Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par : $\quad \forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$.

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pout tout $(x,y) \in U$: $\quad (x,y)$ est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définies dans la partie A.
Déterminer aussi les eventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques :

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : $\quad \nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$.

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1,z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?