Colles semaine 11 - Couples de *v.a.* discrètes

1 Loi d'un couple aléatoire discret

- **Loi conjointe** d'un couple, écriture en tableau à double entrée

(Savoir lire le tableau et calculer des probabilités à partir de celui-ci)

- **Loi marginale** obtention depuis la loi conjointe en sommant les lignes ou les colonnes
- **Loi conditionnelle** de Y sachant X, donnée par $\mathbb{P}_{[X=x]}(Y=y)$.

  La formule des probabilités totales donne : $\underbrace{\mathbb{P}(Y=y)}_{\substack{\text{marginale}\\ \text{conditionnée}}} = \sum_{x\in X(\Omega)} \underbrace{\mathbb{P}_{[X=x]}(Y=y)}_{\text{loi conditionnelle}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{\substack{\text{marginale}\\ \text{conditionnante}}}$.

- **Cas des variables indépendantes**

  X et Y sont **indépendantes** si : $\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) : \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y)$.

(La loi conjointe est alors le produit des lois marginales)

2 Problèmes de transfert

- **Formule de transfert pour l'espérance**

  Pour une variable $Z=\varphi(X,Y)$, on a : $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\big[\varphi(X,Y)\big] = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} \varphi(x,y)\cdot\mathbb{P}(X=x, Y=y)$.

- **Étude de** $\min(X,Y)$ **et** $\max(X,Y)$ *(même méthode que dans le cas indépendant)*

  La fonction de répartition est donnée par : $\mathbb{P}(\max(X,Y)\leqslant n) = \mathbb{P}(X\leqslant n, Y\leqslant n)$.

3 Covariance d'un couple de variables aléatoires

- **Linéarité de l'espérance** Soient $a,b\in\mathbb{R}$ deux constantes déterministes.

  Alors on a **toujours** : $\mathbb{E}[a\cdot X + b\cdot Y] = a\cdot\mathbb{E}[X] + b\cdot\mathbb{E}[Y]$ *(sous rés. de cv.)*

- **Espérance du produit indépendant**

  Si X,Y **indépendantes**, alors on a : $\mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$. *(sous réserve de convergence)*

- **Notion de variance**

  Par définition : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big]$

  Kœnig-Huygens : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$.

  Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

  Homogénéité : $\mathrm{Var}(\lambda\cdot X) = \lambda^2\cdot\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\cdot\sigma(X)$, pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

- **Notion de covariance**

  Par définition : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]$

  Kœnig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[XY\big] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

  Lien à la variance : $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$

  Bilinéarité-symétrie « mêmes règles de calcul pour $\mathrm{Cov}(X,Y)$ que pour xy ».

  Décorrélation X,Y sont **décorrélées** si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$

Deux variables **indépendantes** sont **décorrélées** *(décorrélation = « indépendance en moyenne »)*

- **Corrélation linéaire, principe de la régression linéaire**

  Coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

  Cauchy-Schwarz $-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1$.

  Corrélation totale : pour $\rho(X,Y)=\pm1$, alors on peut écrire $Y = aX+b$, où $a,b\in\mathbb{R}$.

  Principe de la régression linéaire On minimise le trinôme $T(\lambda) = \mathrm{Var}(Y-\lambda X)$,

  (aux limites du programme ECE) où | X est la variable explicative

  Y est la variable expliquée

4 Questions de cours

1. Définir l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Principe de l'étude du max de deux variables aléatoires discrètes.

3. Linéarité de l'espérance, et l'espérance du produit indépendant.

4. Définir la covariance de (X, Y), et formule de Kœnig-Huygens

5. La formule de transfert pour l'espérance pour une variable aléatoire X, pour un couple (X, Y).