Colles semaine 12 - Dérivation : compléments

1 Dérivation

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- **Dérivabilité** équation de la tangente, l'écriture $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.
- **Formes indéterminées** Application aux taux d'accroissement $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$
- **Application aux inégalités** $[f(x) \geqslant g(x)] \iff [\underbrace{f(x) - g(x)}_{=u(x)} \geqslant 0]$ puis étude de $u(x)$.

2 Développements limités *(à l'ordre 2)*

express^{n}	dev^{nt} limité
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$
$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=}$	$h - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)$
$\ln(x) \underset{x\to 1}{=}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\left((x-1)^2\right)$

expression	dev^{nt} limité
$(1+x)^a =$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
et exemples, notamment :	
$(1+x)^2 =$	$1 + 2x + x^2$
$(1+x)^3 =$	$1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} =$	$1 - x + x^2 + o(x^2)$

- **Principe** approximation de $f(x)$ par un polynôme de degré $\leqslant 2$, avec une erreur $o(x-x_0)^2$.
- **Formes indéterminées** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1 - ax}{x^2}$
- **Formule de Taylor à l'ordre 2** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$, alors pour $x \to x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + o\,(x - x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + o(h^2) \qquad \textit{(où } h = x - x_0 \to 0\textit{)}$$

3 Convexité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- **Inégalité de convexité** f est **convexe** si

$$\forall a \leqslant b \in I, \quad t \in [0\,;1], \quad \underbrace{f\Big((1-t)\cdot a + t\cdot b\Big)}_{\substack{\text{image de la moyenne}\\ \text{(sur la courbe)}}} \leqslant \underbrace{(1-t)\cdot f(a) + t\cdot f(b)}_{\substack{\text{moyenne des images}\\ \text{(sur la corde)}}}$$

- **Caractérisation** Pour f de classe $\mathcal{C}^2$: $[f$ convexe sur $I] \iff [f'' \geqslant 0$ sur $I]$.
- **Recherche de points d'inflexion** où la dérivée seconde s'annule **en changeant de signe**
- **Tangentes** Pour f $\begin{cases}\text{dérivable} \\ \text{et convexe,}\end{cases}$ sur I et $x, x_0 \in I$, on a : $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.
- **Fonction concave** $[f$ concave$] \iff [-f$ convexe$]$ *(on renverse tout ci-dessus)*

4 Inégalité des accroissements finis

- **Inégalité des accroissements finis**

  Si on a $k > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors $\forall a, b \in I$, $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant k$.

  (la version la plus utile, mais aussi les versions sans valeur absolue)

- **Application aux suites récurrentes** Soit (u_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

  Pour $a = \ell$ *(un p^t fixe : $f(\ell) = \ell$)*, et $b = u_n$, on a $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$. *(k comme ci-dessus)*
  On trouve alors par récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.

5 Questions de cours

1. Les trois développements limités au programme

2. L'inégalité de convexité *(version graphe / corde)*

3. Convexité et position relative graphe / tangentes *(en écrivant inégalité)*

4. Caractérisations des points d'inflexion

5. L'inégalité des accroissements finis *(version valeur absolue)*