Sujet 1 :

Question de cours :

1. Qu'est-ce qu'une relation de dépendance linéaire ?
2. Soit F = ($\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, …, $\vec{u_p}$) une famille de vecteurs. Que signifie que la famille F est libre ?

Application :

1. Soit $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit F = ($\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$). La famille F est-elle libre ?
2. Soit $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit G = ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$). La famille G est-elle libre ?
3. Montrer que la famille F est génératrice de R^2.
4. Que peut-on en déduire pour F ?
5. Trouver les coordonnées de tout vecteur de R^2 dans F.
6. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de R^2. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à F.

Exercice :

On se place dans $\mathcal{M}_3(R)$ et on pose A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit F = { M $\in$ $\mathcal{M}_3(R)$ telles que $2M - {}^tM = AM$ }.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(R)$.
2. Caractériser par leurs coefficients les matrices M de F. En déduire une famille génératrice de F.
3. Cette famille est-elle une base de F ?

Sujet 2 :

Question de cours :

Soit E un espace vectoriel et soit F = ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$) une famille de vecteurs de E. Que signifie que la famille F est une famille génératrice de E ?

Application :

1. Soit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de R^3. Soit F = ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$). La famille F est-elle génératrice de R^3 ?
2. Soit $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de R^3. Soit G = ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$). La famille G est-elle génératrice de R^3 ?
3. La famille F est-elle libre ?
4. La famille G est-elle libre ?
5. Que peut-on en déduire pour G ?
6. Trouver les coordonnées de tout vecteur de R^3 dans G.
7. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de R^3. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à G.

Exercice :

On se place dans $\mathcal{M}_2$(R) et on pose A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et D = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille F = (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2$(R).
2. On considère la matrice M = $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les coordonnées de M dans la base F
3. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2$(R).

Sujet 3 :

Question de cours :

I. Soit E un espace vectoriel et soit $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p})$ une base de E.

a) Que signifie que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p})$ est une base de E ?

b) Soit $\vec{v} \in$ E. Définir les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p})$.

II. Ecrire la base canonique de $R_n[X]$.

Application :

Soit $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de R^3. Soit G = $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.

1. Montrer que G est une base de E.

2. Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quels sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base G ?

3. Quels sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base canonique de R^3 ?

Exercice 1 :

Soit B1 la base canonique de $R_3[X]$ et B2 = (1, X-1, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$) une autre base de $R_3[X]$. Déterminer la matrice de passage $Pas_{B1,B2.}$

Exercice 2 :

On considère l'ensemble F définie par : F = { P $\in R_3[X]$ tels que P(1) = P'(1) = 0}.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $R_3[X]$

2. Déterminer une base de F.

Sujet 4 :

Question de cours :

Soit B et B’ deux bases d’un espace vectoriel E. Qu’appelle-t-on les relations de changements de base de B à B’ ?

Application :

Soit B1 la base canonique de $R_3[X]$ et B2 = (1, X-1, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$) une autre base de $R_3[X]$. Déterminer la matrice de passage $Pas_{B1,B2}$.

Exercice 1 :

1. Soit $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit F = $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$. La famille F est-elle libre ?
2. Montrer que la famille F est génératrice de R^2.
3. Que peut-on en déduire pour F ?
4. Trouver les coordonnées de tout vecteur de R^2 dans F.
5. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de R^2. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à F.

Exercice 2 :

On considère l’ensemble F définie par : F = { P $\in$ $R_3[X]$ tels que P(1) = P’(1) = 0}.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $R_3[X]$

2. Déterminer une base de F.