Séries

le 30 septembre 2016

1 Convergence et divergence de séries

Voir aussi les exercices suivants du TD 3 :

- **Exercice 6 :** Utilisation des séries de références
- **Exercice 7 :** Sommations télescopiques
- **Exercice 8 :** Une intégration terme-à-terme *(le développement de* $\ln(2)$*)*

Exercice 1 (*Convergence de la série de Bâle* $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$)

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, l'on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 1-\frac{1}{n}$.

a) Par récurrence.

b) En calculant et en sommant télescopiquement $\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$.

2. Application à $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$.

b) En déduire que la suite des sommes partielles $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ est majorée. Conclure.

Exercice 2 (*L'inégalité* $\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\frac{1}{n}$ *pour* $n\in\mathbb{N}^*$)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\frac{1}{n}$. Pour cela on pourra :

1. Utiliser l'inégalité $\forall x > -1,\ \ln(1+x)\leqslant x$ *(ou bien :* $\forall x>0,\ \ln(x)\leqslant x-1$*)*.

2. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur le segment $[n\,;n+1]$.

3. Écrire l'équation de la tangente au graphe $y=\ln(x)$ en $x_0=n$, et conclure par concavité.

4. Étudier les variations de la fonction $u : x\mapsto \ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x}$.

5. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 3 (*Divergence de la série harmonique*)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer grâce à l'inégalité $\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}$, $\forall k\geqslant 1$, que $h_n\geqslant\ln(n+1)$.

a) Par récurrence.

b) Par une sommation télescopique.

2. En déduire que la série harmonique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}$ diverge.

3. Montrer que les suites définies par $a_n=h_n-\ln(n+1)$ et $b_n=h_n-\ln(n)$ sont adjacentes.

(On utilisera l'inégalité $\ln(n+1)-\ln(n)\geqslant\frac{1}{n+1}$ *pour* $n\geqslant 1$*)*

Exercice 4 (*Convergence d'une série en $n^{-\frac{3}{2}}$*)

1. Une inégalité pour $n \geqslant 1$

a) Montrer $\forall n \geqslant 1$, l'écriture $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}\right]$.

b) Montrer que $\forall x \leqslant 1,\ \sqrt{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}$.

c) En déduire que $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}(n+1)}$

2. Application à la série $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$

a) Par une sommation télescopique, en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \leqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{N+1}}$.

b) En déduire une majoration des sommes partielles de la série S.

c) En déduire que la série S est convergente.

2 Exemples d'applications en probabilités

Exercice 5 (*Calculs de séries géométriques et dérivées*)

Justifier la convergence et calculer la somme des séries « géométriques-et-dérivées » suivantes

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{10^n}$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{2^{n-1}}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{n=2} \frac{n}{3^n}$
4. $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n+1}{3^n}$
5. $S_5 = \displaystyle\sum_{n=2} \frac{n(n-1)}{4^n}$
6. $S_6 = \displaystyle\sum_{n=2} \frac{n^2+n}{4^n}$

Exercice 6 (*Moments du temps de deuxième atteinte*)

On répète des issues indépendantes d'une expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ soit $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$.
On note T_2 le rang d'apparition du **deuxième** succès, avec $p \in]0\,;1[$, et $q = 1 - p$.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire T_2 peut-elle prendre ?

On admet que la loi de T_2 est donnée par : pour $\forall k \geqslant 2$,$\mathbb{P}(T_2 = k) = \underbrace{(k-1)pq^{k-2}}_{\text{exact}^{\text{t}} \text{ un succès avant le temps } k}\ p$.

2. Vérifier que l'on définit ainsi une loi discrète de probabilités.

3. Démontrer que l'on a : $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2}{p}$.

4. On admet $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)q^{k-3} = \frac{6}{(1-q)^4}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_2(T_2-2)]$.

5. Montrer que $\mathrm{Var}(T_2) = \frac{2q}{p^2}$.

Exercice 7 (*Exemples de calculs pour une loi finie*)

On note M le plus grand des résultats obtenus au jet de 2 dés à n faces *(num. de 1 à $n \geqslant 1$)*.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire M peut-elle prendre ?

On admet que la loi de M est donnée par $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(M = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$

2. Vérifier que cette expression définit bien une loi discrète de probabilités.

3. Calculer la fonction de répartition de M.

4. Montrer que l'on a : $\mathbb{E}[M] = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$

5. *(Pour ceux qui aiment les calculs)* On donne $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Montrer que $\mathbb{E}[M^2] = \frac{3n^3+4n^2-1}{6n}$ et en déduire $\mathrm{Var}(M)$.