Td 9 - Diagonalisation

1 Éléments propres

1.1 Définitions

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Définition 1 (*Couple propre*)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$.

- **Équation des couples propres**
  Le couple $(\lambda, \vec{X})$ est **propre** pour A si

$$A\vec{X} = \lambda \vec{X} \qquad \text{avec } \vec{X} \neq \vec{0}$$

On dit alors que :

- λ est une **valeur propre** de A.
- $\vec{X}$ est un **vecteur propre** de A, associé à la valeur propre λ.

Définition 2 (*Sous-espaces propres*)

- **Sous-espace propre associé à λ**
  C'est **l'ensemble** $E_\lambda(A)$ des vecteurs propres associés à la *vp* λ *(avec $\vec{0}$)*
- **Reformulation** On a

$$A\vec{X} = \lambda \vec{X} \iff (A - \lambda I_n)\vec{X} = \vec{0}$$

Ainsi, on a

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Définition 3 (*Spectre*)

- **Définition**
  L'ensemble des valeurs propres λ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'appelle le **spectre** de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$.
- **Caractérisation**

	$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$	*($\Leftrightarrow$ λ valeur propre de A)*
ssi	$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$	*($E_\lambda(A)$ sous-espace propre associé)*
ssi	$A - \lambda I_n$ n'est **pas** inversible	*($\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_n$ a « du noyau »)*

- **Vérification pour λ *(donnée)* :** résolution de $A\vec{X} = \lambda \vec{X}$ *(pivot de Gauss $\rightsquigarrow$ pas difficile)*

Exercice 1 (*Vérification de valeurs propres*)

Pour chaque cas ci-dessous :

1. Résoudre l'équation des vecteurs propres pour chaque λ proposé.
2. Calculer la somme des dimensions des sous-espaces propres trouvés.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0, 1, 2, -3$ $\qquad$ $\lambda = 0, -1, 1, 2$ $\qquad$ $\lambda = 0, -1, 1, 2$ $\qquad$ $\lambda = 0, -2, 14$

1.2 Matrices triangulaires

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Notons $d_1, \dots, d_n$ ses coefficients diagonaux

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Proposition 4 (*Inversibilité*)

T est inversible $\Leftrightarrow$ ses coeff$^{\text{ts}}$ diag$^{\text{x}}$ sont tous non-nuls.
$\Leftrightarrow$ $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0, \dots,\ d_n \neq 0.$

Proposition 5 (*Valeurs propres*)

Le spectre de T est $\mathrm{Sp}(T) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Ainsi,

$$\lambda \text{ valeur propre de } T \iff \lambda \text{ sur la diagonale de } T.$$

Exercice 2 (*Matrices triangulaires*)

Pour chacune des matrices triangulaires suivantes :

1. Trouver ses valeurs propres
2. Déterminer le sous-espace propre associé
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres $\overset{?}{=}$ nb. de colonnes

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3 Spectre d'une matrice compagnon

Exercice 3 (ÉCRICOME *2013 : une matrice compagnon*)

On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$

Enfin, on note R le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

1. Montrer que R' admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$. *(que l'on précisera)*
2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2 .
3. Justifier que R admet trois racines a,b,c avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$.
   (On ne cherchera pas à calculer ces racines).
4. Calculer AX_λ, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrer que X_λ est vecteur propre de A *ssi* $R(\lambda) = 0$.
5. Montrer qu'on peut écrire $A = PDP^{-1}$, où D diagonale et P inversible à expliciter.

*(**Suite** : application à l'étude d'un endomorphisme sur l'espace des matrices)*

2 Polynômes annulateurs

2.1 Recherche de polynômes annulateurs

Exercice 4 (*Calculs d'inverses et polynômes annulateurs*)

Pour chaque matrice ci-dessous

1. Calculer M^2
2. Trouver $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $M^2 = aM + bI$. En déduire un polynôme annulateur Π_M.
3. En déduire l'inverse de M sous la forme $M^{-1} = \alpha M + \beta I$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2.2 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Proposition 6 (*Les valeurs propres sont racines*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On suppose que A admet $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ pour polynôme annulateur, soit : $P(A) = 0$.
Alors toutes les valeurs propres de A sont racines de $P(X)$.
En d'autres termes : **si** $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, **alors** $P(\lambda) = 0$.

*(Que **ne dit pas** cette proposition ?)*

Exercice 5 (*Une matrice stochastique*)

Soient $p, q \geqslant 0$ avec $p + q = 1$. On étudie la matrice $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer S^3.
2. En déduire, selon la parité de n, la valeur de S^n.
3. Trouver les valeurs propres de S, et déterminer les sous-espaces propres associés.

Exercice 6 (*Matrices « compagnons »*)

Pour chaque matrice

1. Vérifier que le polynôme correspondant est annulateur.
2. Vérifier que ses racines sont valeurs propres de la matrice.
3. Combien vaut la somme des dimensions des sous-espaces propres ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$X^3 - 1$ $\qquad$ $X^3 + 1$ $\qquad$ $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ $\qquad$ $X^3 + 2X^2 - X - 2$

3 Suites linéaires récurrentes

Exercice 7 (*Suite linéaire récurrente double*)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Résoudre l'équation caractéristique $r^2 = r + 6$.
2. Soit (a_n) la suite géométrique (r^n). Montrer $[\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n] \Leftrightarrow r^2 - r - 6 = 0$.
3. Résoudre pour $(u_n) = \big(\lambda(-2)^n + \mu 3^n\big)$ les conditions initiales $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$
4. En déduire le terme général de (u_n).

Exercice 8 (*Suite linéaire récurrente triple*)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10, \quad u_1 = u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+1} + 6u_n. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

On note $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

1. **Réduction de** A
   a) Montrer que l'on a $A^3 = 7A + 6I_3$.
   b) En déduire que les seules valeurs propres de A sont : $-1, -2$ et 3.
   c) Montrer que les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A.
   d) En déduire que $AP = PD$, pour D diagonale à préciser, et conclure que $A = PDP^{-1}$.

2. **Terme général de** (u_n) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $P^{-1}X_n = Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que l'on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.
   b) Vérifier que (a_n) (b_n) et (c_n) sont des suites géométriques.
   c) Exprimer X_0, puis vérifier que $a_0 = 15$, $b_0 = -6$, et $c_0 = 1$.
   d) En déduire l'expression générale de (u_n).

Variante : approche matricielle

On peut aussi obtenir ce dernier résultat de façon plus « matricielle » comme suit :

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
2. Comme $A = PDP^{-1}$ *(diagonalisation de A)*, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$
3. On a : $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$.
4. Comme $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve donc $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 15(-1)^n \\ -6(-2)^n \\ 3^n \end{pmatrix}$
5. On trouve alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 15(-1)^n - 6(-2)^n + 3^n$.

4 Représentation matricielle dans une base

Définition 7 (*Applications linéaires*)

Soient E, et F deux espaces vectoriels.
Soit $f : E \to F$ une application.
Alors f est **linéaire** si f préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u}, \vec{v} \in E,\quad \underbrace{f\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right)}_{\text{image de la c.l.}} = \underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})}_{\text{c.l. des images}} \qquad (1)$$

Définition 8 (*Vocabulaire *morphisme*)

- **Isomorphisme**
Une appl^{n} linéaire $f : E \to F$ inversible. *(bijective)*
- **Endomorphisme**
Une application linéaire $f : E \to E$.
- **Automorphisme**
Un endomorphisme inversible

Définition 9 (*Représentation matricielle d'un endomorphisme*)

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n)$ une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est la matrice (a_{ij}) définie par :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\quad f(\vec{u}_j) = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{u}_n$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\vec{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to \vec{u}_1 \\ \to \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \to \vec{u}_n \end{array}$$

Exercice 9 (*Un endomorphisme matriciel* (d'après EmLyon 2014))

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{F}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{F}$, on note $f(M) = TMT$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

3. **a)** Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{F}$.
b) *(pas encore vu)* Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{F}$.

4. **a)** Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A,B,C) et en déduire F.
b) Montrer que $(F-I)^2 = 0$.

5. **a)** Montrer que f n'admet qu'une valeur propre à déterminer.
b) Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à celle-ci.
c) *(pas encore vu)* Est-ce que f est diagonalisable ?

Exercice 10 (***Manipulation formelle d'un endomorphisme*** ***(EmLyon 2015)***)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.

On note : $\begin{cases} i \text{ l'application identité de } E : & i : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto x \\ \theta \text{ l'application constante nulle de } E \text{ dans } E : & \theta : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto 0_E. \end{cases}$

On considère un endomorphisme f de E tel que : $\begin{cases} f \neq \theta \\ f^2 + i \neq \theta \ \textit{(où } f^2 \textit{ désigne } f \circ f.\textit{)} \\ f \circ (f^2 + i) = \theta \end{cases}$

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

   b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

3. *(pas encore vu)* Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

   b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

7. On note $g = f^2 - i$.
   Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

5 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

5.1 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si l'on peut écrire $A = P D P^{-1}$ avec *(c'est une formule de changement de base)*

- D **diagonale** : « la matrice des **valeurs** propres » *(matrice dans une nouvelle base)*
- P **inversible** : « la matrice des **vecteurs** propres » *(matrice de passage)*

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable *ssi***
la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ vaut n

Exercice 11 (*Diagonalisation d'une matrice* 2 × 2)

Pour $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, on pose $\det(M) = ad - bc$ et $\mathrm{tr}(M) = a + d$.

1. Pour une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, calculer $\det(D)$ et $\mathrm{tr}(D)$.

2. *(Retour au cas général)* Calculer M^2.

3. En déduire que $T(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ est un polynôme annulateur de M.

4. Montrer que M n'est pas diagonalisable si $\mathrm{tr}(M)^2 < 4\det(M)$.

On suppose que l'on peut factoriser $T(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

5. En déduire que les vecteurs colonnes de $M - \lambda_i I_2$, pour $i = 1$ ou 2, sont des vecteurs propres de M, et que M est diagonalisable.

Remarque : Polynôme caractéristique d'une matrice 2 × 2

Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ indique si les vecteurs colonnes sont colinéaires. On a : *(proportionnels)*

- **Inversibilité** $[A$ inversible$] \iff [\det(A) \neq 0]$.
- **Non-inversibilité** $[A$ **pas** inversible$] \iff [\det(A) = 0]$.

Ainsi, on trouve le critère suivant pour les valeurs propres d'une matrice 2 × 2

$$[\,\lambda \in \mathbb{R} \in \mathrm{Sp}(A)\,] \iff [\;\underbrace{\det(A - \lambda \cdot I_2)}_{\text{trinôme du 2nd deg.}} = 0\,].$$

et on peut vérifier en développant que : $\det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$

Exercice 12 (*Diagonalisabilité de matrices* 2 × 2)

Dire si chacune des matrices suivantes sont diagonalisables. Le cas échéant, diagonaliser.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 13 (*Une matrice compagnon*)

Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4$ et $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Par un pivot de Gauss, montrer que la matrice $M - \lambda I_3$ est inversible *ssi* $P(\lambda) \neq 0$.

2. Trouver les racines du polynôme P. En déduire les valeurs propres de M.

3. Montrer que la matrice $P = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalise la matrice M.

Le cas des matrices symétriques

Exercice 14 (*Suite de l'Ex 11*)

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice symétrique 2×2.
Montrer que A est diagonalisable.

Proposition 10 (*Théorème spectral*)

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que S est **symétrique**.
Alors S est diagonalisable.

Exercice 15 (*Application*)

Soit $S = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

1. Montrer que S est diagonalisable.

2. Montrer que $S^2 = 9I_3$.

3. Déduire un polynôme annulateur de S.

4. Diagonaliser la matrice S.

5.2 Diagonalisation d'un endomorphisme

Exercice 16 (*Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (d'après EmLyon 2012)*)

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

0. Vérifier que l'on a $BP = PD$ et en déduire que : $B = PDP^{-1}$.

On considère l'application $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto h(M) = AMB$.

1. **a)** Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle de h.

On se propose maintenant de déterminer les valeurs propres de h.

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$,
Montrer : $[h(M) = \lambda M] \iff [AND = \lambda N]$.

3. Trouver pour quels réels $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non-nulle telle que $AND = \lambda N$.

(À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$)

4. **a)** En déduire les valeurs propres de h.

b) Montrer que h est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant h.

5. On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer : $(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0$.

5.3 Application aux puissances d'une matrice

Proposition 11 (*Puissances d'une matrice diagonale*)

La puissance n-ième d'une matrice diagonale est la matrice diagonale des puissances n-ièmes.

Exercice 17 (*Diagonalisation et puissances*)

Pour chacune des matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

1. La diagonaliser $M = PDP^{-1}$.
2. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.
3. En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 12 (*Formule du binôme de Newton*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$.
On suppose que A et B commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$.
Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}$.

Décomposition de Dunford

Il se trouve que toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$A = \Delta + N$ où
- Δ est **diagonalisable** *(en tous cas sur $\mathbb{C}$)*
- N est **nilpotente** *(soit N^k pour k assez grand : $k \geqslant p$)*
- Δ et N commutent : $\Delta N = N\Delta$.

Exercice 18 (*Application*)

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Pour quelle matrice a-t-on $A = \Delta + N$, avec $\Delta = 2I_3$?
2. Calculer N^3 et en déduire N^k pour $k \geqslant 3$.
3. Vérifier que les conditions d'application de la formule du binôme de Newton sont vérifiées.
4. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 (*Version « piège »*)

On s'intéresse cette fois à la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais avec $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6 Commutant d'une matrice, et équations

Définition 13 (*Commutant*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
Le **commutant** de A est l'ensemble $\mathcal{C}A$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 20 (*À chaque fois*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1. Montrer que le commutant $\mathcal{C}A$ de A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A \in \mathcal{C}A$.

Exercice 21 (*Une équation (EmLyon 2015)*)

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A,B,C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Déterminer la dimension de F.
2. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$
3. a) Pour $a,b,c \in \mathbb{R}$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.
   b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{bmatrix}$

Exercice 22 (*Diagonalisation et commutant dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (EmLyon 2013)*)

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
2. a) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) Donner une base du sous-espace propre associé à chaque valeur propre de A.
3. a) En déduire deux matrices P et $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :
      - on a $A = PDP^{-1}$
      - D est diagonale, et ses coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant,
      - P est inversible, et a ses coefficients diagonaux tous égaux à 1
   b) Calculer P^{-1}.
4. Montrer que $\mathcal{C}A$ est un *s-e.v.* de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$.
   Montrer : $M \in \mathcal{C}A \iff N \in \mathcal{C}D$
6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.
7. En déduire que les matrices $M \in \mathcal{C}A$ s'écrivent :
   $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$
8. Déterminer une base de $\mathcal{C}A$ et la dimension de $\mathcal{C}A$.