

Séries

le 29 septembre 2016

1 Convergence et divergence de séries

Voir aussi les exercices suivants du TD 3 :

- ▶ **Exercice 6** : Utilisation des séries de références
- ▶ **Exercice 7** : Sommations télescopiques
- ▶ **Exercice 8** : Une intégration terme-à-terme (le développement de $\ln(2)$)

Exercice 1 (Convergence de la série de Bâle $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$)

1. Montrer que $\forall n \geq 2$, l'on a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.
 - a) Par récurrence.
 - b) En calculant et en sommant télescopiquement $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Application à $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.
 - a) Montrer que $\forall n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.
 - b) En déduire que la suite des sommes partielles $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est majorée. Conclure.

Exercice 2 (L'inégalité $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. Pour cela on pourra :
1. Utiliser l'inégalité $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ (ou bien : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x-1$).
 2. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction \ln sur le segment $[n; n+1]$.
 3. Écrire l'équation de la tangente au graphe $y = \ln(x)$ en $x_0 = n$, et conclure par concavité.
 4. Étudier les variations de la fonction $u : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$.
 5. Encadrer l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$.

Exercice 3 (Divergence de la série harmonique)

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer grâce à l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1$, que $h_n \geq \ln(n+1)$.
 - a) Par récurrence.
 - b) Par une sommation télescopique.
 2. En déduire que la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.
 3. Montrer que les suites définies par $a_n = h_n - \ln(n+1)$ et $b_n = h_n - \ln(n)$ sont adjacentes.
(On utilisera l'inégalité $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$)

Exercice 4 (Convergence d'une série en $n^{-\frac{3}{2}}$)**1. Une inégalité pour $n \geq 1$**

- a) Montrer $\forall n \geq 1$, l'écriture $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} \right]$.
- b) Montrer que $\forall x \leq 1$, $\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.
- c) En déduire que $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}(n+1)}$.

2. Application à la série $S = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$

- a) Par une sommation télescopique, en déduire $\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{N+1}}$.
- b) En déduire une majoration des sommes partielles de la série S .
- c) En déduire que la série S est convergente.

2 Exemples d'applications en probabilités**Exercice 5 (Calculs de séries géométriques et dérivées)**

Justifier la convergence et calculer la somme des séries « géométriques-et-dérivées » suivantes

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $S_1 = \sum_{n=1} \frac{1}{10^n}$ | 3. $S_3 = \sum_{n=2} \frac{n}{3^n}$ | 5. $S_5 = \sum_{n=2} \frac{n(n-1)}{4^n}$ |
| 2. $S_2 = \sum_{n=1} \frac{n}{2^{n-1}}$ | 4. $S_4 = \sum_{n=1} \frac{2n+1}{3^n}$ | 6. $S_6 = \sum_{n=2} \frac{n^2+n}{4^n}$ |

Exercice 6 (Moments du temps de deuxième atteinte)

On répète des issues indépendantes d'une expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ soit $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$.
On note T_2 le rang d'apparition du **deuxième** succès, avec $p \in]0; 1[$, et $q = 1 - p$.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire T_2 peut-elle prendre ?

On admet que la loi de T_2 est donnée par : pour $\forall k \geq 2$, $\mathbb{P}(T_2 = k) = \underbrace{(k-1)pq^{k-2}}_{\text{exact}^t \text{ un succès avant le temps } k} p$.

2. Vérifier que l'on définit ainsi une loi discrète de probabilités.**3. Démontrer que l'on a : $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2}{p}$.**

4. On admet $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)q^{k-3} = \frac{6}{(1-q)^4}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_2(T_2-2)]$.

5. Montrer que $\text{Var}(T_2) = \frac{2q}{p^2}$.**Exercice 7 (Exemples de calculs pour une loi finie)**

On note M le plus grand des résultats obtenus au jet de 2 dés à n faces (*num. de 1 à $n \geq 1$*).

1. Quelles valeurs la variable aléatoire M peut-elle prendre ?

On admet que la loi de M est donnée par $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k-1}{n^2}$.

2. Vérifier que cette expression définit bien une loi discrète de probabilités.**3. Calculer la fonction de répartition de M .****4. Montrer que l'on a : $\mathbb{E}[M] = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$** **5. (Pour ceux qui aiment les calculs) On donne $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.**

Montrer que $\mathbb{E}[M^2] = \frac{3n^3+4n^2-1}{6n}$ et en déduire $\text{Var}(M)$.