Convergence des suites et séries

le 21 septembre 2016

1 Critères de convergence et suites récurrentes

Exercice 1 (*Encore la même suite*)

On reprend la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+1}{2}$ la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$,

1. Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $f(x) \in [0\,;1]$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $f(x) \geqslant x$. En déduire les variations de (u_n).

4. En déduire que la suite (u_n) converge.

5. En résolvant l'équation du point fixe pour f, retrouver la limite de (u_n).

Exercice 2 (*Deux suites adjacentes*)

On définit une suite (u_n) par : $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On définit la suite (v_n) par : $\forall n \geqslant 1,\ v_n = u_n + \frac{1}{n}$

2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

3. Montrer que l'on a $\lim(v_n - u_n) = 0$.

4. Conclure sur les suites (u_n) et (v_n).

5. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge

Exercice 3 (*Application du théorème des accroissements finis*)

Soit f tq : $\forall x > 0,\ f(x) = x - \ln(x) + 1$, et (u_n) tq $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation du point fixe pour f.

2. Étude de (u_n)

- **a)** Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$ on a $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.
- **b)** Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f(x) \geqslant x$ et en déduire que le suite (u_n) est croissante.

3. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge vers e.

4. Étude de la vitesse de convergence

- **a)** Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
- **b)** En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$ on a $0 \leqslant \mathrm{e} - f(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)(\mathrm{e} - x)$.
- **c)** En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}\,| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n |u_0 - \mathrm{e}\,|$.

(Que peut-on dire sur la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?)

2 Les relations o et $\sim$, études de séries

Exercice 4 (***Application des croissances comparées***)

Trouver la limite des expressions suivantes quand $n \to \infty$.

$$a_n = \frac{\ln(n)}{n} \qquad b_n = \frac{2^n}{n} \qquad c_n = \frac{\ln(n)n^3}{\mathrm{e}^n} \qquad d_n = \frac{n2^n}{4^n}$$

Exercice 5 (***Reconnaître le terme prépondérant***)

Trouver le terme prépondérant dans les expressions suivantes et en déduire un équivalent.

$$a_n = n + n^2 + \ln(n) \qquad b_n = n + \frac{n}{2^n} + n\ln(n) \qquad c_n = n3^n + n^3 2^{2n} \qquad d_n = 3^n + 2^{n^2}$$

Exercice 6 (***Utilisation des séries de références***)

Étudier la convergence des séries suivantes par comparaison avec une suite en $\frac{1}{n^a}$ ou q^n,

$$A = \sum \ln(2n+1)2^n \qquad B = \sum \frac{n^2}{3^n} \qquad C = \sum \frac{\ln(n)^n}{n\sqrt{n}} \qquad D = \sum \frac{\ln(1+n)}{n^2(1+3^{-n})}$$

Exercice 7 (***Sommations télescopiques***)

1. Calculer les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, \quad \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \quad \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

2. Par sommation télescopique, calculer les sommes partielles et totales des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+2n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

3. Adapter aux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{4t^2-1}$, $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+2t}$,

Exercice 8 (***Utilisation d'une intégrale*** **(la série de Leibniz $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$)**)

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^0 t^n \,\mathrm{d}t$

2. En déduire que $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^0 \frac{1-t^{N+1}}{1-t}\mathrm{d}t$

3. Montrer $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\left|\int_{-1}^0 \frac{t^{N+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^0 |t|^{N+1}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la limite quand $N \to +\infty$.

4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$.