Correction du Ds 1

du 15/09/2016

Exercice 1. *(d'après Bce 2013 Ect)*

Soit M la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n. \end{cases}$

1. *(Montrer par récurrence que $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$ pour tout entier naturel n.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence : $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$. (H_n)
- **Initialisation** On a $M^0 = I_2$ par convention, soit $M^0 = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix}$ (H_0).
  (Par acquit de conscience, on vérifie aussi que $a_1 = 1$, et $b_1 = 2$, et ainsi (H_1).)
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.
  On suppose (H_n) soit : $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$.
  Alors $M^{n+1} = M^n.M = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_n & 2a_n + b_n \\ 0 & 2b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{bmatrix}$. (H_{n+1})
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence (H_n) est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$. (H_n)

2. *(Reconnaître la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.)*

- **Étude de (b_n)** On a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = 2b_n$, donc la suite (b_n) est géométrique de raison 2. On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2^n b_0 = 2^n$.
- **Relation de récurrence pour (a_n)** On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2a_n + 2^n. \end{aligned}$

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

a) *(Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.)*

- **Reconnaissance de (c_n) :** On calcule $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n + 2^n}{2 \times 2^n} = c_n + \dfrac{1}{2}$.
  La suite (c_n) est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, et $c_0 = 0$.
- **Terme général de (c_n) :** On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{n}{2}$.
- **Terme général de (a_n) :** On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n c_n = n2^{n-1}$.

4. *(En déduire les quatre coefficients de M^n pour tout entier n.)*

D'après les expressions de (a_n) et (b_n), on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Application au calcul d'une somme

a) *(Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient : $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$)*

On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\quad a_{k+1} = 2a_k + 2^k$.

D'où $\quad a_{k+1} - a_k - 2^k = (2a_k + 2^k) - a_k - 2^k = a_k$.

b) *(Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.)*

Par sommation télescopique, pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1}$.

c) *(Pour tout entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.)*

La formule de somme des termes d'une suite géométrique donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

d) *(Déduire des questions précédentes et de 3. que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.)*

On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k - 2^k) = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= a_{n+1} - (2^{n+1} - 1) = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1-2)2^n + 1\end{aligned}$$

On obtient bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

6. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrices $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) On vérifie que P est inversible et on trouve $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) On vérifie que $P^{-1}AP = M$.

c) *(Établir que $P^{-1}A^nP = M^n$. En déduire les quatre coefficients de A^n.)*

Les matrices A et M sont semblables, donc leurs puissances respectives le sont aussi, pour la même matrice de passage. En d'autres termes, on a : $\forall n \in \mathbb{N} :\ P^{-1}A^nP = M^n$.

On a donc aussi : $\forall n \in \mathbb{N} :\ PM^nP^{-1} = A^n$.

On écrit $M^n = 2^n(I_2 + \frac{n}{2}N)$ où $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et on obtient : $A^n = 2^n\left(I_2 + \frac{n}{2}PNP^{-1}\right)$.

Or $PNP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, et on trouve donc $A^n = \begin{bmatrix} 2^n + n2^{n-2} & n2^{n-2} \\ -n2^{n-2} & 2^n - n2^{n-2} \end{bmatrix}$.

Exercice 2.

(d'après Ecricome 2009 ect (adaptation libre))

On étudie la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par : $\forall x \in [0\,;1[, \quad f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

On définit aussi la fonction g définie sur $[0\,;1[$ par : $\forall x \in [0\,;1[, \quad g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. *(Montrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.)*

- **f de classe $\mathcal{C}^\infty$?**
  La fonction f est le quotient des fonctions suivantes, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$:
  - $n_f : x \mapsto e^{-x}$ *(fonction de référence)*
  - $d_f : x \mapsto 1-x$ *(fonction polynomiale)*

  De plus le dénominateur d_f ne s'annule pas sur $[0\,;1[$, donc f est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.
- **g de classe $\mathcal{C}^\infty$?**
  La fonction g est une fraction rationnelle *(quotient de polynômes)*, dont le dénominateur $x \mapsto 1-x$ ne s'annule pas sur $[0\,;1[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.

2. Valeurs et limites de f

a) *(Calculer $f(0)$.)*
On a $\forall x \in [0\,;1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. En particulier $f(0) = \frac{\exp(0)}{1} = 1$.

b) *(Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, sous forme exacte et approchée* (on utilisera $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0{,}6$.) *)*

On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

Ainsi $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 2 \times 0{,}6 = 1{,}2$.

c) *(Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.)*

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{-x} = e^{-1} > 0$ d'où par quotient : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$

3. Étude de g

a) *(Quel est le signe de g sur $[0\,;1[$?)*

Pour $x \in [0\,;1[$, le numérateur et le dénominateur de $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ sont $\geqslant 0$.

Ainsi on a $\forall x \in [0\,;1[,\ g(x) \geqslant 0$. De plus pour $x \in]0\,;1[$, on a $g(x) > 0$.

b) *(Montrer que $\forall x \in [0\,;1[, \quad g(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$.)*

On a bien $\forall x \in [0\,;1[, \quad \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1-x} = \dfrac{x}{1-x} = g(x)$.

c) *(Montrer que $\forall x \in [0\,;1[, \quad g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.)*

On dérive $\forall x \in [0\,;1[: g(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$.

$$\text{d'où } g'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

4. Variations de f

a) *(Montrer que $\forall x \in [0\,;1[,\quad f'(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}$.)*

On dérive en posant *(cette rédaction est un peu redondante en deuxième année)*

$$\left\{\begin{array}{l} u = \mathrm{e}^{-x} \\ v = 1-x \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u' = -\,\mathrm{e}^{-x} \\ v' = -1 \end{array}\right.$$

et il vient $\forall x \in [0\,;1[,\ f'(x) = \dfrac{-(1-x)\,\mathrm{e}^{-x} - (-1)\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}$.

b) *(Vérifier que $\forall x \in [0\,;1[$, on a $f'(x) = f(x)\,g(x)$.)*

On a bien : $\forall x \in [0\,;1[,\quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\,\dfrac{x}{1-x} = f(x)\,g(x)$.

c) *(En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;1[$.)*

On a $\forall x \in [0\,;1[,\quad \begin{array}{l} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}$ d'où $f'(x) \geqslant 0$, et la fonction f est **croissante** sur $[0\,;1[$.

Plus précisément, $f'(x) > 0$ sur $]0\,;1[$, donc f est **strictement croissante** sur $[0\,;1[$.

5. Étude de la convexité de f

a) *(Montrer que $\forall x \in I,\quad f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}\,\mathrm{e}^{-x}$.)*

On a $\quad \forall x \in [0\,;1[,\ f'(x) = f(x)\,g(x)$,

d'où

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ &= f(x)\,\left[g^2(x) + g'(x)\right] = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\left[\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right] \end{aligned}$$

Il vient donc bien $\forall x \in [0\,;1[,\ f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}\,\mathrm{e}^{-x}$.

b) *(En déduire la convexité de f sur $[0\,;1[$.)*

D'après cette expression, on a $\forall x \in [0\,;1[,\ f''(x) \geqslant 0$, donc f est **convexe** sur $[0\,;1[$.

6. Tracé de $\mathcal{C}$, courbe représentative de f

a) *(Que dire de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 ?)*

On a $f'(0) = 0$, donc cette tangente est horizontale, son équation est donc :

$$y = f(0) = 1.$$

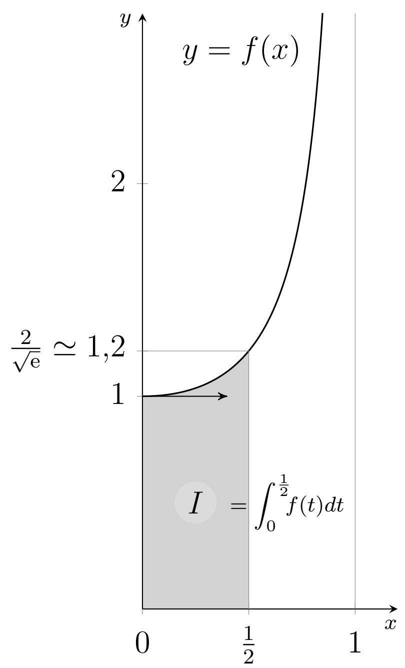
b) *(Que dire de la courbe $\mathcal{C}$ en 1 ?)*

On a $\lim\limits_{1^-} f = +\infty$, donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale en $x = 1^-$ vers le haut.

c) *(Tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec une échelle adaptée.)*

Ci-contre.

(On a aussi répondu à la question suivante en coloriant le domaine approprié.)



Partie II : Encadrement de la valeur d'une intégrale

Dans cette partie, on détermine deux encadrements de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. *(Interpréter l'intégrale I en terme d'une aire à représenter sur le schéma de la question* ***6.c)****)*

Il s'agit de l'aire du domaine délimité :

- en haut par $\mathcal{C}$
- à droite par la droite verticale $x = \frac{1}{2}$
- en bas par l'axe des abscisses (Ox)
- à gauche par la droite verticale $x = 0$.

8. *(Montrer que $\forall x \in [0\,;\frac{1}{2}]\quad 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. En déduire l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.)*

- **Encadrement de f** La fonction f est croissante sur $[0\,;1[$, donc pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, on a $f(0) \leqslant x \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit l'encadrement demandé en remplaçant les valeurs de f.
- **Encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} f$** On intègre cet encadrement sur le segment $[0\,;\frac{1}{2}]$. Il vient bien $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, soit l'encadrement souhaité.

9. *(Montrer que : $\forall x \in [0\,;\frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}$. En déduire que : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.)*

- **L'identité algébrique**

  On a bien $\forall x \in [0\,;1[$, $1+x+\frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$

- **Décomposition de l'intégrale :** par linéarité, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1+x+\frac{x^2}{1-x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

10. *(Effectuer une intégration par parties pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.)*

Calculons par parties l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$:

$$\left\{\begin{array}{l} u = 1+x \\ v' = \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = -\,\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

Il vient donc :

$$J = \left[-(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\,\mathrm{e}^{-x} = -\frac{3}{2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

11. *(En utilisant* ***8.****, montrer que $\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}$. En déduire un deuxième encadrement de I.)*

- **Encadrement de l'intégrale**

  On a $\forall x \in]0\,;\frac{1}{2}[$, $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, d'où $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x$.

  Or $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$ d'où l'encadrement demandé.

- **Encadrement de l'intégrale**

  On vient d' obtenir : $\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}$, soit d'après la question **10.** $\frac{1}{24} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Exercice 3. *(d'après EmLyon 2013 Ece)*

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0\,;1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. *(Montrer que g est continue sur $[0\,;1]$.)*

- **Continuité sur** $]0\,;1]$ La fonction g est le produit des deux fonctions suivantes, continues sur $]0\,;1]$: $t \mapsto -t$ *(fonction polynôme)*, $t \mapsto \ln(t)$ *(fonction de référence)* donc g est continue sur $]0\,;1]$.
- **Continuité en** 0 Vérifions que $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0)$.

  On a
  - $g(0) = 0$
  - $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} -t\ln(t) = 0$ par croissances comparées,

  donc g est bien continue en 0.

La fonction g est donc bien continue sur $[0; 1]$.

2. *(À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0\,;1[$, l'intégrale $\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.)*
Les fonctions u, v définies ci-dessous sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$:

$$\begin{cases} u'(t) = -t \\ v(t) = \ln(t) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u(t) = -\frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

On peut donc intégrer par parties et il vient :

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\int_x^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1-x^2}{4}.$$

3. *(En déduire que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que : $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.)*
On passe à la limite $x \to 0$ dans l'expression ci-dessus.
Par croissances comparées, $\frac{x^2}{2}\ln(x) \to 0$, et on trouve $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut bien $\frac{1}{4}$.

Remarque

> On intègre la fonction g, qui est **continue** sur le **segment** $[0\,;1]$. Contrairement à ce que sous-entend l'énoncé, **aucun argument supplémentaire** n'est nécessaire pour justifier de cette convergence.

Partie II - Exemple de densité

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = \left| \begin{array}{ll} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

4. *(Montrer que f est continue sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. Et en 0 ?)*

- **Sur les intervalles** $]-\infty\,;0]$, $]0\,;1[$ **et** $]1\,;+\infty[$, la fonction f est continue
- **Continuité de f en 0** Elle y est continue à gauche. Vérifions que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$.

- Le premier terme $t\ln(t)$ tend bien vers 0 *(croissances comparées, voir plus haut)*
- le deuxième $t^{\frac{1}{3}}$ a un exposant > 0, et tend donc aussi vers 0 quand $t \to 0^+$.

Ainsi, on a bien $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

- **Étude de continuité en 1** On a $\lim_{t\to 1^-} f(t) = \ln(1) + 1^{\frac{1}{3}} = 1$, et $f(1) = 0$.
  La fonction f est donc discontinue en 1.

5. *(Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.)*

- **Intégrabilité en $\pm\infty$** L'étude est immédiate car sans objet : on intègre 0.
- **En la discontinuité** 1 La fonction f y admet deux limites à gauche et à droite finies.
  L'intégrale de f converge donc des deux côtés en 1.
- **Calcul** On a bien : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (g(t) + t^{\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \left[\tfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

6. *(Montrer que f est une densité.)*

La fonction f :
- est $\geqslant 0$
- est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
- enfin, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

La fonction f est donc une densité.

7. **a)** *(Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0\,;1[$.)*

Les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;1[$:
- $t \mapsto -t$ *(fonction polynôme)*
- $t \mapsto \ln(t)$ *(fonction de référence)*
- $t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$ *(fonction puissance)*

Ainsi, la fonction f l'est aussi, et est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$.
On trouve : $\forall t \in]0\,;1[,\quad f'(t) = -\ln(t) - 1 + \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

$$f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}}.$$

b) *(En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.)*

- **Existence et unicité de α**
  Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction f' est
  - continue
  - strictement décroissante.

  Par le théorème de la bijection monotone, la fonction f' induit *(ou « réalise »)* donc une bijection $]0\,;1[\to]\lim\limits_{1^-} f'\,;\lim\limits_{0^+} f'[$. Or
  $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = +\infty$ *(croissances comparées)*
  $\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t) = -\frac{2}{3}$ *(simple calcul)*

  donc $0 \in]\lim_{1^-} f'\,;\lim_{0^+} f'[$, et il existe un unique $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
- **Encadrement de α** Calculons $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{3} > 0$. Ainsi, la fonction f' change de signes entre $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et 1, donc s'y annule, et $\frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

c) *(Compléter le programme suivant mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie pour α.)*

```
// la fonction étudiée
function y = fPrime(x)
    y = - log(x) - 1 + x^(-2/3) / 3
endfunction
```

```
if fPrime(a) * fPrime(c) > 0
  then
    a = c       // zoom à droite
  else
    b = c       // zoom à gauche
end
```