

DL 4 - inspiré d'EDHEC 2013

pour le jeudi 12/10

On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. (*état n*)

Le contenu de l'urne évolue au cours d'une succession d'épreuves.

À chaque épreuve, on tire une boule de l'urne dans l'état $j \geq 1$ (j blanches, $j+2$ noires), puis :

- ▶ Si la boule est blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne. (*nouvel état : $j-1$*).
- ▶ Si la boule est noire, elle est remise dans l'urne avec en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne. (*nouvel état : $j+1$*).

On note X le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la première épreuve.

1. a) Montrer que la variable X vérifie : $X(\Omega) = \{n-1, n+1\}$.
 b) Calculer $\mathbb{P}(X = n-1)$ et $\mathbb{P}(X = n+1)$.

On fixe maintenant un entier $m \geq 1$.

On s'intéresse à l'événement E : « l'urne finit atteint l'état m avant d'avoir atteint l'état 0 ».

La probabilité de cet événement dépend de l'état initial de l'urne.

On note donc e_n la probabilité de E lorsque l'état de l'urne est l'entier $n \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

2. Montrer que $e_0 = 0$. Combien vaut e_m ?
3. a) Justifier que : $\mathbb{P}_{[X=n-1]}(E) = e_{n-1}$ et $\mathbb{P}_{[X=n+1]}(E) = e_{n+1}$.
 b) Montrer, pour $n \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ que : $e_n = \frac{n}{2n+2} \cdot e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} \cdot e_{n+1}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ par : $u_n = (n+1) \cdot e_n$.

4. a) Pour $n \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ une expression de u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n+1} .
 b) En déduire une relation entre $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$.
 c) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique sur $\llbracket 0, m \rrbracket$.
5. a) Grâce aux valeurs trouvées à la question 2., trouver l'expression de u_n pour $n \in \llbracket 0, m \rrbracket$.
 b) En déduire, pour $n \in \llbracket 0, m \rrbracket$, l'expression : $e_n = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n}{n+1}$.

On s'intéresse au passage à la limite $m \rightarrow \infty$.

6. a) Déterminer la limite, pour $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{m \rightarrow \infty} e_n$.
 b) Si on part de l'état 1 (1 boule blanche et trois noires), quelle est la probabilité que l'urne n'atteigne jamais l'état 0 ?