課題３
「文字列処理と動的計画法」

井之上　直也，吉留　崇

2016年度プログラミング演習A

本課題で学ぶこと

- **編集距離**
  - 文字列処理 ← 課題 1
  - 再帰的手続き ← 課題2
  - **動的計画法**

・問題3-0：編集距離の解説
・問題内にも解説あり

編集距離（Edit Distance）

2つの文字列がどのくらい似ているかを表す指標

x :	ス	ー	パ			ー	マ	リ	オ	
	コピー	削除	コピー	挿入	挿入	コピー	コピー	置換	削除	編集操作
y :	ス		パ	イ	ダ	ー	マ	ン		

文字列 x を文字列 y に変換する時の「削除」，「挿入」，「置換」の最小回数（「コピー」はカウントしない）

今回の例の編集距離 ＝ 5

スペルチェッカーやDNAの配列の解析に応用

文字列に対する数学記号

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x :	a	b	b	a	b	a	a	a	b

文字列 x の長さ：$|x|$

例）$|x| = 9$

文字列 x の i 番目の文字：x_i または $x[i]$

例）$x_4 = \mathrm{a}$

文字列 x の先頭から i 番目までの文字列：X_i ⇒ 接頭辞

例）$X_4 = \mathrm{abba}$

長さ 0 の文字列：ε

編集距離の定義

文字列 x=<x_1, x_2,…,x_m>, y=<y_1, y_2,…,y_n>の接頭辞X_i, Y_jの編集距離: $c_{i,j}$

$$c_{i,j} = \begin{cases} \max(i, j) & (i = 0 \text{または} j = 0 \text{の時}) \\ \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \\ \qquad c_{i-1,j} + 1, & (\text{その他}) \\ \qquad c_{i,j-1} + 1) \end{cases}$$

$$\delta(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 \ (x_i \neq y_j) \\ 0 \ (x_i = y_j) \end{cases}$$

編集距離の計算方法

$$c_{i,j}\langle X_i, Y_j\rangle = \min\left(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1\right),$$

$c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j)$: 置換 $(x_i \neq y_j)$ / コピー $(x_i = y_j)$

$c_{i-1,j} + 1$: 削除

$c_{i,j-1} + 1$: 挿入

$c_{i,0}\langle X_i, \varepsilon\rangle = i,$ 削除 $\quad c_{0,j}\langle \varepsilon, Y_j\rangle = j$ 挿入

$$\delta(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & (x_i \neq y_j) \\ 0 & (x_i = y_j) \end{cases}$$

再帰関数による実装

動的計画法による実装

再帰的に計算

$c_{2,2}$<ab, cd>

$$c_{i,j} <X_i,\ Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \qquad c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

再帰的に計算

$c_{1,1}<a, c>$ $+\delta(b,d)$

$c_{2,2}<ab, cd>$

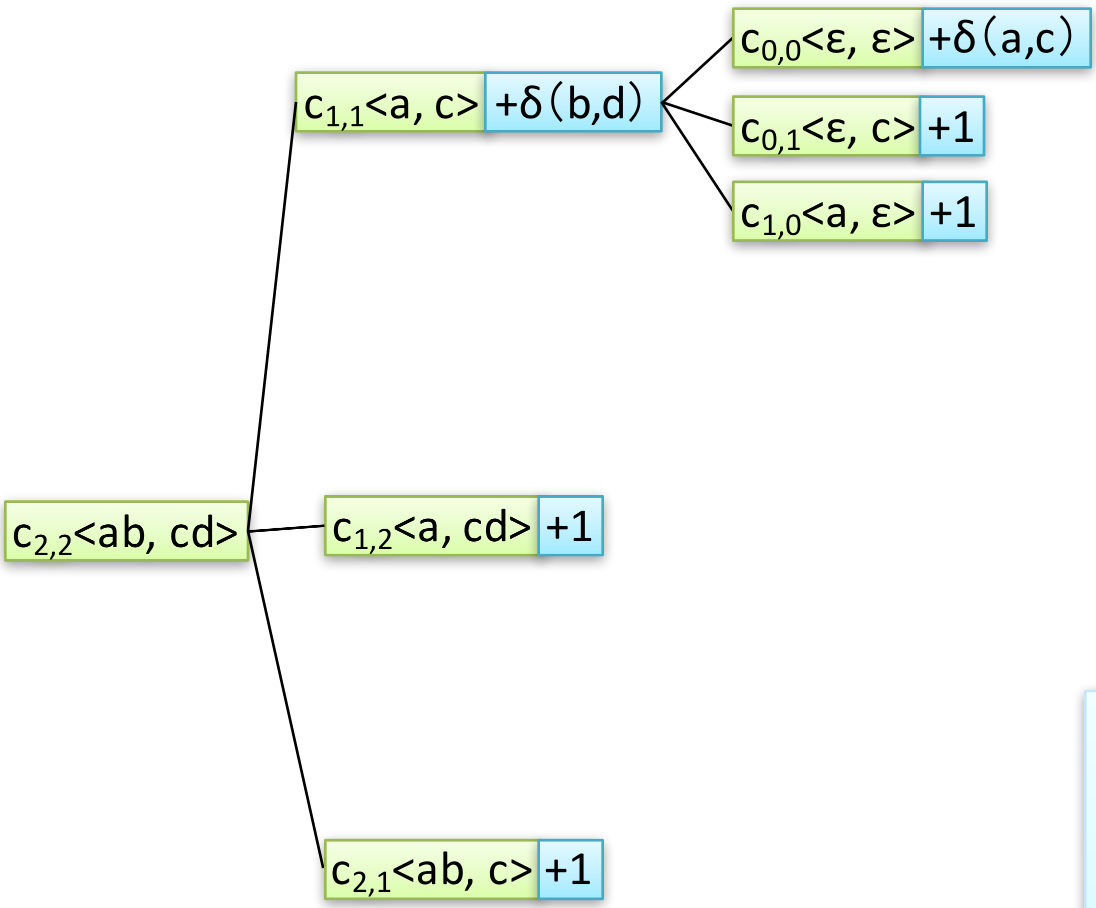
$c_{1,2}<a, cd>$ $+1$

$c_{2,1}<ab, c>$ $+1$

$$c_{i,j} <X_i,\ Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \qquad c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

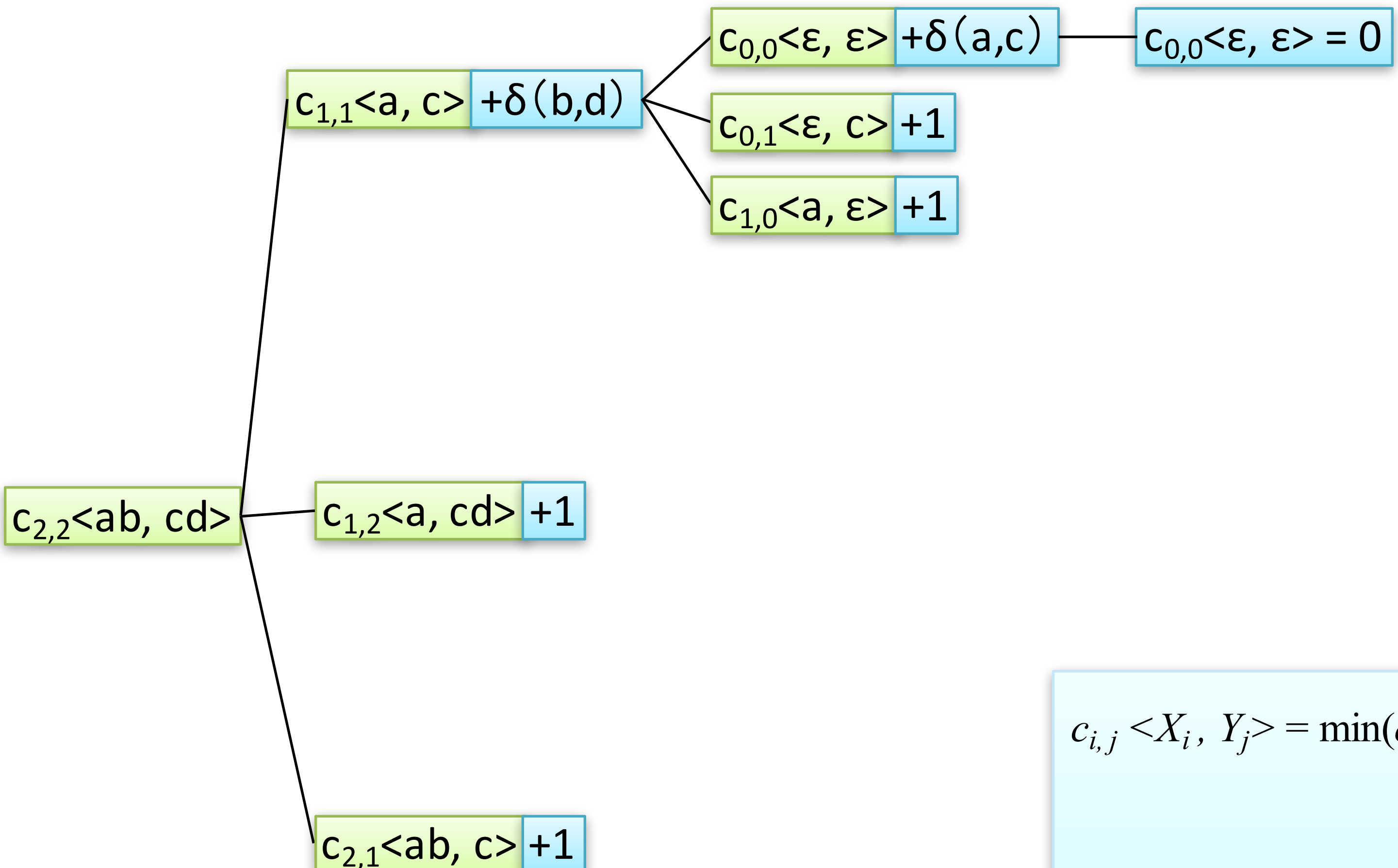
再帰的に計算



$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \qquad c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

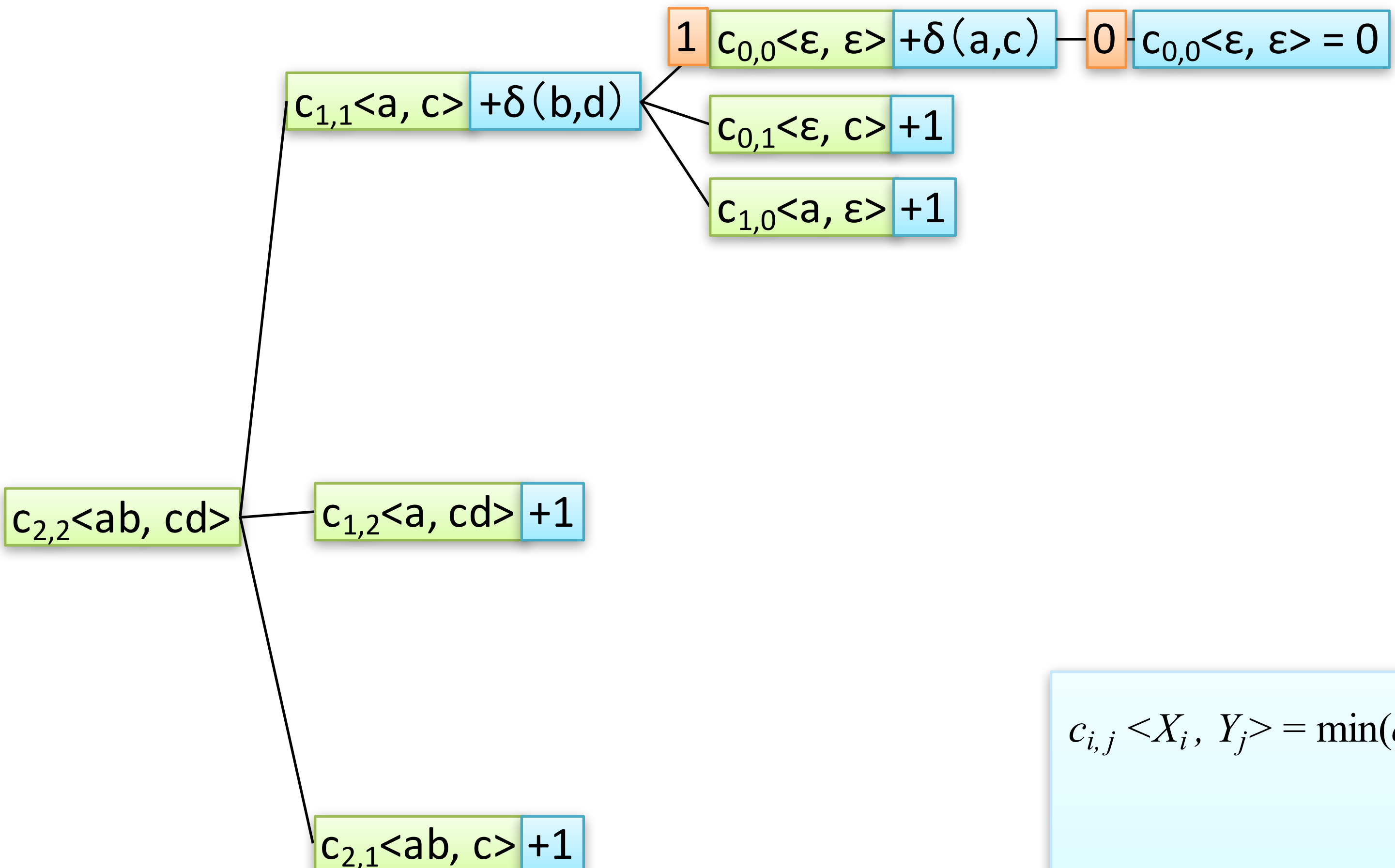
再帰的に計算



$$
\begin{aligned}
c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i$, $c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$

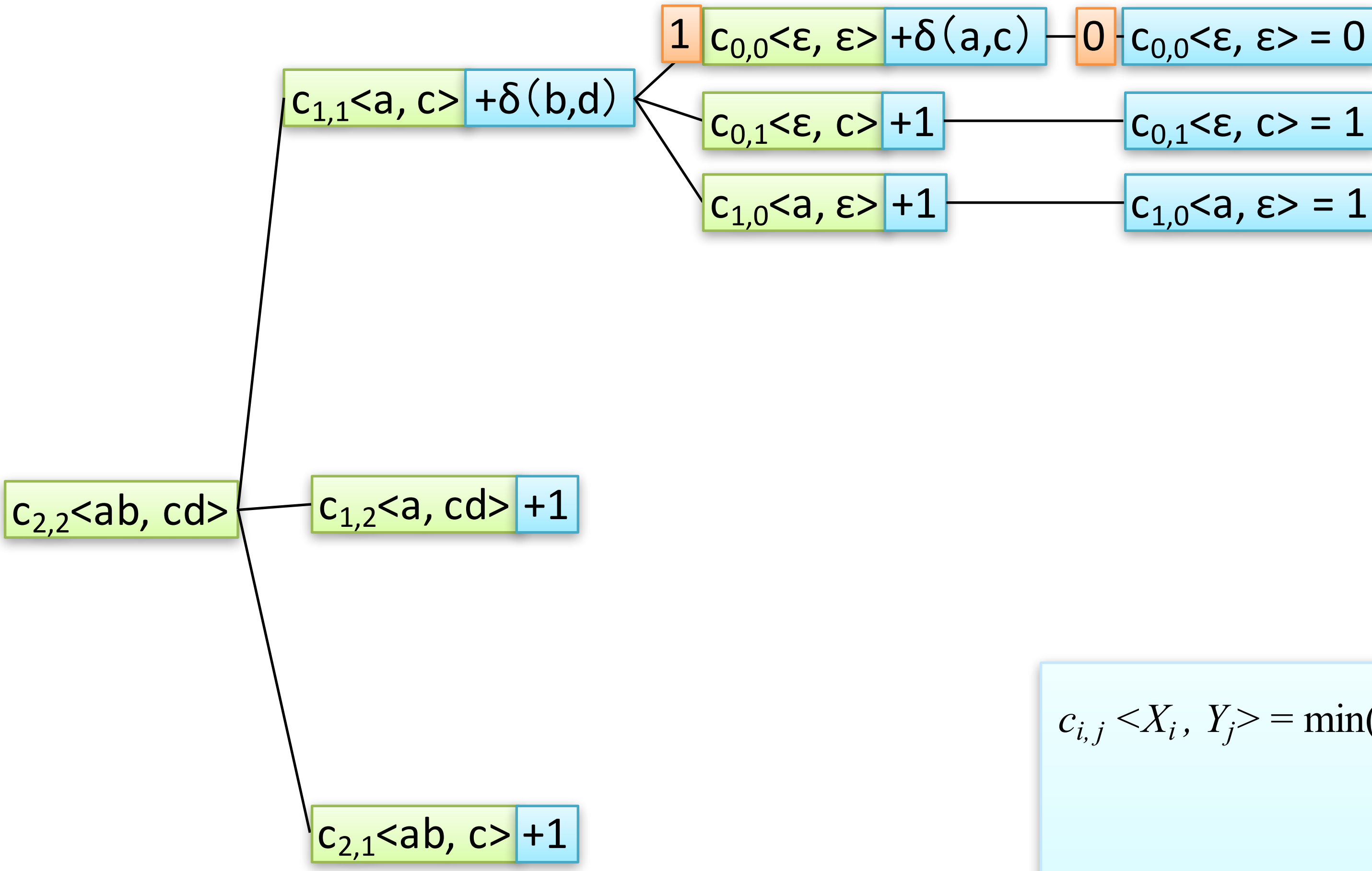
再帰的に計算



$$
\begin{aligned}
c_{i,j} \langle X_i,\ Y_j \rangle = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$$c_{i,0} \langle X_i, \varepsilon \rangle = i, \qquad c_{0,j} \langle \varepsilon, Y_j \rangle = j$$

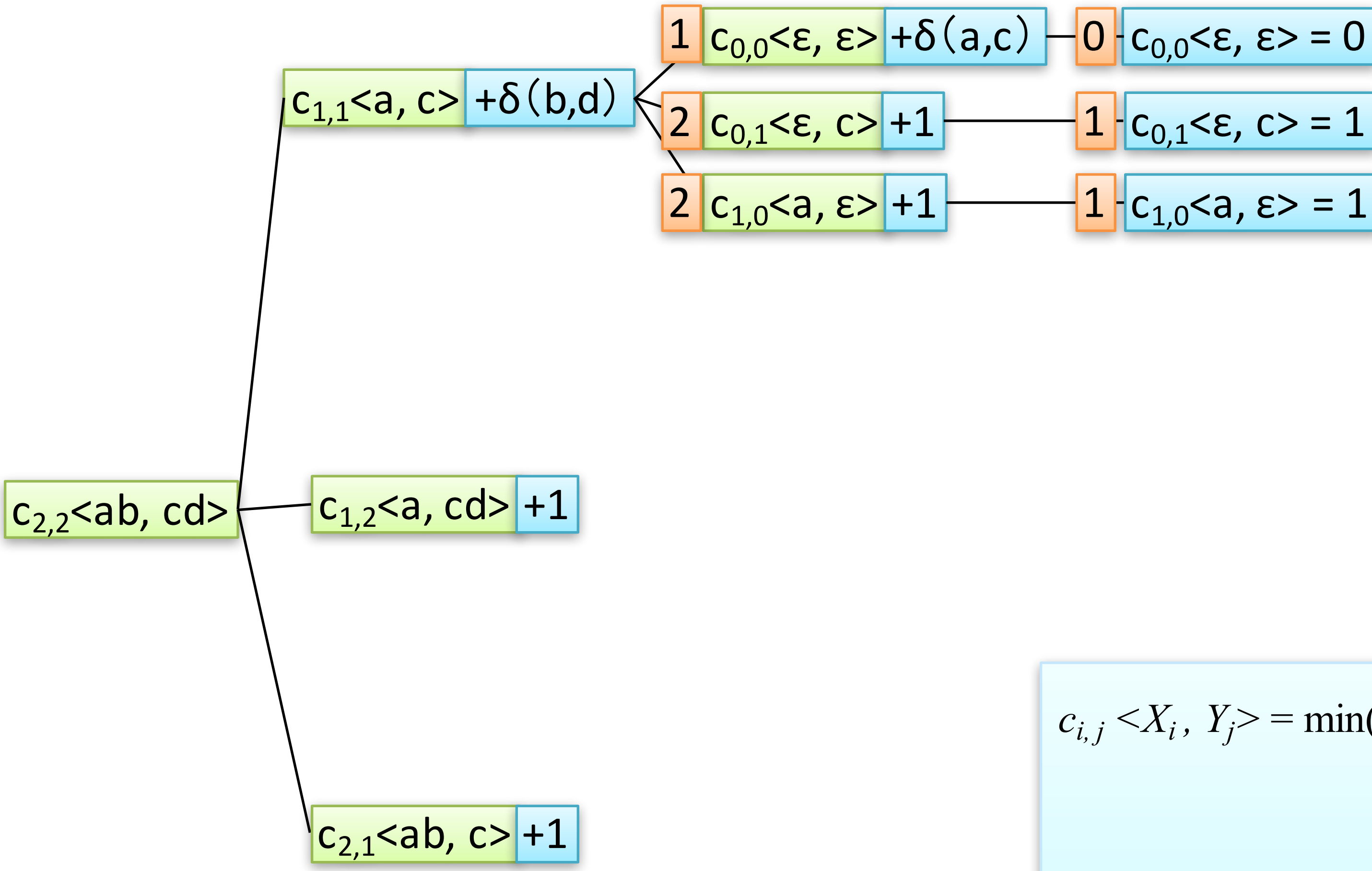
再帰的に計算



$$
\begin{aligned}
c_{i,j}\langle X_i,\ Y_j\rangle = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$$c_{i,0}\langle X_i, \varepsilon\rangle = i, \qquad c_{0,j}\langle \varepsilon, Y_j\rangle = j$$

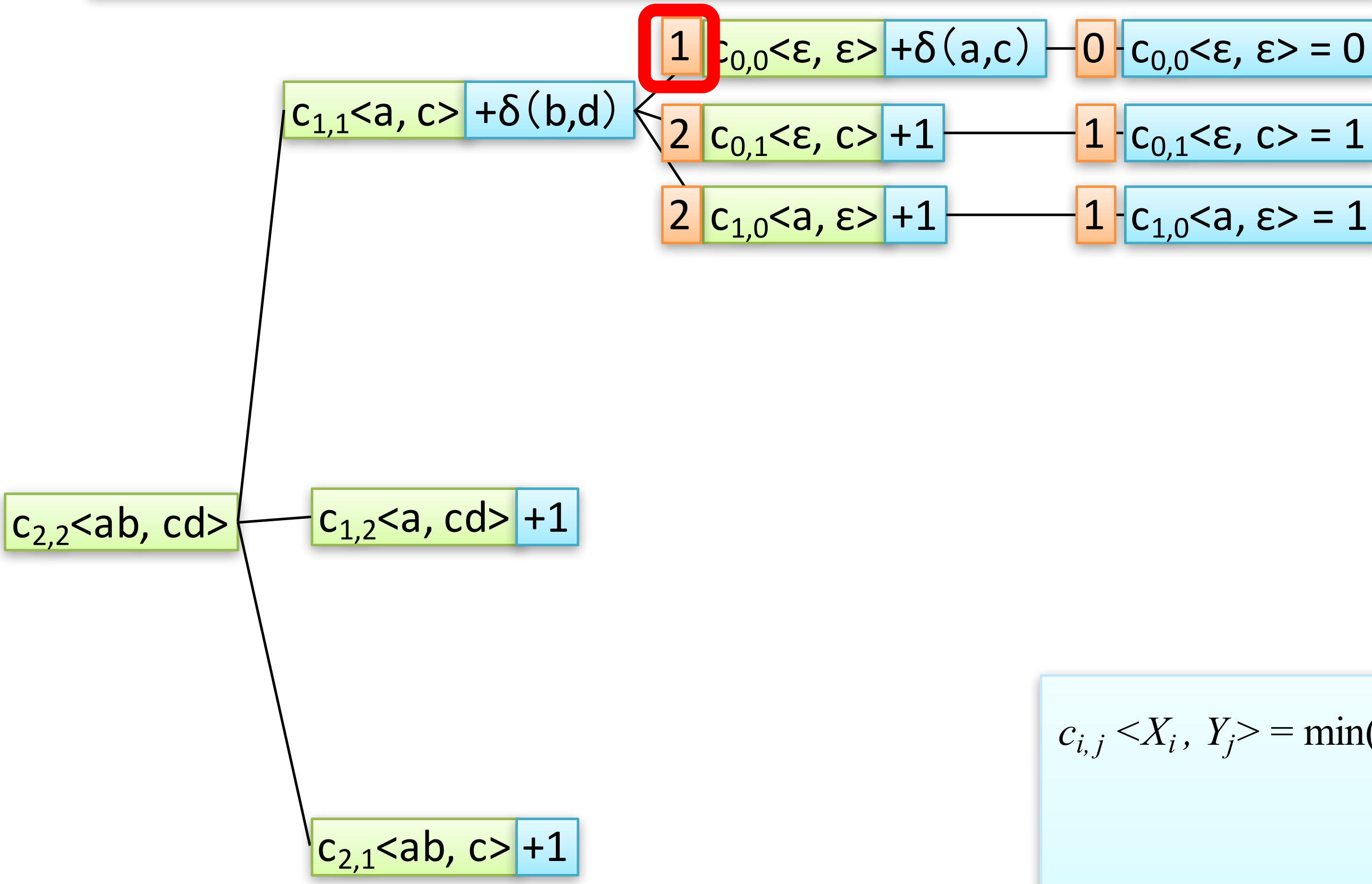
再帰的に計算



$$
\begin{aligned}
c_{i,j} <X_i,\ Y_j> = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,$ $\qquad c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$

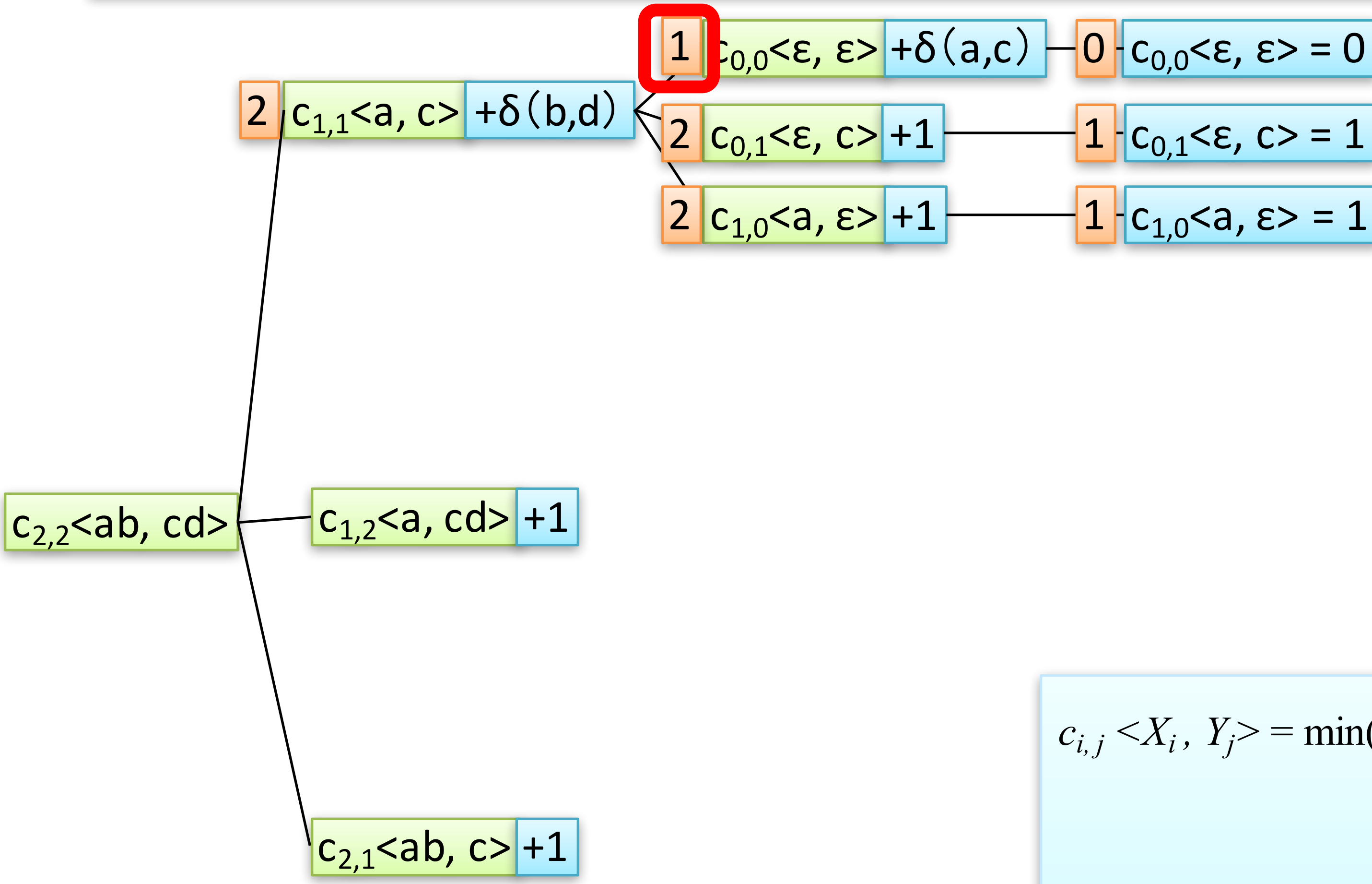
再帰的に計算



$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\; c_{i-1,j} + 1,\; c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \qquad c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

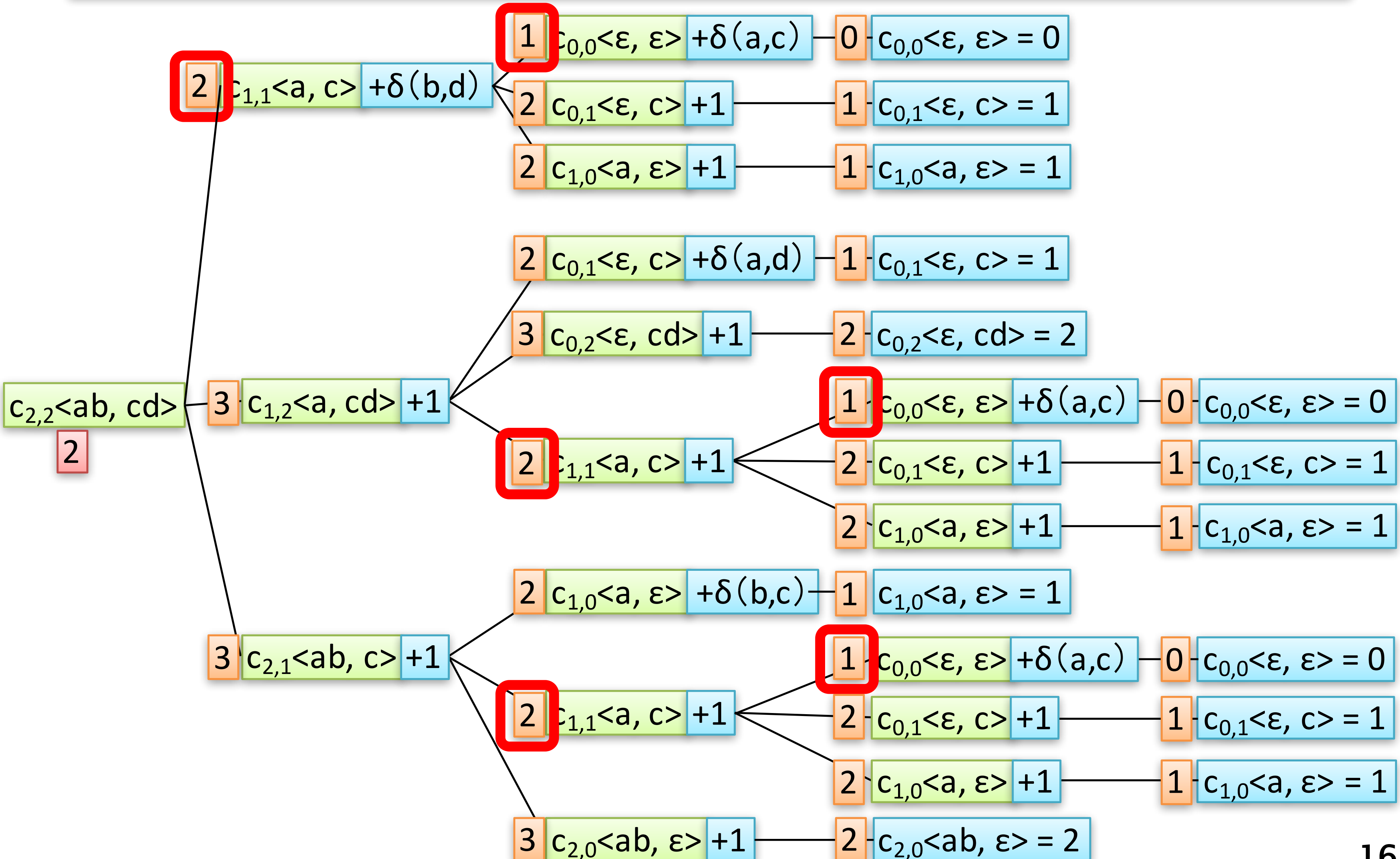
再帰的に計算



$$c_{i,j}\langle X_i, Y_j\rangle = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\; c_{i-1,j} + 1,\; c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0}\langle X_i, \varepsilon\rangle = i, \qquad c_{0,j}\langle \varepsilon, Y_j\rangle = j$$

再帰的に計算


1 c0,0<ε, ε> +δ(a,c)
0 c0,0<ε, ε> = 0
2 c1,1<a, c> +δ(b,d)
2 c0,1<ε, c> +1
1 c0,1<ε, c> = 1
2 c1,0<a, ε> +1
1 c1,0<a, ε> = 1
2 c0,1<ε, c> +δ(a,d)
1 c0,1<ε, c> = 1
3 c0,2<ε, cd> +1
2 c0,2<ε, cd> = 2
c2,2<ab, cd>
2
3 c1,2<a, cd> +1
1 c0,0<ε, ε> +δ(a,c)
0 c0,0<ε, ε> = 0
2 c1,1<a, c> +1
2 c0,1<ε, c> +1
1 c0,1<ε, c> = 1
2 c1,0<a, ε> +1
1 c1,0<a, ε> = 1
2 c1,0<a, ε> +δ(b,c)
1 c1,0<a, ε> = 1
3 c2,1<ab, c> +1
1 c0,0<ε, ε> +δ(a,c)
0 c0,0<ε, ε> = 0
2 c1,1<a, c> +1
2 c0,1<ε, c> +1
1 c0,1<ε, c> = 1
2 c1,0<a, ε> +1
1 c1,0<a, ε> = 1
3 c2,0<ab, ε> +1
2 c2,0<ab, ε> = 2

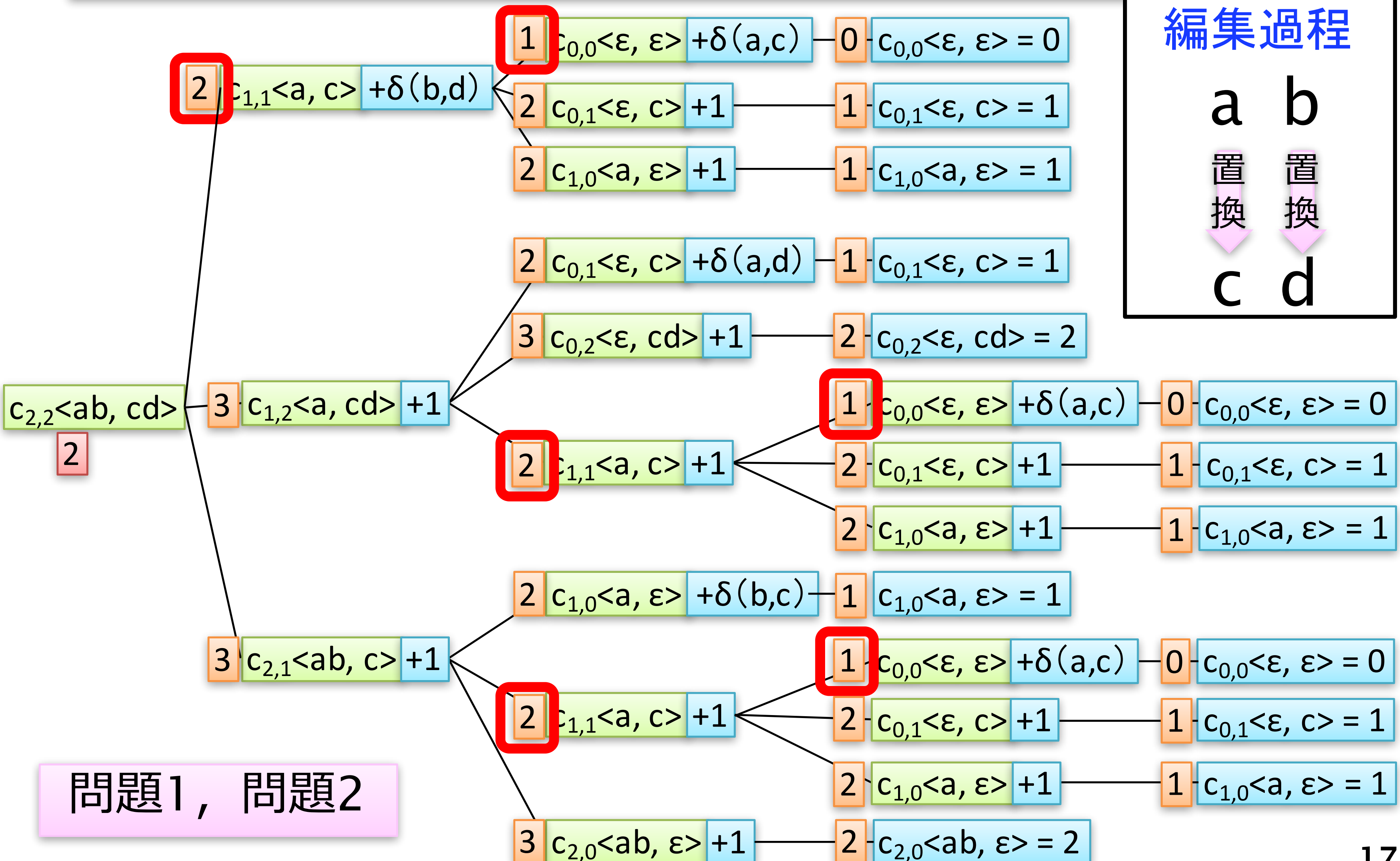
再帰的に計算

編集距離を与える編集過程

a b

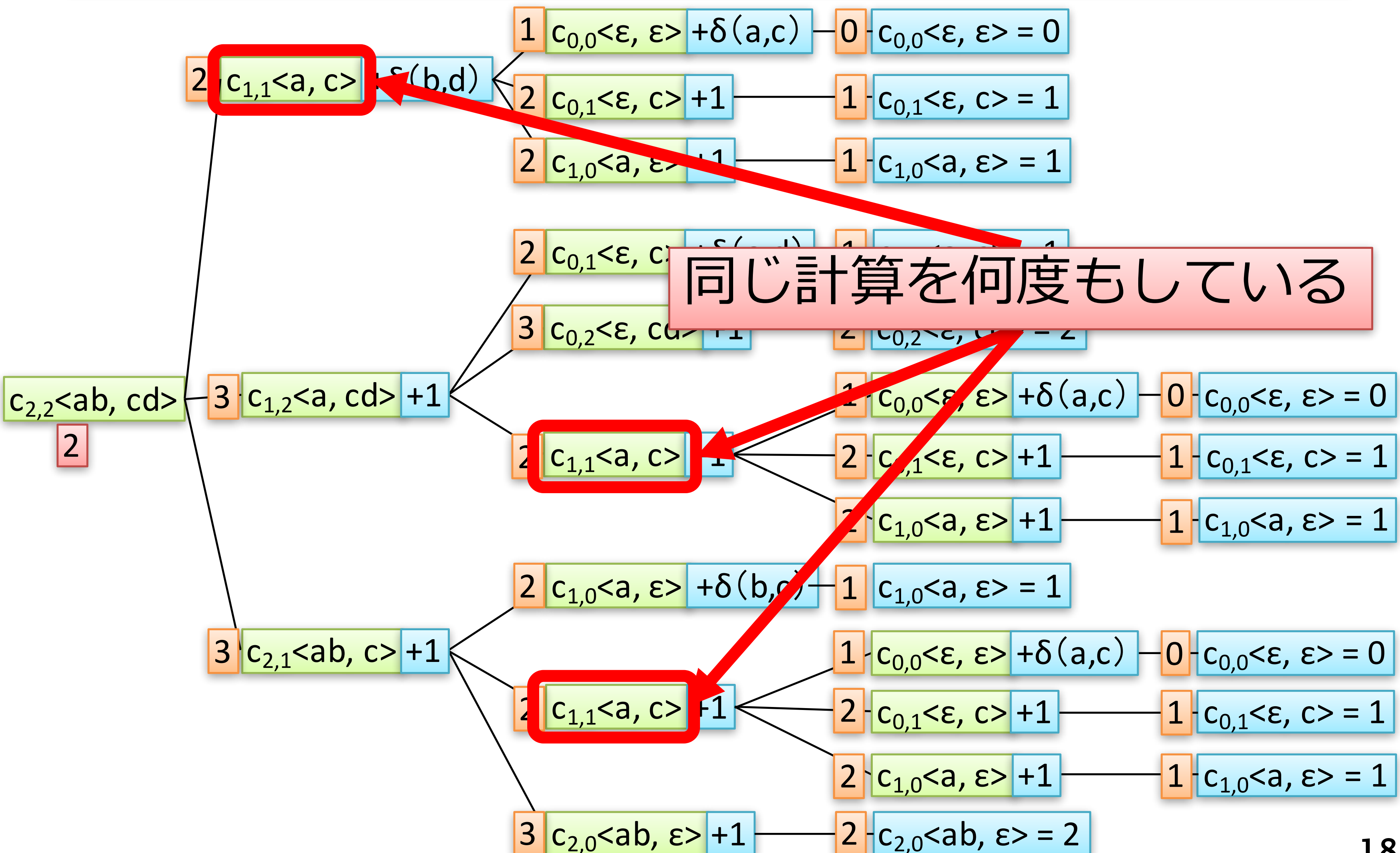
置換 置換

c d



問題1，問題2

再帰的計算の問題点



$c_{2,2}\langle ab, cd\rangle$
2
2 $c_{1,1}\langle a, c\rangle$ +δ(b,d)
1 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle$ +δ(a,c)
0 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle = 0$
2 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle$ +1
1 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle = 1$
2 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle$ +1
1 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle = 1$
3 $c_{1,2}\langle a, cd\rangle$ +1
2 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle$
3 $c_{0,2}\langle ε, cd\rangle$ +1
1 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle$ +δ(a,c)
0 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle = 0$
2 $c_{1,1}\langle a, c\rangle$ +1
2 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle$ +1
1 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle = 1$
2 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle$ +1
1 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle = 1$
3 $c_{2,1}\langle ab, c\rangle$ +1
2 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle$ +δ(b,c)
1 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle = 1$
2 $c_{1,1}\langle a, c\rangle$ +1
1 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle$ +δ(a,c)
0 $c_{0,0}\langle ε, ε\rangle = 0$
2 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle$ +1
1 $c_{0,1}\langle ε, c\rangle = 1$
2 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle$ +1
1 $c_{1,0}\langle a, ε\rangle = 1$
3 $c_{2,0}\langle ab, ε\rangle$ +1
2 $c_{2,0}\langle ab, ε\rangle = 2$
同じ計算を何度もしている

再帰的計算の問題点

- **同じ計算を何度も行うため計算量大**

⇒ メモ化（memoization）による対策

一度計算したものをメモとして記憶，次に計算するときはそのメモを呼び出す

問題5

動的計画法(Dynamic Programing, DP)

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$
a	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$
b	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$

$$c_{i,j} < X_i, Y_j > = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \; c_{i-1,j} + 1, \; c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} < X_i, \varepsilon > = i, \; c_{0,j} < \varepsilon, Y_j > = j$$

$C_{0,0}$、$C_{0,1}$、$C_{1,0}$が計算済みならば、$C_{1,1}$の値分かる

動的計画法(Dynamic Programing, DP)

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$
a	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$
b	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$

$$
\begin{aligned}
c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,\ c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

$C_{0,1}$、$C_{0,2}$、$C_{1,1}$が計算済みならば、$C_{1,2}$の値分かる

動的計画法(Dynamic Programing, DP)

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$
a	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$
b	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$

$$
\begin{aligned}
c_{i,j} \langle X_i, Y_j \rangle = \min(& c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \\
& c_{i-1,j} + 1, \\
& c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$$
c_{i,0} \langle X_i, \varepsilon \rangle = i,\ c_{0,j} \langle \varepsilon, Y_j \rangle = j
$$

$C_{1,1}$、$C_{1,2}$、$C_{2,1}$が計算済みならば、$C_{2,2}$の値分かる

動的計画法(Dynamic Programing, DP)

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	$c_{0,0}$	$c_{0,1}$	$c_{0,2}$
a	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
b	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$

$$
\begin{aligned}
c_{i,j} <X_i,\ Y_j> = \min(&c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\
&c_{i-1,j} + 1,\\
&c_{i,j-1} + 1)
\end{aligned}
$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,\ c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

ボトムアップに$C_{i,j}$を求める

↓

編集距離$C_{2,2}$得られる

同じ計算は1度のみ ⇒ 計算量減

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε			
a			
b			

$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \; c_{i-1,j} + 1, \; c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \; c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	0 →	1 →	2
a			
b			

$$c_{i,j} \langle X_i,\ Y_j \rangle = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$c_{i,0} \langle X_i, \varepsilon \rangle = i$, $c_{0,j} \langle \varepsilon, Y_j \rangle = j$

$c_{0,0}\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = 0$, $c_{0,1}\langle \varepsilon, \mathrm{c} \rangle = 1$, $c_{0,2}\langle \varepsilon, \mathrm{cd} \rangle = 2$

動的計画法による計算

$c_{i,j}<\mathrm{ab}, \mathrm{cd}>$

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1		
b	2		

$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\\ c_{i-1,j} + 1,\\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,\ c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

$c_{0,0}<\varepsilon, \varepsilon> = 0,\ c_{1,0}<\mathrm{a}, \varepsilon> = 1,\ c_{2,0}<\mathrm{ab}, \varepsilon> = 2$

動的計画法による計算

$c_{i,j}<ab, cd>$

		c	d
ε	0	1	2
a	1	1	
b	2		

0+δ(a,c)
= 0+1=1

1+1=2

1+1=2

$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,\ c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

$$c_{1,1}<\mathrm{a}, \mathrm{c}> = \min(c_{0,0}<\varepsilon, \varepsilon> + \delta(\mathrm{a}, \mathrm{c}),\ c_{0,1}<\varepsilon, \mathrm{c}> + 1,\ c_{1,0}<\mathrm{a}, \varepsilon> + 1)$$

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε		d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2		

1+δ(a,d)
= 1+1=2

2+1=3

1+1=2

$$c_{i,j} \langle X_i,\ Y_j \rangle = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),$$
$$c_{i-1,j} + 1,$$
$$c_{i,j-1} + 1)$$

$$\langle X_i, \varepsilon \rangle = i,\ c_{0,j} \langle \varepsilon, Y_j \rangle = j$$

$$c_{1,2}\langle \mathrm{a, cd} \rangle = \min(c_{0,1}\langle \varepsilon, \mathrm{c} \rangle + \delta(\mathrm{a, d}),$$
$$c_{0,2}\langle \varepsilon, \mathrm{cd} \rangle + 1,$$
$$c_{1,1}\langle \mathrm{a, c} \rangle + 1)$$

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε		1	2
a	1	1	2
b	2	2	

$1+\delta(b,c)$
$= 1+1=2$

1+1=2

2+1=3

$$c_{i,j} \langle X_i, Y_j \rangle = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j),\ c_{i-1,j} + 1,\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} \langle X_i, \varepsilon \rangle = i,\ c_{0,j} \langle \varepsilon, Y_j \rangle = j$$

$$c_{2,1}\langle ab, c\rangle = \min(c_{1,0}\langle a, \varepsilon\rangle + \delta(b, c),\ c_{1,1}\langle a, c\rangle + 1,\ c_{2,0}\langle ab, \varepsilon\rangle + 1)$$

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2	2	2

1+δ(b,d)
= 1+1=2

2+1=3

2+1=3

$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \\ c_{i-1,j} + 1, \\ c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i,\ c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

$$c_{2,2}<\mathrm{ab, cd}> = \min(c_{1,1}<\mathrm{a, c}> + \delta(\mathrm{b, d}) \\ c_{1,2}<\mathrm{a, cd}> + 1, \\ c_{2,1}<\mathrm{ab, c}> + 1)$$

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2	2	2

$$c_{i,j} <X_i, Y_j> = \min(c_{i-1,j-1} + \delta(x_i, y_j), \; c_{i-1,j} + 1, \; c_{i,j-1} + 1)$$

$$c_{i,0} <X_i, \varepsilon> = i, \; c_{0,j} <\varepsilon, Y_j> = j$$

ここが編集距離

問題3，問題4

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

編集操作の求め方

値を埋める際に使ったデータの流れの矢印を表示

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2	2	2

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2	2	2

編集操作の求め方

矢印を180°回転

矢印の意味：

← 挿入 (insert: I)

↑ 削除 (delete: D)

↖ 置換 (replace: R) ($x_i \neq y_j$のとき)
コピー (copy: =) ($x_i = y_j$のとき)

動的計画法による計算

$c_{i,j}$<ab, cd>

	ε	c	d
ε	0	1	2
a	1	1	2
b	2	2	2

編集操作の求め方

右下から０の部分までたどっていったときの矢印が編集操作（ただし，編集操作が１つに決まるとは限らない）

a b

置換 置換

c d

R R

問題6

課題3：全部で7問

- 問題1（10点）　[記述問題]再帰による編集距離の計算（手書き可）
- 問題2（10点）　再帰関数による実装
- 問題3（10点）　[記述問題]動的計画法による編集距離の計算（手書き可）

2週目の面接のみ受付

- 問題4（10点）　動的計画法による実装
- 問題5（20点）　[プログラム＋記述問題]再帰呼び出しにおけるメモ化
- 問題6（10点）　編集操作の表示
- 問題7（10点）　スペル訂正器の作成

記述問題：問題1および問題3

- **本日説明した編集距離を求める方法についてレポートにまとめる**

  問題1：再帰的な方法

  ◆ 途中経過を省略してはいけない（接頭辞の編集距離をすべて求める，添字（$C_{i,j}$のi,jのこと）をすべて書く，編集操作が分かるようにする）

  ◆ 編集操作を説明できるようにすること

  ◆ 編集距離を与える編集過程をすべて示す

  問題3：動的計画法

  ◆ 表形式でレポートにまとめること

プログラム＋記述問題：問題5

- **再帰関数の呼び出しのメモ化**

  レポート

  ◆ 再帰呼び出しの回数をgnuplotを用いてグラフにすること（折れ線グラフ）

  ◆ メモ化の有無によって呼び出し回数がどのようになるか考察すること

面接を受けるときの注意事項

- **C言語の用語や関数の動作をあらかじめ調べてくること**
  プログラムのソースコードに説明を書いてかまわないので,面接時に説明できるようにすること

- **課題に関する問題文をきちんと読むこと**
  問題文を読むことが解答への近道になることもあります

- **2週目の面接時に,途中だったとしても,取り組んでいる問題を持ってきましょう**
  困っていることやわからないことがあれば,面接の時にアドバイスをするので,途中のプログラムでも遠慮なく持ってきましょう