

Proposition 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Pour $\lambda \geq 0$, on a : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}$.
2. Pour $\epsilon \geq 0$, on a : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon \cdot \sigma_X) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$.

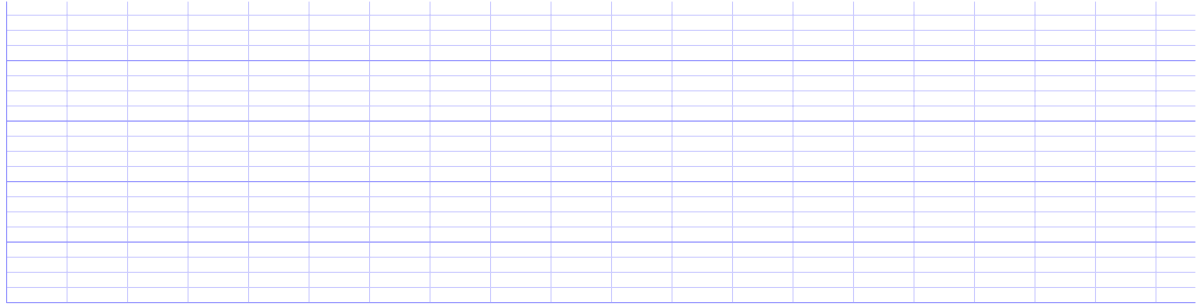
Exercice 1 (Convergence pour la loi binomiale)

Pour B_1, \dots, B_n variables aléatoires :
 ▶ mutuellement indépendantes
 ▶ toutes de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

on s'intéresse à la convergence de la moyenne empirique : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n B_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$.

1. Rappeler la loi de la somme : $\sum_{k=1}^n B_k$.

En déduire l'espérance et la variance de \overline{X}_n .



2. Conclure que \overline{X}_n est bien un estimateur de p et qu'il est
 ▶ sans biais,
 ▶ convergent.

3. Interpréter l'animation du script `convergenceBino.sce`
 Quels paramètres peut-on faire varier? Pour quelles différences observées?

Exercice 2 (Loi de Gumbel)

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on dit que la variable $G = \ln(X)$ suit la loi de Gumbel.

1. Justifier que la fonction de répartition de G est donnée par : $F_G : x \mapsto F_X(e^x) = 1 - \exp(-e^x)$.
2. En déduire qu'une densité de G est donnée par : $x \mapsto e^x \cdot \exp(-e^x) = \exp(x - e^x)$.
3. En partant de la commande `grand(---, "exp", 1)`, simuler un échantillon de G .
 Confronter l'histogramme obtenu à la densité théorique trouvée.

Exercice 3 (Estimation d'une intégrale)

On s'intéresse à l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt$.

1. Justifier : $I = \mathbb{E}[\ln(X)]$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

On va approximer l'intégrale I par un estimateur de moyenne empirique.

2. En partant de la commande `grand(---, "exp", 1)`, simuler un échantillon de $\ln(X)$.

3. Obtenir empiriquement l'écart-type de l'échantillon. (commande : `sigma = stdev(---)`).

On souhaite tester l'hypothèse (H_0) : « $I = -\gamma$ », où $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

On pose : $\Gamma_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(X_k)$, pour un échantillon X_1, \dots, X_n de loi $\mathcal{E}(1)$.

Notons : $\sigma = \text{Var}(\ln(X))$, pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

4. Dans cette question, on suppose que (H_0) est vraie.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev 2., montrer : $\mathbb{P}(|\Gamma_n - \gamma| \geq \sqrt{20} \cdot \sigma) \leq 5\%$.

5. Le résultat de la simulation

- ▶ permet-il de **réfuter l'hypothèse** (H_0) au niveau de confiance [95%/5%],
- ▶ ou **au contraire** la **corrobore**-t-il au niveau de confiance [95%/5%] ?

6. Combien vaut : $e^\pi - \pi$?