Td 2 : Propriétés des familles de vecteurs

1 Exemples de familles génératrices

Exercice 1 (*Une famille génératrice du plan* $\mathbb{R}^2$) :generatricePlan:

Soient $\vec{u} = \binom{3}{2}$, et $\vec{v} = \binom{7}{5}$.

1. Soit $\vec{w} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Écrire la relation $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{w}$ comme un système d'équations linéaires.

(avec λ, μ les inconnues, et x, y deux paramètres fixés.)

2. Résoudre ce système d'équations linéaires.
En déduire que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on peut écrire : $\binom{x}{y} = (5x - 7y) \cdot \binom{3}{2} + (-2x + 3y) \cdot \binom{7}{5}$

3. En déduire que la famille $\vec{u}, \vec{v}$ est génératrice.

Exercice 2 (*Famille génératrice d'un noyau*) :generatriceNoyau:

Soit F l'ensemble défini par : $F = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ x + y + z = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Montrer que les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrent F.

3. Existe-t-il une famille génératrice de F plus petite ?

4. Donner une famille génératrice de l'espace : $G = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

(dans quel $\mathbb{R}^n$ travaille-t-on alors ?)

Exercice 3 (*Une famille génératrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) :generatriceMatrices:

Soient les matrices : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Pour $i, j \in \{1, 2\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice 2×2 remplie de 0 sauf pour un 1
- à la $i^{\text{ème}}$ ligne,
- $j^{\text{ème}}$ colonne.

1. Montrer que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *(la **base canonique** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)*

2. **a)** Montrer que : $E_{1,1}, E_{2,2} \in \operatorname{Vect}(A_1, A_2)$.

b) Montrer que : $E_{1,2}, E_{2,1} \in \operatorname{Vect}(A_3, A_4)$.

3. En déduire que la famille (A_1, A_2, A_3, A_4) est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (*Les suites géométriques n'engendrent pas* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) :geometriquesPasGeneratrices:

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_p \in \mathbb{R}$.
On construit une suite qui n'appartient pas à $\operatorname{Vect}\left((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\right)$.
Soit $Q = \max(|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_p|) + 1$. On s'intéresse à la suite $(M_n) = \left(Q^n\right)$.

1. Montrer que pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{q_k^n}{Q^n} = 0$.

2. En déduire que si $u \in \operatorname{Vect}\left((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\right)$, alors on a aussi : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{Q^n} = 0$.

3. En déduire que la suite (M_n) n'appartient pas à $\operatorname{Vect}\left((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\right)$.

4. Conclure que la famille $\left((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\right)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5 (*L'exponentielle n'est pas polynomiale*) :expPasPolynomiale:

Soit $n \in \mathbb{N}$, On note P_n le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$.

1. Montrer que $P_n = \mathrm{Vect}((m_k)_{k=0,\dots,n})$, où $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $m_k : x \mapsto x^k$.
2. Montrer que pour $k \leqslant n$, on a : $m_k^{(n+1)} \equiv 0$. *(sa dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ est nulle)*
   Que peut-on en déduire pour les fonctions appartenant à P_n ?
3. En déduire que la fonction $\left(\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x\right) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ n'appartient pas à P_n.
4. Conclure que les fonctions polynomiales n'engendrent pas $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2 Familles libres, familles liées, relations de dépendance linéaire

Exercice 6 (*Appliquer la définition dans* $\mathbb{R}^3$) :libreR3:

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre dans E ?
Si non, donner une relation de dépendance linéaire vérifiée par cette famille.
En déduire alors une écriture de $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}$.

Exercice 7 (*Familles libres dans* $\mathbb{R}^2$) :famLibreR2:

Soient les trois vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ forment une famille liée.
2. Montrer que si on enlève l'un des trois vecteurs de cette famille, elle devient libre.

Exercice 8 (*Indépendance linéaire avec une matrice inconnue*) :indepLinMatriceInconnue:

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice telle que $a + d = 0$ et $b + c = 0$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = I_2$.
Montrer que A, B, C sont linéairement indépendantes.

Exercice 9 (*Une famille libre dans* $\mathbb{R}[X]$) :famLibreRX:

Soient a, b, c trois réels deux-à-deux distincts.
On note : $P(X) = (X - b)(X - c)$, $Q(X) = (X - c)(X - a)$, et $R(X) = (X - a)(X - b)$

1. Calculer la valeur de chacun de ces polynômes en a, b, et c.
2. En déduire que la famille (P, Q, R) est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $U(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$. Montrer que : $U'(X) \in \mathrm{Vect}(P, Q, R)$.

Exercice 10 (*Indépendance de suites géométriques*) :indepGeom:

Montrons que les suites $(u_n) = (2^n)$, $(v_n) = (3^n)$ et $(w_n) = (4^n)$ sont linéairement indépendantes.
Soit une relation de dépendance linéaire, sous la forme : $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = 0$.

1. Que faut-il montrer pour réaliser l'objectif de l'exercice ?
2. **Nullité de γ**
   a) Montrer que si $\gamma \neq 0$, alors : $\lim \left(\frac{\alpha}{\gamma} \cdot u + \frac{\beta}{\gamma} \cdot v + w\right) = +\infty$
   b) En déduire une contradiction, et la valeur de γ dans notre relation de dépendance.
3. En déduire de même que $\beta = 0$, puis conclure.

Exercice 11 (*Indépendance de fonctions exponentielles*) :indepExpo:

On montre que les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes :
- $f : x \mapsto e^x$
- $g : x \mapsto e^{2x}$
- $h : x \mapsto e^{3x}$

Soit une relation de dépendance linéaire, sous la forme : $\alpha \cdot f + \beta \cdot g + \gamma \cdot h = 0$

1. Une première relation entre α,β,γ

a) Calculer $\alpha \cdot f(0) + \beta \cdot g(0) + \gamma \cdot h(0)$.

b) En déduire une équation que doivent satisfaire α,β,γ.

2. Une deuxième relation entre α,β,γ

a) Écrire l'expression de la dérivée de la fonction : $\alpha \cdot f + \beta \cdot g + \gamma \cdot h$.

b) En s'inspirant de la question **1.**, montrer que l'on doit avoir : $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$.

3. Une troisième relation entre α,β,γ, et conclusion

a) Trouver une troisième équation que doivent satisfaire α,β,γ.

b) Résoudre le système : $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0. \end{cases}$ *(système linéaire de Vandermonde)*

c) En déduire que la famille (f,g,h) est libre.

4. Peut-on aussi montrer la liberté de cette famille en étudiant des limites quand $x \to +\infty$?

(la réponse est oui)

Exercice 12 (*Puissances d'un endomorphisme nilpotent*) :indepPuisNilpo:

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme : $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que u est **nilpotent**, c'est-à-dire que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a : $u^n = 0$.
On suppose de plus que n est choisi **minimal**, c'est-à-dire que $u^{n-1} \neq 0$.

*(Cet entier n s'appelle **indice de nilpotence** de u)*

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a :
- $u^k \neq 0$ si $k < n$,
- $u^k = 0$ si $k \geqslant n$.

Soit $(\star)$ une relation de dépendance linéaire s'écrivant : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = 0$. *(où $\lambda_0, \dots \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.)*

2. a) En composant par u^{n-1}, en déduire que : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^{n-1+k} = 0$

b) Quels termes de cette combinaison linéaire sont nuls ? *(on utilisera la question **1.**)*

c) En déduire que $\lambda_0 = 0$.

3. En composant par u^{n-2}, montrer de même que $\lambda_1 = 0$.

4. Montrer par récurrence que tous les coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont nuls.
Conclure.

3 Bases, principe du changement de base

Exercice 13 (*Bases de noyau*) :basesNoyau:

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Calculer le noyau de chacune de ces matrices.
On donnera à chaque fois la conclusion en fournissant une base du noyau s'il est non-nul.

Exercice 14 (*Base d'un sous-espace de polynômes*) :basesSevPol:

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$, et on considère l'application $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0). \end{cases}$

1. Montrer que l'application φ est linéaire
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

On suppose que $n \geqslant 2$. On considère l'application $\psi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P''(0) \end{pmatrix} \end{cases}$

3. Montrer que l'application ψ est linéaire.
4. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 15 (*Puissances d'une matrice nilpotente*) :puisNilpo:

Soit $N = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note aussi I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer N^n.
   b) Montrer que la famille (I_3, N, N^2) est libre.

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivant : $F = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

2. a) Montrer que F est stable par produit : si $M, M' \in F$, alors $M \cdot M' \in F$.
   b) En déduire que F est stable par puissances : si $M \in F$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n \in F$.
   c) En déduire que $\forall M \in F, n \in \mathbb{N}$, on a : $M^n = a_n \cdot I_3 + b_n \cdot N + c_n \cdot N^2$, où $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.
3. On pose $T = I_3 + N$. On va calculer les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ ci-dessus.
   a) Rappeler l'expression de T^0. En déduire a_0, b_0, c_0. Calculer de même a_1, b_1, c_1.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \\ c_{n+1} = b_n + c_n. \end{cases}$
   c) En déduire :
      - la suite (a_n) est constante
      - la suite (b_n) est arithmétique
      - la suite (c_n) est donnée pour $n \in \mathbb{N}$, par : $c_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.
4. Conclure sur l'expression de la suite matricielle (T^n).

Exercice 16 (*Commutant d'une matrice nilpotente*) :commNilpo:

Soit $N = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note aussi I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Calculer N^3.
   b) Montrer que la famille (I_3, N, N^2) est libre.

On considère l'ensemble de matrices : $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M \cdot N = N \cdot M\}$.

2. a) Montrer que F est un espace vectoriel.
   b) Montrer que $(1, N, N^2)$ est une base de F.
   c) Montrer que F est stable par produit : si $M, M' \in F$, alors $M \cdot M' \in F$.
3. a) Montrer que F est stable par inversion : si $M \in F$ est inversible, alors $M^{-1} \in F$.
   b) À quelle condition sur $a,b,c \in \mathbb{R}$, la matrice $M = aI_3 + bN + cN \in F$ est-elle inversible ?
   Montrer que : $\left(I_3 + bN + cN^2\right)^{-1} = I_3 - bN + (b^2 - c)N^2$.
4. On pose $T = I_3 + N + N^2$.
   a) Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto T \cdot M$ est un automorphisme de F.
   Donner l'expresion de son automorphisme inverse.
   b) Montrer que les matrices $T, T - I_3, N^2$ forment une base de F.
   c) Donner les formules de changement de base entre les bases (I_3, N, N^2) et $(T, T - I_3, N^2)$.

Exercice 17 (*Opérateur de translation*) :opTranslationPol:

Rappelons que $(1, X, X^2)$ est appelée base canonique que $E = \mathbb{R}_2[X]$.
Soit d l'application définie, pour $P \in E$, par : $d(P) = P(X+1)$.

1. a) Montrer que l'application d est un endomorphisme de E.
   b) Montrer que cet endomorphisme d est inversible.
   Donner l'expression de son inverse.
2. a) Montrer que $(d(1), d(X), d(X^2))$ est une autre base de E.
   b) Écrire les relations de changement de base dans les deux sens entre ces deux bases.
   Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (d(1), d(X), d(X^2))$.
   La matrice de passage s'obtient en écrivant les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
   On traduit : $\begin{cases} d(1) = 1 \\ d(X) = X + 1 \\ d(X^2) = X^2 + 2X + 1 \end{cases}$ Il vient : $\mathrm{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.
   Dans l'autre sens, on inverse la matrice, ou bien on part de : $\begin{cases} d^{-1}(1) = 1 \\ d^{-1}(X) = X - 1 \\ d^{-1}(X^2) = X^2 - 2X + 1 \end{cases}$.
   On trouve : $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \cdot & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.
3. Que se passe-t-il si on travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$ au lieu de $\mathbb{R}_2[X]$?

4 Corrections

Corrigé Ex 1 (Une famille génératrice du plan $\mathbb{R}^2$)

:generatricePlan:

Soient $\vec{u} = \binom{3}{2}$, et $\vec{v} = \binom{7}{5}$.

1. *Soit $\vec{w} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Écrire la relation $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{w}$ comme un système d'équations linéaires.*

(avec λ, μ les inconnues, et x, y deux paramètres fixés.)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence : $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{w} \iff \binom{3\lambda+7\mu}{2\lambda+5\mu} = \binom{x}{y} \iff \begin{cases} 3\lambda + 7\mu = x \\ 2\lambda + 5\mu = y \end{cases}$

2. *Résoudre ce système d'équations linéaires.*

En déduire que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on peut écrire : $\binom{x}{y} = (5x - 7y) \cdot \binom{3}{2} + (-2x + 3y) \cdot \binom{7}{5}$

La matrice du système est $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Elle est inversible, et son inverse est $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

On résout ainsi le système : $\begin{cases} 3\lambda + 7\mu = x \\ 2\lambda + 5\mu = y \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - 7y = \lambda \\ -2x + 3y = \mu \end{cases}$.

On a donc trouvé la relation : $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ soit :

$$\binom{x}{y} = (5x - 7y) \cdot \binom{3}{2} + (-2x + 3y) \cdot \binom{7}{5}.$$

3. *En déduire que la famille $\vec{u}, \vec{v}$ est génératrice.*

Tout vecteur $\vec{w} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc génératrice dans $\mathbb{R}^2$: on a $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbb{R}^2$.

Corrigé Ex 2 (Famille génératrice d'un noyau)

:generatriceNoyau:

Soit F l'ensemble défini par : $F = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x + y + z = 0 \right\}$.

1. *Montrer que F est un espace vectoriel.*

L'ensemble F s'écrit comme un noyau. C'est même le noyau de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

En particulier, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. *Montrer que les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrent F.*

D'abord les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ appartiennent bien à F : ils vérifient l'équation $x + y + z = 0$.

On montre que tout vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

On a en effet : $\vec{a} \in F \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y \iff \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc écrit tout vecteur de F est combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}$.

Ainsi : $F \subset \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, et l'inclusion est bien réciproque, car $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in F$.

3. *Existe-t-il une famille génératrice de F plus petite ?*

Oui, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ suffit, comme on l'a vu à la question précédente.

4. *Donner une famille génératrice de l'espace : $G = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.*

(dans quel $\mathbb{R}^n$ travaille-t-on alors ?)

On travaille dans $\mathbb{R}^4$. On a : $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},\ x + y + z + t = 0 \right\}$.

On peut encore exprimer $t = -x - y - z$, et on trouve la famille génératrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(En fait c'est même une base de G !)

Corrigé Ex 3 (Une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

:generatriceMatrices:

Soient les matrices : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Pour $i, j \in \{1,2\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice 2×2 remplie de 0 sauf pour un 1
- à la $i^{\text{ème}}$ ligne,
- $j^{\text{ème}}$ colonne.

1. *Montrer que la famille $(E_{i,j})_{\substack{i=1,2\\j=1,2}}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.* *(la **base canonique** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)*

   C'est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$! Une matrice quelconque $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose dans cette base : $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a \cdot E_{1,1} + b \cdot E_{1,2} + c \cdot E_{2,1} + d \cdot E_{2,2}$.

2. **a)** *Montrer que : $E_{1,1}, E_{2,2} \in \text{Vect}(A_1, A_2)$.*

   On a : $E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot A_1 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \in \text{Vect}(A_1, A_2)$.
   De même : $E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2 \in \text{Vect}(A_1, A_2)$.

   b) *Montrer que : $E_{1,2}, E_{2,1} \in \text{Vect}(A_3, A_4)$.*

   On trouve de même :
   - $E_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot A_3 - \frac{1}{2} \cdot A_4 \in \text{Vect}(A_3, A_4)$.
   - $E_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot A_3 + \frac{1}{2} \cdot A_4 \in \text{Vect}(A_3, A_4)$.

3. *En déduire que la famille (A_1, A_2, A_3, A_4) est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

   On a vu que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$.
   Or ces quatre matrices sont combinaisons linéaires de A_1, A_2, A_3, A_4.
   Ainsi, toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de A_1, A_2, A_3, A_4.
   Plus précisément, on trouve : $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{a+b}{2} \cdot A_1 + \frac{a-b}{2} \cdot A_4 + \frac{c-d}{2} \cdot A_2 + \frac{c+d}{2} \cdot A_3$.

Corrigé Ex 4 (Les suites géométriques n'engendrent pas $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

:geometriquesPasGeneratrices:

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_p \in \mathbb{R}$.
On construit une suite qui n'appartient pas à $\text{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\big)$.
Soit $Q = \max(|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_p|) + 1$. On s'intéresse à la suite $(M_n) = \big(Q^n\big)$.

1. *Montrer que pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a :* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_k^n}{Q^n} = 0$.

   La suite $\left(\frac{q_k^n}{Q^n}\right)$ est géométrique de raison $\frac{q_k}{Q}$.
   Or $Q \geqslant |q_k| + 1$, donc la raison $\frac{q_k}{Q}$ est de valeur absolue $\left|\frac{q_k}{Q}\right| < 1$.
   On a donc bien la limite demandée : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_k^n}{Q^n} = 0$.

2. *En déduire que si $u \in \text{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\big)$, alors on a aussi :* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{Q^n} = 0$.

   Soit $u = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot (q_k^n) \in \text{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\big)$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{u_n}{Q^n} = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \frac{q_k^n}{Q^n}$.
   Or, on a vu que, pour chaque terme, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_k^n}{Q^n} = 0$.
   Ainsi, on trouve : $\lim(u_n) = 0$.

3. *En déduire que la suite (M_n) n'appartient pas à $\text{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\big)$.*

   La suite $(M_n) = (Q^n)$ ne vérifie **pas** : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M_n}{Q^n} = 0$. *(cette suite est constante $\equiv 1$!)*
   Cette suite (M_n) n'appartient donc pas, d'après la question précédente, à $\text{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_p^n)\big)$.

4. *Conclure que la famille* $\big((q_1^n),(q_2^n),\dots,(q_p^n)\big)$ *n'engendre pas* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On vient de trouver une suite $(M_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\big((q_1^n),(q_2^n),\dots,(q_p^n)\big)$.
La famille $\big((q_1^n),(q_2^n),\dots,(q_p^n)\big)$ n'est donc pas génératrice dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Corrigé Ex 5 (L'exponentielle n'est pas polynomiale)

:expPasPolynomiale:

Soit $n\in\mathbb{N}$, On note P_n le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$.

1. *Montrer que* $P_n = \mathrm{Vect}((m_k)_{k=0,\dots,n})$, *où* $\forall k\in\mathbb{N}$, *on pose* $m_k : x\mapsto x^k$.
Les fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$ sont celles qui sont combinaison linéaire de monômes $x\mapsto x^k$, avec $k\leqslant n$.
C'est ce que demande la question.

2. *Montrer que pour* $k\leqslant n$, *on a :* $m_k^{(n+1)}\equiv 0$. *(sa dérivée* $(n+1)^{\text{ème}}$ *est nulle)*
Que peut-on en déduire pour les fonctions appartenant à P_n *?*
On vérifie que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $m_k : x\mapsto x^k$ est une constante : c'est d'ailleurs $k!$
Ainsi, si $\ell\geqslant k+1$, on a : $m_k^{(\ell)}\equiv 0$. En particulier, pour $\ell=n+1$, on a bien : $m_k^{(n+1)}\equiv 0$.
Par linéarité de la dérivation, tout élément de P_k, combinaison linéaire de ces monômes, vérifie la même propriété.
En d'autres termes : $\forall P\in P_n$, on a : $P^{(n+1)}\equiv 0$.

3. *En déduire que la fonction* $\big(\exp : x\mapsto \mathrm{e}^x\big)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *n'appartient pas à* P_n.
La fonction exp ne vérifie **pas** : $\exp^{(n+1)}\equiv 0$.
On a donc : $\exp\notin P_n$.

4. *Conclure que les fonctions polynomiales n'engendrent pas* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
La fonction exp n'appartient à aucun des sous-espaces P_n.
Cette fonction n'est donc pas polynomiale : il existe *(au moins!)* une fonction qui n'est pas combinaison linéaire de polynômes.

Corrigé Ex 6 (Appliquer la définition dans $\mathbb{R}^3$)

:libreR3:

Dans $E=\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$.
La famille $\mathcal{F}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est-elle libre dans E?
Si non, donner une relation de dépendance linéaire vérifiée par cette famille.
En déduire alors une écriture de $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u},\vec{v}$.

▸ **Recherche des relations de dépendance linéaire**

On résout pour $a,b,c\in\mathbb{R}$, l'équation : $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}-b-2c\\a+3c\\-2a+3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} -\ b-2c&=&0\\ a\qquad +3c&=&0\\ -2a+3b\qquad&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{l} a=-3c\\ b=-2c\end{array}\right.$$

▸ **Conclusion : la famille est liée**

On a trouvé une famille de relations de dépendance linéaire pour $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1. \end{cases}$

On a donc trouvé : $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.

▸ **Expression de $\vec{w}$ en termes de $\vec{u}, \vec{v}$** On peut donc écrire : $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Corrigé Ex 7 (Familles libres dans $\mathbb{R}^2$)

:famLibreR2:

Soient les trois vecteurs : $\vec{u} = \binom{1}{1}$, $\vec{v} = \binom{3}{2}$, et $\vec{w} = \binom{5}{4}$.

1. *Montrer que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ forment une famille liée.*

▸ **Recherche des relations de dépendance linéaire**

On résout pour $a,b,c \in \mathbb{R}$, l'équation : $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{cases} a + 3b + 5c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -c \end{cases}$$

▸ **La famille est liée**

On a trouvé la solution : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1, \end{cases}$

soit la relation de dépendance linéaire non-triviale : $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.

2. *Montrer que si on enlève l'un des trois vecteurs de cette famille, elle devient libre.*

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires deux-à-deux.
Aucune sous-famille de deux vecteurs n'est donc liée.

Corrigé Ex 8 (Indépendance linéaire avec une matrice inconnue)

:indepLinMatriceInconnue:

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice telle que $a + d = 0$ et $b + c = 0$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = I_2$.
Montrer que A,B,C sont linéairement indépendantes.

▸ **Recherche de relation de dépendance linéaire** Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$.

On résout : $xA + yB + zC = 0 \iff \begin{bmatrix} ax + y + z & cx + 2y \\ bx + 2y & dx + y + z \end{bmatrix} = 0$

On a donc : $\begin{cases} (ax + y + z) + (dx + y + z) = 0 \\ (bx + 2y) + (cx + 2y) = 0 \end{cases}$

Or $a + b = 0$ et $c + d = 0$, d'où $y = z = 0$.

Il ne reste que x, qui doit donc aussi valoir 0.

▸ **Conclusion : la famille est libre**

Corrigé Ex 9 (Une famille libre dans $\mathbb{R}[X]$)

:famLibreRX:

Soient a,b,c trois réels deux-à-deux distincts.
On note : $P(X)=(X-b)(X-c)$, $Q(X)=(X-c)(X-a)$, et $R(X)=(X-a)(X-b)$

1. *Calculer la valeur de chacun de ces polynômes en a,b, et c.*

   On trouve *(sur la diagonale, les coef sont $\neq 0$)* :

	$X=a$	$X=b$	$X=c$
$P(X)$	$(a-b)(a-c)$	0	0
$Q(X)$	0	$(b-c)(b-a)$	0
$R(X)$	0	0	$(c-a)(c-b)$

2. *En déduire que la famille (P,Q,R) est libre dans $\mathbb{R}[X]$.*
   - **Recherche d'une relation de dépendance linéaire** Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
     On résout : $\alpha\cdot P(X)+\beta\cdot Q(X)+\gamma\cdot R(X)=0$.
   - **Équations plus simples** On évalue en $X=a$, $X=b$ et $X=c$. Il vient :
     - $\alpha\cdot\underbrace{P(a)}_{\neq 0}+\beta\cdot\underbrace{Q(a)}_{=0}+\gamma\cdot\underbrace{R(a)}_{=0}=0$, d'où $\alpha=0$
     - $\alpha\cdot P(b)+\beta\cdot Q(b)+\gamma\cdot R(b)=0$, d'où $\beta=0$.
     - $\alpha\cdot P(c)+\beta\cdot Q(c)+\gamma\cdot R(c)=0$, d'où $\gamma=0$.
   - **Conclusion : la famille est libre**

3. *Soit $U(X)=(X-a)(X-b)(X-c)$. Montrer que : $U'(X)\in \mathrm{Vect}(P,Q,R)$.*

   On dérive : $U(X)=(X-a)(X-b)(X-c)$
   $U'(X)=(X-b)(X-c)+(X-a)(X-c)+(X-a)(X-b)$

   On a donc bien : $U'(X)=P(X)+Q(X)+R(X)\in\mathrm{Vect}(P,Q,R)$.

Corrigé Ex 10 (Indépendance de suites géométriques)

:indepGeom:

Montrons que les suites $(u_n)=(2^n)$, $(v_n)=(3^n)$ et $(w_n)=(4^n)$ sont linéairement indépendantes.
Soit une relation de dépendance linéaire, sous la forme : $\alpha\cdot u+\beta\cdot v+\gamma\cdot w=0$.

1. *Que faut-il montrer pour réaliser l'objectif de l'exercice ?*

   Il faut utiliser l'équation $\alpha\cdot u+\beta\cdot v+\gamma\cdot w=0$ pour montrer que les coefficients α,β,γ valent 0.

2. **Nullité de γ**

   a) *Montrer que si $\gamma\neq 0$, alors : $\lim\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot u+\frac{\beta}{\gamma}\cdot v+w\right)=+\infty$*

   On simplifie le membre de gauche par γ.

   On trouve : $\frac{\alpha}{\gamma}\cdot u+\frac{\beta}{\gamma}\cdot v+w$.

   Le terme prépondérant est la suite $w=(4^n)$.

   On a donc : $\lim\frac{\alpha}{\gamma}\cdot u+\frac{\beta}{\gamma}\cdot v+w=\lim w=+\infty$.

b) *En déduire une contradiction, et la valeur de γ dans notre relation de dépendance.*

Le membre de gauche doit être nul.

On ne peut donc pas avoir $\lim \frac{\alpha}{\gamma} \cdot u + \frac{\beta}{\gamma} \cdot v + w = +\infty$.

Le coefficient γ est donc nul.

3. *En déduire de même que $\beta = 0$, puis conclure.*

C'est le même principe ! Si $\beta \neq 0$, alors on a : $\lim \frac{\alpha}{\beta} 2^n + 3^n = +\infty$.

Mais par hypothèse, cette limite doit être 0. On doit donc avoir $\beta = 0$. Il s'ensuit que $\alpha = 0$

La seule relation de dépendance linéaire de la famille (u, v, w) est donc triviale.

La famille (u, v, w) est donc libre.

Corrigé Ex 12 (Puissances d'un endomorphisme nilpotent)

:indepPuisNilpo:

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme : $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que u est **nilpotent**, c'est-à-dire que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a : $u^n = 0$.
On suppose de plus que n est choisi **minimal**, c'est-à-dire que $u^{n-1} \neq 0$.

*(Cet entier n s'appelle **indice de nilpotence** de u)*

1. *Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a :*
- *$u^k \neq 0$ si $k < n$,*
- *$u^k = 0$ si $k \geqslant n$.*

On a $u^{n-1} \neq 0$, et $u^n = 0$

- **Pour $k \leqslant n-1$,** on a $n-1-k \geqslant 0$, d'où : $0 \neq u^{n-1} = u^k \circ u^{n-1-k}$, et ainsi $u^k \neq 0$.
- **Pour $k \geqslant n$,** on a $k - n \geqslant 0$, d'où : $u^k = u^n \circ u^{k-n} = 0$.

Soit $(\star)$ une relation de dépendance linéaire s'écrivant : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = 0$. *(où $\lambda_0, \ldots \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.)*

2. a) *En composant par u^{n-1}, en déduire que : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^{n-1+k} = 0$*

On a : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = 0$. On compose par u^{n-1}.

Il vient $0 = u^{n-1} \circ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^{n-1+k}$.

b) *Quels termes de cette combinaison linéaire sont nuls ?* *(on utilisera la question **1.**)*

Seul le terme $k = 0$ contient un endomorphisme non-nul : c'est $\lambda_0 \cdot u^{n-1}$.

Tous les autres contiennent un $u^i = 0$ car $i = n-1+k \geqslant n$.

c) *En déduire que $\lambda_0 = 0$.*

Dans la somme ci-dessus, il ne reste que : $\lambda_0 \cdot u^{n-1} = 0$.

On a donc bien : $\lambda_0 = 0$.

3. *En composant par u^{n-2}, montrer de même que $\lambda_1 = 0$.*

On a déjà montré que $\lambda_0 = 0$. On a donc : $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k$.

On compose par u^{n-2}. Il vient ainsi : $0 = u^{n-2} \circ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot u^{n-2+k}$.

Le seul terme où apparaît un endomorphisme non-nul est le premier : $\lambda_1 \cdot u^{n-1}$

Comme la somme est nulle, il vient bien $\lambda_1 = 0$.

4. *Montrer par récurrence que tous les coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont nuls.*

Conclure.

On montre par récurrence sur $i \in [\![0,n]\!]$, l'hypothèse : $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_i = 0$ (H_i).

L'initialisation pour $i = 0$ est faite : c'est $\lambda_0 = 0$.

L'hérédité se fait en composant la somme $\sum_{k=i+1}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k = 0$ par : u^{n-i-2}.

Il ne reste que le premier terme, dont on déduit $\lambda_{i+1} = 0$.

On trouve donc que les coefficients λ_k sont tous nuls.

La famille $(u^0, u^1, \ldots, u^{n-1})$ est donc libre.

Corrigé Ex 17 (Opérateur de translation)

`:opTranslationPol:`

Rappelons que $(1, X, X^2)$ est appelée base canonique que $E = \mathbb{R}_2[X]$.
Soit d l'application définie, pour $P \in E$, par : $d(P) = P(X+1)$.

1. a) *Montrer que l'application d est un endomorphisme de E.*

On vérifie les deux propriétés :

- **Linéarité de d**

  Pour $P, Q \in E$, on a bien : $$\begin{aligned} d(a \cdot P + b \cdot Q) &= (aP + bQ)(X+1) \\ &= aP(X+1) + bQ(X+1) \\ &= a \cdot d(P) + b \cdot d(Q) \end{aligned}$$

- **Stabilité de E par d** Soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\deg(P) \leqslant 2$.

  On a $d(P) = P(X+1)$. Ainsi, on a aussi $\deg(d(P)) \leqslant 2$, donc $d(P) \in E$.

b) *Montrer que cet endomorphisme d est inversible.*

Donner l'expression de son inverse.

L'endomorphisme d consiste à décaler les polynômes d'une unité vers la gauche.

Il admet donc pour réciproque le décalage d'une unité vers la droite : $d^{-1}(P) = P(X-1)$.

2. a) *Montrer que $(d(1), d(X), d(X^2))$ est une autre base de E.*

L'endomorphisme d est un automorphisme.

L'image d'une base par d est donc encore une base.

On vérifie à la main que les polynômes forment une base : $\left\{\begin{aligned} d(1) &= 1 \\ d(X) &= X+1 \\ d(X^2) &= (X+1)^2 \end{aligned}\right.$

b) Écrire les relations de changement de base dans les deux sens entre ces deux bases.

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (d(1), d(X), d(X^2))$.

La matrice de passage s'obtient en écrivant les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

On traduit : $\left\{\begin{aligned} d(1) &= 1 \\ d(X) &= X+1 \\ d(X^2) &= X^2 + 2X + 1 \end{aligned}\right.$ Il vient : $\text{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.

Dans l'autre sens, on inverse la matrice, ou bien on part de : $\left\{\begin{aligned} d^{-1}(1) &= 1 \\ d^{-1}(X) &= X-1 \\ d^{-1}(X^2) &= X^2 - 2X + 1 \end{aligned}\right.$.

On trouve : $\text{Pas}(\mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \cdot & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.

3. *Que se passe-t-il si on travaille dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *au lieu de* $\mathbb{R}_2[X]$ *?*

C'est le même principe, mais avec une matrice plus grande, qui est toujours donnée par le triangle de Pascal.

On trouve : $\quad \mathrm{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.