Espaces vectoriels, applications linéaires, dimension finie

Exercice 1 (*Systèmes linéaires*)

Résoudre les systèmes linéaires, en commençant par se poser à chaque fois les questions :

$$\left.\begin{array}{l} \text{▸ Nombre d'inconnues ?} \\ \text{▸ Nombre d'équations ?} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Nombre de paramètres attendu ?}$$

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=4 \\ 2x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$$

1 Situations de linéarité

Exercice 2 (*Reconnaître un* (sous)*-espace vectoriel*)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

- $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y=y+z\}$
- $B=\{(a,a+b,b),\ \text{où } a,b\in\mathbb{R}^2\}$
- $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+1=y-z\}$
- $D=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f \text{ dérivable et } f'(0)=1\}$
- $E=\{P\in\mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(1)=2P(2)\}$
- $F=\{P\in\mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(0)\times P(1)=0\}$

Exercice 3 (*Commutant d'une matrice*)

Soient $A=\begin{pmatrix}-2&2\\-6&5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{C}_D=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/DM=MD\}$ est un espace vectoriel de dimension 2. En donner une base. *(Résoudre pour $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ quelconque)*

2. Calculer PDP^{-1}.

3. En déduire que $\mathcal{C}_D=\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/AN=NA\}$ est aussi un ev de dimension 2, et en donner une base. *Penser au changement d'inconnue $N=PMP^{-1}$*

Exercice 4 (*Linéarité d'une application sur les polynômes*)

1. Opérateur de dérivation

a) Montrer que l'application $d:P(X)\mapsto P'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Trouver $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Im}(d)$.

c) Comment $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Im}(d)$ changent-ils si on remplace par : $d:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$?

2. Opérateur de décalage

a) Montrer que l'application $\delta:P(X)\mapsto P(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Trouver $\mathrm{Ker}(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$.

c) Rappeler la formule du binôme de Newton.
En déduire la décomposition de $\delta(X^n)$ dans la base canonique.

2 Familles de vecteurs

Exercice 5 (*Bases dans* $\mathbb{R}^2$)

1. Expliquer l'équivalence $\Big[$ les vecteurs $\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ sont colinéaires $\Big] \iff \Big[= bc \Big]$.

2. En déduire que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est de rang 2 *ssi* $\det(A) := ad - bc \neq 0$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
En déduire la matrice inverse A^{-1}. *(B est la **comatrice** transposée de A.)*

4. Si les deux vecteurs $\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ sont linéairement indépendants, vérifier :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\left[(dx - by)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (-cx + ay)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.\right]$$

Exercice 6 (*Un plan dans* $\mathbb{R}^4$)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2. En déduire que $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

3. Montrer que l'on a aussi $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.
En déduire $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

4. Trouver un système de deux équations pour le plan $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

5. Écrire la matrice de passage $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$, et son inverse.

3 Applications linéaires

Exercice 7 (*Conditions sur une application linéaire*)

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(1,2) = (2,1,0)$, et $f(2,1) = (0,1,2)$. Donner sa matrice dans les bases canoniques.

2. Mêmes questions pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(1,0,0) = (1,1)$, $g(1,1,0) = (0,1)$ et $g(1,1,1) = (1,0)$.

3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(1,2) = (4,5)$, $h(-2,1) = (-3,5)$, et $h(3,2) = (8,a)$?

Exercice 8 (*Manipuler formellement des endomorphismes*)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 3 - \mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

2. Soit $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}\, f$ non colinéaire à e_2.

3. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Y écrire la matrice de f.