

# Colles semaine 2 : Familles de vecteurs

## 1 Familles génératrices

► **Définition** La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice dans  $E$  si  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ .

► **Décompositions selon une famille génératrice**

$\mathcal{F}$  génératrice ssi tout  $\vec{v} \in E$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

(la décomposition n'est pas unique en général)

## 2 Relat<sup>ns</sup> de dépendance linéaire, familles liées ou libres

► **Relations de dépendance linéaire** C'est une **équation** de la forme

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$$

Si  $\lambda_p \neq 0$ , alors  $\vec{u}_p = -\frac{1}{\lambda_p} [\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_{p-1} \cdot \vec{u}_{p-1}]$

► **Famille liée** Une famille qui vérifie une relation de dépendance linéaire non-triviale.

L'un des vecteurs se réécrit comme combinaison linéaire des autres.

► **Famille libre** Une famille  $\mathcal{F}$  qui n'est **pas liée**

$\iff$  la seule relation de dépendance linéaire satisfaite par  $\mathcal{F}$  est triviale.

► **Si un vecteur est combinaison linéaire des autres**

Si l'un des vecteurs (*p.ex.*  $\vec{u}_n$ ) est combinaison linéaire des autres :  $\vec{u}_n \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1})$ ,

soit  $\vec{u}_n = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{u}_{n-1}$ , alors on a la *rdcl* :  $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n = \vec{0}$

(la famille est alors **liée**!)

## 3 Bases

► **Définition** Une famille libre et génératrice

► **Coordonnées**  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  base de  $E$

$$\iff \forall \vec{v} \in E, \quad \exists! \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{coordonnées de } \vec{v}} \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{u}_n}_{\text{décomp}^n \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}}$$

► **Bases canoniques des espaces usuels** :  $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$ .

► **Relat<sup>on</sup> de changement de bases** Pour deux bases de  $E$  :

►  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  (ancienne base)

►  $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  (nouvelle base)

on peut exprimer les vecteurs  $\vec{f}_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On forme alors la **matrice de passage** de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  :  $\text{Pas } \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}' = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \dots & \vec{f}_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & & \vec{e}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$  → selon  $\vec{e}_1$   
→ selon  $\vec{e}_2$   
⋮  
→ selon  $\vec{e}_n$

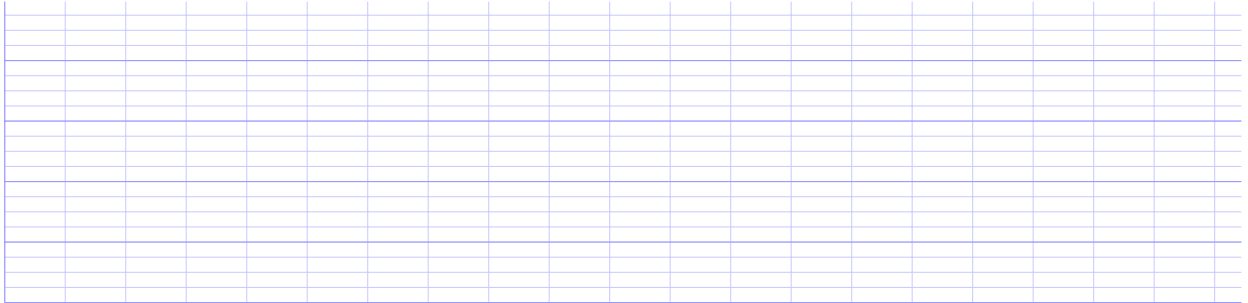
► **Transformation des coordonnées**

Connaissant les coordonnées :  $\vec{v} = \underbrace{x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n}_{\text{décomp}^n \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}}$ , on trouve  $\vec{v} = \underbrace{y_1 \cdot \vec{f}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{f}_n}_{\text{décomp}^n \text{ de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}'}$

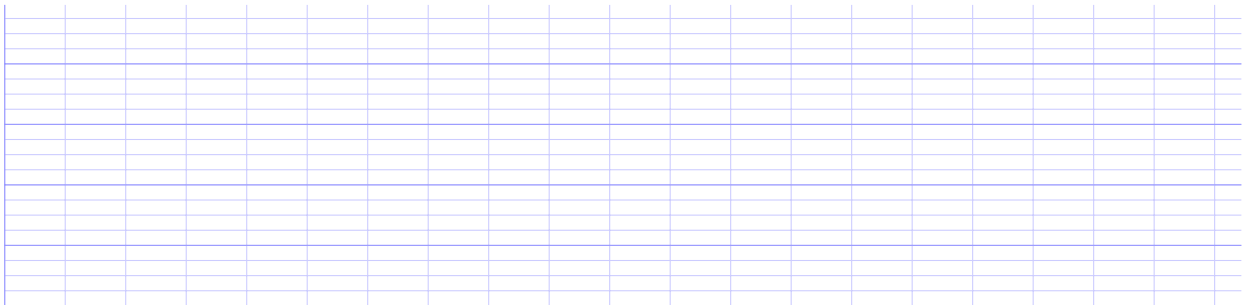
par la relation :  $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\text{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}')}_P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{Y}} \iff \vec{Y} = P^{-1} \cdot \vec{X}$

## 4 Questions de cours

1. Définir : relation de dépendance linéaire, famille libre.



2. Définition d'une famille génératrice  $\mathcal{F}$  de  $E$ . Montrer que tout  $\vec{v} \in E$  est alors comb. lin. de  $\mathcal{F}$ .



3. Définir « les coordonnées d'un vecteur dans une base ». La base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$



4. Définir :  $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ . Que dire alors de  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ ?



5. Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Qu'appelle-t-on les relations de changement de base  $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$ ?

