

Rappels de première année : suites et puissances de matrices

le 18 septembre 2016

Suites récurrentes

Exercice 1 (*Rappels de cours*)

Définir :

1. Suite arithmétique, rappeler la formule de sommation
2. Suite géométrique, rappeler la formule de sommation
3. Suite arithmético-géométrique et rappeler le plan d'étude

Exercice 2 (*Une convergence géométrique de suite itérée*)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}(2x - x^2)$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Encadrement de (u_n)

- a) Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, on a $f(x) \in [0; 1]$.
- b) Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

2. Variations et convergence de (u_n)

- a) Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq x$.
- b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ≥ 0 .

3. Limite et vitesse de convergence de (u_n)

- a) Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{3}x$.
- b) Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- c) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

(on parle de convergence de *vitesse géométrique*.)

Exercice 3 (*Une étude « un peu plus » délicate*)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{2}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$.
2. Montrer que l'on peut écrire $f\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - 2\frac{n-1}{n^2} = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n^2(n+1)}$
3. En déduire que $f\left(1 - \frac{2}{n}\right) \geq 1 - \frac{2}{n+1}$.
4. Montrer par récurrence que $1 - \frac{2}{n} \leq u_n \leq 1$.
5. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Suites et puissances de matrices

Exercice 4 (*Calcul de puissance de matrices* (cas diagonalisable))

On étudie la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. On pose aussi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.
2. **Calcul par diagonalisation**
 - a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .
 - b) Calculer les puissances de la matrice D .
 - c) Vérifier la formule $A = P D P^{-1}$.
 - d) Retrouver le résultat de la question 1..

Exercice 5 (*Calcul de puissance de matrices* (cas $D + N$))

On étudie la matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. On pose aussi $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = B - I$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{bmatrix}$.
2.
 - a) Calculer N . Calculer N^2 .
 - b) Exprimer B^n en fonction de I et de N .
 - c) Réécrire l'hérédité de la question 1. en utilisant cette écriture.

Exercice 6 (*Somme de la progression arithmétique*)

1. Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que l'on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où les

suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies par : $\begin{cases} a_0 = 0 & a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_0 = 0 & b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
 3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et déduire une formule explicite.
 4. En déduire l'expression $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
 5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ pour une certaine matrice N .
- (Remarque : c'est la formule du binôme de Newton pour l'écriture $T = I_3 + N$, lorsque $N^3 = 0$.)