Processamento Digital de Sinais

Edmar Candeia Gurjão
ecandeia@dee.ufcg.edu.br
http://ecandeia.dee.ufcg.edu.br

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Campina Grande
Brasil

9 de setembro de 2011

Introdução

A Transformada de Fourier no tempo discreto de uma sequência $x(n)$ é dada por

$$X(e^{j\omega)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

e é uma função que leva do **tempo discreto** n para a **frequência contínua** ω.

Entretanto, no processamento digital de sinais temos que trabalhar com frequências discretas, e para isso vamos amostrar $X(e^{j\omega})$

$$X'(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \tag{2}$$

Obtendo assim a Transformada Discreta de Fourier.

Continuação

Aplicando a transformada inversa temos:

$$x'(n) = \mathcal{F}^{-1}\left\{X'(e^{j\omega})\right\} = x(n) * \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right\} \quad (3)$$

ou seja

$$x'(n) = x(n) * \frac{N}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta\left(n - Np\right) = \frac{N}{\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}x\left(n - Np\right) \quad (4)$$

Exercício

Demonstre a transformada inversa usada na passagem da Equação (3) para a Equação (4)

Observações:

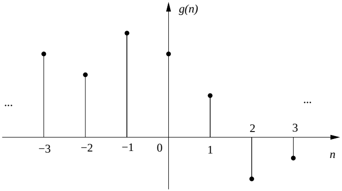
- A sequência $x'(n)$ é uma soma periódica de repetições do sinal original $x(n)$.
- A repetição ocorre a cada N instantes.
- Se o comprimento de $x(n)$ for $L > N$ não será possível recuperar esse sinal a partir de $x\prime(n)$.
- Deve-se fazer $N \geq L$ e

$$x(n) = \frac{2\pi}{N} x'(n), \quad para\ 0 \leq n \leq N-1$$

- Ao aumentar o valor de N em relação à L estamos afastando as repetições em $x'(n)$, o que facilita a recuperação de $x(n)$.

Sinais no tempo discreto

- Representados por uma sequência de números, $\{x(n),\ n \in Z\}$.
- $x(n) = x_a(nT)$, podendo T ser o período de amostragem.
- Cada $x(n)$ representa a amplitude do sinal no instante nT.



- Impulso unitário

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Impulso unitário deslocado

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n \neq m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Sinais

- Degrau unitário
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$
- Cosseno: $x(n) = \cos(\omega n)$
  - $\cos[(\omega + 2k\pi)n] = \cos(\omega n + 2kn\pi) = \cos(\omega n)$, para todo $k \in Z$.
  - A frequência de $x(n)$ acima é de ω rad/amostra, e sua frequência $\omega/2\pi$ ciclos por amostra.
  - Ex.: $x(n) = \cos \dfrac{2\pi}{16} n$ leva 16 amostras para completar um ciclo.
- Função real exponencial: $x(n) = e^{an}$
- Função exponencial complexa: $x(n) = e^{j\omega n}$

Sinais

- Rampa unitária:

$$r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Sinais no tempo discreto podem ser escritos como uma soma de impulsos

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Periodicidade

- $x(n)$ é periódica se existir $N \neq 0$ tal que $x(n+N) = x(n)$ para todo n
- N é o período da sequência $x(n)$
- Então $\cos(\omega n) = \cos(\omega(n+N))\ \forall n \in Z$ somente para $\omega N = 2\pi k$, sendo o menor período

$$N = min_{k \in N, (2\pi/\omega)k \in N} \left\{ \frac{2\pi}{\omega} \right\}$$

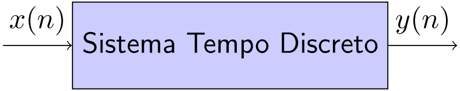
- Nem todas os cossenos discretos são periódicos.

Exemplo

Determine se $x(n) = \cos[(12\pi/5)n]$ é periódico.

Exemplo

Determine se $x(n) = \cos[0,02n + 3]$ é periódico.



- Sendo $\mathcal{H}$ a transformação imposta pelo sistema, temos:
  - Linearidade: $\mathcal{H}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = a\mathcal{H}\{x_1(n)\} + b\mathcal{H}\{x_2(n)\}$
  - Invariância ao deslocamento: Se $\mathcal{H}\{x(n)\} = y(n)$ $\mathcal{H}\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0)$
  - Causalidade: Se $x_1(n) = x_2(n)$ para $n < n_0$, então $\mathcal{H}\{x_1(n)\} = \mathcal{H}\{x_2(n)\}$ para $n < n_0$
  - Observações sobre causalidade.
  - Estabilidade

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} | h(k) | < \infty$$

Resposta ao Impulso e Soma de Convolução

Seja $\mathcal{H}\{\cdot\}$ um sistema linear e $x(n)$ uma excitação aplicada e esse sistema, tem-se

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{5}$$

e

$$y(n) = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{x(k)\delta(n-k)\}$$

$x(k)$ é uma constante, logo

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{H}\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)$$

Se o sistema é invariante no tempo $H\{\delta(n)\} = h_0(n) = h(n)$, logo

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Conclusão: Um sistema linear e invariante no tempo é completamente caracterizado por sua reposta ao impulso unitário $h(n)$.
Fazendo $l = n - k$ tem-se

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-l)h(n)$$

que é a convolução da excitação $x(n)$ com a resposta ao impulso $h(n)$, denotada por

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Exercício

Como se comporta a soma de convolução para sistemas causais ?

Equação de Diferenças

Descrevem a evolução do sistema em tempo discreto:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) - \sum_{l=0}^{M} b_l x(n-l) = 0$$

A sua solução particular depende das condições iniciais $y(-1)$, $y(-2)$, ..., $y(-N)$.

- Sistemas não recursivos $N = 0$. Nesse caso, $h(l) = b_l$, e como $0 \leq l \leq M$ temos uma resposta finita ao impulso.
- Sistemas recursivos: $N > 0$, nesse caso temos uma resposta infinita ao impulso.

Amostragem

Um sinal discreto pode ser obtido de amostras de um sinal no tempo contínuo:

$$x(n) = x_a(nT)$$

Assim, para processar um sinal no tempo contínuo usando um sinal no tempo discreto é necessário:

- Converter o sinal para o domínio discreto,
- Processar o sinal
- Converter o a saída do tempo discreto para o tempo contínuo.

Amostragem

Dado que $x(n) = x_a(nT)$ podemos definir um sinal $x_i(t)$ como um trem de impulsos nos instante nT, ou seja

$$x_i(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT) \tag{6}$$

Que podemos escrever como

$$x_i(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) = X_a(t) \sum_{n=\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x_a(t)p(t) \tag{7}$$

Sendo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{8}$$

um trem de impulsos.

Amostragem

A transformada $x_i(t)$ é dada por

$$X_i(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P(j\Omega) \tag{9}$$

A transformada de Fourier de um trem de impulsos é dada por

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \tag{10}$$

E a convolução será dada por

$$\begin{aligned} X_i(j\omega) &= \frac{1}{T} X_a(j\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Para evitar sobreposições das repetições dos espectros de $x_a(t)$ devemos ter:

- O sinal deve ser limitado em banda
- Sua largura de banda Ω_c deve ser tal que:

$$\begin{aligned} \Omega_c &< \Omega_s - \Omega_c \\ \Omega_s &> 2\Omega_c \end{aligned} \tag{12}$$

E a frequência $\Omega = 2\Omega_c$ é conhecida como **Frequência de Nyquist**.

Caso a frequência acima não seja respeitada tem sobreposição do espectro, conhecido como **aliasing**.

Amostragem

Amostragem

Transformada de Fourier

Seja $x(n)$ um sinal no tempo discreto a partir do qual pode-se escrever um sinal no tempo contínuo como

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT)$$

a Transformada de Fourier no tempo contínuo para esse sinal é dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT}$$

sendo ω a frequência analógica.
Usaremos o par

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \; e \; x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$$

Observe que $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi k)})\ \forall k \in Z$

Exemplo

Calcular a T.F. de

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases} \tag{13}$$

Sol. $X(e^{j\omega}) = \sum_{j=0}^{5} e^{-j\omega k}$, *e usando a propriedade*

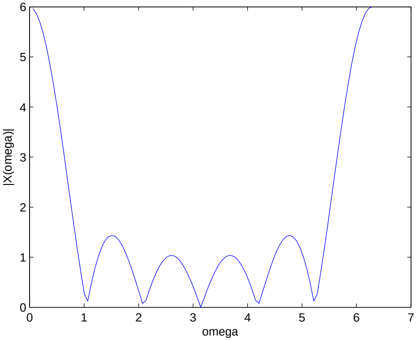
$$S(N_0, N_1) = \sum_{k=N_0}^{N_1} a^k = \frac{a^{N_0} - a^{N_1+1}}{1-a}$$

tem-se

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-6j\omega}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\frac{5\omega}{2}} \frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-6j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\frac{5\omega}{2}} \frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}$$



Transformada de Fourier

Seja $x(n) = \cos\frac{2\pi}{10}n$ com

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{10}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{10}\right), \; -\pi \leq \omega < \pi$$

Vamos observar como se comporta $X(e^{j\omega})$ a medida que acrescentamos cossenos a $x(n)$.

Transformada de Fourier

Condição de existência:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | x(n) |< \infty$$

$x(n)$ deve ser absolutamente somável.

Propriedades

Representaremos o sinal $x(n)$ e sua transformada $X(e^{j\omega})$ por

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

ou

$$\mathcal{F}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

- **Periodicidade:** $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- **Linearidade:** Se $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ e $y(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$ então

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$$

- **Deslocamento no tempo:** $x(n-n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$

Exercício

Prove a propriedade do deslocamento no tempo.

Propriedades (continuação)

- **Multiplicação por uma exponencial complexa:** $e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

- **Diferenciação e Integração:** Se $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ então

$$x(n) - x(n-1) \leftrightarrow (1 - e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \leftrightarrow \frac{1}{(1-e^{j\omega})}X(j\omega) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Propriedades (continuação)

- **Relação de Parseval:** Se $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid x(n) \mid^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid X(e^{j\omega}) \mid^2 d\omega$$

- $\mid X(e^{j\omega}) \mid^2$ é conhecida como **Densidade Espectral de Energia** de $x(n)$

Propriedades (continuação)

- **Convolução:** Se $x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$ e $x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$então

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

- **Multiplicação:** Se $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ e $y(t) \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$então

$$x(t).y(t) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$$

Transformada Discreta de Fourier

$X(e^{j\omega})$ é a T.F. no tempo contínuo para a sequência discreta $x(n)$, uma função contínua em ω e periódica com período 2π.
Tomando N amostras uniformemente espaçadas entre 0 e 2π, tem-se

$$X'(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

e assim

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X'(e^{j\omega})\} = x(n) * \mathcal{F}^{-1}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)\}$$

sabendo que

$$\mathcal{F}^{-1}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)\} = \frac{N}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - Np)$$

Transformada Discreta de Fourier

tem-se

$$x'(n) = x(n) * \frac{N}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - Np) = \frac{N}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n - Np)$$

Logo $x'(n)$ é uma soma de repetições periódicas de $x(n)$, assim devemos fazer

$$x(n) = \frac{2\pi}{N} x'(n), \; para \; 0 \leq n \leq N - 1$$

Observações

- Deve-se escolher $N \geq L$, sendo L o comprimento de $x(n)$.
- Usando as amostras da transformada de Fourier pode-se recuperar o sinal finito no tempo discreto.
- A escolha de $N \geq L$ é dual a $f_s \geq 2B$

Pode-se ainda escrever

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\delta(\omega - \frac{2\pi}{n}k)$$

e aplicando a transformada inversa tem-se

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X'(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (14) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}})\delta(\omega - \frac{2\pi}{N})e^{j\omega n}d\omega \end{aligned}$$

De onde podemos fazer:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}k.n},\ 0 \leq n \leq N$$

Transformada Discreta de Fourier

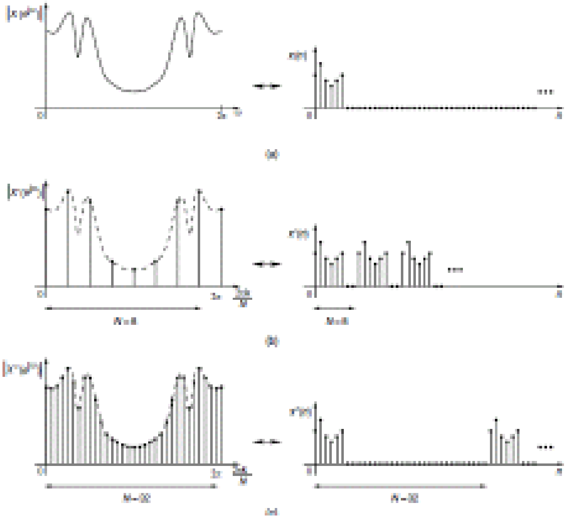
Assim:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}})e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\ o \leq n \leq N-1$$

A transformada discreta será dada por

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ 0 \leq k \leq N-1$$

Transformada Discreta de Fourier



Transformada Discreta de Fourier

Para simplificar a notação vamos usar $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ e teremos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad para\ 0 \leq k \leq N-1 \ (1)$$

e

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad para\ 0 \leq n \leq N-1$$

- Uma representação na frequência discreta para sinais de comprimento finito, $x(n)$ de comprimento N é mapeado em N coeficientes na frequência discreta.
- A série de Fourier de um sinal periódico tem período N.

Exemplo

Encontre a DFT para

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Exercício

Calcular a DFT de $x(n) = \cos n\omega_0$, $0 \leq n \leq N-1$.

As propriedades DFT são as mesmas da Transformada de Fourier.

Forma Matricial

Podemos escrever

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad para\ 0 \leq k \leq N-1$$

como

$$X(k) = [W_N^0 \; W_N^k \; W_N^{2k} \; ... \; W_N^{(N-1)k}] \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

Ou ainda

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ . \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

e de forma resumida

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}.$$

Observe que são necessárias N^2 multiplicações complexas para calcular uma DFT de tamanho N.

Forma Matricial

Observando que

$$W_N^k = e^{-j(2\pi/N)k} = e^{-j2\pi/(N/k)} = W_{N/k}$$

Implemente a DFT para calcular pelo forma matricial considerando dois casos:

- Sem considerar a simplificação acima.
- Considerando a simplificação.

Varie N e compare as duas implementações em termos de tempo de processamento.
O sinal de teste pode ser um pulso de tamanho N e amplitude unitária.

Propriedades

- **Linearidade:** Sendo $x(n) = k_1 x_1(n) + k_2 x_2(n)$ então

$$X(k) = k_1 X_1(k) + k_2 X_2(k)$$

- **Reversão no tempo:** A DFT de $x(-n)$ é $X(-k)$.
- **Deslocamento no tempo:** $x(n+l) \leftrightarrow W_N^{-lk} X(k)$

  Como $x(n)$ é periódica, devemos encarar $x(n+l)$ obtido da IDFT aplicada à $W_N^{-lk} X(k)$ como um deslocamento circular de $x(n)$.

Exemplo

Dado a DFT de comprimento 6 de $x(n)$

$$X(k) = \begin{cases} 4, & k = 0 \\ 2, & 1 \leq k \leq 5 \end{cases}$$

Calcule $x(n)$e $Y(n)$ para $Y(k) = W_6^{-2k} X(k)$.

Propriedades

- **Deslocamento circular na frequência:**

$$W_N^{ln} x(n) \leftrightarrow X(k+l)$$

- **Convolução circular no tempo:** Sendo $x(n)$ e $h(n)$ sequências periódicas com período N, então

$$\sum_{l=0}^{N-1} x(l)h(n-l) = \sum_{l=0}^{N-1} x(n-l)h(l) \leftrightarrow X(k)H(k)$$

- **Correlação:**

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(l+n) \leftrightarrow H(-k)X(k)$$

Convolução

- A transformada discreta de produto de duas DFTs de comprimento N corresponde a convolução de uma sequência com uma versão periódica da outra.
- Esta versão periódica é obtida pela repetição do sinal de comprimento N com período N
- Esta convolução é conhecida como convolução circular entre dois sinais de comprimento N.
- Sistemas lineares necessitam de convolução linear e não circular.
- Vamos analisar formas de realizar a convolução linear baseando-nos na convolução circular.

Convolução

- Suponha que tem duas DFTs de comprimento N, temos a convolução circular entre $x(n)$ e $h(n)$ dada por

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)h(n-l) \\
&= \sum_{l=0}^{n} x(l)h(n-l) + \sum_{l=n+1}^{N-1} x(l)h(n-l+N),\ para\ 0 \leq n \leq
\end{aligned}
$$

- Se quisermos que a convolução circular seja igual a convolução linear entre $x(n)$ e $h(n)$, a segunda soma deve ser nula, ou seja,

$$
c(n) = \sum_{l=n+1}^{N-1} x(l)h(n-1+N) = 0,\ para\ 0 \leq n \leq N-1
$$

Convolução

- Assumindo que $x(n)$ tem duração L e $h(n)$ tem duração K, temos que $c(n)$ é diferente de zero se ambos $x(n)$ e $h(n)$ forem diferentes de zero, e isto acontece se

$$l \leq L - 1 \; e \; n - l + N \leq K - l$$

que por sua vez implica em

$$n + N - K + 1 \leq l \leq N - 1$$

Convolução

- Como o caso mais restrito é para $n = 0$, temos que a condição para $c(n) = 0$, $0 \leq n \leq N - 1$ é

$$N \geq L + K - 1$$

- Devemos escolher N de acordo com a regra acima.
- Isto é equivalente a preencher $x(n)$ com pelo menos $K - 1$ zeros e preencher $h(n)$ com pelo menos $L - 1$ zeros.

Convolução

- Sejam os sinais abaixo, com $L = 4$ e $K = 3$, após preencher com zeros obtemos $x_1(n)$ e $h_(n)$.

INSERIR FIGURA

Exemplo

Para os sinais $x(n)$ e $h(n)$, calcule a convolução linear e compare com a convolução circular, também compare com a convolução circular entre $x_1(n)$ e $h_1(n)$.

Convolução

Inicialmente vamos calcular a convolução entre $x(n)$ e $h(n)$.

$$y_1(n) = x(n) * h(n) = \sum_{l=0}^{3} x(l)h(n-l)$$

Convolução

Inicialmente vamos calcular a convolução entre $x(n)$ e $h(n)$.

$$y_1(n) = x(n) * h(n) = \sum_{l=0}^{3} x(l)h(n-l)$$

$$\begin{aligned}
y_1(0) &= x(0)h(0) = 4 \\
y_1(1) &= x(0)h(1) + x(1)h(0) = 7 \\
y_1(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 9 \\
y_1(3) &= x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0) = 6 \\
y_1(4) &= x(2)h(2) + x(3)h(1) = 3 \\
y_1(5) &= x(3)h(2) = 1
\end{aligned}$$

Convolução

A convolução circular de comprimento $N = 4$ entre $x(n)$ e $h(n)$ é dada por

$$y_{c_4} = x(n) \otimes h(n) = \sum_{l=0}^{3} x(l)h((n-l)\ mod\ 4)$$

Convolução

A convolução circular de comprimento $N = 4$ entre $x(n)$ e $h(n)$ é dada por

$$y_{c_4} = x(n) \otimes h(n) = \sum_{l=0}^{3} x(l)h((n-l)\ mod\ 4)$$

$$\begin{aligned}
y_{c_4} &= x(0)h(0) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + x(3)h(1) = 7 \\
y_{c_4} &= x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(3) + x(3)h(2) = 8 \\
y_{c_4} &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(3) = 9 \\
y_{c_4} &= x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0) = 6
\end{aligned}$$

Convolução

Se fizermos $N = 6$ e calcularmos a convolução circular entre $x_1(n)$ e $h_1(n)$

$$y_{c6}(n) = x_1(n) \otimes h_1(n) = \sum_{l=0}^{5} x(l)h(n-l)\ mod\ 6)$$

Convolução

Se fizermos $N = 6$ e calcularmos a convolução circular entre $x_1(n)$ e $h_1(n)$

$$y_{c6}(n) = x_1(n) \otimes h_1(n) = \sum_{l=0}^{5} x(l)h(n-l) \; mod \; 6)$$

$$\begin{aligned}
y_{c6}(0) &= x_1(0)h_1(0) + x_1(1)h_1(5) + x_1(2)h_1(4) + x_1(3)h_1(3) + x_1(4) \\
y_{c6}(1) &= x_1(0)h_1(1) + x_1(1)h_1(0) + x_1(2)h_1(5) + x_1(3)h_1(4) + x_1(4) \\
y_{c6}(2) &= x_1(0)h_1(2) + x_1(1)h_1(1) + x_1(2)h_1(0) + x_1(3)h_1(5) + x_1(4) \\
y_{c6}(3) &= x_1(0)h_1(3) + x_1(1)h_1(2) + x_1(2)h_1(1) + x_1(3)h_1(0) + x_1(4) \\
y_{c6}(4) &= x_1(0)h_1(4) + x_1(1)h_1(31) + x_1(2)h_1(2) + x_1(3)h_1(1) + x_1(4 \\
y_{c6}(5) &= x_1(0)h_1(5) + x_1(1)h_1(4) + x_1(2)h_1(3) + x_1(3)h_1(2) + x_1(4)
\end{aligned}$$

Convolução

- Comparando os cálculos anteriores, é facil confirmar que $y_{c_6}(n)$ corresponde a convolução linear enter $x(n)$ e h(n).
- Logo é possivel determinar a convolução linear entre duas sequência finitar via a DFT.
- Na prática, as sequência tem comprimento infinito, ou envolvem a convolução entre uma sequência de duração finita com uma de duração infinita.

Convolução

- Comparando os cálculos anteriores, é facil confirmar que $y_{c_6}(n)$ corresponde a convolução linear enter $x(n)$ e h(n).
- Logo é possivel determinar a convolução linear entre duas sequência finitar via a DFT.
- Na prática, as sequência tem comprimento infinito, ou envolvem a convolução entre uma sequência de duração finita com uma de duração infinita.

Convolução

- Uma solução é dividir a sequência em blocos de tamanho N e realizar convolução de cada bloco.
- Isto implica na combinação apropriada tal que o resultado final corresponda a uma convolução da sequência longa com uma curta.
- Dois métodos estão dispíveis: *overlap-and-add* e *overlapp-and-save*.

Convolução - Overlap-and-add

- A sequência $x(n)$ pode ser decomposta em blocos que não se sobrepõem $x_m(n-mN)$ de comprimento N tal que

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m(n-mN)$$

sendo

$$x_m(n) = \begin{cases} x(n-mN), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Introdução

- Lembremos que

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \; para \; 0 \leq k \leq N-1$$

e

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \; para \; 0 \leq n \leq N-1$$

que para um sequência de comprimento N, necessita de N^2 multiplicações complexas.

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

- Em 1965 Cooley e Turkey propuseram um algoritmo eficiente para calcular a DFT. Esse algoritmo requer $N \log_2 N$ multiplicações complexas

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

- Em 1965 Cooley e Turkey propuseram um algoritmo eficiente para calcular a DFT. Esse algoritmo requer $N \log_2 N$ multiplicações complexas
- O algoritmo proposto é denominado de FFT (*Fast Fourier Transform*).

Seja $x(n)$ uma sequência de comprimento N, uma potência de 2 ou seja $N = 2^l$, e vamos reescrever a expressão da DFT separando os termos pares dos ímpares:

$$\begin{aligned} X(K) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2k} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2k} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{2k} \end{aligned} \tag{16}$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

Podemos ainda escrever

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

Observe que $X_e[k]$ e $X_o[k]$ são periódicos com período $N/2$. Como exemplo, seja $N = 8$, temos que

$$X[0] \quad = \quad X_e[0] + X_o[0] \quad X[1] = X_e[1] + W_N X_o[1]$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

Podemos ainda escrever

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

Observe que $X_e[k]$ e $X_o[k]$ são periódicos com período $N/2$. Como exemplo, seja $N = 8$, temos que

$$\begin{aligned} X[0] &= X_e[0] + X_o[0] \quad X[1] = X_e[1] + W_N X_o[1] \\ X[2] &= X_e[2] + W_N^2 X_o[2] \quad X[3] = X_e[3] + W_N^3 X_o[3] \end{aligned}$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

Podemos ainda escrever

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

Observe que $X_e[k]$ e $X_o[k]$ são periódicos com período $N/2$. Como exemplo, seja $N = 8$, temos que

$$\begin{aligned}
X[0] &= X_e[0] + X_o[0] \quad X[1] = X_e[1] + W_N X_o[1] \\
X[2] &= X_e[2] + W_N^2 X_o[2] \quad X[3] = X_e[3] + W_N^3 X_o[3] \\
X[4] &= X_e[4] + W_N^4 X_o[5] \quad X[5] = X_e[5] + W_N^5 X_o[5] \\
&= X_e[0] + W_N^4 X_o[0] \quad\quad = X_e[1] + W_N^5 X_o[1]
\end{aligned}$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

Podemos ainda escrever

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

Observe que $X_e[k]$ e $X_o[k]$ são periódicos com período $N/2$.
Como exemplo, seja $N = 8$, temos que

$$
\begin{array}{rcll}
X[0] & = & X_e[0] + X_o[0] & X[1] = X_e[1] + W_N X_o[1] \\
X[2] & = & X_e[2] + W_N^2 X_o[2] & X[3] = X_e[3] + W_N^3 X_o[3] \\
X[4] & = & X_e[4] + W_N^4 X_o[5] & X[5] = X_e[5] + W_N^5 X_o[5] \\
 & = & X_e[0] + W_N^4 X_o[0] & \quad = X_e[1] + W_N^5 X_o[1] \\
X[6] & = & X_e[6] + W_N^6 X_o[6] & X[7] = X_e[7] + W_N^7 X_o[7] \\
 & = & X_e[3] + W_N^6 X_o[3] & X[7] = X_e[4] + W_N^7 X_o[4]
\end{array}
$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

O processo descrito acima pode ser repetido para $X_e[k]$ e $X_o[k]$ obtendo

$$\begin{aligned} X_e[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n]W_{N/2}^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n]W_{N/2}^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n+1]W_{N/2}^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n]W_{N/4}^{2nk} + W_{N/2}^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n+1]W_{N/4}^{nk} \\ &= X_{ee}[k] + W_{N/2}^{k} X_{eo}[k] \end{aligned} \tag{17}$$

da mesma forma para $X_o[k]$

$$\begin{aligned} X_e[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n]W_{N/4}^{2nk} + W_{N/2}^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} g[2n+1]W_{N/4}^{nk} \\ &= X_{oe}[k] + W_{N/2}^{k} X_{oo}[k] \end{aligned} \tag{18}$$

Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

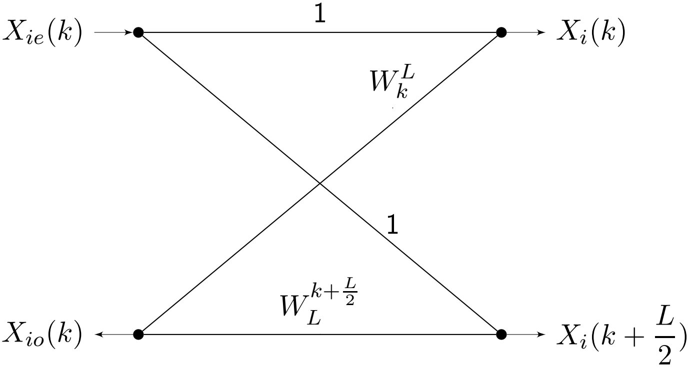
e assim para $N = 8$

$$\begin{aligned}
X_e[0] &= X_{ee}[0] + X_{eo}[0] \quad X_e[1] = X_{ee}[1] + W_{N/2}X_{eo}[1] \\
X_e[2] &= X_{ee}[2] + W_{N/2}^2 X_{eo}[2] \quad X_e[3] = X_{ee}[3] + W_{N/2}^3 X_{eo}[3] \\
&= X_{ee}[0] + W_{N/2}^2 X_{eo}[0] \quad X_e[3] = X_{ee}[1] + W_{N/2}^3 X_{eo}[1] \\
X_o[0] &= X_{oe}[0] + X_{oo}[0] \quad H[1] = X_{oe}[1] + W_{N/2}X_{oo}[1] \\
X_o[2] &= X_{oe}[2] + W_{N/2}^2 X_{oo}[2] \quad X_o[3] = X_{oe}[3] + W_{N/2}^3 X_{oo}[3] \\
&= X_{oe}[0] + W_{N/2}^2 X_{oo}[0] \quad X_o[3] = X_{oe}[1] + W_{N/2}^3 X_{oo}[1]
\end{aligned} \tag{19}$$

E o processo poder ser repetido para $X_{ee}[k]$, $X_{eo}[k]$, $X_{oe}[k]$ e $X_{oo}[k]$ e sucessivamente até que a variável obtida seja a própria amostra $x(n)$, observe que são necessárias $P = \log_2 N$ etapas para atingir esse ponto.

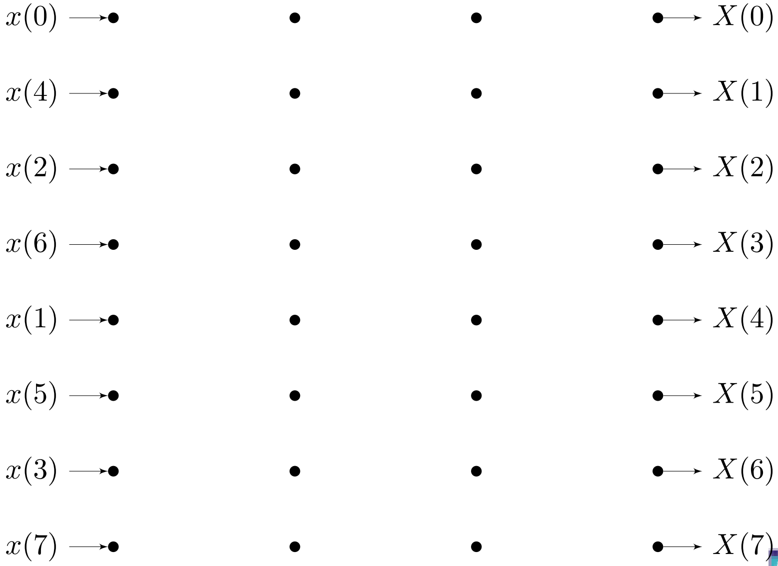
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$$L = N,\ \frac{N}{2},\ \ldots,\ 2 \text{ e } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (\frac{L}{2} - 1)$$



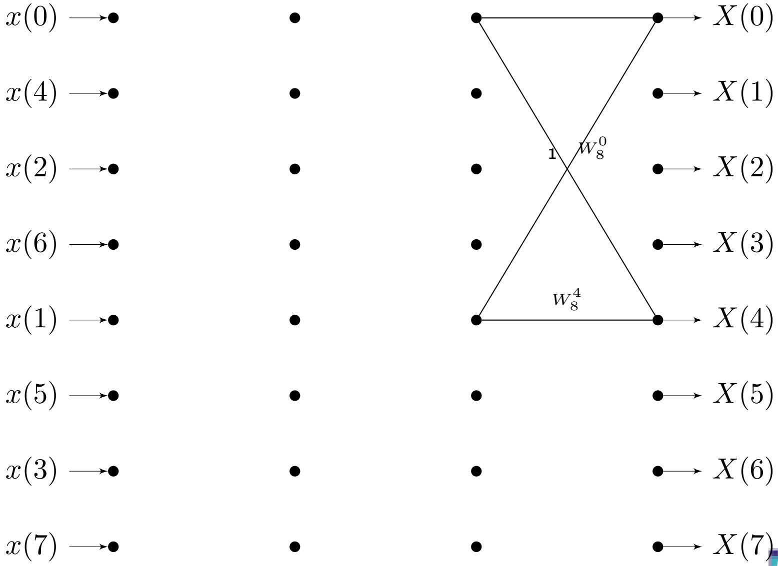
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8;\ L = 8;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$



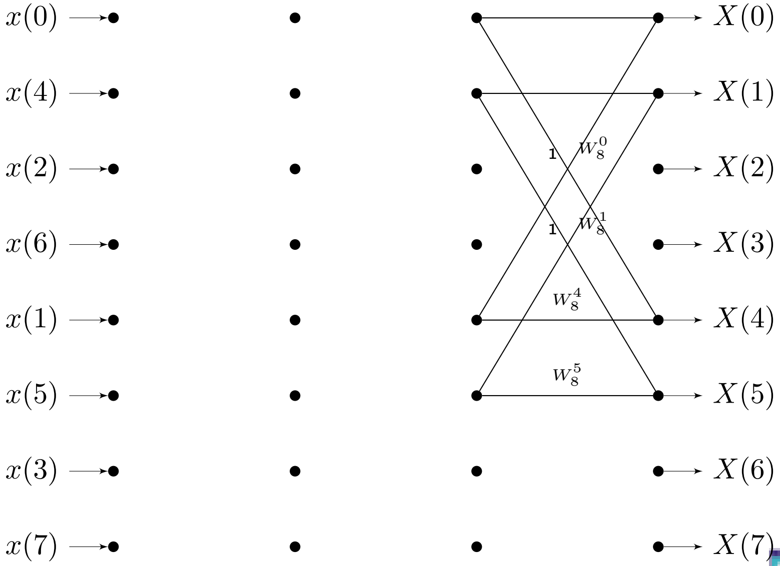
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8$; $L = 8$; $k = 0$. Cálculo da primeira borboleta.



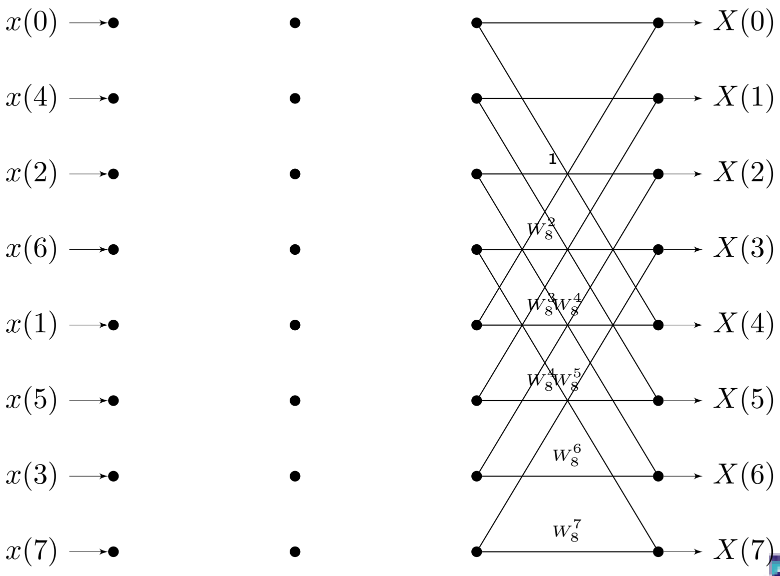
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8$; $L = 8$; $k = 1$. Cálculo da segunda borboleta.



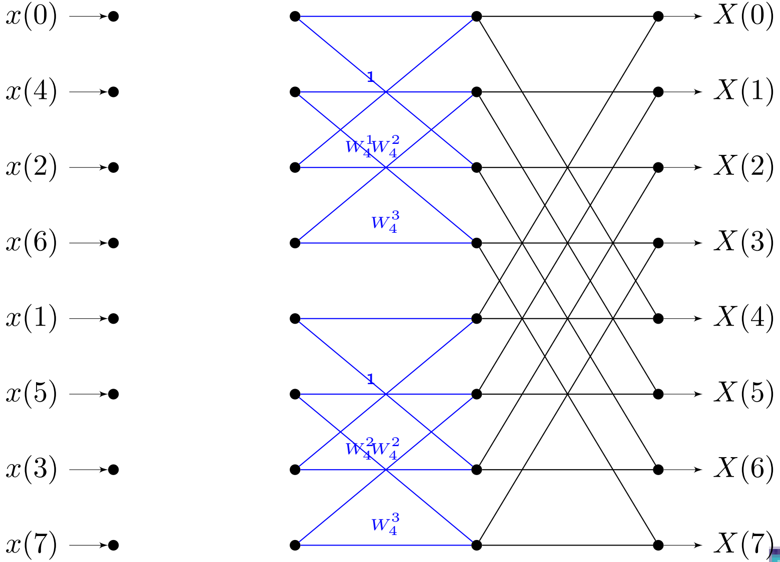
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8;\ L = 8;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$



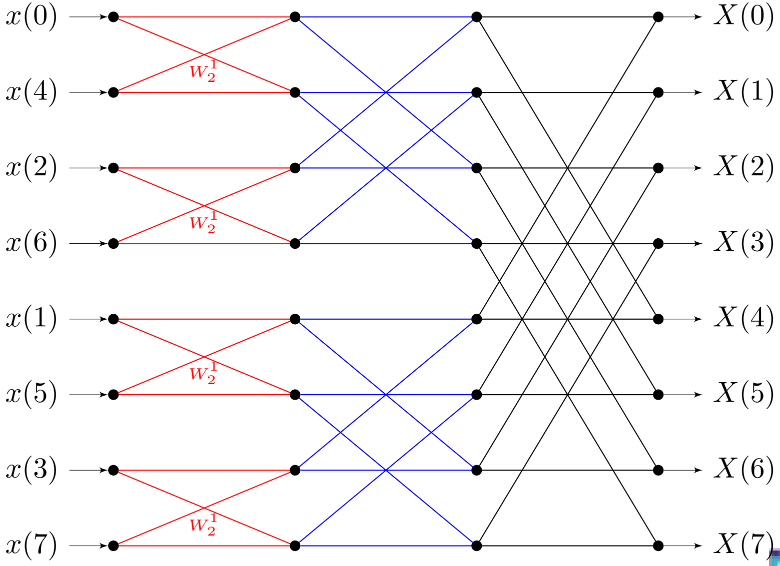
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8;\ L = 4;\ k = 0,\ 1$



Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo

$N = 8$; $L = 2$; $k = 0$



Decimação na Frequência

Fazendo

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+\frac{N}{2}) W_N^{(N/2)k} W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(n) + W_N^{(N/2)k} x(n+\frac{N}{2}) \right) W_N^{nk}
\end{aligned}
$$

Decimação na Frequência

Calculando as partes pares e ímpares em separado

$$\begin{aligned} X(2l) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(n) + W_N^{(Nl)} x(n + \frac{N}{2}) \right) W_N^{2nl} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(n) + x(n + \frac{N}{2}) \right) W_N^{2nl} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} X(2l+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(n) + W_N^{((2l+1)N/2)} x(n + \frac{N}{2}) \right) W_N^{(2l+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(n) - x(n + \frac{N}{2}) \right) W_N^{(2l+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[\left(x(n) - x(n + \frac{N}{2}) \right) W_N^{n} \right] W_N^{2ln} \end{aligned} \quad (21)$$

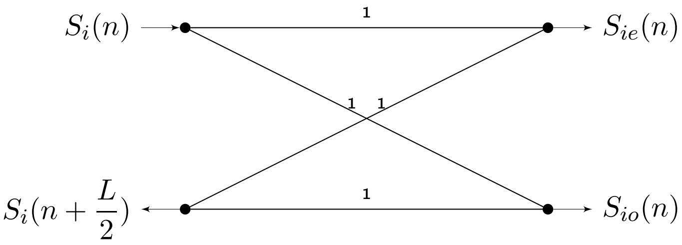
para $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ (N/2) - 1.$

Decimação na Frequência

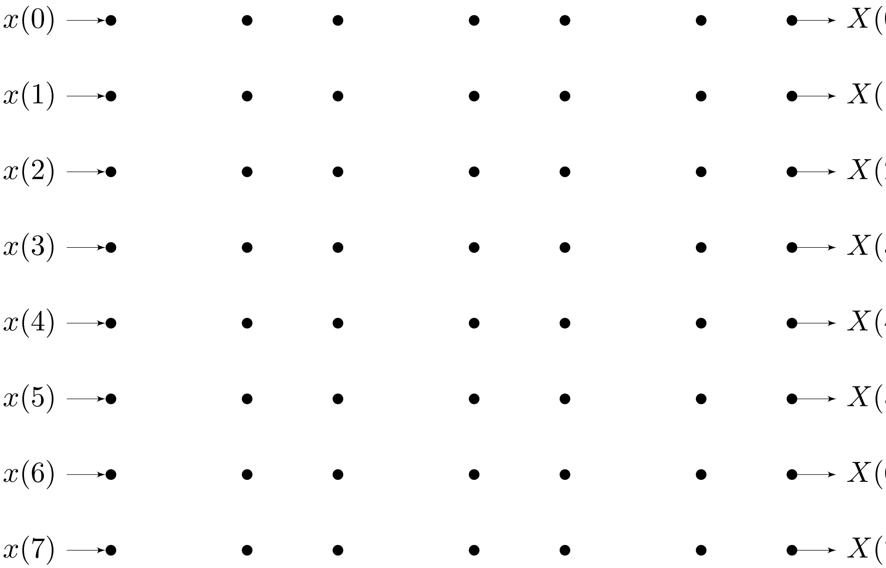
As equações (10) e (11) são duas DFTs de comprimento $N/2$, que podem ser divididas em DFTs de comprimento $N/4$, $N/8$ e assim sucessivamente, chegando a uma forma geral

$$
\begin{aligned}
S_{ie}(n) &= S_i(n) + S_i(n + \frac{L}{2}) \\
S_{io}(n) &= \left(S_i(n) - S_i(n + \frac{L}{2})\right) W_L^n
\end{aligned}
$$

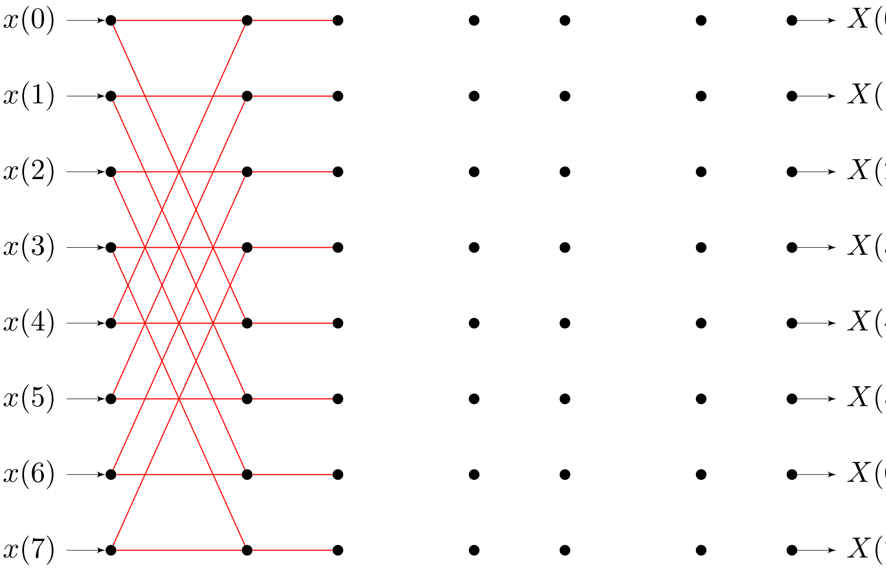
com célula básica



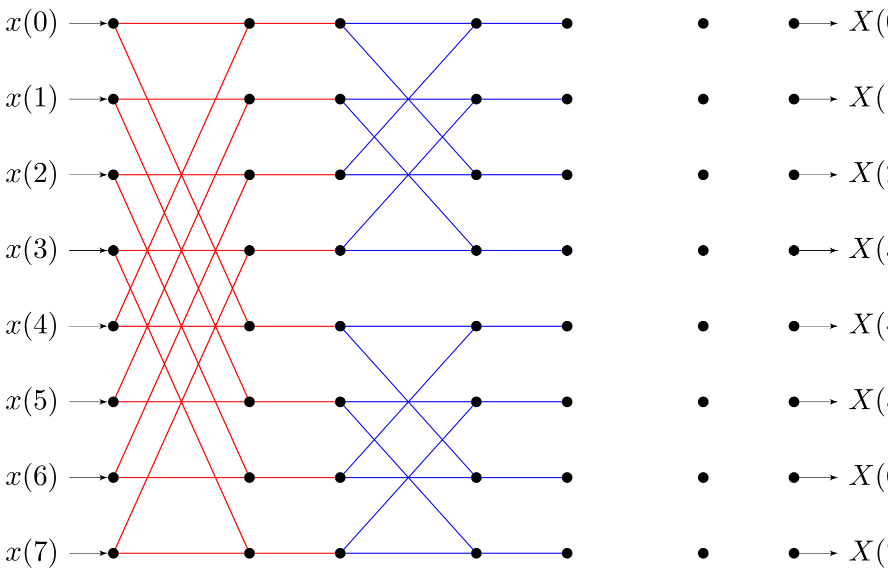
Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo



Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo



Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo



Algoritmo de Raiz de 2 com decimação no tempo