TP 7 - Diagonalisation et matrices de transition

Exercice 1 (*Diagonalisation par la commande* `spec`)

On se propose de définir et d'étudier J_n, la matrice $n \times n$ remplie de 1, avec des 0 sur la diagonale.

1. Le cas $n = 3$

a) Définir à la main la matrice J_3.

b) En utilisant la commande `spec(J)`, trouver les valeurs propres de J_3.

c) En utilisant la syntaxe `[P,D]=spec(J)`, vérifier la diagonalisation $J_3 = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(On pourra se débarasser des erreurs d'arrondi en utilisant la commande `clean`*)*

d) Vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$ élevé, on a : $J_3^k \approx \frac{2^k}{3} \cdot (I_3 + J_3)$.

2. Le cas n général

a) Que donnent les commandes `eye(i,j)` et `ones(i,j)` ?

b) Définir une fonction `function J=maMatrice(n)` qui retourne la matrice J_n.

c) Trouver le spectre de la matrice J_n.

d) Quelle approximation trouve-t-on, quand k est élevé, pour J_n^k ?

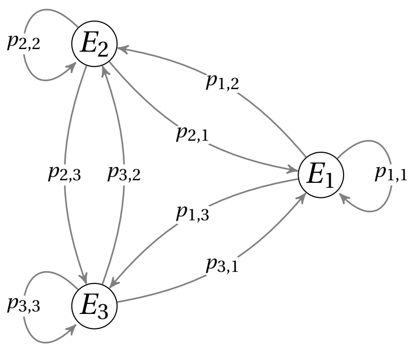
1 Simulation markovienne

Une **chaîne de Markov** est un **processus stochastique** : une famille de variables aléatoires liées entre elles et que l'on étudie toutes ensembles.
En l'occurrence, elle prend la forme d'une suite $X_0, X_1, \dots X_n \dots$ de variables aléatoires toutes à valeurs dans un **ensemble d'états** $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots\}$.

Définition 1 (*Probabilités de transition*)

La chaîne de Markov est décrite par les probabilités conditionnelles dites de **transition** $\mathbb{P}(X_{t+1} = e_i | X_t = e_j)$:

la « proba. de passer »
- de l'état j à l'instant t
- à l'état i à l'instant suivant $t + 1$.



Le graphe des transitions entre les états E_1, E_2, E_3 encode la matrice *(des probabilités)* de transition : $T = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{bmatrix}$

La première colonne donne ainsi les probabilités de transition depuis l'état E_1, *etc.*

Exercice 2 (*Une chaîne de Markov symétrique*)

On dispose de trois états A,B,C.
On se déplace aléatoire entre ceux-ci, en partant de l'état A.
À chaque étape, on passe d'un état donné à l'un des deux autres, chacun avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Faire le diagramme des transitions pour cette chaîne de Markov.
En déduire la matrice de transition de la chaîne de Markov.

2. Définir cette matrice `T` dans Scilab.

3. Obtenir une trajectoire de cette marche, en utilisant la commande ci-dessous.

```
trajectoire = grand(20,"markov",T',1)
plot(trajectoire)
```

4. À quoi correspondent les paramètres `20`, `T'`, `1` ?

5. Qu'obtient-on dans le cas suivant ?

```
trajectoire = grand(20,"markov",T',ones(1,2))
plot(trajectoire')
```

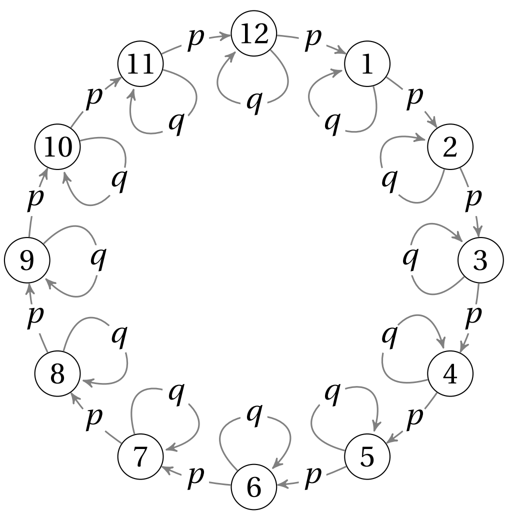
6. Comment obtient-on la 1ère et la 20ème colonne de `trajectoire` ?
À quoi correspondent-elles ?

7. Avec un échantillon suffisant, faire l'histogramme des ces deux colonnes.

Exercice 3 (*L'horloge détraquée*)

Au passage de chaque heure, l'aiguille peut

- passer à la graduation suivante, avec probabilité p
- rester sur la même, avec probabilité $q = 1 - p$



1. Écrire la matrice de transition pour quelques états.

2. Décrire la matrice de transition pour l'état 12.

3. Entrer la matrice de transition grâce à la fonction `circulante`.

4. Simuler une trajectoire avec `p = 0.8`.

5. Simuler une trajectoire avec `p = 0.2`.

6. Faire les 4 histogrammes suivants de la chaîne de Markov : $\begin{cases}\text{après 3 étapes}\\ \text{après 100 étapes}\end{cases}$ et $\begin{cases}\text{pour } \texttt{p=0.8}\\ \text{pour } \texttt{p=0.2}\end{cases}$

(On utilisera `histplot` *avec* `classes=0:12`*)*