Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. *(Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.)*

- **Calcul de** $(A-I)$ On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.
- **Calcul de** $(A-I)^2$ On trouve : $(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- **Calcul de** $(A-I)^3$ On trouve alors $(A-I)^3 = 0$.

2. *(En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.)*

- **Restriction des valeurs propres**
  On a vu : $(A-I)^3 = 0$. Le polynôme $\Pi(X) = (X-1)^3$ est donc annulateur de A.
  Les seules valeurs propres possibles pour A sont donc les racines de ce polynôme.
  Or la seule racine de Π est 1.
  La seule valeur propre possible de A est donc 1.
- **Vérification pour** $\lambda = 1$ On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.
  Cette matrice est de rang $= 2$ *(deux premiers vecteurs colonnes opposés)*.
  Ainsi : $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} - \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{2} = 1$.
  On a : $\mathrm{Ker}(A-I) \neq \{\vec{0}\}$, donc 1 est bien valeur propre de A.
- **Conclusion** L'ensemble des valeurs propres de A est : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

3. *(La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?)*

- **Inversibilité** ***(oui)*** Le réel 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.
- **Diagonalisabilité** ***(non)*** La matrice A n'a qu'une valeur propre, c'est 1.
  Ainsi : $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\Big(E_\lambda(A)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(A-I)\Big) = 1 \neq 3$.
  La somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas le nombre de colonnes : la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. *(Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.)*

- **Caractère** $\mathcal{C}^\infty$
  La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de référence de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
  On compose par $x \mapsto 1 + x$, qui est affine donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$, et à valeurs > 0.

Ainsi, par composition $\varphi : x \mapsto \sqrt{\underbrace{1+x}_{>0}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$.
En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

- **Dérivation**
  On dérive, en remarquant que $(1+x)' = 1$
  On a $\forall x \in]-1\,;1[$ l'expression : $\varphi(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$
  d'où : $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$
  enfin :
  $$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

5. *(En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non-nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.)*

- **Énoncé de la formule de Taylor-Young**
  Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors, pour $x \to x_0$, on a : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + o\Big((x-x_0)^2\Big)$.
- **Application** Ici, on a trouvé :
  - $\varphi(0) = 1$
  - $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$
  - $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$

  Il vient donc : $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \Big(-\frac{1}{4}\Big) \cdot x^2 + o(x^2)$.
  C'est la formule demandée avec $\alpha = -\frac{1}{8}$. *(et α est bien non-nul !)*

On note : $P(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.

6. *(Développer $\big(P(x)\big)^2$.)*

On développe :
$$\begin{aligned}\Big(P(x)\Big)^2 &= \Big(1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2\Big)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \Big[\big(\frac{1}{2}\big)^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\Big] \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot x^3 + \Big(-\frac{1}{8}\Big)^2 \cdot x^4 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{64} \cdot x^4.\end{aligned}$$

Soit $C = A - I$.

7. *(En utilisant les résultats de la question **1.**, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.)*

- **Rappel de la question 1.** On a trouvé $(A-I)^3 = C^3 = 0$, d'où aussi $C^4 = 0$.
- **Calcul de $P(C)$**
  Ces deux puissances s'annulent dans l'expression de la question précédente.
  Il vient :
  $$\begin{aligned}\Big(P(C)\Big)^2 &= I + C - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{C^3}_{0} + \frac{1}{64} \cdot \underbrace{C^4}_{0}. \\ &= I + C\end{aligned}$$
  Ainsi, on a bien $\Big(P(C)\Big)^2 = I + C = A$.
- **Explicitation d'une solution à $M^2 = A$**
  On vient de trouver pour solution à cette équation : $M = P(C)$
  C'est-à-dire : $M = I + \frac{1}{2} \cdot C - \frac{1}{8} \cdot C^2$.
  $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous calculs effectués, on trouve : $M = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. *(et on vérifie $M^2 = A$.)*

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v, w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

a) *(Calculer les vecteurs v et u.)*

- **Interprétation de f**
  Pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :
  - $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ -3x + 3y + z \end{pmatrix}$
  - $f(\vec{X}) - \vec{X} = \underbrace{C}_{A-I} \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ -x + y + 2z \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$
- **Application**
  - On a $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Ainsi : $v = f(w) - w = \begin{pmatrix} -1+0+2 \\ -1+0+2 \\ -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
  - De même : $u = f(v) - v = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *(Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.)*

- **La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre ?**
  Cherchons les relations de dépendance linéaire satisfaites par cette famille $\mathcal{B}'$.

  On résout : $\left[\, a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = \vec{0} \,\right] \iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ c = 0 \quad (L_1 - L_2) \end{cases}$

  Ce système est triangulaire, avec des coefficients diagonaux non-nuls. *(3 pivots)*
  La seule solution est donc $a = b = c = 0$.
  Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire est triviale.
  La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est donc libre.
- **Conclusion : « c'est une base »**
  La famille $\mathcal{B}'$ est libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
  Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. *(« bon nombre » de vecteurs.)*

c) *(Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.)*

On a $f(u) = A \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(v) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$f(w) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ainsi, on obtient : $\begin{aligned} f(u) &= u \\ f(v) &= u + v \\ f(w) &= v + w. \end{aligned}$

La matrice qui représente f dans la base $\mathcal{B}'$ est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

d) *(En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.)*

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'endomorphisme f est représenté par la matrice T.

Posons $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

On a alors la relation : $A \cdot P = P \cdot T$, soit : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$, ou : $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) *(Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire que N est de la forme : $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, où a, b, c sont trois réels.)*

- **Si $N^2 = T$, alors $NT = TN$** Soit N telle que $N^2 = T$.
  Alors, on a bien : $N \cdot T = N \cdot (N^2) = N^3 = (N^2) \cdot N = T \cdot N$.
- **Résolution de $NT = TN$** Posons $N = \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$. *(On rappelle que : $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)*
  Alors $N \cdot T = \begin{bmatrix} m & m+n & n+o \\ p & p+q & q+r \\ s & s+t & t+u \end{bmatrix}$ et $T \cdot N = \begin{bmatrix} m+p & n+q & o+r \\ p+s & q+t & r+u \\ s & t & u \end{bmatrix}$.
  On résout enfin : $[\ N \cdot T = T \cdot N\ ] \iff \begin{cases} p = s = t = 0 \\ m = q = u \\ n = r. \end{cases}$
  Ainsi, une condition nécessaire est que N s'écrive $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.
  On vérifie que c'est une condition suffisante. *(ie , qu'on a alors bien : $NT = TN$.)*

b) *(Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.)*

On résout l'équation $N^2 = T$ pour $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. On a alors : $N^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

On résout pour avoir : $[\ N^2 = T\ ] \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm\frac{1}{2} \\ c = \mp\frac{1}{8} \end{cases}$

Ainsi, on a trouvé deux solutions : $N_\pm = \pm \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. *(Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.)*

- **Retour à l'équation précédente** On sait que : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$.
  On transforme l'équation :
  $$\begin{aligned} A = M^2 &\iff P \cdot T \cdot P^{-1} = M^2 \\ &\iff T = P^{-1} \cdot M^2 \cdot P \\ &\iff T = \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_{N} \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_{N} \\ &\iff T = N^2 \end{aligned}$$
- **Conclusion**
  En ayant posé, $N = P^{-1} \cdot M \cdot P$, la question précédente donne deux solutions : $N = N_1$ et $N = N_2$.
  Les deux solutions associées sont donc
  - $M_1 = P \cdot N_1 \cdot P^{-1}$
  - $M_2 = P \cdot N_2 \cdot P^{-1}$

(et, comme N_1 et N_2, elles sont opposées : $M_1 + M_2 = 0$.)

11. *(L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?)*
Non, puisque la matrice nulle $0 = M_1 + M_2$ n'appartient pas à l'espace des solutions.
En effet : $0^2 \neq A$.