Colles semaine 6 : probabilités discrètes *(rappels et compléments)*

1 Vocabulaire et formules usuels

1.1 Conditionnement

- **Probabilité conditionnelle** : interpréter l'énoncé, arbre de probabilités *(à bon escient)*
- **Formule de conditionnement** $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ et retournements
- **Formule des probabilités composées** *(Exemples en dénombrement : équiprobabilité)*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- **Formule de Bayes** $\frac{\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}_B(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

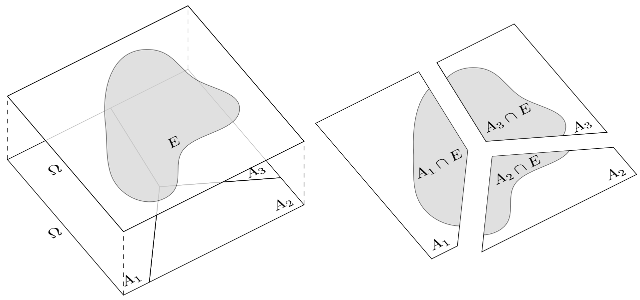
1.2 La formule des probabilités totales

- **Système complet d'événements**

  (principe de la disjonction des cas)

  ⋆) *deux-à-deux incompatibles :*
  $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$

  ⋆) *collectivement exhaustifs :*
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



- **Formule des probabilités totales**

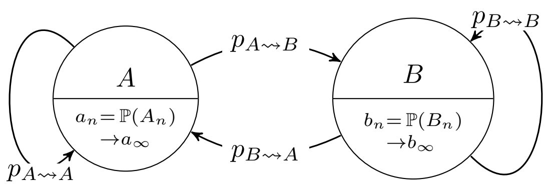
qui décompose E dans le système complet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1 \cap E) + \mathbb{P}(A_2 \cap E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap E)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(E) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(E)\end{aligned}$$

1.3 Reconnaître une situation Markovienne

Pour une suite d'expérience consécutives, savoir, le cas échéant :

- Identifier les états possibles
- Identifier les probabilités de transition
- Faire le graphe de transitions
- Faire la mise en équation par la formule des probabilités totales.



- **Chaîne à deux états**

  ⇝ proba. arith.-géom. *(cf. exo 5 td 5)*

2 Répétition d'épreuves de Bernoulli *(le processus de Bernoulli)*

- **Description de l'expérience**

Épreuve à 2 issues : Échec / Succès ⇝ v.a. $\epsilon_1 \ldots \epsilon_n \ldots \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ mutuellement indépendantes

- **Le nombre de succès** après n épreuves
  - $X_n = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *(loi binomiale)*, formule $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et interprétation.
  - Thèmes connexes : coefficients binomiaux, binôme de Newton, espérance, variance
- **Le rang d'apparition du premier succès** $T = \min\{k \geqslant 1 | \epsilon_k = 1\}$ de loi $\mathcal{G}(p)$

3 Les questions de cours

1. La formule des probabilités totales

2. Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique

3. Loi de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$: son expression et calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)$

4. Développer $(a + b)^n$, pour $n = 1, 2, 3, 4$. Expression de $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$

5. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et calcul de $\mathbb{E}[T]$.