Colles semaine 7 : Vocabulaire des espaces vectoriels

1 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- **Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$**
  - Représentation des vecteurs dans le plan *(interprétation de la colinéarité)*
  - Droites vectorielles : présentation par un vecteur directeur *(not. $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\vec{d})$)*
  - Équations de droite vectorielle $ax + by = 0$, et aller-retour : équation $\longleftrightarrow$ vect. dir.
- **Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^3$**
  - Droites, plans vect. : présent$^{\text{n}}$ par vecteur, couple directeur *($\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\vec{d})$)*
  - Équation de plan vectoriel : $ax + by + cz = 0$, et aller-retour : éq$^{\text{n}}$ $\longleftrightarrow$ couple dir.
  - Intersection de deux plans vectoriels

2 Généralités sur les espaces vectoriels

- **Notion d'espace vectoriel** Un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$:
  - il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
  - on y fait des **combinaisons linéaires** de $\vec{u}, \vec{v}$: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ *(règles de calcul usuelles)*.
- **Appliquer le vocabulaire** sur les exemples au programme :
  - Les espaces cartésiens $\mathbb{R}^n$ *(à coordonnées)*
  - Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$
  - L'espace des applications $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
  - L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- **Combinaisons linéaires** de $\mathcal{F} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_p})$:

  elles s'écrivent $\vec{v} = \lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + ... + \lambda_p\vec{u_p} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\vec{u_i}$ pour des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

  ($\mathbb{R}^n$) : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\vec{u_i} = U\vec{\Lambda}$, où $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u_1} & \vec{u_2} & \cdots & \vec{u_p} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ *(mat. de la fam. F)* et $\vec{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$ *(vect des coeff.)*.

3 Sous-espaces vectoriels

- **Définition**

  Un **sous-espace vectoriel** F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui
  - est non-vide et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
  - est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.
- **Sous-espace engendré** par une famille $\mathcal{F}$, *(not. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$)* : l'ensemble des c.l. de $\mathcal{F}$.
- **Dans $\mathbb{R}^n$**

  Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par l'alg. du pivot.

  $\star$) *équations $\rightsquigarrow$ base :*
  - on échelonne le système d'équations
  - on exprime les inc. principales en termes des inc. secondaires *(paramètres)*
  - on fait apparaître des vecteurs à droite *(éq. tautologique pour les paramètres)*

  $\star$) *base $\rightsquigarrow$ équations :*
  - on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice $\mathcal{F}$
  - les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.

4 Les questions de cours

1. Équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$, et vecteur directeur.

2. Équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. Intersection de deux plans.

3. La structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4. Conditions à vérifier pour un sous-espace vectoriel.

5. Le sous-espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$.