Colles semaine 15 - Application de la réduction

1 Situations linéaires hors de $\mathbb{R}^n$

- **Exemple du commutant** pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
  - $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel,
  - on a $I_n \in \mathcal{C}_A$, et $A \in \mathcal{C}_A$, ainsi que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in \mathcal{C}_A$.
  - on peut trouver une base de $\mathcal{C}_A$ en résolvant $AM = MA$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ générique.
- **Exemples d'appl. linéaires** $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto A \cdot M \end{cases}$ ou $\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto A \cdot M - M \cdot A \end{cases}$

  Exemples de questions
  - Démontrer la linéarité,
  - Repr. matricielle dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
  - Stabilité d'un sous-espace vectoriel donné
  - Recherche de noyau,
  - Calcul de φ^2, de φ^{-1}.

2 Principe du changement de base

- **Formule de changement de base**

  Pour un endomorphisme $f : E \to E$ entre deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E :
  $$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\text{ancienne matrice}} = \underbrace{\mathrm{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}')}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{nouvelle matrice}} \cdot \underbrace{\mathrm{Pas}(\mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B})}_{=\mathrm{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}')^{-1}}$$
- **Expression des matrices**

  Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$,

  Matrice de passage

  On exprime les $\vec{u}_i$ en fonction des $\vec{e}_j$
  Coefficients pour chaque $\vec{u}_i \rightsquigarrow$ colonne U_i de P

  $$\mathrm{Pas}(\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & & \vec{u}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{U}_1 & \vec{U}_2 & \cdots & \vec{U}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{selon } \vec{e}_1 \\ \text{selon } \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \text{selon } \vec{e}_n \end{array}$$

  Matrice dans la nouvelle base

  On exprime les $f(\vec{u}_i)$ en fonction des $\vec{u}_j$
  Coeff. pour chaque $f(\vec{u}_i) \rightsquigarrow$ colonne Y_i de M'

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & & f(\vec{u}_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 & \cdots & \vec{Y}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{selon } \vec{u}_1 \\ \text{selon } \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \text{selon } \vec{u}_n \end{array}$$
- **Cas de la trigonalisation** « quasi-diagonalisation » $A = PTP^{-1}$, où *(guidé par l'énoncé)*
  - T matrice triangulaire supérieure
  - P matrice de colonnes, soit :
    - des vecteurs propres avec $A \cdot \vec{u}_i = \lambda \vec{u}_i$
    - des vecteurs de Jordan avec $A \cdot \vec{u}_i = u_{i-1} + \lambda \vec{u}_i$
- **Principe du changement de variable**

  Si $A = PA'P^{-1}$, réécriture d'équations avec $(A, M) \rightsquigarrow (A' = P^{-1}AP, M' = P^{-1}MP)$.

  *(**exemple** : $AM = MA \iff A'M' = M'A'$)*

3 Puissance de matrices

- **Matrice nilpotente** si on a $N^k = 0 \iff X^k$ polynôme annulateur de N *(pour un $k \in \mathbb{N}$)*

  (Toutes les puissances suivantes sont alors $\equiv 0$)
- **Matrice diagonale** Pour trouver D^n, on élève les coef. diagonaux de D à la puissance n.
- **Similitude et puissances** Si $A = PMP^{-1}$, alors $A^n = PM^nP^{-1}$ *(démo^{tn} par récurrence)*
- **Formule du binôme** Si $A, B \in \mathcal{M}_p(R)$ **commutent**, alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}$.

  *(**Application** pour $M = \Delta + N$, où $\begin{cases} \Delta \text{ diagonalisable, qui } \textbf{commutent} \text{ (décomp}^{\text{n}} \text{ de Dunford)} \\ N \text{ nilpotente,} \end{cases}$)*

4 Questions de cours

1. Matrice de passage vers une nouvelle base

2. Montrer la linéarité de $M \mapsto \varphi(M) = A \cdot M$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La formule du rang pour un endomorphisme et pour une matrice carrée. Cas d'inversibilité.

4. La formule de changement de base.

5. Montrer que le commutant d'une matrice carrée est un sous-espace vectoriel.