Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1\,;1[$ et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non-nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

6. On note : $P(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \alpha \cdot x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.
Développer $\big(P(x)\big)^2$.

7. Soit $C = A - I$.
En utilisant les résultats de la question **1.**, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v, w les vecteurs définis par : $\left\{\begin{array}{l} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{array}\right.$

a) Calculer les vecteurs v et u.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}\cdot A \cdot P$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.
En déduire que N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels.

b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?