Algorithme du pivot de Gauss

Matrice augmentée **échelonnée** équivalente à un système linéaire *(fournie par l'alg. du pivot de Gauss)*

$$\left[\begin{array}{c|c} L_1 & y_1 \\ L_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ L_n & y_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \pi_1 & * & * & * & \dots \\ & & \pi_2 & * & \dots \\ & & & 0= & \kappa_1 \\ & & & 0= & \kappa_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Conditions de compatibilité} \end{array}$$

- **Vocabulaire des systèmes échelonnés**
  - $\star$) *Inconnue principale :* associée à un des pivots $\pi_i \neq 0$
  - $\star$) *Inconnue secondaire :* **pas** associée à un pivot. Elle joue le rôle de paramètre.
  - $\star$) *Compatibilité :* le système admet des solutions *ssi* on a 0 en face des lignes nulles.

Familles de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- **Combinaisons linéaires** de $\mathcal{F}$
  - Une **combinaison linéaire** de $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est un vecteur $\vec{v}$ qui s'écrit $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p$, pour des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.
  - Le **sous-espace engendré** par $\mathcal{F}$ est l'ensemble des c.l. de $\mathcal{F}$. On note Vect($\mathcal{F}$).
  - *(dans $\mathbb{R}^n$)* La **matrice de la famille** s'écrit $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Pour $X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$ le **vecteur des coefficients**, on a $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p = AX$.
- **(In)dépendance linéaire**
  - Une équation $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}$ s'appelle **relation de dépendance linéaire** Elle est **non-triviale** si l'un des λ_i est non nul.
  - Vocabulaire : fam. liée, libre, indépendance linéaire, vecteurs colinéaires, coplanaires.
  - *(dans $\mathbb{R}^n$)* On trouve si $\mathcal{F}$ est liée en résolvant $AX = \vec{0}$, pour A matrice de la famille.
  - Principe de la **complétion d'une famille libre** par un nouveau vecteur.

Sous-espaces vectoriels

- **Définition**

  Un **sous-espace vectoriel** F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui
  - est non-vide et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
  - est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.
- **Dans** $\mathbb{R}^n$

  Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par l'alg. du pivot.
  - $\star$) *équations $\rightsquigarrow$ base :*
    - on échelonne le système d'équations
    - on exprime les inconnues principales en termes des inc. secondaires *(paramètres)*
    - on fait apparaître des vecteurs à droite *(éq. tautologique pour les paramètres)*
  - $\star$) *base $\rightsquigarrow$ équations :*
    - on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice $\mathcal{F}$
    - les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.