

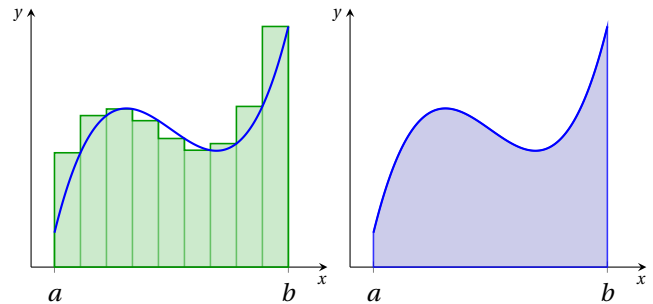
TP 4- Couples de variables aléatoires

1 Estimation d'intégrale

Proposition 1 (Sommes de Riemann)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \rightarrow +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt.$$



Exercice 1 (Calcul d'intégrale par méthode des rectangles)

- Combien vaut $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$? Calculer $\ln(2)$ avec Scilab.
- Définir la fonction `function` $y = f(x)$ représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- Obtenir le vecteur x donnant la subdivision régulière à $N+1$ pas du segment $[0; 1]$.
- `plotter` x contre $y=f(x)$,
 - une fois avec `plot2d2`
 - une fois avec `plot2d`
- Calculer la moyenne de y .
Comparer avec $\ln(2)$.

Exercice 2 (Transfert simple et la méthode de Monte-Carlo)

- Obtenir un échantillon X de taille N de la loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$. Calculer sa moyenne.
- Obtenir l'échantillon $Y = f(X)$. Calculer sa moyenne. Comparer avec $\ln(2)$.
- `plotter` X contre Y , avec la cosmétique convenable.
- Les échantillons X et Y sont-ils indépendants?
Calculer le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$, grâce à `correl(X, Y)`.

2 Nuages de points

Exercice 3 (Coefficient de corrélation et indépendance)

- Obtenir deux échantillons X et Y , de taille N , indépendants, de loi $\mathcal{E}(2)$.
- Avec la cosmétique convenable, `plotter` X contre Y .
(copier-coller la cosmétique précédente mais commenter la ligne avec `data_bounds`.)
 - À quoi ressemble le nuage de points d'un couple indépendant?
- Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(X, Y)$? (encore `correl(X, Y)`.)
(Vocabulaire : on dit que X et Y sont **décorrélées** si $\sigma(X, Y) = 0$.)
- Calculer la moyenne du produit : `mean(X.*Y)`
et le produit des moyennes: `mean(X) * mean(Y)`

Exercice 4 (Fréquences empiriques)

1. Obtenir un échantillon aléatoire X de 8 valeurs de loi $\mathcal{U}([0; 1])$.
2. Afficher le résultat de la commande `X<.5`
À quoi correspondent les T et F? (Ce sont des **Booléens**)
3. a) Que donne la commande : `1*(X<.5)` ?
b) Comment compter le nombre de T? La fréquence des T? (On utilisera `sum` et `mean`)

Dans toute la suite, on reprendra les échantillons X et Y de l'Exercice 3.

Exercice 5 (Médiane et un test d'indépendance)

1. Obtenir les médianes de X et Y .
2. Définir les deux vecteurs :
 - ▶ `booleanX=1*(X<median(X))`
 - ▶ `booleanY=1*(Y<median(Y))`.
3. Combien retournent `mean(booleanX)` et `mean(booleanY)` ?
4. Combien retourne `mean(booleanX.*booleanY)` ?
En quoi ce résultat corrobore-t-il l'indépendance de X et Y ?

Définition 2 (Covariance)

Sous réserve de convergence, on définit la covariance de deux variables X, Y comme

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Proposition 3 (König-Huygens)

On retrouve aussi une formule de König-Huygens pour la covariance, sous la forme :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Définition 4 (Corrélation)

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On suppose que X, Y ont une variance $\neq 0$.
On appelle **coeff. de corrélation** de X, Y :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}.$$

On a : $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Proposition 5 (Indép. : cond. néc.)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.
On suppose X, Y **indépendantes**.
Alors sous réserve d'existence :

$$1. \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

2. X, Y sont **décorrélées** :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(X, Y) = 0.$$

Exercice 6 (Min. et max. exponentielles)

1. Définir leur minimum `minim` et leur maximum `maxim` de X et Y .
2. `plotter minim` contre `maxim`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `minim` et `maxim` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(I, M)$? (encore `correl(minim, maxim)`)

Exercice 7 (Somme et différence exponentielles)

1. Définir la somme `somme` et leur différence `diffe` de X et Y .
2. `plotter somme` contre `diffe`, avec la cosmétique convenable.
3. Combien vaut le coefficient de corrélation? (encore `correl(somme, diffe)`)
Les échantillons `somme` et `diffe` sont-ils pour autant indépendants?