Ds 1

le 15/09/2016

Exercice 1. *(d'après Bce 2013 Ect)*

Soit M la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que $M^n = \begin{bmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$ pour tout entier naturel n.

2. Justifier que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite remarquable. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n.
Établir que pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

- **a)** Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.
- **b)** En déduire une expression de c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
- **c)** Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = n2^{n-1}$.

4. En déduire les quatre coefficients de M^n pour tout entier n.

5. Application au calcul d'une somme

- **a)** Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k, \quad \text{pour tout entier naturel } k$$

- **b)** Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.
- **c)** Pour tout entier naturel n, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
- **d)** Déduire des questions précédentes et de **3.c)** que $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Application au calcul des puissances d'une autre matrice
On considère les matrices $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- **a)** Montrer en utilisant la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.
- **b)** Vérifier que $P^{-1}AP = M$.
- **c)** Établir que $P^{-1}A^nP = M^n$. En déduire les quatre coefficients de A^n.

Exercice 2. *(d'après Ecricome ect)*

On étudie la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par : $\forall x \in [0\,;1[, \quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

On définit aussi la fonction g définie sur $[0\,;1[$ par : $\forall x \in [0\,;1[, \quad g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. Montrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;1[$.

2. Valeurs et limites de f

a) Calculer $f(0)$.

b) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, sous forme exacte et approchée *(on utilisera* $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \simeq 0{,}6$.*)*

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

3. Étude de g

a) Quel est le signe de g sur $[0\,;1[$?

b) Montrer que $\forall x \in [0\,;1[, \quad g(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$.

c) Montrer que $\forall x \in [0\,;1[, \quad g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

4. Variations de f

a) Montrer que $\forall x \in [0\,;1[, \quad f'(x) = \dfrac{x\ \mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0\,;1[$, on a $f'(x) = f(x)\, g(x)$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;1[$.

5. Étude de la convexité de f

a) Montrer que $\forall x \in I, \quad f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}\,\mathrm{e}^{-x}$.

(On pourra utiliser l'écriture de **4.b)** *et en déduire* $f''(x) = f(x)\ \left[g^2(x) + g'(x)\right]$*)*

b) En déduire la convexité de f sur $[0\,;1[$.

6. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f

a) Que dire de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 ?

b) Que dire de la courbe $\mathcal{C}$ en 1 ?

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec une échelle adaptée.
On illustrera les réponses aux questions **6.a)** et **6.b)** et on placera $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie II : Encadrement de la valeur d'une intégrale

On se propose dans cette partie de déterminer deux encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On ne cherchera **pas** à **calculer** cette intégrale.

7. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question **6.c)**

8. Montrer que $\forall x \in [0\,;\frac{1}{2}] \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

En déduire l'encadrement $\quad \dfrac{1}{2} \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

9. Montrer que : $\quad \forall x \in [0\,;\frac{1}{2}], \quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1-x}$.

En déduire que : $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Effectuer une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

11. En utilisant l'encadrement de **8.**, montrer que $\dfrac{1}{24} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}$.

En déduire un deuxième encadrement de I.

Exercice 3.

(d'après EmLyon 2013 Ece)

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0\,;1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0\,;1]$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0\,;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$.

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

Partie II - Exemple de densité

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = \left| \begin{array}{ll} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

4. Montrer que f est continue sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?

5. Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

6. Montrer que f est une densité.

7. **a)** Montrer que f est de classe C^2 sur $]0\,;1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0\,;1[$.

b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0\,;1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

c) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, en mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie.

dichotomieACompleter.sce

```
function y = fPrime(x) ;
  y = ___                          // <- à compléter
endfunction

a = 1/%e ;                         // bornes de la dichotomie
b = 1 ;

while b-a > 10^(-3)
  c = (a+b) / 2                    // milieu du segment
  if fPrime(a) * fPrime(c) > 0
    then
      ___                          // <- à compléter
    else
      ___                          // <- à compléter
  end
end

disp(a)                            // afficher le résultat
```