DS 5, le 31 janvier 2018

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant 2$.
On note aussi $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :
- $P_0(X) = 1$
- $P_1(X) = X$
- $P_2(X) = X^2$

PARTIE I : Étude d'un endomorphisme de E.

Soit f l'application qui, à tout $P \in E$, associe le polynôme Q tel que : $Q(X) = (X-1)\cdot P'(X) + P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Quelles sont les valeurs propres de f ?
L'endomorphisme f est-il :
- diagonalisable ?
- un automorphisme de E ?

4. Déterminer l'image par f des polynômes R_0, R_1, R_2 définis par :
- $R_0(X) = 1$
- $R_1(X) = X - 1$
- $R_2(X) = (X-1)^2$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f.
Écrire :
- la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$
- et la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Vérifier les relations : $\left\{ \begin{array}{c} R_2(X) + 2\cdot R_1(X) + R_0(X) = P_2(X), \\ R_1(X) + R_0(X) = P_1(X). \end{array} \right.$
En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}.
Démontrer par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, que : $\left[A^{-1}\right]^n = P \cdot \left[D^{-1}\right]^n \cdot P^{-1}$.
Expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

PARTIE II : Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve. *(avec $k \geqslant 0$)*
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par : $U_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$.

(avec $\mathbb{P}(X_k = j)$ la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.)

On convient de définir la matrice U_0 par : $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer la loi de X_2 *(On pourra s'aider d'un arbre).*
Calculer l'espérance et la variance de X_2

9. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que $k \in \mathbb{N}$, on a : $U_{k+1} = A^{-1} \cdot U_k$.

10. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = 0) = 1, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = 2) = 0$$

Exercice 2

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une fonction densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X admettant pour densité f.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de X s'écrit : $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
Interpréter la valeur de la probabilité : $F_X(0)$.

4. **a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \, dt$ converge.

b) Montrer que X admet une espérance et que : $\mathbb{E}[X] = 0$.
On utilisera l'imparité de la fonction : $t \mapsto t \cdot f(t)$.

c) En intégrant par parties, montrer, pour $A \in \mathbb{R}$, que : $\displaystyle\int_0^A t \cdot f(t) \, dt = -\frac{A}{1+e^A} + \int_0^A \frac{1}{1+e^t} \, dt$.

d) Vérifier que la fonction $u : t \mapsto -\ln(1+e^{-t})$ est une primitive de $v : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$.

e) En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \, dt$, et celle de l'espérance : $\mathbb{E}[|X|]$.

PARTIE II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. **a)** Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

b) Pour tout y de I, exprimer : $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

6. **a)** Justifier : $\mathbb{P}(Y \leqslant 0) = 0$.

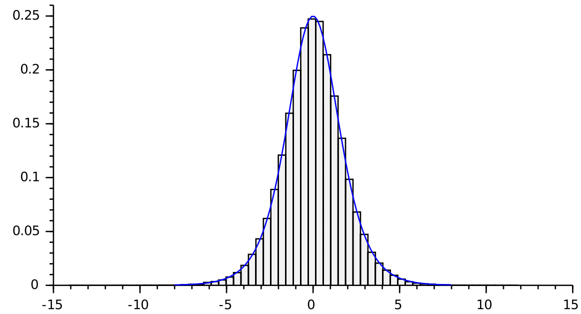
b) Déterminer la fonction de répartition de Y.

c) Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

7. On utilise le script Scilab suivant afin de simuler un échantillon de la loi à densité f.

```
N = 10^5 // taille de l'échantillon
Y = grand(1,N,"exp",1)
X = ___
histplot(60,X) // tracé de l'histogramme

t = linspace(-8,8)
densite = exp(-t) ./ (1+exp(-t)).^2
plot(t,densite) // tracé de la densité
```



a) En quoi la représentation graphique obtenue confirme-t-elle l'étude dans la PARTIE II ?

b) Compléter l'instruction manquant au script.

c) Quelle constante mathématique reconnaît-on dans le résultat du calcul suivant ?
De quelle question de la PARTIE I vérifie-t-on ainsi le résultat ?

```
--> mean(abs(X)/2)
ans =
      0.6938775
```

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On suppose qu'elles sont :

- mutuellement indépendantes,
- de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

Pour tout $n \geqslant 1$ entier, on pose : $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

8. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Déterminer la fonction de répartition de T_n.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire : $\mathbb{P}(U_n \leqslant x) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n}$.

9. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi.
Préciser la fonction de répartition limite.
Montrer que la loi limite est associée à une densité que l'on déterminera.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$.

Étude de la fonction φ

1. Étude en 0^+

a) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

b) Montrer que pour $x \to 0^+$, on a l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{x}$.

c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ converge-t-elle ?

2. Étude en $+\infty$

a) Montrer que $\forall x > 0$, on peut écrire : $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

b) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+h)$ quand $h \to 0$.

d) En déduire que pour $x \to +\infty$, on a l'équivalent : $\varphi(x) \sim \frac{1}{2x^2}$.

e) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

3. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

4. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que : $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

(On utilisera : $\ln(2) \simeq 0{,}7$ *et* $\ln(3) \simeq 1{,}1$.*)*

5. On définit la fonction φ comme suit :

```
function y=phi(x)
  y = log(x) - log(x+1) + 1/x
endfunction
```

Compléter la dichotomie pour encadrer α dans un intervalle $[a;b]$ d'amplitude $\leqslant 10^{-2}$.

```
a = ---
b = ---
while ---
  m = (a+b)/2
  if ---
    then a = m
    else b = m
  end
end
```

Après exécution du script, la commande `disp([a,b])` affiche : `0.4635417 0.46875`

Une variable à densité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité de probabilité la fonction f donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2\cdot(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$ *(où α désigne le réel défini à la question 4.)*

6. a) Rappeler l'expression de $\varphi'(x)$.

b) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

c) Déterminer la fonction de répartition de X.

7. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$.

8. a) Démontrer que pour $x > \alpha$, on a : $x \cdot f(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$.

b) En déduire que l'espérance de X est donnée par : $\mathbb{E}[X] = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

c) Donner un encadrement de $\mathbb{E}[X]$ par deux entiers consécutifs.

9. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?