3 TP

3.1 File d'attente dans un guichet

3.1.1 Enoncé

Le corrigé

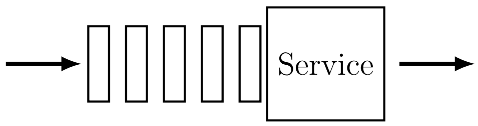

FIGURE 3.1 – File d'attente

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec la probabilité $p \in]0,1[$ et pas de client avec une probabilité $1-p$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité $q \in]0,1[$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1-q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n+1$). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant n, il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le départ d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées. On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant n par la variable X_n. Si on note A_n (resp. D_n) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant n " (resp. "Départ d'un client à l'instant n ") et si $\bar{A}_n$ et $\bar{D}_n$ sont respectivement les événements complémentaires de A_n et D_n, alors X_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

— Si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = \mathbf{1}_{(A_{n+1})}$

— Si $X_n \geq 1$

alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} = & X_n \mathbf{1}_{\left((A_{n+1}\cap D_{n+1})\cup\left(\bar{A}_{n+1}\cap\bar{D}_{n+1}\right)\right)} + (X_n+1)\,\mathbf{1}_{\left(A_{n+1}\cap\bar{D}_{n+1}\right)} + \\ & + (X_n-1)\,\mathbf{1}_{\left(\bar{A}_{n+1}\cap D_{n+1}\right)}, \end{aligned}$$

avec, pour un événement $E, \mathbf{1}_{(E)} = 1$ si E est réalisé et $\mathbf{1}_{(E)} = 0$ si E n'est pas réalisé. Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé. On montre que $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état $\mathbb{N}$, et de matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\bar{p} = 1-p$ et $\bar{q} = 1-q$. On montre, sous des conditions sur p et q, que la chaîne X possède une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_i)_{i\in N}$. Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

1. Etudier la classification des états de la chaîne X du modèle proposé.
2. Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante π pour la chaîne du modèle proposé.
3. Expliciter π, quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
4. Définir le temps moyen de séjour de la chaîne X dans un état donné
5. Expliquer la formulation de Xn+1 en fonction de Xn (donnée dans le texte)
6. Tracer le graphe de transition de la chaîne X
7. Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
8. Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne X.
9. Est-ce que la chaîne est récurrente ?
10. Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante : la capacité du système est limitée (à tout instant n, on ne peut avoir plus de K clients dans le système).
11. Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne X de l'instant $n = 0$ à l'instant $n = 100$ en supposant que X démarre dans l'état 0 , pour $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{4}$.
12. En générant 100000 trajectoires de X démarrant dans l'état 0 , calculer une approximation de π_2. On traitera le cas $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$.
    On suppose maintenant que le système est de capacité finie K. Dans ce cas l'espace d'état de X devient $\{0, 1, \dots, K\}$. Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimitée.
13. Tronquer la matrice de transition P en supprimant les lignes $i > K$ et les colonnes $j > K$, puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.
14. En prenant $K = 3$ (dans toute la suite), expliciter la loi stationnaire π.
15. Générer une trajectoire de longueur $n = 1000$ et calculer les quantités $\hat{p}_j(n)$, pour $j = 0, 1, \dots, K$, définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_k=j)}$$

16. Comparer graphiquement les π_j avec les $\hat{p}_j(n)$ pour les valeurs de n : 100,1000 et 10000 . On traitera les cas $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$

17. Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.
18. Calculer le temps moyen de retour à un état du système.

3.1.2 Quelques simulations obtenues

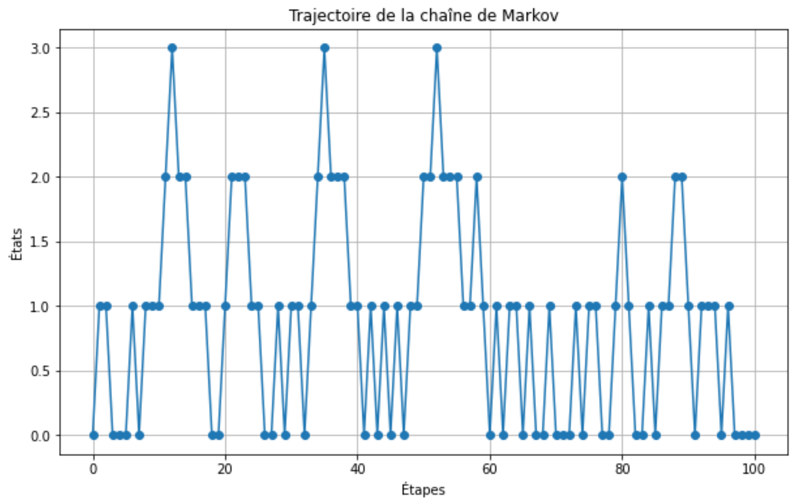

FIGURE 3.2 – Simulation d'une trajectoire de la chaîne de Markov.

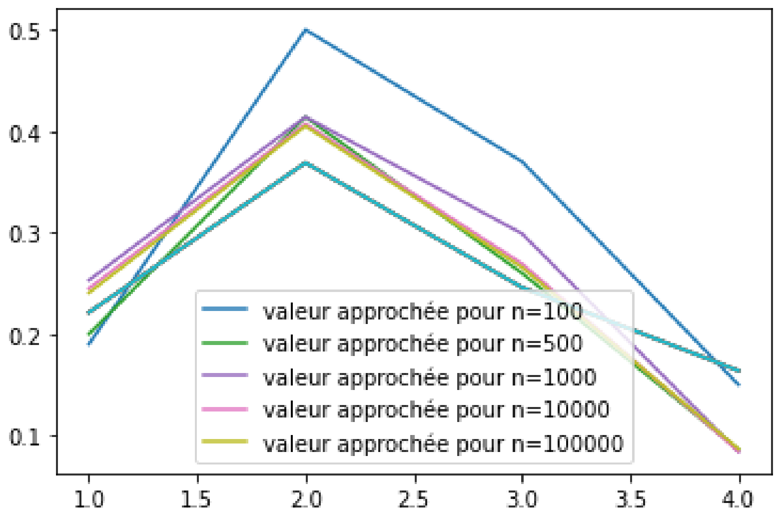

FIGURE 3.3 – Valeurs approchées pour la mesure invariante

3.2 Urnes et particules

L'objectif de ce TP est de modéliser la diffusion de molécules gazeuses entre deux compartiments séparés par une cloison poreuse.

Deux urnes A et B contiennent au total a billes. Les urnes correspondent aux compartiments et les billes aux molécules. À chaque instant il y a tirage au hasard d'une bille, qui est alors changée d'urne.

3.2.1 Le modèle microscopique

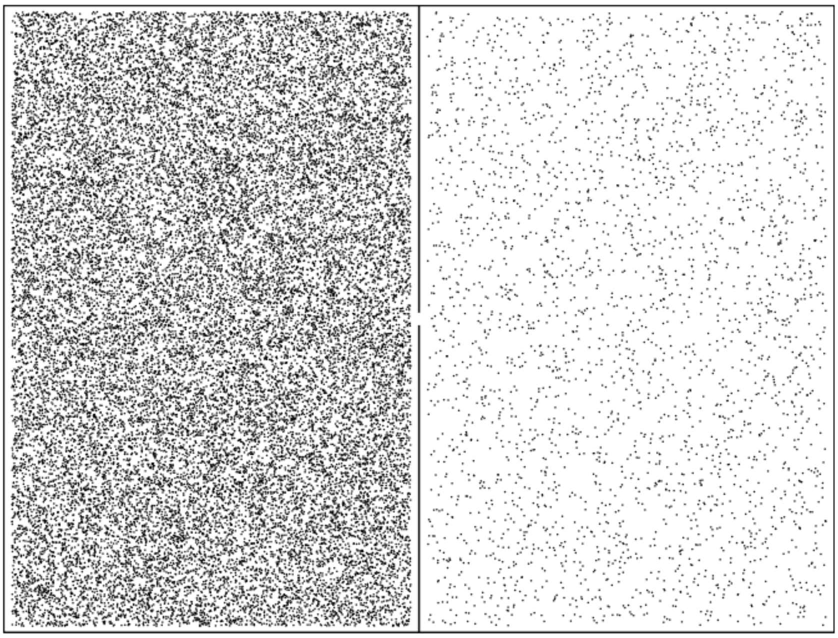

FIGURE 3.4 – Répartition des molécules dans les deux urnes

Pour une configuration de a boules, on associe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_a)$ où :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la particule } i \text{ appartient à } A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des configurations possibles est $\mathcal{F} = \{0,1\}^a$.

On note $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont voisines, c'est-à-dire si elles ne diffèrent que d'une seule coordonnée.

On considère (Y_n) une chaîne de Markov avec espace d'états $\mathcal{F}$ dont la matrice de transition est :

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tous } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F} = \{0,1\}^a = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_a) \mid \text{pour tout } i = 1, \ldots, a, x_i \in \{0,1\}\}$

Questions

1. Pour $a = 2$, choisissez la bonne matrice de transition parmi :

a.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tracez le graphe de transition correspondant à la matrice de transition choisie.
3. Justifiez que Y est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
4. Quelle est la particularité de la matrice Q ?
5. Montrez que la mesure invariante de la chaîne est la mesure uniforme sur $\mathcal{F}$ et que le temps moyen de retour en un état $x \in \mathcal{F}$ est 2^a.

3.2.2 L'urne d'Ehrenfest

Observer l'évolution de la chaîne Y nécessiterait de déterminer la position de chaque particule, ce qui est pratiquement impossible. Toutefois, il est possible de mesurer la pression, proportionnelle au nombre de particules présentes dans l'urne A. Pour simplifier certaines expressions, nous considèrerons parfois le cas où a est pair. Dans ce cas, la lettre b désignera toujours $a/2$.

Définition de la matrice de transition

À la chaîne de Markov Y, on associe le processus $(X_n)_n$ à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, a\}$, où X_n est la somme des coordonnées de Y_n.

On admet que le processus $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur E avec la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & (a-1)/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a & 0 & (a-2)/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (a-1)/a & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la chaîne est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
2. Montrez que sa mesure invariante est la loi binomiale $\mathcal{B}(a, 1/2)$.

Espérance et variance

La pression au temps n dans l'urne A est de l'ordre de $P_n = X_n/a$. Nous nous intéressons ici aux deux premiers moments de cette variable aléatoire.

1. Posons $\alpha = 1 - 2/a$ et $\beta = 1 - 4/a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrez que :

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right) \alpha^n$$

2. Montrez que :

$$\mathrm{Var}(P_n) = \frac{1}{4a} + \left(\mathrm{Var}(X_0) - \frac{1}{4a}\right) \beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^n - \alpha^{2n}\right)$$

3.2.3 Temps de retour

On définit le temps T_{ii} de premier retour en i de la manière suivante :

$$T_{ii} = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = i \mid X_0 = i\}$$

1. Considérez $b = 10000$. Calculez et interprétez les résultats pour :

$$\mathbb{E}(T_{00}) = 2^{20000} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_{bb}) \approx 100\sqrt{\pi}$$

3.2.4 Aspect numérique

1. Simuler numériquement le nombre de boules dans l'urne A.
2. Vérifier numériquement la valeur de l'espèrance calculée dans la partie 3.2.2.
3. Tracer numériquement la fréquence des cas où l'urne A contient i boules au bout de n étapes.
4. Représenter graphiquement une liste des temps moyens de retour à l'état initial.

3.2.5 Code

Vous pouvez compléter le code suivant pour répondre aux questions sur Python, en précisant les paramètres insérés et en ajoutant des commentaires si besoin.
Indication 1 :

```
from random import randint
import matplotlib.pyplot as plt


def boules(N, n):
    X = N
    A = [X]
    L = [1] * N
```

```
    for k in range(1, n + 1):
        i = randint(0, N - 1)
        if L[i] == 0:
            L[i] = 1
            X = ....
        else:
            L[i] = ....
            X = ....
        A.append(X)
    return A
```

Indication 2 :

```
def freq(N, n):
    A = boules(N, n)
    return [A.count(....) / len(....) for i in range(N + 1)]
```

Indication 3 :

```
def Temps_de_retour(N):
    X = N
    L = [1] * N
    retour = False
    n = 0
    while .... :
        n += 1
        i = randint(0, N - 1)
        if L[i] == 0:
            L[i] = 1
            X  = ....
        else:
            L[i] = 0
            X = ....
        if X == N:
            retour = True
    return ....
```

3.2.6 Quelques simulations obtenues

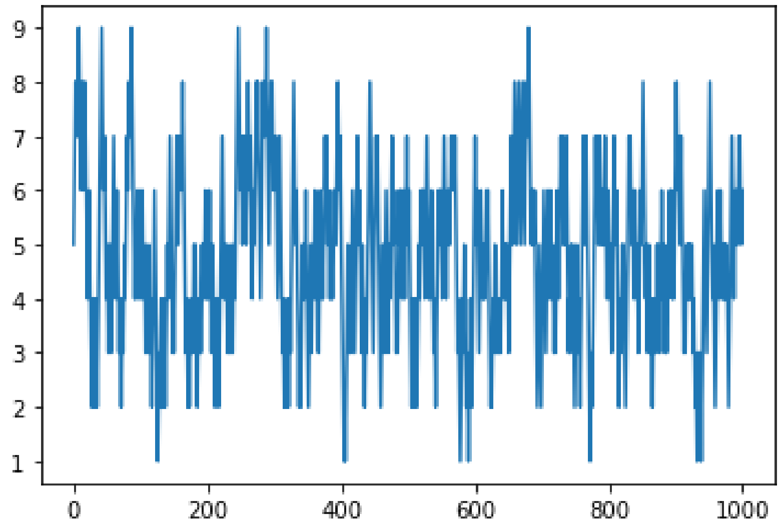

FIGURE 3.5 – Simulation du nombre de boules dans l'urne A

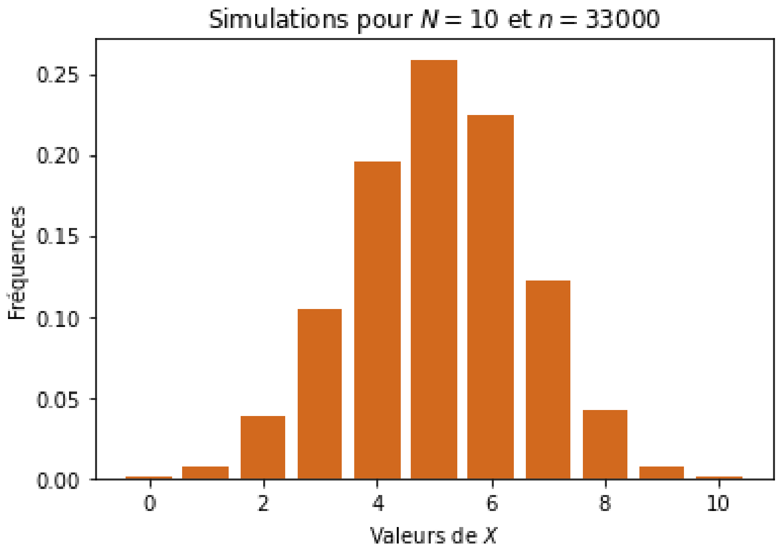

FIGURE 3.6 – Représentation des fréquences de la quetsion 3.