TP Scilab 3 : simulation de lois

Le fichier `lois.sci` est un résumé des fonctions construites dans le dernier TP. On donnera à chaque fois les paramètres nécessaires avant d'invoquer les fonctions.

Fonction	Loi modélisée	Valeurs
`normale(x)`	$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$ *(densité)*
`geom(n)`	$\mathcal{G}(p)$	$\{1:n\}$
`poisson(n)`	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\{0:n\}$

1 Avec le générateur `grand`

Le générateur aléatoire `grand` permet d'obtenir un échantillon des lois usuelles, avec la syntaxe :

```
grand (lignes, colonnes, "loi", arguments)
```

Loi de probabilités		Paramètre	Arguments			
uniforme discrète	$\mathcal{U}\{m:n\}$	`"uin"`	`Low`	$(=m)$	`High`	$(=n)$
binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	`"bin"`	`n`	$(=n)$	`p`	$(=p)$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	`"poi"`	`mu`	$(=\lambda)$		
géométrique (de Pascal)	$\mathcal{G}(p)$	`"geom"`	`p`	$(=p)$		

Exercice 1 (*Fonctions statistiques usuelles*)

1. Obtenir un échantillon `echBin` de 100 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10,\frac{3}{10}\right)$.
   Tracer l'histogramme obtenu.
2. Quelle est la moyenne des valeurs de `echBin` ? *(`help mean`)*
3. Quel est l'écart-type des valeurs de `echBin` ?
4. Quelles sont les valeurs extrémales de `echBin` ?

Exercice 2 (*Confronter un histogramme à la distribution théorique*)

1. Obtenir un échantillon `echBin` suffisant de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10,\frac{3}{10}\right)$.
   Tracer l'histogramme obtenu.
2. Tracer par dessus de cet histogramme la distribution théorique *(commande `binomial`)*

En utilisant les fonctions du fichier `lois.sci` ;

3. mêmes questions pour les distributions $\mathcal{P}(5)$ et $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 3 (*Approximation binomiale-normale : « TCL binomial »*)

Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, et $p \in]0;1[$ raisonnable :

1. Obtenir un échantillon `echBin` de 10^5 valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}(N,p)$.
   Tracer l'histogramme obtenu.
2. Tracer la densité normale de même espérance et écart-type sur l'histogramme.
   Que constate-t-on ?

2 Vérifications de simulations

Exercice 4 (***Simulation directe de la loi géométrique***)

1. Compléter le fichier `simuGeom.sci` pour simuler une valeur de la loi géométrique.
2. Écrire une fonction avec une boucle `for` pour construire un échantillon de taille `N`.
3. Vérifier la conformité de l'histogramme obtenu.

Exercice 5 (***Stabilité de la loi de Poisson***)

Vérifier empiriquement le résultat de stabilité connu :
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ sont indépendantes, alors $S = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(a+b)$.

Détails de l'approche

1. Obtenir deux échantillons de lois de Poisson $\mathcal{P}$.
2. Les sommer, et faire l'histogramme.
3. Comparer avec le résultat attendu.

Exercice 6 (***Stabilité de la loi géométrique***)

Vérifier empiriquement le résultat de stabilité connu :
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$ $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$ sont indépendantes, alors $I = \min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(a+b-ab)$.

Détails de l'approche

1. Obtenir deux échantillons de lois géométrique $\mathcal{G}$.
2. Construire leur min, et faire l'histogramme. Confronter au résultat attendu.

Proposition 1 (***Stabilité additive de la loi de Poisson***)

Soient $X_1, \ldots X_n$ des variables aléatoires.
On suppose que
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, la v.a. X_i est de Poisson : $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$
- les $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont **mutuellement indépendantes**.

Alors leur somme $S = X_1 + \ldots + X_n$ est une v.a. de Poisson : $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

Exercice 7 (***Opérations par colonnes, lignes***)

(avec le fichier `uneMatrice.sci`*)*

1. Que retourne la fonction `uneMatrice()` ?
2. Calculer la somme de toutes les valeurs de la matrice `A` obtenue.
3. Que retournent les commandes `sum(A,"r")` et `sum(A,"c")` ?

Application : stabilité de la loi de Poisson

1. Obtenir un échantillon de 5 lignes de loi de Poisson.
2. Sommer ligne-à-ligne cet échantillon.
3. Confronter l'histogramme à la distribution.