Correction du DST n° 3

Exercice 1 : puissances de matrices et chaîne de Markov

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $M = \frac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1. *(Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.)*

On trouve $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $AB = BA = 0$.

On a donc $NA = (B + 12I) \cdot A = \underbrace{BA}_{=0} + 12A = 12A$.

De même $NB = (B + 4I) \cdot B = \underbrace{AB}_{=0} + 4B = 12B$.

2. **a)** *(Vérifier qu'on a $I = \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B$.)*

On a bien $A - B = (N - 4I) - (N - 12I) = 8I$, soit $I = \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B$.

b) *(Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $N^n = a_nA + b_nB$, avec $\begin{cases} a_{n+1} = 12a_n \\ b_{n+1} = 4b_n. \end{cases}$)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$, tels que : $N^n = a_nA + b_nB$ (H_n)
- **Initialisation** On a bien : $I = N^0 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{=a_0} A \underbrace{-\frac{1}{8}}_{=b_0} B.$ (H_0)
- **Hérédité** Soit $n \geqslant 1$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$, tels que : $N^n = a_nA + b_nB$ soit (H_{n+1}).
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée $n = 0$ et 1
  - héréditaire pour $n \geqslant 1$.

  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe bien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $N^n = a_nA + b_nB (H_n)$
  avec de plus $\begin{cases} a_{n+1} = 12a_n \\ b_{n+1} = 4b_n. \end{cases}$

c) *(Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et de b_n en fonction de n.)*

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont géométriques de raisons respectives 12 et 4, et de premier termes respectifs $\frac{1}{8}$ et $-\frac{1}{8}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n = \frac{12^n}{8} \\ b_n = -\frac{4^n}{8} \end{cases}$

d) *(Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $M^n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n B$.)*

On a $M = \frac{1}{20}N$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient $M^n = \frac{1}{20^n}\left(\frac{12^n}{8}A - \frac{4^n}{8}B\right) = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{12}{20}\right)^n A - \left(\frac{4}{20}\right)^n B\right]$,
soit en effet : $M^n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n B$.

3. Un particulier a acheté une poule. Chaque semaine, la poule pond entre 0 et 3 œufs.
Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine *(elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes)*.
On note pour tout entier n non nul, les événements suivants :

- U_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond un œuf »,
- D_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond deux œufs »,
- T_n : « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond trois œufs ».

On note u_n, d_n et t_n leurs probabilités respectives.

a) *(Que représente le nombre $1-(u_n+d_n+t_n)$?)*
Les événements U_n, D_n, T_n sont incompatibles, donc $u_n+d_n+t_n = \mathbb{P}(U_n)+\mathbb{P}(D_n)+\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(U_n \cup D_n \cup T_n)$.
Ainsi $1-(u_n+d_n+t_n)$ est la probabilité du complémentaire $\overline{U_n \cup D_n \cup T_n}$.
C'est donc la probabilité que la poule ne ponde aucun œuf à la semaine n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

On suppose que la première semaine la poule pond un œuf.

b) *(Expliciter le vecteur X_1.)*
On a $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé, la première semaine, la poule pond un œuf, donc l'événement U_1 est certain.
Par conséquent $u_1 = 1$ et $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On suppose que pour tout entier n non nul, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} & = & \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} & = & \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{array} \right.$$

c) *(Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$.)*
Le système ci-dessus s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ d_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{7}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $X_{n+1} = M \cdot X_n$.

d) *(Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.)*
On démontre par une récurrence immédiate cette formule.
On peut aussi invoquer le caractère « géométrique de raison M » de la suite (X_n), et la formule associée pour le terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^{n-1}X_1$,

e) *(En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ (... formules))*
On a trouvé ci-dessus

$$M^{n-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} B = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1\\ 3 & -6 & 1\\ 9 & 6 & -5\end{pmatrix}\right].$$

On applique à $X_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ avec $A \cdot X_1 = \begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}$ et $B \cdot X_1 = \begin{pmatrix}-5\\3\\9\end{pmatrix}$.

(comme $X_1 = \vec{e}_1$, premier vecteur colonne de chaque matrice)

Il vient alors bien, sur chaque composante de X_n : $\begin{cases} u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{cases}$

f) *(Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.*
Que représente ce nombre ?)
On a en effet :

$$\begin{aligned} u_n + 2d_n + 3t_n &= \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} + \tfrac{5}{8}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1} + 2\left[\tfrac{3}{8}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1}\right] + 3\left[\tfrac{9}{8}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} + \tfrac{9}{8}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{3 + 2\times 3 + 3\times 9}{8} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5 - 2\times 3 - 3\times 9}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}. \\ &= \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ce nombre est la somme des nombres d'œufs possibles *(1, 2, 3)*, pondérée par les probabilités.

C'est donc l'espérance du nombre d'œufs pondus par la poule au cours de la $n^{\text{ème}}$ semaine.

g) *(Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa valeur. Que représente ce nombre ?)*
Les séries géométriques $\sum_{n\geqslant 1} \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. sont convergentes car leurs raisons sont $\in \,]-1\,;1[$.

On trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{9}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{45}{4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{8}$.

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et vaut $\frac{45}{4} - \frac{35}{8} = \frac{90-35}{8} = \frac{55}{8} = 7 - \frac{1}{8} = 6{,}875$

C'est l'espérance du nombre d'œufs que pondra la poule avant de passer à la casserole.

Exercice 2 : une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, et donc en particulier, on a $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calcul de u_0.

a) *(Trouver les deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \neq \pm 1$, on ait : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.)*

Pour $x \neq \pm 1$, on réduit au même dénominateur : $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{a+b+(a-b)x}{1-x^2}$, et on identifie les coefficients du numérateur avec ceux de $\frac{1}{1-x^2}$.

Il vient : $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \iff a = b = \frac{1}{2}$, soit : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$ *(décomposition en él^{ts} simples)* .

b) *(Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \ln(2)$.)*

On calcule ces intégrales en primitivant : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \Big[-\ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

c) *(En déduire $u_0 = \dfrac{\ln(3)}{2}$.)*

Par la décomposition trouvée pour $\frac{1}{1-x^2}$, et linéarité, il vient :

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2)\right] = \frac{\ln(3)}{2}.$$

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $[0\,;\frac{1}{2}]$ par

- $f(x) = \ln(1-x)$,
- $g(x) = \ln(1+x)$,
- $h(x) = \ln(1-x^2)$.

2. a) *(Montrer que les fonctions f, g, h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$.)*

Les fonctions suivantes sont polynomiales sur $[0\,;\frac{1}{2}]$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$:

- $x \mapsto (1-x)$,
- $x \mapsto (1+x)$,
- $x \mapsto (1-x^2)$

De plus, elles y sont > 0. Par composition avec la fonction ln qui est $\mathcal{C}^\infty$, les fonction f, g, h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$.

b) *(Pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, calculer les dérivées $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.)*

Pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, on a

$$f(x) = \ln(1-x), \qquad g(x) = \ln(1+x), \qquad h(x) = \ln(1-x^2),$$

$$\text{d'où} \quad f'(x) = -\frac{1}{1-x}, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad h'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}.$$

c) *(Pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.)*

Pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, on a : $h(x) = \ln(1-x^2) = \ln\Big[(1-x)(1+x)\Big] = \ln(1-x) + \ln(1+x)$.

Ainsi la relation cherchée est : $h(x) = f(x) + g(x)$.

d) *(En déduire : $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.)*
On reconnaît :

$$u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{=-\frac{1}{2}h'(x)} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Big[h(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right).$$

Ainsi, on a bien : $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

3. a) *(Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité, on a

$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x^2} - \frac{x^{n+2}}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

d'où $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

b) *(En déduire les valeurs de u_2 et de u_3.)*
On a donc : $u_2 = u_0 + (u_2 - u_0) = \dfrac{\ln(3)}{2} + \dfrac{1}{2}$.
De même : $u_3 = u_1 + (u_3 - u_1) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \dfrac{1}{2\times 2^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \dfrac{1}{8}$.

4. a) *(Étudier le signe de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x^n}{1-x^2}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x$, donc $u_n \geqslant 0$.

b) *(Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité, on a : $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(1-x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
On simplifie $\dfrac{1-x}{1-x^2} = \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1+x}$, et il vient bien : $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

c) *(En déduire le sens de variations de (u_n).)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

d) *(En déduire que la suite (u_n) est convergente.)*
La suite (u_n) est
- minorée par 0
- décroissante.

Par le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

5. a) *(Montrer que pour tout x de $[0\,;\frac{1}{2}]$, on a : $\dfrac{1}{1-x^2} \leqslant \dfrac{4}{3}$.)*
Pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$, donc $0 < \frac{3}{4} \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$, donc $0 < \dfrac{1}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}$.

b) *(En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant :* $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$.*)*

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x^n}{1-x^2}}_{\leqslant \frac{4}{3}\cdot x^n} \mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{3(n+1)2^{n-1}}.$$

c) *(Quelle est la limite de la suite (u_n) ?)*

On a obtenu pour $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)2^{n-1}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3(n+1)2^{n-1}} = 0$, donc d'après le théorème de convergence par encadrement *(des gendarmes)*, il vient : (u_n) converge *(mais on le savait déjà !)*, et $\lim(u_n) = 0$.

6. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) *(Déduire de la question **5.b)** que la série de terme général $S_n = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.)*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3(n+1)2^{n-1}} = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Or le membre de droite $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série convergente, donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

b) *(Rappeler, pour $x \neq 1$, l'expression sous forme de fraction, de la somme : $1 + x + \cdots + x^n$.)*

Pour $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$, la somme géométrique $1 + x + \cdots + x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

c) *(Établir l'égalité :* $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$.*)*

Par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^k}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)(1-x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

On trouve donc bien : $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

d) *(Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement :* $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2u_{n+1}$.*)*

La positivité est claire par positivité de l'intégrande.
On minore le dénominateur pour majorer le quotient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)\underbrace{(1-x)}_{\geqslant \frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{\frac{1}{2}(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = 2u_{n+1}$$

e) *(En déduire la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ comme une intégrale.)*

On a obtenu l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant S_n - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)} \, \mathrm{d}x \leqslant 2u_{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2u_{n+1}$, donc par le théorème de convergence par encadrement *(des gendarmes)*, on trouve $\lim \left(S_n - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \, \mathrm{d}x \right) = 0$.

En d'autres termes : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \, \mathrm{d}x$.

f) *(Pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, réduire au même dénominateur l'expression : $\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}$.)*

On trouve pour $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} &= \frac{(1-x)(1+x) + 2(1+x) + (1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{4}{(1-x^2)(1-x)}. \end{aligned}$$

g) *(Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = 1$. En déduire la valeur explicite de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.)*

- **Calcul de l'intégrale**

  On primitive, et on trouve bien : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$.

- **Conclusion sur la série** On trouve donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)} \, \mathrm{d}x + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)} \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+x)} \, \mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln(2) + 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right] = \frac{\ln(3)}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3 : commutant d'une matrice

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de format 3×3.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) *(Trouver une base et la dimension des sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Ker}(A)$ *et* $\mathrm{Im}(A)$*.)*

Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a alors $A\vec{X} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Calcul du noyau** $\mathrm{Ker}(A)$ On résout :

$$\vec{X} \in \mathrm{Ker}(A) \iff A\vec{X} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \vec{X} = x\vec{e}_1.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1)$, et $\vec{e}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

- **Calcul de l'image** L'image $\mathrm{Im}(A)$ est engendrée par les vecteurs-colonnes de A.
Ainsi $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.
On remarque que l'on a bien la formule du rang : $\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{=\mathrm{rg}(A)} = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

b) *(Calculer* A^2 *et* A^3*.)*

On trouve $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 \cdot A = 0$.

c) *(En déduire* A^n *pour tout entier* n *supérieur ou égal à 3.)*

Pour $n \geqslant 3$, on peut écrire $A^n = \underbrace{A^3}_{=0} \cdot A^{n-3} = 0$.

2. On considère le **commutant** A, noté $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $AM = MA\}$.

a) *(Soient* $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. A-t-on* $M_1 \in \mathcal{C}$ *? A-t-on* $M_2 \in \mathcal{C}$ *?)*

On a $AM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mais $AM_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_2 A$.

Ainsi $M_1 \notin \mathcal{C}$, mais $M_2 \notin \mathcal{C}$.

b) *(Montrer que* $\mathcal{C}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*. En déduire que* $\dim(\mathcal{C}) \leqslant 9$*.)*

- **Vérifions $\mathcal{C} \neq \varnothing$:** On a bien $0 \in \mathcal{C}$, car $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$.
- **Stabilité par combinaison linéaire**
Soient $M, N \in \mathcal{C}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $AM = MA$ et $AN = NA$.
Montrons que $P \overset{(\mathrm{def})}{=} \lambda M + \mu N \in \mathcal{C}$.
On a $AP = A \cdot (\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N) \cdot A = PA$.
Ainsi on a bien : $P \in \mathcal{C}$.

▸ **Conclusion** Ainsi $\mathcal{C}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Or $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $3\times 3 = 9$. Donc $\mathcal{C}$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{C}) \leqslant \dim\Big(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\Big) = 9$.

c) *(Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $AM - MA = \begin{pmatrix} u & v-a & w-b \\ x & y-u & z-v \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}$.)*

On trouve $AM = \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $MA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$, d'où le résultat demandé.

d) *(Montrer que les matrices appartenant à $\mathcal{C}$ sont celles de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.)*

Avec la matrice M ci-dessus, on a

$$M \in \mathcal{C} \iff AM = MA \iff AM - MA = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} u=0,\ v-a=0,\ w-b=0 \\ x=0,\ y-u=0,\ z-v=0 \\ 0=0,\quad -x=0,\quad -y=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} u=0,\ v=a,\ w=b \\ x=0,\ y=0,\ z=a \end{array}\right.$$

Ainsi la matrice M appartient à $\mathcal{C}$ *ssi* elle est de la forme ci-dessus.

e) *(En déduire que la famille (I, A, A^2) forme une base de $\mathcal{C}$. En déduire $\dim(\mathcal{C})$.)*

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ comme ci-dessus, on peut écrire $M = aI + bA + cA^2$.

Ainsi la famille (I, A, A^2) est génératrice dans $\mathcal{C}$.
Cette famille est aussi libre. C'est donc bien une base de $\mathcal{C}$. En particulier $\dim(\mathcal{C}) = 3$.

3. On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $N^2 = A$.

4. Cette question montre qu'il n'existe pas de matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $N^2 = A$.

a) *(Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait : $AN = NA$.)*
Si $N^2 = A$, alors $AN = (N^2)\cdot N = N^3$ et de même $NA = N\cdot(N^2) = N^3$.
On a donc bien $AN = NA$...

b) *(Justifier qu'on peut écrire $N = aI + bA + cA^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.)*
...On a donc alors $N \in \mathcal{C} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. La matrice N est donc combinaison linéaire de I, A, A^2, et on peut écrire $N = aI + bA + cA^2$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) *(Montrer alors que $N^2 = a^2 I + 2abA + \big(b^2 + 2ac\big)A^2$.)*
On trouve bien $N^2 = \Big(aI + bA + cA^2\Big)^2 = a^2 I + 2abA + (2ac + b^2)A^2 + \underbrace{2bcA^3 + c^2A^4}_{=0}$.

d) *(En déduire qu'une matrice N vérifiant $N^2 = A$ n'existe pas.)*
Cherchons a, b, c pour avoir : $\Big(a\cdot I + \quad b\cdot A + \qquad c\cdot A^2\Big)^2 = A$
soit : $a^2\cdot I + 2ab\cdot A + (2ac+b^2)\cdot A^2 \quad = 0\cdot I + 1\cdot A + 0\cdot A^2$.
Comme la famille (I, A, A^2) est libre, on peut identifier les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{r} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ ab = \frac{1}{2} \neq 0 \end{array}\right.$$

Ces deux équations sont contradictoires, et il n'y a donc pas de solution N à l'équation $N^2 = A$.

5. Exemples de calculs d'inverses

a) *(Justifier que la matrice $I - A$ est inversible.)*

On a $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non-nuls.

Elle est donc bien inversible.

b) *(Développer le produit $(I - A)\left(I + A + A^2\right)$. Déduire l'inverse $(I - A)^{-1}$ en fonction de A et de A^2.)*

On a : $(I - A)\,(I + A + A^2) = I + \underbrace{(1-1)}_{=0} A + \underbrace{(1-1)}_{=0} A^2 - \underbrace{A^3}_{=0} = I$.

Ainsi la matrice $I - A$ est inverse et son inverse est $(I - A)^{-1} = (I + A + A^2)$.

c) *(Résoudre de même l'équation $(I + A)(aI + bA + cA^2) = I$, d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{R}$.)*

On développe : $(I + A)(aI + bA + cA^2) = aI + (a + b) \cdot A + (b + c) \cdot A^2$.

Par identification des coefficients, on a donc :

$$(I + A)(aI + bA + cA^2) = I \iff \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

d) *(En déduire l'inverse de la matrice $(I + A)$.)*

Ainsi la matrice $I + A$ est inversible, d'inverse $(I + A)^{-1} = I - A + A^2$.

6. Cette question étudie les matrices $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $PA = P - A$.

a) *(Soit P une matrice vérifiant : $PA = P - A$. Calculer $P(I - A)$.)*

On a : $P \cdot (I - A) = P - PA = A$.

b) *(En déduire l'expression de P en fonction de A et A^2.)*

La matrice $I - A$ est inversible. Il vient donc $P = \left[P \cdot (I - A)\right] \cdot (I - A)^{-1} = A \cdot (I - A)^{-1}$.

On a trouvé : $(I - A)^{-1} = I - A + A^2$. Ainsi $P = A \cdot (I - A + A^2) = A - A^2$.