

TD 8 : compléments sur l'intégration

1 Compléments : Intégration sur un segment

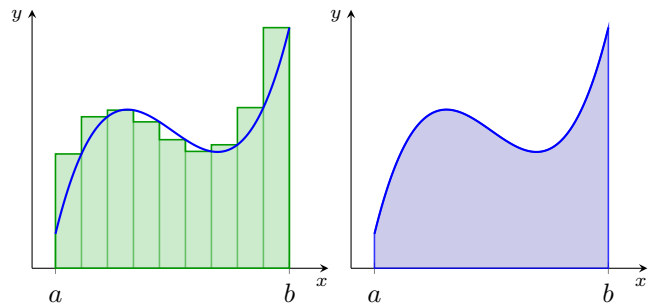
Exercice 1 (*La formule de Taylor pour e^1*)

1. Calculer les intégrales : $I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt$, $I_1 = \int_0^1 t e^{-t} dt$, et $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{2} e^{-t} dt$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$.
 - a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!} + I_n$.
 - b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = -e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 1$.
 - c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$.
3. Étude de la convergence pour $n \rightarrow \infty$
 - a) Montrer l'encadrement $0 \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt}_{=e I_n} \leq e^1 \int_0^1 \frac{t^n}{n!} dt$.
 - b) En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Proposition 1 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \rightarrow +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt.$$



Exercice 2 (*Avec des sommes de Riemann (I)*)

1. Rappeler les hypothèses pour avoir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \longrightarrow \int_0^1 f(t) dt$.
2. a) En déduire la limite des suites : $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1$, $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$, $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2$.
 - b) Comparer le résultat avec les formules donnant $\sum_{k=1}^n 1$, $\sum_{k=1}^n k$, et $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 3 (*Avec des sommes de Riemann* (II))

1. Montrer que l'on peut écrire : $\forall n \geq 1, \quad H_{2n} - H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$
2. Montrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [H_{2n} - H_n] = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$ (On écrira : $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}.$)
3. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} [H_{2n} - H_n] = \ln(2).$
4. Montrer de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} [H_{3n} - H_n] = \ln(3).$
(On écrira : $H_{3n} - H_n = \frac{2}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{1 + 2\frac{i}{2n}} \rightarrow \int_1^3 \frac{dx}{x}.$)
5. En calculant de deux façons $\lim_{n \rightarrow +\infty} [H_{6n} - H_n]$, montrer que $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3).$

Exercice 4 (*Avec des sommes de Riemann* (III))

1. a) Pour $a > 0$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^a.$ (pourquoi $a > 0$?)
- b) En déduire un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$, de la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n k^a.$
2. a) Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = 2 \ln(2) - 1.$
- b) Montrer qu'on a : $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \ln[(2n)!] - \ln(n!) - n \ln(n).$
- c) En déduire un équivalent de la suite : $u_n = \ln \left(\frac{(2n)!}{n!}\right).$

Exercice 5 (*Pratique du changement de variables*)

1. a) Rappeler une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}.$
- b) Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer l'intégrale $I = \int_1^{e^2} \frac{\ln(x) dx}{x(1 + \ln^2(x))}.$
2. Par le changement de variables $t = \ln(x)$, calculer $J = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x) + \ln^5(x)}{x} dx.$
3. Par le changement de variables $t = x^2$, calculer l'intégrale $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

2 Convergence et calcul par passage à la limite

Exercice 6 (*Intégrations par parties*)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^3} dt, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2} dt, \quad I_3 = \int_1^\infty \frac{\ln^2(t)}{t^3} dt, \quad I_4 = \int_0^\infty t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$I_5 = \int_0^1 \ln(t) dt, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad I_7 = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad I_8 = \int_{-\infty}^1 (t-1) e^t dt.$$

Que donne le changement de variables $x = \ln(t)$ dans celles « à logarithme » ?

Exercice 7 (*Intégrales Eulériennes (version exponentielles)*)

On fixe $a > 0$;

- Montrer que pour $x \geq 0$, on a : $\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a} - \frac{e^{-ax}}{a}$.
 - En déduire convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$.
- Montrer pour $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$: $\int_0^x t^{n+1} e^{-at} dt = -\frac{1}{a} x^{n+1} e^{-ax} + \frac{n+1}{a} \int_0^x t^n e^{-at} dt$.
- En passant à la limite, montrer la relation $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-at} dt = \frac{n+1}{a} \int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt$.
- En déduire par récurrence l'expression : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Exercice 8 (*Intégrales Eulériennes (version logarithmes)*)

- Montrer pour $x \rightarrow 0^+$, le comportement asymptotique : $\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
 - En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$ converge.
 - Montrer que $\int_0^1 \ln(x) dx = -1$.
- Montrer de même (*convergence puis valeur*) que $\int_0^1 \ln^2(x) dx = 2$.
- Par le changement de variables $x = e^{-t}$, montrer que $\int_0^1 \ln(x) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.
- De même, montrer : $\int_0^1 \ln^2(x) dx = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.
- De même, on pourra montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \ln^n(x) dx \stackrel{\text{récu.}}{=} \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Exercice 9 (*Comparaison séries-intégrales*)

1. Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue **décroissante**.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $f(t)$ pour $t \in [n; n+1]$.
 - b) En déduire un encadrement de $\int_n^{n+1} f(t) dt$.
 - c) En déduire pour $n \geq 2$, l'encadrement $\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$
 - d) En déduire que l'on a $\forall n \in \mathbb{N} : \int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t) dt$.
2. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{cases}$.
 - a) Montrer que l'on a : $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t}$.
 - b) En déduire la divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.
3. Application pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}$, avec $\alpha > 0$, pour $\alpha \neq 1$.
 - a) Montrer que l'on a : $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \underbrace{\int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}}_{= \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}} + \text{cst.}}$.
 - b) En déduire l'énoncé du critère de convergence pour la série de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 10 (*Un équivalent de $\ln(k)$*)

1. Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$.
2. Par une comparaison série-intégrale (*Attention au sens de variations!*), montrer pour une certaine fonction F à expliciter :

$$\forall n \geq 2, \quad F(n) - F(1) \leq \ln(n!) \leq F(n+1) - F(2).$$
3. En déduire pour $n \rightarrow \infty$, l'équivalent $\ln(n!) \sim n \ln(n)$.

3 Autour des probas

Exercice 11 (*Densité*)

1. Soit $\theta > 0$ et $k \geq 0$ un entier.
Montrer que la fonction $f_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définit une densité : $f_\theta : x \mapsto \begin{cases} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^k & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité.
 - a) Calculer la fonction de répartition de X . (*Quel est le rapport avec $\mathcal{U}[0; \theta]$?*)
 - b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 12 (*Une densité*)

1. Montrer que $\int_0^1 \ln^2(x) dx$ converge et vaut 2.
2. Montrer que $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{5} e^{2x} & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{2}{5} \ln^2(x) & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ définit une densité sur \mathbb{R} .

Exercice 13 (*Gaussiennes*)

1. a) Montrer pour $x \geq 1$, l'encadrement : $0 \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \exp(-x)$.
b) En déduire la convergence de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
2. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Rappeler sa valeur (*c'est du cours*).
3. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$. Par changement de variables affine, en déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$.
4. Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$?

Exercice 14 (*Moments de la loi exponentielle*)

- Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Rappeler l'expression de la densité f de X .
 2. Montrer que X admet un moment à tout ordre et que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(X) = \frac{n!}{\lambda^n}$.
(*on utilisera l'Exercice 7*)
 3. Retrouver la valeur de la variance : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 15 (*La loi d'Erlang*)

Soit $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

On définit une fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $f_n : x \mapsto \begin{cases} \lambda^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f_n est une fonction densité.

(On utilisera le résultat de l'Exercice 7)

2. Quelle densité reconnaît-on pour $n = 0$?

3. Pour quelle valeur de x la densité $f_n(x)$ est-elle maximisée ? (le **mode** de la distribution)

Soit X une variable aléatoire admettant f_n pour densité. ($X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda, n) : \text{loi d'Erlang}$)

4. Montrer que la variable X admet une espérance et que : $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{\lambda}$.

5. Montrer que la variable X admet moment d'ordre 2 et que : $\mathbb{E}[X^2] = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}$.

6. En déduire que X admet une variance et que $\text{Var}(X) = \frac{n+1}{\lambda^2}$.