Colles semaine 7 : dimension finie

1 Dimension d'un espace vectoriel

- **Espace vectoriel de dimension finie**
  Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base finie.
- **Dimension d'un espace vectoriel**
  Si E est un *ev* de dim. finie, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.
  C'est la dimension : $\dim(E)$.
- **Dimension des espaces vectoriels de référence**
  - $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
  - $\dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big) = n \times p$
  - $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.
- **Dimension d'un sous-espaces vectoriel**
  Pour $F \subseteq E$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Si égalité : $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

2 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecturs.

- **Définition** le **rang de la famille** est : $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\operatorname{Vect}(\mathcal{F})\big) = \dim\big(\operatorname{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)\big)$.
- **Majorations automatiques** On a :
  - $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$
  - $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \operatorname{Card}(\mathcal{F})$
- **Famille libre, génératrice**
  Il y a équivalence :
  - $[\mathcal{F}$ famille génératrice$] \iff [\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)]$
  - $[\mathcal{F}$ famille libre $] \iff [\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{Card}(\mathcal{F})]$ *(nb. de vecteurs de $\mathcal{F}$)*
- **Cas central** *(« bon nombre de vecteurs »)*
  Si $\operatorname{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors il y a équivalence entre :
  - $\mathcal{F}$ est libre
  - $\mathcal{F}$ est génératrice
  - $\mathcal{F}$ est une base

  *(Il suffit de montrer « libre » **ou bien** « génératrice » pour déduire « est une base »)*

3 Rang d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice. *(à n lignes, p colonnes)*

- **Définition** Le **rang** est :
  - $\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$. *(application linéaire)*
  - $\operatorname{rg}(A) = \dim\big(\operatorname{Im}(A)\big) = \dim\big(\operatorname{Vect}(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_p)\big)$. *(matrice)*

  Les définitions sont cohérentes : si $A = \operatorname{Mat}(f)$, alors : $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$.
- **Majorations automatiques**
  On a à la fois :
  - $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(E)$, $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.
  - $\operatorname{rg}(A) \leqslant n$, $\operatorname{rg}(f) \leqslant p$. *(nb. de lignes/colonnes)*
- **Interprétation par pivot de Gauss**
  Le rang d'une matrice est le nombre de pivots restant une fois échelonnée.
- **La formule du rang** On a : $\operatorname{rg}(f) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = \dim(E)$.
- **Injectivité, surjectivité** On a équivalence :
  - $[f$ surjective$] \iff [\operatorname{rg}(f) = \dim(F)]$
  - $[f$ injective $] \iff [\operatorname{rg}(f) = \dim(E)]$

4 Les questions de cours

1. Définir : dimension d'un espace vectoriel. La dimension d'un sous-espace vectoriel.

2. Rang d'une famille de vecteurs. Les majorations automatiques.

3. Rang d'une famille et caractère libre/générateur.

4. Rang d'une application linéaire, d'une matrice.

5. La formule du rang. Caractérisation injectivité/ surjectivité.