

Un exemple de dérivation logarithmique

pour le jeudi 8 septembre

On se propose de faire l'étude des variations d'une famille de fonctions (*une suite de fonctions*).

Approche directe

Pour $n \geq 1$ un entier, on définit la fonction : $f_n : \begin{cases} [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n e^{-x} \end{cases}$

1. Valeurs de f_n
 - a) Calculer $f_n(0)$.
 - b) En appliquant le théorème des croissances comparées, calculer $\lim_{\infty} f_n$
 - c) Étudier le signe de f_n sur son domaine de définition.
2. Dérivation de f_n
 - a) Montrer que la fonction f_n est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$.
 - b) Calculer la dérivée f'_n de f_n . (*on en donnera une écriture **factorisée***)
3. En déduire le tableau de signes de f'_n et le tableau de variations de f_n .
4. Compléter le programme Scilab suivant pour qu'il trace la représentation graphique de f_1 .

./aCompleter.sce

```

1 XMAX = 5
2 x = linspace(0,XMAX)
3 y = ___ // <- Compléter cette ligne (sans recopier les autres sur la copie)
4 plot(x,y)
```

Approche logarithmique

On définit maintenant, pour $n \geq 1$ entier, la fonction : $\varphi_n : \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi_n(x) = \ln(f_n(x)) \end{cases}$

5. Justifier que la fonction φ_n est bien définie sur $]0; +\infty[$, et qu'elle aussi est continue et dérivable.
6. Vérifier l'expression suivante : $\forall x > 0, \varphi_n(x) = n \ln(x) - x$.
7. En déduire une écriture simple de la dérivée $\varphi'_n(x)$.
8. En déduire le tableau de signes de φ'_n et le tableau de variations de φ_n .
9. Conclusion
 - a) Exprimer f_n en fonction de φ_n .
 - b) Retrouver le tableau de variations de f_n obtenu à la question 3.

Complément

Pour $n \geq 1$ entier, on considère $g_n : \begin{cases} [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ et on pose $\psi_n = \ln \circ g_n$ sur \mathbb{R}_+^* .

10. En étudiant ψ_n , trouver en quel point la fonction g_n atteint son maximum sur $[0; +\infty[$.
(en quelques lignes!)