

Dans tout l'exercice,  $a$  est un réel strictement positif.

## Partie A

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$ .

1. (Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ .)

- **Limite pour  $x \rightarrow 0^+$**  On a, pour  $x \rightarrow 0$ , les limites :  
 ►  $\ln(x) \rightarrow -\infty$   
 ►  $x^{2a} \rightarrow 0$

Ainsi :  $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$ .

- **Limite pour  $x \rightarrow +\infty$**  On a, pour  $x \rightarrow +\infty$ , les limites :  
 ►  $\ln(x) \rightarrow +\infty$   
 ►  $x^{2a} \rightarrow +\infty$

On a donc une forme indéterminée : «  $+\infty - \infty$  ».

Par croissances comparées, il vient :  $\lim_{+\infty} \varphi = -\infty$ .

2. (Étudier les variations de la fonction  $\varphi$  et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel :  $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$ .)

- **Dérivation** La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On trouve :  $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$   
 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a \cdot ax^{2a-1} = \frac{2a^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{2a^2} - x^{2a}\right)$

- **Variations de  $\varphi$**

On trouve le tableau de variations :

- **Calcul du maximum**

Le maximum de  $\varphi$  sur  $]0; +\infty[$  est donné par :

$$\begin{aligned} M_a &= \max_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(x_0) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a \cdot \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

$x$	0	$x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$	$+\infty$
$\frac{1}{2a^2} - x^{2a}$		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$	$-\infty$	$M_a = f(x_0)$	$-\infty$

3. (Démontrer que si  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ , l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ , vérifiant  $z_1 < x_0 < z_2$ .

Que se passe-t-il si  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  ? Si  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$  ?)

- **Valeurs prises par  $\varphi$**

La fonction  $\varphi$  est  
 ► continue sur  $]0; +\infty[$ ,  
 ► strictement croissante sur  $]0; x_0[$ ,  
 ► strictement décroissante sur  $]x_0; +\infty[$ ,

D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc deux bijections,

- $\varphi : ]0; x_0[ \rightarrow \varphi(]0; x_0[) = ]\lim_0 \varphi; \varphi(x_0)[ = ]-\infty; M_a[$  (où  $M_a = \varphi(x_0)$ )  
 ►  $\varphi : ]x_0; +\infty[ \rightarrow \varphi(]x_0; +\infty[) = ]\lim_{+\infty} \varphi; \varphi(x_0)[ = ]-\infty; M_a[$

Ainsi l'ensemble des valeurs prises est  $]-\infty; M_a]$  et l'équation  $\varphi(x) = m$  admet

- ▶ si  $m < M_a$  : exactement deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ , vérifiant  $z_1 < x_0 < z_2$
- ▶ si  $m = M_a$  : exactement une solution : c'est  $x_0$
- ▶ si  $m > M_a$  : aucune solution.
- ▶ **Signe du maximum**  
On a :  $M_a = \frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - 1 \right] = -\frac{1}{2a} \cdot \left[ \ln(a) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}\right) \right]$ .  
Ainsi,  $M_a$  est du signe de  $\sqrt{\frac{1}{2e}}$ .
- ▶ **Conclusion : nombre de solutions de  $\varphi(x) = 0$** 
  - ▶ **Cas où  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  On a  $M_a > 0$ , et on a donc deux solutions
    - ▶  $z_1 \in ]0; x_0[$
    - ▶  $z_2 \in ]x_0; +\infty[$
  - ▶ **Cas où  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  Alors  $M_a = 0$ , et la seule solution est  $z = x_0$
  - ▶ **Cas où  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$**  Alors  $M_a < 0$ , et il n'y a donc pas de solution.

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ouvert  $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$  par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a.$$

4. (Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .)

Les fonctions ▶  $(x, y) \mapsto \ln(x)$  (usuelle à une variable) sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

▶  $(x, y) \mapsto \ln(y)$  (usuelle à une variable)

▶  $(x, y) \mapsto xy$  (polynomiale)

Ainsi, par opérations usuelles, la fonction  $f$  l'est aussi.

5. (Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ .)

▶ **Dérivation par rapport à  $x$**

$$\begin{aligned} \text{On trouve : } \partial_1(f)(x, y) &= \partial_1(\ln(x) \ln(y) - (xy)^a) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a = \frac{1}{x} \cdot [\ln(y) - a \cdot (xy)^a] \end{aligned}$$

▶ **Dérivation par rapport à  $y$**

$$\text{Par symétrie, il vient : } \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{y} \cdot [\ln(x) - a \cdot (xy)^a].$$

6. (Démontrer que pour tout  $(x, y) \in U$  :  $(x, y)$  est un point critique de  $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$ )

$$\begin{aligned} \text{On résout : } [(x, y) \text{ pt crit. de } f] &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - a \cdot (xy)^a = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - a \cdot (xy)^a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ \ln(y) - a \cdot (y^2)^a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc bien trouvé les conditions : } \begin{cases} x = y, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases}$$

7. (Démontrer que si  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ , la fonction  $f$  admet exactement deux points critiques :  $(z_1, z_1)$  et  $(z_2, z_2)$ , où  $z_1$  et  $z_2$  sont les réels définies dans la partie A. Déterminer aussi les éventuels points critiques de  $f$  dans les cas où  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  et  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$ .)

- ▶ **Cas où**  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Alors l'équation  $\varphi(y) = 0$  a deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ .  
D'après l'autre équation :  $x = y$ , les deux points seuls critiques demandés
  - ▶  $(z_1, z_1)$
  - ▶  $(z_2, z_2)$ .
- ▶ **Cas où**  $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Il n'y a lors qu'une seule solution :  $\varphi(y) = 0$ , c'est  $y = x_0$ .  
Il n'y a donc qu'un seul point critique :  $(x_0, x_0)$
- ▶ **Cas où**  $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$  Il n'y a pas de solution à  $\varphi(y) = 0$ , donc pas de point critique.

## Partie C

Dans cette partie, on suppose que  $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$ . On rappelle alors que la fonction  $f$  admet exactement deux points critiques :

8. (Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction  $f$ .)

▶ **Dérivées doubles** On a  $\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \partial_1 \underbrace{\left( \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a \right)}_{\partial_1 f}$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(y) - a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^a$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot [\ln(y) - a(a-1) \cdot (xy)^a].$$

De même, on a :  $\partial_{2,2}^2 f(x, y) = -\frac{1}{y^2} [\ln(x) - a(a-1) \cdot (xy)^a].$

▶ **Dérivées croisées** Par la propriété de symétrie de Schwarz pour la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , il suffit de calculer :  $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = \partial_2 \underbrace{\left( \frac{1}{x} \cdot \ln(y) - a \cdot x^{a-1} \cdot y^a \right)}_{\partial_1 f}$

$$= \frac{1}{xy} - a^2 \cdot x^{a-1} \cdot y^{a-1}.$$

9. (Calculer la matrice hessienne de  $f$  au point  $(z_1, z_1)$ . Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme : ...)

On pose :  $x = y = z_1$ .

▶ **Dérivées doubles**

Il vient :  $\partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \left[ \overbrace{\ln(z_1)}^{=a z_1^{2a}} - a(a-1) \cdot (z_1^2)^a \right] = \frac{1}{z_1^2} \cdot a^2 z_1^{2a} = a^2 z_1^{2a-2}.$

De même :  $\partial_{2,2}^2 f(z_1, z_1) = a^2 z_1^{2a-2}.$

▶ **Dérivées croisées** On trouve :  $\partial_{1,2}^2 f(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$

▶ **Conclusion**

On trouve la Hessienne demandée :  $\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{bmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{bmatrix}.$

On pose  $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et  $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

10. (Calculer  $M \cdot X_1$  et  $M \cdot X_2$ , et en déduire les valeurs propres de  $M$ .)

▶ **Calcul de  $M \cdot X_1$**

On trouve :  $M \cdot X_1 = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} - a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

▶ **Calcul de  $M \cdot X_2$**

On trouve :  $M \cdot X_2 = M \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ -\frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} + a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

► **Conclusion sur les valeurs propres**

On a vérifié que les vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  sont propres, respectivement associés aux valeurs propres :

►  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$

►  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$

**11.** (La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local en  $(z_1, z_1)$  ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)

Les valeurs propres de la Hessienne en ce point sont ci-dessus.

► **Signe de  $\lambda_2$**  On a :  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2} < 0$

► **Signe de  $\lambda_1$**  On a :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1}{z_1} \cdot \left[ \frac{1}{z_1} - 2a^2 z_1^{2a-1} \right]$

Avec la sagacité qui nous caractérise, on reconnaît :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_1} \cdot \varphi'(z_1)$

Or  $z_1 \in ]0; x_0[$ . donc,  $\varphi'(z_1) > 0$ . Ainsi  $\lambda_1 > 0$ .

► **Conclusion** Les deux valeurs propres de la Hessienne sont de signe opposé, donc ce point critique est un point selle.

**12.** (La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local en  $(z_2, z_2)$  ?

Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?)

Tout se passe comme en  $(z_2, z_2)$ , mais avec pour valeurs propres :

► **Signe de  $\lambda_2$**  On a :  $\lambda_2 = -\frac{1}{z_2^2} < 0$

► **Signe de  $\lambda_1$**  On a :  $\lambda_1 = \frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} = \frac{1}{z_2} \cdot \varphi'(z_2)$

Or  $z_2 \in ]x_0; +\infty[$ . donc,  $\varphi'(z_2) < 0$ . Ainsi  $\lambda_1 < 0$ .

► **Conclusion**

Les deux valeurs propres de la Hessienne ont même signe : on a un extremum local.

Comme elles sont  $< 0$ , c'est un maximum local.