

TP Scilab 3 : simulation de lois

Le fichier `lois.sci` est un résumé des fonctions construites dans le dernier TP. On donnera à chaque fois les paramètres nécessaires avant d'invoquer les fonctions.

Fonction	Loi modélisée	Valeurs
<code>normale(x)</code>	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	\mathbb{R} (densité)
<code>geom(n)</code>	$\mathcal{G}(p)$	$\{1 : n\}$
<code>poisson(n)</code>	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\{0 : n\}$

1 Avec le générateur `grand`

Le générateur aléatoire `grand` permet d'obtenir un échantillon des lois usuelles, avec la syntaxe :

`grand` (lignes, colonnes, "loi", arguments)

Loi de probabilités		Paramètre	Arguments
uniforme discrète	$\mathcal{U}\{m : n\}$	"uin"	Low (= m) High (= n)
binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	"bin"	n (= n) p (= p)
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	"poi"	mu (= λ)
géométrique (de Pascal)	$\mathcal{G}(p)$	"geom"	p (= p)

Exercice 1 (Fonctions statistiques usuelles)

- Obtenir un échantillon `echBin` de 100 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{3}{10})$. Tracer l'histogramme obtenu.
- Quelle est la moyenne des valeurs de `echBin`? (`help mean`)
- Quel est l'écart-type des valeurs de `echBin`?
- Quelles sont les valeurs extrémales de `echBin`?

Exercice 2 (Confronter un histogramme à la distribution théorique)

- Obtenir un échantillon `echBin` suffisant de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{3}{10})$. Tracer l'histogramme obtenu.
- Tracer par dessus de cet histogramme la distribution théorique (commande `binomial`)
En utilisant les fonctions du fichier `lois.sci`;
- mêmes questions pour les distributions $\mathcal{P}(5)$ et $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$

Exercice 3 (Approximation binomiale-normale : « TCL binomial »)

Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, et $p \in]0; 1[$ raisonnable :

- Obtenir un échantillon `echBin` de 10^5 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$. Tracer l'histogramme obtenu.
- Tracer la densité normale de même espérance et écart-type sur l'histogramme. Que constate-t-on?

2 Vérifications de simulations

Exercice 4 (*Simulation directe de la loi géométrique*)

1. Compléter le fichier `simuGeom.sci` pour simuler une valeur de la loi géométrique.
2. Écrire une fonction avec une boucle `for` pour construire un échantillon de taille N .
3. Vérifier la conformité de l'histogramme obtenu.

Exercice 5 (*Stabilité de la loi de Poisson*)

Vérifier empiriquement le résultat de stabilité connu :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ sont indépendantes, alors $S = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(a + b)$.

Détails de l'approche

1. Obtenir deux échantillons de lois de Poisson \mathcal{P} .
2. Les sommer, et faire l'histogramme.
3. Comparer avec le résultat attendu.

Exercice 6 (*Stabilité de la loi géométrique*)

Vérifier empiriquement le résultat de stabilité connu :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(b)$ sont indépendantes, alors $I = \min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(a + b - ab)$.

Détails de l'approche

1. Obtenir deux échantillons de lois géométrique \mathcal{G} .
2. Construire leur min, et faire l'histogramme. Confronter au résultat attendu.

Proposition 1 (*Stabilité additive de la loi de Poisson*)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires.

On suppose que $\blacktriangleright \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la v.a. X_i est de Poisson : $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$

\blacktriangleright les $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont **mutuellement indépendantes**.

Alors leur somme $S = X_1 + \dots + X_n$ est une v.a. de Poisson : $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Exercice 7 (*Opérations par colonnes, lignes*)

(avec le fichier `uneMatrice.sci`)

1. Que retourne la fonction `uneMatrice()` ?
2. Calculer la somme de toutes les valeurs de la matrice A obtenue.
3. Que retournent les commandes `sum(A, "r")` et `sum(A, "c")` ?

Application : stabilité de la loi de Poisson

1. Obtenir un échantillon de 5 lignes de loi de Poisson.
2. Sommer ligne-à-ligne cet échantillon.
3. Confronter l'histogramme à la distribution.