

# 1 Variables à densité usuelles

Pour chacune des lois au programme il faut connaître et (*le cas échéant*) savoir retrouver :

- ▶ les paramètres qui interviennent,
- ▶ la densité  $f_X$ ,
- ▶ la fonction de répartition  $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ , (*et d'anti-*  $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ )
- ▶ l'espérance  $\mathbb{E}[X]$ , moment d'ordre 2  $\mathbb{E}[X^2]$ ,
- ▶ la variance  $\text{Var}(X)$  (*par Kœnig-Huygens*).

Lois usuelles au programme

Loi	uniforme	exponentielle	normale
<b>Notation</b>	$\mathcal{U}[a; b]$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
( <i>référence</i> )	$\mathcal{U}[0; 1]$	$\mathcal{E}(1)$	$\mathcal{N}(0, 1)$

Exemples usuels d'intervalles de fluctuation à 95%.

## 2 Formule de transfert pour l'espérance

- ▶ **Contexte** On part d'une *v.a.*  $X$  connue (*par sa densité*  $f_X$ )
- ▶ **Objet** On s'intéresse à une nouvelle *va*  $Y = \varphi(X)$  exprimée en fonction de  $X$
- ▶ **Formule**  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) \cdot f_X(x) dx$ . (*sous réserve de convergence absolue*)
- ▶ **Précaution** on intègre sur un intervalle « qui fait sens » (***p.ex.*** sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour  $Y = \ln(X) \dots$ )
- ▶ **Exemple des moments**  $m_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \int x^n \cdot f_X(x) dx$  est le  $n^{\text{ème}}$  moment de  $X$

## 3 Vocabulaire de la répartition

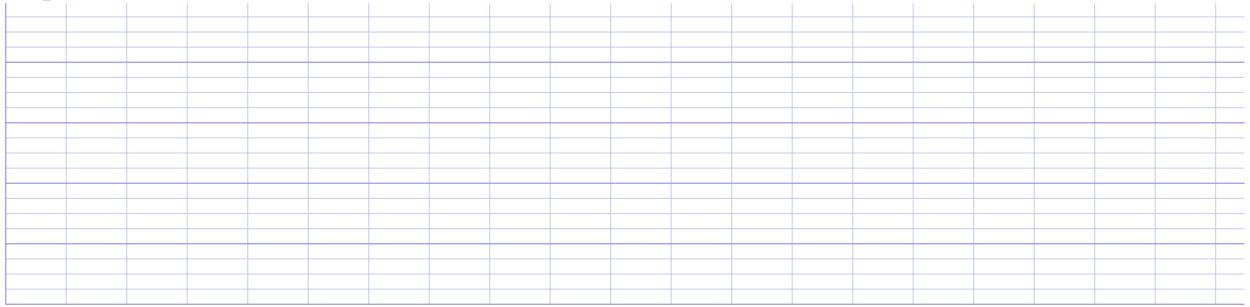
- ▶ **Quantiles usuels** min, max, médiane, quartiles, déciles, centiles
- ▶ **Avec la *fdr*** Recherche de quantiles par résolution de  $F_X(x) = p$   
( $p = 50\%$ , pour la médiane, 90% pour  $D_9$ )
- ▶ **Fonction « quantiles »** c'est la **bijection réciproque** de la fonction de répartition
- ▶ **Exemple explicite** de la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

## 4 Exemples simples de problèmes de transfert en loi

- ▶ **Objectif** On s'intéresse cette fois à la **loi** de  $Y = \varphi(X)$ .
- ▶ **Cas le plus simple** pour  $\varphi$  **bijection croissante** (*notamment*  $\varphi = \exp$ )
- ▶ **Méthode**
  1. On traduit la fonction de répartition de  $Y$  en termes de celle de  $X$ .
  2. On en déduit la fonction densité de  $Y$  en dérivant sa *fdr*.
- ▶ **Exemples de transfert non-monotones** : l'exemple de la loi de  $X^2$ .

## 5 Questions de cours

1. Exprimer les moments d'ordre  $n$  d'une variable à densité.



2. Formule de transfert pour l'espérance pour une variable à densité.



3. (*Simulation par inversion*) Pour  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ , quelle est la loi de  $Y = -\ln(1 - U)$  ?



4. Principe de l'étude du maximum  $M = \max(X, Y)$ .



5. Expression de  $\text{Var}(X + Y)$  et formule de polarisation.

