TD 7 : avec la dimension

1 Familles de vecteurs et dimension

Exercice 1 (*Égalité de sous-espaces vectoriels par double inclusion*)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, soient $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, avec

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. **a)** Écrire $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

b) En déduire l'inclusion $G \subseteq F$.

2. Montrer de même l'inclusion $F \subseteq G$.

3. En déduire l'égalité $F = G$.

Exercice 2 (*Égalité de sous-espaces vectoriels par dimension*)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E, \text{ tels que } x + y - z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v}} \right]$

1. **a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Trouver une base de F. En déduire sa dimension $\dim(F)$.

2. Montrer que $\vec{u}, \vec{v} \in F$. En déduire que $G \subseteq F$.

3. En comparant les dimensions $\dim(F)$ et $\dim(G)$, conclure que $F = G$.

Exercice 3 (*Plans dans* $\mathbb{R}^3$)

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y - 2z = 0 \right\}$, et $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ forment une base du sous-espace vectoriel F.

2. Calculer l'intersection de F avec le plan G d'équation $x - y - z = 0$.

3. Écrire $F \cap G = \mathrm{Vect}(\vec{d})$ *(donc $\vec{d} \in F$!)*. Décomposer le vecteur $\vec{d}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$.

Exercice 4 (*Calculs de dimension*)

Quelle est la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right] \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$H = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} \right] \qquad J = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 5 (*Intersection dans $\mathbb{R}^4$*)

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x+y+z+t=0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \right]$.

1. Trouver une base de F. En déduire $\dim(F)$.

2. Donner $\dim(G)$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.

4. En déduire une base du sous-espace $F \cap G$. Préciser sa dimension.

2 La formule du rang

Exercice 6 (*Calculs de rang*)

Pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le rang.

2. Calculer l'image et le noyau le cas échéant.

3. Calculer l'inverse le cas échéant.

Exercice 7 (*Application de la formule du rang*)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et φ l'application : $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \begin{bmatrix} P(0) \\ P'(0) \end{bmatrix} \end{cases}$

1. **a)** Donner la dimension de E.

b) Montrer que l'application φ est linéaire.

2. **a)** Calculer $\varphi(1)$, et $\varphi(X)$.

b) En déduire que $\text{Im}(\varphi)$ contient les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

c) En déduire $\text{Im}(\varphi)$ et donner $\text{rg}(\varphi)$.

3. **a)** En déduire $\dim[\text{Ker}(\varphi)]$.

b) Trouver une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 8 (*Variante moins guidée*)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et ψ l'application : $\psi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \end{bmatrix} \end{cases}$

1. Montrer que ψ est linéaire.

2. Trouver deux polynômes $P, Q \in E$ tels que $\psi(P) = \vec{e}_1$ et $\psi(Q) = \vec{e}_2$.

3. En déduire que ψ est surjective, et la dimension du noyau $\text{Ker}(\psi)$.

4. Trouver une base du noyau $\text{Ker}(\psi)$.