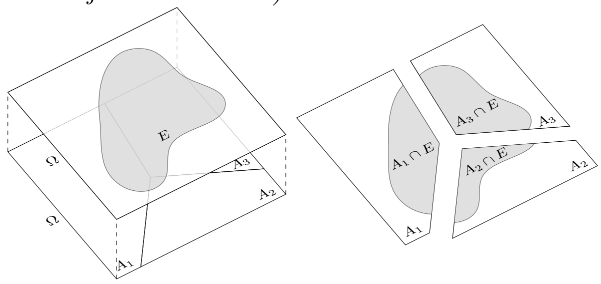
Rappels sur les systèmes complets d'événements

- **Système complet d'événements** : *(principe de la disjonction des cas)*
  famille d'événements $(A_1, \ldots A_n)$ qui sont :

  $\star$) *deux-à-deux incompatibles :*
  $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$

  $\star$) *collectivement exhaustifs :*
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



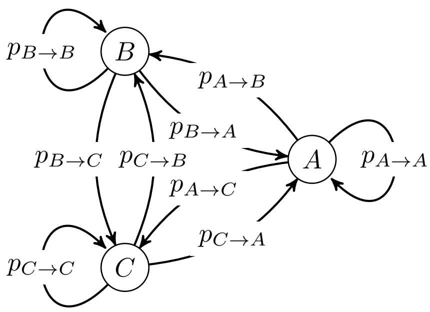
- **Exemple pour une variable discrète**
  p.ex. $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$ un système complet est formé des év$^{\text{ts}}$: $\forall k = 0 \ldots n,\ A_k = [X = k]$
  (Conditionnement selon la valeur de X)
- **Formule des probabilités totales** qui décompose E dans le système complet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1 \cap E) + \mathbb{P}(A_2 \cap E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap E) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(E) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(E)\end{aligned}$$

Notion de chaîne de Markov

On considère

- une **succession d'épreuves** aléatoires $\forall n \in \mathbb{N}$: qui conduit à
- une évolution probabiliste sur un **ensemble fini d'états** *(souvent 2 ou 3)* : *(p.ex.)* A, B, C
- décrite par une suite de **systèmes complets d'événements** A_n, B_n, C_n
- **l'état probabiliste** au temps n est donné par les probabilités de chaque état p_n, q_n, r_n, on pose le **vecteur de probabilités** $\pi_n = (p_n, q_n, r_n) = (\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n))$
- les **proba. de transition** *(p.ex* $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$*)* forment la **matrice de transition** P
- la **formule des probabilités totales** s'écrit : $\pi_{n+1} = P\pi_n$: il vient donc $\pi_n = P^n \pi_0$.



Matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} p_{A\to A} & p_{B\to A} & p_{C\to A} \\ p_{A\to B} & p_{B\to B} & p_{C\to B} \\ p_{A\to C} & p_{B\to C} & p_{C\to C} \end{bmatrix}$$

Si la chaîne de Markov est décrite par une suite de variables aléatoires discrètes (X_n), la **matrice de transition** est la matrice de la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n.

Rappel sur les suites arithmético-géométriques

Pour étudier une suite arithmético-géométrique de relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$:

- **Résolution de l'équation du point fixe** $\ell = a\ell + b$
- **Centrage sur** ℓ de (u_n)
  La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a, car :

$$\begin{array}{lll} u_{n+1} & = au_n & +b \\ \ell & = a\ell & +b \\ \hline u_{n+1} - \ell & = a(u_n - \ell) & \end{array}$$

- **Expression du terme général** On a donc $u_n - \ell = (u_0 - \ell)a^n$ d'où u_n.