

Autour des coefficients binomiaux

1 Les coefficients binomiaux

1.1 Définition

Définition 1 (*Coefficient binomial*)

► **Factorielle** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ (relation de récurrence)

► **Coefficient binomial** Pour k, n entiers avec $0 \leq k \leq n$, on pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Représentation : le triangle de Pascal :

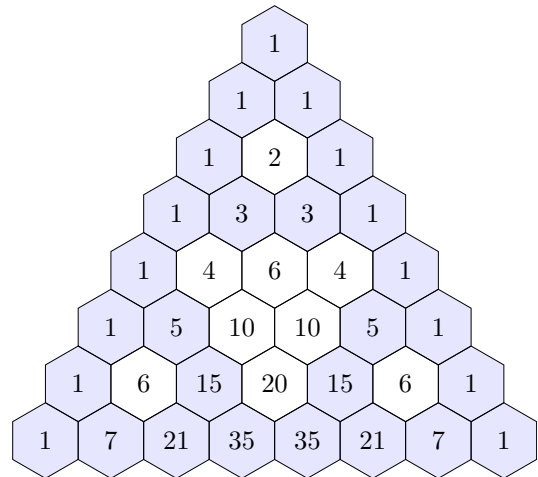
On place les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce

tableau avec ► k en abscisse,

► n en ordonnée décroissante.

$n \downarrow$	$k : 0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

La représentation « pyramidale » met mieux en évidence leurs propriétés.



Proposition 2 (*Symétrie de la pyramide*)

Pour $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1.2 Interprétation combinatoire

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le **nombre de manières de choisir k objets parmi n** .
Plus précisément :

Proposition 3 (*Dénombrement des sous-parties de cardinal donné*)

Soit E un ensemble à n éléments.

Alors l'ensemble E contient exactement $\binom{n}{k}$ sous-parties distinctes à k éléments.

Exemple : mains dans un jeu de cartes :

Dans un jeu de 32 cartes, on pioche 5 cartes.

Dénombrons les mains (*issues*) possibles : (*cardinal de l'univers Ω*)

L'ensemble des cartes C contient 32 éléments (*les cartes du jeu !*).

Les mains de 5 cartes du jeu sont les sous-parties de C formées de 5 éléments.

Leur nombre est donc : $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

On peut retrouver le résultat par un raisonnement « à la » formule des probabilités composées :

- Pour la première carte, les 32 cartes du jeu sont possibles
- Pour la deuxième carte, les 31 cartes restant dans jeu sont possibles
- Pour la troisième carte, les 30 cartes restant dans jeu sont possibles *etc.*

En tenant compte de l'ordre de pioche, il y a donc $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$ tirages possibles.

Une fois les 5 cartes piochées, il y a $5!$ façons de réarranger les cartes de la main (*5 positions pour la première, 4 pour la deuxième, etc.*)

1.3 Calculer avec les coefficients binomiaux

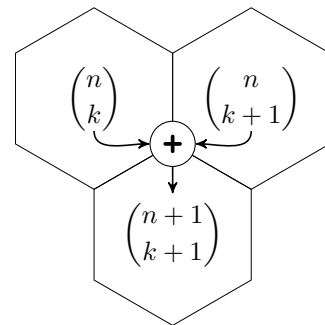
Pour calculer une ligne du triangle de Pascal en connaissant celle au dessus, on utilise :

Proposition 4 (*Formule de Pascal*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Démonstration :

On part du membre de gauche et on réduit les deux termes au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \times (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

■

Cette démonstration exploite l'une des relations entre coefficients binomiaux sont voisins dans le triangle de Pascal :

Proposition 5 (*Petite formule*)

Pour les valeurs de k, n qui font sens :

ligne	$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n+1-k} \binom{n}{k}$
oblique ↗	$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$	$\binom{n-1}{k} = \frac{n-k-1}{n-1} \binom{n}{k}$
oblique ↘	$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$	$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}$

Démonstration : On démontre la dernière (et la plus célèbre) de ces formules : pour $k, n \geq 1$, avec $k \leq n$: $\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}$.

On écrit donc $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, où l'on substitue : $(n-1)! = \frac{n!}{n}$, $(k-1)! = \frac{k!}{k}$, pour reconnaître l'expression de droite. ■

Exemples de programmation : On peut utiliser la formule $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$ pour programmer le calcul des coefficients binomiaux en se déplaçant horizontalement de gauche à droite sur le triangle de Pascal, en partant de $\binom{n}{0} = 1$.

scripts/cbin.sci	scripts/cbr.sci
1 function res = cbin_it (k , n)	1 function res = cb_r (k , n)
2 res = 1 // <i>initialisation</i>	2 if (k == 0) then
3 for i = 1 : k	3 res = 1 // <i>initialisation</i>
4 res = (n-i+1) / i * res	4 else
5 // <i>petite formule</i>	5 res = (n-k+1)/k*cb_r(k-1,n)
6 end	6 // <i>petite formule</i>
7 endfunction	7 end
	8 endfunction

2 La formule du binôme de Newton

2.1 Le développement de $(1+x)^n$

2.2 Forme générale

Théorème 6 (*Formule du binôme de Newton*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Cas remarquables : Si l'un des deux termes vaut 1, il n'apparaît qu'une seule puissance dans la

somme (car $1^k = 1^{n-k} = 1$).

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3} x^3 + \dots + nx^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad (\text{pour } a = b = 1)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (\text{pour } a = -1, b = 1, n \geq 1)$$

Remarques :

1. Il y a $n+1$ termes dans la somme pour $(a+b)^n$. Tous ces termes sont **homogènes de degré** n , au sens où les deux exposants de chaque terme ont pour somme n .
2. Cette formule s'applique aussi en calcul matriciel pour $(A+B)^n$ pour des matrices carrées A, B **qui commutent**, soit $AB = BA$.

3 Applications en probabilités

3.1 Suites de succès / échecs

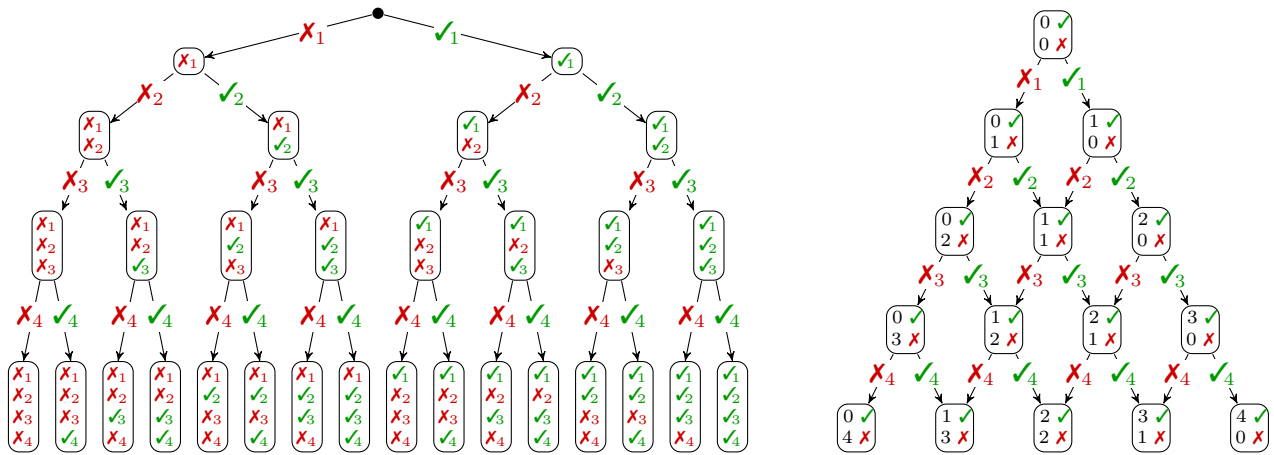
Considérons une alternative binaire de la forme ▶ succès ✓,

▶ échec ✗.

On s'intéresse au dénombrement de suites formées de ces deux symboles (*les bits* ✓ et ✗).

On peut représenter ces suites comme les chemins descendant l'arbre binaire :

On regroupe ensemble les chemins de même longueur par le nombre de succès qu'ils contiennent :



Proposition 7 (*Coefficients binomiaux et chemins binaires*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins

- ▶ de longueur n de succès ✓-échecs ✗
- ▶ contenant exactement k succès ✓

Démonstration :

On a une bijection :

$$\begin{aligned} \{\text{chemins de longueur } n\} &\xrightarrow{\sim} \{\text{sous-parties de } \llbracket 1, n \rrbracket\} \\ \text{chemin } c &\mapsto \text{ensemble des rangs où } c \text{ contient un succès} \end{aligned}$$

Les chemins à exactement k succès correspondent alors aux sous-parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de k éléments.

Leur nombre est donc bien $\binom{n}{k}$ ■

3.2 La loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$. On note $q = 1 - p$.

Définition 8 (*Loi binomiale*)

- On dit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, et

$$\forall k = 0 : n, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Considérons un processus à épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sans mémoire. Alors le **nombre de succès à l'issue des n premiers essais** est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemples :

- On fait rouler 10 fois un dé à 6 faces, et l'on gagne 1 point à chaque « 6 » obtenu. Alors le score final X suit la loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.
Si les résultats obtenus sont (3, 1, 3, 6, 5, 2, 6, 6, 1, 2), alors $X = 3$.
- Pour estimer le résultat à un référendum, on sonde un échantillon du corps électoral.
Si ► la proportion (*inconnue !*) d'électeurs favorables au référendum est p ,
(le score « si le scrutin avait lieu aujourd'hui »)
► et si l'échantillon est formé de n personnes,
alors le nombre d'avis favorables recueilli lors du sondage peut être modélisé par une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

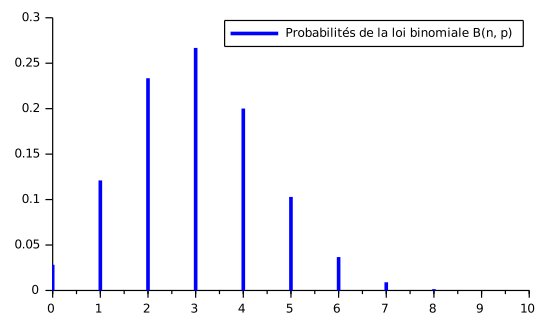
Remarque : La formule $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$ correspond à la formule du binôme de Newton pour $(p + q)^n$, avec $p + q = 1$.

Calcul des probabilités avec Scilab :

scripts/binomialPlot.sci

```

1 -->probas = binomial(p, n)
2 probas =
3     column 1 to 6
4 0.028 0.121 0.233 0.266 0.200 0.102
5
6     column 7 to 11
7 0.036 0.009 0.001 0.000 0.000
8
9 -->plot2d3 (0:n, probas) // en bâtons
```



3.3 Moments de la loi binomiale

Proposition 9 (*Espérance, variance de la loi binomiale*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors, on a :

$$\mathbb{E}[X] = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

Démonstration :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On a donc $\forall k = 0 : n, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On va calculer les sommes qui définissent $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$ en utilisant la petite formule :

► Espérance

On écrit $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On a la petite formule : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour chaque terme (*sauf celui où $k = 0$ qui est nul !*)

Ainsi : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$

$$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} q^{n-1-\ell} \quad (\text{changement d'indice } \ell = k - 1)$$

$$= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} q^{n-1-\ell}$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton pour $p + q$.

Il vient donc bien $\mathbb{E}[X] = np \times \underbrace{(p + q)}_{=1}^{n-1} = np$.

► Calcul intermédiaire de $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

Comme pour $\mathbb{E}[X]$, on change d'indice, après avoir appliqué la petite formule (*deux fois !*) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^n (k-1)k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n (k-1)n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= n \sum_{k=2}^n (n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell} q^{n-2-\ell} \end{aligned}$$

Par la formule du binôme, il vient : $\mathbb{E}[X(X-1)] = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2$.

► Variance

On écrit la formule de Kœnig-Huygens : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$,

avec la forme : $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$.

Il vient donc : $\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np[(n-1)p + 1 - np]$.

Ainsi : $\text{Var}(X) = np(1-p) = npq$. ■