

1 Lois d'un couple aléatoire discret

- **Loi d'une variable** aléatoire discrète X en ligne :
$$\frac{x \in X(\Omega)}{\mathbb{P}(X = x)} \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}$$

★) *Espérance et variance* : $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$

★) *Probabilité d'un événement* : $E = \{X \in A\}$, formule $\mathbb{P}(E) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

- **Loi conjointe** d'un couple, écriture en tableau à double entrée
- **Exploitation du tableau** Représentation d'événements définis comme conditions sur (X, Y) .
- **Notion de variables indépendantes** :

X et Y sont **indépendantes** si : (La loi conjointe est alors le produit des lois marginales)

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

2 Problème de transfert

- **Exemples simples de transfert de loi** $Z = f(X, Y)$. On calcule une par une les probabilités des valeurs de Z en utilisant le tableau de la loi conjointe. Exemples :

⊗ $Z = X + Y$

⊗ $Z = XY$

- **Cas du max** $M = \max(X, Y)$

⊗ Slogan $\left| \begin{array}{ll} \text{Dire} & : \text{« le plus grand de deux nombres est plus petit que } n \text{ »} \\ \text{c'est dire} & : \text{« ces deux nombres sont plus petits que } n \text{ »} \end{array} \right.$

⊗ soit $\forall n, \mathbb{P}(M \leq n) = \mathbb{P}(X \leq n, Y \leq n)$

⊗ Cas où X, Y sont indépendantes. $\forall n, \mathbb{P}(M \leq n) = \mathbb{P}(X \leq n) \times \mathbb{P}(Y \leq n)$

⊗ On passe de la fonction de répartition à la loi $\mathbb{P}(M = n) = \mathbb{P}(M \leq n) - \mathbb{P}(M \leq n-1)$

- **Principe de transfert pour l'espérance** (sous réserve de convergence)

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

- **Moments** (sous réserve de convergence)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^n \mathbb{P}(X = x)$$

3 Lois discrètes au programme

« Tout savoir » (valeurs prises, loi, fonction de répartition, espérance et variance) sur

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| ► Loi uniforme discrète | ► Loi de Poisson |
| ► Loi binomiale | ► Loi géométrique |