Suites récurrentes : application des accroissements finis

1 Rappels : convergence des suites récurrentes

Théorème 1 (*du point fixe*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

- **On suppose que**
  - la fonction f est continue sur I.
  - la suite (u_n) converge et sa limite ℓ appartient à I.
- **Alors** la limite ℓ de (u_n) est un point fixe de f, soit l'équation $f(\ell) = \ell$.

Remarque : pas un critère de convergence

Ce théorème n'est **pas** un critère de convergence, car sa formulation n'est **pas**

« si (u_n) vérifie *(hypothèse)*, **alors** (u_n) converge, et sa limite vérifie *(propriété)* »

mais **seulement une propriété** des suites récurrentes **convergentes**, qui permet de restreindre fortement les valeurs ℓ possibles pour leur limite.

Théorème 2 (*de convergence par majoration de l'erreur*)

Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel

- **On suppose que**
  - l'on a une inégalité de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n$
  - pour une suite $(\epsilon_n) \to 0$.
- **Alors**
  - la suite (u_n) converge
  - $\lim(u_n) = \ell$.

Démonstration : On a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - \epsilon_n \leqslant u_n \leqslant \ell + \epsilon_n$.
Par le critère de convergence par encadrement *(th. « des gendarmes »)*, on a donc $\lim(u_n) = \ell$. ■

Vocabulaire : vitesse de convergence

1. On dit que la suite (ϵ_n) est une **estimation de l'erreur** de ℓ par u_n
2. Supposons de plus (ϵ_n) géométrique, *(soit $\forall n \in \mathbb{N},\ \epsilon_n = \epsilon_0\, q^n$, où $0 < q < 1$)* alors on dit que

   la **vitesse de convergence** de (u_n) vers ℓ est *(au moins)* géométrique de raison q.

Dans chaque diagramme, combien de valeurs de la suite parvient-on à distinguer avant qu'elles soient trop proches de la limite ?

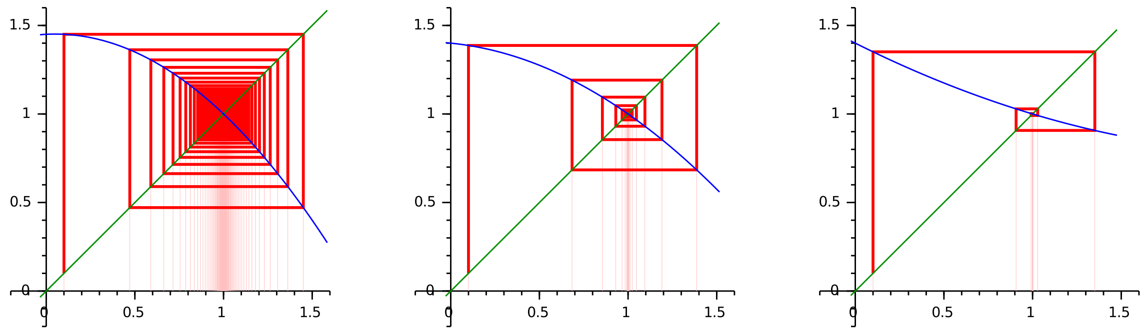


FIGURE 1 – Convergences géométriques de raison $q = 95\%$ *(g.)*, $q = 70\%$ *(m.)* et $q = 30\%$ *(d.)*

2 Application

Théorème 3 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- **On suppose que**

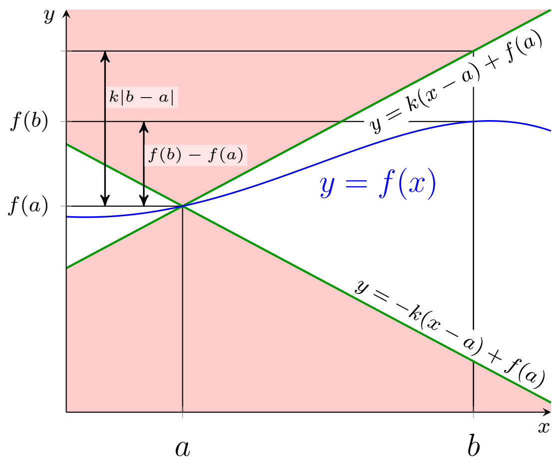
$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$$

pour une constante $k \geqslant 0$.

- **Alors** pour $a, b \in I$, avec $a \neq b$

on a $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant k$

soit $|f(b)-f(a)| \leqslant k\,|b-a|$



Interprétation graphique

La courbe de f reste dans le cône laissé blanc et n'entre pas dans la zone colorée.

1. Montrer que toutes les valeurs de la suite sont dans un certain intervalle $J \subseteq I$.
2. Trouver un point fixe ℓ de f *($\ell \in J$, résolu explicitement ou avec le théorème de la bijection).*
3. Obtenir sur J, une majoration, avec $0 < k < 1$, de la forme $\forall x \in J,\ |f'(x)| \leqslant k$
4. Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre $b = u_n$ et $a = \ell$. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \underbrace{|f(u_n) - f(\ell)|}_{=|u_{n+1}-\ell|} \leqslant k\,|u_n - \ell|$$

5. Par récurrence, on obtient donc l'encadrement de l'erreur : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \underbrace{k^n\,|u_0 - \ell|}_{\text{estim. géom. de l'erreur}}$.