Une étude de suite récurrente par accroissements finis

pour le jeudi 29 septembre

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $\forall x > 0, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x),$
$g(x) = f(x) - x.$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{array}\right.$

1. *(Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.)*

On a $\forall x > 0$, $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x$

- **Limite en 0^+** Pour $x \to 0^+$ $\left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln(x) \to +\infty \\ 2 - x \to 2 \end{array}\right.$ Donc on a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
- **Limite en $+\infty$** Pour $x \to +\infty$ $\left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln(x) \to -\infty \\ 2 - x \to -\infty \end{array}\right.$ Donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. *(Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0\,;+\infty[$.)*

- **Dérivation**

  On a $\forall x > 0, \quad g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x.$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

  Il vient $\quad g'(x) = -\dfrac{1}{2x} - 1 = -\dfrac{2x+1}{2x}.$

- **Variations de g**

  On a $\forall x > 0$, $g'(x) < 0$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. **a)** *(Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]0\,;+\infty[$.)*

La fonction g est :
- continue sur $]0\,;+\infty[$
- strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection monotone sur $]0\,;+\infty[$, la fonction g réalise une bijection : $]0\,;+\infty[\; \to\;]\lim\limits_{+\infty} f\,;\lim\limits_{0^+} f[\; = \;]-\infty\,;+\infty[\; = \mathbb{R}$.

En particulier, le réel 0 admet un unique antécédent $\alpha = g^{-1}(0) \in\,]0\,;+\infty[$ par g.

b) *(Justifier que : $\quad \alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.)*

On a :
- $g(1) = 2 - \frac{1}{2}\ln(1) - 1 = 1 \geqslant 0$
- $g(\mathrm{e}) = 2 - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} = \frac{3}{2} - \mathrm{e} \leqslant 0$ *(car $\mathrm{e} > 2 > \frac{3}{2}$)*.

Ainsi g change de signes sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$, donc s'y annule. On a donc bien $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.

Rédaction alternative ***(plus élégante ?)***

> Ainsi, on a $g(\mathrm{e}) \leqslant 0 \leqslant g(1)$, donc par décroissance *(de g^{-1})* : $1 \leqslant g^{-1}(0) = \alpha \leqslant \mathrm{e}$.

c) *(Vérifier que $\quad f(\alpha) = \alpha$.)*

On a $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$. *(Le réel α est l'unique point fixe de f.)*

4. *(Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ et préciser les variations de la fonction f.)*

- **Dérivation**

  On a $\forall x > 0, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x).$ Cette expression est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

  Il vient $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{2x}.$

- **Variations de f**

  On a $\forall x > 0$, $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

5. a) *(Montrer que $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$.)*

Par décroissance de f, pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, l'inégalité $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$
donne $f(\mathrm{e}) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

Or, on a :
- $f(1) = 2 - \frac{1}{2}\ln(1) = 2 \in [1\,;\mathrm{e}]$
- $f(\mathrm{e}) = 2 - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{3}{2} \in [1\,;\mathrm{e}]$

Ainsi, pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a aussi $f(x) \in [1\,;\mathrm{e}]$.

b) *(Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ $\quad (H_n)$
- **Initialisation** On a bien : $u_0 = 1 \in [1\,;\mathrm{e}]$ $\quad (H_0)$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ D'après la question **5.a)** avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a a aussi $f(x) = f(u_n) = u_{n+1} \in [1\,;\mathrm{e}]$, soit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$ $\quad (H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ $\quad (H_n)$

6. a) *(Vérifier que : $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.)*

Pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2x}$, donc $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$ et on a donc bien : $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

b) *(Par l'inégalité des accroissements finis, déduire : $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}], \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$.)*

On a $\forall x \in [1\,;\mathrm{e}]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, donc l'application de l'inégalité des accroissements finis entre les points $x \in [1\,;\mathrm{e}]$ et α donne : $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$

soit : $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

c) *(En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.)*

On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n \in [1\,;\mathrm{e}]$. Il vient $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

7. *(Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$. $\quad (H_n)$
- **Initialisation** On a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^0}$ $\quad (H_0)$ $\quad$ car $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1\,;\mathrm{e}]$.
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$.

  D'après la question précédente, $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

  On applique (H_n), et il vient : $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^{n+1}}$. $\quad (H_{n+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$. $\quad (H_n)$

8. *(Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.)*

On a montré la « majoration de l'erreur » : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$, où $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par le th. de convergence par encadrement *(« des gendarmes » version valeur absolue)* on a donc

$$|u_n - \alpha| \to 0, \quad \text{soit} \quad (u_n) \to \alpha$$

9. *(Compléter ce programme qui calcule une approximation de α avec une erreur $\leqslant 10^{-3}$.)*

approxAlphaACompleter.sce

```
// CONSTANTES : les données du problème
U0 = 1
ESTIM_ERREUR_INIT = %e - 1
PRECISION = 10^(-3)
function y = f(x)
  y = ___                          // <- compléter cette ligne SUR VOTRE COPIE
endfunction                        //              (sans recopier les autres)

// initialisation
u = U0
estimErreur = ESTIM_ERREUR_INIT

// la boucle
while (estimErreur > PRECISION)
  u = ___                          // <- compléter cette ligne SUR VOTRE COPIE
  estimErreur = estimErreur / 2 // l'erreur estimée est géométrique de raison 1/2
end                                //                             (voir question 7.)

// affichage du résultat
disp("approximation de alpha à 10^(-3) près :")
disp(u)      // retourne 1.7268515 -> comment vérifier ce résultat ?
```