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , donc aussi \mathcal{C}^2 .

- b) (Faire le tableau de variations de f sur \mathbb{R} + limites en $\pm\infty$.)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 - 2x e^{-x}$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(e^{-x} - x e^{-x}) \\ &= 2(x - 1)e^{-x}. \end{aligned}$$

On obtient donc pour f' et f le tableau de signes-variations à droite.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$		0	$+$
e^{-x}		$+$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$2 - \frac{2}{e}$	2

► Calcul de $\lim_{-\infty} f$

Pour $x \rightarrow -\infty$, on a $f(x) = 2 - \underbrace{2x}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$.

► Calcul de $\lim_{+\infty} f$

Pour $x \rightarrow +\infty$, on a $f(x) = 2 - \underbrace{2x}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow 0}$.

On obtient une forme indéterminée. Par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = 0$.

Ainsi $\lim_{+\infty} f = 2$.

► Calcul de $f(1)$

On a $f(1) = 2 - e^{-1}$.

- c) (Étudier le signe de la fonction
- f''
- + unique point d'inflexion.)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x-1)e^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f''(x) &= 2(e^{-x} - (x-1)e^{-x}) \\ &= 2(2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

On trouve le tableau de signes ci-contre.

La dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe une seule fois : en 2.C'est donc l'unique point d'inflexion de f sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2e^{-x}$	+	+	+
$2-x$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	convexe		concave

↘ inflexion

3. Tracé de la fonction f sur $[0; 3]$ (On donne $e^{-1} \simeq 0,37$ et $e^{-2} \simeq 0,14$.)

- a) (Tracer l'asymptote représentant la limite de
- f
- en
- $+\infty$
- .)

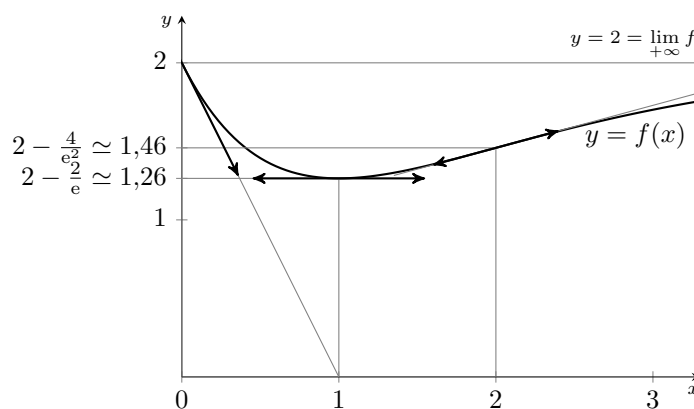
L'asymptote est horizontale, à l'ordonnée $y = 2$.

- c) (Calculer
- $f(0)$
- ,
- $f(1)$
- et
- $f(2)$
- (+ approx).)

- ▶ $f(0) = 2$.
- ▶ $f(1) = 2 - 2e^{-1}$
 $\simeq 2 - 2 \times 0,37 = 1,26$.
- ▶ $f(2) = 2 - 4e^{-2}$
 $\simeq 2 - 4 \times 0,14 = 1,44$

- d) (Calculer
- $f'(0)$
- ,
- $f'(1)$
- et
- $f'(2)$
- (approx).)

- ▶ $f'(0) = -2$.
- ▶ $f'(1) = 0$.
- ▶ $f'(2) = 2e^{-2} \simeq 0,28$.

**4. L'équation $f(x) = x$.** On définit la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}$

- a) (Montrer que pour
- $x \geq 1$
- , on a
- $0 \leq f'(x) \leq 2e^{-2}$
- .)

On a trouvé le tableau de signes ci-contre pour la dérivée seconde f'' .On en déduit le tableau de variations pour f' .

On obtient bien l'inégalité :

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq f'(x) \leq 2e^{-2}.$$

x	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

$f'(x)$	0	$2e^{-2}$	0
---------	---	-----------	---

- b) (En déduire que la fonction
- g
- est strictement décroissante sur
- $[1; +\infty[$
- .)

La fonction g est dérivable et on a $\forall x \geq 1, g'(x) = f'(x) - 1$. Par la question précédente :

$$\forall x \geq 1, \quad g'(x) \leq 2e^{-2} - 1 < 0.$$

Ainsi la fonction g est bien strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. (sur $]0; +\infty[$ aussi.)

- c) (Montrer que l'équation
- $g(x) = 0$
- admet une unique solution
- ℓ
- sur
- $[0; +\infty[$
- .)

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction g est ▶ continue

▶ strictement décroissante.

Par le théorème de la bijection monotone, la fonction g réalise donc une bijection $]0; +\infty[\rightarrow]\lim_{+\infty} g; g(0)[$. Or $\begin{cases} g(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ donc $0 \in]\lim_{+\infty} g; g(0)[$, et il existe un

unique $\ell \in]0; +\infty[$ tel que $g(\ell) = 0$.

d) (Montrer que $\ell \in [1; 2]$.)

$$\text{Calculons } \begin{cases} g(1) = 1 - 2e^{-1} > 0 \\ g(2) = -4e^{-2} < 0 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction g change de signes entre 1 et 2, donc s'y annule, et $1 < \ell < 2$.

e) (Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \geq 0$.)

La fonction g est st^t décroissante, et s'annule en ℓ .

On trouve donc le tableau de signes ci-contre.

Remarquons que $g(x) \geq 0 \iff f(x) \geq x$.

x	1	ℓ	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

5. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) (Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $u_n \geq \ell$.)

► **Hypothèse de récurrence**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq \ell$ (H_n)

► **Initialisation** On a bien d'après la question 4.d) : $u_0 = 2 \geq \ell$ (H_0)

► **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

On suppose (H_n) soit : $u_n \geq \ell$.

D'après la question 4.e) avec $x = u_n \geq \ell$ $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \underbrace{g(u_n)}_{\geq 0} \geq u_n$

Ainsi, il vient bien : $u_{n+1} \geq \ell$ (H_{n+1})

► **Conclusion**

On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est ► initialisée

► héréditaire

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$ (H_n)

b) (Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .)

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$. (d'après 4.e))

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) (Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.)

► **Convergence de (u_n)** La suite (u_n) est ► décroissante, par 5.b), et
► minorée par ℓ , par 5.a).

Par le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge et $\lim(u_n) \geq \ell$.

► **Limite de (u_n)** ► La suite (u_n) satisfait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, et
► la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

D'après le théorème du point fixe, la limite $\lim(u_n)$ est un point fixe ≥ 1 de f .

D'après la question 4.c), le seul point fixe de f qui soit ≥ 1 est le réel ℓ .

Ainsi $\lim(u_n) = \ell$.

d) (Montrer grâce à la question 4.a) que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq 2e^{-2}(u_n - \ell)$.)

La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$, et $\forall x \geq 1$, $0 \leq f'(x) \leq 2e^{-2}$.

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour $1 \leq a \leq b$, on a :

$$0 \leq f(b) - f(a) \leq 2e^{-2}.$$

On applique, pour $n \in \mathbb{N}$, entre $a = \ell$, et $b = u_n$: (on a bien $1 \leq \ell \leq u_n$)

$$0 \leq \underbrace{u_{n+1} - \ell}_{f(u_n) - f(\ell)} \leq 2e^{-2}(u_n - \ell).$$

e) (En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n - \ell \leq 2^n e^{-2n}$.)

► **Hypothèse de récurrence**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n - \ell \leq 2^n e^{-2n} (H_n)$

► **Initialisation** On a $\ell \geq 1$, donc : $0 \leq u_0 - \ell \leq 2 - 1 = 1 (H_0)$

► **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

On suppose (H_n) soit : $0 \leq u_n - \ell \leq 2^n e^{-2n}$

D'après la question 5.d) $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq 2e^{-2}(u_n - \ell) \leq 2e^{-2} 2^n e^{-2n} = 2^{n+1} e^{-2(n+1)}$.

Ainsi, il vient bien : $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq 2^{n+1} e^{-2(n+1)} (H_{n+1})$

► **Conclusion**

On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est ► initialisée

► héréditaire

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \ell \leq 2^n e^{-2n} (H_n)$

f) (Combien de termes de (u_n) calculer pour approcher ℓ avec une précision $\leq 10^{-3}$?)

(on rappelle $\ln(2) \simeq 0,69$ et $\ln(10) \simeq 2,3$) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'erreur commise en approchant ℓ par u_n est $\leq 2^n e^{-2n}$.

Pour que celle-ci soit $\leq 10^{-3}$, on souhaite donc avoir :

$$2^n e^{-2n} \leq 10^{-3} \iff n \ln(2e^{-2}) \leq -3 \ln(10) \iff n[2 - \ln(2)] \geq 3 \ln(10)$$

$$\iff n \geq \frac{3 \ln(10)}{2 - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2,3}{2 - 0,7} = \frac{6,9}{0,6} = 11,5$$

Pour obtenir ℓ avec une précision $\leq 10^{-3}$, il suffit donc de calculer u_{12} .