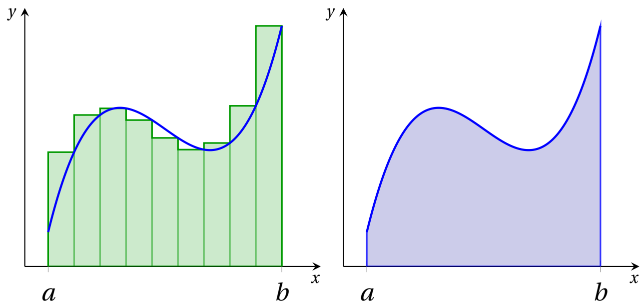
TP 4- Couples de variables aléatoires

1 Estimation d'intégrale



Proposition 1 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors pour $n \to +\infty$, on a la convergence :

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 1 (*Calcul d'intégrale par méthode des rectangles*)

1. Combien vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$? Calculer ln(2) avec Scilab.
2. Définir la fonction `function y = f(x)` représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Obtenir le vecteur `x` donnant la subdivision régulière à `N+1` pas du segment $[0;1]$.
4. `plot`ter `x` contre `y=f(x)`, ▸ une fois avec `plot2d2`
   ▸ une fois avec `plot2d`
5. Calculer la moyenne de `y`.
   Comparer avec ln(2).

Exercice 2 (*Transfert simple et la méthode de Monte-Carlo*)

1. Obtenir un échantillon `X` de taille `N` de la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. Calculer sa moyenne.
2. Obtenir l'échantillon `Y = f(X)`. Calculer sa moyenne. Comparer avec ln(2).
3. `plot`ter `X` contre `Y`, avec la cosmétique convenable.
4. Les échantillons `X` et `Y` sont-ils indépendants ?
   Calculer le coefficient de corrélation $\sigma(X,Y)$, grâce à `correl(X, Y)`.

2 Nuages de points

Exercice 3 (*Coefficient de corrélation et indépendance*)

1. Obtenir deux échantillons `X` et `Y`, de taille `N`, indépendants, de loi $\mathcal{E}(2)$.
2. a) Avec la cosmétique convenable, `plot`ter `X` contre `Y`.
   (copier-coller la cosmétique précédente mais commenter la ligne avec `data_bounds`*.)*
   b) À quoi ressemble le nuage de points d'un couple indépendant ?
3. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(X,Y)$? *(encore* `correl(X,Y)`*.)*
   *(**Vocabulaire :** on dit que X et Y sont **décorrélées** si $\sigma(X,Y) = 0$.)*
4. Calculer la moyenne du produit : `mean(X.*Y)`
   et le produit des moyennes: `mean(X) * mean(Y)`

Exercice 4 (*Fréquences empiriques*)

1. Obtenir un échantillon aléatoire `X` de 8 valeurs de loi $\mathcal{U}([0;1])$.
2. Afficher le résultat de la commande `X<.5`
   À quoi correspondent les `T` et `F` ? *(Ce sont des **Booléens**)*
3. a) Que donne la commande : `1*(X<.5)` ?
   b) Comment compter le nombre de `T` ? La fréquence des `T` ? *(On utilisera `sum` et `mean`)*

Dans toute la suite, on reprendra les échantillons `X` et `Y` de l'Exercice 3.

Exercice 5 (*Médiane et un test d'indépendance*)

1. Obtenir les médianes de `X` et `Y`.
2. Définir les deux vecteurs :
   - `booleenX=1*(X<median(X))`
   - `booleenY=1*(Y<median(Y))`.
3. Combien retournent `mean(booleenX)` et `mean(booleenY)` ?
4. Combien retourne `mean (booleenX.*booleenY)` ?
   En quoi ce résultat corrobore-t-il l'indépendance de `X` et `Y` ?

Définition 2 (*Covariance*)

Sous réserve de convergence, on définit la covariance de deux variables X, Y comme

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\cdot\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big].$$

Proposition 3 (*König-Huygens*)

On retrouve aussi une formule de König-Huygens pour la covariance, sous la forme :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

Définition 4 (*Corrélation*)

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On suppose que X, Y ont une variance $\neq 0$.
On appelle **coeff. de corrélation** de X, Y :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

On a : $\quad -1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.

Proposition 5 (*Indép. : cond. néc.*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.
On suppose X, Y **indépendantes**.
Alors sous réserve d'existence :

1. $\mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$.
2. X, Y sont **décorrélées** :
   $$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(X,Y) = 0.$$

Exercice 6 (*Min. et max. exponentielles*)

1. Définir leur minimum `minim` et leur maximum `maxim` de `X` et `Y`.
2. `plot`ter `minim` contre `maxim`, avec la cosmétique convenable.
3. Expliquer pourquoi les échantillons `minim` et `maxim` ne sont pas indépendants.
4. Combien vaut le coefficient de corrélation $\sigma(I, M)$? *(encore `correl(minim,maxim)`)*

Exercice 7 (*Somme et différence exponentielles*)

1. Définir la somme `somme` et leur différence `diffe` de `X` et `Y`.
2. `plot`ter `somme` contre `diffe`, avec la cosmétique convenable.
3. Combien vaut le coefficient de corrélation ? *(encore `correl(somme,diffe)`)*
   Les échantillons `somme` et `diffe` sont-ils pour autant indépendants ?