Rappel : représentation matricielle canonique

La « correspondance canonique » :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ [f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n] \longleftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Bigg\} n \text{ lignes} \end{cases}$$

est donnée par :

$$f(\vec{X}) = A\vec{X} = x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p$$
$$\vec{C}_1 = f(\vec{e}_1),\quad \vec{C}_2 = f(\vec{e}_2),\quad \vdots \quad \vec{C}_p = f(\vec{e}_p)$$

Noyau et image d'une matrice, d'une application linéaire

Deux sous-espaces vectoriels associés à | une application linéaire $f : E \to F$
| une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

Noyau : ***(Noté*** Ker ***pour « Kernel »*** **(allemand pour « noyau »)*)***

$\star$) *Définitions :*

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{v}\in E \text{ tels que } f(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$$
= **l'ensemble des** vecteurs de E qui sont **annulés** par f

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\vec{X}\in \mathbb{R}^p \text{ tels que } A.\vec{X} = \vec{0}\right\}$$
= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui sont **annulés** par A

$\star$) *Interprétation « vecteurs colonnes » :*

Le noyau de A décrit l'ens. des **relations de dépendance linéaire** entre les $\vec{C}_i$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)_{\text{col.}} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p = \vec{0}.$$

(Remarque utile pour | vérifier la résolution d'un système linéaire)
| trouver le noyau en « calcul mental »

$\star$) ***Pratique :*** *Trouver une base du noyau de la matrice A :*

- On résout le syst. d'équa$^{\text{ns}}$ $A.\vec{X} = \vec{0}$ pour $\vec{X} = (x_1, \dots, x_p)_{\text{col.}}$ *(1 équation par ligne)*
- *(Après échelon^{nt} : alg. du pivot de Gauss :)* les **inconnues principales** *(« à pivot »)* s'expriment en fonction des *(svt 1 seule)* **inc. secondaires** *(paramètres)*
- On ajoute des éq$^{\text{ns}}$ tautologiques pour écrire $A.\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{X} = z_1\vec{v}_1 + \dots + z_\nu\vec{v}_\nu$,
- On conclut : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\nu)$ et $\nu = \dim[\mathrm{Ker}(A)]$ *(= nullité)*

Image

- **Définitions**

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{v}\in F \text{ tq } \exists \vec{u}\in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\} = \{f(\vec{u}),\ \text{quand } \vec{u} \text{ parcourt } E\}$$
= **l'ensemble des** vecteurs de F qui sont **atteints** par f

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\vec{Y}\in\mathbb{R}^n \text{ tq } \exists\vec{X}\in\mathbb{R}^p,\ A.\vec{X} = \vec{Y}\right\} = \left\{A.\vec{X},\ \text{quand } \vec{X} \text{ parcourt } \mathbb{R}^p\right\}$$
= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont **atteints** par A

- **Interprétation « vecteurs colonnes »**

L'image de A décrit l'ens. des **combinaisons linéaires** entre les $\vec{C}_i$ ***(sev engendré)***

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p)$$

Rang

- **Définition** : « le rang, c'est la dimension de l'image »

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)), \qquad \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

- **Formule du rang** :

$$\underbrace{\dim(E)}_{\substack{\text{dim. de l'esp.}\\ \text{de départ}}} = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)), \qquad \underbrace{\text{nb. de col.}}_{=p} = \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)).$$

- **Interprétation :** chaque rel. de dép. lin. permet d'ôter l'un des $\vec{C}_i$ du Vect.

Éléments propres

Étant donné | un endomorphisme $f : E \to E$
| une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

on s'intéresse à l'**équation des vecteurs propres**

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{u} \in E \end{array}$$

Si l'on peut trouver une solution $\vec{u}$ **non-nulle**, on dit que

- λ est une valeur propre
- $\vec{u}$ *(ce vecteur non-nul tq. $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$)* est un **vecteur propre**.

On verra ensuite comment trouver les valeurs propres. À ce stade, il faut savoir

- **Vérifier** si λ est une valeur propre en résolvant l'équation des vecteurs propres
- **Trouver** l'ensemble des vecteurs propres associés *(sous-espace propre associé à λ)*
- **Présenter** ce s-esp sous la forme $\text{Vect}(\vec{v}_0)$ *(méthode de résolution d'un système d'équations)*
  (Il peut y avoir plusieurs solutions indépendantes : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots)$)