

Colles semaine 4 : Séries numériques : compléments

1 Sommes finies

- ▶ **Généralités** nombre de termes, indice de sommation, valeur moyenne
- ▶ **Propriétés** Linéarité, croissance (*majorer, minorer une somme*), relation de Chasles
- ▶ **Sommation télescopique** Formule $\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ et variantes
 - ▶ On décompose la série par linéarité, puis changement d'indice.
(*éventuellement approche directe : on développe la somme avec des ... + ... + ... et on simplifie*)
 - ▶ Télescopage de décomposition en éléments simples. L'exemple $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2 Convergence

2.1 Définitions

La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge si la **suite des sommes partielles** $\left(S_N = \sum_{n=0}^N a_n\right)$ converge.

- ▶ **Somme de la série** La somme de la série est alors la limite $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$.
- ▶ **Exemple** Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.
- ▶ **Divergence grossière** Pour que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, il **faut** que $a_n \xrightarrow{\infty} 0$.
(*mais cette condition n'est **pas suffisante**, comme pour $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, divergente*)

2.2 Séries à termes positifs (SÀTP)

- ▶ **Sommes partielles** Si (a_n) est ≥ 0 , alors la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^n a_k\right)$ est **croissante**.
- ▶ **Alternative des suites croissantes.** Pour (S_n) croissante, alors (*de deux choses l'une*) :
 - ▶ (S_n) est majorée, et alors (S_n) converge,
 - ▶ (S_n) n'est pas majorée, et alors (S_n) tend vers $+\infty$.
- ▶ **Exemples** de maj-minoration des sommes partielles. Application : convergence de SÀTP.

2.3 Convergence par comparaison (*pour les séries à termes positifs*)

- ▶ Pour chacun des cas $\left| \begin{array}{l} u_n \leq v_n, \\ \text{ou } u_n \sim v_n, \\ \text{ou } u_n = o(v_n) \end{array} \right|$ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
- ▶ **Séries de référence**
 - ★ *Séries géométriques* : La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$, (la somme est alors $\frac{1}{1-q}$)
 - ★ *Séries de Riemann* : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
- ▶ **Utilisation notable** si $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2.4 Convergence absolue

- ▶ **Définition** La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge.
 - ▶ **Propriété fondamentale** Toute série absolument convergente est aussi convergente.
 - ▶ **La réciproque est fautive**
- La série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (*vers $\ln(2)$!*), mais **n'est pas** absolument convergente.
- ▶ **Relation de comparaisons et convergence absolue**
- Les résultats de 2.3 s'appliquent aussi avec $|u_n|$ par convergence absolue.

1. Une formule (ou un exemple) de la sommation télescopique