Soit n un entier naturel non-nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Pour tout entier k non-nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non-nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages : $\quad S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.
On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieurs ou égale à n.
Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre ?????????? alors ....

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k, ainsi que son espérance.
2. a) Déteminer $T_n(\Omega)$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
   c) Montrer que : $\quad \mathbb{P}(T_n = n) = \left(\right)\frac{1}{n}\Big)^{n-1}$.
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3.
   Vérifier que $\mathbb{E}[T_3] = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que : $\quad \forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$.
7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$ et $\binom{j-1}{k}$ à $\binom{j}{k}$.
   b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $i \geqslant k+1$: $\sum\limits_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$.
   c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
   $$« \ \forall i \in [\![k, n]\!] \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{i-1}{k-1} \ ».$$
   Démontrer par récurrence, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, que $\mathcal{H}_k$ est vraie.
8. a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $\quad [T_n > k] \quad$ et $\quad [S_k \leqslant n-1]$.
   b) En déduire que : $\quad \forall n \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathbb{E}[T_n] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}[T_n] = \Big(1 + \frac{1}{n})^{n-1}$.
10. Calculer $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}[T_n]$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans N^* telle que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y=k)=\frac{k-1}{k!}$.

a) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)=1$.

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non-nul, démontrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n>k)=\frac{1}{k!}$.

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

14. On rappelle qu'en langage `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1,n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n.

```
function y=T(n)
  S=...............
  y=...............
  while ..........
    tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
    S=S+tirage
    y=.............
  end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente, et on écrit le script ci-dessous :

```
function y=freqT(n)
  y=zeros(1,n)
  for i=1:100000
    k=T(n)
    y(k)=y(k)+1
  end
endfunction

function y=loitheoY(n)
  y=zeros(1,n)
  for k=1:n
    y(k)=(k-1)/prod(1:k)
  end
endfunction

clf()
n=input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous.

a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question **13.**