Td 8 : compléments sur l'intégration

1 Compléments : Intégration sur un segment

Exercice 1 (*La formule de Taylor pour* e^1)

1. Calculer les intégrales : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\quad$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad I_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n!} + I_n$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \mathrm{e}^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + I_0$.

c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$.

3. Étude de la convergence pour $n \to 0$

a) Montrer l'encadrement $0 \leqslant \underbrace{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{e}\,I_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^1 \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 2 (*Avec des sommes de Riemann*)

1. Rappeler les hypothèses pour avoir la convergence $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \tfrac{k}{n}(b-a)\right) \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire la limite des suites : $\quad a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$, $\quad c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$.

Avec quelles formules confronter ces limites ?

3. a) Calculer la limite $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire un équivalent de la suite : $\quad u_n = \ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)$.

4. Pour $n \geqslant 1$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. $\quad$ Calculer
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n)$,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{3n} - H_n)$,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{4n} - H_n)$.

5. a) Pour $a > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^a$. *(pourquoi $a > 0$?)*

b) En déduire un équivalent pour $n \to +\infty$, de la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^a$.

Exercice 3 (*Pratique du changement de variables*)

1. a) Rappeler une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.

b) Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)\,dx}{x(1+\ln^2(x))}$.

2. Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{1+\ln(x)+\ln^5(x)}{x}\,dx$.

3. Par le changement de variables $t = x^2$, calculer l'intégrale $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

2 Convergence et calcul par passage à la limite

Exercice 4 (*Intégrations par parties*)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^3}\,dt, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt, \quad I_3 = \int_1^\infty \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,dt, \quad I_4 = \int_0^\infty t^3\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

$$I_5 = \int_0^1 \ln(t)\,dt, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt, \quad I_7 = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{\sqrt{t}}\,dt, \quad I_8 = \int_{-\infty}^1 (t-1)\,e^t\,dt.$$

Que donne le changement de variables $x = \ln(t)$ dans celles « à logarithme » ?

Exercice 5 (*Intégrales Eulériennes (I)*)

On fixe $a > 0$; on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto x^n e^{-ax}$, et $\forall x \geqslant 0,\ I_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$.

1. Pour $x \geqslant 0$, calculer $I_0(x)$. En déduire convergence et valeur de $J_0 = \displaystyle\int_0^\infty f_0(x)\,dx$.

2. Soit $n \geqslant 1$. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour $t \to +\infty$, on a : $f_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
En déduire que l'intégrale $J_n = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ converge .

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que *(intég. par parties)* : $\frac{1}{(n+1)!}\, I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{a}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{-ax} + \frac{1}{a}\frac{1}{n!}\, I_n(x)$.

5. Déduire que $\left(\dfrac{J_n}{n!}\right)$ est une suite géométrique à préciser. Conclure sur la valeur de J_n.

Exercice 6 (*Intégrales Eulériennes (II)*)

1. **a)** Montrer que quand $x \to 0+$, on a : $\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

2. Montrer de même *(convergence puis valeur)* que $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

3. Par le changement de variables $x = \mathrm{e}^{-t}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

4. De même, on pourra montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{récu.}}{=} \frac{(-1)^n}{n!} \quad .$$

$$= (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 (*Comparaison séries-intégrales*)

1. Soit $f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue **décroissante**.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $f(t)$ pour $t \in [n\,;n+1]$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire pour $n \geqslant 2$, l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$

d) En déduire que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{cases}$

a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b) En déduire la divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

3. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}$, avec $\alpha > 0$, pour $\alpha \neq 1$.

a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \underbrace{\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}}_{=\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}+\text{cst.}}$.

b) En déduire l'énoncé du critère de convergence pour la série de Riemann : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 8 (*Un équivalent de* $\ln(k)$)

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

2. Par une comparaison série-intégrale *(Attention au sens de variations !)*, montrer pour une certaine fonction F à expliciter :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \leqslant F(n) - F(1)\ln(n!) \leqslant F(n+1) - F(2).$$

3. En déduire pour $n \to \infty$, l'équivalent $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

3 Autour des probas

Exercice 9 (*Densité*)

1. Soit $\theta > 0$ et $k \geqslant 0$ un entier.
Montrer que la fonction $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit une densité : $f_\theta : x \mapsto \begin{cases} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité.

a) Calculer la fonction de répartition de X. *(Quel est le rapport avec $\mathcal{U}[0\,;\theta]$?)*

b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 10 (*Une densité*)

1. Montrer que $\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

2. Montrer que $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x} & \text{pour } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{5}\ln^2(x) & \text{pour } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ définit une densité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (*Gaussiennes*)

1. a) Montrer pour $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \exp(-x)$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Rappeler sa valeur *(c'est du cours)*.

3. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$. Par changement de variables affine, en déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$.

4. Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$?