Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. *(Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.)*

- **Limite pour $x \to 0^+$** On a, pour $x \to 0$, les limites :
  - $\ln(x) \to -\infty$
  - $x^{2a} \to 0$

  Ainsi : $\quad \lim\limits_{0^+} \varphi = -\infty$.
- **Limite pour $x \to +\infty$** On a, pour $x \to +\infty$, les limites :
  - $\ln(x) \to +\infty$
  - $x^{2a} \to +\infty$

  On a donc une forme indéterminée : « $+\infty - \infty$ ».
  Par croissances comparées, il vient : $\lim\limits_{+\infty} \varphi = -\infty$.

2. *(Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel : $\quad x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.)*

- **Dérivation** La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
  On trouve :
  $$\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$$
  $$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a \cdot ax^{2a-1} = \frac{2a^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{2a^2} - x^{2a}\right)$$
- **Variations de φ**
- **Calcul du maximum**
  Le maximum de φ sur $]0\,;+\infty[$ est donné par :
  $$\begin{aligned} M_a &= \max_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(x_0) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a \cdot \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

3. *(Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$?)*

- **Valeurs prises par φ**
  La fonction φ est
  - continue sur $]0\,;+\infty[$,
  - strictement croissante sur $]0\,;x_0[$,
  - strictement décroissante sur $]x_0\,;+\infty[$,

  D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc deux bijections,
  - $\varphi :]0\,;x_0[\to \varphi\Big(]0\,;x_0[\Big) =]\lim\limits_{0} \varphi\,;\varphi(x_0)[=]-\infty\,;M_a[$ *(où $M_a = \varphi(x_0)$)*
  - $\varphi :]x_0\,;+\infty[\to \varphi\Big(]x_0\,;+\infty[\Big) =]\lim\limits_{+\infty} \varphi\,;\varphi(x_0)[=]-\infty\,;M_a[$

  Ainsi l'ensemble des valeurs prises est $]-\infty\,;M_a]$ et l'équation $\varphi(x) = m$ admet
  - si $m < M_a$: exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$
  - si $m = M_a$: exactement une solution : c'est x_0
  - si $m > M_a$: aucune solution.

- **Valeur du maximum**
  On a : $M_a = \frac{1}{2a} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1 \right] = -\frac{1}{2a} \cdot \left[\ln(a) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}\right) \right]$.
- **Conclusion : nombre de solutions de $\varphi(x) = 0$**
  - **Cas où $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** On a $M_a > 0$, et on a donc deux solutions
    - $z_1 \in \,]0\,;x_0[$
    - $z_2 \in \,]x_0\,;+\infty[$
  - **Cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** Alors $M_a = 0$, et la seule solution est $z = x_0$
  - **Cas où $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** Alors $M_a < 0$, et il n'y a donc pas de solution.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par : $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$.

4. *(Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.)*

Les fonctions
- $(x,y) \mapsto \ln(x)$
- $(x,y) \mapsto \ln(y)$
- $(x,y) \mapsto xy$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Ainsi, la fonction f l'est aussi.

5. *(Calculer les dérivées partielles premières de f.)*

- **Dérivation par rapport à x**
  On trouve :
$$\begin{aligned}\partial_1(f)(x,y) &= \partial_1\Big(\ln(x)\ln(y) - (xy)^a\Big) \\ &= \tfrac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a = \tfrac{1}{x} \cdot [\ln(y) - a \cdot (xy)^a]\end{aligned}.$$
- **Dérivation par rapport à y**
  Par symétrie, il vient : $\partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{y} \cdot [\ln(x) - a \cdot (xy)^a]$.

6. *(Démontrer que pout tout $(x,y) \in U$: (x,y) est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$)*

On résout :
$$[\ (x,y) \text{ pt crit. de } f\ ] \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - a \cdot (xy)^a = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ \ln(y) - a \cdot (y^2)^a = 0 \end{cases}$$

On a donc bien trouvé les conditions : $\begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$

7. *(Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définies dans la partie A. Déterminer aussi les eventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$.)*

- **Cas où $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** Alors l'équation $\varphi(y) = 0$ a deux solutions z_1 et z_2.
  D'après l'autre équation : $x = y$, les deux points seuls critiques demandés
  - (z_1, z_1)
  - (z_2, z_2).
- **Cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** Il n'y a lors qu'une seule solution : $\varphi(y) = 0$, c'est $y = x_0$.
  Il n'y a donc qu'un seul point critique : (x_0, x_0)
- **Cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$** Il n'y a pas de solution à $\varphi(y) = 0$, donc pas de point critique.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques :

8. *(Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.)*

- **Dérivées doubles** On a $\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial_1 \Big(\underbrace{\tfrac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a}_{\partial_1 f} \Big)$

$$= -\tfrac{1}{x^2} \cdot \ln(y) - a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^a$$
$$= -\tfrac{1}{x^2} \cdot \big[\ln(y) - a(a-1) \cdot (xy)^a \big].$$

De même, on a : $\partial^2_{2,2} f(x,y) = -\frac{1}{y^2} \big[\ln(x) - a(a-1) \cdot (xy)^a \big]$.

- **Dérivées croisées** Par la propriéte de symétrie de Schwarz pour la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, il suffit de calculer : $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial_2 \Big(\underbrace{\tfrac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a}_{\partial_1 f} \Big)$

$$= \tfrac{1}{xy} - a^2 \cdot x^{a-1} \cdot y^{a-1}.$$

9. *(Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : ...)*

On pose : $x = y = z_1$.

- **Dérivées doubles**

Il vient : $\partial^2_{1,1} f(z_1, z_1) = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \big[\overbrace{\ln(z_1)}^{= a {z_1}^{2a}} - a(a-1) \cdot ({z_1}^2)^a \big] = \frac{1}{z_1^2} \cdot a^2 {z_1}^{2a} = a^2 {z_1}^{2a-2}$.

De même : $\partial^2_{2,2} f(z_1, z_1) = a^2 {z_1}^{2a-2}$.

- **Dérivées croisées** On trouve : $\partial^2_{1,2} f(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$

- **Conclusion**

On trouve la Hessienne demandée : $\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{bmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{bmatrix}$.

On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. *(Calculer $M \cdot X_1$ et $M \cdot X_2$, et en déduire les valeurs propres de M.)*

- **Calcul de $M \cdot X_1$**

On trouve : $M \cdot X_1 = M \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} + -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \Big) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$.

- **Calcul de $M \cdot X_2$**

On trouve : $M \cdot X_2 = M \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ -\frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} + -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$.

- **Conclusion sur les valeurs propres**

On a vérifié que les vecteurs X_1 et X_2 sont propres, respectivement associés aux valeurs propres :
  - $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$
  - $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$

11. *(La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)*

Les valeurs propres de la Hessienne en ce point sont ci-dessus.

- **Signe de λ_2** On a : $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2} < 0$

- **Signe de λ_1** On a : $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1}{z_1} \cdot \left[\frac{1}{z_1} - 2a^2 {z_1}^{2a-1}\right]$

  Avec la sagacité qui nous caractérise, on reconnaît : $\lambda_1 = \frac{1}{z_1} \cdot \varphi'(z_1)$

  Or $z_1 \in \,]0\,;x_0[$. donc, $\varphi'(z_1) > 0$. Ainsi $\lambda_1 > 0$.

- **Conclusion** Les deux valeurs propres de la Hessienne sont de signe opposé, donc ce point critique est un point selle.

12. *(La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?*
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)

Tout se passe comme en (z_2, z_2), mais avec pour valeurs propres :

- **Signe de λ_2** On a : $\lambda_2 = -\frac{1}{z_2^2} < 0$
- **Signe de λ_1** On a : $\lambda_1 = \frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} = \frac{1}{z_2} \cdot \varphi'(z_2)$

  Or $z_2 \in \,]x_0\,;+\infty[$. donc, $\varphi'(z_2) < 0$. Ainsi $\lambda_1 < 0$.

- **Conclusion**

  Les deux valeurs propres de la Hessienne ont même signe : on a un extremum local.

  Comme elles sont < 0, c'est un maximum local.