DL 4 : Remise en route en algèbre linéaire

pour le jeudi 3 novembre

Exercice 1 (*Une base de* $\mathbb{R}^2$)

On considère les deux vecteurs $\vec{u} = \binom{3}{2}$ et $\vec{v} = \binom{5}{3}$.

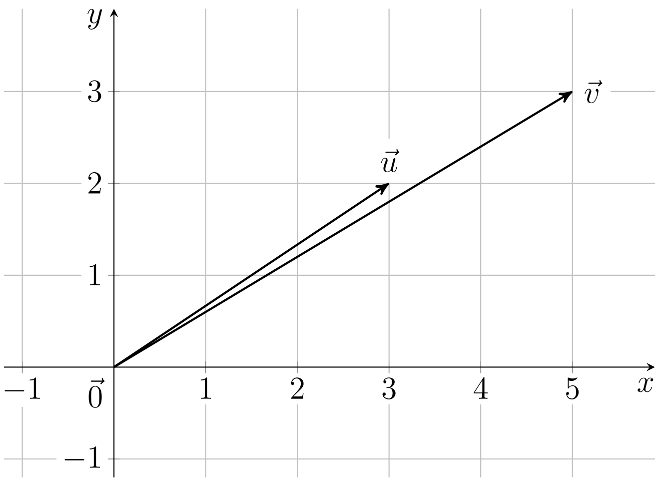
1. Résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$, d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Que peut-on en déduire sur la famille $(\vec{u}, \vec{v})$?

2. Résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \binom{3}{5}$, d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \binom{x}{y}$, d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Que peut-on en déduire sur la famille $(\vec{u}, \vec{v})$?

4. Soit $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
Que constate-t-on ?

5. On a représenté ci-dessous les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Graphiquement, à quoi voit-on qu'ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$? une base de $\mathbb{R}^2$?



Exercice 2 (*Deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$ (illustration page suivante))

Soit F le sous-ensemble *(un **plan**)* de $\mathbb{R}^3$ tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + 2y + z = 0 \right\}$.

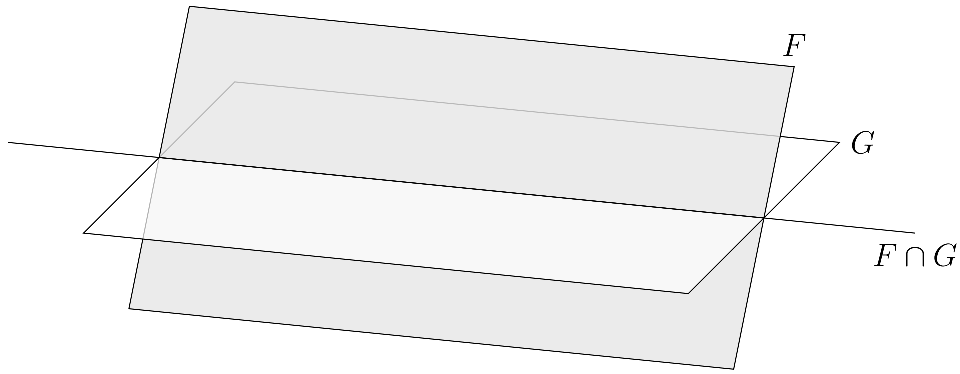
1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver une base de F.

(on pourra appliquer l'algorithme du pivot de Gauss au « système d'équations » $x + 2y + z = 0$).

3. Soit $G = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$. Trouver une équation du plan G.

4. Trouver une base de la droite $F \cap G$.



Exercice 3 (*Ma matrice 3 × 3 préférée*)

On étudie quelques propriétés de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calcul des puissances de A

a) Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$ avec les relations : $\begin{aligned} a_{n+1} &= 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$

b) Montrer que les suites définies par $\begin{aligned} u_n &= a_n - b_n \\ v_n &= a_n + 2b_n \end{aligned}$ sont géométriques.

c) Donner l'expression du terme général des suites (u_n) et (v_n).

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$, et trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $b_n = \lambda u_n + \mu v_n$.

e) Conclure sur le terme général

f) Vérifier $\forall n \in \mathbb{N}$, que : $A^n = \dfrac{2^n}{3}E + \dfrac{(-1)^n}{3}F$ pour deux matrices E et F à détailler.

2. Inversion de A

a) Vérifier $A^2 = A + 2I_3$

b) En déduire que $A\frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$.

c) En déduire que la matrice A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

3. Réduction Dans cette question, on utilise les notations suivantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Résoudre l'équation $x^2 = x + 2$, pour $x \in \mathbb{R}$. *(équation tirée de **2.a)**)*

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$.

d) Montrer que $AP = PD$.

(Comme la matrice P est inversible, on a donc $A = PDP^{-1}$)