Autour des coefficients binomiaux

Table des matières

1 Les coefficients binomiaux

1.1 Définition

Définition 1 (*Coefficient binomial*)

- **Factorielle** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots (n-1) \times n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ (relation de récurrence)

- **Coefficient binomial** Pour k, n entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

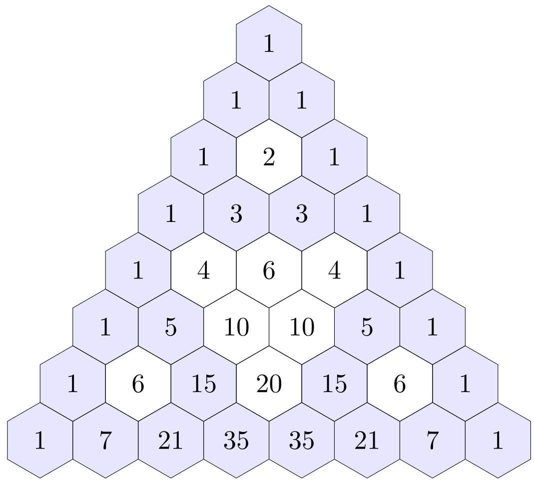
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Représentation : le triangle de Pascal :

On place les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce tableau avec
- k en abscisse,
- n en ordonnée décroissante.

$n \downarrow$	$k : 0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

La représentation « pyramidale » met mieux en évidence leurs propriétés.



Proposition 2 (*Symétrie de la pyramide*)

Pour $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1.2 Interprétation combinatoire

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le **nombre de manières de choisir k objets parmi n.** Plus précisément :

Proposition 3 (*Dénombrement des sous-parties de cardinal donné*)

Soit E un ensemble à n éléments.

Alors l'ensemble E contient exactement $\dbinom{n}{k}$ sous-parties distinctes à k éléments.

Exemple : mains dans un jeu de cartes :

Dans un jeu de 32 cartes, on pioche 5 cartes.

Dénombrons les mains *(issues)* possibles : *(cardinal de l'univers Ω)*

L'ensemble des cartes C contient 32 éléments *(les cartes du jeu !)*.

Les mains de 5 cartes du jeu sont les sous-parties de C formées de 5 éléments.

Leur nombre est donc : $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}$.

On peut retrouver le résultat par un raisonnement « à la » formule des probabilités composées :

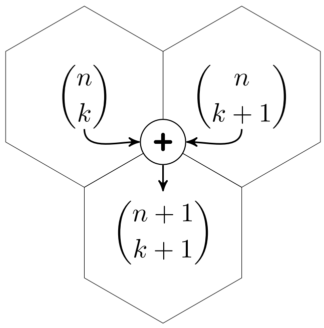
- Pour la première carte, les 32 cartes du jeu sont possibles
- Pour la deuxième carte, les 31 cartes restant dans jeu sont possibles
- Pour la troisième carte, les 30 cartes restant dans jeu sont possibles *etc.*

En tenant compte de l'ordre de pioche, il y a donc $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$ tirages possibles.

Une fois les 5 cartes piochées, il y a $5!$ façons de réarranger les cartes de la main *(5 positions pour la première, 4 pour la deuxième,* etc.*)*

1.3 Calculer avec les coefficients binomiaux

Pour calculer une ligne du triangle de Pascal en connaissant celle au dessus, on utilise :



Proposition 4 (*Formule de Pascal*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration :

On part du membre de gauche et on réduit les deux termes au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \times (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

■

Cette démonstration exploite l'une des relations entre coefficients binomiaux sont voisins dans le triangle de Pascal :

Proposition 5 (*Petite formule*)

Pour les valeurs de k, n qui font sens :

ligne	$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n+1-k}\binom{n}{k}$
oblique $\nearrow$	$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$	$\binom{n-1}{k} = \frac{n-k-1}{n-1}\binom{n}{k}$
oblique $\searrow$	$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$	$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}$

Démonstration : On démontre la dernière (et la plus célèbre) de ces formules : pour $k, n \geqslant 1$, avec $k \leqslant n$: $\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}$.

On écrit donc $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, où l'on substitue : $(n-1)! = \frac{n!}{n}$, $(k-1)! = \frac{k!}{k}$, pour reconnaître l'expression de droite. ∎

Exemples de programmation : On peut utiliser la formule $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$ pour programmer le calcul des coefficients binomiaux en se déplaçant horizontalement de gauche à droite sur le triangle de Pascal, en partant de $\binom{n}{0} = 1$.

scripts/cbin.sci

```
function res = cbin_it (k , n)
  res = 1 // initialisation
  for i = 1 : k
    res = (n-i+1) / i * res
    // petite formule
  end
endfunction
```

scripts/cbr.sci

```
function res = cb_r (k , n)
  if (k == 0 ) then
    res = 1 // initialisation
  else
    res = (n-k+1)/k*cb_r(k-1,n)
    // petite formule
  end
endfunction
```

2 La formule du binôme de Newton

2.1 Le développement de $(1+x)^n$

2.2 Forme générale

Théorème 6 (*Formule du binôme de Newton*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Cas remarquables : Si l'un des deux termes vaut 1, il n'apparaît qu'une seule puissance dans la somme (car $1^k = 1^{n-k} = 1$).

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3}x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \text{(pour } a = b = 1\text{)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \text{(pour } a = -1,\ b = 1,\ n \geqslant 1\text{)}$$

Remarques :

1. Il y a $n+1$ termes dans la somme pour $(a+b)^n$. Tous ces termes sont **homogènes de degré** n, au sens où les deux exposants de chaque terme ont pour somme n.
2. Cette formule s'applique aussi en calcul matriciel pour $(A+B)^n$ pour des matrices carrées A, B **qui commutent**, soit $AB = BA$.

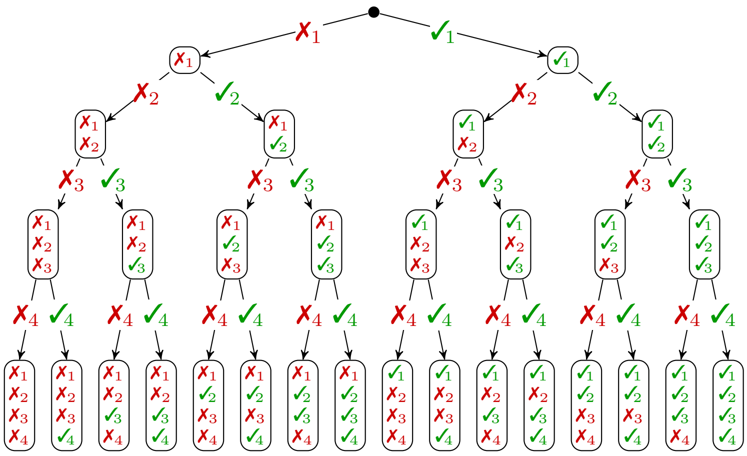
3 Applications en probabilités

3.1 Suites de succès / échecs

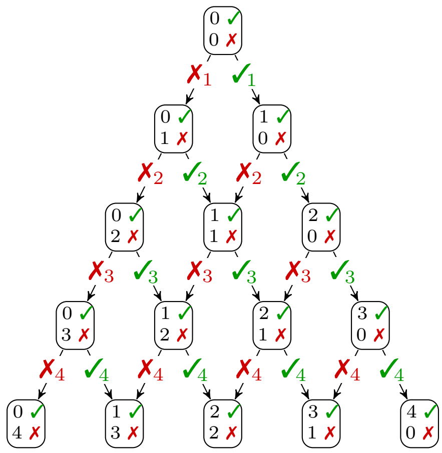
Considérons une alternative binaire de la forme
- succès ✓,
- échec ✗.

On s'intéresse au dénombrement de suites formées de ces deux symboles *(les bits ✓ et ✗)*.

On peut représenter ces suites comme les chemins descendant l'arbre binaire :



On regroupe ensemble les chemins de même longueur par le nombre de succès qu'ils contiennent :



Proposition 7 (*Coefficients binomiaux et chemins binaires*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, le coefficient binomial $\displaystyle\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins

- de longueur n de succès ✓-échecs ✗
- contenant exactement k succès ✓

Démonstration :

On a une bijection :

$$\begin{array}{rcl} \{\text{chemins de longueur } n\} & \xrightarrow{\sim} & \Big\{\text{sous-parties de } [\![1, n]\!]\Big\} \\ \text{chemin } c & \mapsto & \text{ensemble des rangs où } c \text{ contient un succès} \end{array}$$

Les chemins à exactement k succès correspondent alors aux sous-parties de $[\![1, n]\!]$ de k éléments.

Leur nombre est donc bien $\binom{n}{k}$ ■

3.2 La loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$. On note $q = 1 - p$.

Définition 8 (*Loi binomiale*)

- On dit que X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, et

$$\forall k = 0 : n,\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Considérons un processus à épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sans mémoire. Alors le **nombre de succès à l'issue des** n **premiers essais** est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemples :

1. On fait rouler 10 fois un dé à 6 faces, et l'on gagne 1 point à chaque « 6 » obtenu. Alors le score final X suit la loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.
   Si les résultats obtenus sont $(3, 1, 3, 6, 5, 2, 6, 6, 1, 2)$, alors $X = 3$.
2. Pour estimer le résultat à un référendum, on sonde un échantillon du corps électoral.
   Si ▸ la proportion *(inconnue !)* d'électeurs favorables au référendum est p,
   (le score « si le scrutin avait lieu aujourd'hui »)
   ▸ et si l'échantillon est formé de n personnes,
   alors le nombre d'avis favorables recueilli lors du sondage peut être modélisé par une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque : La formule $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$ correspond à la formule du binôme de Newton pour $(p+q)^n$, avec $p + q = 1$.

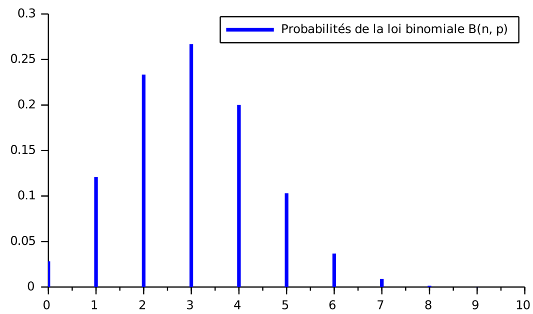
Calcul des probabilités avec Scilab :

scripts/binomialPlot.sci

```
-->probas = binomial(p, n)
probas =
   column 1 to 6
0.028  0.121  0.233  0.266  0.200  0.102

   column  7 to 11
0.036  0.009  0.001  0.000  0.000

-->plot2d3 (0:n, probas) // en bâtons
```



Que peuvent être les coefficients `p` et `n` ?

3.3 Moments de la loi binomiale

Proposition 9 (*Espérance, variance de la loi binomiale*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors, on a :

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad\qquad \mathrm{Var}(X) = npq$$

Démonstration :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On a donc $\forall k = 0 : n,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On va calculer les sommes qui définissent $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$ en utilisant la petite formule :

- **Espérance**

  On écrit $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

  On a la petite formule : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour chaque terme *(sauf celui où $k=0$ qui est nul !)*

  $$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1}\, q^{n-1-\ell} \qquad \textit{(changement d'indice } \ell = k-1\textit{)} \\ &= np\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell}\, q^{n-1-\ell} \end{aligned}$$

  On reconnaît la formule du binôme de Newton pour $p+q$.
  Il vient donc bien $\mathbb{E}[X] = np \times (\underbrace{p+q}_{=1})^{n-1} = np$.

- **Calcul intermédiaire** de $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

  Comme pour $\mathbb{E}[X]$, on change d'indice, après avoir appliqué la petite formule *(deux fois !)* :

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} (k-1)n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= n\sum_{k=2}^{n} (n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell} q^{n-2-\ell} \end{aligned}$$

  Par la formule du binôme, il vient : $\mathbb{E}[X(X-1)] = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2$.

- **Variance**

  On écrit la formule de Kœnig-Huygens : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \Big(\mathbb{E}[X]\Big)^2$,

  avec la forme : $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$.

  Il vient donc : $\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np[(n-1)p + 1 - np]$.

  Ainsi : $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = npq$. ■

4 Exercices

Exercice 1 (*Formule sommatoire de Pascal* (the « hockey stick » formula))

1. **a)** Rappeler la formule de Pascal.

b) En déduire que $\forall d \in \mathbb{N}$, et $k \geqslant d$, on a $\binom{k}{d} = \binom{k+1}{d+1} - \binom{k}{d+1}$

2. **a)** Par sommation télescopique, montrer que $\forall d \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant d$, on a $\sum\limits_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \binom{n+1}{d+1}$.

b) Par changement d'indices, montrer que $\forall d \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant d$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k+d-1}{d} = \binom{n+d}{d+1}$.

3. En déduire les formules $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+d-1) = \frac{1}{d+1} \times n(n+1)(n+2)\dots(n+d)$. *(pour $d \in \mathbb{N}$)*

Exercice 2 (*Séries géométriques dérivées par la formule de Pascal*)

Soit $q \in \mathbb{R}$ un réel tel que $|q| < 1$.

On montre que pour $d \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=d} k(k-1)(k-2)\dots(k-d+1)q^{k-d} = \frac{d!}{(1-q)^{d+1}}$.

1. Traduire cette formule pour $d = 0, 1$ et 2.

2. Convergence de la série. Soit $d \in \mathbb{N}$ *(fixé dans cette question)*

a) Montrer que $\forall k \geqslant d$, on a $0 \leqslant k(k-1)(k-2)\dots(k-d+1) \leqslant k^d$.

b) Déduire quand $k \to +\infty$ la négligeabilité $k(k-1)(k-2)\dots(k-d+1)q^{k-d} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=d}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-d+1)q^{k-d}$ converge.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $S_d = \displaystyle\sum_{k=d}^{+\infty} \binom{k}{d} q^{k-d}$.

3. a) Combien vaut S_0 ?

b) Vérifier la formule $\sum_{k=d}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-d+1)q^{k-d} = d!\, S_d$.
Que reste-t-il à montrer sur S_d ? *(on n'utilisera maintenant plus l'expression à gauche.)*

4. Montrer que l'on peut écrire : $S_d = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+d}{d} q^k$.

5. a) Montrer que $\binom{k+d}{d} + \binom{k+d}{d+1} = \binom{k+d+1}{d+1}$

b) En déduire que $S_{d+1} = S_d + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k+d}{d+1} q^k$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k+d}{d+1} q^k = qS_{d+1}$.

d) En déduire que $(1-q)S_{d+1} = S_d$, et que la suite (S_d) est géométrique.

6. Conclure sur le terme général de la suite (S_d) et sur l'objectif de l'exercice.

4.1 Polynômes de Bernstein

Pour $x \in \mathbb{R}$, et $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
On s'intéresse à ces polynômes pour $x \in [0\,;1]$.

Exercice 3 (*Remarques générales*)

1. Le polynôme $\mathcal{B}_{n,k}$ est de degré n.

2. Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $B_{n,k}(x) \geqslant 0$.

3. Par la formule du binôme de Newton, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1$.

4. Combien y a-t-il de termes dans la somme ?
En déduire que $\forall x \in [0\,;1]$, la moyenne pour $k \in [\![0, n]\!]$ des $B_{n,k}(x)$ est $\frac{1}{n+1}$.

Exercice 4 (*Dérivation logarithmique*)

1. Montrer que $\forall x \in]0\,;1[$, on a $B_{n,k}(x) > 0$.

On pose $b_{n,k}(x) = \ln\left(B_{n,k}(x)\right)$.

2. Montrer que la fonction $b_{n,k}$ est dérivable sur $]0\,;1[$, et que $b'_{n,k}(x) = \frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x}$.

3. En déduire le tableau de signes-variations de $(b'_{n,k}, b_{n,k})$ sur $]0\,;1[$.

4. Vérifier que le maximum s'écrit :
$$\begin{aligned} b_{n,k}\left(\tfrac{k}{n}\right) = &[\ln((n-k)!) - (n-k)\ln(n-k)] \\ &+ [\ln(k!) - k\ln(k)] \\ &- [\ln(n!) - n\ln(n)] \end{aligned}$$

soit : $$B_{n,k}\left(\tfrac{k}{n}\right) = \frac{\dfrac{k!}{k^k} \cdot \dfrac{(n-k)!}{(n-k)^{n-k}}}{\dfrac{n!}{n^n}}.$$

Exercice 5 (*Une somme de Riemann*)

1. Montrer qu'on a : $\ln(k!) - k\ln(k) = \sum_{i=1}^{k} \ln(i) - k\ln(k) = \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\frac{i}{k}\right) = k \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\frac{i}{k}\right)$.

2. Montrer la convergence et calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

3. Expliquer en quoi il est raisonnable de s'attendre à ce que $\ln(k!) - k\ln(k) \sim -k$.

Exercice 6 (*Télescopage des polynômes de Bernstein*)

1. Établir la formule de dérivation : $\quad B'_{n+1,k}(x) = (n+1)[B_{n,k-1}(x) - B_{n,k}(x)]$.

(avec la convention $B_{n,-1}(x) = 0$.)

On pose $F_{n,\ell}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\ell} B_{n,k}(x)$

2. Par une sommation télescopique, déduire de **1.** que l'on a : $F'_{n+1,\ell}(x) = -(n+1)B_{n,\ell}(x)$

3. En déduire une primitive de $B_{n,\ell}$.

Exercice 7 (*Polynômes de Bernstein* II *: quelques intégrales*)

1. L'intégrale $\int_0^1 B_{n,k}(x)\,dx$.

a) Montrer *(voir ex?? q 2.)* qu'une primitive de $B_{n,k}$ est donnée par $\frac{1}{n+1}S_{n+1,k+1}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 B_{n,k}(x)\,dx = \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que la fonction $(n+1)B_{n,k}$ est une densité sur $[0;1]$.

2. L'intégrale $\int_0^1 x\,B_{n,k}(x)\,dx$.

a) Établir la « formule de multiplication par x » : $\forall n,k$ entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$, et $x \in \mathbb{R}$,

$$xB_{n,k}(x) = \frac{k+1}{n+1}B_{n+1,k+1}(x)$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,B_{n,k}(x)\,dx = \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}$.

c) En déduire que si X admet pour densité sur $[0;1]$ la fonction $(n+1)B_{n,k}$, alors $\mathbb{E}[X] = \frac{k+1}{n+2}$.

3. L'intégrale $\int_0^1 x^2\,B_{n,k}(x)\,dx$.

a) Vérifier

$$x^2B_{n,k}(x) = \frac{(k+1)(k+2)}{(n+1)(n+2)}B_{n+2,k+2}(x)$$

b) En déduire $\int_0^1 x^2\,B_{n,k}(x)\,dx\frac{(k+1)(k+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

c) En déduire $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{(n+2)(n+3)}$

d) En déduire $\mathrm{Var}(X) = \frac{k+1}{n+2}\left(\frac{k+2}{n+3} - \frac{k+1}{n+2}\right) = \frac{k+1}{n+2}\left(\frac{n+1-k}{(n+2)(n+3)}\right)$

Exercice 8 (*Follow-up de l'exercice 2*)

On note $S_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_{n,k}(x)$ où l'on entend $B_{n,k} = 0$ pour $n < k$.

1. Montrer par la formule de Pascal que $B_{n+1,k+1}(x) = xB_{n,k}(x) + (1-x)B_{n,k+1}(x)$

2. En déduire que $S_{k+1}(x) = xS_k(x) + (1-x)S_{k+1}(x)$.

3. En déduire que la suite $(S_{k+1}(x))$ est constante *(par rapport à k, pas x !)*

4. *(Montrer que $S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{n,k}(x) = \frac{1}{1-x}$.)*