DL 4 - inspiré d'EDHEC 2013

pour le jeudi 12/10

On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. *(état n)*
Le contenu de l'urne évolue au cours d'une succession d'épreuves.
À chaque épreuve, on tire une boule de l'urne dans l'état $j \geqslant 1$ *(j blanches, $j+2$ noires)*, puis :

- Si la boule est blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne. *(nouvel état : $j-1$).*
- Si la boule est noire, elle est remise dans l'urne avec en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne. *(nouvel état : $j+1$).*

Erratum

> Lorsque, à une étape quelconque, l'urne atteint l'état 0, on arrête définitivement l'expérience.
> En particulier, si $n = 0$ *(départ de l'état 0)*, l'expérience est sans objet, car aucun tirage n'a lieu.

On note X le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la première épreuve.

1. **a)** Montrer que la variable X vérifie : $X(\Omega) = \{n-1, n+1\}$.

b) Calculer $\mathbb{P}(X = n-1)$ et $\mathbb{P}(X = n+1)$.

On fixe maintenant un entier $m \geqslant 1$.
On s'intéresse à l'événement E : « l'urne finit par atteindre l'état m au cours de l'expérience ».
La probabilité de cet événement dépend de l'état initial de l'urne.
On note donc e_n la probabilité de E lorsque l'état de l'urne est l'entier $n \in [\![0, m]\!]$.

2. Montrer que $e_0 = 0$. Combien vaut e_m ?

3. **a)** Justifier que : $\mathbb{P}_{[X=n-1]}(E) = e_{n-1}$ et $\mathbb{P}_{[X=n+1]}(E) = e_{n+1}$.

b) Montrer, pour $n \in [\![1, m-1]\!]$ que : $e_n = \frac{n}{2n+2} \cdot e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot e_{n+1}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in [\![0,m]\!]}$ par : $u_n = (n+1) \cdot e_n$.

4. **a)** Pour $n \in [\![1, m-1]\!]$ une expression de u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n+1}. Pour $n \in [\![1, m-1]\!]$, on trouve : $u_n = \frac{1}{2} \cdot u_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot u_{n+1}$.

b) En déduire une relation entre $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$. Pour $n \in [\![1, m-1]\!]$, on a donc : $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$.
La suite $(u_n - u_{n-1})_{n \in [\![1,m]\!]}$ est donc **constante**.

c) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique sur $[\![0, m]\!]$. La suite $(u_n - u_{n-1})_{n \in [\![1,m]\!]}$ est constante.
Pour $n \in [\![1, m]\!]$, on peut donc écrire donc : $u_n - u_{n-1} = a \in \mathbb{R}$.
La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$.
On peut donc écrire pour $\forall n \in\in [\![0, m]\!]$, $u_n = a \cdot n + u_0$.

Ce qu'il reste à faire

Trouver la valeur de la raison a et le terme initial u_0.
Pour ce faire, on utilise les valeurs trouvées pour e_0 et e_m et la relation $u_n = (n+1) \cdot e_n$.

5. **a)** Grâce aux valeurs trouvées à la question **2.**, trouver l'expression de u_n pour $n \in [\![0, m]\!]$.

b) En déduire, pour $n \in [\![0, m]\!]$, l'expression : $e_n = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n}{n+1}$.

On s'intéresse au passage à la limite $m \to \infty$.

6. **a)** Déterminer la limite, pour $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{m \to \infty} e_n$.

b) Si on part de l'état 1 *(1 boule blanche et trois noires)*, quelle est la probabilité que l'urne finisse par contenir un nombre arbitrairement élevé de boules blanches ?