

# Colles semaine 8 - Compléments intégration

## 1 Intégration sur un segment

- ▶ **Intégrabilité automatique** pour une fonction **continue sur un segment**.
- ▶ **Propriétés générales** Linéarité, Chasles, positivité, intégrale d'une constante.
- ▶ **Intégrale et primitive**  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$  si  $F$  est  $C^1$  sur  $[a; b]$  et  $F' = f$ .
- ▶ **Intégration par parties** pour  $u, v$  de classe  $C^1$  sur  $[a; b]$ , on a :  $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ .  
(Stratégie : on essaie de se rapprocher de la sortie du calcul)
- ▶ **Changement de variables** (le changement de variables est indiqué par l'énoncé)
  - ★ Hypothèses :  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ ,  $f$  continue sur  $u([a, b])$ .
  - ★ Formule :  $\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$   
(On remplace tous les  $u(t)$  par des  $x$ , et  $u'(t) dt$  par  $dx$ .)
  - ★ Notation : on a posé  $x = u(t)$  et  $dx = u'(t) dt$ . Alors  $t = a \rightsquigarrow x = u(a) \dots$
- ▶ **Extension aux fonctions continues par morceaux**  
Sur un segment, on dit que  $f$  est **continue par morceaux** si :
  - ▶  $f$  admet un nombre fini de **points de discontinuité**,
  - ▶  $f$  admet une **limite** à gauche et à droite en chacun.

On a convergence automatique de l'intégrale sur un segment pour une fonction **cpm**.

## 2 Intégration sur un intervalle quelconque

- ▶ **Convergence d'une intégrale** étude en  $\pm\infty$ , en un point  $x_0^\pm$ .
- ▶ **Intégrales convergentes de référence**
  - ▶ Fonctions exponentielles  $e^{-ax}$ ,  $a > 0$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - ▶ En  $+\infty$  :  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .
  - ▶ En  $0^+$  :  $\int_{0^+}^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge ssi  $\alpha < 1$ .  
(retournement de ci-dessus)
- ▶ **Critère de convergence absolue** par comparaison  $= o(g(t))$ ,  $\sim g(t)$  ou  $|\cdot| \leq g(t)$ .
  - ▶ souvent  $\frac{1}{t^2}$  pour une intégrale en  $+\infty$ .
  - ▶ souvent  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  pour une intégrale en  $0^+$ .
- ▶ **Extension en cas de discontinuités sur un intervalle** (nombre fini de points de discontinuité)

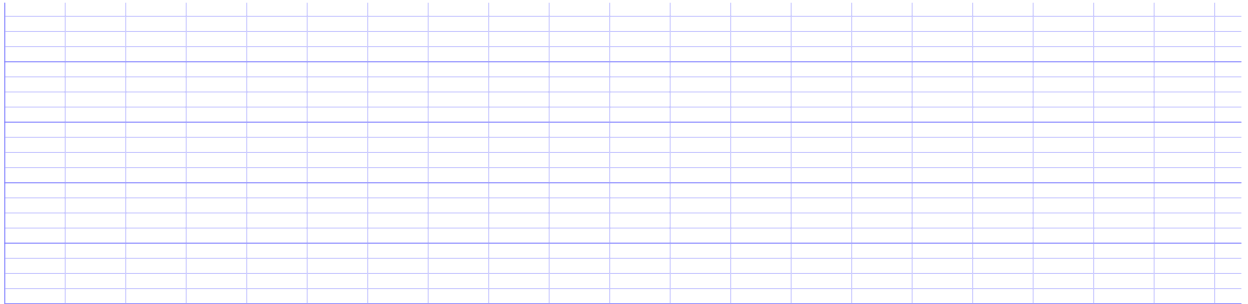
On étudie chaque « problème », puis calcul par Chasles

## 3 Principe de la comparaison série-intégrale


- ▶ **Encadrement d'intégrales**  
Pour  $f$  continue **décroissante**, on a l'encadrement :  $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$ .
- ▶ **Encadrement de sommes partielles**  
Obtention d'encadrement de sommes partielles  $\sum_{n=1}^N f(n)$  (Chasles pour comparer à  $\int_1^{N+1} f(t) dt$ .)
- ▶ **Études de suites**  $a_n = \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k)$  et  $b_n = \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ .

## 4 Questions de cours

1. Énoncer le critère de convergence de Riemann en  $+\infty$  et en  $0^+$ .



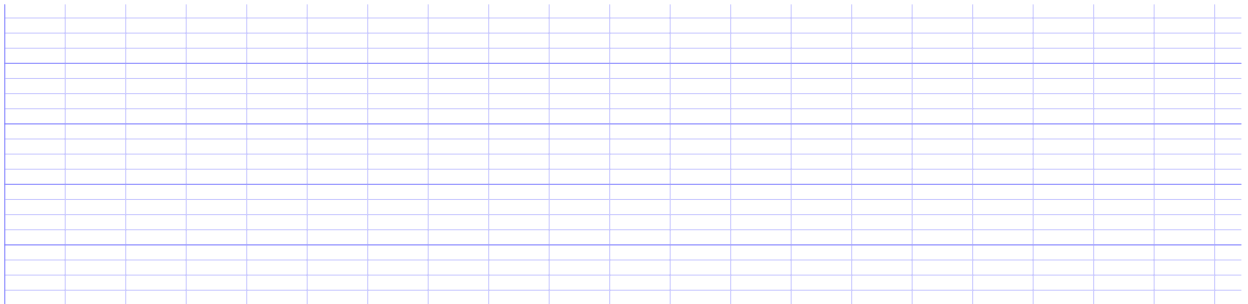
2. Convergence et calcul de  $\int_0^1 \ln(t) dt$ .



3. Énoncer le principe du changement de variables pour une intégrale sur un segment.



4. Énoncer le principe de l'intégration par parties sur un segment.



5. Comparaison série-intégrale pour montrer :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ . Passage à la limite  $n \rightarrow +\infty$ .

