

Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Table des matières

1	Introduction : rappels sur \mathbb{R}^n	2
1.1	Généralités : définitions	2
1.2	Le plan \mathbb{R}^2 , ses droites vectorielles	3
1.3	L'espace \mathbb{R}^3 , ses droites et plans vectoriels	4
2	Familles de vecteurs : généralités	4
2.1	Le vocabulaire des espaces vectoriels	4
2.2	Sous-espaces vectoriels engendrés, familles génératrices	5
2.3	Relations de dépendance linéaire, familles liées ou libres	8
3	Théorie de la dimension	11
3.1	Bases d'un espace vectoriel	12
3.2	Dimension et sous-espaces vectoriels	13
3.3	Rang d'une famille de vecteurs	15
4	Applications linéaires	16
4.1	Définitions, représentation matricielle canonique	16
4.2	Noyau et image	16
4.3	La formule du rang	18

1 Introduction : rappels sur \mathbb{R}^n

1.1 Généralités : définitions

Définitions

On note $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur générique de \mathbb{R}^n . Les x_i sont des réels, les coordonnées cartésiennes de \vec{v} . On représente \mathbb{R}^n pour $n = 1, 2, 3$ comme une droite, un plan, un espace tridimensionnel.

Opérations sur les vecteurs

- **Addition** On peut additionner des vecteurs de même format, composante par composante
- **Multiplication par un scalaire** On peut multiplier un vecteur par un scalaire, composante par composante

Combinaison linéaire

Étant donnés des vecteurs $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p$ de même format, on dit que \vec{v} est combinaison linéaire de ces vecteurs si on peut écrire : $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

- $2(1, 2) - 3(2, -2)$.
- Vérifier que $(1, -1)$ est combinaison linéaire de $(2, 3)$ et $(1, 2)$.
- À quelle condition sur a, b, c le vecteur (a, b, c) est-il combinaison linéaire de $(1, 0, 1)$, et $(1, -1, -1)$?

Définition 1 (*Matrice d'une famille de vecteurs*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

La **matrice de la famille \mathcal{F}** est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les \vec{u}_i , soit la matrice $A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Bigg\} n \text{ lignes}$

Matrice de la famille et combinaisons linéaires

Pour $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$, un **vecteur des coefficients**, on a $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = A\Lambda$.

($\Lambda = \lambda$ majuscule = Lambda)

L'algorithme du pivot de Gauss

Étant donnée un système d'équations affine, l'algorithme du pivot de Gauss fournit un système **échelonné** équivalent

$$\text{Système échelonné} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 + \text{---} = \dots \\ \pi_2 + \text{---} = \dots \\ 0 = \kappa_1 \\ 0 = \kappa_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Équations « efficaces »} \\ \text{Conditions de compatibilité} \end{array}$$

► **Vocabulaire des systèmes échelonnés**

- ★) *Inconnue principale* : associée à un des pivots $\pi_i \neq 0$
- ★) *Inconnue secondaire* : **pas** associée à un pivot. Elle joue le rôle de paramètre.
- ★) *Compatibilité* : le système admet des solutions ssi on a 0 en face des lignes nulles.

Formule du rang, version provisoire

On peut écrire la relation

$$\text{nb. de paramètres} = \text{nb. d'inconnues} - \text{nb. d'éq}^{\text{ns}} \text{ efficace}$$

où les deux termes s'évaluent **une fois le système échelonné** comme suit :

- **équation efficace** : une équation dans lequel apparaît un pivot
(*donc, où apparaît une inconnue principale*)
- **paramètre** : une inconnue secondaire = une inconnue qui n'est pas principale.

Comme les inconnues principales n'apparaissent qu'une seule fois dans leur colonne (*sur une seule équation*) le nombre d'équations efficaces est donc égal au nombre d'inconnues principales.

1.2 Le plan \mathbb{R}^2 , ses droites vectorielles

On s'intéressera plus particulièrement aux droites du plan qui passent par l'origine :

Définition 2 (*Droite vectorielle, vecteur directeur*)

Une **droite vectorielle** \mathcal{D} est un sous-ensemble du plan $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dont les vecteurs sont exactement les multiples d'un certain vecteur $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ (*fixé*) non-nul ($\vec{d} \neq 0$).

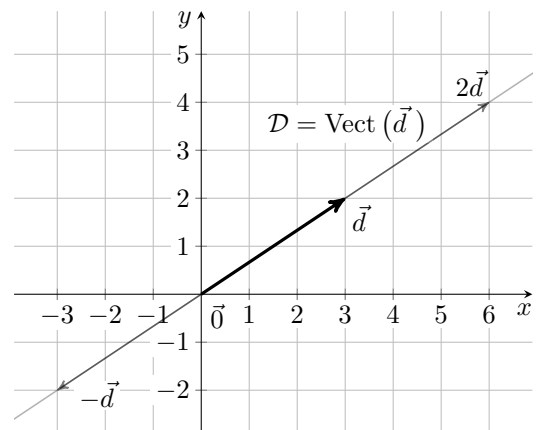
- On note alors $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$.
- On dit que la droite \mathcal{D} est la droite **engendrée** (*ou dirigée*) par le vecteur \vec{d} .
- On dit que le vecteur \vec{d} est un **vecteur directeur** de la droite \mathcal{D} .

Remarque

La droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{d})$ est la (*seule!*) droite du plan \mathbb{R}^2 qui passe par l'origine $\vec{0}$ et par l'extrémité du vecteur directeur \vec{d} .

Exemple graphique : Ci-contre on a choisi $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$ est donc formée de tous les multiples de \vec{d} , parmi lesquels on a placé $2\vec{d}$ et $-\vec{d}$.



Proposition 3 (*Équation de droite*)

$$ax + by = 0.$$

Proposition 4 (*Intersection de deux droites*)

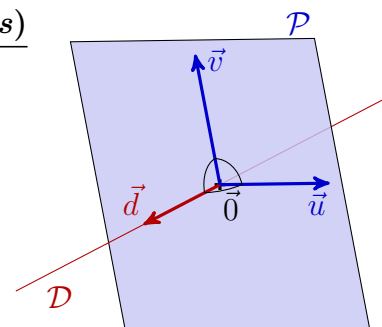
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 distinctes ($\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$) du plan \mathbb{R}^2 .

Alors l'intersection de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ est l'origine : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{ \vec{0} \}$.

1.3 L'espace \mathbb{R}^3 , ses droites et plans vectoriels

Définition 5 (*Sous-espaces vectoriels, vecteurs directeurs*)

- ▶ Droite vectorielle $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$
- ▶ Plan vectoriel $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$



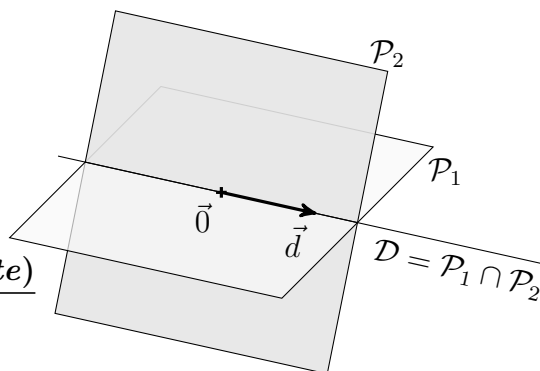
Proposition 6 (*Équation de plan*)

$$ax + by + cz = 0.$$

Proposition 7 (*Intersection de deux plans*)

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux plans distincts de l'espace \mathbb{R}^3 .
Alors leur intersection est une droite vectorielle :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d}).$$



Proposition 8 (*Système d'équation d'une droite*)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

2 Familles de vecteurs : généralités

2.1 Le vocabulaire des espaces vectoriels

Définition 9 (*Vocabulaire des espaces vectoriels*)

▶ Espace vectoriel

C'est un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$.

- ▶ Il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
- ▶ Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$, l'**addition** $\vec{u} + \vec{v}$ fait sens
- ▶ Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, et vecteur $\vec{u} \in E$, le **produit** $\lambda \cdot \vec{u}$ fait sens.
- ▶ Ces deux opérations satisfont aux mêmes règles de calcul formel que celles pour \mathbb{R}^n .

▶ Combinaisons linéaires

Ces deux opérations permettent de former des **combinaisons linéaires** :

$$\star) \text{ de deux vecteurs : } \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\star) \text{ d'une famille finie : } \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k$$

Exemples d'espaces vectoriels :

- ▶ Les espaces cartésiens \mathbb{R}^n
- ▶ Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- ▶ Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$

- ▶ L'espace des applications $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
- ▶ L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 10 (*Sous-espace vectoriel*)

Soit E un espace vectoriel.

On appelle **sous-espace vectoriel** de E un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui

- ▶ est non-vide et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
- ▶ est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel

- ▶ Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P'(2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- ▶ Montrer que $\{y' = y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- ▶ Montrer que $\{y' = y + 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 11 ((dans \mathbb{R}^n) *Solutions d'un système d'équations homogène*)

Soit \mathcal{S} un système d'équations **homogène** (le membre de droite = 0) :

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \text{---} + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \text{---} + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \text{---} + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \text{---} + a_{p,n}x_n = 0 \end{array}} \right\} p \text{ équations}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ coordonnées (inconnues)}}$

Alors l'ensemble des solutions de \mathcal{S} :

$$F = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^n \text{ tels que les coordonnées } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ vérifient } \mathcal{S} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés, familles génératrices

Définition 12 (*Sous-espace vectoriel engendré*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F}** l'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaison linéaire des vecteurs qui composent \mathcal{F} .

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \underbrace{\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p}_{\text{comb. lin. des } \vec{u}_i}, \text{ pour } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Caractérisation

- ▶ Comme son nom laisse à penser, l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .
- ▶ En outre, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le **plus petit** s-e. v. contenant les vecteurs de la famille \mathcal{F} .
Plus précisément, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est inclus dans tous les s-e. v. $G \subseteq E$ contenant la famille \mathcal{F} .
(Si $\mathcal{F} \subset G$, alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$.)

Remarque dans \mathbb{R}^n : les deux présentations d'un sous-espace vectoriel

Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n par l'alg. du pivot.

► **équations \rightsquigarrow base** Si F est défini par un système d'équations :

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \text{---} + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \text{---} + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \text{---} + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \text{---} + a_{p,n}x_n = 0 \end{array}} \right\} p \text{ équations}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ coordonnées (inconnues)}}$

1. on échelonne le système d'équations
2. on exprime les inconnues principales en termes des inc. secondaires (*paramètres*)
3. on fait apparaître des vecteurs à droite (*éq. tautologique pour les paramètres*) : $\vec{X} = \sum_{x \text{ inc. sec.}} x \vec{v}_x$

► **base \rightsquigarrow équations**

1. on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice \mathcal{F}
2. les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.

Passer d'un système d'équations à une base :

Soit $F = \left\{ \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \right\}$

Cet ensemble de \mathbb{R}^4 est défini par un système d'équations linéaires. C'est donc un *s-e. v.* de \mathbb{R}^4 .

Pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on résout

$$\vec{X} \in F \iff \begin{cases} \textcircled{1}x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{1}x + y + z + t = 0 \\ \textcircled{1}y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \textcircled{1}x + \text{---} - z - 2t = 0 \\ \textcircled{1}y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \\ z = z \\ y = t \end{cases} \text{ éq}^{\text{ns}} \text{ tautologiques}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{inconnues} \\ \text{principales}}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{inconnues} \\ \text{secondaires} \\ \text{(paramètres)}}$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}_2} \iff \vec{X} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel engendré :

(Conditions de compatibilité du système augmenté générique)

Définition 13 (*Famille génératrice*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est **génératrice** si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

On dit alors aussi que l'espace E est engendré par $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$.

Reformulation : caractère générateur et décomposabilité automatique

La famille \mathcal{F} est génératrice *ssi* tout vecteur $\vec{v} \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ de \mathcal{F} :

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p.$$

Proposition 14 (*Sous-famille génératrice*)

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

Supposons que \mathcal{F} contienne une sous-famille $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ qui soit génératrice.

Alors la famille \mathcal{F} est elle-même génératrice.

Montrer le caractère générateur :

Dans \mathbb{R}^2 , soit \mathcal{F} la famille formée des vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Montrons que la famille \mathcal{F} est génératrice dans \mathbb{R}^2 .

► Approche directe

Cherchons l'équation de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a l'équivalence :

$$\left[\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \right] \iff \left[\text{le système } x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v} \quad (\mathcal{S}) \text{ est compatible.} \right]$$

On échelonne le système (\mathcal{S}) :

$$\begin{aligned} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v} &\iff x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 7z = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ -y + z = b - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} x + 5z = a + 2(b - 2a) \\ y - z = b - 2a \end{cases} \end{aligned}$$

À la dernière étape, le système est échelonné.

Il n'y a alors aucune ($= 0$) équation dans laquelle on a pu éliminer les inconnues x, y et z .

Ce système est donc « automatiquement compatible » (0 condition de compatibilité) pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

La famille \mathcal{F} est donc génératrice.

► Première sous-famille génératrice

Soit $\mathcal{G}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ la famille extraite en excluant le vecteur \vec{u}_3 (d'où l'indice 3 !)

Vérifions que la famille \mathcal{G}_3 est génératrice (en fait même une base de \mathbb{R}^2 !)

La matrice de la famille \mathcal{G}_3 est $P_3 = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Cette matrice est inversible car son déterminant vaut $\det(P_3) = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1 \neq 0$.

De plus, son inverse est donné par : $P_3^{-1} = \frac{1}{\det(P_3)} \cdot \text{complémentaire} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(La complémentaire de $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$: comme qui dirait la transposée de la comatrice...)

Il vient donc : $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Ainsi pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur générique, on a :

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_3 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = P_3^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = -3x + 2y \\ \mu = 2x - y \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{(-3x + 2y)}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + \underbrace{(2x - y)}_{\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}.$$

2.3 Relations de dépendance linéaire, familles liées ou libres

Définition 15 (*Dépendance linéaire*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

► **Relation de dépendance linéaire** (abrégé en : *rel. de dép. lin.*)

Une relation de dépendance linéaire entre $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est une équation de la forme :

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0} \quad (\text{soit } \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}),$$

pour un certain p -uplet de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

(les λ_i sont appelés les **coefficients** de la relation de dépendance linéaire)

► **La relation triviale, les relations non-triviales**

On a **toujours** (pour *n'importe quelle* famille de vecteurs) : $0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$.

Cette relation de dépendance linéaire avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0$ est dite **triviale**.

Les autres rel. de dép. lin. (celles dont au moins un des λ_i est non-nul) sont dites **non-triviales**.

► **Famille liée**

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est **liée** si elle vérifie une rel. de dép. lin. non-triviale.

Exemple : Recherche des rel. de dép. lin. :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par \mathcal{F} .

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la famille \mathcal{F} vérifie la relation de dépendance linéaire : $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$. (on vérifie !)

Les autres relations de dépendance linéaire satisfaites par \mathcal{F} sont les multiples de celle-ci

Proposition 16 (Réécriture d'une relation de dépendance linéaire)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On suppose que \mathcal{F} est liée.

Alors l'un des vecteurs \vec{u}_j de \mathcal{F} s'écrit comme combinaison linéaire des autres :

$$\text{il existe } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ et il existe } \lambda_1, \dots, \underbrace{\widehat{\lambda_j}, \dots, \lambda_p}_{\text{« } \lambda_j \text{ manquant »}}, \text{ tels que : } \vec{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \vec{u}_i$$

Exemple (suite) : Réécritures :

La rel. de dép. lin. $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ peut aussi s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{2}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{3}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2. \end{cases}$$
Proposition 17 (rel. de dép. lin. et élimination dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$)

Chaque relation de dépendance linéaire non-triviale permet d'éliminer un des vecteurs apparaissant dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exemple (suite) : Élimination :

On a obtenu la relation : $\vec{u}_3 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

Ainsi on peut écrire : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)$.

Or les combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)$ sont les combinaisons linéaires de (\vec{u}_1, \vec{u}_2) .

En d'autres termes $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Ainsi on a obtenu la réécriture : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Définition 18 (Vocabulaire : petites familles liées)**► Deux vecteurs**

Si la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée, on dit que \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont **colinéaires**.

► Trois vecteurs

Si la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée, on dit que \vec{u}_1, \vec{u}_2 et \vec{u}_3 sont **coplanaires**.

Exemple (suite) : équation du plan engendré $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

Pour les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a obtenu $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Cherchons l'équation du plan $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sous la forme $ax + by + cz = 0$ (où $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Il nous faut donc :
$$\begin{cases} b + 2c = 0 & (\Leftrightarrow \vec{u}_1 \in \mathcal{P}) \\ -a + 3c = 0 & (\Leftrightarrow \vec{u}_2 \in \mathcal{P}) \end{cases}$$
 On trouve ainsi l'équation $\mathcal{P} : 3x - 2y + z = 0$.

On vérifie que le vecteur \vec{u}_3 satisfait aussi cette équation.

On a bien vérifié que les trois vecteurs \vec{u}_1, \vec{u}_2 , et \vec{u}_3 sont inscrits dans un même plan vectoriel.

(= ils sont coplanaires!)

Une famille **libre** est une famille qui n'est **pas liée** :

Définition 19 (*Indépendance linéaire*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

► **Indépendance linéaire**

On dit que les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ sont **linéairement indépendants** s'ils ne vérifient **aucune relation de dépendance linéaire non-triviale**.

► **Famille libre**

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est **libre** si les vecteurs qui la composent sont linéairement indépendants.
(c'est donc un **simple synonyme**)

Remarques

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ une famille libre dans espace vectoriel E . Alors :

- Aucun des \vec{v}_i n'est nul.
- Les \vec{v}_i sont tous différents.
- Les sous-familles de \mathcal{F} sont libres aussi.

Exemple : montrer qu'une famille est libre :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par \mathcal{F} .

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la seule rel. de dép. lin. satisfaite par la famille \mathcal{F} est triviale : $0\vec{u}_1 - 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = \vec{0}$.

La famille \mathcal{F} est donc libre.

Approche matricielle

(dans \mathbb{R}^n) On trouve si \mathcal{F} est liée en résolvant $AX = \vec{0}$, pour A matrice de la famille.

La proposition suivante étudie la **complétion d'une famille libre** par un nouveau vecteur :

Proposition 20 (*Appendice à une famille libre*)

Soit $\mathcal{F}_p = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre, et $\vec{u}_{p+1} \in E$ un vecteur quelconque.

Notons $\mathcal{F}_{p+1} = (\mathcal{F}_p \parallel \vec{u}_{p+1}) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ la famille complétée.

Alors de deux choses l'une :

- le vecteur \vec{u}_{p+1} **est combinaison linéaire** de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$: $\vec{u}_{p+1} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$.
Alors la famille complétée \mathcal{F}_{p+1} est **liée**.
- le vecteur \vec{u}_{p+1} **n'est pas** combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$:
Alors la famille complétée \mathcal{F}_{p+1} est **libre**.

Application : montrer qu'une famille est libre

En pratique, pour montrer qu'une famille de trois vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre, on peut utiliser la rédaction par étapes :

1. vérifier que $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$,
2. vérifier que \vec{u}_2 n'est pas colinéaire à \vec{u}_1 ,
3. montrer que \vec{u}_3 n'est pas coplanaire à \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

Retour sur l'exemple précédent :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée de :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons par cette méthode que \mathcal{F} est libre :

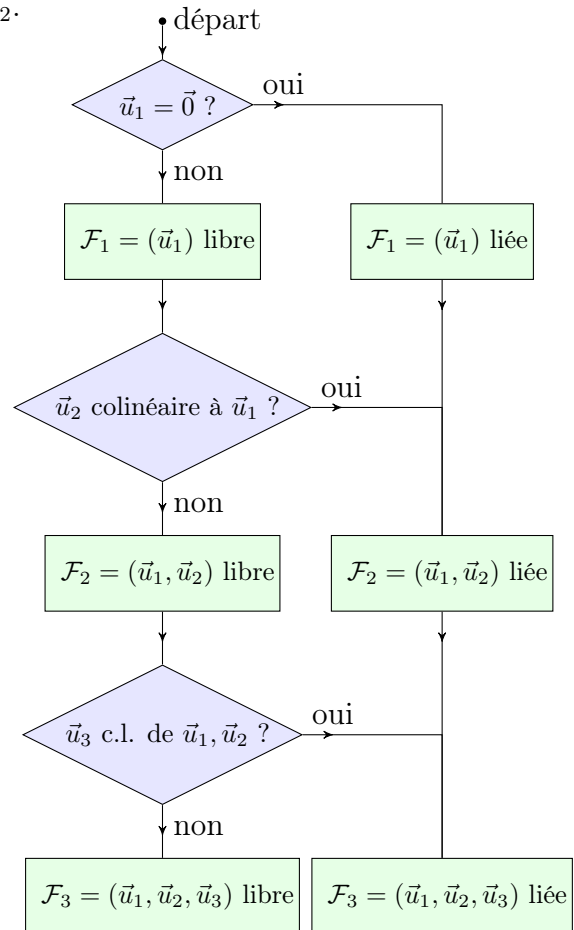
1. $\vec{u}_1 = \vec{0}$? : non.
La famille $\mathcal{F}_1 = (\vec{u}_1)$ est libre.
2. \vec{u}_2 multiple de \vec{u}_1 ? : non.
La famille $\mathcal{F}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.
3. \vec{u}_3 combinaison linéaire de \vec{u}_1, \vec{u}_2 ?

Cherchons si on peut écrire pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_3 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y \\ 1 = x \\ 0 = x + y. \end{cases} \quad (\leadsto \text{non !}) \end{aligned}$$

Ainsi \vec{u}_3 n'est pas combinaison linéaire de \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

La famille \mathcal{F} est donc bien libre.



3 Théorie de la dimension

La notion, générale en mathématiques, de **dimension** formalise la hiérarchisation entre (*p. ex.*) :

- ▶ **dimension 0** : les points isolés (*un grain de sable, un atôme à la Démocrite*)
- ▶ **dimension 1** : les lignes ou courbes (*un câble, un spaghetti*)
- ▶ **dimension 2** : les surfaces (*un drap étendu, une feuille de papier*)
- ▶ **dimension 3** : les volumes (*une brique, l'eau contenue dans une bouteille*)

On en développe une définition pour les (*sous*-)espaces vectoriels, et quelques propriétés, notamment la **formule du rang**.

L'intuition qui en découle forme un outil puissant en algèbre linéaire et permet souvent :

- ▶ de (*parfois...*) s'épargner de fastidieux (*et périlleux!*) calculs,
- ▶ de vérifier aisément la cohérence des résultats obtenus.

3.1 Bases d'un espace vectoriel

Définition 21 (*Base d'un espace vectoriel E*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille (*finie !*) de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une **base de E** , si :

- ▶ \mathcal{B} est libre (*pas de relation de dépendance linéaire non-triviale entre les vecteurs de \mathcal{B}*) **et**
- ▶ \mathcal{B} est génératrice : $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ (*tout entier*)

Proposition 22 (*Décomposition dans une base*)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini, et soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base.

Alors tout vecteur $\vec{v} \in E$ peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs des vecteurs de \mathcal{B} .

$$\forall \vec{v} \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_p \vec{u}_p = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$$

Remarques

- ▶ La réciproque est vraie : cette propriété (*existence et unicité de la décomposition*) **caractérise** les bases parmi les familles de vecteurs de E .
- ▶ Les n scalaires x_1, x_2, \dots, x_n apparaissant ci-dessus dans la décomposition de \vec{v} s'appelle les **coordonnées** de \vec{v} dans la base \mathcal{B} .

Proposition 23 (*Les coordonnées d'un vecteur le déterminent*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base d'un espace vectoriel E .

1. Soit $\vec{v} \in E$. Notons (x_1, \dots, x_n) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$(\vec{v} = \vec{0}) \iff (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0).$$

(Un vecteur de E est nul ssi ses coordonnées dans la base \mathcal{B} sont toutes nulles.)

2. Soit $\vec{v}, \vec{w} \in E$. Notons (x_i) et (y_i) leurs coordonnées respectives dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$(\vec{v} = \vec{w}) \iff (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = y_i).$$

(Deux vecteurs de E sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans la base \mathcal{B} .)

Bases canoniques :

- ▶ Base canonique de \mathbb{R}^n
- ▶ Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- ▶ Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

3.2 Dimension et sous-espaces vectoriels

Définition 24 (-*Proposition : dimension*)

Soit E un espace vectoriel.

1. On dit que E est **de dimension finie** si E admet une base (*finie !*) $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
2. (*Proposition*) Toutes les bases de E sont alors formées du même nombre de vecteurs :
si $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E , alors **toute autre base** $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E contient le même nombre de vecteurs que \mathcal{B} .
(*c'est-à-dire : $p = n$.*)
3. La **dimension de E** est alors le nombre de vecteurs d'une base quelconque \mathcal{B} .
On note $\dim(E) \in \mathbb{N}$ cet invariant de E .

Démonstration : Admis. ■

Dimension des espaces vectoriels usuels :

- ▶ \mathbb{R}^n on a : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- ▶ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a : $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$
- ▶ $\mathbb{R}_n[X]$ on a : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ (*attention !*)

Droites et plans vectoriels

- ▶ Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une **droite vectorielle**
- ▶ Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un **plan vectoriel**

Proposition 25 (*Dimension d'un sous-espace vectoriel*)

Si $F \subseteq E$ avec E de dim. finie, alors :

- ▶ F est de dim. finie aussi, et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- ▶ il y a égalité ssi $F = E$ (*tout entier*) .

Démonstration : Admis. ■

Interprétation du cas d'égalité

- Ainsi :
- ▶ un point ne contient pas d'autre point que lui-même,
 - ▶ une droite ne contient pas d'autre droite qu'elle-même.
 - ▶ un plan ne contient pas d'autre plan que lui-même,
 - ▶ un espace (*de dim. 3*) ne contient pas d'autre espace (*de dim. 3*) que lui-même.

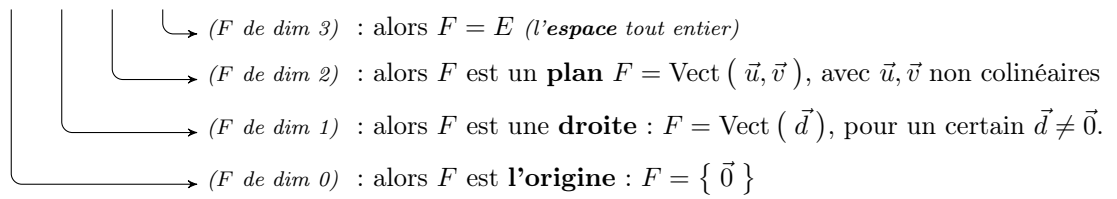
Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 :

$\dim(F)$	0	1	2
nb. d'éq ^{ns}	2	1	0

- ↳ (F de dim 2) : alors $F = E$ (*le plan tout entier*)
- ↳ (F de dim 1) : F est une **droite** : $F = \text{Vect}(\vec{d})$, pour un certain $\vec{d} \neq \vec{0}$.
- ↳ (F de dim 0) : F est l'**origine** : $F = \{\vec{0}\}$

Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 :

dim(F)	0	1	2	3
nb. d'éq ^{ns}	3	2	1	0



3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 26 (*Rang d'une famille de vecteurs*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de E .
On appelle **rang de la famille** \mathcal{F} , la dimension du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} .
On note $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.

Proposition 27 (*Calcul dans \mathbb{R}^n*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n , et $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ sa matrice.
Alors, une fois la matrice A échelonnée (= à la fin du pivot de Gauss), le nombre de pivots restant est égal au rang $\text{rg}(\mathcal{F})$ de la famille de vecteurs \mathcal{F} .

Contexte et notations :

Dans les propositions suivantes, le contexte est comme suit.
Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note :
 $p = \text{Card}(\mathcal{F})$ (nombre de vecteurs dans \mathcal{F}) et $n = \dim(E)$ (dim. de l'espace ambiant).

Proposition 28 (*Les majorations automatiques du rang*)

On a les deux (à la fois) majorations du rang de \mathcal{F} :
 ▶ $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ (par la dimension ambiante)
 ▶ $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ (par son nb. de vecteurs)

Proposition 29 (*Liberté, génération en terme de rang*)

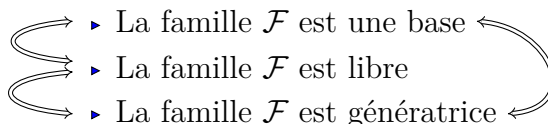
- ▶ La famille \mathcal{F} est **libre** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ (rang = nb de vecteurs de \mathcal{F})
- ▶ La famille \mathcal{F} est **génératrice** ssi $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ (rang = dimension de E)
- ▶ La famille \mathcal{F} est **une base** ssi $p = n$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = n$ (bon nb de vecteurs)

Proposition 30 (*Conditions nécessaires : liberté, génération, base*)

- ▶ Si $p > n$, alors la famille \mathcal{F} ne peut pas être libre. (« trop » de vecteurs dans \mathcal{F})
- ▶ Si $p < n$, alors la famille \mathcal{F} ne peut pas être génératrice. (« pas assez » de vecteurs dans \mathcal{F})
- ▶ Si $p \neq n$, alors la famille \mathcal{F} ne peut pas être une base. (pas « le bon nombre » de vecteurs)

Proposition 31 (*Le cas central (du « bon nombre » de vecteurs)*)

Si $p = n$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :



Reformulation opératoire du dernier point (*bon nombre de vecteurs*)

Si $p = n$, il suffit d'avoir \mathcal{F} libre (ou génératrice) pour déduire que \mathcal{F} est une **base**

4 Applications linéaires

4.1 Définitions, représentation matricielle canonique

Définition 32 (*Application linéaire*)

Soient E , et F deux espaces vectoriels,

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in E, \underbrace{f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}}$$

($\Leftrightarrow f$ préserve les combinaisons linéaires)

Proposition 33 (*Opérations entre applications linéaires*)

- **Combinaison linéaire** L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est donc un espace vectoriel.
- **Composition**

Proposition 34 (*Représentation matricielle canonique*)

La « correspondance canonique » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ [f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n] \longleftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \end{array} \right\} n \text{ lignes}$$

est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{X}) = A\vec{X} = x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p \\ \vec{C}_1 = f(\vec{e}_1), \\ \vec{C}_2 = f(\vec{e}_2), \\ \vdots \\ \vec{C}_p = f(\vec{e}_p) \end{array} \right.$$

4.2 Noyau et image

Deux sous-espaces vectoriels associés à : $\left\{ \begin{array}{l} \text{une application linéaire } f : E \rightarrow F \\ \text{une matrice } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) : \end{array} \right.$

Définition 35 (*Noyau d'une application linéaire, d'une matrice*)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{ \vec{v} \in E \text{ tels que } f(\vec{v}) = \vec{0} \} \\ &= \text{l'ensemble des vecteurs de } E \\ &\quad \text{qui sont annulés par } f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{ \vec{X} \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } A.\vec{X} = \vec{0} \} \\ &= \text{l'ensemble des vecteurs de } \mathbb{R}^p \\ &\quad \text{qui sont annulés par } A \end{aligned}$$

Noyau et relations de dépendances entre les colonnes

Le noyau de A décrit l'ensemble des **relations de dépendance linéaire** entre les vecteurs colonnes \vec{C}_i .

Plus précisément, pour $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ un « vecteur de coefficients », on a l'équivalence :

$$[\Lambda \in \text{Ker}(A)] \iff [\lambda_1 \vec{C}_1 + \lambda_2 \vec{C}_2 + \dots + \lambda_p \vec{C}_p = \vec{0}.]$$

Cette remarque est utile pour $\begin{cases} \text{vérifier la résolution d'un système linéaire} \\ \text{trouver le noyau en « calcul mental »} \end{cases}$

Pratique : Trouver une base du noyau de la matrice A :

- ▶ On résout le syst. d'équa^{ns} $A \cdot \vec{X} = \vec{0}$ pour $\vec{X} = (x_1, \dots, x_p)_{\text{col.}}$ (1 équation par ligne)
- ▶ (Après échelon^{nt} : alg. du pivot de Gauss :) les **inconnues principales** (« à pivot ») s'expriment en fonction des (svt 1 seule) **inc. secondaires** (paramètres)
- ▶ On ajoute des éq^{ns} tautologiques pour écrire $A \cdot \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{X} = z_1 \vec{v}_1 + \dots + z_\nu \vec{v}_\nu$,
- ▶ On conclut : $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\nu)$ et $\nu = \dim[\text{Ker}(A)]$ (= nullité)

Définition 36 (Image d'une application linéaire, d'une matrice)

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{\vec{v} \in F \text{ tq } \exists \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\} & \text{Im}(A) &= \{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \exists \vec{X} \in \mathbb{R}^p, A \cdot \vec{X} = \vec{Y}\} \\ &= \{f(\vec{u}), \text{ quand } \vec{u} \text{ parcourt } E\} & &= \{A \cdot \vec{X}, \text{ quand } \vec{X} \text{ parcourt } \mathbb{R}^p\} \\ &= \text{l'ensemble des vecteurs de } F & &= \text{l'ensemble des vecteurs de } \mathbb{R}^n \\ &\quad \text{qui sont atteints par } f & &\quad \text{qui sont atteints par } A \end{aligned}$$

Interprétation « vecteurs colonnes »

L'image de A décrit l'ensemble des **combinaisons linéaires** entre les \vec{C}_i (sev engendré)
 $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p)$

Proposition 37 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. L'application linéaire f est **injective** ssi $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.
2. L'application linéaire f est **surjective** ssi $\text{Im}(f) = F$.
3. L'application linéaire f est **bijective** ssi $[\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}]$ et $\text{Im}(f) = F$.

Vocabulaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Si f est bijective, alors on dit que f est un **isomorphisme** entre E et F .

(On dit aussi alors que f est **inversible**)

Proposition 38 (*Bijection réciproque d'une application linéaire*)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On suppose que $f : E \rightarrow F$ est bijective (*un isomorphisme*).

Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi une application linéaire.

L'application f (*directe*) et sa réciproque f^{-1} vérifient :

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \text{Id} : F \rightarrow F \\ f^{-1} \circ f &= \text{Id} : E \rightarrow E. \end{aligned}$$
Proposition 39 (*Inversibilité en dimension finie*)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

► Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie.

► Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E .

Alors f est inversible ssi $f(\mathcal{B}) = (f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n))$ est une base de F .

Remarque : dimension et isomorphie

En particulier, F est alors aussi de dimension finie, et $\dim(E) = \dim(F)$.

4.3 La formule du rang**Contexte et notations**

Soient E, F deux espaces vectoriels, et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On suppose que l'espace de départ E est de dimension finie.

Définition 40 (*Rang d'une application linéaire*)

L'image $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie.

Sa dimension s'appelle le **rang** de f , noté :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Théorème 41 (*Formule du rang*)

On a :

$$\underbrace{\dim(E)}_{\substack{\text{dim. de l'esp.} \\ \text{de départ}}} = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Démonstration : Admis. ■

Remarque

Ce résultat est fondamental. On l'utilisera souvent sous l'une des deux formes :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)), \\ \dim(\text{Ker}(f)) &= \dim(E) - \text{rg}(f). \end{aligned}$$

Proposition 42 (Version matricielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On définit le rang comme celui de l'application linéaire associée.

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

2. Le rang de A est aussi le rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes \vec{C}_i :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_p)).$$

3. La formule du rang s'écrit :

$$\underbrace{\text{nb. de col.}}_{=p} = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)).$$

Interprétation de la formule du rang matricielle

On peut écrire la formule du rang sous la forme :

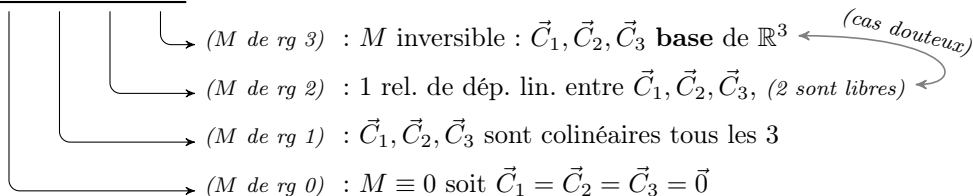
$$\dim(\text{Vect}(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_p)) = \underbrace{p}_{\text{nombre de vecteurs}} - \underbrace{\dim(\text{Ker}(A))}_{\text{nombre de rel. de dép. lin.}}$$

Chaque relation de dépendance linéaire permet d'éliminer l'un des \vec{C}_i du Vect.

Cas possible pour une matrice 3×3 :

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les cas possibles sont les suivants :

$\text{rg}(M)$	0	1	2	3
$\dim[\text{Ker}(M)]$	3	2	1	0



Détermination du rang « progressive »

La même idée que l'application progressive de la Proposition 20 (*appendice à une famille libre*)

