

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice

identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

L'objet de cet exercice est déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. (Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.)

► **Calcul de $(A - I)$** On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

► **Calcul de $(A - I)^2$** On trouve : $(A - I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

► **Calcul de $(A - I)^3$** On trouve alors $(A - I)^3 = 0$.

2. (En déduire l'ensemble des valeurs propres de A .)

► **Restriction des valeurs propres**

On a vu : $(A - I)^3 = 0$. Le polynôme $\Pi(X) = (X - 1)^3$ est donc annulateur de A .

Les seules valeurs propres possibles pour A sont donc les racines de ce polynôme.

Or la seule racine de Π est 1.

La seule valeur propre possible de A est donc 1.

► **Vérification pour $\lambda = 1$** On a : $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Cette matrice est de rang = 2 (deux premiers vecteurs colonnes opposés).

Ainsi : $\dim(\text{Ker}(A - I)) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_3 - \underbrace{\text{rg}(A - I)}_2 = 1$.

On a : $\text{Ker}(A - I) \neq \{\vec{0}\}$, donc 1 est bien valeur propre de A .

► **Conclusion** L'ensemble des valeurs propres de A est : $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

3. (La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?)

► **Inversibilité (oui)** Le réel 0 n'est pas valeur propre de A , donc A est inversible.

► **Diagonalisabilité (non)** La matrice A n'a qu'une valeur propre, c'est 1.

Ainsi : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(\text{Ker}(A - I)) = 1 \neq 3$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas le nombre de colonnes : la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in]-1; 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. (Justifier que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]-1; 1[$ et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.)

► **Caractère \mathcal{C}^∞**

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de référence de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

On compose par $x \mapsto 1+x$, qui est affine donc \mathcal{C}^∞ sur $]-1; 1[$, et à valeurs > 0 .

Ainsi, par composition $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$.

En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2_{>0}$

► **Dérivation**

On dérive, en remarquant que $(1+x)' = 1$

On a $\forall x \in] -1 ; 1[$ l'expression : $\varphi(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$\text{d'où : } \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{enfin : } \varphi''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

5. (En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non-nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2 + x^2 \cdot \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.)

► **Énoncé de la formule de Taylor-Young**

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de x_0 , alors, pour $x \rightarrow x_0$, on a : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$.

- **Application** Ici, on a trouvé :
- $\varphi(0) = 1$
 - $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$
 - $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$

Il vient donc : $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^2 + o(x^2)$.

C'est la formule demandée avec $\alpha = -\frac{1}{8}$. (et α est bien non-nul!)

On note : $P(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \alpha \cdot x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.

6. (Développer $(P(x))^2$.)

$$\begin{aligned} \text{On développe : } (P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right] \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot x^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot x^4 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{64} \cdot x^4. \end{aligned}$$

Soit $C = A - I$.

7. (En utilisant les résultats de la question 1., vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.)

► **Rappel de la question 1.** On a trouvé $(A - I)^3 = C^3 = 0$, d'où aussi $C^4 = 0$.

► **Calcul de $P(C)$**

Ces deux puissances s'annulent dans l'expression de la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } (P(C))^2 &= I + C - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{C^3}_0 + \frac{1}{64} \cdot \underbrace{C^4}_0 \\ &= I + C \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(P(C))^2 = I + C = A$.

► **Explicitation d'une solution à $M^2 = A$**

On vient de trouver pour solution à cette équation : $M = P(C)$

C'est-à-dire : $M = I + \frac{1}{2} \cdot C - \frac{1}{8} \cdot C^2$.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous calculs effectués, on trouve : $M = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. (et on vérifie $M^2 = A$.)

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice A .

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v, w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

a) (Calculer les vecteurs v et u .)

► **Interprétation de f**

Pour $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a : ► $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ -3x + 3y + z \end{pmatrix}$

► $f(\vec{X}) - \vec{X} = \underbrace{C}_{A-I} \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ -x + y + 2z \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$

► **Application**

► On a $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $v = f(w) - w = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 2 \\ -1 + 0 + 2 \\ -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

► De même : $u = f(v) - v = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) (Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .)

► **La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre ?**

Cherchons les relations de dépendance linéaire satisfaites par cette famille \mathcal{B}' .

$$\begin{aligned} \text{On résout : } [a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = \vec{0}] &\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad (L_1 - L_2) \end{aligned}$$

Ce système est triangulaire, avec des coefficients diagonaux non-nuls. (3 pivots)

La seule solution est donc $a = b = c = 0$.

Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire est triviale.

La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est donc libre.

► **Conclusion : « c'est une base »**

La famille \mathcal{B}' est libre de trois vecteurs dans \mathbb{R}^3 .

Il s'agit donc d'une base de \mathbb{R}^3 . (« bon nombre » de vecteurs.)

c) (Déterminer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' .)

$$\begin{aligned} \text{On a } f(u) &= A \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}. & \text{Ainsi, on obtient : } f(u) &= u \\ f(v) &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} & f(v) &= u + v \\ f(w) &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} & f(w) &= v + w. \end{aligned}$$

La matrice qui représente f dans la base \mathcal{B}' est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$

d) (En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.)

Dans la base \mathcal{B}' , l'endomorphisme f est représenté par la matrice T .

Posons $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

On a alors la relation : $A \cdot P = P \cdot T$, soit : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$, ou : $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) (Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.)

En déduire que N est de la forme : $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, où a, b, c sont trois réels.)

► Si $N^2 = T$, alors $NT = TN$ Soit N telle que $N^2 = T$.

Alors, on a bien : $N \cdot T = N \cdot (N^2) = N^3 = (N^2) \cdot N = T \cdot N$.

► **Résolution de $NT = TN$** Posons $N = \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$. (On rappelle que : $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

Alors $N \cdot T = \begin{bmatrix} m & m+n & n+o \\ p & p+q & q+r \\ s & s+t & t+u \end{bmatrix}$ et $T \cdot N = \begin{bmatrix} m+p & n+q & o+r \\ p+s & q+t & r+u \\ s & t & u \end{bmatrix}$.

On résout enfin : $[N \cdot T = T \cdot N] \iff \begin{cases} p = s = t = 0 \\ m = q = u \\ n = r. \end{cases}$

Ainsi, une condition nécessaire est que N s'écrive $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

On vérifie que c'est une condition suffisante. (ie, qu'on a alors bien : $NT = TN$.)

b) (Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2 .)

On résout l'équation $N^2 = T$ pour $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. On a alors : $N^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

On résout pour avoir : $[N^2 = T] \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = \mp \frac{1}{8} \end{cases}$

Ainsi, on a trouvé deux solutions : $N_{\pm} = \pm \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. (Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2 .)

► **Retour à l'équation précédente** On sait que : $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$.

On transforme l'équation : $A = M^2 \iff P \cdot T \cdot P^{-1} = M^2$

$$\iff T = P^{-1} \cdot M^2 \cdot P$$

$$\iff T = \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_N \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot M \cdot P}_N$$

$$\iff T = N^2$$

► **Conclusion**

En ayant posé, $N = P^{-1} \cdot M \cdot P$, la question précédente donne deux solutions : $N = N_1$ et $N = N_2$.

Les deux solutions associées sont donc ► $M_1 = P \cdot N_1 \cdot P^{-1}$

► $M_2 = P \cdot N_2 \cdot P^{-1}$

(et, comme N_1 et N_2 , elles sont opposées : $M_1 + M_2 = 0$.)

11. (L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?)

Un sous-espace vectoriel est un ensemble F qui vérifie :

- ▶ F est non-vide (et on doit en particulier avoir : $\vec{0} \in F$.)
- ▶ F est stable par combinaison linéaire

L'ensemble E des solutions de l'équation $M^2 = A$ est bien non-vide (car, par exemple, $M_1 \in E$.)

Mais, en revanche : $0 \notin E$, car : $0^2 \neq A$.

Remarquons aussi que E n'est pas stable par combinaison linéaire.

En effet : ▶ $M_1 \in E$,

▶ $M_2 \in E$,

▶ mais $M_1 + M_2 = 0 \notin E$!

Ainsi l'ensemble E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.