

# Ecririme 2017 ECE

## Correction par C. BOUNYA

### 1 Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et  $I$  la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice  $A$  définie par :  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$ .

#### Partie A : Étude de la matrice $A$

1. (Calculer les matrices  $(A - I)^2$  et  $(A - I)^3$ .)

► **Calcul de  $(A - I)$**  On a :  $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

► **Calcul de  $(A - I)^2$**  On trouve :  $(A - I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

► **Calcul de  $(A - I)^3$**  On trouve alors  $(A - I)^3 = 0$ .

2. (En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .)

► **Restriction des valeurs propres**

On a vu :  $(A - I)^3 = 0$ . Le polynôme  $\Pi(X) = (X - 1)^3$  est donc annulateur de  $A$ .

Les seules valeurs propres possibles pour  $A$  sont donc les racines de ce polynôme.

Or la seule racine de  $\Pi$  est 1.

La seule valeur propre possible de  $A$  est donc 1.

► **Vérification pour  $\lambda = 1$**  On a :  $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

Cette matrice est de rang = 2 (deux premiers vecteurs colonnes opposés).

Ainsi :  $\dim(\text{Ker}(A - I)) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_3 - \underbrace{\text{rg}(A)}_2 = 1$ .

On a :  $\text{Ker}(A - I) \neq \{\vec{0}\}$ , donc 1 est bien valeur propre de  $A$ .

► **Conclusion** L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est :  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ .

3. (La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?)

► **Inversibilité (oui)** Le réel 0 n'est pas valeur propre de  $A$ , donc  $A$  est inversible.

► **Diagonalisabilité (non)** La matrice  $A$  n'a qu'une valeur propre, c'est 1.

Ainsi :  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(\text{Ker}(A - I)) = 1 \neq 3$ .

La somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas le nombre de colonnes : la matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

**Partie B : Recherche d'une solution particulière**

On note, pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$ .

4. (Justifier que la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]-1; 1[$  et déterminer les valeurs de  $\varphi'(0)$  et  $\varphi''(0)$ .)

► **Caractère  $\mathcal{C}^\infty$**

La fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est une fonction de référence de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

On compose par  $x \mapsto 1+x$ , qui est affine donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-1; 1[$ , et à valeurs  $> 0$ .

Ainsi, par composition  $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-1; 1[$ .

En particulier, elle est de classe  $\mathcal{C}^2_{>0}$ .

► **Dérivation**

On dérive, en remarquant que  $(1+x)' = 1$

On a  $\forall x \in ]-1; 1[$  l'expression :  $\varphi(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$\text{d'où : } \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{enfin : } \varphi''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

5. (En utilisant la formule de Taylor-Young pour  $\varphi$  en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel  $\alpha$  non-nul tel que :  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ .)

► **Énoncé de la formule de Taylor-Young**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $x_0$ , alors, pour  $x \rightarrow x_0$ , on a :  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ .

► **Application** Ici, on a trouvé :

►  $\varphi(0) = 1$

►  $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$

►  $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$

Il vient donc :  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^2 + o(x^2)$ .

C'est la formule demandée avec  $\alpha = -\frac{1}{8}$ . (et  $\alpha$  est bien non-nul!)

On note :  $P(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2$  la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.

6. (Développer  $(P(x))^2$ .)

$$\begin{aligned} \text{On développe : } (P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right] \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot x^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot x^4 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{64} \cdot x^4. \end{aligned}$$

Soit  $C = A - I$ .

7. (En utilisant les résultats de la question 1., vérifier que  $(P(C))^2 = A$ .

Expliciter alors une matrice  $M$  telle que  $M^2 = A$ .)

► **Rappel de la question 1.** On a trouvé  $(A - I)^3 = C^3 = 0$ , d'où aussi  $C^4 = 0$ .

► **Calcul de  $P(C)$**

Ces deux puissances s'annulent dans l'expression de la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } (P(C))^2 &= I + C - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{C^3}_0 + \frac{1}{64} \cdot \underbrace{C^4}_0 \\ &= I + C \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien  $(P(C))^2 = I + C = A$ .

► **Explicitation d'une solution à  $M^2 = A$**

On vient de trouver pour solution à cette équation :  $M = P(C)$

C'est-à-dire :  $M = I + \frac{1}{2} \cdot C - \frac{1}{8} \cdot C^2$ .

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous calculs effectués, on trouve :  $M = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ . (et on vérifie  $M^2 = A$ .)

**Partie C : Résolution complète de l'équation**

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $A$ .

Dans cette partie, on pose :  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. Soient  $u, v, w$  les vecteurs définis par : 
$$\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$$

a) (Calculer les vecteurs  $v$  et  $u$ .)

► **Interprétation de  $f$**

Pour  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a : ►  $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ -3x + 3y + z \end{pmatrix}$

$$\text{► } f(\vec{X}) - \vec{X} = \underbrace{C}_{A-I} \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ -x + y + 2z \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$$

► **Application** ► On a  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Ainsi : } v = f(w) - w = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 2 \\ -1 + 0 + 2 \\ -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{► De même : } u = f(v) - v = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) (Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .)

► **La famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est libre ?**

Cherchons les relations de dépendance linéaire satisfaites par cette famille  $\mathcal{B}'$ .

$$\begin{aligned} \text{On résout : } [a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = \vec{0}] &\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad (L_1 - L_2) \end{aligned}$$

Ce système est triangulaire, avec des coefficients diagonaux non-nuls. (3 pivots)

La seule solution est donc  $a = b = c = 0$ .

Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire est triviale.

La famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est donc libre.

► **Conclusion : « c'est une base »**

La famille  $\mathcal{B}'$  est libre de trois vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

Il s'agit donc d'une base de  $\mathbb{R}^3$ . (« bon nombre » de vecteurs.)

c) (Déterminer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .)

$$\begin{aligned} \text{On a } f(u) &= A \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi, on obtient : } & f(u) &= u \\ & f(v) &= u + v \\ & f(w) &= v + w. \\ f(v) &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f(w) &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \text{La matrice qui représente } f &\text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ est donc : } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= T. \end{aligned}$$

d) (En déduire qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible telle que  $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .)

Dans la base  $\mathcal{B}'$ , l'endomorphisme  $f$  est représenté par la matrice  $T$ .

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de la famille } \mathcal{B}' = (u, v, w).$$

$$\text{On a alors la relation : } A \cdot P = P \cdot T, \quad \text{soit : } A = P \cdot T \cdot P^{-1}, \quad \text{ou : } T = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

9. Soit  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

a) (Montrer que si  $N^2 = T$ , alors  $NT = TN$ .)

$$\text{En déduire que } N \text{ est de la forme : } N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{où } a, b, c \text{ sont trois réels.})$$

► Si  $N^2 = T$ , alors  $NT = TN$  Soit  $N$  telle que  $N^2 = T$ .

$$\text{Alors, on a bien : } N \cdot T = N \cdot (N^2) = N^3 = (N^2) \cdot N = T \cdot N.$$

► **Résolution de  $NT = TN$**  Posons  $N = \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$ . (On rappelle que :  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .)

$$\text{Alors } N \cdot T = \begin{bmatrix} m & m+n & n+o \\ p & p+q & q+r \\ s & s+t & t+u \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T \cdot N = \begin{bmatrix} m+p & n+q & o+r \\ p+s & q+t & r+u \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

$$\text{On résout enfin : } [N \cdot T = T \cdot N] \iff \begin{cases} p = s = t = 0 \\ m = q = u \\ n = r. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, une condition nécessaire est que } N \text{ s'écrive } N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

$$\text{On vérifie que c'est une condition suffisante. (ie, qu'on a alors bien : } NT = TN.)$$

b) (Démontrer alors que l'équation matricielle  $N^2 = T$  admet exactement deux solutions :  $N_1$  et  $N_2$ .)

$$\text{On résout l'équation } N^2 = T \text{ pour } N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \text{ On a alors : } N^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{On résout pour avoir : } [N^2 = T] \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = \mp \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, on a trouvé deux solutions : } N_{\pm} = \pm \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. (Montrer que l'équation matricielle  $M^2 = A$ , d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de  $P, P^{-1}, N_1$  et  $N_2$ .)

► **Retour à l'équation précédente** On sait que :  $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$ .

$$\text{On transforme l'équation : } A = M^2 \iff P \cdot T \cdot P^{-1} = M^2$$

$$\iff T = P^{-1} \cdot M^2 \cdot P$$

$$\iff T = \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_N \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_N$$

$$\iff T = N^2$$

► **Conclusion**

En ayant posé,  $N = P^{-1} \cdot M \cdot P$ , la question précédente donne deux solutions :  $N = N_1$  et  $N = N_2$ .

Les deux solutions associées sont donc ►  $M_1 = P \cdot N_1 \cdot P^{-1}$

►  $M_2 = P \cdot N_2 \cdot P^{-1}$

(et, comme  $N_1$  et  $N_2$ , elles sont opposées :  $M_1 + M_2 = 0$ .)

**11.** (L'ensemble  $E$  des matrices  $M$  appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$  est-il un espace vectoriel ?)

Un sous-espace vectoriel est un ensemble  $F$  qui vérifie :

►  $F$  est non-vide (et on doit en particulier avoir :  $\vec{0} \in F$ .)

►  $F$  est stable par combinaison linéaire

L'ensemble  $E$  des solutions de l'équation  $M^2 = A$  est bien non-vide (car, par exemple,  $M_1 \in E$ .)

Mais, en revanche :  $0 \notin E$ , car :  $0^2 \neq A$ .

Remarquons aussi que  $E$  n'est pas stable par combinaison linéaire.

En effet : ►  $M_1 \in E$ ,

►  $M_2 \in E$ ,

► mais  $M_1 + M_2 = 0 \notin E$ !

Ainsi l'ensemble  $E$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

## 2 Exercice 2

Dans tout l'exercice,  $a$  est un réel strictement positif.

### Partie A

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$ .

1. (Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ .)

- **Limite pour  $x \rightarrow 0^+$**  On a, pour  $x \rightarrow 0$ , les limites :  
 ►  $\ln(x) \rightarrow -\infty$   
 ►  $x^{2a} \rightarrow 0$

Ainsi :  $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$ .

- **Limite pour  $x \rightarrow +\infty$**  On a, pour  $x \rightarrow +\infty$ , les limites :  
 ►  $\ln(x) \rightarrow +\infty$   
 ►  $x^{2a} \rightarrow +\infty$

On a donc une forme indéterminée : «  $+\infty - \infty$  ».

Par croissances comparées, il vient :  $\lim_{+\infty} \varphi = -\infty$ .

2. (Étudier les variations de la fonction  $\varphi$  et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel :  $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$ .)

- **Dérivation** La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On trouve :  $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$   
 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a \cdot ax^{2a-1} = \frac{2a^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{2a^2} - x^{2a}\right)$

- **Variations de  $\varphi$**

On trouve le tableau de variations :

- **Calcul du maximum**

Le maximum de  $\varphi$  sur  $]0; +\infty[$  est donné par :

$$\begin{aligned} M_a &= \max_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(x_0) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a \cdot \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

$x$	0	$x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$	$+\infty$
$\frac{1}{2a^2} - x^{2a}$		+	−
$\varphi'(x)$		+	−
$\varphi(x)$	$-\infty$	$M_a = \varphi(x_0)$	$-\infty$

3. (Démontrer que si  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ , l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ , vérifiant  $z_1 < x_0 < z_2$ .

Que se passe-t-il si  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  ? Si  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$  ?)

- **Valeurs prises par  $\varphi$**

La fonction  $\varphi$  est  
 ► continue sur  $]0; +\infty[$ ,  
 ► strictement croissante sur  $]0; x_0[$ ,  
 ► strictement décroissante sur  $]x_0; +\infty[$ ,

D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc deux bijections,

- $\varphi : ]0; x_0[ \rightarrow \varphi(]0; x_0[) = ]\lim_0 \varphi; \varphi(x_0)[ = ]-\infty; M_a[$  (où  $M_a = \varphi(x_0)$ )  
 ►  $\varphi : ]x_0; +\infty[ \rightarrow \varphi(]x_0; +\infty[) = ]\lim_{+\infty} \varphi; \varphi(x_0)[ = ]-\infty; M_a[$

Ainsi l'ensemble des valeurs prises est  $]-\infty; M_a]$  et l'équation  $\varphi(x) = m$  admet

- ▶ si  $m < M_a$  : exactement deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ , vérifiant  $z_1 < x_0 < z_2$
- ▶ si  $m = M_a$  : exactement une solution : c'est  $x_0$
- ▶ si  $m > M_a$  : aucune solution.

▶ **Signe du maximum**

$$\text{On a : } M_a = \frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1 \right] = -\frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln(a) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}\right) \right].$$

Ainsi,  $M_a$  est du signe de :  $a - \sqrt{\frac{1}{2e}}$ .

▶ **Conclusion : nombre de solutions de  $\varphi(x) = 0$**

- ▶ **Cas où  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  On a  $M_a > 0$ , et on a donc deux solutions
  - ▶  $z_1 \in ]0; x_0[$
  - ▶  $z_2 \in ]x_0; +\infty[$
- ▶ **Cas où  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  Alors  $M_a = 0$ , et la seule solution est  $z = x_0$
- ▶ **Cas où  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  Alors  $M_a < 0$ , et il n'y a donc pas de solution.

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ouvert  $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$  par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a.$$

4. (Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .)

Les fonctions ▶  $(x, y) \mapsto \ln(x)$  (usuelle à une variable) sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

- ▶  $(x, y) \mapsto \ln(y)$  (usuelle à une variable)
- ▶  $(x, y) \mapsto xy$  (polynomiale)

Ainsi, par opérations usuelles, la fonction  $f$  l'est aussi.

5. (Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ .)

▶ **Dérivation par rapport à  $x$**

$$\begin{aligned} \text{On trouve : } \partial_1(f)(x, y) &= \partial_1(\ln(x) \ln(y) - (xy)^a) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a = \frac{1}{x} \cdot [\ln(y) - a \cdot (xy)^a] \end{aligned}$$

▶ **Dérivation par rapport à  $y$**

$$\text{Par symétrie, il vient : } \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{y} \cdot [\ln(x) - a \cdot (xy)^a].$$

6. (Démontrer que pour tout  $(x, y) \in U$  :  $(x, y)$  est un point critique de  $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$ )

$$\begin{aligned} \text{On résout : } [(x, y) \text{ pt crit. de } f] &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - a \cdot (xy)^a = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ \ln(y) - a \cdot (y^2)^a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc bien trouvé les conditions : } \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$$

7. (Démontrer que si  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ , la fonction  $f$  admet exactement deux points critiques :  $(z_1, z_1)$  et  $(z_2, z_2)$ , où  $z_1$  et  $z_2$  sont les réels définies dans la partie A. Déterminer aussi les éventuels points critiques de  $f$  dans les cas où  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  et  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$ .)

- ▶ **Cas où**  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Alors l'équation  $\varphi(y) = 0$  a deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ .  
D'après l'autre équation :  $x = y$ , les deux points seuls critiques demandés
  - ▶  $(z_1, z_1)$
  - ▶  $(z_2, z_2)$ .
- ▶ **Cas où**  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Il n'y a lors qu'une seule solution :  $\varphi(y) = 0$ , c'est  $y = x_0$ .  
Il n'y a donc qu'un seul point critique :  $(x_0, x_0)$
- ▶ **Cas où**  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Il n'y a pas de solution à  $\varphi(y) = 0$ , donc pas de point critique.

## Partie C

Dans cette partie, on suppose que  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ . On rappelle alors que la fonction  $f$  admet exactement deux points critiques :

8. (Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction  $f$ .)

▶ **Dérivées doubles** On a  $\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \partial_1 \underbrace{\left( \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a \right)}_{\partial_1 f}$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(y) - a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^a$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot [\ln(y) - a(a-1) \cdot (xy)^a].$$

De même, on a :  $\partial_{2,2}^2 f(x, y) = -\frac{1}{y^2} [\ln(x) - a(a-1) \cdot (xy)^a].$

▶ **Dérivées croisées** Par la propriété de symétrie de Schwarz pour la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , il suffit de calculer :  $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = \partial_2 \underbrace{\left( \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a \right)}_{\partial_1 f}$

$$= \frac{1}{xy} - a^2 \cdot x^{a-1} \cdot y^{a-1}.$$

9. (Calculer la matrice hessienne de  $f$  au point  $(z_1, z_1)$ . Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : ...)

On pose :  $x = y = z_1$ .

▶ **Dérivées doubles**

Il vient :  $\partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \left[ \overbrace{\ln(z_1)}^{=a z_1^{2a}} - a(a-1) \cdot (z_1^2)^a \right] = \frac{1}{z_1^2} \cdot a^2 z_1^{2a} = a^2 z_1^{2a-2}.$

De même :  $\partial_{2,2}^2 f(z_1, z_1) = a^2 z_1^{2a-2}.$

▶ **Dérivées croisées** On trouve :  $\partial_{1,2}^2 f(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$

▶ **Conclusion**

On trouve la Hessienne demandée :  $\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{bmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{bmatrix}.$

On pose  $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et  $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

10. (Calculer  $M \cdot X_1$  et  $M \cdot X_2$ , et en déduire les valeurs propres de  $M$ .)

▶ **Calcul de  $M \cdot X_1$**

On trouve :  $M \cdot X_1 = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} - a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

▶ **Calcul de  $M \cdot X_2$**

On trouve :  $M \cdot X_2 = M \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ -\frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} + a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$



► **Conclusion sur les valeurs propres**

On a vérifié que les vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  sont propres, respectivement associés aux valeurs propres :

►  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$

►  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$

**11.** (La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local en  $(z_1, z_1)$  ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)

Les valeurs propres de la Hessienne en ce point sont ci-dessus.

► **Signe de  $\lambda_2$**  On a :  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2} < 0$

► **Signe de  $\lambda_1$**  On a :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1}{z_1} \cdot \left[ \frac{1}{z_1} - 2a^2 z_1^{2a-1} \right]$

Avec la sagacité qui nous caractérise, on reconnaît :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1} \cdot \varphi'(z_1)$

Or  $z_1 \in ]0; x_0[$ . donc,  $\varphi'(z_1) > 0$ . Ainsi  $\lambda_1 > 0$ .

► **Conclusion** Les deux valeurs propres de la Hessienne sont de signe opposé, donc ce point critique est un point selle.

**12.** (La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local en  $(z_2, z_2)$  ?

Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)

Tout se passe comme en  $(z_2, z_2)$ , mais avec pour valeurs propres :

► **Signe de  $\lambda_2$**  On a :  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_2^2} < 0$

► **Signe de  $\lambda_1$**  On a :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} = \frac{1}{z_2} \cdot \varphi'(z_2)$

Or  $z_2 \in ]x_0; +\infty[$ . donc,  $\varphi'(z_2) < 0$ . Ainsi  $\lambda_1 < 0$ .

► **Conclusion**

Les deux valeurs propres de la Hessienne ont même signe : on a un extremum local.

Comme elles sont  $< 0$ , c'est un maximum local.

### 3 Exercice 3

Soit  $n$  un entier naturel non-nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

Pour tout entier  $k$  non-nul, on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au  $k^{\text{ème}}$  tirage.

Pour tout entier naturel  $k$  non-nul, on note  $S_k$  la somme des numéros des boules obtenues lors des  $k$  premiers tirages :  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ .

On considère enfin la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieurs ou égale à  $n$ .  
Exemple : avec  $n = 10$ , si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre ?????????? alors .....

#### Partie A

1. (Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de  $X_k$ , ainsi que son espérance.)

► **Loi de  $X_k$**

La variable  $X_k$  modélise le numéro de la boule tirée au  $k^{\text{ème}}$  tirage.

Les valeurs possibles sont :  $X_k(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il y a équiprobabilité, donc  $X_k$  est de loi uniforme :  $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

► **Espérance** pour  $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , on a :  $\mathbb{E}[X_k] = \frac{n+1}{2}$ .

2. a) (Déterminer  $T_n(\Omega)$ .)

La variable  $T_n$  modélise le nombre de tirages nécessaires pour que le « score cumulé »  $S_k$  atteigne  $n$ .

les tirages sont indépendants (avec remise), et chacun apporte un score  $X_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il faut donc entre 1 et  $n$  tirages que le score cumulé atteigne  $n$ , soit :  $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

b) (Calculer  $\mathbb{P}(T_n = 1)$ .)

On a l'égalité d'événements :  $[T_n = 1] = [S_1 = n] = [X_1 = n]$ .

Ainsi :  $\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}$ . (car  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .)

c) (Montrer que :  $\mathbb{P}(T_n = n) = (\frac{1}{n})^{n-1}$ .)

On a l'égalité d'événements :  $[T_n = n] = [S_{n-1} < n] \cap \overbrace{[S_n \geq n]}^{\text{automatique}}$ .

Pour que la somme  $S_{n-1}$  soit  $\leq n-1$ , il faut que les  $(n-1)$  termes soient tous égaux à 1, soit :  $[S_{n-1} < n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$ .

Par indépendance :  $\mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \overbrace{\mathbb{P}(X_k = 1)}^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

3. (Dans cette question,  $n = 2$ . Déterminer la loi de  $T_2$ .)

On a  $n = 2$ , donc :  $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$ .

On vient de trouver la moitié de la loi :  $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$ .

Ainsi, on trouve toute la loi ci-contre.

	valeur $i$	1	2
proba. $\mathbb{P}(T_2 = i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

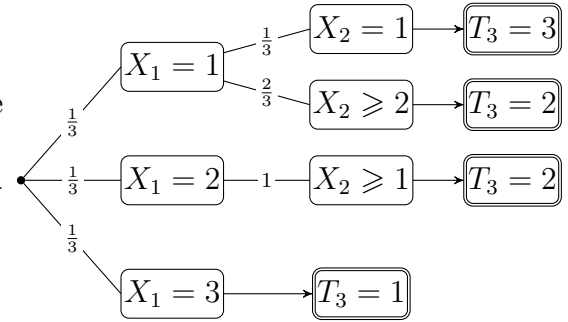
4. (Dans cette question,  $n = 3$ . Donner la loi de  $T_3$ . Vérifier que  $\mathbb{E}[T_3] = \frac{16}{9}$ .)

► **Détermination de la loi**

On présente les tirages consécutifs par un arbre de probabilités.

On trouve en appliquant la formule des probabilités totales :

valeur $i$	1	2	3
proba. $\mathbb{P}(T_3 = i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$



► **Calcul de l'espérance**

On a donc  $\mathbb{E}[T_3] = \sum_{i=1} i \cdot \mathbb{P}(T_3 = i) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$ .

## Partie B

5. (Déterminer  $S_k(\Omega)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .)

Après  $k$  tirages indépendants, tous à valeurs  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $k \leq S_k \leq k \cdot n$ .

Ainsi, le score cumulé est un entier :  $S_k(\Omega) = \llbracket k, k \cdot n \rrbracket$ .

6. Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

a) (Exprimer  $S_{k+1}$  en fonction de  $S_k$  et de  $X_{k+1}$ .)

On a la relation de Chasles entre les sommes :  $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^k X_i + X_{k+1}$ .

b) (En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire  $S_k$ , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

On conditionne par la valeur de  $S_k$ . (formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{i \in S_k(\Omega)} \mathbb{P}([S_{k+1} = i] \cap [S_k = j]) \\ &= \sum_{i=k}^{k \cdot n} \mathbb{P}([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]) \\ &= \sum_{i=k}^{k \cdot n} \mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \cdot \mathbb{P}(S_k = j) \quad (\text{indépendance}) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket),$$

$$\text{donc, on a : } \mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq i - j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{i - n \leq j \leq i - 1}_{\text{automatique}}$$

car on a fait l'hypothèse :  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ .

Ainsi, dans la somme, restent les termes non-nuls :  $j \in S_k(\Omega)$  tels que  $j \leq i - 1$ .

Ces termes valent tous  $\frac{1}{n}$ , il reste donc bien :  $\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$ .

7. a) (Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \mathbb{N}^*$ , rappeler la formule du triangle de Pascal entre  $\binom{j-1}{k-1}$ ,  $\binom{j-1}{k}$  et  $\binom{j}{k}$ .)

$$\text{On a : } \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

b) (En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier naturel  $i \geq k+1$  :  $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ .)

(C'est la « **Hockey Stick Formula** ») On utilise la formule de Pascal précédente.

On peut procéder par récurrence, mais le plus rapide est le télescopage :

$$\text{On trouve alors : } \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \left[ \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right] = \underbrace{\binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k}}_0.$$

Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{H}_k$  la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \gg. \quad (\mathcal{H}_k)$$

c) (Démontrer par récurrence, pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que  $\mathcal{H}_k$  est vraie.)

► **Hypothèse de récurrence**

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère l'hypothèse de récurrence :

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \quad (\mathcal{H}_k)$$

► **Initialisation** On a bien :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_1 = i) = \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n} \quad (\mathcal{H}_k)$   
(car  $\binom{i-1}{k-1} = 1$ )

► **Hérédité** Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  un entier.

On suppose  $(\mathcal{H}_k)$  soit :  $\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1}$

D'après la question 6.b),

$$\begin{aligned} \text{on a } \forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{n-1} \overbrace{\frac{1}{n^k} \cdot \binom{j-1}{k-1}}^{\mathbb{P}(S_k=j)} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \cdot \underbrace{\sum_{j=k}^{n-1} \binom{j-1}{k-1}}_{q^n \text{ préc.}} \end{aligned}$$

$$\text{On trouve donc bien : } \forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \cdot \binom{i-1}{k} \quad (\mathcal{H}_{k+1})$$

► **Conclusion**

On a montré que l'hypothèse de récurrence  $(\mathcal{H}_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est ► initialisée

► héréditaire

$$\text{On a donc bien : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket : \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \quad (\mathcal{H}_k)$$

8. a) (Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Comparer les événements :  $[T_n > k]$  et  $[S_k \leq n-1]$ .)

On a :  $[T_n > k] = \ll \text{le score cumulé n'a pas atteint } n \text{ aux tirages } \llbracket 1, k \rrbracket \gg$   
 $= \ll \text{le score cumulé n'a pas atteint } n \text{ au } k^{\text{ème}} \text{ tirage} \gg$   
 $= [S_k < n] = [S_k \leq n-1].$

b) (En déduire que :  $\forall n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$ .)

On a donc :  $\mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(S_k \leq n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i).$

Calculons cette somme par l'expression de  $\mathbb{P}(S_k = i)$  (formule  $\mathcal{H}_k$ ) puis la formule de la crosse de hockey 7.a). Il vient :  $\sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}.$

Ainsi, on trouve bien :  $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}.$

9. (Démontrer que  $\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n > k)$ , puis que  $\mathbb{E}[T_n] = (1 + \frac{1}{n})^{n-1}$ .)

► **Transformation d'Abel pour  $\mathbb{E}[T_n]$**

$$\begin{aligned} \text{On développe l'espérance : } \mathbb{E}[T_n] &= \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot [\mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k)] \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k) \end{aligned}$$

On procède sur la première somme au changement d'indice  $i = k - 1$ .

$$\text{Il vient : } \mathbb{E}[T_n] = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > i) - \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k)$$

On met les deux sommes au même ensemble d'indice  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\text{Il vient : } \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k)$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > i) &= \sum_{i=0}^n (i+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > i) - \underbrace{(n+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > n)}_{0 \text{ car } T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket} \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, on regroupe pour conclure : } \mathbb{E}[T_n] &= \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot \mathbb{P}(T_n > k) - \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{(k+1-k)}_1 \cdot \mathbb{P}(T_n > k). \end{aligned}$$

$$\text{On a ainsi obtenu : } \mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n > k).$$

#### ► Calcul de l'espérance

On remplace  $\mathbb{P}(T_n > k)$ , et on reconnaît la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \mathbb{E}[T_n] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-1-k} = (a+b)^{n-1} \end{aligned}$$

pour  $a = \frac{1}{n}$  et  $b = 1$ .

$$\text{Ainsi, on a bien trouvé : } \mathbb{E}[T_n] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

#### 10. (Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_n]$ .)

On écrit la puissance comme une exponentielle pour lever l'indétermination.

$$\text{Soit : } \mathbb{E}[T_n] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp \left[ (n-1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

On connaît l'équivalent quand  $h \rightarrow 0$  pour le logarithme :  $\ln(1+h) \sim h$ .

Ainsi, pour  $n \rightarrow \infty$ , avec  $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , il vient :  $(n-1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ .

$$\text{Par continuité de l'exponentielle : } \mathbb{E}[T_n] = \exp \left[ \underbrace{(n-1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(1) = e.$$

### Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier  $n$  et on étudie la convergence en loi de la suite de variables  $(T_n)_{n \geq 1}$  obtenue.

#### 11. Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$ .

a) (Vérifier par le calcul que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$ .)

$$\text{Calculons les sommes partielles : } \Sigma_N = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^N \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right).$$

$$\text{Par sommation télescopique, il reste : } \Sigma_N = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{0!} - \underbrace{\frac{1}{N!}}_{\rightarrow 0}.$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N = \frac{1}{0!} = 1.$$

b) (Montrer que  $Y$  admet une espérance et calculer cette espérance.)

$$\begin{aligned}\text{Sous réserve de convergence, on a : } \mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}\end{aligned}$$

On fait le changement d'indice  $i = k - 2$ , et on reconnaît une série exponentielle.

$$\text{Ainsi, il y a convergence de la série, et : } \mathbb{E}[Y] = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e.$$

12. (Pour tout entier naturel  $k$  non-nul, démontrer que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$ .)

$$\text{On développe : } \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^k \cdot (n-1-k)!}.$$

$$\text{On étudie le produit : } \frac{(n-1)!}{n^k \cdot (n-1-k)!} = \frac{\overbrace{(n-1) \times \cdots \times (n-k)}^{k \text{ facteurs}}}{\underbrace{n^k}_{k \text{ facteurs}}} = \underbrace{\frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k}{n}}_{k \text{ facteurs}}.$$

Chacun des facteurs tend vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$ . Il y a  $k$  facteurs (et  $k$  est fixé!).

$$\text{Ainsi le produit tend vers 1. Il reste donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

13. (Démontrer alors que  $(T_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable aléatoire  $Y$ .)

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on a : } \mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k).$$

On passe à la limite  $n \rightarrow \infty$ . Il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n > k-1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} =.$$

$$\text{On réduit au même dénominateur, et il vient bien : } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n = k) = \frac{k-1}{k!} = \mathbb{P}(Y = k).$$

Ainsi la suite  $(T_n)$  convergence en loi vers (la loi de)  $Y$ .

On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

14. (Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre  $n$  de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire  $T_n$ .)

```
1 function y=T(n)
2     S=.....
3     y=.....
4     while .....
5         tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
6         S=S+tirage
7         y=.....
8     end
9 endfunction
```

```
1 function y=T(n)
2     S = 0
3     y = 0
4     while (S<n)
5         tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
6         S = S + tirage
7         y = y + 1
8     end
9 endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente, et on écrit le script ci-dessous :

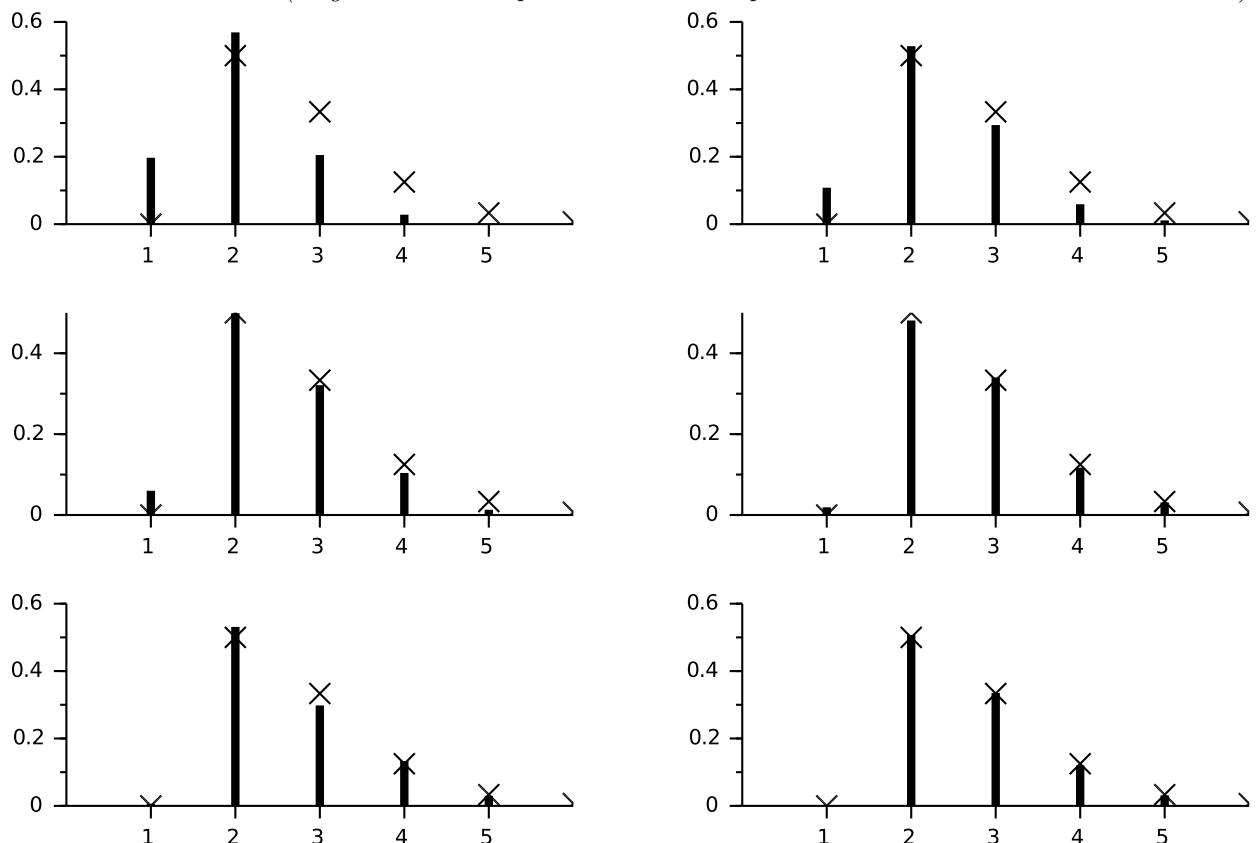
```

1 function y=freqT(n)
2     y = zeros(1,n)
3     for i = 1:100000
4         k = T(n)
5         y(k) = y(k) + 1
6     end
7     y = y / 100000
8 endfunction
9
10 function y=loitheoY(n)
11     y = zeros(1,n)
12     for k = 1:n
13         y(k) = (k-1) / prod(1:k)
14     end
15 endfunction
16
17 clf()
18 n = input('n = ?')
19 plot2d(loitheoY(6), style=-2)
20 x = freqT(n)
21 bar(x(1:5))

```

L'exécution de ce script pour les valeurs de  $n$  indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous.

(de gauche à droite puis de haut en bas pour  $n = 5, 10, 20, 50, 100, 1000$ )



- a) (*Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`.  
Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?*)

- `freqT` renvoie les **fréquences empiriques**, mesurées en lançant un grand nombre de fois la fonction `T`, et en comptant.

Les **fréquences empiriques** sont représentées par les **barres verticales grasses**.

- `loitheoY` renvoie les **probabilités théoriques de la loi limite**.

C'est donc la suite :  $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$ .

Les **probabilités théoriques** sont représentées par les **croix obliques**.

- b) (*Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question [13](#).)*

On observe le résultat attendu :

quand  $n$  est **grand**,  
les **fréquences empiriques** pour  $T_n$   
sont **proches**  
des **probabilités théoriques** pour la loi limite  $Y$ .