Une étude de suite récurrente par accroissements finis

pour le jeudi 29 septembre

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $\forall x > 0, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x), \quad g(x) = f(x) - x.$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left|\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{array}\right.$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

3. **a)** Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]0\,;+\infty[$.

b) Justifier que : $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.

c) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et préciser les variations de la fonction f.

5. **a)** Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}\,.$

6. **a)** Vérifier que : $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$

b) Par l'inégalité des accroissements finis, déduire : $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - \alpha|\,.$

c) En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|\,.$

7. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}.$

8. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

9. Compléter ce programme qui calcule une approximation de α avec une erreur $\leqslant 10^{-3}$.

approxAlphaACompleter.sce

```
// CONSTANTES : les données du problème
U0 = 1
ESTIM_ERREUR_INIT = %e - 1
PRECISION = 10^(-3)
function y = f(x)
  y = ___                      // <- compléter cette ligne SUR VOTRE COPIE
endfunction                    //                 (sans recopier les autres)

// initialisation
u = U0
estimErreur = ESTIM_ERREUR_INIT

// la boucle
while (estimErreur > PRECISION)
  u = ___                      // <- compléter cette ligne SUR VOTRE COPIE
  estimErreur = estimErreur / 2 // l'erreur estimée est géométrique de raison 1/2
end                            //                              (voir question 7.)

// affichage du résultat
disp("approximation de alpha à 10^(-3) près :")
disp(u)     // retourne 1.7268515 -> comment vérifier ce résultat ?
```