Sujet 1

Questions de cours :

1. Soit E un espace vectoriel. Ecrire la définition de la dimension de E.
2. Soir F une famille de vecteurs de E. Ecrire la définition du rang de F. Quelles sont les majorations automatiques ?

Exercice 1 :

1) Vérifier que la famille F = ((1 , 1) ; (0 , 1)) est une base de R^2. Décomposer (x,y) dans cette base.

2) On suppose qu'il existe une application linéaire f de R^2 dans R^3 telle que

f((1 , 1)) = (1 , 0 , 3) et f((0 , 1)) = (-2 , -1 , 1).

Calculer f((x , y) pour tout $(x , y) \in R^2$.

3) Vérifier que l'application obtenue est une application linéaire de R^2 dans R^3.

4) Déterminer la dimension du noyau de f.

5) Déterminer une base de l'image de f. En déduire le rang de f.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel et soir f un endomorphisme de E.

1) a) Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$

b) Montrer que $Im(f^2) \subset Im(f)$

2) Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

Sujet 2

Question de cours :

1. Soir F une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Ecrire la définition du rang de F. Quelles sont les majorations automatiques ?
2. Quelles équivalences y-a-t-il rg(F) et les caractères libre et génératrice pour F ?
3. Soit F une famille de vecteurs de E telle que card(F) = dim(E). Que suffit-il de montrer pour que F soit une base de E ?

Exercice 1 :

On considère l'application f définie pour tout $(x , y) \in R^2$, par :

$$f((x , y)) = (4x – 6y , 2x – 3y))$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de R^2.

2) a) Déterminer Ker(f). En déduire le rang de f.

b) Déterminer une base de Im(f).

3) Déterminer fof.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel et soir f un endomorphisme de E.

1) a) Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$

b) Montrer que $Im(f^2) \subset Im(f)$

2) Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

Sujet 3

Questions de cours :

1. Soit f : $E \to F$ une application linéaire.
   Ecrire la définition de rg(f)
2. Ecrire le théorème du rang.
3. Ecrire les caractérisations pour f surjective et f injective.

Exercice 1 :

On considère l'application f définie, pour tout $(x , y , z) \in R^3$ par :

$$f((x , y , z)) = (x , y - z , x + y + z)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de R^3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de R^3.

2) a) Déterminer Im(f). En déduire la dimension de Ker(f).

b) Déterminer une base de Ker(f).

c) Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel et soir f un endomorphisme de E.

1) a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.