DL 3 - Minimum de deux variables géométriques

On considère dans tout ce sujet

- $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires seront définies.
- p un réel de $]0;1[$; on note $q = 1-p$.
- X et Y deux variables aléatoires de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et **indépendantes**.

1. **a)** *Rappeler l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ et pour $k \geqslant 1$, l'expression de $\mathbb{P}(X=k)$.*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Les probabilités sont : $\forall k \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1} = p\cdot q^{k-1}$.

b) *Calculer la fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ ainsi que $\mathbb{P}(X>n)$, pour $n\in\mathbb{N}$.*

Soit $n \geqslant 1$. On a : $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} pq^{k-1}$.

C'est une somme géométrique et il vient donc : $\mathbb{P}(X \leqslant n) = p\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = 1-q^n$.

On trouve ainsi également : $\mathbb{P}(X<n) = 1-\mathbb{P}(X\leqslant n) = q^n$.

2. On définit la variable aléatoire : $Z = \min(X,Y)$.

a) *Justifier, pour $k\in\mathbb{N}$, l'égalité d'événements :* $[Z>k] = [X>k]\cap[Y>k]$.

Dire que le plus petit de deux nombres est strictement supérieur à k, c'est dire que ces nombres sont tous deux strictement supérieurs à k.

Cette phrase se traduit en l'égalité des événements : $[Z>k] = [X>k]\cap[Y>k]$.

b) *En déduire, pour $k\geqslant 1$, la probabilité :* $\mathbb{P}(Z>k)$.

Pour $k\geqslant 1$, on a donc : $\mathbb{P}(Z>k) = \mathbb{P}([X>k]\cap[Y>k])$.

Les variables aléatoires X,Y sont indépendantes.

Il vient donc : $\mathbb{P}(Z>k) = \mathbb{P}(X>k)\cdot\mathbb{P}(Y>k) = q^k\cdot q^k = q^{2k} = \left(q^2\right)^k$.

c) *Établir que, pour tout entier $k\geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z>k-1)-\mathbb{P}(Z>k)$*

On a l'égalité d'événements : $[Z=k] = [Z>k-1]\backslash[Z>k]$

On trouve la relation connue en passant aux probabilités.

Ainsi : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z>k-1)-\mathbb{P}(Z>k)$

d) *En déduire que Z suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.*

Pour $k\geqslant 1$, on calcule :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(Z>k-1)-\mathbb{P}(Z>k)\\ &= \left(q^2\right)^{k-1}-\left(q^2\right)^k\\ &= \left(q^2\right)^{k-1}\cdot\left(1-q^2\right).\end{aligned}$$

On reconnaît la loi géométrique, soit : $Z\hookrightarrow\mathcal{G}(1-q^2)$.

3. On définit une variable aléatoire T par :
$$T = \begin{cases}\frac{X}{2} & \text{si } X \text{ prend une valeur paire,}\\ \frac{X+1}{2} & \text{si } X \text{ prend une valeur impaire.}\end{cases}$$

a) *En écrivant* $\left\{\begin{array}{ll} X=2n & \textit{si } X \textit{ prend une valeur paire}\\ X=2n-1 & \textit{si } X \textit{ prend une valeur impaire}\end{array}\right\}$ *vérifier que* $T = \left\lfloor\frac{X+1}{2}\right\rfloor$.

En déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- **Cas X pair** On a bien : $[X=2n]=[X=2n,T=n]=\left[X=2n,T=\left\lfloor\frac{X+1}{2}\right\rfloor\right]$
- **Cas X impair** De même : $[X=2n-1]=[X=2n-1,T=n]=\left[X=2n-1,T=\left\lfloor\frac{X+1}{2}\right\rfloor\right]$

La formule $T=\left\lfloor\frac{X+1}{2}\right\rfloor$ est donc vraie dans tous les cas.
Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on a aussi : $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

b) *Pour $k\geqslant 1$, quelles valeurs de X conduisent à l'événement $[T=k]$?*

On décompose selon la parité de X.

Il vient : $[T=k]=\big([T=k]\cap[X\text{ pair}]\big)\sqcup\big([T=k]\cap[X\text{ impair}]\big)$
$=\big([T=k]\cap[X=2k]\big)\sqcup\big([T=k]\cap[X=2k-1]\big)=[X=2k]\sqcup[X=2k-1]$

Les deux valeurs recherchées pour X sont donc : $2k$ et $2k-1$.

c) *En déduire, pour $k\geqslant 1$, la probabilité $\mathbb{P}(T=k)$.*

Vérifier que T suit la même loi que Z. *(soit : $T\hookrightarrow\mathcal{G}(1-q^2)$.)*

On a : $\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(X=2k-1)+\mathbb{P}(X=2k)$

$$=p\cdot q^{2k-2}+p\cdot q^{2k-1}=p\cdot(1+q)\cdot\left(q^2\right)^{k-1}.$$

La variable T suit donc bien la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

4. On veut simuler les variables X et Y.

On donne les programmes incomplets suivants :

a) On lance une pièce donnant « Pile » avec proba p.
On prend $X=$ le rang du premier « Pile » obtenu.
Compléter le programme :

```
function x = simulerX(p)
    x = 0
    lancer = 1            // initialisation
    while (lancer>p)      // tant que "échec"
        x = x+1
        lancer = rand() // aléa dans [0;1]
    end
endfunction
```

(simulation de $\mathcal{G}(p)$ comme temps d'attente)

b) Compléter pour simuler T.

```
function t = simulerT(p)
    x = simulerX(p)
    if (modulo(x,2) == 0) then
        // Si x est pair
        t = x/2
    else
        t = (x+1)/2
    end
endfunction
```

(Variante possible : `t = floor((x+1)/2)`*)*