Colles sem. 4 : Séries en probas, v.a. indépendantes

1 Sommes associées à une variable aléatoire discrète

*(L'exemple-« fil rouge » est la **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$: tous les calculs sont explicites)*

- **Distribution de probabilités discrète**

La loi d'une variable aléatoire X discrète est la donnée des : $\mathbb{P}(X=n)$. *($\forall n \in X(\Omega)$, support de X)*

On a alors :
- $\forall n \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=n) \geqslant 0$ *(positivité)*
- $\sum_{n \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=n) = 1$ *(+ convergence si $X(\Omega)$ infini).*

(on somme toujours sur un sous-ensemble de $X(\Omega)$.)

- **Événements X-mesurables**

Pour $A \subseteq X(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n \in A} \mathbb{P}(X=n)$ *(somme des proba. des év[ts] élémentaires **favorables**)*

- **Fonction de répartition** définie par : $\forall N \in S$, $F_X(N) = \mathbb{P}(X \leqslant N) = \sum_{n \leqslant N} \mathbb{P}(X=n)$

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, l'expression des probabilités : $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1)$.

- **Espérance** sous réserve de **convergence absolue** : $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \in X(\Omega)} n \cdot \mathbb{P}(X=n)$

*(espérance = **moyenne** des valeurs n de X, moyenne **pondérée** (= avec des coefficients) par les proba $\mathbb{P}(X=n)$.)*

- **Transfert pour l'espérance** *(sous réserve de cv. absolue)* $\mathbb{E}\big[f(X)\big] = \sum_{n \in X(\Omega)} f(n) \cdot \mathbb{P}(X=n)$,

notamment : $\mathbb{E}\big[X(X-1)\big] = \sum_{n \in X(\Omega)} n(n-1) \cdot \mathbb{P}(X=n)$.

- **Variance** *(indicateur de **dispersion** autour de la moyenne de la loi)*

La formule de Kœnig-Huygens *(orthographe!)* $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$

et l'utile variante-« trinôme », p.ex. $= \mathbb{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbb{E}[X] \cdot \big(\mathbb{E}[X]-1\big)$.

2 Indépendance d'un couple de variables discrètes

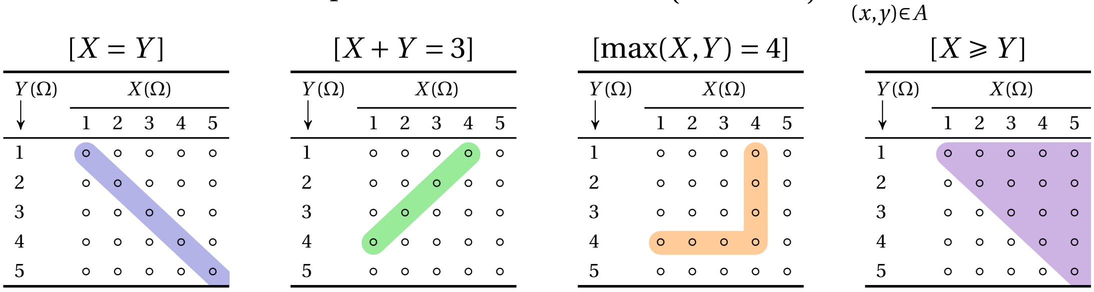
- **Définition** Soient X, Y deux *va* discrètes.

Alors X, Y **indépendantes** si $\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$: $\overbrace{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}^{\text{proba loi conjointe}} = \overbrace{\mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)}^{\text{produit des proba lois marginales}}$.

- **Non-indépendance** *(souvent)* recherche d'incompatibilités *(ex. : $X > Y \overset{(?)}{\rightsquigarrow} X, Y$ pas indép[tes])*

- **Calcul de probabilité** d'un évén[nt] portant sur le couple.

On le situe, et on somme les probas élémentaires : $\mathbb{P}\big((X,Y) \in A\big) = \sum_{(x,y) \in A} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$.



- **Lois classiques** expression des proba. élémentaires pour X, Y de loi :
  - uniformes
  - géométriques

Loi du min, du max indépendant

- **max** $M = \max(X, Y)$, *via* la fonction de répartition :

1. $F_M(n) = \mathbb{P}(M \leqslant n) \overset{\max}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n, Y \leqslant n) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leqslant n) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant n)$

2. Calcul de $F_M = F_X \cdot F_Y \rightsquigarrow$ loi de M : $\mathbb{P}(M=n) = F_M(n) - F_M(n-1)$.

- **min** même principe, pour la fonc[n] d'**antirépartition** $A_X(n) = \mathbb{P}(X > n)$. *(on renverse tout!)*

3 Les questions de cours

1. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes

2. On lance deux dés à n faces. Quelle est la probabilité qu'ils tombent sur la même face ?

3. La méthode pour trouver la loi du max indépendant.

4. Calculer la fonction de répartition de $\mathcal{G}(p)$ + calcul de l'espérance.

5. La formule de transfert pour $\mathbb{E}[X(X-1)]$ + formule de Kœnig-Huygens