Rappels de première année : suites et puissances de matrices

le 12 septembre 2016

Suites récurrentes

Exercice 1 (*Rappels de cours*)

Définir :

1. Suite arithmétique, rappeler la formule de sommation

2. Suite géométrique, rappeler la formule de sommation

3. Suite arithmético-géométrique et rappeler le plan d'étude

Exercice 2 (*Une convergence géométrique de suite itérée*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}(2x - x^2)$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\left|\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{array}\right.$

1. Encadrement de (u_n)

a) Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $f(x) \in [0\,;1]$.

b) Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

2. Variations et convergence de (u_n)

a) Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\geqslant 0$.

3. Limite et vitesse de convergence de (u_n)

a) Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{3}x$.

b) Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

*(on parle de convergence de **vitesse géométrique**.)*

Exercice 3 (*Une étude « un peu plus » délicate*)

$f(x) = \frac{x^2+1}{2}$

1. Montrer que $\forall x \in [0\,;1],\ f(x) \in [0\,;1]$.

2. Montrer que l'on peut écrire $f\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1 - 2\dfrac{n-1}{n^2} = 1 - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{2}{n^2(n+1)}$

3. En déduire que $f(1 - \frac{2}{n}) \geqslant 1 - \frac{2}{n+1}$.

4. Montrer par récurrence que $1 - \frac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.

5. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Suites et puissances de matrices

Exercice 4 (***Calcul de puissance de matrices*** **(cas diagonalisable)**)

On étudie la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. On pose aussi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

2. Calcul par diagonalisation

a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Calculer les puissances de la matrice D.

c) Vérifier la formule $A = P\,D\,P^{-1}$.

d) Retrouver le résultat de la question **1.**.

Exercice 5 (***Calcul de puissance de matrices*** **(cas $D+N$)**)

On étudie la matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. On pose aussi $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = B - I$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{bmatrix}$.

2. **a)** Calculer N. Calculer N^2.

b) Exprimer B^n en fonction de I et de N.

c) Réécrire l'hérédité de la question **1.** en utilisant cette écriture.

Exercice 6 (***Somme de la progression arithmétique***)

1. Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que l'on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par : $\begin{cases} a_0 = 0 & a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_0 = 0 & b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et déduire une formule explicite.

4. En déduire l'expression $b_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\quad T^n = I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$ pour une certaine matrice N.

*(**Remarque** : c'est la formule du binôme de Newton pour l'écriture $T = I_3 + N$, lorsque $N^3 = 0$.)*