

DL 3 : une suite de tirages aléatoires avec/sans remise

pour le jeudi 13 octobre

Une urne contient initialement ▶ une boule blanche et

▶ deux boules rouges.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- ▶ si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.
- ▶ si la boule tirée est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- ▶ B_n = « on obtient une boule **blanche** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,
- ▶ R_n = « on obtient une boule **rouge** lors du $n^{\text{ème}}$ tirage »,

et X_n le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage.

1. Le début de l'expérience

a) Justifier que l'on a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.

Donner la probabilité de chaque valeur (la loi de X_1).

b) Justifier que l'on pose $X_0 = 2$.

2. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À quelles conditions sur le $n^{\text{ième}}$ tirage : le contenu précédent de l'urne le résultat du tirage

resterait-il 2 boules rouges à son issue ?

b) En déduire l'égalité d'événements : $\forall n \geq 1, [X_n = 2] = [X_{n-1} = 2] \cap B_n$.

c) Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}(B_n)$?

d) En déduire que la suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et donner son terme général.

3. Étude de $\mathbb{P}(X_n = 1)$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X_n = 1]$ en terme de $[X_{n-1} = 1]$, $[X_{n-1} = 2]$, B_n , R_n .

b) En appliquant soigneusement la formule des probabilités totales, déduire pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = 2)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. On a donc : $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.

c) Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{4}{3^n}$, est géométrique.

d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{4}{2^n} - \frac{4}{3^n}$.

4. On note T le rang du tirage où l'on tire une boule rouge pour la deuxième fois.

(après ce tirage, il ne reste donc plus dans l'urne que la boule blanche.)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité d'événements $[T \leq n] = [X_n = 0]$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)$.

c) (Variante) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$.

d) En déduire l'expression de la probabilité $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(T = n) = 2 \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} \right]$.

e) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

f) (Bonus) Établir : $\mathbb{E}[T] = \frac{7}{2} \quad \mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{23}{2} \quad \text{Var}(T) = \frac{11}{4}$.