Colles semaine 5 : situations markoviennes

Somme de variables indépendantes

- **Principe de l'étude** de $S = X + Y$ où X, Y indépendantes de loi connu
  - Valeurs possibles $S(\Omega) = \{x + y, \quad x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$
  - Décomposition de l'événement : $[S = n] = \bigsqcup_{\substack{k \in X(\Omega) \\ n-k \in Y(\Omega)}} [X = k, Y = n - k]$ *(puis passage au probas.)*
- **Linéarité de l'espérance** $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ *(même si X, Y pas indépendantes)*
- **Additivité de la variance** $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ *(si X, Y **indépendantes**)*
- **Stabilité additive de la loi de Poisson** pour $\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mu) \end{array}\right\}$ indép$^{\text{tes}}$ $\Rightarrow$ $X + Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda + \mu)$.

Situations markoviennes

Indépendance multiple de $X_1, \ldots, X_n$

- **Définition** les probabilités conjointes doivent être le produit des probabilités marginales
- **Lemme des coalitions**

une *v.a.* ne dépendant que de certaines des *v.a.* X_i est indépendante de toutes les autres.

Le processus de Bernoulli

- **Description** Une suite de v.a. $\epsilon_1 \ldots \epsilon_n \ldots \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ mut. indépendantes
- **Score cumulé :** $X_n = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Formule et interprétation : $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

(Thèmes connexes : coef. binomiaux, binôme de Newton, espérance, variance)

- **Stabilité additive de la loi binomiale** pour $\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \end{array}\right\}$ indép$^{\text{tes}}$ $\Rightarrow$ $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.
- **Rang d'apparition du premier succès** $T = \min\{k \geqslant 1 | \epsilon_k = 1\}$ de loi $\mathcal{G}(p)$

(+ principe de l'étude du temps T_s d'atteinte d'un score $s \geqslant 2$ donné.)

Situations markoviennes

Formule des probabilités totales

- **Système complet d'événements**

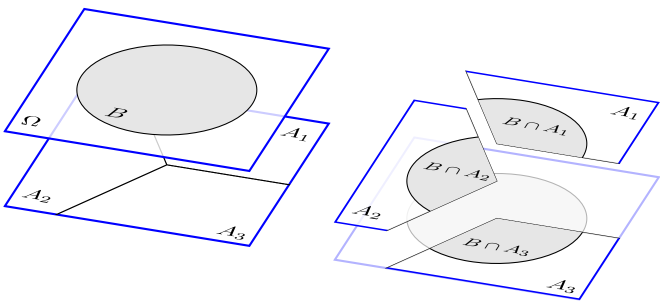
(principe de la disjonction des cas)

$\star$) *deux-à-deux incompatibles :*

$A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$

$\star$) *collectivement exhaustifs :*

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



- **Formule des probas totales**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B) \end{aligned}$$

(on décompose B dans le système complet)

Études de situations Markoviennes

Pour une suite d'expérience consécutives, savoir, le cas échéant :

- **Identifier :**
  - les états possibles
  - les probabilités de transition *(faire un graphe de transitions)*
- **Mettre en équations** l'évolution d'une étape à la suivante par la formule des probas totales.
- **Chaîne à deux états :** étude de relations arithmético-géométriques.

1 Les questions de cours

1. Définition de l'indépendance multiple *(mutuelle)*.

2. La stabilité additive de la loi de Poisson + la formule du binôme de Newton.

3. La formule des probabilités totales, la formule des probabilités composées.

4. Modélisation de l'expérience de Bernoulli, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

5. Principe de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.