Colles semaine 17

1 Convergence en loi

1.1 Généralités

- **Définition**
  Une suite de *v.a.* (X_n) converge en loi vers celle de X si, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.
  (convergence pour $n \to \infty$ des fonctions de répartition)
- **Cas de la limite continue**
  Si F_X est continue, alors, pour $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leqslant X_n \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.
- **Cas de variables discrètes** ***(à valeurs entières)***
  Si $X_n(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ alors, pour avoir : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ il suffit, $\forall k \in \mathbb{Z}$, que : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

1.2 Cas de convergence en loi

- **Limite d'Euler** Savoir démontrer, pour $x \in \mathbb{R}$, et utiliser la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.
- **Exemple de convergence en loi de** min / max
- **Théorème central limite** Si les (X_k) admettent un moment d'ordre 2 et sont indépendantes, alors la moyenne empirique normalisée : $\overline{X_n}^* = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sigma_X} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n \cdot \mathbb{E}[X]\right)$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
- **Loi des événements rares** Si $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$, alors il y a convergence en loi : $\mathcal{B}(n,p_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

2 Calcul différentiel à deux variables

2.1 Calcul de dérivées

- **Exemples fondamentaux**
  Fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$, polynomiales *(affines, quadratiques)*
- **Régularité** *(Justification semblable au cas des fonctions d'une variable réelle)*
  Notion de fonction de deux variables : continue, de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$.
- **Dérivées partielles** notées $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$
- **Champ de gradient** $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *(vecteur des dérivées)*
- **Champ de Hessienne** $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial^2_{1,1} f & \partial^2_{1,2} f \\ \partial^2_{2,1} f & \partial^2_{2,2} f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *(matrice des dérivées partielles secondes)*
  Schwarz : Pour f de classe $\mathcal{C}^2$, la Hessienne est **symétrique**, et s'écrit $\nabla^2 f(x,y) = \left[\begin{smallmatrix} r & s \\ s & t \end{smallmatrix}\right]$.

2.2 Recherche de points critiques

- **Point critique de f :** $\left[(x_0, y_0) \text{ point critique de } f\right] \iff \left[\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}.\right]$
- **Écriture de la Hessienne en un point critique**
  par spécialisation en (x_0, y_0) de l'expression générale trouvée.

3 Questions de cours

1. Écrire le champ de gradient et de hessienne d'une fonction $f(x,y)$.

2. Définir : la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers X.

3. Calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de la limite : $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

4. Énoncé du théorème central limite.

5. Principe de l'étude du min / max indépendant.