DL 2 : Étude de la série exponentielle

Corrigé

Cet exercice est consacré à l'étude de la suite de sommes définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Étude de la suite (S_n).

a) *Rappeler :*
- *la valeur de* $0!$
- *l'expression, pour $n \in \mathbb{N}$, de $(n+1)!$ en fonction de $n!$ et de n,*
- *la limite de la suite $(n!)$*

On a $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = (n+1)n!$ On a $n! \to \infty$ quand $n \to \infty$.

b) *Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.* *(On présentera les résultats comme un tableau de fractions irréductibles.)*

On a $S_0 = \frac{1}{0!} = 1$ et chaque valeur de la suite est obtenue en ajoutant un terme au précédent. Il vient :

n	0	1	2	3
S_n	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$

c) *Pour $n \geqslant 0$, calculer $S_{n+1} - S_n$. Montrer que la suite (S_n) est croissante.*

Pour $n \geqslant 0$, calculer $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (S_n) est donc strictement croissante.

2. Étude d'une suite intermédiaire On définit la suite (S'_n) par $\forall n \geqslant 1$: $S'_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$.

a) *Déterminer le sens de variation de la suite (S'_n).*

Pour $n \geqslant 1$, on a : $S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$.

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

On réduit les trois fractions au même dénominateur $n(n+1)(n+1)!$

Ainsi : $S'_{n+1} - S'_n = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$

$$= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

La suite (S'_n) est donc strictement décroissante.

b) *Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.*

La suite (S_n) est croissante, (S'_n) décroissante.

Pour montrer qu'elles sont adjacentes, il reste à vérifier : $\lim(S'_n - S_n) = 0$.

Or on a $\forall n \geqslant 1$, $S'_n - S_n = \frac{1}{n.n!} \to 0$.

Ces deux suites sont donc bien adjacentes.

c) *En déduire que les suites (S_n) et (S'_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n \leqslant \ell \leqslant S'_n$.

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

C'est donc le cas de (S_n) et (S'_n).

De plus, (S_n) est croissante, donc $\forall n \leqslant m$, on a $S_n \leqslant S_m$.

En particulier, pour $m \to +\infty$, on trouve : $S_n \leqslant \lim(S_m) = \ell$.

On procède de même, pour $\ell \leqslant S'_n$.

On se propose de montrer que cette limite commune est $\mathrm{e} = \exp(1)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

a) *Calculer I_0.*

On a : $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

b) *Par une intégration par parties, calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de :* $I_{n+1} - I_n$.

On calcule $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$. en fonction de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$.

On fait une intégration par parties sur I_{n+1}.
Les fonctions u et v définies ci-contre sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.

$$\begin{cases} u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v'(t) = \mathrm{e}^t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!} \\ v(t) = \mathrm{e}^t. \end{cases}$$

Il vient donc : $I_{n+1} = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$

On a donc trouvé : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{(n+1)!}$.

c) *En déduire que la suite $(S_n + I_n)$ est constante.*

Quelle est sa valeur ?

Montrons que la suite $(S_n + I_n)$ est constante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $(S_{n+1} + I_{n+1}) - (S_n + I_n) = (S_{n+1} - S_n) + (I_{n+1} - I_n) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = 0$.
La suite est bien constante, et est égale à son premier terme : $S_0 + I_0 = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

a) *Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale J_n.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

b) *Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement :* $J_n \leqslant n! \cdot I_n \leqslant \mathrm{e} \cdot J_n$.

On encadre pour $t \in [0;1]$, par croissance de l'exponentielle : $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$.

Il vient donc $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}t$, soit $J_n \leqslant n! \cdot I_n \leqslant \mathrm{e} \cdot I_n$.

c) *En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, puis que $\ell = \mathrm{e}$.* *(c'est-à-dire que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}$.)*

On a $J_n = \frac{1}{n+1} \to 0$.
L'encadrement vérifie les hypothèses de la convergence par encadrement. *(gendarmes)*
Il vient donc : $\lim n! \cdot I_n = 0$, donc *a fortiori* $\lim I_n = 0$.
On trouve donc : $\lim(S_n) = \lim(\mathrm{e} - I_n) = \mathrm{e}$.

5. Un encadrement plus fin, et un équivalent

a) *Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, on a :* $(1-t) \cdot \mathrm{e}^t - 1 \leqslant 0$.

En déduire le signe, pour $n \geqslant 1$, de $n! \cdot I_n - J_{n-1}$.

- **Inégalité sur $t \in \mathbb{R}$:** Par convexité de l'exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 1 - t$. *(tangente en 0).*
  Il vient donc bien : $(1-t) \cdot \mathrm{e}^t \leqslant 1$. *(On peut aussi étudier les variations de $t \mapsto (1-t) \cdot \mathrm{e}^t$)*
- **Inégalité sur les intégrales**

$$\begin{aligned} \text{On trouve : } n! \cdot I_n - J_{n-1} &= \int_0^1 \left[(1-t)^n \cdot \mathrm{e}^t - (1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t \quad . \\ &= \int_0^1 (1-t)^{n-1}\left[(1-t)\cdot \mathrm{e}^t - 1\right]\mathrm{d}t \leqslant 0 \end{aligned}$$

b) *En déduire l'inégalité :* $I_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}$

On a bien trouvé : $n! \cdot I_n \leqslant J_{n-1} = \frac{1}{n}$.

c) *Grâce à* **4.b)**, *déduire pour $n \geqslant 1$, l'encadrement :* $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}$.

On a bien trouvé ces deux inégalités.

d) *Déduire enfin l'équivalent :* $I_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$.

Grâce à l'encadrement : $1 \leqslant (n+1)! \cdot I_n \frac{n+1}{n}$, on trouve bien $\lim (n+1)! \cdot I_n = 1$.
Ainsi, il vient bien : $I_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$