3 | TP

3.1 File d'attente

3.1.1 Enoncé

L'énoncé Le corrigé

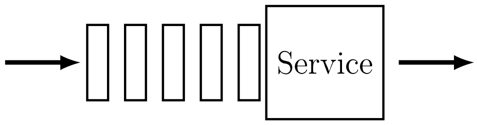

FIGURE 3.1 – File d'attente

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec la probabilité $p \in]0,1[$ et pas de client avec une probabilité $1-p$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité $q \in]0,1[$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1-q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n+1$). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant n, il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le d´epart d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées. On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant n par la variable X_n. Si on note A_n (resp. D_n) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant n " (resp. "Départ d'un client à l'instant n ") et si $\bar{A}_n$ et $\bar{D}_n$ sont respectivement les événements complémentaires de A_n et B_n, alors X_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

— Si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = \mathbf{1}_{(A_{n+1})}$
— Si $X_n \geq 1$

alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} =& X_n \mathbf{1}_{\left((A_{n+1}\cap D_{n+1})\cup\left(\bar{A}_{n+1}\cap\bar{D}_{n+1}\right)\right)} + (X_n+1)\,\mathbf{1}_{\left(A_{n+1}\cap\bar{D}_{n+1}\right)} + \\ &+ (X_n-1)\,\mathbf{1}_{\left(\bar{A}_{n+1}\cap D_{n+1}\right)}, \end{aligned}$$

avec, pour un événement E, $\mathbf{1}_{(E)} = 1$ si E est réalisé et $\mathbf{1}_{(E)=0}$ si E n'est pas réalisé. Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé. On montre que $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état $\mathbb{N}$, et de matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\bar{p} = 1-p$ et $\bar{q} = 1-q$. On montre, sous des conditions sur p et q, que la chaîne X possède une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_i)_{i\in N}$. Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

1. Etudier la classification des états de la chaîne X du modèle proposé.
2. Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante π pour la chaîne du modèle proposé.
3. Expliciter π, quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
4. Définir le temps moyen de séjour de la chaîne X dans un état donné
5. Expliquer la formulation de Xn+1 en fonction de Xn (donnée dans le texte)
6. Tracer le graphe de transition de la chaîne X
7. Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
8. Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne X.
9. Est-ce que la chaîne récurrente ?
10. Justifier l'existence et l'unicité de loi stationnaire
11. Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante : la capacité du système est limitée (à tout instant n, on ne peut avoir plus de K clients dans le système).
12. Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne X de l'instant $n = 0$ à l'instant $n = 100$ en supposant que X démarre dans l'état 0 , pour $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{4}$.
13. En générant 100000 trajectoires de X démarrant dans l'état 0 , calculer une approximation de π_2. On traitera le cas $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$.
14. On suppose maintenant que le système est de capacité finie K. Dans ce cas l'espace d'état de X devient $\{0, 1, \dots, K\}$. Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimité.
15. Tronquer la matrice de transition P en supprimant les lignes $i > K$ et les colonnes $j > K$, puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.
16. En prenant $K = 3$ (dans toute la suite), expliciter la loi stationnaire π.
17. Générer une trajectoire de longueur $n = 1000$ et calculer les quantités $\hat{p}_j(n)$, pour $j = 0, 1, \dots, K$, définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_k=j)}$$

18. Comparer graphiquement les π_j avec les $\hat{p}_j(n)$ pour les valeurs de n : 100,1000 et 10000 . On traitera les cas $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$
19. Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.
20. Calculer le temps moyen de retour à un état du système.

3.1.2 Quelques simulations obtenues

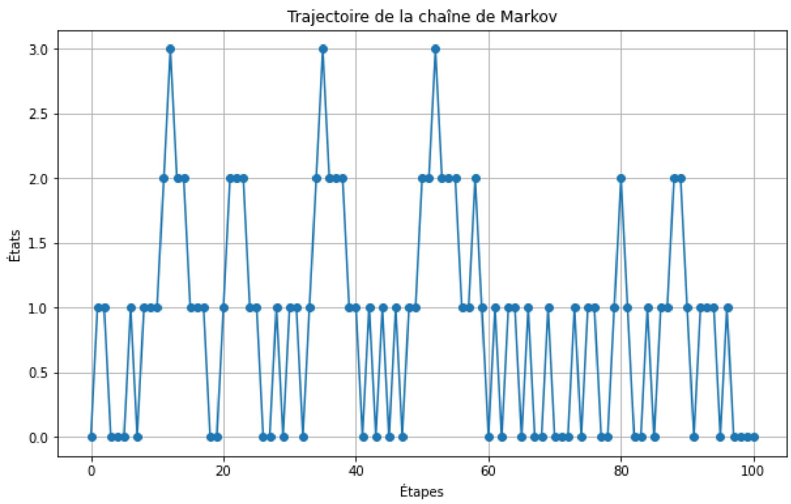

FIGURE 3.2 – Simulation d'une trajectoire de la chaîne de Markov.

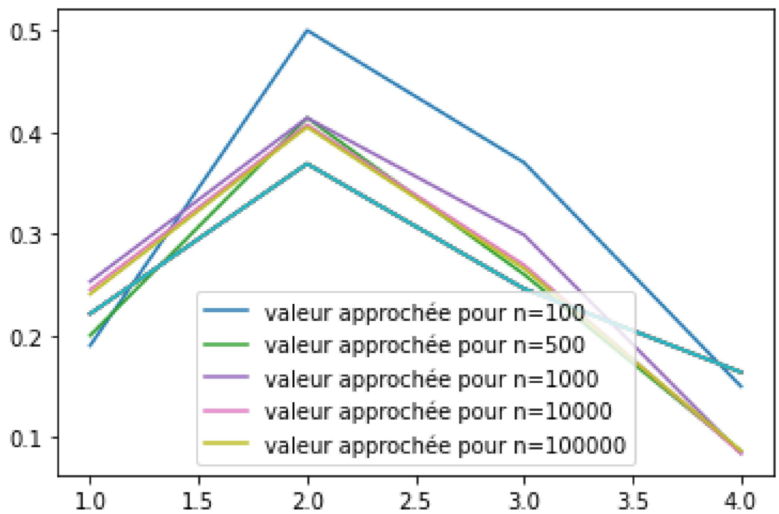

FIGURE 3.3 – Valeurs approchées pour la mesure invariante

3.2 Urnes et particules

À la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle, Ludwig Boltzmann a introduit la théorie cinétique des gaz, visant à expliquer les propriétés macroscopiques des gaz par le comportement des particules microscopiques. Cette théorie a suscité de nombreux débats parmi les physiciens en raison du paradoxe qu'elle pose : les lois de la mécanique classique sont réversibles, tandis que la thermodynamique implique une évolution irréversible vers l'équilibre. Pour aborder ce paradoxe, Paul et Tatiana Ehrenfest ont proposé un modèle où des particules se déplacent aléatoirement entre deux urnes, démontrant comment des lois statistiques peuvent émerger des interactions individuelles des particules.

3.2.1 Le modèle microscopique

L'énoncé Le corrigé

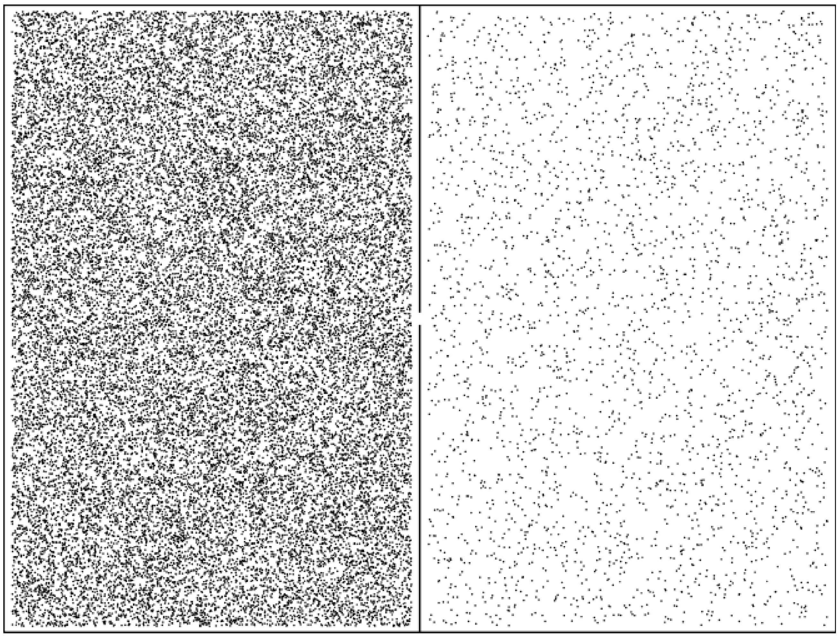

FIGURE 3.4 – Répartition des molécules dans les deux urnes

Pour une configuration de a boules, on associe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_a)$ où :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la particule } i \text{ appartient à } A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des configurations possibles est $\mathcal{F} = \{0,1\}^a$.

On note $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont voisines, c'est-à-dire si elles ne diffèrent que d'une seule coordonnée.

On considère (Y_n) une chaîne de Markov avec espace d'états $\mathcal{F}$ dont la matrice de transition est :

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tous } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{F} = \{0,1\}^a = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_a) \mid \text{pour tout } i = 1, \ldots, a, x_i \in \{0,1\}\}$$

Questions

1. Pour $a = 2$, choisissez la bonne matrice de transition parmi :

   a.
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   b.
$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   c.
$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tracez le graphe de transition correspondant à la matrice de transition choisie.
3. Justifiez que Y est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
4. Quelle est la particularité de la matrice Q ?
5. Montrez que la mesure invariante de la chaîne est la mesure uniforme sur $\mathcal{F}$ et que le temps moyen de retour en un état $x \in \mathcal{F}$ est 2^a.

3.2.2 L'urne d'Ehrenfest

Observer l'évolution de la chaîne Y nécessiterait de déterminer la position de chaque particule, ce qui est pratiquement impossible. Toutefois, il est possible de mesurer la pression, proportionnelle au nombre de particules présentes dans l'urne A. Pour simplifier certaines expressions, nous considèrerons parfois le cas où a est pair. Dans ce cas, la lettre b désignera toujours $a/2$.

Définition de la matrice de transition

À la chaîne de Markov Y, on associe le processus $(X_n)_n$ à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, a\}$, où X_n est la somme des coordonnées de Y_n.

On admet que le processus $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur E avec la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & (a-1)/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a & 0 & (a-2)/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (a-1)/a & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la chaîne est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
2. Montrez que sa mesure invariante est la loi binomiale $\mathcal{B}(a, 1/2)$.

Espérance et variance

La pression au temps n dans l'urne A est de l'ordre de $P_n = X_n/a$. Nous nous intéressons ici aux deux premiers moments de cette variable aléatoire.

1. Posons $\alpha = 1 - 2/a$ et $\beta = 1 - 4/a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrez que :

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right) \alpha^n$$

2. Montrez que :

$$\mathrm{Var}(P_n) = \frac{1}{4a} + \left(\mathrm{Var}(X_0) - \frac{1}{4a}\right) \beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^n - \alpha^{2n}\right)$$

3.2.3 Réconciliation des théories ennemies

Il est temps de confronter et d'unifier les points de vue thermodynamique et cinétique.

Temps de retour

Pour affiner ce résultat, nous souhaitons obtenir des estimations en fonction du point de départ de la chaîne, par exemple 0 et b.

1. Définissez le temps T_{ii} de premier retour en i de la manière suivante :

$$T_{ii} = \inf\{n > 1 \mid X_n = i \mid X_0 = i\}$$

2. Considérez $b = 10000$. Calculez et interprétez les résultats pour :

$$\mathbb{E}(T_{00}) = 220000 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_{bb}) \approx 100\sqrt{\pi}$$

3. En déduire une réconciliation des deux théories.

3.2.4 Aspect numérique

1. Simuler numériquement le nombre de boules dans l'urne A.
2. Vérifier numériquement la valeur de l'espèrance calculée dans la partie 3.2.2.
3. Tracer numériquement la fréquence des cas où l'urne A contient i boules au bout de n étapes.

Indication 1 :

```
from random import randint
import pylab as pl
pl.style.use('bmh')

def boules(N, n):
    X = N
```

```
    A = [X]
    L = [1] * N

    for k in range(1, n + 1):
        i = randint(0, N - 1)
        if L[i] == 0:
            L[i] = 1
            X = ....
        else:
            L[i] = ....
            X = ....
        A.append(X)
    return A
```

Indication 2 :

```
def freq(N, n):
    A = boules(N, n)
    return [A.count(....) / len(....) for i in range(N + 1)]
```

Indication 3 :

```
def retour(N):
    X = N
    L = [1] * N
    retour = False
    n = 0
    while .... :
        n += 1
        i = randint(0, N - 1)
        if L[i] == 0:
            L[i] = 1
            X  = ....
        else:
            L[i] = 0
            X = ....
        if X == N:
            retour = True
    return ....
```

3.2.5 Quelques simulations obtenues

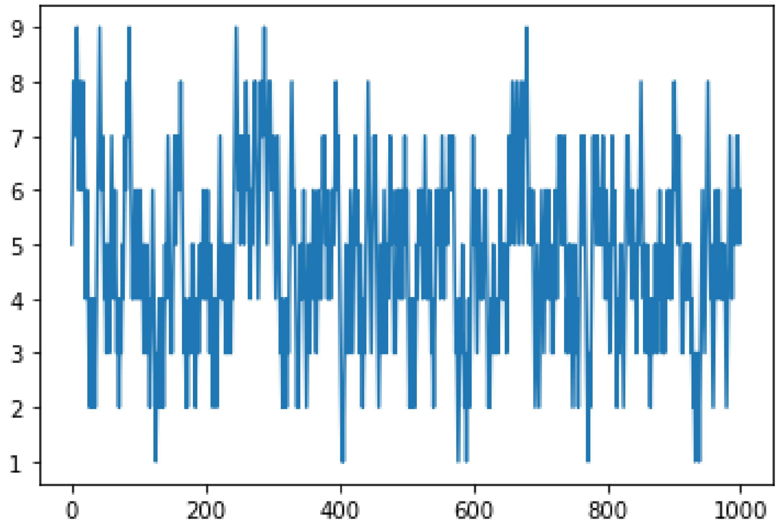

FIGURE 3.5 – Simulation du nombre de boules dans l'urne A

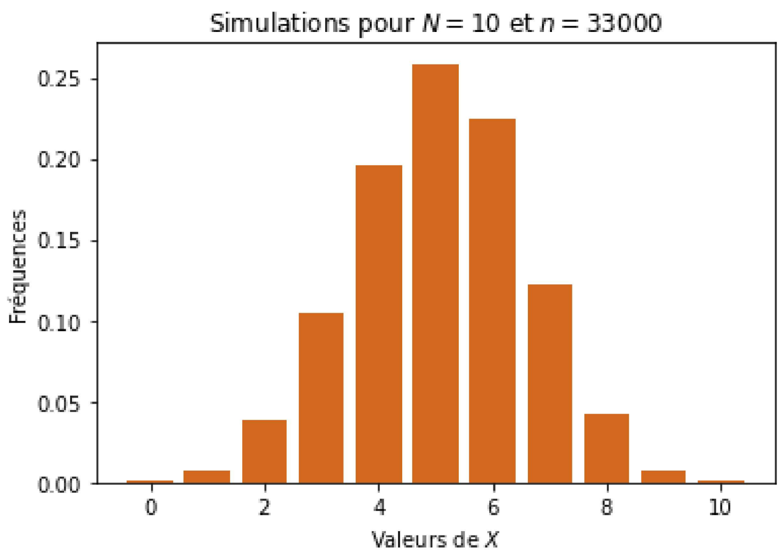

FIGURE 3.6 – Représentation des fréquences de la quetsion 3.

3.2.6 Evaluation

On étudie l'évolution temporelles de la population issue d'une bactérie, suivant les hypothèses suivantes :

— l'évolution de chaque bactérie est indépendante des autres et indépendante du passé, elle peut se diviser en deux avec la probabilité $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t[$.

— Les bactéries meurent avec une probabilité $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t[$.

— A l'instant 0 , il y a une seule bactérie dans le tube.

Questions

1. Calculer la probabilité pour que le processus soit de taille k à l'instant $t+\Delta t$ en fonction de son état à l'instant t.
2. Modéliser le nombre de bactéries à l'instant t.
3. Dessiner le diagramme de transition.
4. Dans ce processus, est-ce que le taux de mort et le taux de naissance sont des fonctions croissantes de la taille de la population ?
5. Etablir le système d'équations différentielles satisfait par $P_n(t)$, la probabilité d'avoir une population de n bactéries à l'instant t. On ne demande pas de le résoudre.
6. Pour $\alpha = 0$, montrer par une récurrence sur k, qu'on a :

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

7. En déduire l'espérance mathématique du nombre de bactéries à l'instant t.
8. Tracer l'évolution de nombre de bactéries au cours du temps
9. Considérons maintenant un modèle déterministe, dans lequel chaque bactérie se divise en deux toutes les $\frac{1}{\lambda}$ minutes (i.e. le même taux de naissance que dans le modèle probabiliste). En comparant le nombre de bactéries dans le modèle déterministe et le nombre moyen de bactérie dans le modèle probabiliste (tous les deux à l'instant), que peut-on en déduire ?
10. Que peut-on dire de la v.a. T représentant la durée de temps pour que toutes les bactéries meurent.

3.3 Projet

Dand le cadre de l'approche pédagogique "Learning by doing", et afin de cultiver l'aspect créatif chez l'étudiant, il serait demandé de réaliser un projet, individuellement ou en groupe, autour des applications de chaînes de Markov, en s'inspirant des thématiques suivantes :

3.3.1 Processus de Poisson : Gestion du Capital d'un Casino

Les processus de Poisson sont utilisés pour modéliser des événements se produisant de manière aléatoire au fil du temps. Une application pertinente est la gestion du capital d'un casino, où les gains et les pertes peuvent être modélisés comme des processus de Poisson.

3.4 Files d'Attente

Si le TP1 avait pour objectif d'étudier un modèle simple d'une file d'attente dans un guichet, l'étudiant pourra s'intéresser à des systèmes plus compliqués et s'aventurer dans la théorie des files d'attentes en cherchant à optimiser des temps caractéristiques à l'instar du temps d'attente moyen.

3.5 Gestion de Stock avec les Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov peuvent être utilisées également pour la gestion de stock à variable aléatoire en vue d'une optimisation des commandes.

3.6 Résolution de Systèmes Linéaires par les Chaînes de Markov

Dans certains cas, la résolution de systèmes linéaires par des chaînes de Markov peut s'avérer plus puissante que l'utilisation des méthodes déterministes.

3.7 Martingales

Les martingales sont des processus stochastiques qui ont beaucoup d'applications, comme le modèle de Wright-Fisher en génétique des populations.

3.8 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien est un exemple de processus stochastique continu, il est très utile notamment en finance pour modéliser l'évolution des prix des actions.

Jour 1	Jour 2	Jour 3
Debriefing	Comportement d'un gaz	Simulation des marches aléatoires
File d'attente	Les marches aléatoires	Introduction au processus de Markov

Il est attendu que les étudiants lisent le cours sur les chaînes de Markov avant la première séance, dont l'objectif c'est d'expliquer aux étudiants les points non clairs et c'est à eux de faire les preuves des theorems lors de cette séance.

L'environnement du travail va être GitHub (Jupiter Notebook), comme ça j'arrive à suivre l'avancement de chaque étudient à temps réel, ce qui facilite le cours aussi dans le cas d'enseignement numérique distanciel.

Les Tps sont à rendre dans deux jours maximum, et l'évaluation peut être faite par des groupes de deux dans une semaine, les livrables : rapport rédigé par latex + code python commenté).