TP 9 - Études de convergences numériques

On étudie trois méthodes pour approximer la constante $\sqrt{2}$.
À chaque fois, on constuit une suite (u_n) telle que $\lim(u_n) = \sqrt{2}$.
L'objectif est de comparer numériquement les trois méthodes.
On modélisera les erreurs de ces approximations par : $\epsilon_n = \left|u_n^2 - 2\right| \to 0$.

Exercice 1 (*Méthode de dichotomie*)

1. Programmer la méthode de dichotomie pour la fonction : $p(x) = x^2 - 2$.
   On choisira pour u_n, l'approximation par défaut.

La convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 (*Développement en fraction continue*)

1. Montrer que : $\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = 1$.
2. En déduire l'écriture : $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Le nombre $\sqrt{2}$ est donc un point fixe de la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$.
On admet : $\sqrt{2} = \lim(u_n)$, avec la suite (u_n) définie par :
- $u_0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer, pour $p, q > 0$, l'écriture : $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+2q}{p+q}$.

Ainsi, la suite (u_n) ci-dessus s'écrit : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}$
- $p_{n+1} = p_n + 2q_n$,
- $q_{n+1} = p_n + q_n$,
- $p_0 = q_0 = 1$.

4. Programmer le calcul des suites $(p_n), (q_n)$.
   Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation de Pell-Fermat : $p_n^2 - 2 \cdot q_n^2 = \pm 1$.
5. Vérifier que, pour : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $A \cdot \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (d'où : $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie aussi que : $A^{n+1} = \begin{bmatrix} p_n & 2q_n \\ q_n & p_n \end{bmatrix}$.)
6. Trouver les valeurs propres de A.

On en déduit que la convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$ est géométrique de raison : $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.
(Un peu meilleure que la dichotomie.)

Exercice 3 (*Méthode de Newton*)

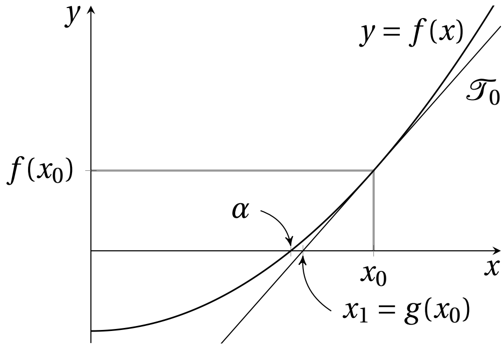
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

- f' ne s'annule pas
- f s'annule une seule fois, en α.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{T}_0$ la tangente en x_0.

1. La tangente $\mathcal{T}_0$ coupe l'axe des abscisses.
Calculer l'abscisse $x_1 = g(x_0)$ de l'intersection.

Si $x_0 \simeq \alpha$, alors x_1 est une estimation encore meilleure.



La **méthode de Newton** définit une suite (x_n) par $\forall n \geqslant 0, x_{n+1} = g(x_n)$.

2. Trouver les points fixes de g. En déduire que si (x_n) converge, c'est vers α.

Pour la fonction définie par : $p(x) = x^2 - 2$ la fonction g est définie par : $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Exercice 4

1. Programmer la suite définie par :
- $u_0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

2. Montrer, pour $p, q > 0$, l'écriture : $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2+2q^2}{2 \cdot p \cdot q}$.

Ainsi, la suite (u_n) ci-dessus s'écrit : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}$
- $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$,
- $q_{n+1} = p_n^2 + q_n^2$,
- $p_0 = q_0 = 1$.

3. Programmer le calcul des suites $(p_n), (q_n)$.
Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation de Pell-Fermat : $p_n^2 - 2 \cdot q_n^2 = \pm 1$.

4. Vérifier que, pour : $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $A^{2^n} = \begin{bmatrix} p_n & 2q_n \\ q_n & p_n \end{bmatrix}$.

5. Trouver les valeurs propres de A.

On en déduit que la convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$ est en : $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}$.