TD 7 - La notion de dimension

1 Familles de vecteurs et dimension

Exercice 1 (*Égalité de sous-espaces vectoriels par double inclusion*)

Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soient :
- $F = \text{Vect}(A_1, A_2)$ où $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $G = \text{Vect}(B_1, B_2)$ où $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

1. **a)** Écrire B_1 et B_2 comme combinaison linéaire de A_1 et A_2.

b) En déduire l'inclusion $G \subset F$.

2. Montrer de même l'inclusion $F \subset G$.

3. En déduire l'égalité $F = G$.

Exercice 2 (*Égalité de sous-espaces vectoriels par dimension*)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, \text{ tels que } x + y - z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \right]$

1. **a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Trouver une base de F. En déduire sa dimension $\dim(F)$.

2. Montrer que $\vec{u}, \vec{v} \in F$. En déduire que $G \subseteq F$.

3. En comparant les dimensions $\dim(F)$ et $\dim(G)$, conclure que $F = G$.

Exercice 3 (*Plans dans* $\mathbb{R}^3$)

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - 2z = 0 \right\}$, et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ forment une base du sous-espace vectoriel F.

2. Calculer l'intersection de F avec le plan G d'équation $x - y - z = 0$.

3. Écrire $F \cap G = \text{Vect}(\vec{d})$ *(donc $\vec{d} \in F$!)*. Décomposer le vecteur $\vec{d}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$.

Exercice 4 (*Calculs de dimension*)

Quelle est la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$H = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \qquad J = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 5 (*Intersection dans* $\mathbb{R}^4$)

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x+y+z+t=0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \right]$.

1. Trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telle que $F = \text{Ker}(f)$.
2. Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
3. On note $g : \begin{cases} G \to \mathbb{R} \\ \vec{u} \mapsto f(\vec{u}) \end{cases}$ la restriction de f à G.

   Montrer que g est linéaire et que l'on a : $F \cap G = \text{Ker}(g)$.
4. En déduire la dimension du sous-espace $F \cap G$. En trouver une base.

Exercice 6 (*Endomorphismes de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

1. Rappeler la dimension des espaces vectoriels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$.
2. En déduire qu'il n'existe pas d'application linéaire surjective : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto A \cdot M. \end{cases}$

On considère alors l'application $m : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) \\ A \mapsto m_A. \end{cases}$

3. Montrer que l'application m est linéaire.
4. Montrer que l'application m n'est pas surjective.

   Trouver un exemple d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ qui n'appartient pas à $\text{Im}(m)$.

2 La formule du rang

Exercice 7 (*Calculs de rang*)

Pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le rang.
2. Calculer l'image et le noyau le cas échéant.
3. Calculer l'inverse le cas échéant.

Exercice 8 (*Application de la formule du rang*)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et φ l'application : $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \begin{bmatrix} P(0) \\ P'(0) \end{bmatrix} \end{cases}$

1. **a)** Donner la dimension de E.
   b) Montrer que l'application φ est linéaire.
2. **a)** Calculer $\varphi(1)$, et $\varphi(X)$.
   b) En déduire que $\mathrm{Im}(\varphi)$ contient les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
   c) En déduire $\mathrm{Im}(\varphi)$ et donner $\mathrm{rg}(\varphi)$.
3. **a)** En déduire $\dim\left[\mathrm{Ker}(\varphi)\right]$.
   b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 9 (*Variante moins guidée*)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et ψ l'application : $\psi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \end{bmatrix} \end{cases}$

1. Montrer que ψ est linéaire.
2. Trouver deux polynômes $P, Q \in E$ tels que $\psi(P) = \vec{e}_1$ et $\psi(Q) = \vec{e}_2$.
3. En déduire que ψ est surjective, et la dimension du noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$.
4. Trouver une base du noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 10 (*Interpolation trinomiale*)

Soient a, b, c trois réels deux-à-deux distincts.

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P(X) \mapsto \begin{pmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \end{pmatrix} \end{cases}$ et les polynômes :

- $A(X) = (X-b)(X-c)$,
- $B(X) = (X-c)(X-a)$,
- $C(X) = (X-a)(X-b)$.

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$.
   Vérifier que la famille $\big(f(A), f(B), f(C)\big)$ est libre.
3. En déduire que la famille (A, B, C) est libre, puis que c'est une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Donner la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. Soit une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   On note P_u le polynôme : $P_u(X) = \frac{u(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot A(X) + \frac{u(b)}{(b-c)(b-a)} \cdot B(X) + \frac{u(c)}{(c-b)(c-a)} \cdot C(X)$.
   Montrer que P_u est le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(x) = u(x)$ pour $x \in \{a, b, c\}$.
   Si la fonction u est elle-même un trinôme du second degré, quel est le polynôme P_u ?
6. Que dire de l'application définie ci-dessus : $\begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X] \ ? \\ \quad u \to P_u(X) \end{cases}$

3 Avec des polynômes annulateurs

Exercice 11 (*Équation des projections en dimension 3*)

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que : $p \circ p = p$,

1. **a)** Montrer que si p est bijectif, alors $p = \mathrm{Id}$.

On suppose maintenant que p n'est **pas bijectif.** Soit $\vec{w}$ un vecteur non-nul de $\mathrm{Ker}(p)$.

b) Montrer que si $\vec{y} \in \mathrm{Im}(p)$, alors, il existe $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = p(\vec{x})$.

c) En déduire que si $\vec{y} \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(\vec{y}) = \vec{y}$.

d) Montrer que $\vec{w} \notin \mathrm{Im}(p)$.

2. On suppose maintenant que :
- $\dim(E) = 3$,
- $\mathrm{rg}(p) = 2$.

a) Déterminer $\dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)$.

b) Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

c) En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de E. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$.

Exercice 12 (*Endomorphisme nilpotent*)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2. En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 3 - \mathrm{rg}(f)$ puis déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

Soit $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_1)$.

3. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$ non colinéaire à e_2.

4. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
Déterminer la matrice : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.

Exercice 13 (*Un polynôme annulateur plus compliqué*)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
On considère un endomorphisme f de E tel que :
- $f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 0$
- $f \neq 0$ et $f^2 + \mathrm{Id} \neq 0$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$.
L'endomorphisme f est-il bijectif?

2. **a)** Montrer que $f^2 + \mathrm{Id}$ n'est pas bijectif.

b) En déduire qu'il existe $v_2 \in E$ non-nul et tel que : $f^2(v_2) = -v_2$.

3. On note $v_3 = f(v_2)$. Montrer que : $f(v_3) = -v_2$.

4. Montrer que la famille (v_2, v_3) est libre.
Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

5. **a)** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.