Séries et intégrales convergentes : justification « directe » et calculs

→ **Convergence de série** : c'est la convergence des sommes partielles.
→ **Exemple de convergences** : télescopage, séries classiques.
→ **Intégrales convergentes** : étude en $\pm\infty$, en un point $x_0^{\pm}$.
→ **Techniques de calcul d'$\int$:** trois techniques **sur un segment** $\boxed{\text{puis passage à la limite}}$

- ⋆ Primitivation à vue de l'intégrande : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $F' = f$.
- ⋆ Intégration par parties : pour u, v $\mathcal{C}^1$ on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
- ⋆ Changement de variables : pour φ $\mathcal{C}^1$ on a $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

→ **Extension de la notion d'intégrale** aux fonctions admettant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle. On étudie chaque « problème », puis Chasles
→ **Fonction densité** : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *) continue sauf évt. en un nb. fini de points, *) $f \geqslant 0$ et *) $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$, fonction de répartition associée.

Convergence absolue, utilisation des relations de comparaisons à la CA

→ **Convergence d'une SATP** :

- ⋆ Une **série à termes positifs** converge *ssi* la suite de ses sommes partielles est majorée (*c'est le th. de cv. mononotone !*)
- ⋆ si $(u_n) \geqslant 0$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente** *ssi* $\displaystyle\exists A \geqslant 0, \forall N, \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant A$.
- ⋆ Critère analogue pour les intégrales.

→ **Notion de convergence absolue** :

- ⋆ On dit qu'une série converge si la SATP des valeurs absolues de ses termes converge.
- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** *ssi* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.
- ⋆ Analogue pour les intégrales : $\int_I f$ est **absolument convergente** *ssi* $\int_I |f|$ converge. On parle alors de **fonction intégrable**.

→ **La convergence absolue implique la convergence**
→ **Relations de comparaison** :

- ⋆ La convergence **absolue** se transfert par équivalence, et par prépondérance.
- ⋆ Si v_n est le tg d'une série **absolument convergente** et si $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n)$, alors (u_n) aussi
- ⋆ Même critère pour les intégrales en $\pm\infty$, en $x_0^{\pm}$.

→ **Intégrales, séries de référence** :

- ⋆ Séries géométriques q^n, intégrale des fonctions exponentielles e^{-ax}
- ⋆ Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
- ⋆ En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha > 1$.
- ⋆ En 0^+ : $\int_{0^+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge *ssi* $\alpha < 1$. **Attention au retournement de l'inéquation !**

→ **Application à la convergence absolue** : on compare judicieusement à une référence, souvent :

- ⋆ $\frac{1}{n^2}$, pour une série , et $\frac{1}{t^2}$ pour une intégrale en $+\infty$.
- ⋆ $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour une intégrale en 0^+.