Généralités sur les sommes/séries et les intégrales

Sommes/séries classiques

- **Sommes** $\sum_{k=0}^{n} k^0 = n+1$, $\sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- **Sommes géométriques** $\forall q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, et si $|q| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
- **Loi géométrique**
  - ⋆ Modélisation du rang d'apparition du premier succès à la répétition de $\mathcal{B}(p)$.
  - ⋆ Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$,
  - ⋆ Interprétation du reste $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = q^N$ comme fonction d'anti-répartition $\mathbb{P}(X > N)$.

Manipulation de sommmes/séries

- **Pratique du changement d'indice** Dans $\sum_{k=0}^{N} u_{k+1}$, on pose $i = k+1$, et on substitue dans le t.g. et les bornes.
- **Sommation télescopique**
  - ⋆ Formule $\sum_{k=n}^{p} (u_{k+1} - u_k) = u_{p+1} - u_n$.
  - ⋆ Exemples d'application de la décomposition en éléments simples.
- **Séries à termes positifs** : les sommes partielles $\nearrow$, donc convergent *ssi* elles sont **majorées.**

Intégration

Cadre théorique cette semaine : On intégre une fonction **continue sur un segment**, puis passage à la limite aux bornes.

- **Propriétés générales** Linéarité, Chasles, positivité.
- **Intégrales et primitives** $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F' = f$.
- **Primitives usuelles**
  - ⋆ Fonctions puissances : pour $a \neq -1$: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$, et $\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$.
  - ⋆ Exponentielles : pour $a \neq 0$: $\int \mathrm{e}^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, \mathrm{e}^{ax}$.
- **Intégration par parties** pour u, v de classe $\mathcal{C}^1$: $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
  - ⋆ Exemple de $\int_1^x \ln(t)\, dt = x\ln(x) + 1 - x$, pour $x > 0$.
- **Pratique du changement de variables** sur un segment
  - ⊛ Hypothèses $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, f continue sur $\varphi([a, b])$.
  - ⊛ Formule $\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$
  - ⊛ Notation : on a posé $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)\, dt$. Alors $t = a \rightsquigarrow x = \varphi(a)$ ...