Proposition 1 (***Inégalité de Bienaymé-Tchecbychev***)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Pour $\lambda \geqslant 0$, on a : $\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}[X]| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}$.
2. Pour $\epsilon \geqslant 0$, on a : $\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}[X]| \geqslant \epsilon \cdot \sigma_X\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$.

Exercice 1 (***Convergence pour la loi binomiale***)

Pour $B_1, \dots, B_n$ variables aléatoires :
- mutuellement indépendantes
- toutes de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

on s'intéresse à la convergence de la moyenne empirique : $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.

1. Rappeler la loi de la somme : $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k$.

   En déduire l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.

2. Conclure que $\overline{X_n}$ est bien un estimateur de p et qu'il est
   - sans biais,
   - convergent.

3. Interpréter l'animation du script `convergenceBino.sce`

   Quels paramètres peut-on faire varier ? Pour quelles différences observées ?

Exercice 2 (***Loi de Gumbel***)

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on dit que la variable $G = \ln(X)$ suit la loi de Gumbel.

1. Justifier que la fonction de répartition de G est donnée par : $F_G : x \mapsto F_X\big(\mathrm{e}^x\big) = 1-\exp\big(-\mathrm{e}^x\big)$.
2. En déduire qu'une densité de G est donnée par : $x \mapsto \mathrm{e}^x \cdot \exp\big(-\mathrm{e}^x\big) = \exp\big(x-\mathrm{e}^x\big)$.
3. En partant de la commande `grand(---,"exp",1)`, simuler un échantillon de G.

   Confronter l'histogramme obtenu à la densité théorique trouvée.

Exercice 3 (*Estimation d'une intégrale*)

On s'intéresse à l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) \cdot \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

1. Justifier : $I = \mathbb{E}\big[\ln(X)\big]$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

On va approximer l'intégrale I par un estimateur de moyenne empirique.

2. En partant de la commande `grand(---,"exp",1)`, simuler un échantillon de $\ln(X)$.

3. Obtenir empiriquement l'écart-type de l'échantillon. *(commande :* `sigma = stdev(---)`*)*.

On souhaite tester l'hypothèse (H_0) : « $I = -\gamma$ », où $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

On pose : $\Gamma_n = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(X_k)$, pour un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathcal{E}(1)$.
Notons : $\sigma = \mathrm{Var}(\ln(X))$, pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

4. Dans cette question, on suppose que (H_0) est vraie.
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev **2.**, montrer : $\mathbb{P}\big(\big|\Gamma_n - \gamma\big| \geqslant \sqrt{20} \cdot \sigma\big) \leqslant 5\%$.

5. Le résultat de la simulation

- permet-il de **réfuter l'hypothèse** (H_0) au niveau de confiance [95%/5%],
- ou **au contraire** la **corrobore**-t-il au niveau de confiance [95%/5%] ?

6. Combien vaut : $\mathrm{e}^{\pi} - \pi$?