

TP Scilab 6 : Divers (intégrales, indépendance de *v.a.*)

1 Estimation d'intégrale

Exercice 1 (*Calcul d'intégrale par méthode des rectangles*)

- Combien vaut $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$? Calculer $\ln(2)$ avec Scilab.
- Définir la fonction `function y = f(x)` représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- Obtenir le vecteur `x` donnant la subdivision régulière à $N+1$ pas du segment $[0; 1]$.
- plotter `x` contre `y=f(x)`,
 - une fois avec `plot2d2`
 - une fois avec `plot2d`
- Calculer la moyenne de `y`. Comparer avec $\ln(2)$.
- Soit `xBis` défini ci-contre :

<ol style="list-style-type: none"> Comparer <code>x</code> et <code>xbis</code> Quelle est la meilleure approximation de $\ln(2)$ parmi les deux valeurs suivantes : <ul style="list-style-type: none"> ► <code>mean(f(x))</code> ► <code>mean(f(xbis))</code> 	<div style="text-align: right; margin-bottom: 5px;"><code>xbis.sce</code></div> <pre> 1 N = 11 2 x = linspace(0, 1, N) 3 4 xBis = (x(1:\$-1) + x(2:\$)) / 2</pre>
--	---

Exercice 2 (*Transfert simple et la méthode de Monte-Carlo*)

- Obtenir un échantillon `X` de taille `N` de la loi uniforme $\mathcal{U}[0; 1]$. Calculer sa moyenne.
- Obtenir l'échantillon `Y = f(X)`. Calculer sa moyenne. Comparer avec $\ln(2)$.
- plotter `X` contre `Y`, avec la cosmétique convenable.
- Les échantillons `X` et `Y` sont-ils indépendants ?
Calculer le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$, grâce à `correl(X, Y)`.

2 Indépendance de deux variables aléatoires

Exercice 3 (*Coefficient de corrélation et indépendance*)

- Obtenir deux échantillons `X` et `Y`, de taille `N`, indépendants, de loi $\mathcal{E}(2)$.
- plotter `X` contre `Y`, avec la cosmétique convenable.
(copier-coller la cosmétique précédente mais commenter la ligne avec `data_bounds.`)
- Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$? (encore `correl(X, Y)`.)
(Vocabulaire : on dit que `X` et `Y` sont **décorrélées** si $\sigma(X, Y) = 0$.)
- Calculer la moyenne du produit : `average(X.*Y)`
et le produit des moyennes : `average(X) * average(Y)`

Exercice 4 (*Min. et max. exponentielles*)

On reprend les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

1. Définir leurs minimum `minim` et leur maximum `maxim`.
2. `plotter` `minim` contre `maxim`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `minim` et `maxim` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(I, M)$? (encore `correl(minim, maxim)`)

Exercice 5 (*Somme et différence exponentielles*)

On reprend les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

1. Définir leurs somme `somme` et leur différence `diffe`.
2. `plotter` `somme` contre `diffe`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `somme` et `diffe` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(\Sigma, \Delta)$? (encore `correl(somme, diffe)`)
5. Conclure sur : $[X \text{ et } Y \text{ décorréées}] \stackrel{?}{\longleftrightarrow} [X \text{ et } Y \text{ indépendantes}]$

3 Compléments (maths)

Proposition 1 (*Formule de transfert pour l'espérance*)

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0; 1]$ une variable uniforme continue « standard ».
Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (ou cpm.). Alors on a :

$$\mathbb{E}[f(U)] = \int_0^1 f(u) \, du$$

Définition 2 (*Covariance*)

Sous réserve de convergence, on définit la covariance de deux variables X, Y comme

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

Proposition 3 (*König-Huygens*)

On retrouve aussi une formule de König-Huygens pour la covariance, sous la forme :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Définition 4 (*Corrélation*)

Soient X et Y deux v.a. admettant une variance finie $\neq 0$.

On appelle **coeff. de corrélation** de X, Y :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}.$$

Proposition 5 (*Indép. : cond. néc.*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.

On suppose X, Y **indépendantes**.

Alors sous réserve d'existence :

$$1. \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

2. X, Y sont **décorréées** :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(X, Y) = 0.$$