Colles semaine 10 - Applications de la diagonalisation

1 Applications en algèbre linéaire

Diagonalisation d'un endomorphisme

- **Représentations matricielles d'un endomorphisme**
  Détermination de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, formule de changement de bases…
- **Diagonalisation** et représentation matricielle diagonale dans une base de vecteurs propres.
- **La valeur propre 0** On a l'équivalence : $[0 \in \mathrm{Sp}(f)] \Longleftrightarrow [f \text{ pas bijectif.}]$.

Étude de commutants et diagonalisation

- **Définition** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tq } A \cdot M = M \cdot A\}$.
  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **Changement de variable** Si $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$, alors, pour $M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$,
  il y a équivalence : $[A \cdot M = M \cdot A] \Longleftrightarrow [A' \cdot M' = M' \cdot A']$.
  (exemple de résolution pour A' diagonale, puis retour à A et $\mathcal{C}_A$)

2 Calculs de puissances matricielles

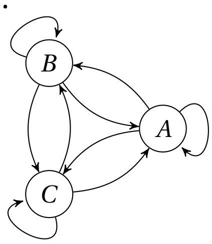
Cas diagonalisable

- **Puissances d'une matrice diagonale** Si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, alors : $D^k = \mathrm{Diag}(\lambda_i^k)$.
  (La puissance d'une matrice diagonale est la matrice diagonale des puissances.)
- **Puissances d'une matrice diagonalisée** Si $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, alors on a : $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$.

Formule du binôme de Newton

- **Énoncé** Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \cdot B = B \cdot A$, *(**commutation**)* alors : $(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k \cdot B^{r-k}$
- **Application** Notamment pour le cas où $M = \Delta + N$, avec :
  - Δ diagonalisable
  - N nilpotente
  - $N \cdot \Delta = \Delta \cdot N$.

3 Étude de chaînes de Markov



- une **succession d'épreuves** *(pour $n \in \mathbb{N}$)* aléatoires
- une évolution aléatoire sur un ensemble fini d'**états** *(ici A, B, C)*
- $\rightsquigarrow$ une suite de **systèmes complets d'événements** A_n, B_n, C_n
- **vecteur d'état probabiliste** $\vec{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$
- matrice T des **probabilités de transition**
  (p. ex : $p_{[A \rightsquigarrow B]} = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$).

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{depuis } A & \text{depuis } B & \text{depuis } C \end{array} \\ \begin{bmatrix} p(A \to A) & p(B \to A) & p(C \to A) \\ p(A \to B) & p(B \to B) & p(C \to B) \\ p(A \to C) & p(B \to C) & p(C \to C) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to \text{vers } A \\ \to \text{vers } B \\ \to \text{vers } C \end{array}$$

- **Équation de transition** On a : $\vec{X}_{n+1} = T \cdot \vec{X}_n$. *(donnée par la formule des probabilités totales)*
- **Puissances de la matrice de transition** On a : $\vec{X}_n = T^n \cdot \vec{X}_0$. *($\vec{X}_0$ état **initial**)*
- **Application de la réduction** pour $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$, on a alors : $T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.
- **Convergence pour $n \to \infty$** vers un état probabiliste limite. *(un vecteur propre pour $\lambda = 1$.)*

4 Questions de cours

1. Définir : « l'endomorphisme f est diagonalisable ».

2. Montrer que le commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La formule du binôme de Newton matricielle.

4. Principe du calcul des puissances d'une matrice diagonalisée.

5. Expliquer la matrice de transition d'une chaîne de Markov.