TP 5 - Urnes d'Ehrenfest et de Pólya

Exercice 1 (*Urne d'Ehrenfest*)

On dispose d'une urne initialement remplie de n boules :
- des bleues
- des vertes

On y effectue une succession illimitée de tirages.
À chacun, on remplace la boule tirée par une boule de la **couleur opposée**.
Le contenu de l'urne est donc toujours de n boules.

1. Écrire une fonction Scilab : `function nouveau=suivant(actuel)`, où :
- `actuel` est le nombre de boules bleues dans l'urne **au moment du tirage**.
- `nouveau` est le nombre de boules bleues dans l'urne **suite au tirage**.

On pourra supposer que :
- les boules de l'urne sont numérotées de 1 à n.
- on note `alea` le numéro de la boule tirée à ce tirage. *(c'est une variable de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.)*
- les premières boules `1:actuel` sont les boules **bleues**
- les dernières boules `actuel+1:n` sont les boules **vertes**

2. En utilisant une boucle `for k=1:T`, simuler la répétition de `T` tirages.

3. Tracer la trajectoire décrite par le nombre de boules bleues dans l'urne.

On souhaite corroborer le résultat suivant.
Si le contenu **initial** de l'urne est de :
- X boules bleues
- $n-X$ boules bleues
- pour une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Alors, **après** T **tirages**, le nombre de boules bleues dans l'urne est **encore** de loi $\hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

4. Grâce aux fonctions du fichier `ehrenfest.sce`, corroborer ce résultat.

5. Que se passe-t-il si le contenu initial de l'urne est d'une autre distribution que $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$?

Exercice 2 (*Urne de Pólya*)

On dispose d'une urne initialement remplie de 2 boules :
- une bleue
- une verte

On y effectue une succession illimitée de tirages.
À chacun, on replace la boule tirée par **deux** boules de la **même couleur** opposée.
Après t tirages, le contenu de l'urne est donc de $t+2$ boules.

1. Écrire une fonction Scilab : `function nouveau=suivant(actuel,nombreBoules)`, où :
   - `actuel` est le nombre actuel de boules bleues dans l'urne **au moment du tirage**.
   - `nombreBoules` est le nombre actuel **total** de boules dans l'urne au moment du tirage.
   - `nouveau` est le nombre actuel de boules bleues dans l'urne **suite au tirage**.

   On pourra supposer que :
   - les boules de l'urne sont numérotées de 1 à `nombreBoules`
   - on note `alea` le numéro de la boule tirée à ce tirage. *(de loi $\mathcal{U}([\![1,$`nombreBoules`$]\!])$.)*
   - les premières boules `1:actuel` sont les boules **bleues**
   - les dernières boules `actuel+1:nombreBoules` sont les boules **vertes**
2. En utilisant une boucle `for k=1:T`, simuler la répétition de `T` tirages.
3. Tracer la trajectoire décrite par le **nombre** de boules bleues dans l'urne.
4. Tracer la trajectoire décrite par la **proportion** de boules bleues dans l'urne.

On souhaite corroborer le résultat suivant.
Après t **tirages**, le nombre de boules bleues dans l'urne est de loi $\hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,t+1]\!])$.

5. Grâce aux fonctions du fichier `polya.sce`, corroborer ce résultat.