# Ecricome 2017 ECE

## 1 Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $I$ la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice $A$ définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

### Partie A : Étude de la matrice $A$

**1.** *(Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.)*

- **Calcul de** $(A - I)$ On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
- **Calcul de** $(A-I)^2$ On trouve : $(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- **Calcul de** $(A-I)^3$ On trouve alors $(A-I)^3 = 0$.

**2.** *(En déduire l'ensemble des valeurs propres de $A$.)*

- **Restriction des valeurs propres**
  On a vu : $(A-I)^3 = 0$. Le polynôme $\Pi(X) = (X-1)^3$ est donc annulateur de $A$.
  Les seules valeurs propres possibles pour $A$ sont donc les racines de ce polynôme.
  Or la seule racine de $\Pi$ est 1.
  La seule valeur propre possible de $A$ est donc 1.
- **Vérification pour** $\lambda = 1$ On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.
  Cette matrice est de rang $= 2$ *(deux premiers vecteurs colonnes opposés)*.
  Ainsi : $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} - \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{2} = 1.$
  On a : $\mathrm{Ker}(A-I) \neq \{\vec{0}\}$, donc 1 est bien valeur propre de $A$.
- **Conclusion** L'ensemble des valeurs propres de $A$ est : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

**3.** *(La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?)*

- **Inversibilité** ***(oui)*** Le réel 0 n'est pas valeur propre de $A$, donc $A$ est inversible.
- **Diagonalisabilité** ***(non)*** La matrice $A$ n'a qu'une valeur propre, c'est 1.
  Ainsi : $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\Big(E_\lambda(A)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(A-I)\Big) = 1 \neq 3.$
  La somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas le nombre de colonnes : la matrice $A$ n'est donc pas diagonalisable.

### Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

**4.** *(Justifier que la fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.)*

- **Caractère $\mathcal{C}^\infty$**
  La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de référence de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
  On compose par $x \mapsto 1+x$, qui est affine donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$, et à valeurs $> 0$.
  Ainsi, par composition $\varphi : x \mapsto \sqrt{\underbrace{1+x}_{>0}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$.
- **Dérivation**
  On dérive, en remarquant que $(1+x)' = 1$
  On a $\forall x \in \left]-1\,;1\right[$ $\quad \varphi(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

**5.** *(En utilisant la formule de Taylor-Young pour $\varphi$ en $0$ à l'ordre $2$, déterminer un réel $\alpha$ non-nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.)*

- **Énoncé de la formule de Taylor-Young**
  Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $x_0$, alors, pour $x \to x_0$, on a : $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + o\Big((x-x_0)^2\Big)$.
- **Application** Ici, on a trouvé :
  - $\varphi(0) = 1$
  - $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$
  - $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$

  Il vient donc : $\quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^2 + o(x^2)$.
  C'est la formule demandée avec $\alpha = -\frac{1}{8}$. *(et $\alpha$ est bien non-nul !)*

On note : $\quad P(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 \quad$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.

**6.** *(Développer $\big(P(x)\big)^2$.)*

On développe : 

$$\begin{aligned}\Big(P(x)\Big)^2 &= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right] \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot x^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot x^4 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{64} \cdot x^4.\end{aligned}$$

**7.** *(Soit $C = A - I$.*
*En utilisant les résultats de la question **1.**, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.*
*Expliciter alors une matrice $M$ telle que $M^2 = A$.)*

- **Rappel de la question 1.** On a trouvé $(A-I)^3 = C^3 = 0$, d'où aussi $C^4 = 0$.
- **Calcul de $P(C)$**
  Ces deux puissances s'annulent dans l'expression de la question précédente.
  Il vient : 

$$\begin{aligned}\Big(P(C)\Big)^2 &= I + C - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{C^3}_{0} + \frac{1}{64} \cdot \underbrace{C^4}_{0}. \\ &= I + C\end{aligned}$$

  Ainsi, on a bien $\Big(P(C)\Big)^2 = I + C = A$.

▸ **Explicitation d'une solution à** $M^2 = A$

On vient de trouver pour solution à cette équation : $M = P(C)$

C'est-à-dire : $M = I + \frac{1}{2} \cdot C - \frac{1}{8} \cdot C^2$ .

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous calculs effectués, on trouve : $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. *(et on vérifie $M^2 = A$.)*

**Partie C : Résolution complète de l'équation**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A$.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**8.** Soient $u, v, w$ les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

**a)** *(Calculer les vecteurs $v$ et $u$.)*

▸ **Interprétation de** $f$

Pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a : ▸ $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ -3x + 3y + z \end{pmatrix}$

▸ $f(\vec{X}) - \vec{X} = \underbrace{C}_{A-I} \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ -x + y + 2z \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$

▸ **Application** ▸ On a $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $v = f(w) - w = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 2 \\ -1 + 0 + 2 \\ -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

▸ Ainsi : $v = f(w) - w = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 2 \\ -1 + 0 + 2 \\ -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

▸ De même : $u = f(v) - v = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**b)** *(Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.)*

▸ **La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre ?**

Cherchons les relations de dépendance linéaire satisfaites par cette famille $\mathcal{B}'$.

On résout : $\left[ a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = \vec{0} \right] \iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ c = 0 \quad (L_1 - L_2) \end{cases}$$

Ce système est triangulaire, avec des coefficients diagonaux non-nuls. *(3 pivots)*

La seule solution est donc $a = b = c = 0$.

Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire est triviale.

La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est donc libre.

- **Conclusion : « c'est une base »**
  La famille $\mathcal{B}'$ est libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
  Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. *(« bon nombre » de vecteurs.)*

**c)** *(Déterminer la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.)*

On a $f(u) = A \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on obtient : $\begin{array}{l} f(u) = u \\ f(v) = u + v \\ f(w) = \phantom{u+{}} v + w. \end{array}$

$f(v) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$f(w) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

La matrice qui représente $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

**d)** *(En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.)*

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'endomorphisme $f$ est représenté par la matrice $T$.

Posons $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

On a alors la relation : $A \cdot P = P \cdot T$, soit : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$, ou : $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

**9.** Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**a)** *(Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.*
*En déduire que $N$ est de la forme : $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, où $a, b, c$ sont trois réels.)*

- **Si $N^2 = T$, alors $NT = TN$** Soit $N$ telle que $N^2 = T$.
  Alors, on a bien : $N \cdot T = N \cdot (N^2) = N^3 = (N^2) \cdot N = T \cdot N$.
- **Résolution de $NT = TN$** Posons $N = \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$. *(On rappelle que : $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)*
  Alors $N \cdot T = \begin{bmatrix} m & m+n & n+o \\ p & p+q & q+r \\ s & s+t & t+u \end{bmatrix}$ et $T \cdot N = \begin{bmatrix} m+p & n+q & o+r \\ p+s & q+t & r+u \\ s & t & u \end{bmatrix}$.
  On résout enfin : $\left[\ N \cdot T = T \cdot N\ \right] \iff \begin{cases} p = s = t = 0 \\ m = q = u \\ n = r. \end{cases}$
  Ainsi, une condition nécessaire est que $N$ s'écrive $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.
  On vérifie que c'est une condition suffisante. *(ie , qu'on a alors bien : $NT = TN$.)*

**b)** *(Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : $N_1$ et $N_2$.)*

On résout l'équation $N^2 = T$ pour $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

On a alors : $N^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

On résout pour avoir : $\left[\ N^2 = T\ \right] \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = \mp \frac{1}{8} \end{cases}$

Ainsi, on a trouvé deux solutions : $N_\pm = \pm \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**10.** *(Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de $P, P^{-1}, N_1$ et $N_2$.)*

- **Retour à l'équation précédente** On sait que : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$.

  On transforme l'équation : $$\begin{aligned} A = M^2 &\iff P \cdot T \cdot P^{-1} = M^2 \\ &\iff T = P^{-1} \cdot M^2 \cdot P \\ &\iff T = \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_{N} \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_{N} \\ &\iff T = N^2 \end{aligned}$$

- **Conclusion**

  En ayant posé, $N = P^{-1} \cdot M \cdot P$, la question précédente donne deux solutions : $N = N_1$ et $N = N_2$.

  Les deux solutions associées sont donc
  - $M_1 = P \cdot N_1 \cdot P^{-1}$
  - $M_2 = P \cdot N_2 \cdot P^{-1}$

*(et, comme $N_1$ et $N_2$, elles sont opposées : $M_1 + M_2 = 0$.)*

**11.** *(L'ensemble $E$ des matrices $M$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?)*

Non, puisque la matrice nulle $0 = M_1 + M_2$ n'appartient pas à l'espace des solutions.
En effet : $0^2 \neq A$.

# 2 Exercice 2

Dans tout l'exercice, $a$ est un réel strictement positif.

### Partie A

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

**1.** *(Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.)*

- **Limite pour $x \to 0^+$** On a, pour $x \to 0$, les limites :
  - $\ln(x) \to -\infty$
  - $x^{2a} \to 0$

  Ainsi : $\quad \lim\limits_{0^+} \varphi = -\infty$.
- **Limite pour $x \to +\infty$** On a, pour $x \to +\infty$, les limites :
  - $\ln(x) \to +\infty$
  - $x^{2a} \to +\infty$

  On a donc une forme indéterminée : « $+\infty - \infty$ ».
  Par croissances comparées, il vient : $\lim\limits_{+\infty} \varphi = -\infty$.

**2.** *(Étudier les variations de la fonction $\varphi$ et dresser son tableau de variations. On fera apparaître dans ce tableau le réel : $\quad x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.)*

- **Dérivation** La fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
  On trouve :
  $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ln(x) - ax^{2a} \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - 2a \cdot ax^{2a-1} = \frac{2a^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{2a^2} - x^{2a}\right) \end{aligned}.$$
- **Variations de $\varphi$**
- **Calcul du maximum**
  Le maximum de $\varphi$ sur $]0\,;+\infty[$ est donné par :
  $$\begin{aligned} M_a &= \max_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(x_0) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a \cdot \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1\right] \end{aligned}.$$

**3.** *(Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions $z_1$ et $z_2$, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ ? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ ?)*

- **Valeurs prises par $\varphi$**
  La fonction $\varphi$ est
  - continue sur $]0\,;+\infty[$,
  - strictement croissante sur $]0\,;x_0[$,
  - strictement décroissante sur $]x_0\,;+\infty[$,

  D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc deux bijections,
  - $\varphi : ]0\,;x_0[ \to \varphi\big(]0\,;x_0[\big) = ]\lim\limits_{0} \varphi\,;\varphi(x_0)[ = ]-\infty\,;M_a[$ *(où $M_a = \varphi(x_0)$)*
  - $\varphi : ]x_0\,;+\infty[ \to \varphi\big(]x_0\,;+\infty[\big) = ]\lim\limits_{+\infty} \varphi\,;\varphi(x_0)[ = ]-\infty\,;M_a[$

  Ainsi l'ensemble des valeurs prises est $]-\infty\,;M_a]$ et l'équation $\varphi(x) = m$ admet
  - si $m < M_a$ : exactement deux solutions $z_1$ et $z_2$, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$

- si $m = M_a$ : exactement une solution : c'est $x_0$
- si $m > M_a$ : aucune solution.

- **Valeur du maximum**
  On a : $M_a = \frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1 \right] = -\frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln(a) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}\right) \right]$.
- **Conclusion : nombre de solutions de $\varphi(x) = 0$**
  - **Cas où** $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ On a $M_a > 0$, et on a donc deux solutions
    - $z_1 \in \,]0\,;x_0[$
    - $z_2 \in \,]x_0\,;+\infty[$
  - **Cas où** $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ Alors $M_a = 0$, et la seule solution est $z = x_0$
  - **Cas où** $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ Alors $M_a < 0$, et il n'y a donc pas de solution.

### Partie B

Soit $f$ la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par : $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$.

**4.** *(Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.)*

Les fonctions
- $(x,y) \mapsto \ln(x)$
- $(x,y) \mapsto \ln(y)$
- $(x,y) \mapsto xy$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$. Ainsi, la fonction $f$ l'est aussi.

**5.** *(Calculer les dérivées partielles premières de $f$.)*

- **Dérivation par rapport à $x$**
  On trouve :
  $$\partial_1(f)(x,y) = \partial_1\Big(\ln(x)\ln(y) - (xy)^a\Big) = \frac{1}{x}\cdot\ln(y) - a\cdot x^{a-1}\cdot y^a = \frac{1}{x}\cdot[\ln(y) - a\cdot(xy)^a].$$
- **Dérivation par rapport à $y$**
  Par symétrie, il vient : $\partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{y}\cdot[\ln(x) - a\cdot(xy)^a]$.

**6.** *(Démontrer que pout tout $(x,y) \in U$ : $(x,y)$ est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$)*

On résout :
$$[\ (x,y) \text{ pt crit. de } f\ ] \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - a\cdot(xy)^a = 0 \\ \ln(x) - a\cdot(xy)^a = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - a\cdot(xy)^a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ \ln(y) - a\cdot(y^2)^a = 0 \end{cases}$$

On a donc bien trouvé les conditions : $\begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$

**7.** *(Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, la fonction $f$ admet exactement deux points critiques : $(z_1,z_1)$ et $(z_2,z_2)$, où $z_1$ et $z_2$ sont les réels définies dans la partie A. Déterminer aussi les eventuels points critiques de $f$ dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$.)*

- **Cas où** $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ Alors l'équation $\varphi(y) = 0$ a deux solutions $z_1$ et $z_2$.
  D'après l'autre équation : $x = y$, les deux points seuls critiques demandés
  - $(z_1, z_1)$
  - $(z_2, z_2)$.

- **Cas où** $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ Il n'y a lors qu'une seule solution : $\varphi(y) = 0$, c'est $y = x_0$.
  Il n'y a donc qu'un seul point critique : $(x_0, x_0)$
- **Cas où** $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ Il n'y a pas de solution à $\varphi(y) = 0$, donc pas de point critique.

## Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction $f$ admet exactement deux points critiques :

**8.** *(Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f$.)*

- **Dérivées doubles** On a 
$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \partial_1\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x}\cdot\ln(y) - a\cdot x^{a-1}\cdot y^a}_{\partial_1 f}\Big)\\ &= -\tfrac{1}{x^2}\cdot\ln(y) - a(a-1)\cdot x^{a-2}\cdot y^a\\ &= -\tfrac{1}{x^2}\cdot\big[\ln(y) - a(a-1)\cdot(xy)^a\big].\end{aligned}$$
  De même, on a : $\partial^2_{2,2} f(x,y) = -\frac{1}{y^2}\big[\ln(x) - a(a-1)\cdot(xy)^a\big]$.
- **Dérivées croisées** Par la propriéte de symétrie de Schwarz pour la fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$, il suffit de calculer : 
$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) &= \partial_2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x}\cdot\ln(y) - a\cdot x^{a-1}\cdot y^a}_{\partial_1 f}\Big)\\ &= \tfrac{1}{xy} - a^2\cdot x^{a-1}\cdot y^{a-1}.\end{aligned}$$

**9.** *(Calculer la matrice hessienne de $f$ au point $(z_1, z_1)$. Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : ...)*

On pose : $x = y = z_1$.

- **Dérivées doubles**
  Il vient : $\partial^2_{1,1} f(z_1,z_1) = -\frac{1}{z_1^2}\cdot\big[\overbrace{\ln(z_1)}^{=a{z_1}^{2a}} - a(a-1)\cdot({z_1}^2)^a\big] = \frac{1}{z_1^2}\cdot a^2{z_1}^{2a} = a^2{z_1}^{2a-2}$.
  De même : $\partial^2_{2,2} f(z_1,z_1) = a^2{z_1}^{2a-2}$.
- **Dérivées croisées** On trouve : $\partial^2_{1,2} f(z_1,z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$
- **Conclusion**
  On trouve la Hessienne demandée : $\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{bmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2}\end{bmatrix}$.

On pose $M = \nabla^2(f)(z_1,z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, et $X_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

**10.** *(Calculer $M\cdot X_1$ et $M\cdot X_2$, et en déduire les valeurs propres de $M$.)*

- **Calcul de $M\cdot X_1$**
  On trouve : $M\cdot X_1 = M\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-a^2z_1^{2a-2}+\frac{1}{z_1^2}-a^2z_1^{2a-2}\\ \frac{1}{z_1^2}-a^2z_1^{2a-2}+-a^2z_1^{2a-2}\end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2}\Big)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
- **Calcul de $M\cdot X_2$**
  On trouve : $M\cdot X_2 = M\cdot\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a^2z_1^{2a-2}+\frac{1}{z_1^2}-a^2z_1^{2a-2}\\ -\frac{1}{z_1^2}-a^2z_1^{2a-2}+-a^2z_1^{2a-2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2}\cdot\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
- **Conclusion sur les valeurs propres**
  On a vérifié que les vecteurs $X_1$ et $X_2$ sont propres, respectivement associés aux valeurs propres :
  - $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$
  - $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$

**11.** *(La fonction $f$ présente-t-elle un extremum local en $(z_1, z_1)$ ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)*

Les valeurs propres de la Hessienne en ce point sont ci-dessus.

- **Signe de $\lambda_2$** On a : $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2} < 0$
- **Signe de $\lambda_1$** On a : $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1}{z_1} \cdot \left[\frac{1}{z_1} - 2a^2 {z_1}^{2a-1}\right]$

  Avec la sagacité qui nous caractérise, on reconnaît : $\lambda_1 = \frac{1}{z_1} \cdot \varphi'(z_1)$

  Or $z_1 \in \left]0\,;x_0\right[$. donc, $\varphi'(z_1) > 0$. Ainsi $\lambda_1 > 0$.
- **Conclusion** Les deux valeurs propres de la Hessienne sont de signe opposé, donc ce point critique est un point selle.

**12.** *(La fonction $f$ présente-t-elle un extremum local en $(z_2, z_2)$ ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)*

Tout se passe comme en $(z_2, z_2)$, mais avec pour valeurs propres :

- **Signe de $\lambda_2$** On a : $\lambda_2 = -\frac{1}{z_2^2} < 0$
- **Signe de $\lambda_1$** On a : $\lambda_1 = \frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} = \frac{1}{z_2} \cdot \varphi'(z_2)$

  Or $z_2 \in \left]x_0\,;+\infty\right[$. donc, $\varphi'(z_2) < 0$. Ainsi $\lambda_1 < 0$.
- **Conclusion**

  Les deux valeurs propres de la Hessienne ont même signe : on a un extremum local.

  Comme elles sont $< 0$, c'est un maximum local.

# 3 Exercice 3

Soit $n$ un entier naturel non-nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$.
Pour tout entier $k$ non-nul, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel $k$ non-nul, on note $S_k$ la somme des numéros des boules obtenues lors des $k$ premiers tirages : $\quad S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.
On considère enfin la variable aléatoire $T_n$ égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieurs ou égale à $n$.
Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre ?????????? alors ..........

### Partie A

**1.** *(Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $X_k$, ainsi que son espérance.)*
La variable $X_k$ modélise le numéro de la boule tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Les valeurs possibles sont : $\quad X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Il y a équiprobabilité, donc $X_k$ est de loi uniforme : $\quad X_k \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1, n]\!]\Big)$.

**2.** **a)** *(Déteminer $T_n(\Omega)$.)*
La variable $T_n$ modélise le nombre de tirages nécessaires pour que le « score cumulé » $S_k$ atteigne $n$.
les tirages sont indépendants *(avec remise)*, et chacun apporte un score $X_k \in [\![1, n]\!]$.
Il faut donc entre 1 et $n$ tirages que le score cumulé atteigne $n$, soit : $\quad T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

**b)** *(Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.)*
On a l'égalité d'événements : $\quad [T_n = 1] = [S_1 = n] = [X_1 = n]$.
Ainsi : $\quad \mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}$. $\quad$ *(car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.)*

**c)** *(Montrer que : $\quad \mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.)*
On a l'égalité d'événements : $\quad [T_n = n] = [S_{n-1} < n] \cap \overbrace{[S_n \geqslant n]}^{\text{automatique}}$.
Pour que la somme $S_{n-1}$ soit $\leqslant n-1$, il faut que les $(n-1)$ termes soient tous égaux à 1, soit : $\quad [S_{n-1} < n] = \bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$.
Par indépendance : $\quad \mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]\right) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \overbrace{\mathbb{P}(X_k = 1)}^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

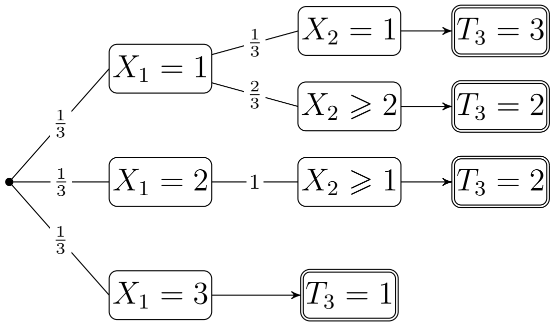
**3.** *(Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de $T_2$.)*
On a $n = 2$, donc : $\quad T_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
On vient de trouver la moitié de la loi : $\quad \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
Ainsi, on trouve toute la loi ci-contre.

| valeur $i$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| proba. $\mathbb{P}(T_2 = i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

**4.** *(Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de $T_3$. Vérifier que $\mathbb{E}[T_3] = \frac{16}{9}$.)*

On présente les tirages consécutifs par un arbre de probabilités.
On trouve en appliquant la formule des probabilités totales :

| valeur $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| proba. $\mathbb{P}(T_2 = i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |




## Partie B

**5.** *(Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.)*
Après $k$ tirages indépendants, tous à valeurs $[\![1, n]\!]$, on a : $k \leqslant S_k \leqslant k \cdot n$.
Ainsi, le score cumulé est un entier : $S_k(\Omega) = [\![k, k \cdot n]\!]$.

**6.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

**a)** *(Exprimer $S_{k+1}$ en fonction de $S_k$ et de $X_{k+1}$.)*
On a la relation de Chasles entre les sommes : $S_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i = \overbrace{\sum\limits_{i=1}^{k} X_i}^{S_k} + X_{k+1}$.

**b)** *(En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire $S_k$, démontrer alors que : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$.)*
On conditionne par la valeur de $S_k$. *(formule des probabilités totales)*
Il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{i \in S_k(\Omega)} \mathbb{P}\Big([S_{k+1} = i] \cap [S_k = j]\Big) \\ &= \sum_{i=k}^{k \cdot n} \mathbb{P}\Big([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]\Big) \\ &= \sum_{i=k}^{k \cdot n} \mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \cdot \mathbb{P}(S_k = j)\Big) \qquad \textit{(indépendance)}\end{aligned}$$
Or : $X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$,
donc, on a : $\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leqslant i - j \leqslant n \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{i - n}^{\leqslant 0} \leqslant j}_{\text{automatique}} \leqslant i - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
car on a fait l'hypothèse : $i \in [\![k+1, n]\!]$.
Ainsi, dans la somme, restent les termes non-nuls : $j \in S_k(\Omega)$ tels que $j \leqslant i - 1$.
Ces termes valent tous $\frac{1}{n}$, il reste donc bien : $\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$.

**7. a)** *(Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal entre $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.)*
On a : $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$.

**b)** *(En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $i \geqslant k+1$ : $\sum\limits_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$.)*
*(C'est la « **Hockey Stick Formula** »)* On utilise la formule de Pascal précédente.
On peut procéder par récurrence, mais le plus rapide est le télescopage :
On trouve alors : $\sum\limits_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum\limits_{j=k}^{i-1} \left[\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}\right] = \binom{i-1}{k} - \underbrace{\binom{k-1}{k}}_{0}$.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!] \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \text{ ».} \qquad (\mathcal{H}_k)$$

**c)** *(Démontrer par récurrence, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, que $\mathcal{H}_k$ est vraie.)*

- **Hypothèse de récurrence**
  Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on considère l'hypothèse de récurrence :
  $$\forall i \in [\![k,n]\!] \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \qquad (\mathcal{H}_k)$$
- **Initialisation** On a bien : $\quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(S_1 = i) = \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n} \quad (\mathcal{H}_k)$
  *(car $\binom{i-1}{k-1} = 1$)*
- **Hérédité** Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ un entier.
  On suppose $(\mathcal{H}_k)$ soit : $\forall i \in [\![k,n]\!] \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1}$
  D'après la question **6.b)**,
  $$\text{on a } \forall i \in [\![k+1,n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{n-1} \overbrace{\frac{1}{n^k} \cdot \binom{j-1}{k-1}}^{\mathbb{P}(S_k=j)}.$$
  $$= \frac{1}{n^{k+1}} \cdot \underbrace{\sum_{j=k}^{n-1} \binom{j-1}{k-1}}_{\text{q}^{\text{n}} \text{ préc.}}$$
  On trouve donc bien : $\quad \forall i \in [\![k+1,n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \cdot \binom{i-1}{k}. \qquad (\mathcal{H}_{k+1})$
- **Conclusion**
  On a montré que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est
  - initialisée
  - héréditaire

  On a donc bien : $\quad \forall k \in [\![1,n]\!], \ \forall i \in [\![k,n]\!] : \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \qquad (\mathcal{H}_k)$

**8. a)** *(Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Comparer les événements : $\quad [T_n > k] \quad$ et $\quad [S_k \leqslant n-1]$.)*

On a : $[T_n > k] =$ « le score cumulé n'a pas attaint $n$ aux tirages $[\![1,k]\!]$ »
$=$ « le score cumulé n'a pas atteint $n$ au $k^{\text{ème}}$ tirage »
$= [S_k < n] = [S_k \leqslant n-1]$.

**b)** *(En déduire que : $\quad \forall n \in [\![0,n-1]\!], \quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$.)*

On a donc : $\quad \mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(S_k \leqslant n-1) = \sum\limits_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i)$.

Calculons cette somme par l'expression de $\mathbb{P}(S_k = i)$ *(formule $\mathcal{H}_k$)* puis la formule de la crosse de hockey **7.a)**. Il vient : $\quad \sum\limits_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$.

Ainsi, on trouve bien : $\quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$.

**9.** *(Démontrer que $\mathbb{E}[T_n] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}[T_n] = (1 + \frac{1}{n})^{n-1}$.)*

- **Transformation d'Abel pour $\mathbb{E}[T_n]$**
  On développe l'espérance : $\quad \mathbb{E}[T_n] = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(T_n = k)$
  $$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \big[\mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k)\big]$$
  $$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(T_n > k)$$
  On procède sur la première somme au changement d'indice $i = k-1$.
  Il vient : $\quad \mathbb{E}[T_n] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > i) - \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(T_n > k)$

On met les deux sommes au même ensemble d'indice $[\![0,n]\!]$.

Il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot\mathbb{P}(T_n>k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\mathbb{P}(T_n>k)$

et : $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\cdot\mathbb{P}(T_n>i) &= \sum_{i=0}^{n}(i+1)\cdot\mathbb{P}(T_n>i)-(n+1)\cdot\underbrace{\mathbb{P}(T_n>n)}_{0\quad \text{car } T_n(\Omega)=[\![1,n]\!]}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\mathbb{P}(T_n>i).\end{aligned}$$

Enfin, on regroupe pour conclure : $$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_n] &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\mathbb{P}(T_n>k)-\sum_{k=0}^{n}k\cdot\mathbb{P}(T_n>k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{(k+1-k)}_{1}\cdot\mathbb{P}(T_n>k).\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu : $\displaystyle\mathbb{E}[T_n]=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T_n>k)$.

- **Calcul de l'espérance**

On remplace $\mathbb{P}(T_n>k)$, et on reconnaît la formule du binôme de Newton.

Ainsi : $$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_n]=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T_n>k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(T_n>k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-1-k}=(a+b)^{n-1}\end{aligned}$$

pour $a=\frac{1}{n}$ et $b=1$.

Ainsi, on a bien trouvé : $\mathbb{E}[T_n]=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

**10.** *(Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[T_n]$.*)*

On écrit la puissance comme une exponentielle pour lever l'indétermination.

Soit : $\mathbb{E}[T_n]=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\exp\left[(n-1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

On connaît l'équivalent quand $h\to0$ pour le logarithme : $\ln(1+h)\sim h$.

Ainsi, pour $n\to\infty$, avec $h=\frac{1}{n}\to0$, il vient : $(n-1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{n-1}{n}\to1$.

Par continuité de l'exponentielle : $\mathbb{E}[T_n]=\exp\Big[\underbrace{(n-1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to1}\Big]\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\exp(1)=\mathrm{e}$.

### Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier $n$ et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant1}$ obtenue.

**11.** Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $N^*$ telle que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(Y=k)=\frac{k-1}{k!}$.

**a)** *(Vérifier par le calcul que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k)=1$.*)*

Calculons les sommes partielles : $\displaystyle\Sigma_N=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)$.

Par sommation télescopique, il reste : $\displaystyle\Sigma_N=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)=\frac{1}{0!}-\underbrace{\frac{1}{N!}}_{\to0}$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k)=\lim_{N\to\infty}\Sigma_N=\frac{1}{0!}=1$.

**b)** *(Montrer que $Y$ admet une espérance et calculer cette espérance.)*

Sous réserve de convergence, on a : $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y = k)$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}$

On fait le changement d'indice $i = k - 2$, et on reconnaît une série exponentielle.

Ainsi, il y a convergence de la série, et : $\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = \mathrm{e}.$

**12.** *(Pour tout entier naturel $k$ non-nul, démontrer que : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$.)*

On développe : $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^k \cdot (n-1-k)!}$.

On étudie le produit : $\frac{(n-1)!}{n^k \cdot (n-1-k)!} = \frac{\overbrace{(n-1) \times \cdots \times (n-k)}^{k \text{ facteurs}}}{\underbrace{n^k}_{k \text{ facteurs}}} = \underbrace{\frac{n-1}{n} \times \ldots \times \frac{n-k}{n}}_{k \text{ facteurs}}$.

Chacun des facteurs tend vers 1 quand $n \to \infty$. Il y a $k$ facteurs *(et $k$ est fixé !)*.
Ainsi le produit tend vers 1. Il reste donc : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$.

**13.** *(Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire $Y$.)*

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n > k - 1) - \mathbb{P}(T_n > k)$.

On passe à la limite $n \to \infty$. Il vient :

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n = k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > k - 1) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} =.$

On réduit au même dénominateur, et il vient bien : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n = k) = \frac{k-1}{k!} = \mathbb{P}(Y = k)$.

Ainsi la suite $(T_n)$ convergence en loi vers *(la loi de)* $Y$.

On rappelle qu'en langage `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$.

**14.** *(Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre $n$ de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire $T_n$.)*

```
function y=T(n)
    S=.................
    y=.................
    while .............
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=.............
    end
endfunction
```

```
function y=T(n)
    S = 0
    y = 0
    while (S<n)
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = y + 1
    end
endfunction
```

**15.** On suppose déclarée la fonction précédente, et on écrit le script ci-dessous :

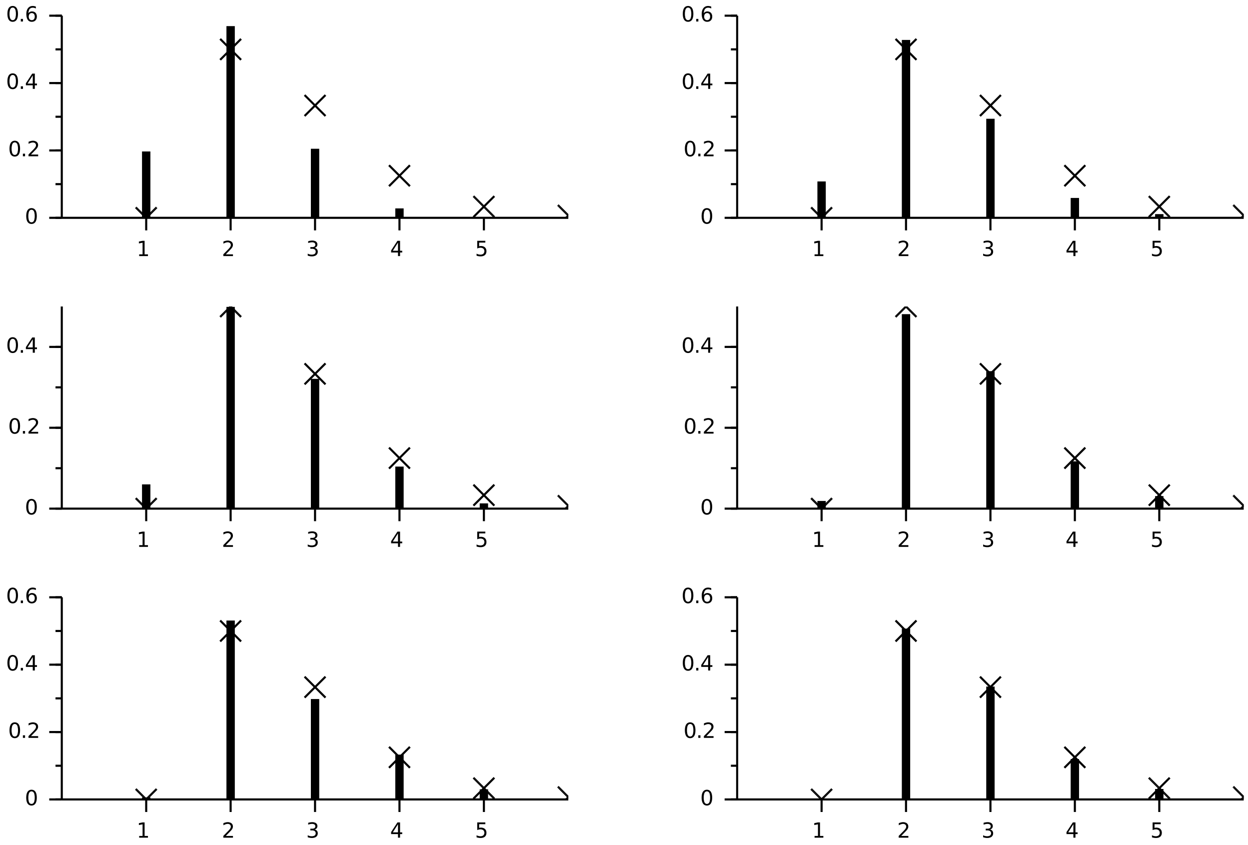
```
function y=freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i = 1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k) + 1
    end
    y = y / 100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k = 1:n
        y(k) = (k-1) / prod(1:k)
    end
endfunction

clf()
n = input('n = ?')
plot2d(loitheoY(6), style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de $n$ indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous.

*(de gauche à droite puis de haut en bas pour* `n = 5, 10, 20, 50, 100, 1000`*)*



**a)** *(Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions* `freqT` *et* `loitheoY`*. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?)*

- `freqT` renvoie les **fréquences empiriques**, mesurées en lançant un grand nombre de fois la fonction `T`, et en comptant.
  Les **fréquences empiriques** sont représentées par les **barres verticales grasses**.
- `loitheoY` renvoie les **probabilités théoriques de la loi limite**.
  C'est donc la suite : $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$.
  Les **probabilités théoriques** sont représentées par les **croix obliques**.

**b)** *(Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question* ***13.****)*
On observe le résultat attendu :

quand $n$ est **grand**,
les **fréquences empiriques** pour $T_n$
sont **proches**
des **probabilités théoriques** pour la loi limite $Y$.