

# Colles semaine 6 : Représentations matricielles des endomorphismes

## 1 La correspondance canonique $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

On construit un **isomorphisme d'espaces vectoriels**  $\Phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ , comme suit :

**Applic<sup>on</sup> linéaire associée à une matrice**

**Matrice canonique d'une applic<sup>on</sup> linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$**

Soit l'application  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ A \mapsto f_A, \end{cases}$

Sa réciproque est  $\Phi^{-1} : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \text{Mat}_{\text{can}}(f) \end{cases}$

où l'application linéaire  $f_A$  **canoniquement associée** à  $A$  s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \vec{X} \mapsto A \cdot \vec{X}, \end{cases}$$

où la **matrice canonique** de  $f$  est donnée par :

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f) = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

## 2 Endomorphismes : représentation matricielle dans une base

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ .

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

C'est la matrice  $(a_{ij})$  définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\vec{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{selon } \vec{u}_1 \\ \rightarrow \text{selon } \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \rightarrow \text{selon } \vec{u}_n \end{matrix}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(\vec{u}_j) = a_{1j} \cdot \vec{u}_1 + a_{2j} \cdot \vec{u}_2 + \cdots + a_{nj} \cdot \vec{u}_n.$$

## 3 Similitude, relation de changement de base

► **Matrices semblables** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices.

On dit que  $A, B$  sont **semblables** s'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  **invertible** telle que :  $A \cdot P = P \cdot B$

► **Opérations** La relation de similitude est compatible avec : produit, puissances, inversion.

► **Relation de changement de base pour  $f \in \mathcal{L}(E)$**   
 Pour deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , on a la relation :  $\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\text{ancienne matrice}} = \underbrace{\text{Pas } \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{nouvelle matrice}} \cdot \underbrace{(\text{Pas } \mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B})^{-1}}_{= \text{Pas } \mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B}}.$

► **Interprétation**

Deux matrices semblables  $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$  représentent le même endomorphisme.

(dans deux bases différentes, avec la matrice de passage  $P$ .)

## 4 Traduction endomorphismes $\longleftrightarrow$ matrices

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  sa matrice dans une base. Menus exemples de traductions :

► **Automorphisme**  $[f \text{ est un automorphisme de } E \text{ (} f \text{ bijectif)}] \iff [A \text{ est invertible}]$ .

(et  $A^{-1}$  est la matrice de  $f^{-1}$ )

► **Relations entre endomorphismes**

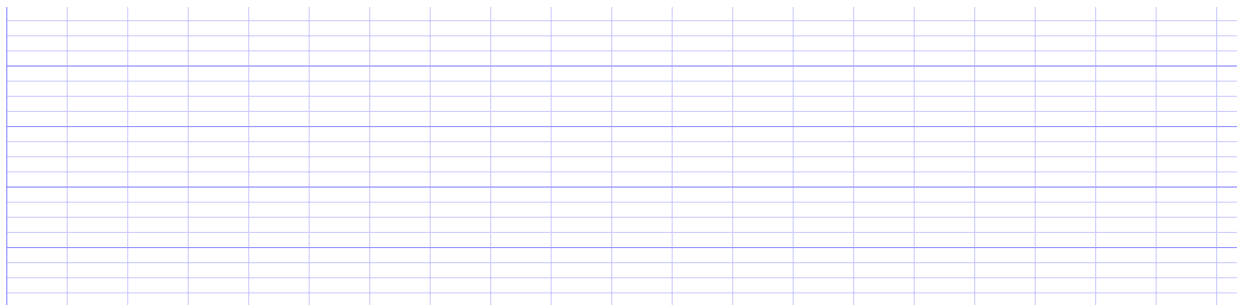
Ex<sup>ple</sup> des polynômes annul<sup>eurs</sup> :  $[(f - \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}] \iff [(A - I_n)^2 \cdot (A - 2I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]$ .

► **Sous-espaces associés**

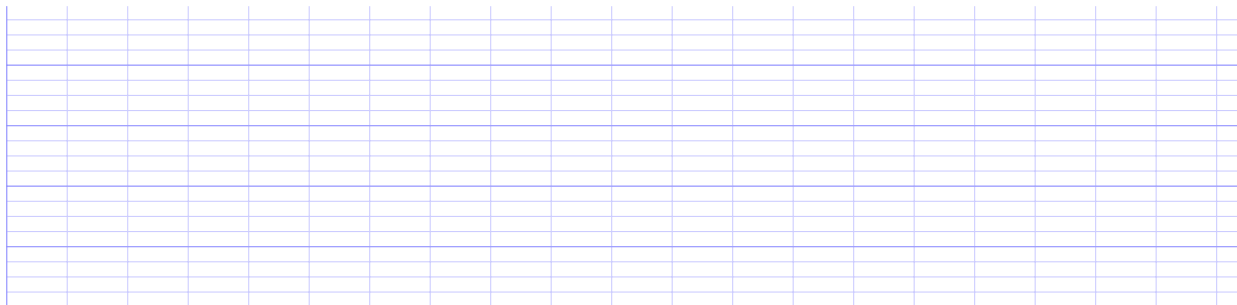
Recherche de sous-espaces  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  par les analogues pour  $A$ , puis traduction  $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow E$ .

## 5 Les questions de cours

1. La correspondance canonique  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ .



2. Décomposition d'un vecteur  $\vec{v} \in E$  dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ . Définition de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .



3. Compatibilité de la relation de similitude avec les opérations matricielles.



4. La relation de changement de bases.



5. Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire, d'une matrice.

