1 Généralités sur les fonctions numériques

1.1 Vocabulaire

- → **Domaine de définition** Notion d'intervalle de $\mathbb{R}$
- → **Sens de variation** fonction (strictement) (dé-)croissante, monotone
- → **Limites** En un point, à droite ou à gauche, en $\pm\infty$. Asymptotes horizontales/verticales.
- → **Notation de Landau** On note $o(1)$ pour « quelque chose qui tend vers 0 » (en $x_0, \pm\infty$)

1.2 « Calculus »

- → **Continuité** en un point : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, écriture $f(x_0 + o(1)) = f(x_0) + o(1)$.
- → **Dérivabilité :** équation de tangente, écriture $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.
- → **Justification de routine :** Continuité, dérivation de $\lambda u + \mu v$, uv, $u \circ v$, $u^v = \mathrm{e}^{v \ln(u)}$ fonctions usuelles.
- → **Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$** : justification, convexité, tangentes d'inflexion.

1.3 Continuité, dérivabilité et variations

- → **Théorème des valeurs intermédiaires :** Une fonction **continue** qui change de signe **sur un intervalle** s'annule.
- → **Inégalité des accroissements finis,** signe de la dérivée $\rightsquigarrow$ sens de var. **sur un intervalle**
- → **Obtention d'inégalités** par études de fonctions
- → **Théorème de la bijection**

2 Suites numériques

2.1 Généralités

- → **Sens de variations** Critère $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (mais attention aux signes !)
- → **Notion de bornes, de limites** Formes indéterminées
- → **Suites de références** Arithmétiques, géométriques, arith-géométriques, leurs limites
- → **Théorème du point fixe** Pour (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, <u>**si**</u> (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Étude graphique.

2.2 Les 3 critères de convergence

- → **Théorème de la limite monotone :** une suite croissante majorée converge. Suites $\nearrow$ non majorées.
- → **Théorème d'encadrement** (*théorème des gendarmes*). Version $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon_n \to 0$.
- → **Théorème des suites adjacentes.** Exemple de l'algorithme de dichotomie : résolution approchée de $f(x) = 0$.

Relations de comparaison, développements limités, applications aux formes indéterminées

1 Les relations $\sim$ (équivalent à) et o (négligeable devant)

On parle ici de suites, mais tout s'adapte aux fonctions en $\pm\infty$, en x_0.

→ **Négligeabilité** Notation $u_n = o(v_n)$ pour $u_n = \epsilon_n v_n$ avec $\epsilon_n \to 0$.

→ **Autres définitions :** $o(v_n) = v_n.o(1)$, et $\frac{o(v_n)}{v_n} \to 0$.

→ **Équivalence** Notation $u_n \sim v_n$ pour $u_n = (1+\epsilon_n)v_n$ avec $\epsilon_n \to 0$.

→ **Autres définitions :** $u_n = (1+o(1))v_n = v_n + o(v_n)$, et $\frac{u_n}{v_n} \to 1$.

→ **Interprétation graphique** Allure de deux suites équivalentes, d'une suite nég. devant une autre. Conjecturer un résultat d'après un affichage Scilab.

→ **Linéarité** $\lambda o(v_n) + \mu o(v_n) = o(v_n)$, mais **on n'additionne pas des équivalents !**

→

Multiplicativité	**Transitivité**
$o(u_n).o(v_n) = o(u_n v_n)$	Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
si $a_n \sim a'_n$ et $b_n \sim b'_n$, alors $a_n b_n \sim a'_n b'_n$.	Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

2 Développements limités à l'ordre 2

→ **Formule de Taylor** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors $x \to x_0$, et $h \to 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left(x-x_0\right)^2 \\ f(x_0+h) & = & f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) \end{array}$$

→ **Cas des trinômes du second degré** : La formule est alors exacte !

→ **Formulaire** pour $x \to 0$

e^x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a,\ a \in \mathbb{R}$
$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

→ **Cas particuliers pour** $(1+x)^a$ **:** On reconnaît le début de :

- ⋆ $a = n \in \mathbb{N}$: la formule du **binôme de Newton** pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^3 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

- ⋆ $a = -1$: la **somme des termes d'une suite géométrique :**

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \underbrace{\frac{q^{n+1}}{1-q}}_{=o_{q\to 0}(q^n)}, \qquad \text{où } q = -x \neq 1$$

3 Application aux formes indéterminées

→ **Principe des croissances comparées**

- ⋆ La limite des monômes en $r^n n^\alpha (\ln(n))^\beta$, pour $n \to \infty$. Variante pour les fonctions.
- ⋆ Principe des comparaisons entre monômes de ce type.
- ⋆ Trouver un équivalent d'une comb. lin. de tels monômes : le **terme prépondérant**.

→ **Utiliser les dév. lim.** pour lever des FI simples. Interprétation de taux d'accroissement.

→ **Exemple archiclassique** : Pour $x \in \mathbb{R}$: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$ (Euler ca.1730).

Généralités sur les sommes/séries et les intégrales

Sommes/séries classiques

- **Sommes** $\sum_{k=0}^{n} k^0 = n+1$, $\sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- **Sommes géométriques** $\forall q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, et si $|q|<1$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
- **Loi géométrique**
  - ⋆ Modélisation du rang d'apparition du premier succès à la répétition de $\mathcal{B}(p)$.
  - ⋆ Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}$,
  - ⋆ Interprétation du reste $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = q^N$ comme fonction d'anti-répartition $\mathbb{P}(X>N)$.

Manipulation de sommmes/séries

- **Pratique du changement d'indice** Dans $\sum_{k=0}^{N} u_{k+1}$, on pose $i = k+1$, et on substitue dans le t.g. et les bornes.
- **Sommation télescopique**
  - ⋆ Formule $\sum_{k=n}^{p} (u_{k+1} - u_k) = u_{p+1} - u_n$.
  - ⋆ Exemples d'application de la décomposition en éléments simples.
- **Séries à termes positifs** : les sommes partielles $\nearrow$, donc convergent *ssi* elles sont **majorées.**

Intégration

Cadre théorique cette semaine : On intégre une fonction **continue sur un segment**, puis passage à la limite aux bornes.

- **Propriétés générales** Linéarité, Chasles, positivité.
- **Intégrales et primitives** $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $F' = f$.
- **Primitives usuelles**
  - ⋆ Fonctions puissances : pour $a \neq -1$: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$, et $\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$.
  - ⋆ Exponentielles : pour $a \neq 0$: $\int \mathrm{e}^{ax}\, dx = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax}$.
- **Intégration par parties** pour u, v de classe $\mathcal{C}^1$: $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
  - ⋆ Exemple de $\int_1^x \ln(t)\, dt = x\ln(x) + 1 - x$, pour $x > 0$.
- **Pratique du changement de variables** sur un segment
  - ⊛ Hypothèses $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, f continue sur $\varphi([a,b])$.
  - ⊛ Formule $\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$
  - ⊛ Notation : on a posé $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)\, dt$. Alors $t = a \rightsquigarrow x = \varphi(a)$ ...

Séries et intégrales convergentes : justification « directe » et calculs

→ **Convergence de série** : c'est la convergence des sommes partielles.
→ **Exemple de convergences** : télescopage, séries classiques.
→ **Intégrales convergentes** : étude en $\pm\infty$, en un point $x_0^{\pm}$.
→ **Techniques de calcul d'$\int$:** trois techniques **sur un segment** $\boxed{\text{puis passage à la limite}}$

- ⋆ Primitivation à vue de l'intégrande : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $F'=f$.
- ⋆ Intégration par parties : pour u, v $\mathcal{C}^1$ on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
- ⋆ Changement de variables : pour φ $\mathcal{C}^1$ on a $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

→ **Extension de la notion d'intégrale** aux fonctions admettant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle. On étudie chaque « problème », puis Chasles
→ **Fonction densité** : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *) continue sauf évt. en un nb. fini de points, *) $f \geqslant 0$ et *) $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$, fonction de répartition associée.

Convergence absolue, utilisation des relations de comparaisons à la CA

→ **Convergence d'une SATP** :

- ⋆ Une **série à termes positifs** converge *ssi* la suite de ses sommes partielles est majorée (*c'est le th. de cv. mononotone !*)
- ⋆ si $(u_n) \geqslant 0$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente** *ssi* $\exists A \geqslant 0, \forall N, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant A$.
- ⋆ Critère analogue pour les intégrales.

→ **Notion de convergence absolue** :

- ⋆ On dit qu'une série converge si la SATP des valeurs absolues de ses termes converge.
- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** *ssi* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.
- ⋆ Analogue pour les intégrales : $\int_I f$ est **absolument convergente** *ssi* $\int_I |f|$ converge. On parle alors de **fonction intégrable**.

→ **La convergence absolue implique la convergence**
→ **Relations de comparaison** :

- ⋆ La convergence **absolue** se transfert par équivalence, et par prépondérance.
- ⋆ Si v_n est le tg d'une série **absolument convergente** et si $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n)$, alors (u_n) aussi
- ⋆ Même critère pour les intégrales en $\pm\infty$, en $x_0^{\pm}$.

→ **Intégrales, séries de référence** :

- ⋆ Séries géométriques q^n, intégrale des fonctions exponentielles e^{-ax}
- ⋆ Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
- ⋆ En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
- ⋆ En 0^+ : $\int_{0^+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha < 1$. **Attention au retournement de l'inéquation !**

→ **Application à la convergence absolue** : on compare judicieusement à une référence, souvent :

- ⋆ $\frac{1}{n^2}$, pour une série , et $\frac{1}{t^2}$ pour une intégrale en $+\infty$.
- ⋆ $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour une intégrale en 0^+.

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

- Pour X v.a.à valeurs entières $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$: **probabilités élémentaires** $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
- Probabilité d'un événement $\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum_{k \in A} p_k$,
- **Fonction de répartition** *(définie sur $\mathbb{R}$ par)* $\forall N$: $F_X(N) \overset{(\text{def})}{=} \mathbb{P}(X \leqslant N) = \sum_{k \leqslant N} p_k$
- **Espérance :** moyenne *(des valeurs)* de X *(pondérée par ses proba élémentaires)* : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_k$
- **Variance**
  - **Définition** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
  - **König-Huygens** *(Orthographe !)* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X])^2$ et l'astuce de calcul : $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$.
- **Définition sous réserve** Si $X(\Omega)$ est infini *(p. ex. $X(\Omega) = \mathbb{N}$)*, alors $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$ sont définies **sous réserve de convergence absolue** des séries $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k$ *(Moments d'ordre 1 et 2)*

2 Lois discrètes usuelles au programme d'Ece

Le processus de Bernoulli

- Il décrit la répétition d'une épreuve de Bernoulli à 2 issues : Échec / Succès
- modélisée par des v.a. **indépendantes et identiquement distribuées** $\epsilon_1 \dots \epsilon_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- Résultat codé par une suite de **bit** *(chiffres binaires 0 ou 1)* *(exemple :* 0010011101*)*

Définitions associées

- Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ dénombre ces suites pour longueur $= n$, nb. de succès $= k$
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$: modélise le **nombre de succès** après cette répétition. *(ici : 5)*
- **Loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$: **rang d'apparition** du 1^er^ succès *(répétition infinie)*. *(ici : 3)*

Sommes et séries usuelles en probabilités

- **Formule du binôme et dérivées** $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Série géométrique et dérivées** Les séries suivantes convergent *ssi* $|q| < 1$, et l'on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- **Définitions de l'exponentielle** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ *(convergence $\forall \lambda$)*

$$\exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \exp(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

1 Modélisation d'une expérience aléatoire

→ **Vocabulaire**

L'univers Ω est l'ensemble des issues ω *(une issue décrit* ***complètement*** *le résultat de l'expér.)*

Evénement $A \subset \Omega$ *(condition qui peut être satisfaite ou pas)*, sa **probabilité** *(ne pas confondre !)*

Équiprobabilité : formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{nb d'issues favorables}}{\text{nb d'issues possibles}} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

→ **Exemples de problèmes de dénombrement :**

$\star$) *Produit cartésien : (ensemble rectangulaire)* $\sharp(X \times Y) = \sharp X \times \sharp Y$.

$\star$) *Tirage sans remise :* de k objets parmi n

Modèle des **combinaisons** sans ordre $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Modèle des **arrangements** avec ordre $A_n^k = \binom{n}{k} \times k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$

$\star$) *Techniques :* Passage à l'événement contraire

Décomposition en réunion disjointe *(formule des probabilités totales)*

Présentation en arbre *(formule des probabilités composées)*

2 Lois d'un couple aléatoire discret

→ **Loi d'une variable** aléatoire discrète X en ligne :

$x \in X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

$\star$) *Espérance et variance :* $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$

$\star$) *Probabilité d'un événement :* $E = \{X \in A\}$, formule $\mathbb{P}(E) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

→ **Couple de variables aléatoires** Notation $V = (X, Y)$ *(c'est un vecteur aléatoire)*

X et Y sont les **variables marginales** *(composantes)*

→ **Loi conjointe** d'un couple, écriture en tableau à double entrée

$X \downarrow$ $\underset{\rightarrow}{Y}$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}	$p_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n.}$
Loi de Y	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\dots$	$p_{.j}$	$\dots$	$p_{.m}$	1

(Savoir lire le tableau et calculer des probabilités à partir de celui-ci)

→ **Loi marginale** obtention depuis la loi conjointe en sommant les lignes ou les colonnes

→ **Loi conditionnelle** on extrait une ligne *(ou une colonne)* du tableau,

on divise par la probabilité marginale associée

(On peut aussi obtenir la loi conjointe en partant des conditionnelles)

→ **Notion de variables indépendantes** :

X et Y sont **indépendantes** si : *(La loi conjointe est alors le produit des lois marginales)*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : \ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

1 Lois d'un couple aléatoire discret

- **Loi d'une variable** aléatoire discrète X en ligne :

$x \in X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

  $\star$) *Espérance et variance :* $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$

  $\star$) *Probabilité d'un événement :* $E = \{X \in A\}$, formule $\mathbb{P}(E) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

- **Loi conjointe** d'un couple, écriture en tableau à double entrée
- **Exploitation du tableau** Représentation d'événements définis comme conditions sur (X, Y).
- **Notion de variables indépendantes** :

  X et Y sont **indépendantes** si : *(La loi conjointe est alors le produit des lois marginales)*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : \ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

2 Problème de transfert

- **Exemples simples de transfert de loi** $Z = f(X, Y)$. On calcule une par une les probabilités des valeurs de Z en utilisant le tableau de la loi conjointe. Exemples :
  - $Z = X + Y$
  - $Z = XY$
- **Cas du max** $M = \max(X, Y)$
  - Slogan | Dire : « le plus grand de deux nombres est plus petit que n »
    c'est dire : « ces deux nombres sont plus petits que n »
  - soit $\forall n, \ \mathbb{P}(M \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n, Y \leqslant n)$
  - Cas où X, Y sont indépendantes. $\forall n, \ \mathbb{P}(M \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) \times \mathbb{P}(Y \leqslant n)$
  - On passe de la fonction de répartition à la loi $\mathbb{P}(M = n) = \mathbb{P}(M \leqslant n) - \mathbb{P}(M \leqslant n-1)$
- **Principe de transfert pour l'espérance** *(sous réserve de convergence)*

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

- **Moments** *(sous réserve de convergence)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^n\, \mathbb{P}(X = x)$$

3 Lois discrètes au programme

« Tout savoir » (valeurs prises, loi, fonction de répartition, espérance et variance) sur

- **Loi uniforme discrète**
- **Loi binomiale**
- **Loi de Poisson**
- **Loi géométrique**

1 Covariance d'un couple de variables aléatoires

- **Linéarité de l'espérance**
  (sous rés. de cv.) $\mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ *(constantes déterministes)*
- **Espérance du produit indépendant**
  Si X, Y sont indépendantes, alors *(sous réserve de convergence)* $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X]$.
- **Notion de variance**

Par définition :	$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$
Kœnig-Huygens :	$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2$.
Écart-type :	$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
Homogénéité :	$\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2\,\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(\lambda X) = \lvert\lambda\rvert\sigma(X)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Notion de covariance**

Par définition :	$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]$
Kœnig-Huygens :	$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$
Lien à la variance :	$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
Bilinéarité-symétrie	« mêmes règles de calcul pour $\mathrm{Cov}(X,Y)$ que pour xy ».
Décorrélation	X, Y sont **décorrélées** si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Deux variables **indépendantes** sont **décorrélées** *(décorrélation = « indépendance en moyenne »)*

- **Corrélation linéaire, principe de la régression linéaire**

Coefficient de corrélation linéaire	$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$
Cauchy-Schwarz	$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.
Corrélation totale : pour $\rho(X,Y) = \pm 1$,	alors on peut écrire $Y = aX + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Principe de la régression linéaire	On minimise le trinôme $T(\lambda) = \mathrm{Var}(Y - \lambda X)$,
(aux limites du programme ECE)	où X est la variable explicative Y est la variable expliquée

2 Un peu d'algèbre linéaire

- **Pratique du pivot de Gauss**

Système linéaire	système homogène associé, second membre générique
Matrice du système	matrice augmentée
Conclusion de la résolution	Notion de système compatible, de condition de compatibilité

- **Application à l'inversion d'une matrice carrée**
- **Notion d'espace vectoriel**
  C'est un ensemble E dont les éléments sont des « vecteurs » $\overrightarrow{u} \in E$:
  - Il y a un « vecteur nul » $\overrightarrow{0}$.
  - On peut y faire des **combinaisons linéaires** de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$: $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
  - ... avec les règles de calcul usuelles sur les combinaisons linéaires
- **Savoir reconnaître le vocabulaire** sur les exemples au programme :
  - Les espaces cartésiens $\mathbb{R}^n$
  - Les espaces de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$
  - L'espace des applications $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, où $D \subseteq \mathbb{R}$.
  - L'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

\AM@currentdocname .png

.png

1 Espaces vectoriels de dimension finie

- **Base d'un espace vectoriel** E : c'est une famille finie $\mathcal{B}$ à la fois
  - libre *(pas de relation de dépendance linéaire non-triviale entre les vecteurs de $\mathcal{B}$)*
  - génératrice : $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$ *(tout entier)*
- **Dimension finie**
  - ⋆) *Définition :* Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une base finie
  - ⋆) *Propriété :* Toutes les bases de E ont alors le même nombre $n \in \mathbb{N}$ de vecteurs *(cardinal)*
  - ⋆) *Dimension d'un* ev *:* Cet entier n *(card. d'une base)* est la dimension de E : notée $\dim(E)$
  - ⋆) *Vocabulaire en petite dimension :*

$n =$	0	1	2	3
E est ...	le singleton $\{\vec{0}\}$	une droite	un plan	« l'espace physique »

  - ⋆) *Dimension d'un sous-*ev *:* si $F \subseteq E$ avec E de dim. finie, alors :
    - F est de dim. finie aussi, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
    - il y a égalité *ssi* $F = E$ *(tout entier)* .
- **Rang d'une famille** de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E où $\dim(E) = n$.
  - ⋆) *Définition :* le rang de la fam. est la dimension du sous-ev engendré : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$.
  - ⋆) *Calcul dans $\mathbb{R}^n$:* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) =$ **nb de pivots**, une fois la matrice de la fam. $\mathcal{F}$ échelonnée.
  - ⋆) *Majorations :* on a à la fois $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *(nb de vecteurs)* et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$ *(dimension)*
  - ⋆) *Famille libre, génératrice, base :*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **libre** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$ *(nb de vecteurs)*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** *ssi* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = n$ *(dimension)*
    - La famille $\mathcal{F}$ est **une base** *ssi* $p = n$ *(bon nb de vecteurs)* **et** $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = n$
    - **Si** $p = n$, il suffit d'avoir $\mathcal{F}$ libre **ou** génératrice pr déduire que $\mathcal{F}$ est une **base**

Suites de variables aléatoires

- **Notion d'indépendance pour un couple**
  - $\star$) *d'événements :* A, B indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
  - $\star$) *de va discrètes :*
    X, Y indép. si $\forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$
    (la loi conjointe est le produit des deux marginales)
- **Généralisation : l'indépendance mutuelle d'une suite** $(X_1, ..., X_n)$
  - $\star$) *Définition par l'ensemble de conditions :*
    $\forall (x_1, ..., x_n) \in (X_1, ..., X_n)(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \left[\mathbb{P}\left(X_i = x_i\right)\right]$
    soit $\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times ... \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$
  - $\star$) *Variables indépendantes et identiquement distribuées :*
    modélisation d'une suite de lancers de « dés/pièces/tirages avec remise *etc.* »
- **Le principe des coalitions**
  Si $X_1 ... X_r, X_{r+1} ... X_{r+n}$ sont mutuellement indépendantes, alors deux variables s'écrivant $Y = f(X_1, ..., X_r)$ et $Z = g(X_{r+1}, ..., X_{r+n})$ sont indépendantes *(Y et Z coalitions disjointes)*

Exemples et transfert de lois

- **Espérance et variance d'une somme**
  - On a toujours *(sous réserve de convergence)* $\mathbb{E}[X_1 + ... + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_n]$
  - Pour des va. **indépendantes,** *(s.rés. de cv.)* $\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + ... + \mathrm{Var}(X_n)$
- **Le processus de Bernoulli** Cas particulier important *(explicitement tractable)*
  - modélise la répétition d'une épreuve de Bernoulli à 2 issues : Échec (0) / Succès (1)
  - toutes de loi $\forall i$, $\epsilon_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $0 < p < 1$ *(la « même » épreuve à chaque rép.)*
  - elles sont **mutuellement indépendantes** *(processus sans mémoire)*
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$
  - $\star$) *elle modélise le nb. de succès :*
    parmi n essais d'un processus de Bernoulli $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ sans mémoire *(iid)*
  - $\star$) *Stabilité en loi par la somme indépendante :* Soient X_1, X_2 va. On suppose :
    - $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$
    - X_1, X_2 indépendantes

    Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ *(Lemme des coalitions aux sommes des n_1 premiers/n_2 derniers tirages)*
- **Loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$
  - $\star$) *elle modélise le rang d'apparition T du premier succès :*
    dans un processus de Bernoulli $\epsilon_1, \epsilon_2, ... \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ sans mémoire *(iid)*
  - $\star$) *Fonction d'anti-répartition :* $\mathbb{P}(T > n) = q^n$.
  - $\star$) *Min de 2 géométriques indépendantes :* Savoir retrouver :
    - pour $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$
    - T_1, T_2 indépendantes et $I = \min(T_1, T_2)$

    alors : $\mathbb{P}(I > n) = \mathbb{P}(T_1 > n) \times \mathbb{P}(T_2 > n) = (q_1 q_2)^n$, d'où $I \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.
- **Stabilité de la loi de Poisson par somme indépendante**
  - $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$
  - X_1, X_2 indépendantes

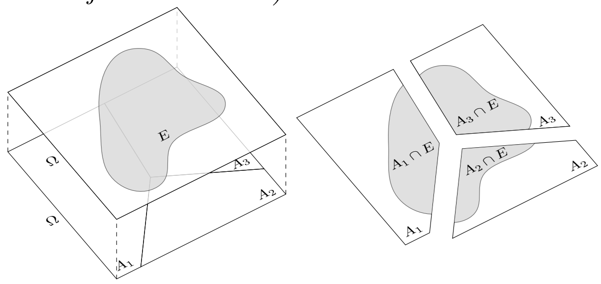
  Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ *(par l'étude de la loi conjointe)*
  Généralisation pour une somme de « Poisson » mutuellement indépendantes

Rappels sur les systèmes complets d'événements

- **Système complet d'événements** : *(principe de la disjonction des cas)*
  famille d'événements $(A_1, \dots A_n)$ qui sont :

  $\star$) *deux-à-deux incompatibles :*
  $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$

  $\star$) *collectivement exhaustifs :*
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



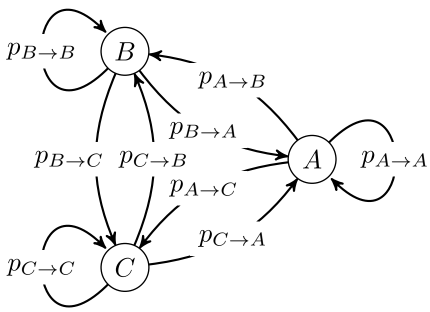
- **Exemple pour une variable discrète**
  p.ex. $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$ un système complet est formé des év$^{\text{ts}}$: $\forall k = 0 \dots n,\ A_k = [X = k]$
  (Conditionnement selon la valeur de X)
- **Formule des probabilités totales** qui décompose E dans le système complet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1 \cap E) + \mathbb{P}(A_2 \cap E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap E) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(E) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(E) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(E)\end{aligned}$$

Notion de chaîne de Markov

On considère

- une **succession d'épreuves** aléatoires $\forall n \in \mathbb{N}$: qui conduit à
- une évolution probabiliste sur un **ensemble fini d'états** *(souvent 2 ou 3)* : *(p.ex.)* A, B, C
- décrite par une suite de **systèmes complets d'événements** A_n, B_n, C_n
- **l'état probabiliste** au temps n est donné par les probabilités de chaque état p_n, q_n, r_n,
  on pose le **vecteur de probabilités** $\pi_n = (p_n, q_n, r_n) = (\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n))$
- les **proba. de transition** *(p.ex $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$)* forment la **matrice de transition** P
- la **formule des probabilités totales** s'écrit : $\pi_{n+1} = P\pi_n$: il vient donc $\pi_n = P^n \pi_0$.



Matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} p_{A\to A} & p_{B\to A} & p_{C\to A} \\ p_{A\to B} & p_{B\to B} & p_{C\to B} \\ p_{A\to C} & p_{B\to C} & p_{C\to C} \end{bmatrix}$$

Si la chaîne de Markov est décrite par une suite de variables aléatoires discrètes (X_n), la **matrice de transition** est la matrice de la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n.

Rappel sur les suites arithmético-géométriques

Pour étudier une suite arithmético-géométrique de relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$:

- **Résolution de l'équation du point fixe** $\ell = a\ell + b$
- **Centrage sur** ℓ de (u_n)
  La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a, car :

$$\begin{array}{lll} u_{n+1} & = au_n & +b \\ \ell & = a\ell & +b \\ \hline u_{n+1} - \ell & = a(u_n - \ell) & \end{array}$$

- **Expression du terme général** On a donc $u_n - \ell = (u_0 - \ell)a^n$ d'où u_n.

Rappel : représentation matricielle canonique

La « correspondance canonique » :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ [f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n] \longleftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Bigg\} n \text{ lignes} \end{cases}$$

est donnée par :

$$f(\vec{X}) = A\vec{X} = x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p$$
$$\vec{C}_1 = f(\vec{e}_1),$$
$$\vec{C}_2 = f(\vec{e}_2),$$
$$\vdots$$
$$\vec{C}_p = f(\vec{e}_p)$$

Noyau et image d'une matrice, d'une application linéaire

Deux sous-espaces vectoriels associés à | une application linéaire $f : E \to F$ | une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

Noyau : ***(Noté*** Ker ***pour « Kernel »*** **(allemand pour « noyau »)*)***

$\star$) *Définitions :*

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{v} \in E \text{ tels que } f(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$$
= **l'ensemble des** vecteurs de E qui sont **annulés** par f

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\vec{X} \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } A.\vec{X} = \vec{0}\right\}$$
= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui sont **annulés** par A

$\star$) *Interprétation « vecteurs colonnes » :*

Le noyau de A décrit l'ens. des **relations de dépendance linéaire** entre les $\vec{C}_i$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)_{\text{col.}} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \dots + x_p\vec{C}_p = \vec{0}.$$

(Remarque utile pour | vérifier la résolution d'un système linéaire | trouver le noyau en « calcul mental »)

$\star$) ***Pratique :*** *Trouver une base du noyau de la matrice A :*

- On résout le syst. d'équa$^{\text{ns}}$ $A.\vec{X} = \vec{0}$ pour $\vec{X} = (x_1, \dots, x_p)_{\text{col.}}$ *(1 équation par ligne)*
- *(Après échelon^{nt} : alg. du pivot de Gauss :)* les **inconnues principales** *(« à pivot »)* s'expriment en fonction des *(svt 1 seule)* **inc. secondaires** *(paramètres)*
- On ajoute des éq$^{\text{ns}}$ tautologiques pour écrire $A.\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{X} = z_1\vec{v}_1 + \dots + z_\nu\vec{v}_\nu$,
- On conclut : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\nu)$ et $\nu = \dim[\mathrm{Ker}(A)]$ *(= nullité)*

Image

- **Définitions**

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{v} \in F \text{ tq } \exists \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\} = \{f(\vec{u}),\ \text{quand } \vec{u} \text{ parcourt } E\}$$
= **l'ensemble des** vecteurs de F qui sont **atteints** par f

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \exists \vec{X} \in \mathbb{R}^p,\ A.\vec{X} = \vec{Y}\right\} = \left\{A.\vec{X},\ \text{quand } \vec{X} \text{ parcourt } \mathbb{R}^p\right\}$$
= **l'ensemble** des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont **atteints** par A

- **Interprétation « vecteurs colonnes »**

L'image de A décrit l'ens. des **combinaisons linéaires** entre les $\vec{C}_i$ ***(sev engendré)***

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p)$$

Rang

- **Définition** : « le rang, c'est la dimension de l'image »

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)), \qquad \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

- **Formule du rang** :

$$\underbrace{\dim(E)}_{\text{dim. de l'esp. de départ}} = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)), \qquad \underbrace{\text{nb. de col.}}_{=p} = \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)).$$

- **Interprétation :** chaque rel. de dép. lin. permet d'ôter l'un des $\vec{C}_i$ du Vect.

1 Recherche de valeurs propres

- **Spectre d'une matrice carrée A :** l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}(A)$, des valeurs propres de A

	$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$	*($\Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de A)*
ssi	$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$	*($E_\lambda(A)$ sous-espace propre associé)*
ssi	$A - \lambda I_n$ n'est **pas** inversible	*($\Leftrightarrow A$ - λI_n a « du noyau »)*

- **Vérifier si λ *(donnée)* $\in \mathrm{Sp}(A)$** : *(pas difficile)* pivot de Gauss *(résolution de $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$)*
  $\longrightarrow$ Comment réduire le champ d'étude à un petit nombre de λ ?

1.1 Approche directe *(seulement dans quelques cas)*

Matrice 2×2
La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{bmatrix}$ a « du noyau » *ssi* ses 2 vecteurs colonnes sont colinéaires
ssi *(règle de trois)* $(a - \lambda)(d - \lambda) = bc$

Matrice triangulaire *(T **triangulaire supérieure** si ts ses coefficients **sous-diag** sont **nuls.**)*

- **Critère d'inversibilité des matrices triangulaires**
  T inversible *ssi* tous ses coefficients diagonaux sont $\neq 0$.
- **Valeurs propres d'une matrice triangulaire** *(Elles sont « déjà » sur sa diagonale)*
  - Les **valeurs propres** d'une matrice triangulaire **sont** ses coefficients diagonaux.
  - Le **spectre** d'une matrice triangulaire est **l'ensemble de** ses coefficients diagonaux

Pivot de Gauss à paramètres ***(Approche déconseillée en général !)***
On écrit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ pas inversible *(puis pivot de Gauss avec discussion selon λ)*

Exemple d'application *(à savoir retrouver sur des exemples par pivot de Gauss à paramètre)*

Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ *(A : matrice compagnon)* Les **valeurs propres** de A sont les **racines du polynôme** $R(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

1.2 Avec un polynôme annulateur *(méthode plus générale)*

- **Définition** Un polynôme P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.
- **Exemples de recherches de polynômes annulateurs** *(et application au calcul de A^{-1})*
- **Condition nécessaire** Si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.
  (En testant toutes les racines λ de P, on est sûr de ne manquer aucune vp *de A.)*

2 Pratique de la diagonalisation

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si l'on peut écrire $A = P\,D\,P^{-1}$
avec *(c'est une formule de changement de base)*

- D **diagonale** : « la matrice des **valeurs** propres » *(matrice dans une nouvelle base)*
- P **inversible** : « la matrice des **vecteurs** propres » *(matrice de passage)*

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable *ssi***
la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ vaut n

Dérivation d'une fonction de deux variables

- **Exemples fondamentaux**
  Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$, polynomiales *(affines, quadratiques)*
- **Régularité**
  Notion de fonction de deux variables : continue,
  de classe $\mathcal{C}^1$,
  de classe $\mathcal{C}^2$.
  (Justification semblable au cas des fonctions d'une variable réelle)
- **Dérivées partielles** notées $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$
- **Champ de gradient** *(vecteur des dérivées partielles)*

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

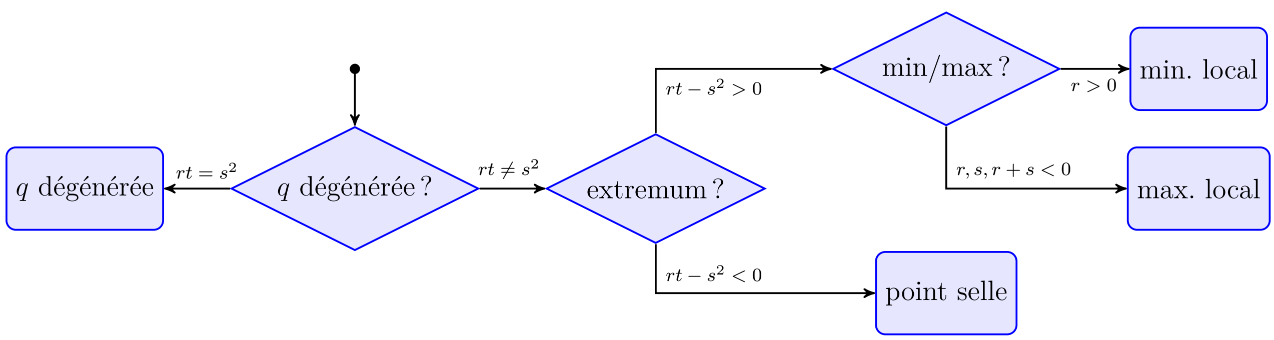
- **Point critique de f :** (x_0, y_0) point critique de $f \Leftrightarrow (\nabla f)(x_0, y_0) = \vec{0}$.
- **Champ de Hessienne** *(matrice des dérivées partielles secondes)*

$$(\nabla^2 f)(x, y) = \begin{bmatrix} \partial^2_{1,1} f & \partial^2_{1,2} f \\ \partial^2_{2,1} f & \partial^2_{2,2} f \end{bmatrix} (x, y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

- **Propriété de symétrie de Schwarz**
  La Hessienne de f de classe $\mathcal{C}^2$ est **symétrique**, et s'écrit $(\nabla^2 f)(x, y) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$.

Problèmes d'extrema, étude de points critiques

- **Vocabulaire topologique**
  Notion d'ensemble ouvert ou fermé de $\mathbb{R}^2$, d'ensemble borné de $\mathbb{R}^2$
- **Théorème des bornes**
  Une fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes.
- **Notion d'extremum, d'extremum local**
  Un extremum local à l'intérieur du domaine est un point critique
- **Classification des points critiques** selon la Hessienne $q = (\nabla^2 f)(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$



- **Exemples de recherche** de points critiques par étude d'une fonction intermédiaire d'une variable, *(notamment par le théorème de la bijection)*
- **Exemples d'études d'extrema sur un domaine à bord**

1 Variables à densité usuelles

Pour chacune des lois au programme il faut connaître et *(le cas échéant)* savoir retrouver :

- les paramètres qui interviennent,
- la densité f_X,
- la fonction de répartition $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$, *(et d'anti- $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$)*
- l'espérance $\mathbb{E}[X]$, moment d'ordre 2 $\mathbb{E}[X^2]$,
- la variance $\mathrm{Var}(X)$ *(par Kœnig-Huygens)*.

Lois usuelles au programme

Loi	uniforme	exponentielle	normale
Notation	$\mathcal{U}[a\,;b]$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
(référence)	$\mathcal{U}[0\,;1]$	$\mathcal{E}(1)$	$\mathcal{N}(0, 1)$

Exemples usuels d'intervalles de fluctuation à 95%.

2 Formule de transfert pour l'espérance

- **Contexte** On part d'une *v.a.* X **connue** *(par sa densité f_X)*
- **Objet** On s'intéresse à une nouvelle *va* $Y = \varphi(X)$ exprimée en fonction de X
- **Formule** $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \displaystyle\int \varphi(x)\, f_X(x)\, dx$. *(sous réserve de convergence absolue)*
- **Précaution** on intègre sur un intervalle « qui fait sens » *(**p.ex.** sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $Y = \ln(X)$...)*
- **Exemple des moments** $m_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \int x^n\, f_X(x)\, dx$ est le moment d'ordre n de X

3 Vocabulaire de la répartition

- **Quantiles usuels** min, max, médiane, quartiles, déciles, centiles
- **Avec la *fdr*** Recherche de quantiles par résolution de $F_X(x) = p$
  ($p = 50\%$, pour la médiane, 90% pour D_9)
- **Fonction « quantiles »** c'est la **bijection réciproque** de la fonction de répartition
- **Exemple explicite** de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

4 Exemples simples de problèmes de transfert en loi

- **Objectif** On s'intéresse cette fois à la **loi** de $Y = \varphi(X)$.
- **Cas le plus simple** pour φ **bijection croissante** *(notamment $\varphi = \exp$)*
- **Méthode**
  1. On traduit la fonction de répartition de Y en termes de celle de X.
  2. On en déduit la fonction densité de Y en dérivant sa *fdr*.
- **Interprétation** du transfert en loi en termes de quantiles
  (formulation pas exactement au programme)

1 Variables à densité usuelles

Pour chacune des lois au programme il faut connaître et *(le cas échéant)* savoir retrouver :

- les paramètres qui interviennent,
- la densité f_X,
- la fonction de répartition $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$, *(et d'anti- $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$)*
- l'espérance $\mathbb{E}[X]$, moment d'ordre 2 $\mathbb{E}\left[X^2\right]$,
- la variance $\mathrm{Var}(X)$ *(par Kœnig-Huygens)*.

Lois usuelles au programme

Loi	uniforme	exponentielle	normale
Notation	$\mathcal{U}[a\,;b]$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
(référence)	$\mathcal{U}[0\,;1]$	$\mathcal{E}(1)$	$\mathcal{N}(0, 1)$

Exemples usuels d'intervalles de fluctuation à 95%.

2 Formule de transfert pour l'espérance

- **Contexte** On part d'une *v.a.* X **connue** *(par sa densité f_X)*
- **Objet** On s'intéresse à une nouvelle *va* $Y = \varphi(X)$ exprimée en fonction de X
- **Formule** $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \displaystyle\int \varphi(x)\, f_X(x)\, dx.$ *(sous réserve de convergence absolue)*
- **Précaution** on intègre sur un intervalle « qui fait sens » *(**p.ex.** sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $Y = \ln(X)$...)*
- **Exemple des moments** $m_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \int x^n\, f_X(x)\, dx$ est le moment d'ordre n de X

3 Vocabulaire de la répartition

- **Quantiles usuels** min, max, médiane, quartiles, déciles, centiles
- **Avec la *fdr*** Recherche de quantiles par résolution de $F_X(x) = p$
  ($p = 50\%$, pour la médiane, 90% pour D_9)
- **Fonction « quantiles »** c'est la **bijection réciproque** de la fonction de répartition
- **Exemple explicite** de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

4 Exemples simples de problèmes de transfert en loi

- **Objectif** On s'intéresse cette fois à la **loi** de $Y = \varphi(X)$.
- **Cas le plus simple** pour φ **bijection croissante** *(notamment $\varphi = \exp$)*
- **Méthode**
  1. On traduit la fonction de répartition de Y en termes de celle de X.
  2. On en déduit la fonction densité de Y en dérivant sa *fdr*.
- **Interprétation** du transfert en loi en termes de quantiles
  (formulation pas exactement au programme)

\AM@currentdocname .png

.png