TP Scilab 5 : Simulations de chaînes de Markov

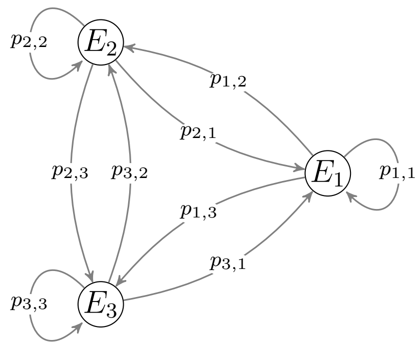
1 Définitions

Une **chaîne de Markov** est un **processus stochastique** : une famille de variables aléatoires liées entre elles et que l'on étudie toutes ensembles.

En l'occurrence, elle prend la forme d'une suite $X_0, X_1, \dots X_n \dots$ de variables aléatoires toutes à valeurs dans un **ensemble d'états** $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots\}$.

Définition 1 (*Probabilités de transition*)

La chaîne de Markov est décrite par les probabilités conditionnelles dites de **transition** $\mathbb{P}(X_{t+1} = e_i | X_t = e_j)$:
la « proba. de passer »
- de l'état j à l'instant t
- à l'état i à l'instant suivant $t+1$.



Le graphe des transitions entre les états E_1, E_2, E_3 encode la matrice *(des probabilités)* de transition : $P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{bmatrix}$

La première colonne donne ainsi les probabilités de transition depuis l'état E_1, *etc.*

2 Simulation en Scilab

2.1 Syntaxe de la commande `grand` avec option `"markov"`

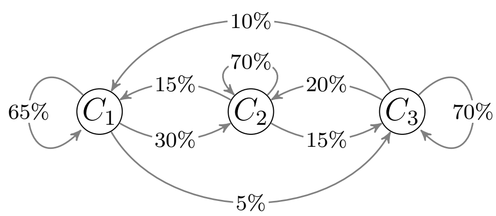
```
//A est la matrice de transition choisie
traj = grand(100, "markov", A', 1)  ;  // retourne une trajectoire de Markov
plot(traj)                             // Ne pas oublier la transposition A' (pas A)
legend("une trajectoire") ;
```

2.2 Simulation de mobilité sociale

On suppose que corps social d'une certain pays est subdivisé en trois strates C_1, C_2, C_3. On se propose de modéliser les trajectoires de mobilité sociale dans cette société pour les individus d'une même lignée par une chaîne de Markov sur ces trois états C_1, C_2, C_3.
Chaque individu de la lignée :
- naît dans une de ces classes C_n, puis
- acquiert son propre statut social C_a.

(la classe de naissance de ses enfants)

Au sein d'une lignée, la probabilité qu'un individu intègre chaque classe est déterminée par celle de sa naissance $\mathbb{P}(C_n \rightsquigarrow C_a)$selon le graphe suivant :



Exercice 1 (*Simulation sur une lignée*)

1. Entrer la matrice de transition sous Scilab : `P = [...]`
2. Simuler une lignée de 10 générations grâce à la commande `grand` avec l'option `"markov"`.
3. Faire l'histogramme des trois classes sociales sur une **longue** lignée.
4. Quelle classe sociale semble la plus représentée après un grand nombre de générations ?

Simulation de trajectoires multiples

La commande `grand(T, "markov", A', depart)` retourne

- **si `depart` est un nombre**
  une trajectoire de longueur `T` pour la matrice de transition `A`
- **si `depart` est un vecteur-colonne**
  une trajectoire de longueur `T` **par coefficient** du vecteur-colonne `depart`
  On obtient donc une **matrice**, chaque ligne correspondant à une trajectoire.

Exercice 2 (**(Suite)** *Simulation avec un échantillon de familles*)

0. Soit `A = eye(6,6)`. Obtenir le vecteur colonne `V` correspondant à la 4$^{\text{ème}}$ colonne de `A`.
   (*réponse :* `V = A(:,4)`)

On va effectuer une simulation sur `N` lignées, toutes issues de la classe sociale C_1.

1. Définir les variables `N, T, depart` pour simuler grâce à la commande :

```
echantillonLignees = grand(T, "markov", P', depart)
```

2. Comment s'interprètent les vecteurs suivants ?
   - `ligne   = echantillonLignees(3,:)`
   - `colonne = echantillonLignees(:,3)`
3. Faire l'histogramme des classes sociales après 3 générations.
   (*On utilisera la commande* `histplot` *avec* `classes=0:3`)
4. Varier le nombre de générations. Que constate-t-on par rapport à l'exercice précédent ?

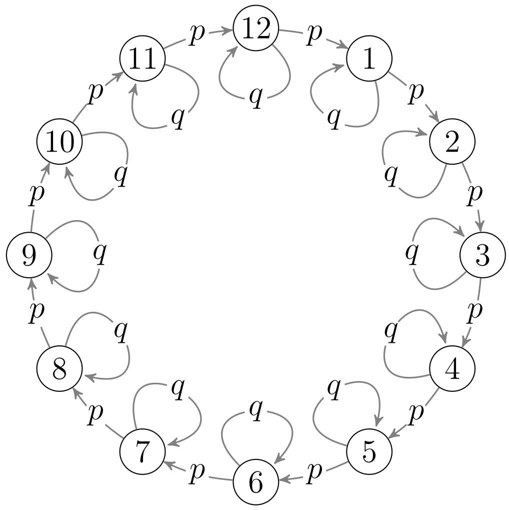
2.3 Avec le fichier `circulante.sci`

Exercice 3 (*Test de la fonction circulante.sci*)

1. Que retournent les commandes suivantes ?
   - `circulante(3)`
   - `circulante(6)`
2. Décrire la matrice retournée, dans le cas général `circulante`(n), pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Dessiner le graphe des transitions associé à la matrice de transition `circulante(4)`.
4. Simuler une trajectoire de Markov pour la matrice `circulante(12)`.
5. Cette trajectoire est-elle vraiment aléatoire ?

Exercice 4 (*L'horloge détraquée*)

Au passage de chaque heure, l'aiguille peut
- passer à la graduation suivante, avec probabilité p
- rester sur la même, avec probabilité $q = 1 - p$



1. Écrire la matrice de transition pour quelques états.

2. Décrire la matrice de transition pour l'état 12.

3. Entrer la matrice de transition grâce à la fonction `circulante`.

4. Simuler une trajectoire avec `p = 0.8`.

5. Simuler une trajectoire avec `p = 0.2`.

6. Faire les 4 histogrammes suivants de la chaîne de Markov : $\begin{cases}\text{après 3 étapes}\\ \text{après 100 étapes}\end{cases}$ et $\begin{cases}\text{pour } \texttt{p=0.8}\\ \text{pour } \texttt{p=0.2}\end{cases}$

(On utilisera `histplot` *avec* `classes=0:12`*)*

Exercice 5 (*Marche de Bernoulli centrée enroulée*)

1. Utiliser le programme `circulante.sci` pour définir une matrice de transition ci-contre correspondant à la marche de Bernoulli centrée.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dessiner le diagramme des transitions.

3. Modéliser une trajectoire de Markov.

3 Notes