Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Table des matières

1 Introduction : rappels sur $\mathbb{R}^n$

1.1 Généralités : définitions

Définitions

On note $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur générique de $\mathbb{R}^n$. Les x_i sont des réels, les coordonnées cartésiennes de $\vec{v}$. On représente $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$ comme une droite, un plan, un espace tridimensionnel.

Opérations sur les vecteurs

- **Addition** On peut additionner des vecteurs de même format, composante par composante
- **Multiplication par un scalaire** On peut multiplier un vecteur par un scalaire, composante par composante

Combinaison linéaire

Étant donnés des vecteurs $\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_p$ de même format, on dit que $\vec{v}$ est combinaison linéaire de ces vecteurs si on peut écrire : $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

- $2(1, 2) - 3(2, -2)$.
- Vérifier que $(1, -1)$ est combinaison linéaire de $(2, 3)$ et $(1, 2)$.
- À quelle condition sur a, b, c la vecteur (a, b, c) est-il combinaison linéaire de $(1, 0, 1)$, et $(1, -1, -1)$?

Définition 1 (*Matrice d'une famille de vecteurs*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

La **matrice de la famille** $\mathcal{F}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\vec{u}_i$, soit la matrice $A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \uparrow \\ \vec{u}_1 \\ \downarrow \end{bmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$

Matrice de la famille et combinaisons linéaires

Pour $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$, un **vecteur des coefficients**, on a $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p = A\Lambda$.

(Λ = λ majuscule = Lambda)

L'algorithme du pivot de Gauss

Étant donnée un système d'équations affine, l'algorithme du pivot de Gauss fournit une système **échelonnée** équivalent

$$\text{Système échelonné} \begin{cases} \left.\begin{aligned} \pi_1 + \text{———————} &= \ldots \\ \pi_2 + \text{————} &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{Équations « efficaces »} \\ \left.\begin{aligned} 0 &= \kappa_1 \\ 0 &= \kappa_2 \end{aligned}\right\} \text{Conditions de compatibilité} \end{cases}$$

- **Vocabulaire des systèmes échelonnés**
  - $\star$) *Inconnue principale :* associée à un des pivots $\pi_i \neq 0$
  - $\star$) *Inconnue secondaire :* **pas** associée à un pivot. Elle joue le rôle de paramètre.
  - $\star$) *Compatibilité :* le système admet des solutions *ssi* on a 0 en face des lignes nulles.

Formule du rang, version provisoire

On peut écrire la relation

$$\text{nb. de paramètres} = \text{nb. d'inconnues} - \text{nb. d'éq}^{\text{ns}} \text{ efficace}$$

où les deux termes s'évaluent **une fois le système échelonné** comme suit :

- **équation efficace :** une équation dans lequel apparaît un pivot *(donc, où apparaît une inconnue principale)*
- **paramètre :** une inconnue secondaire = une inconnue qui n'est pas principale.

Comme les inconnues principales n'apparaissent qu'une seule fois dans leur colonne *(sur une seule équation)* le nombre d'équations efficaces est donc égal au nombre d'inconnues principales.

1.2 Le plan $\mathbb{R}^2$, ses droites vectorielles

On s'intéressera plus particulièrement aux droites du plan qui passent par l'origine :

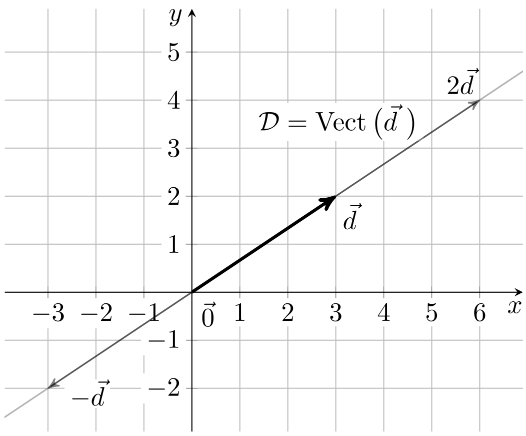
Définition 2 (*Droite vectorielle, vecteur directeur*)

Une **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble du plan $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dont les vecteurs sont exactement les multiples d'un certain vecteur $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ *(fixé)* non-nul *($\vec{d} \neq 0$)*.

- On note alors $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$.
- On dit que la droite $\mathcal{D}$ est la droite **engendrée** *(ou **dirigée**)* par le vecteur $\vec{d}$.
- On dit que le vecteur $\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque

La droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{d})$ est la *(seule !)* droite du plan $\mathbb{R}^2$ qui passe par l'origine $\vec{0}$ et par l'extrémité du vecteur directeur $\vec{d}$.



Exemple graphique : Ci-contre on a choisi $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$ est donc formée de tous les multiples de $\vec{d}$, parmi lesquels on a placé $2\vec{d}$ et $-\vec{d}$.

Proposition 3 (*Équation de droite*)

$ax + by = 0.$

Proposition 4 (*Intersection de deux droites*)

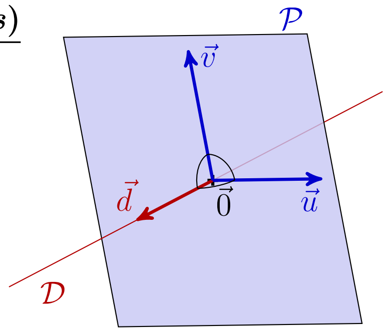
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ distinctes *($\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$)* du plan $\mathbb{R}^2$.

Alors l'intersection de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ est l'origine : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$.

1.3 L'espace $\mathbb{R}^3$, ses droites et plans vectoriels

Définition 5 (*Sous-espaces vectoriels, vecteurs directeurs*)

- **Droite vectorielle** $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\vec{d})$
- **Plan vectoriel** $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$



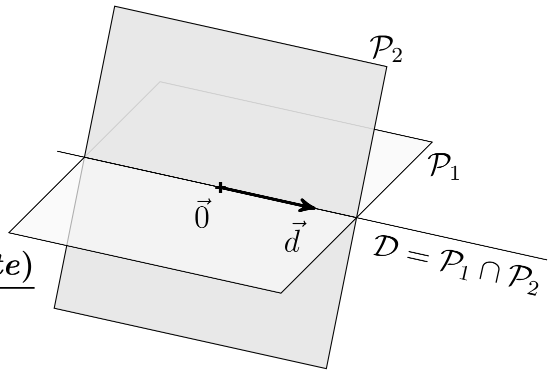
Proposition 6 (*Équation de plan*)

$ax + by + cz = 0.$

Proposition 7 (*Intersection de deux plans*)

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux plans distincts de l'espace $\mathbb{R}^3$.
Alors leur intersection est une droite vectorielle :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D} = \mathrm{Vect}\left(\vec{d}\right).$$



Proposition 8 (*Système d'équation d'une droite*)

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

2 Familles de vecteurs : généralités

2.1 Le vocabulaire des espaces vectoriels

Définition 9 (*Vocabulaire des espaces vectoriels*)

- **Espace vectoriel**
  C'est un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$.
  - Il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
  - Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$, **l'addition** $\vec{u} + \vec{v}$ fait sens
  - Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, et vecteur $\vec{u} \in E$, **le produit** $\lambda \cdot \vec{u}$ fait sens.
  - Ces deux opérations satisfont aux mêmes règles de calcul formel que celles pour $\mathbb{R}^n$.
- **Combinaisons linéaires**
  Ces deux opérations permettent de former des **combinaisons linéaires** :

  $\star$) *de deux vecteurs :* $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

  $\star$) *d'une famille finie :* $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k\vec{u}_k$

Exemples d'espaces vectoriels :

- Les espaces cartésiens $\mathbb{R}^n$
- Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$

- L'espace des applications $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
- L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 10 (*Sous-espace vectoriel*)

Soit E un espace vectoriel.

On appelle **sous-espace vectoriel** de E un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui

- est non-vide et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
- est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.

Montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel

- Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P'(2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $\{y' = y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\{y' = y + 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 11 ((dans $\mathbb{R}^n$) *Solutions d'un système d'équations homogène*)

Soit $\mathcal{S}$ un système d'équations **homogène** *(le membre de droite = 0)* :

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right\} p \text{ équations}$$

n coordonnées *(inconnues)*

Alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$:

$$F = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^n \text{ tels que les coordonnées } x_1, x_2, \ldots x_n \text{ vérifient } \mathcal{S} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés, familles génératrices

Définition 12 (*Sous-espace vectoriel engendré*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $\mathcal{F}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaison linéaire des vecteurs qui composent $\mathcal{F}$.

En d'autres termes : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \underbrace{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p}_{\text{comb. lin. des } \vec{u}_i},\ \text{pour } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}$.

Caractérisation

- Comme son nom laisse à penser, l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.
- En outre, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le **plus petit** *s-e. v.* contenant les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

  Plus précisément, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est inclus dans tous les *s-e. v.* $G \subseteq E$ contenant la famille $\mathcal{F}$.

  (Si $\mathcal{F} \subset G$, alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$.)

Remarque dans $\mathbb{R}^n$: les deux présentations d'un sous-espace vectoriel

Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par l'alg. du pivot.

- **équations $\rightsquigarrow$ base** Si F est défini par un système d'équations :

$$\mathcal{S} : \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array}}_{n \text{ coordonnées } (inconnues)} \right\} p \text{ équations}$$

  1. on échelonne le système d'équations
  2. on exprime les inconnues principales en termes des inc. secondaires *(paramètres)*
  3. on fait apparaître des vecteurs à droite *(éq. tautologique pour les paramètres)* : $\vec{X} = \sum_{x \text{ inc. sec.}} x\vec{v}_x$

- **base $\rightsquigarrow$ équations**
  1. on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice $\mathcal{F}$
  2. les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.

Passer d'un système d'équations à une base :

Soit $F = \left\{ \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \right\}$

Cet ensemble de $\mathbb{R}^4$ est défini par un système d'équations linéaires. C'est donc un *s-e. v.* de $\mathbb{R}^4$.

Pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on résout

$$\vec{X} \in F \iff \begin{cases} 1x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1x + y + z + t = 0 \\ 1y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \underbrace{1x + \quad 1y}_{\substack{\text{inconnues} \\ \text{principales}}} \underbrace{- z - 2t = 0 \\ + 2z + 3t = 0}_{\substack{\text{inconnues} \\ \text{secondaires} \\ (paramètres)}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \\ z = z \\ y = t \end{cases} \text{éq}^{\text{ns}} \text{ tautologiques}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}_2} \iff \vec{X} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel engendré :

(Conditions de compatibilité du système augmenté générique)

Définition 13 (*Famille génératrice*)

Soit $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
On dit alors aussi que l'espace E est engendré par $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$.

Reformulation : caractère générateur et décomposabilité automatique

La famille $\mathcal{F}$ est génératrice *ssi* tout vecteur $\vec{v} \in R$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ de $\mathcal{F}$:

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}, \qquad \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_p \vec{u}_p.$$

Proposition 14 (*Sous-famille génératrice*)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
Supposons que $\mathcal{F}$ contienne une sous-famille $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ qui soit génératrice.
Alors la famille $\mathcal{F}$ est elle-même génératrice.

Montrer le caractère générateur :

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{F}$ la famille formée des vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

- **Approche directe**

Cherchons l'équation de $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a l'équivalence :

$$\left[\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\right] \iff \left[\text{le système } x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v} \quad (\mathcal{S}) \quad \text{est compatible.}\right]$$

On échelonne le système $(\mathcal{S})$:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v} \iff x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 7z = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \ 2y + 3z = a \\ \quad -y + \ z = b - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad + 5z = a + 2(b-2a) \\ \quad y - \ z = b - 2a \end{cases}$$

À la dernière étape, le système est échelonné.
Il n'y a alors aucune *($= 0$)* équation dans laquelle on a pu éliminer les inconnues x, y et z.
Ce système est donc « automatiquement compatible » *(0 condition de compatibilité)* pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
La famille $\mathcal{F}$ est donc génératrice.

- **Première sous-famille génératrice**

Soit $\mathcal{G}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ la famille extraite en excluant le vecteur $\vec{u}_3$ *(d'où l'indice $_3$!)*
Vérifions que la famille $\mathcal{G}_3$ est génératrice *(en fait même une base de $\mathbb{R}^2$!)*

La matrice de la famille $\mathcal{G}_3$ est $P_3 = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Cette matrice est inversible car son déterminant vaut $\det(P_3) = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1 \neq 0$.

De plus, son inverse est donné par : $P_3^{-1} = \frac{1}{\det(P_3)} \cdot \text{complémentaire} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(La complémentaire de $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ *est* $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ *: comme qui dirait la transposée de la comatrice...)*

Il vient donc : $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Ainsi pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur générique, on a :

$$\vec{v} = \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_3 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = P_3^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = -3x + 2y \\ \mu = 2x - y \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{(\,-3x + 2y)}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + \underbrace{(2x - y)}_{\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}.$$

2.3 Relations de dépendance linéaire, familles liées ou libres

Définition 15 (*Dépendance linéaire*)

Soit $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- **Relation de dépendance linéaire** *(abrégé en : rel. de dép. lin.)*
  Une relation de dépendance linéaire entre $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ est une équation de la forme :

  $$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ \dots \ + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0} \qquad \textit{(soit } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}\textit{)},$$

  pour un certain p-uplet de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$.
  *(les λ_i sont appelés les **coefficients** de la relation de dépendance linéaire)*
- **La relation triviale, les relations non-triviales**
  On a **toujours** *(pour **n'importe quelle** famille de vecteurs)* : $0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \ \dots \ + 0 \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$.
  Cette relation de dépendance linéaire avec $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$ est dite **triviale**.
  Les autres rel. de dép. lin. *(celles dont au moins un des λ_i est non-nul)* sont dites **non-triviales**.
- **Famille liée**
  On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est **liée** si elle vérifie une rel. de dép. lin. non-triviale.

Exemple : Recherche des rel. de dép. lin. :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par $\mathcal{F}$.

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ (\lambda_3 = \lambda_3) \end{cases}$$

Ainsi la famille $\mathcal{F}$ vérifie la relation de dépendance linéaire : $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$. *(on vérifie !)*

Les autres relations de dépendance linéaire satisfaites par $\mathcal{F}$ sont les multiples de celle-ci

Proposition 16 (*Réécriture d'une relation de dépendance linéaire*)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On suppose que $\mathcal{F}$ est liée.
Alors l'un des vecteurs $\vec{u}_j$ de $\mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres :

$$\text{il existe } j \in [\![1, p]\!], \text{ et il existe } \lambda_1, ..., \underbrace{\widehat{\lambda_j}}_{\text{« } \lambda_j \text{ manquant »}}, ..., \lambda_p, \text{ tels que : } \quad \vec{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

Exemple *(suite)* : Réécritures :

La rel. de dép. lin. $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ peut aussi s'écrire comme suit : $\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{2}{3}\,\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\,\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{3}{2}\,\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\,\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 = -3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2. \end{cases}$

Proposition 17 (*rel. de dép. lin. et élimination dans* Vect($\mathcal{F}$))

Chaque relation de dépendance linéaire non-triviale permet d'éliminer un des vecteurs apparaissant dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exemple *(suite)* : Élimination :

On a obtenu la relation : $\vec{u}_3 = -3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2$.
Ainsi on peut écrire : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2)$.
Or les combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2)$ sont les combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
En d'autres termes $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, -3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
Ainsi on a obtenu la réécriture : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Définition 18 (*Vocabulaire : petites familles liées*)

- **Deux vecteurs**
  Si la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée, on dit que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont **colinéaires**.
- **Trois vecteurs**
  Si la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée, on dit que $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont **coplanaires**.

Exemple *(suite)* : équation du plan engendré $\text{Vect}(\mathcal{F})$ **:**

Pour les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a obtenu $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
Cherchons l'équation du plan $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sous la forme $ax + by + cz = 0$ *(où $a, b, c \in \mathbb{R}$).*
Il nous faut donc : $\begin{cases} \quad b + 2c = 0 & (\Leftrightarrow \vec{u}_1 \in \mathcal{P}) \\ -a \quad + 3c = 0 & (\Leftrightarrow \vec{u}_2 \in \mathcal{P}) \end{cases}$. On trouve ainsi l'équation $\mathcal{P} : 3x - 2y + z = 0$.
On vérifie que le vecteur $\vec{u}_3$ satisfait aussi cette équation.
On a bien vérifié que les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ sont inscrits dans un même plan vectoriel.

(= ils sont coplanaires !)

Une famille **libre** est une famille qui n'est **pas liée** :

Définition 19 (*Indépendance linéaire*)

Soit $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- **Indépendance linéaire**
  On dit que les vecteurs $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ sont **linéairement indépendants** s'ils ne vérifient **aucune relation de dépendance linéaire non-triviale.**
- **Famille libre**
  On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est **libre** si les vecteurs qui la composent sont linéairement indépendants. *(c'est donc un **simple synonyme**)*

Remarques

Soit $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ une famille libre dans espace vectoriel E. Alors :

- Aucun des $\vec{v}_i$ n'est nul.
- Les $\vec{v}_i$ sont tous différents.
- Les sous-familles de $\mathcal{F}$ sont libres aussi.

Exemple : montrer qu'une famille est libre :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée des vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les relations de dépendance linéaire vérifiées par $\mathcal{F}$.

On résout, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ coefficients inconnus, l'équation :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi la seule rel. de dép. lin. satisfaite par la famille $\mathcal{F}$ est triviale : $0\vec{u}_1 - 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = \vec{0}$.

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

Approche matricielle

(dans $\mathbb{R}^n$) On trouve si $\mathcal{F}$ est liée en résolvant $AX = \vec{0}$, pour A matrice de la famille.

La proposition suivante étudie la **complétion d'une famille libre** par un nouveau vecteur :

Proposition 20 (*Appendice à une famille libre*)

Soit $\mathcal{F}_p = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ une famille libre, et $\vec{u}_{p+1} \in E$ un vecteur quelconque.

Notons $\mathcal{F}_{p+1} = (\mathcal{F}_p \,\|\, \vec{u}_{p+1}) = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ la famille complétée.

Alors de deux choses l'une :

- le vecteur $\vec{u}_{p+1}$ **est combinaison linéaire** de $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$: $\quad \vec{u}_{p+1} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$.
  Alors la famille complétée $\mathcal{F}_{p+1}$ est **liée**.
- le vecteur $\vec{u}_{p+1}$ **n'est pas** combinaison linéaire de $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$:
  Alors la famille complétée $\mathcal{F}_{p+1}$ est **libre**.

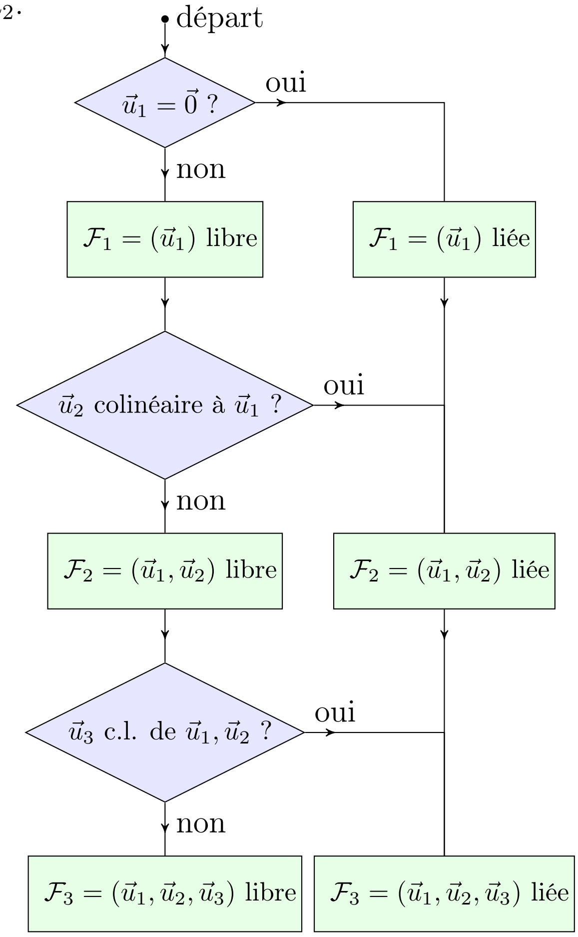
Application : montrer qu'une famille est libre

En pratique, pour montrer qu'une famille de trois vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre, on peut utiliser la rédaction par étapes :

1. vérifier que $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$,

2. vérifier que $\vec{u}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$,

3. montrer que $\vec{u}_3$ n'est pas coplanaire à $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.



Retour sur l'exemple précédent :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille formée de :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons par cette méthode que $\mathcal{F}$ est libre :

1. $\vec{u}_1 = \vec{0}$? : non.
La famille $\mathcal{F}_1 = (\vec{u}_1)$ est libre.

2. $\vec{u}_2$ multiple de $\vec{u}_1$? : non.
La famille $\mathcal{F}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.

3. $\vec{u}_3$ combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$?
Cherchons **si** on peut écrire pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u}_3 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \phantom{x+{}} y \\ 1 = x \\ 0 = x + y. \ (\rightsquigarrow \textit{non !}) \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u}_3$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.
La famille $\mathcal{F}$ est donc bien libre.

3 Théorie de la dimension

La notion, générale en mathématiques, de **dimension** formalise la hiérarchisation entre *(p. ex.)* :

- **dimension 0 :** les points isolés *(un grain de sable, un atôme à la Démocrite)*
- **dimension 1 :** les lignes ou courbes *(un câble, un spaghetti)*
- **dimension 2 :** les surfaces *(un drap étendu, une feuille de papier)*
- **dimension 3 :** les volumes *(une brique, l'eau contenue dans une bouteille)*

On en développe une définition pour les *(sous-)*espaces vectoriels, et quelques propriétés, notamment la **formule du rang**.
L'intuition qui en découle forme un outil puissant en algèbre linéaire et permet souvent :

- de *(parfois...)* s'épargner de fastidieux *(et périlleux !)* calculs,
- de vérifier aisément la cohérence des résultats obtenus.

3.1 Bases d'un espace vectoriel

Définition 21 (*Base d'un espace vectoriel E*)

Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille *(finie !)* de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit que la famille $\mathcal{B} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\right)$ est une **base de** E, si :

- $\mathcal{B}$ est libre *(pas de relation de dépendance linéaire non-triviale entre les vecteurs de $\mathcal{B}$)* **et**
- $\mathcal{B}$ est génératrice : $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ *(tout entier)*

Proposition 22 (*Décomposition dans une base*)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini, et soit $\mathcal{B} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\right)$ une base.
Alors tout vecteur $\vec{v} \in E$ peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs des vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{E}, \ \exists!(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{v} = x_1\,\vec{u}_1 + x_2\,\vec{u}_2 + \ldots + x_p\,\vec{u}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{u}_i$$

Remarques

- La réciproque est vraie : cette propriété *(existence et unicité de la décomposition)* **caractérise** les bases parmi les familles de vecteurs de E.
- Les n scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ apparaissant ci-dessus dans la décomposition de $\vec{v}$ s'appelle **les coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 23 (*Les coordonnées d'un vecteur le déterminent*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base d'un espace vectoriel E.

1. Soit $\vec{v} \in E$. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\left(\vec{v} = \vec{0}\right) \iff \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0\right).$$

(Un vecteur de E est nul ssi *ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes nulles.)*

2. Soit $\vec{v}, \vec{w} \in E$. Notons (x_i) et (y_i) leurs coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\left(\vec{v} = \vec{w}\right) \iff \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = y_i\right).$$

(Deux vecteurs de E sont égaux ssi *ils ont les mêmes coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.)*

Bases canoniques :

- **Base canonique de** $\mathbb{R}^n$
- **Base canonique de** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- **Base canonique de** $\mathbb{R}_n[X]$

3.2 Dimension et sous-espaces vectoriels

Définition 24 (*-Proposition : dimension*)

Soit E un espace vectoriel.

1. On dit que E est **de dimension finie** si E admet une base *(finie !)* $\mathcal{B} = \left(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\right)$.

2. ***(Proposition)*** Toutes les bases de E sont alors formées du même nombre de vecteurs : si $\mathcal{B} = \left(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\right)$ est une base de E, alors **toute autre base** $\mathcal{B}' = \left(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\right)$ de E contient le même nombre de vecteurs que $\mathcal{B}$. *(c'est-à-dire : $p = n$.)*

3. La **dimension de** E est alors le nombre de vecteurs d'une base quelconque $\mathcal{B}$.
On note $\dim(E) \in \mathbb{N}$ cet invariant de E.

Démonstration : Admis. ■

Dimension des espaces vectoriels usuels :

- $\mathbb{R}^n$ on a : $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a : $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = np$
- $\mathbb{R}_n[X]$ on a : $\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n + 1$ *(attention !)*

Droites et plans vectoriels

- Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une **droite vectorielle**
- Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un **plan vectoriel**

Proposition 25 (*Dimension d'un sous-espace vectoriel*)

Si $F \subseteq E$ avec E de dim. finie, alors :

- F est de dim. finie aussi, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
- il y a égalité *ssi* $F = E$ *(tout entier)* .

Démonstration : Admis. ■

Interprétation du cas d'égalité

Ainsi :
- un point ne contient pas d'autre point que lui-même,
- une droite ne contient pas d'autre droite qu'elle-même.
- un plan ne contient pas d'autre plan que lui-même,
- un espace *(de dim. 3)* ne contient pas d'autre espace *(de dim. 3)* que lui-même.

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$\dim(F)$	0	1	2
nb. d'éq^{ns}	2	1	0

(F de dim 2) : alors $F = E$ *(le **plan** tout entier)*

(F de dim 1) : F est une **droite** : $F = \text{Vect}\left(\,\vec{d}\,\right)$, pour un certain $\vec{d} \neq \vec{0}$.

(F de dim 0) : F est **l'origine** : $F = \left\{\,\vec{0}\,\right\}$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$\dim(F)$	0	1	2	3
nb. d'éq$^{\text{ns}}$	3	2	1	0

(F de dim 3) : alors $F = E$ *(l'**espace** tout entier)*

(F de dim 2) : alors F est un **plan** $F = \text{Vect}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, avec $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires

(F de dim 1) : alors F est une **droite** : $F = \text{Vect}\left(\vec{d}\right)$, pour un certain $\vec{d} \neq \vec{0}$.

(F de dim 0) : alors F est **l'origine** : $F = \left\{ \vec{0} \right\}$

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 26 (*Rang d'une famille de vecteurs*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de E.
On appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.
On note $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$.

Proposition 27 (*Calcul dans* $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ sa matrice.

Alors, une fois la matrice A échelonnée *(= à la fin du pivot de Gauss)*, le nombre de pivots restant est égal au rang $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$.

Contexte et notations :

Dans les propositions suivantes, le contexte est comme suit.
Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note :
$p = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ *(nombre de vecteurs dans $\mathcal{F}$)* et $n = \dim(E)$ *(dim. de l'espace ambiant).*

Proposition 28 (*Les majorations automatiques du rang*)

On a les deux *(à la fois)* majorations du rang de $\mathcal{F}$:
- $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$ *(par la dimension ambiante)*
- $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *(par son nb. de vecteurs)*

Proposition 29 (*Liberté, génération en terme de rang*)

- La famille $\mathcal{F}$ est **libre** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$ *(rang = nb de vecteurs de $\mathcal{F}$)*
- La famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = n$ *(rang = dimension de E)*
- La famille $\mathcal{F}$ est **une base** *ssi* $p = n$ **et** $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = n$ *(bon nb de vecteurs)*

Proposition 30 (*Conditions nécessaires : liberté, génération, base*)

- Si $p > n$, alors la famille $\mathcal{F}$ ne peut pas être libre. *(« trop » de vecteurs dans $\mathcal{F}$)*
- Si $p < n$, alors la famille $\mathcal{F}$ ne peut pas être génératrice. *(« pas assez » de vecteurs dans $\mathcal{F}$)*
- Si $p \neq n$, alors la famille $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base. *(pas « le bon nombre » de vecteurs)*

Proposition 31 (*Le cas central* (du « bon nombre » de vecteurs))

Si $p = n$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :
- La famille $\mathcal{F}$ est une base
- La famille $\mathcal{F}$ est libre
- La famille $\mathcal{F}$ est génératrice

Reformulation opératoire du dernier point ***(bon nombre de vecteurs)***

Si $p = n$, il suffit d'avoir $\mathcal{F}$ libre *(ou génératrice)* pour déduire que $\mathcal{F}$ est une **base**

4 Applications linéaires

4.1 Définitions, représentation matricielle canonique

Définition 32 (*Application linéaire*)

Soient E, et F deux espaces vectoriels,
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \underbrace{f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}}$$

($\Leftrightarrow f$ préserve les combinaisons linéaires)

Proposition 33 (*Opérations entre applications linéaires*)

- **Combinaison linéaire** L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est donc un espace vectoriel.
- **Composition**

Proposition 34 (*Représentation matricielle canonique*)

La « correspondance canonique » :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ [f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n] \longleftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Bigg\} n \text{ lignes} \end{array}\right.$$

est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{X}) = A\vec{X} = x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p \\ \vec{C}_1 = f(\vec{e}_1), \\ \vec{C}_2 = f(\vec{e}_2), \\ \vdots \\ \vec{C}_p = f(\vec{e}_p) \end{array}\right.$$

4.2 Noyau et image

Deux sous-espaces vectoriels associés à : $\left\{\begin{array}{l}\text{une application linéaire } f : E \to F \\ \text{une matrice } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) :\end{array}\right.$

Définition 35 (*Noyau d'une application linéaire, d'une matrice*)

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{v} \in E \text{ tels que } f(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$$

= **l'ensemble des** vecteurs de E qui sont **annulés** par f

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\vec{X} \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } A.\vec{X} = \vec{0}\right\}$$

= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui sont **annulés** par A

Noyau et relations de dépendances entre les colonnes

Le noyau de A décrit l'ensemble des **relations de dépendance linéaire** entre les vecteurs colonnes $\vec{C}_i$.

Plus précisément, pour $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ un « vecteur de coefficients », on a l'équivalence :

$$\left[\Lambda \in \mathrm{Ker}(A)\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\lambda_1 \vec{C}_1 + \lambda_2 \vec{C}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{C}_p = \vec{0}.\right]$$

Cette remarque est utile pour $\begin{cases} \text{vérifier la résolution d'un système linéaire} \\ \text{trouver le noyau en « calcul mental »} \end{cases}$

Pratique : Trouver une base du noyau de la matrice A :

- On résout le syst. d'équa$^{\text{ns}}$ $A.\vec{X} = \vec{0}$ pour $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_p)_{\text{col.}}$ *(1 équation par ligne)*
- *(Après échelon^{nt} : alg. du pivot de Gauss :)* les **inconnues principales** *(« à pivot »)* s'expriment en fonction des *(svt 1 seule)* **inc. secondaires** *(paramètres)*
- On ajoute des éq$^{\text{ns}}$ tautologiques pour écrire $A.\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{X} = z_1\vec{v}_1 + \ldots + z_\nu \vec{v}_\nu$,
- On conclut : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\nu\right)$ et $\nu = \dim[\mathrm{Ker}(A)]$ *(= nullité)*

Définition 36 (*Image d'une application linéaire, d'une matrice*)

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{\vec{v} \in F \text{ tq } \exists \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\} \\ &= \{f(\vec{u}),\ \text{quand } \vec{u} \text{ parcourt } E\} \end{aligned}$$
= **l'ensemble des** vecteurs de F qui sont **atteints** par f

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A) &= \left\{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \exists \vec{X} \in \mathbb{R}^p,\ A.\vec{X} = \vec{Y}\right\} \\ &= \left\{A.\vec{X},\ \text{quand } \vec{X} \text{ parcourt } \mathbb{R}^p\right\} \end{aligned}$$
= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont **atteints** par A

Interprétation « vecteurs colonnes »

L'image de A décrit l'ensemble des **combinaisons linéaires** entre les $\vec{C}_i$ ***(sev engendré)***

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_p)$$

Proposition 37 (*Injectivité, surjectivité, bijectivité*)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. L'application linéaire f est **injective** *ssi* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

2. L'application linéaire f est **surjective** *ssi* $\mathrm{Im}(f) = F$.

3. L'application linéaire f est **bijective** *ssi* $[\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F]$.

Vocabulaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Si f est bijective, alors on dit que f est un **isomorphisme** entre E et F.

*(On dit aussi alors que f est **inversible**)*

Proposition 38 (*Bijection réciproque d'une application linéaire*)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que $f : E \to F$ est bijective *(un isomorphisme)*.
Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi une application linéaire.
L'application f *(directe)* et sa réciproque f^{-1} vérifient : $\begin{array}{ll} f \circ f^{-1} & = \mathrm{Id} : F \to F \\ f^{-1} \circ f & = \mathrm{Id} : E \to E. \end{array}$

Proposition 39 (*Inversibilité en dimension finie*)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie.
- Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E.

Alors f est inversible *ssi* $f(\mathcal{B}) = \big(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\big)$ est une base de F.

Remarque : dimension et isomorphie

En particulier, F est alors aussi de dimension finie, et $\dim(E) = \dim(F)$.

4.3 La formule du rang

Contexte et notations

Soient E, F deux espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que **l'espace de départ** E est de dimension finie.

Définition 40 (*Rang d'une application linéaire*)

L'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie.
Sa dimension s'appelle le **rang** de f, noté :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big).$$

Théorème 41 (*Formule du rang*)

On a :

$$\underbrace{\dim(E)}_{\substack{\text{dim. de l'esp.} \\ \text{de départ}}} = \mathrm{rg}(f) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big)$$

Démonstration : Admis. ■

Remarque

Ce résultat est fondamental. On l'utilisera souvent sous l'une des deux formes :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)),$$
$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f).$$

Proposition 42 (*Version matricielle*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On définit le rang comme celui de l'application linéaire associée.

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\Big(\mathrm{Im}(A)\Big).$$

2. Le rang de A est aussi le rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes $\vec{C_i}$:

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\Big(\mathrm{Vect}(\vec{C_1}, \dots, \vec{C_p})\Big).$$

3. La formule du rang s'écrit :

$$\underbrace{\text{nb. de col.}}_{=p} = \mathrm{rg}(A) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big).$$

Interprétation de la formule du rang matricielle

On peut écrire la formule du rang sous la forme :

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}(\vec{C_1}, \dots, \vec{C_p})\Big) = \underbrace{p}_{\substack{\text{nombre de}\\ \text{vecteurs}}} - \underbrace{\dim\Big(\mathrm{Ker}(A)\Big)}_{\substack{\text{nombre de}\\ \text{rel. de dép. lin.}}}$$

Chaque relation de dépendance linéaire permet d'éliminer l'un des $\vec{C_i}$ du Vect.

Cas possible pour une matrice 3×3 :

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les cas possibles sont les suivants :

$\mathrm{rg}(M)$	0	1	2	3
$\dim[\mathrm{Ker}(M)]$	3	2	1	0

(M de rg 3) : M inversible : $\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}$ **base** de $\mathbb{R}^3$ *(cas douteux)*

(M de rg 2) : 1 rel. de dép. lin. entre $\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}$, *(2 sont libres)*

(M de rg 1) : $\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}$ sont colinéaires tous les 3

(M de rg 0) : $M \equiv 0$ soit $\vec{C_1} = \vec{C_2} = \vec{C_3} = \vec{0}$

Détermination du rang « progressive »

La même idée que l'application progressive de la Proposition 20 *(appendice à une famille libre)*