1 Généralités

Introduction : une remarque sur les fonctions affines

Définition 1 (*Fonctions affines*)

Une **fonction affine** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour deux constantes a, $b \in \mathbb{R}$, l'on puisse écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Interprétation graphique

Le graphe de la fonction f est alors une droite $\mathcal{D}$ *(qui n'est pas verticale)*
Les coefficients a, b s'interprètent comme suit :
- a : le coefficient directeur de $\mathcal{D}$,
- b : son ordonnée à l'origine, soit $b = f(0)$.

Le coefficient directeur a peut se retrouver par la formule du **taux d'accroissement** :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \text{pour } x_0, x_1 \text{ quelconques, avec } x_0 \neq x_1.$$

Changement de point

$y = a'(x - x_0) + b'$
$a' = a$ $a' = a$

Les coefficients peuvent être calculés après la

1.1 Définitions

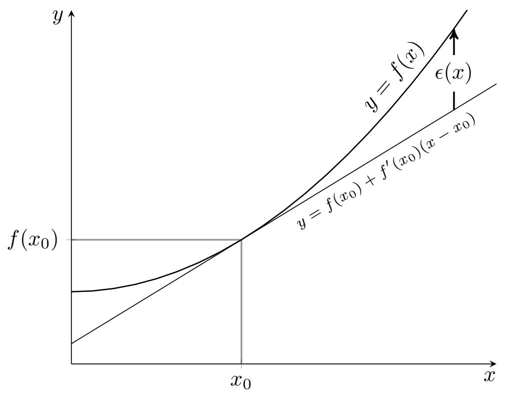
Définition 2 (*Dérivabilité, nombre dérivé*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$.

- On dit que f est **dérivable** en x_0 si, pour $x \to x_0$, on peut écrire **l'approximation** :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$
pour $a \in \mathbb{R}$ une constante.

- La droite d'équation $y = f(x_0) + a(x - x_0)$ est alors la **tangente** au graphe de f en x_0.
- Son coefficient directeur est noté $a = f'(x_0)$, le **nombre dérivé** de f en x_0,



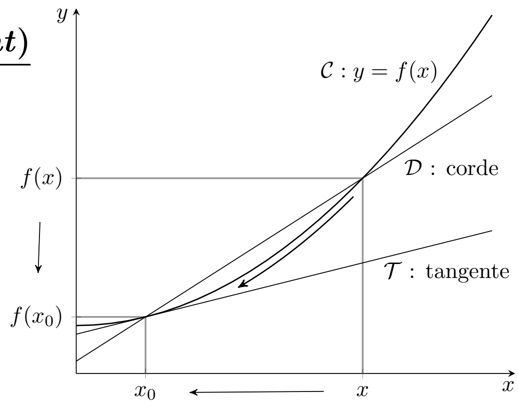
avec $\epsilon(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right]$

En réécrivant, pour $x \to x_0$, la formule : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, comme : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \underbrace{\dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0}}_{\longrightarrow 0}$, on retrouve la formulation familière :

Proposition 3 (*Limite du taux d'accroissement*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0 *ssi* la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe pour $x \to x_0$.
Si c'est le cas, alors le nombre dérivé vérifie :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



(La corde s'approche de la tangente)

Définition 4 (*Fonction dérivée*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- On dit que f est **dérivable sur l'intervalle** I si f est dérivable en tout point $\forall x_0 \in I$.
- La **fonction dérivée** $x \mapsto f'(x)$ est alors bien définie sur I.

Exemples : dérivation de puissances :

- **La fonction carré** $f(x) = x^2$.
  On pose $x = x_0 + h$, et alors $x \to x_0 \iff h \to 0$. On trouve alors :

$$f(x) = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = \underbrace{x_0^2 + 2x_0\, h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{h^2}_{=o(h)}$$

  Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 2x_0$ *(soit* $(x^2)' = 2x$*)*.
- **La fonction cube** $f(x) = x^3$.

On trouve alors : $f(x) = f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = \underbrace{x_0^3 + 3x_0^2\ h}_{\text{affine en } h} + \underbrace{3x_0h^2 + h^3}_{=o(h)}$.

Ainsi, on trouve bien $f'(x_0) = 3x_0^2$ *(soit $(x^3)' = 3x^2$).*

- **La fonction inverse** $f(x) = \frac{1}{x}$. *(un peu plus subtil !)*

  Pour se donner des idées, on commence par calculer le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x_0 x}}{x - x_0} = \frac{-1}{x_0 x},$$

  soit la formule : $f(x) = f(x_0) - \frac{x-x_0}{x_0} \times f(x)$ ou $f(x_0+h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0+h)$.

  Par suite il vient $f(x_0+h) = f(x_0) - \frac{h}{x_0}\left[f(x_0) - \frac{h}{x_0} \times f(x_0+h)\right]$ soit :

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) - f(x_0)\,\frac{h}{x_0}}_{\text{affine en } h} + \underbrace{f(x_0+h)\ \frac{h^2}{x_0^2}}_{=o(h)}.$$

1.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 5 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}$.

Supposons que la **dérivée** f' est **majorée** par M : si $\forall x \in]a,b[, \quad f'(x) \leqslant M$,

alors le **taux d'accroissement** $\tau_{a,b}f$ **l'est aussi** : alors $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

2. Soit $k \geqslant 0$.

Supposons que la **dérivée** f' est **bornée** par k : si $\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$,

alors le **taux d'accroissement** $\tau_{a,b}f$ **l'est aussi** : alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant k$.

Résumé de la proposition :

Le taux d'accroissement s'interprète comme la valeur moyenne de la dérivée :

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{taux d'accroissement de } f} = \underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{valeur moyenne de } f'}$$

Ainsi, si la dérivée vérifie une certaine inégalité **sur tout l'intervalle** I, alors les taux d'accroissement satisfont « la même inégalité ».

En particulier, l'énoncé **1.** s'étend *mutatis mutandis* pour

- une minoration $m \leqslant f'(x)$ *(on retourne l'inégalité pour le taux d'accroissement)*
- un encadrement $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ *(on obtient un encadrement du taux d'accroissement).*
- des inégalités strictes $m < f'(x)$ ou $f'(x) < M$. *($\leadsto$ inégalité stricte sur le taux d'accroissement)*

Remarque sur la portée du résultat

Par définition, la dérivée **s'obtient à partir du** taux d'accroissement *(par passage à la limite).*
L'inégalité des accroissements finis nous permet de faire **le trajet en sens inverse** :

partant d'informations sur la dérivée, **on conclut sur** le taux d'accroissement.

Démonstration ***(Si f est $\mathcal{C}^1$)*:** Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ *(au lieu de « seulement dérivable »).*
Alors la dérivée f' est continue et on peut l'intégrer sur le segment $[x_0\,;x_1]$. Il vient :

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_{x_0}^{x_1} = f(x_1) - f(x_0).$$

Si on a $\forall t \in I, f'(t) \leqslant M$, alors $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f'(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_1} M\ \mathrm{d}t = M(x_1 - x_0)$ *(on rappelle que $x_0 \leqslant x_1$!)*
Il vient donc bien alors $f(x_1) - f(x_0) \leqslant M(x_1 - x_0)$. ■

Proposition 6 (*Sens de variations*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable.

1. La fonction f est **croissante** *ssi* $f' \geqslant 0$ sur I.

2. Si $f' > 0$ sur I, alors la fonction f est **strictement croissante**.

1.3 Règles de dérivation

2 Convexité

2.1 Définition

Définition 7 (*Fonction convexe sur un intervalle*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que f est **convexe** sur I si pour tous
- $a, b \in I$, et
- $p, q \in \,]0\,;1[$, avec $p + q = 1$,

on a l'inégalité :

$$\underbrace{f(qa + pb)}_{\text{image de la moyenne}} \leqslant \underbrace{qf(a) + pf(b)}_{\text{moyenne des images}}$$

Convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \,]0\,;1[$, avec $p + q = 1$. On a :

$$\begin{aligned} qf(a) + pf(b) - f(qa + pb) &= qa^2 + pb^2 - (qa + pb)^2 \\ &= (q - q^2)a^2 + (p - p^2)b^2 - 2pqab = pq(a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

Ainsi $qf(a) + pf(b) = f(qa + pb) + pq(a - b)^2 \geqslant f(qa + pb)$ et f est donc bien convexe.

Remarques ***(pour f une fonction convexe)***

- Notamment pour $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$
- **Généralisation**

  Si on a davantage de coefficients $p_1, p_2, ..., p_n$, avec
  - $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i \geqslant 0$
  - $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad$ *(=100%)*

  on a aussi, pour toute suite $(a_i) \in I^n$, l'inégalité : $\quad f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(a_i).$

2.2 Convexité et dérivation

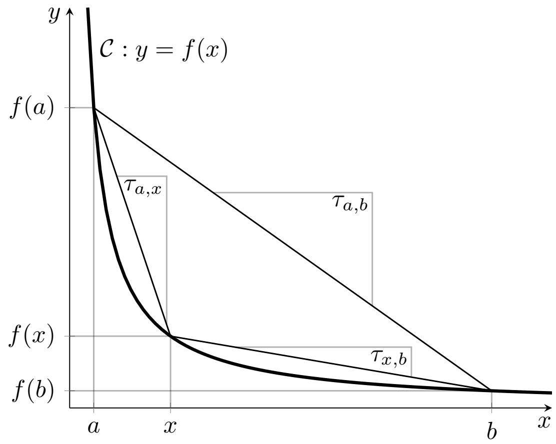
Avec des taux d'accroissements

On écrit ici : $x = qa + pb$, et on a donc : $x - a = p(b-a)$. et $b - x = q(b-a)$.
L'inégalité de convexité $f(qa+pb) \leqslant qf(a)+pf(b)$ s'écrit :

$$f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

On regroupe avec la formule $\dfrac{b-x}{b-a} + \dfrac{x-a}{b-a} = 1$,
et on obtient les deux reformulations suivantes pour cette inégalité : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$,

ou encore $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



(On note ici $\tau_{a,b}$ le taux d'accroissements de f entre a et b, et idem pour $\tau_{a,x}$, $\tau_{x,b}$.)

Convexité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:

Soient $a, x, b \in]0\,;+\infty[$ avec $a < x < b$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est : $\tau_{a,b} = \dfrac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b-a} = \dfrac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \dfrac{-1}{ab}$.

De même : $\tau_{a,x} = \frac{-1}{ax}$, et $\tau_{x,b} = \frac{-1}{xb}$.
Comme $0 < a < x < b$, on a bien $\frac{-1}{ax} \leqslant \frac{-1}{xb} \leqslant \frac{-1}{xb}$, soit $\tau_{a,x} \leqslant \tau_{a,b} \leqslant \tau_{x,b}$.
Ainsi f est bien convexe sur $]0\,;+\infty[$.

Proposition 8 (*Croissance de la dérivée*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Alors f est convexe sur I *ssi* sa dérivée f' est croissante sur I.
- Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe *ssi* f'' est positive $(\geqslant 0)$ sur I.

Démonstration ***(hors-progamme, et que l'on peut omettre)*** **:**

- **f convexe $\Longrightarrow$ f' croissante** On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe.
  Montrons que si $a, b \in I$ vérifient $a \leqslant b$, alors $f'(a) \leqslant f'(b)$.
  D'après la Remarque 2.1, pour $x \in]a\,;b[$, on a :
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, et
  - $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

  On passe à la limite pour $x \to b$ et $x \to a$ respectivement. Il vient :
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$
  - $f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

  Ainsi on a bien : $f'(a) \leqslant f'(b)$, et f' est croissante.
- **f' croissante $\Longrightarrow$ f convexe** On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et f' croissante.
  Pour $a \leqslant b \in I$, et $x \in]a\,;b[$, d'après les accroissements finis, et la croissance de f', on a :
  $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \geqslant f'(x)$ et $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(x)$. Ainsi $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
  Or le taux d'accroissement s'écrit comme une moyenne :
  $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{b-x}{b-a}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$
  On a donc bien $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et f est convexe par la Remarque 2.1. ■

Proposition 9 (*Caractérisation par les tangentes*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Alors f est convexe
- *ssi* le graphe de f est au-dessus de ses tangentes,
- c'est-à-dire *ssi* $\forall a, x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$.

Démonstration : On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a donc $f''(t) \geqslant 0$ pour $t \in I$.

On va écrire $f(x)$ en faisant apparaître une intégrale avec $f''(t)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= f(a) + \Big[(t-x)f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

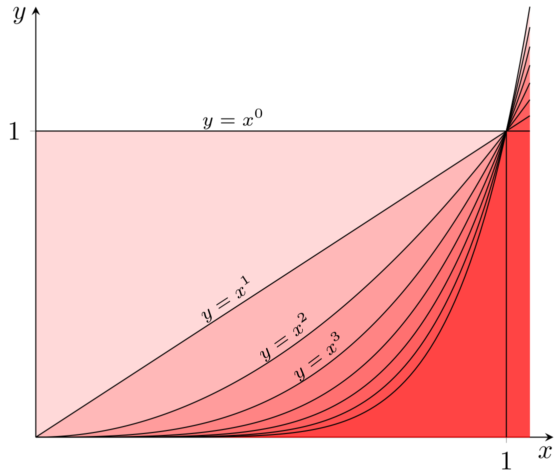
où l'on a fait l'intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = f'(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u'(t) = f''(t) \\ v(t) = t - x. \end{cases}$

Ainsi : $\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\int_a^x (x-t)f''(t)\ \mathrm{d}t}_{\geqslant 0}$, d'où $\quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$. ∎

2.3 Exemples d'application

3 Développements limités à l'ordre 2

3.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point



Proposition 10 (*Unicité*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et $x_0 \in I$.
Si f admet un développement limité en x_0, celui-ci est unique.
En d'autres termes, si l'on peut écrire :
$$\begin{aligned} f(x) &= a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \\ &= a' + b'(x-x_0) + c'(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \end{aligned}$$
pour $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, alors on a nécessairement : $a = a', b = b'$, et $c = c'$.

3.2 La formule de Taylor à l'ordre 2

Développements limités à l'ordre 1 *(On s'intéresse, comme dans la suite, à l'étude en 0.)*

On a l'approximation de $f(x)$ pour $x \to 0$, par une fonction affine, grâce à la dérivée :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x}_{\text{fonction affine}} + \underbrace{o(x)}_{\text{terme d'erreur}}$$

Cette formule est exacte *(le terme d'erreur = 0)* pour une fonction affine en $f(x) = ax + b$, car alors, on a bien $f(0) = b$, et $f'(0) = a$.

Recherche d'analogue pour un polynôme de degré 2

Pour une fonction donnée par : $f(x) = ax^2 + bx + c$,
on a : $f'(x) = 2ax + b$,
et : $f''(x) = 2a$. Ainsi en prenant $x = 0$, on trouve l'expression des coefficients : $c = f(0)$, $b = f'(0)$ et $a = \dfrac{f''(0)}{2}$.

On a obtenu, pour f fonction polynomiale de degré 2 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2$.

Proposition 11 (*Formule de Taylor à l'ordre 2*)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors $x \to x_0$, et $h \to 0$:

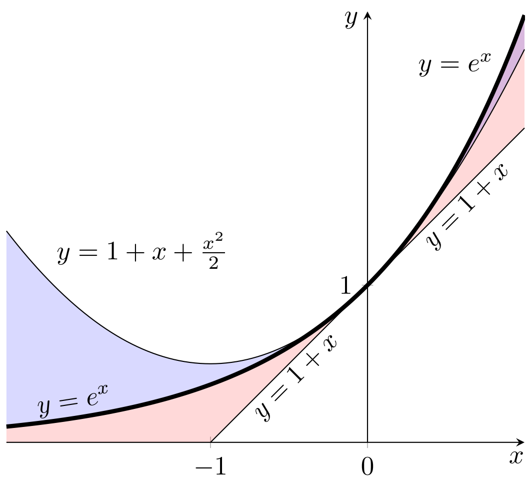
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + o\,(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + o(h^2)$$

3.3 Cas à connaître

e^x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a,\ a \in \mathbb{R}$
$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Pour la fonction exponentielle

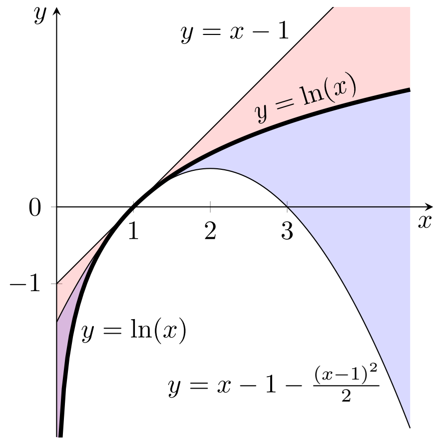


Proposition 12

Pour $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Pour la fonction logarithme



Proposition 13

Pour $x \to 1$

$$\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

Pour $h \to 0$

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Démonstration : On a : $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, et $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$.
Ainsi : $\ln(1) = 0$, $\ln'(1) = 1$, $\ln''(1) = -1$.
Le développement limité suit par la formule de Taylor. ■

Pour les fonctions puissances

Proposition 14 (*Dév*^{t} *limité de* $(1+x)^a$)

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors, pour $x \to 0$, on a :

$$(1+x)^a = 1 + ax\frac{a(a-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$$

Démonstration :
Pour $x > 0$, notons $f(x) = (1+x)^a$.
Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour $x > 0$, on a $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ et $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$, d'où :
$f(0) = 1$, $f'(0) = a$, et $f''(0) = a(a-1)$. ■

Les cas $(1+x)^a$, pour $a \in \mathbb{N}$

On développe par la formule du **binôme de Newton** :

$$(1+x)^0 = 1$$
$$(1+x)^1 = 1 + x$$
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(1+x)^4 = \underbrace{1 + 4x + 6x^2}_{\text{dev}^t\ \text{lim.}_2} + \underbrace{4x^3 + x^4}_{=o(x^2)}$$

En général, de la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ on ne garde pour développement limité que les trois premiers termes, soit : $\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$.

Le cas $a = -1$ ***(la fraction** $\frac{1}{1+x}$**)***

On peut écrire : $\frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} = 1 - x \cdot \frac{1}{1+x}$.

On réinjecte : $\frac{1}{1+x} = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right) = 1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right)\right)$.

On a trouvé la formule du développement limité à l'ordre 2 : $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2}_{\text{dev. lim}_2} - \underbrace{\frac{x^3}{1+x}}_{=o(x^2)}$.

(en itérant, on trouve $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$, *etc.)*

3.4 Application aux formes indéterminées

4 Exercices

Exercice 1 (*Calculs de taux d'accroissements*)

1. $f(x) = x^2$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $a + x$
2. $f(x) = x^3$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $a^2 + ax + x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ Montrer que le taux d'accroissement est donné par : $\frac{-1}{ax}$
4. En faisant le passage à la limite $x \to a$, retrouver les dérivées de ces fonctions.

Exercice 2 (*Moyenne harmonique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\displaystyle \frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.
3. Conclure que la moyenne harmonique $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ est majorée par la moyenne arithmétique $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a $a < H(a,b) < b$.

Exercice 3 (*Moyenne géométrique*)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour $a, b > 0$, on a : $\displaystyle \frac{1}{2}\Big[\ln(a) + \ln(b)\Big] \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
3. Conclure que la moyenne harmonique $G(a,b) = \sqrt{ab}$ est majorée par la moyenne arithmétique $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, alors on a $a < G(a,b) < b$.

Exercice 4 (*Relation entre les trois moyennes*)

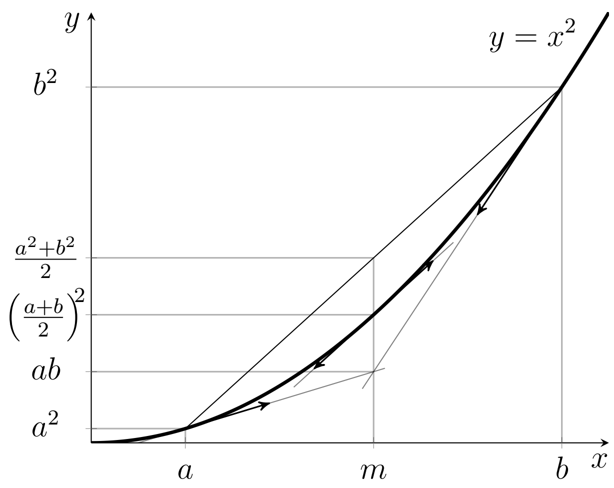
Pour deux réels $a, b > 0$, on définit :
- leur moyenne **arithmétique** par : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
- leur moyenne **harmonique** par : $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$
- leur moyenne **géométrique** par : $G(a,b) = \sqrt{ab}$.

1. Calculer le produit $A(a,b) \times H(a,b)$.

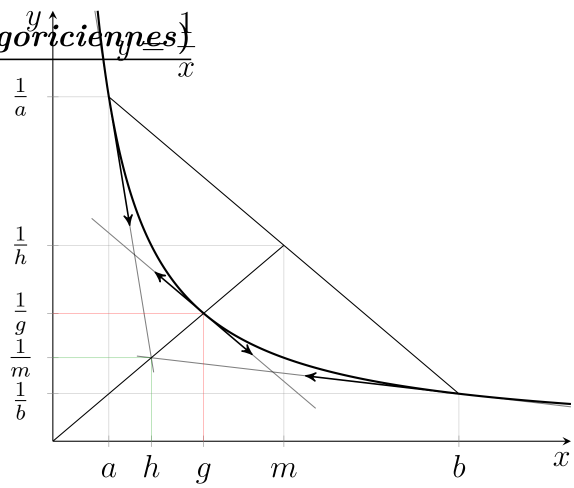
2. En déduire la moyenne géométrique de $A(a,b)$ et de $H(a,b)$.

3. En déduire l'encadrement $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$.

Exercice 5 (*La parabole et la moyenne arithmétique*)



Exercice 6 (*L'hyperbole et les moyennes Pythagoriciennes*)



Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, et on place deux points $A_0 = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ et $A_1 = \left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$ et où $x_0, x_1 > 0$.

On pose[a] $a = \frac{x_0+x_1}{2}$, $g = \sqrt{x_0 x_1}$ et $h = \frac{2x_0x_1}{x_0+x_1}$.

Montrer que :
- on a : $ah = g^2$ et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}\right)$.
- le point $\left(a, \frac{1}{h}\right)$ est le milieu du segment $[A_0A_1]$,
- le point $\left(h, \frac{1}{a}\right)$ est l'intersection des tangentes à $\mathcal{H}$ en A_0 et A_1,
- le point $\left(g, \frac{1}{g}\right)$ est un point de $\mathcal{H}$ où la tangente est parallèle à $[A_0A_1]$,
- ces trois points sont alignés avec l'origine, sur la droite d'équation $y = g^2x$.

[a] Respectivement la moyenne *arithmétique*, *géométrique* et *harmonique* de x_0 et x_1. On peut montrer que l'on a : $h \leqslant g \leqslant a$

Exercice 7 (*Démonstration de la Proposition 8*)

Démonstration : On considère la fonction : $\varphi(t) = qf(x - tp\ell) + pf(x + tq\ell)$

Alors on a les deux valeurs remarquables :

- $\varphi(0) = f(x)$
- $\varphi(1) = qf(qa + pb - p(b - a)) + pf(qa + pb + q(b - a)) = qf(a) + pf(b)$

On dérive par rapport à t, tous les autres coefficients restant constants : $\varphi'(t) = -pqf'(x - tp\ell) + pqf'(x + tq\ell) = pq(f'(x + tp\ell) - f'(x - tp\ell))$ ■