Dérivation d'une fonction de deux variables

- **Exemples fondamentaux**
  Fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$, polynomiales *(affines, quadratiques)*
- **Régularité**
  Notion de fonction de deux variables : continue,
  de classe $\mathcal{C}^1$,
  de classe $\mathcal{C}^2$.
  (Justification semblable au cas des fonctions d'une variable réelle)
- **Dérivées partielles** notées $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$
- **Champ de gradient** *(vecteur des dérivées partielles)*

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

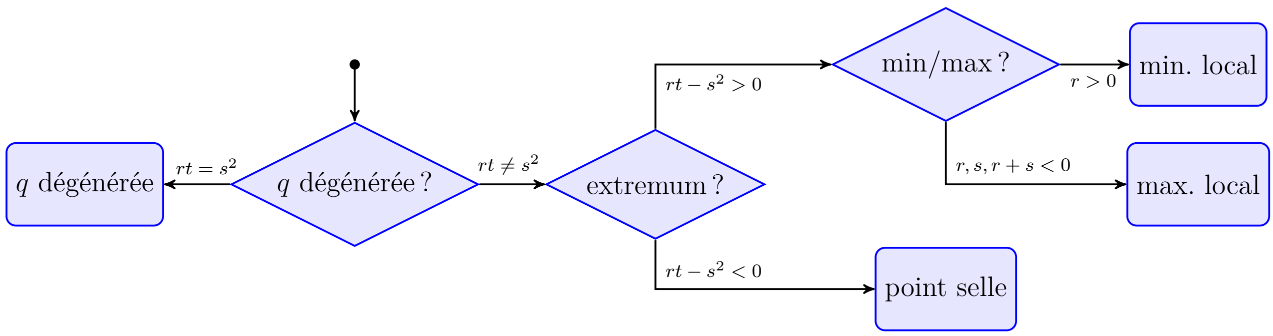
- **Point critique de f :** (x_0,y_0) point critique de $f \Leftrightarrow (\nabla f)(x_0,y_0) = \vec{0}$.
- **Champ de Hessienne** *(matrice des dérivées partielles secondes)*

$$(\nabla^2 f)(x,y) = \begin{bmatrix} \partial^2_{1,1} f & \partial^2_{1,2} f \\ \partial^2_{2,1} f & \partial^2_{2,2} f \end{bmatrix}(x,y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

- **Propriété de symétrie de Schwarz**
  La Hessienne de f de classe $\mathcal{C}^2$ est **symétrique**, et s'écrit $(\nabla^2 f)(x,y) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$.

Problèmes d'extrema, étude de points critiques

- **Vocabulaire topologique**
  Notion d'ensemble ouvert ou fermé de $\mathbb{R}^2$, d'ensemble borné de $\mathbb{R}^2$
- **Théorème des bornes**
  Une fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes.
- **Notion d'extremum, d'extremum local**
  Un extremum local à l'intérieur du domaine est un point critique
- **Classification des points critiques** selon la Hessienne $q = (\nabla^2 f)(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$



- **Exemples de recherche** de points critiques par étude d'une fonction intermédiaire d'une variable, *(notamment par le théorème de la bijection)*
- **Exemples d'études d'extrema sur un domaine à bord**