Ecricome 2017 ECE

1 Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non-nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

6. On note : $P(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.
Développer $\big(P(x)\big)^2$.

7. Soit $C = A - I$.
En utilisant les résultats de la question **1.**, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v, w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

- **a)** Calculer les vecteurs v et u.
- **b)** Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **c)** Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- **d)** En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.

En déduire que N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels.

b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

2 Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par : $\quad \forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$.

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pout tout $(x,y) \in U$: $\quad (x,y)$ est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définies dans la partie A.
Déterminer aussi les eventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2\,\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques :

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : $\quad \nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$.

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

3 Exercice 3

Soit n un entier naturel non-nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Pour tout entier k non-nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non-nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.
On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieurs ou égale à n.
Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre ?????????? alors ....

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k, ainsi que son espérance.

2. **a)** Déteminer $T_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.

c) Montrer que : $\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\right)\frac{1}{n}\Big)^{n-1}$.

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3.
Vérifier que $\mathbb{E}[T_3] = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$.

7. **a)** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$ et $\binom{j-1}{k}$ à $\binom{j}{k}$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $i \geqslant k+1$: $\sum\limits_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$.

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!] \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, que $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. **a)** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que : $\forall n \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}[T_n] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}[T_n] = \Big(1 + \frac{1}{n})^{n-1}$.

10. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}[T_n]$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans N^* telle que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y=k) = \frac{k-1}{k!}$.

  a) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1$.

  b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non-nul, démontrer que : $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$.

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

14. On rappelle qu'en langage `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1,n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n.

```
function y=T(n)
  S=...............
  y=...............
  while ...........
    tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
    S=S+tirage
    y=.............
  end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente, et on écrit le script ci-dessous :

```
function y=freqT(n)
  y=zeros(1,n)
  for i=1:100000
    k=T(n)
    y(k)=y(k)+1
  end
endfunction

function y=loitheoY(n)
  y=zeros(1,n)
  for k=1:n
    y(k)=(k-1)/prod(1:k)
  end
endfunction

clf()
n=input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous.

  a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question **13.**