

Colles semaine 7 : Vocabulaire des espaces vectoriels

1 Les espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

- ▶ **Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^2**
 - ▶ Représentation des vecteurs dans le plan (*interprétation de la colinéarité*)
 - ▶ Droites vectorielles : présentation par un vecteur directeur (*not. $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$*)
 - ▶ Équations de droite vectorielle $ax + by = 0$, et aller-retour : équation \longleftrightarrow vect. dir.
- ▶ **Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^3**
 - ▶ Droites, plans vect. : présentⁿ par vecteur, couple directeur ($\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{d})$)
 - ▶ Équation de plan vectoriel : $ax + by + cz = 0$, et aller-retour : éqⁿ \longleftrightarrow couple dir.
 - ▶ Intersection de deux plans vectoriels

2 Généralités sur les espaces vectoriels

- ▶ **Notion d'espace vectoriel** Un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\vec{u} \in E$:
 - ▶ il y a un « vecteur nul » $\vec{0}$.
 - ▶ on y fait des **combinaisons linéaires** de \vec{u}, \vec{v} : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (*règles de calcul usuelles*).
- ▶ **Appliquer le vocabulaire** sur les exemples au programme :
 - ▶ Les espaces cartésiens \mathbb{R}^n (*à coordonnées*)
 - ▶ Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
 - ▶ Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$
 - ▶ L'espace des applications $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
 - ▶ L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ▶ **Combinaisons linéaires** de $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$:

elles s'écrivent $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i\vec{u}_i$ pour des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbb{R}^n) : \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i = U\vec{\Lambda}, \text{ où } A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \text{ (mat. de la fam. } F) \text{ et } \vec{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} \text{ (vect des coeff.).}$$

3 Sous-espaces vectoriels

- ▶ **Définition**

Un **sous-espace vectoriel** F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui

 - ▶ est non-vide et contient le vecteur nul : $\vec{0} \in F$ et qui
 - ▶ est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.
- ▶ **Sous-espace engendré** par une famille \mathcal{F} , (*not. $\text{Vect}(\mathcal{F})$*) : l'ensemble des c.l. de \mathcal{F} .
- ▶ **Dans \mathbb{R}^n**

Aller-retour entre deux présentations d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n par l'alg. du pivot.

★) *équations* \rightsquigarrow *base* :

- ▶ on échelonne le système d'équations
- ▶ on exprime les inc. principales en termes des inc. secondaires (*paramètres*)
- ▶ on fait apparaître des vecteurs à droite (*éq. tautologique pour les paramètres*)

★) *base* \rightsquigarrow *équations* :

- ▶ on échelonne la matrice augmentée générique de la famille génératrice \mathcal{F}
- ▶ les conditions de compatibilité donnent un système d'équations du sous-espace.