Sujet 1

Questions de cours :

1. Soit B = ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$) une base de E. Ecrire la décomposition d'un vecteur $\vec{v} \in$ E dans la base B.
2. Soit f : E $\rightarrow$ E un endomorphisme. Ecrire la définition de $Mat_B(f)$.

Exercice 1 :

Soient $\vec{v}_1$ = (1, 0, 0), $\vec{v}_2$ = (5, -2, 2) et $\vec{v}_3$ = (-1, 1, 2).

1. Montrer que B_v = ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$) forme une base de R^3.
2. Ecrire la matrice de passage de la base canonique à la base B_v puis celle de B_v à la base canonique.
3. Soit f : $R^3 \rightarrow R^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer la matrice B de f dans la base B_v.
4. Calculer B^n pour tout n > 0, puis A^n.

Exercice 2 :

E désigne un espace vectoriel sur R rapporté à une base B = ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$).

Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(\vec{e}_2) = \vec{0} \text{ et } f_a(\vec{e}_1) = f_a(\vec{e}_3) = a\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - a\vec{e}_3$$

1. Déterminer une base de $Im(f_a)$.
2. Montrer que $\vec{e}_2 \in Ker(f_a)$ et $\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \in Ker(f_a)$.
3. Ecrire la matrice A de f_a dans la base B. Calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$.
4. On pose $\vec{e}_1\,' = f_a(\vec{e}_1)$, $\vec{e}_2\,' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ et $\vec{e}_3\,' = \vec{e}_3$.
5. a) Montrer que B' = ($\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$) est une base de E.
   b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.
   c) Ecrire la matrice de passage de B à B'. On la note P.
   d) Donner la formule reliant A, A' et P.

Sujet 2

Question de cours :

1. Ecrire la définition de deux matrices semblables.
2. Quelles propriétés portant sur les opérations matricielles a-t-on avec les matrices semblables ?

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base B = ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base B.

On note $\vec{u} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{k}$.

1. Déterminer f($\vec{u}$), f($\vec{v}$) et f($\vec{w}$).
2. Montrer que B' = ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est une base de E.
3. Déterminer P la matrice de passage de B à B'.
4. Ecrire la matrice D de f dans la base B'.
5. Rappeler l'expression reliant A, D et P. Calculer A^n.
6. Justifier que f est un automorphisme de E et donner la matrice de f^{-1} dans la base B.

Exercice 2 :

Soit f : $R_2[X] \to R^3$, P $\mapsto$ (P(1), P'(1), P(0))

1. Rappeler la base canonique de $R_2[X]$ puis calculer l'image par f de chacun des vecteurs de la base canonique.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Déterminer Ker(f).
4. Déterminer une base de Im(f).
5. On admet que f est bijective. Montrer qu'il existe un unique polynôme P $\in$ $R_2[X]$ tel que P(1) = P'(1) = 1 et P(0) = 0. Déterminer ce polynôme.

Sujet 3

Questions de cours :

1. Soit f : E→E un endomorphisme.
   Ecrire les relations de changement de base pour f.
2. Ecrire la définition du noyau de f
3. Ecrire la définition de l'image de f.

Exercice 1 :

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Soit f l'application définie sur $M_2(R)$ par f(M) = AM – MA.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $M_2(R)$.
2. Déterminer le noyau de f : on donnera une base et la dimension.
3. Déterminer l'image de f : : on donnera une base et la dimension.
4. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
5. Justifier que f n'est pas un automorphisme de $M_2(R)$.
6. Retrouver son noyau par calcul matriciel.

Exercice 2 :

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On note B la base ($\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) de E où pour tout réel x, on a

$$\vec{e}_0 (x) = 1,\ \vec{e}_1 (x) = x \text{ et } \vec{e}_2 (x) = x^2.$$

On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynomiale Q définie par :

$$\forall\ x \in R,\ Q(x) = 2xP(x) – (x^2 - 1)P'(x).$$

1) a) Montrer que f est un application linéaire.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Ecrire f($\vec{e}_0$), f($\vec{e}_1$) et f($\vec{e}_2$) comme combinaisons linéaires de $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. En déduire la matrice A de f dans la base B.

2) a) Vérifier que Im(f) = vect($\vec{e}_1$, $\vec{e}_0 + \vec{e}_2$) et donner la dimension de Im(f).

b) Déterminer Ker(f).