Correction Ds n° 5

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant 2$.
On note aussi $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :
- $P_0(X) = 1$
- $P_1(X) = X$
- $P_2(X) = X^2$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E.

Soit f l'application qui, à tout $P \in E$, associe le polynôme Q tel que : $Q(X) = (X-1) \cdot P'(X) + P(X)$.

1. *Montrer que f est un endomorphisme de E.*

- **Linéarité de f** Soient $A, B \in E$ deux polynôme, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux scalaires.

  On a alors :
  $$\begin{aligned} f(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) &= (X-1) \cdot (\lambda \cdot A + \mu \cdot B)'(X) + (\lambda \cdot A + \mu \cdot B)(X) \\ &= (X-1) \cdot (\lambda \cdot A'(X) + \mu \cdot B'(X)) + \lambda \cdot A(X) + \mu \cdot B(X) \\ &= \lambda \cdot \left[(X-1) \cdot A'(X) + A(X)\right] + \mu \cdot \left[(X-1) \cdot B'(X) + B(X)\right] \\ &= \lambda \cdot f(A) + \mu \cdot f(B). \end{aligned}$$

  L'application f est bien linéaire.

  (L'image de la combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.)

- **Stabilité de E par f**

  Si $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg(P) \leqslant 2$, donc $\deg(P') \leqslant 1$, donc $\deg((X-1) \cdot P') \leqslant 2$.

  On a donc bien : $\deg(f(P)) \leqslant 2$, donc : $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$.

  L'espace E est bien stable par f.

2. *Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

On a :
- $f(P_0) = (X-1) \cdot P_0' + P_0 = 1$
- $f(P_1) = (X-1) \cdot P_1' + P_1 = X - 1 + X = 2 \cdot X - 1$
- $f(P_2) = (X-1) \cdot P_2' + P_2 = (X-1) \cdot 2X + X^2 = 3 \cdot X^2 - 2 \cdot X$

3. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*
L'endomorphisme f est-il :
- *diagonalisable ?*
- *un automorphisme de E ?*

- **Valeurs propres**

  La matrice A est triangulaire : ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

  Ainsi, le spectre de f est : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$.

- **Diagonalisabilité**

  L'endomorphisme f de E a 3 valeurs propres distinctes, et E est de dimension 3.

  L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

- **Inversibilité**

  La matrice A est inversible *(0 n'est pas valeur propre)*.

  L'endomorphisme f est donc un automorphisme.

4. *Déterminer l'image par f des polynômes R_0, R_1, R_2 définis par :*
- $R_0(X) = 1$
- $R_1(X) = X - 1$
- $R_2(X) = (X-1)^2$

On a :
- $f(R_0) = (X-1)\cdot R_0' + R_0 = 1$, soit : $f(R_0) = R_0$.
- $f(R_1) = (X-1)\cdot R_1' + R_1 = X - 1 + X - 1 = 2\cdot(X-1)$, soit : $f(R_1) = 2\cdot R_1$,
- $f(R_2) = (X-1)\cdot R_2' + R_2 = (X-1)\cdot 2(X-1) + (X-1)^2 = 3(X-1)^2$, soit : $f(R_2) = 3\cdot R_2$.

5. *Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f.*
Écrire :
- *la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*
- *et la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.*

- **Base de vecteurs propres**

  On a bien vérifié que R_0, R_1, R_2 sont des vecteurs propres de f.
  Ils sont associés aux valeurs propres 1,2,3 respectivement.
  La famille qu'ils forment ensemble est donc libre. *(par concaténation pour des vp $\neq$.)*
  Comme $\dim(E) = 3$, cette famille est une base.

- **Matrice de passage** On a :
  - $R_0 = 1 = P_0$
  - $R_1 = X - 1 = -P_0 + P_1$
  - $R_2 = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 = P_0 - 2\cdot P_1 + P_2$

  Ainsi la matrice de passage P s'écrit : $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- **Matrice dans la nouvelle base**

  L'expression des $f(R_i)$ correspond à la matrice diagonale : $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. *Vérifier les relations :* $\left\{ \begin{array}{r} R_2(X) + 2\cdot R_1(X) + R_0(X) = P_2(X), \\ R_1(X) + R_0(X) = P_1(X). \end{array} \right.$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

On vérifie que l'on a bien :
- $(X-1) + 1 = X$, soit $P_1 = R_0 + R_1$,
- $(X-1)^2 + 2\cdot(X-1) + 1 = X^2$, soit $P_2 = R_0 + 2\cdot R_1 + R_2$.

La matrice de passage dans l'autre sens, inverse de P, est donc donnée par : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. *Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que : $\left[A^{-1}\right]^n = P\cdot\left[D^{-1}\right]^n\cdot P^{-1}$.*
Expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

On a : $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$, d'où : $A^{-1} = P\cdot D^{-1}\cdot P^{-1}$.

On vérifie par récurrence que l'on a bien : $\left[A^{-1}\right]^n = P\cdot\left[D^{-1}\right]^n\cdot P^{-1}$.

La troisième colonne de A^{-n} est : $\left[A^{-1}\right]^n\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = P\cdot\left[D^{-1}\right]^n\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = P\cdot\left[D^{-1}\right]^n\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$= P\cdot\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{2^n}\\ \frac{1}{3^n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{3^n}\\ \frac{2}{2^n}-\frac{2}{3^n}\\ \frac{1}{3^n}\end{pmatrix}.$$

PARTIE II : Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve. *(avec $k \geqslant 0$)*
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par : $U_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\big(X_k = 0\big) \\ \mathbb{P}\big(X_k = 1\big) \\ \mathbb{P}\big(X_k = 2\big) \end{pmatrix}$.

(avec $\mathbb{P}\big(X_k = j\big)$ la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.)

On convient de définir la matrice U_0 par : $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. *Déterminer la loi de X_2* *(On pourra s'aider d'un arbre).*

Calculer l'espérance et la variance de X_2

On a : $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$.

9. *Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que $k \in \mathbb{N}$, on a : $U_{k+1} = A^{-1} \cdot U_k$.*

La formule des probabilités totales s'écrit : $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i) \cdot \mathbb{P}(X_k = j)$ soit :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(X_k = 0) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \qquad\qquad \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_k = 2) \end{cases}$$

La matrice de transition s'écrit : $\begin{bmatrix} \mathbb{P}_{[X_k=0]}(X_{k+1}=0) & \mathbb{P}_{[X_k=1]}(X_{k+1}=0) & \mathbb{P}_{[X_k=2]}(X_{k+1}=0) \\ \mathbb{P}_{[X_k=0]}(X_{k+1}=1) & \mathbb{P}_{[X_k=1]}(X_{k+1}=1) & \mathbb{P}_{[X_k=2]}(X_{k+1}=1) \\ \mathbb{P}_{[X_k=0]}(X_{k+1}=2) & \mathbb{P}_{[X_k=1]}(X_{k+1}=2) & \mathbb{P}_{[X_k=2]}(X_{k+1}=2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = A^{-1}$.

On a alors bien : $U_{k+1} = A^{-1} \cdot U_k$.

10. *Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0*

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation : $U_{k+1} = A^{-1} \cdot U_k$. *(même pour pour $k = 0$!)*

Par récurrence immédiate, on trouve donc : $U_k = \left[A^{-1}\right]^k \cdot U_0$.

11. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :*

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 0\big) = 1, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 1\big) = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 2\big) = 0$$

Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le vecteur U_k est le troisième vecteur colonne de $\left[A^{-1}\right]^k$.

On l'a calculé à la question **7.**. Il vient donc :
- $\mathbb{P}\big(X_k = 0\big) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{3^n}$,
- $\mathbb{P}\big(X_k = 1\big) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n}$,
- $\mathbb{P}\big(X_k = 2\big) = \frac{1}{3^n}$.

Le passage à la limite donne bien :
- $\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 0\big) = 1$,
- $\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 1\big) = 0$,
- $\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_k = 2\big) = 0$.

(Il y a convergence en loi, vers la constante déterministe qui vaut 0.)

Exercice 2

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. *Vérifier que la fonction f est paire.*

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. On calcule : $f(-t) = \frac{e^{t}}{(1+e^{t})^2} = \frac{e^{t}}{\left[e^{t}\cdot(e^{-t}+1)\right]^2}$

$$= \frac{e^{t}}{e^{2t}\cdot(e^{-t}+1)^2} = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}$$

On obtient bien, pour $t \in \mathbb{R}$, l'identité : $f(-t) = f(t)$. La fonction f est donc paire.

2. *Montrer que f est une fonction densité.*

La fonction f vérifie :
- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f est positive sur $\mathbb{R}$. Il reste donc à vérifier que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$.

- **Primitivation de f** Pour $A \in \mathbb{R}$, on calcule l'intégrale : $\displaystyle\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt$.

  On reconnaît une intégrande de la forme : $\displaystyle\int -\frac{u'}{u^2} = \left[\frac{1}{u}\right]$, pour $u(t) = 1+e^{-t}$.

  Ainsi : $\displaystyle\int_0^A f(t)\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2}$.

- **Convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$**

  On passe à la limite $A \to +\infty$, en remarquant que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$.

  Il vient : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

  Ainsi, on a convergence, et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

  Par parité de f, on trouve aussi : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

- **Conclusion**

  L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

  La fonction f est donc bien une densité.

Remarque stratégique

> À la question suivante, l'énoncé nous fournit la primitive $\frac{1}{1+e^{-x}}$ dont nous avions besoin.
> *(c'est la fonction de répartition.)*

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X admettant pour densité f.

3. *Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de X s'écrit : $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.*

Interpréter la valeur de la probabilité : $F_X(0)$.

- **Calcul de la fonction de répartition**

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a bien : $\displaystyle F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$.

  $$= \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On vérifie par acquit de conscience que l'on a bien :
- F_X est $\mathcal{C}^1$ et $F_X' = f$,
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.

- **Interprétation de** $F_X(0)$

On a : $F_X(0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \leqslant 0)$. La valeur 0 est donc la **médiane** de la distribution de X.

(c'est toujours le cas lorsque la fonction densité est paire !)

4. a) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

On vérifie que l'on a la négligeabilité : $t \cdot f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

En effet, pour $t \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant \frac{t \cdot f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^3 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \leqslant t^3 \cdot \mathrm{e}^{-t} \to 0$, pour $t \to +\infty$.

Ainsi :
- $t \cdot f(t) \geqslant 0$
- $t \cdot f(t)$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente par le **critère de Riemann.**

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente.

b) *Montrer que X admet une espérance et que :* $\mathbb{E}[X] = 0$.

On utilisera l'imparité de la fonction : $t \mapsto t \cdot f(t)$.

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Sa partie négative est : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ et sa partie positive est : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or la fonction $t \mapsto t \cdot f(t)$ est impaire, car f est paire.

Ces deux intégrales sont donc de même nature, et opposées.

On a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et vaut 0. L'espérance $\mathbb{E}[X]$ existe donc bien, et vaut 0.

c) *En intégrant par parties, montrer, pour* $A \in \mathbb{R}$, *que :* $\displaystyle\int_0^A t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{A}{1+\mathrm{e}^A} + \int_0^A \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

Dérivons la fonction dans l'intégrale à droite : $\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right)' = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2} = -f(-t) = -f(t)$.

Par intégration par parties, il vient donc bien : $\displaystyle\int_0^A t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{1+\mathrm{e}^t}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

d) *Vérifier que la fonction* $u : t \mapsto -\ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)$ *est une primitive de* $v : t \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$.

On calcule la dérivée de u. Il vient bien : $u'(t) = -\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^t}}{1+\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}$.

e) *En déduire la valeur de l'intégrale :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$, *et celle de l'espérance :* $\mathbb{E}\big[\,|X|\,\big]$.

On conclut le calcul :
$$\int_0^A t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{A}{1+\mathrm{e}^A} + \int_0^A \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = -\frac{A}{1+\mathrm{e}^A} + \int_0^A u'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{A}{1+\mathrm{e}^A} + \big[u(t)\big]_0^A = \ln(2) - \frac{A}{1+\mathrm{e}^A} - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-A}\right).$$

Le passage à la limite $A \to \infty$ donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Pour l'espérance, on trouve : $\displaystyle\mathbb{E}\big[\,|X|\,\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \ln(2)$.

(Encore par parité de f)

PARTIE II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$.

5. **a)** *Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.*

La fonction φ est :
- continue
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de la bijection continue, φ réalise donc une bijection : $\mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$.

On a : $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} \varphi \,; \lim\limits_{+\infty} \varphi[$. On vérifie que :
- $\lim\limits_{-\infty} \varphi = \ln(1) = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$

Ainsi : $I = \varphi(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$.

b) *Pour tout y de I, exprimer : $\varphi^{-1}(y)$.*

Soit $y > 0$. On résout l'équation : $y = \varphi(x) \iff y = \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) \iff \mathrm{e}^{y} = 1+\mathrm{e}^{x}$

$$\iff \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y}-1 \iff x = \underbrace{\ln\left(\mathrm{e}^{y}-1\right)}_{=\varphi^{-1}(y)}.$$

Ainsi, on a : $\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\mathrm{e}^{y}-1\right)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

6. **a)** *Justifier : $\mathbb{P}(Y \leqslant 0) = 0$.*

On a $Y = \varphi(X)$, et φ ne prend que des valeurs > 0.

Ainsi, on a : $Y > 0$, d'où : $\mathbb{P}(Y \leqslant 0) = 0$.

b) *Déterminer la fonction de répartition de Y.*

Pour $y > 0$, on résout : $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\big(\varphi(X) \leqslant y\big) = \mathbb{P}\big(X \leqslant \varphi^{-1}(y)\big) = F_X\big(\varphi^{-1}(y)\big)$.

On a trouvé précédemment : $F_X(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et $\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\mathrm{e}^{y}-1\right)$.

Il vient donc : $F_Y(y) = \dfrac{1}{1+\exp\left[-\ln\left(\mathrm{e}^{y}-1\right)\right]}$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{y}-1}} = \frac{\mathrm{e}^{y}-1}{\mathrm{e}^{y}} = 1-\mathrm{e}^{-y}, \quad \text{pour } y > 0.$$

c) *Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.*

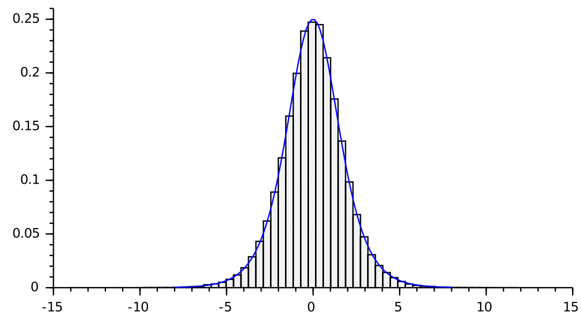
On reconnaît, pour Y, la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

- **Densité** elle est donnée par : $f_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{pour } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- **Espérance et variance** $\mathbb{E}[Y] = 1$ et $\mathrm{Var}(Y) = 1$.

7. On utilise le script Scilab suivant afin de simuler un échantillon de la loi à densité f.

```
N = 10^5 // taille de l'échantillon
Y = grand(1,N,"exp",1)
X = ___
histplot(60,X) // tracé de l'histogramme

t = linspace(-8,8)
densite = exp(-t) ./ (1+exp(-t)).^2
plot(t,densite) // tracé de la densité
```



a) *En quoi la représentation graphique obtenue confirme-t-elle l'étude dans la PARTIE II ?*

L'histogramme suit de près la fonction densité tracée.

Celle-ci est la fonction f donnée par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.
La loi simulée par l'échantillon `X` est donc bien celle de X.
La loi simulée par l'échantillon `Y` *(paramètre* `"exp"`*)* correspond bien à celle de $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

b) *Compléter l'instruction manquant au script.*

On a : $Y = \varphi(X)$, d'où : $X = \varphi^{-1}(Y) = \ln\left(e^Y - 1\right)$.
L'instruction manquante est donc : `X = log(exp(Y)-1)`.

c) *Quelle constante mathématique reconnaît-on dans le résultat du calcul suivant ?*

```
--> mean(abs(X)/2) // ans = 0.6938775
```

De quelle question de la PARTIE I *vérifie-t-on ainsi le résultat ?*

On reconnaît $\ln(2) \simeq 0{,}69$.
On corrobore le résultat de la question **4.e)**, soit : $\mathbb{E}\left[\,|X|\,\right] = 2 \cdot \ln(2)$.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On suppose qu'elles sont :
- mutuellement indépendantes,
- de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

Pour tout $n \geqslant 1$ entier, on pose : $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

8. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) *Déterminer la fonction de répartition de T_n.*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité d'événements :
$$[T_n \leqslant x] = [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x] = [X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x].$$

On passe aux probabilités : $\mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\Big) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k \leqslant x]\big)$.

Pour chaque k, on a : $\mathbb{P}\big([X_k \leqslant x]\big) = F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Il vient donc : $F_{T_n}(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{-x}} = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$.

b) *Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire : $\mathbb{P}(U_n \leqslant x) = \frac{1}{\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n}$.*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité d'événements : $[U_n \leqslant x] = [T_n - \ln(n) \leqslant x] = [T_n \leqslant x + \ln(n)]$.
Ainsi : $F_{U_n}(x) = F_{T_n}\big(x + \ln(n)\big) = \frac{1}{\left(1+e^{-[x+\ln(n)]}\right)^n}$.
Or : $1 + e^{-[x+\ln(n)]} = 1 + \frac{e^{-x}}{e^{\ln(n)}} = 1 + \frac{e^{-x}}{n}$.
On trouve bien ainsi le résultat demandé : $F_{U_n}(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n}$.

9. *En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi.*
Préciser la fonction de répartition limite. Montrer que la loi limite est associée à une densité que l'on déterminera.

On passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'expression de $F_{U_n}(x)$.
On reconnaît la limite d'Euler : $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \to \exp(\lambda)$

Démonstration (Limite d'Euler) : On a : $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp\left[n \cdot \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\right]$.
On connaît l'équivalent : $\ln(1+h) \sim h$ quand $h \to 0$.
Ainsi : $n \cdot \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \sim n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$. Par continuité de l'exponentielle, il vient bien : $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{\lambda}$. ∎

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Il vient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \frac{1}{\exp\left(\mathrm{e}^{-x}\right)} = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

La fonction de répartition limite $F : x \mapsto \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ vérifie :

- F est $\mathcal{C}^1$ et croissante,
- $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.

C'est donc la fonction de répartition d'une variable à densité.

Il y a donc bien convergence en loi.

La densité associée à la limite est la dérivée : $f : x \mapsto F'(x) = \left[\exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]' = \mathrm{e}^{-x}\cdot\exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x>0,\quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$.

Étude de la fonction φ

1. Étude en 0^+

a) *Montrer que pour $x \to 0^+$, on a l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{x}$.*

On montre l'équivalent en étudiant la limite de : $x\cdot\varphi(x) = \overbrace{x\cdot\ln(x)}^{\substack{\text{par CC.}\\ \to 0}} - \overbrace{x\cdot\ln(x+1)}^{\to 0} + 1$.

On trouve bien que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\varphi(x) = 1$, d'où l'équivalent en 0^+ suivant : $\varphi(x) \sim \frac{1}{x}$.

b) *Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0^+.*

Pour $x \to 0^+$, on a : $\varphi(x) = \underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty} - \underbrace{\ln(x+1)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}$.

On a donc une forme indéterminée $-\infty+\infty$.

Par croissance comparée, c'est la puissance $\frac{1}{x}$ qui est prépondérante sur $\ln(x)$, donc la limite est $+\infty$. *(C'est cohérent avec le résultat précédent $\varphi(x) \sim \frac{1}{x}$.)*

c) *L'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?*

On a trouvé en 0^+ l'équivalent suivant : $\varphi(x) \sim \frac{1}{x}$.

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge *(critère de Riemann)*, donc l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi.

2. Étude en $+\infty$

a) *Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+h)$ quand $h\to 0$.*

Ce développement limité à l'ordre 2 quand $h\to 0$ s'écrit : $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

b) *Montrer que $\forall x>0$, on peut écrire : $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.*

On a bien pour $x>0$:
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

c) *En déduire que pour $x\to+\infty$, on a l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{2x^2}$.*

Pour $x\to+\infty$, on a : $\frac{1}{x}\to 0$.

Par le dévelt limité de $\ln(1+h)$ pour $h = \frac{1}{x}$, il vient $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$. Ainsi,
$$= \frac{1}{2\cdot x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

on a bien pour $x\to+\infty$, l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{2\cdot x^2}$.

d) *Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

On passe à la limite dans l'écriture obtenue : $\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\ln\Big(\overbrace{1+\frac{1}{x}}^{\to 1}\Big)}_{\to 0}$.

Il vient en effet : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

e) *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ *converge-t-elle ?*

On a trouvé pour $x \to +\infty$, l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{2x^2}$.

Or :
- les deux fonctions φ et $x \mapsto \frac{1}{2\cdot x^2}$ sont continues sur $(1;+\infty)$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument *(Riemann)*

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc elle converge.

3. *Dresser le tableau de variation de* φ *et y faire apparaître les limites de* φ *en* 0^+ *et* $+\infty$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition par opérations usuelles.

Pour $x > 0$, on trouve :
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2\cdot(x+1)}\cdot\left[x\cdot(x+1) - x^2 - (x+1)\right] = -\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}\end{aligned}$$

Ainsi la dérivée $\varphi'(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et va de $+\infty$ jusqu'à 0. *(ses limites)*

Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

4. *Montrer que l'équation* $\varphi(x) = 1$ *possède une unique solution notée* α *et que* $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

- **Existence et unicité de la solution α**

  La fonction φ est
  - continue sur $]0;+\infty[$
  - strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

  Par le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\varphi\big(]0;+\infty[\big) =]\lim\limits_{+\infty}\varphi;\lim\limits_{0^+}\varphi[=]0;+\infty[$.

  Comme on a bien $1 \in]0;+\infty[= \varphi(]0;+\infty[)$, il existe un unique antécédent par φ de 1, donc une unique solution à l'équation $\varphi(x) = 1$.

- **Encadrement de α** *(On rappelle l'expression* $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x})$*)*
  - On calcule $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} - \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right) = 3 - \ln(4)$
    $= 3 - 2\cdot\ln(2) \simeq 3 - 2\times 0{,}7 = 1{,}6 > 1$
  - On calcule $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2 - \ln(3)$
    $\simeq 2 - 1{,}1 = 0{,}9 < 1$

  Ainsi, on a $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \underbrace{\varphi(\alpha)}_{=1} > \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, d'où par décroissance stricte de φ : $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5. *Compléter l'algorithme de dichotomie pour encadrer* α *dans un intervalle d'amplitude* 10^{-2}.

```
a = 1/3
b = 1/2
while (b-a)>.01
  m = (a+b)/2
  if phi(m) > 1
    then a = m
    else b = m
  end
end
disp([a,b]) // affiche :      0.4635417    0.46875
```

Une variable à densité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité de probabilité la fonction f donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2\cdot(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$ *(où α désigne le réel défini à la question **4.**)*

6. **a)** *Rappeler l'expression de $\varphi'(x)$.*

On a trouvé $\forall x > 0$, l'expression : $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}$, soit $\varphi'(x) = -f(x)$, pour $x > \alpha$.

b) *Vérifier que f est bien une densité de probabilité.*

- **Continuité sauf en α**
  La fonction f est continue sur $]\alpha\,;+\infty[$: c'est une fraction rationnelle.
  Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf en α.
- **Positivité** La fonction f est bien positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
- **Intégrale** On a trouvé une primitive de f sur $]\alpha\,;+\infty[$: la fonction $-\varphi$.
  Ainsi pour $A \geqslant \alpha$, on trouve $\displaystyle\int_\alpha^A f(x)\,\mathrm{d}x = \big[-\varphi(x)\big]_\alpha^A = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{=1} - \underbrace{\varphi(A)}_{\to 0}$.
  On trouve donc bien : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_\alpha^A x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

La fonction f est donc bien une densité de probabilités.

7. *Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$.*

Sous réserve de convergence, on a : $\displaystyle\mathbb{E}[X] = \int_\alpha^{+\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(x+1)}$.

On remarque l'équivalent, en $+\infty$, de l'intégrande : $\frac{1}{x\cdot(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$.

Par Riemann, l'intégrale est donc bien convergente, et la variable X admet une espérance.

8. **a)** *Démontrer que pour $x > \alpha$, on a : $x\cdot f(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$.*

Pour $x > \alpha$, on calcule : $\frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2\cdot(x+1)} = -(x+1)\cdot\varphi'(x) = -x\cdot\varphi'(x) - \varphi'(x) = x\cdot f(x) - \varphi'(x)$.

On trouve bien le résultat demandé : $x\cdot f(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$.

b) *En déduire que l'espérance de X est donnée par : $\mathbb{E}[X] = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.*

On obtient donc pour $A \geqslant \alpha$ l'expression : $\displaystyle\int_\alpha^A x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^A \left(\varphi'(x) + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

On primitive ainsi : $\displaystyle\int_\alpha^A x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi(x) - \frac{1}{x}\right]_\alpha^A = \underbrace{\left(\varphi(A) - \frac{1}{A}\right)}_{\to 0} - \left(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=1} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Par passage à la limite *($A \to +\infty$)*, on trouve : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

C'est la valeur demandée de l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

c) *Donner un encadrement de $\mathbb{E}[X]$ par deux entiers consécutifs.*

On a trouvé l'encadrement : $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Or : $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha} - 1$, donc on obtient l'encadrement demandé : $\overbrace{\frac{1}{\frac{1}{3}} - 1}^{=3-1=2} > \mathbb{E}[X] > \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1}_{=2-1=1}$.

9. *La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?*

Sous réserve de convergence, on aurait : $\displaystyle\mathbb{E}[X^2] = \int_\alpha^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$

Mais cette intégrale est divergente par le critère de Riemann.

La variable X n'a donc pas de moment d'ordre 2. Elle n'a donc pas non plus de variance.