1 Chaînes de Markov

1.1 Introduction

Un processus stochastique est tout simplement un modèle aléatoire dépendant du temps. Lorsque l'espace d'états est fini, ou même dénombrable, on est dans le cadre des chaînes de Markov à temps discret. Il existe également des chaînes de Markov à temps continu, mais cela ne fait pas l'objet de ce cours.

Considérons une puce se trouvant à l'origine à l'instant initial. A chaque unité de temps, on lance une pièce de monnaie. Si l'on obtient 'face' (respectivement 'pile') notre puce se déplace d'une unité vers la gauche (respectivement à droite). Si on note par X_n la variable aléatoire décrivant la position de notre puce au bout de n lancers, en supposant qu'on a répété l'expérience énormément de fois, de manière indépendante et dans les mêmes conditions, alors le processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ est une chaîne de Markov, qu'on qualifie de marche aléatoire.

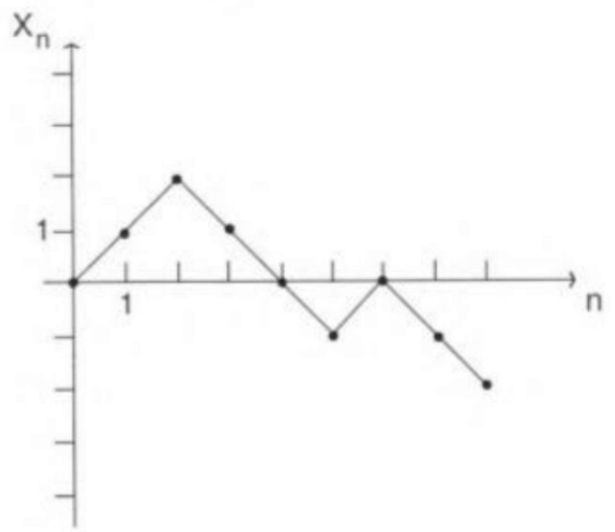

FIGURE 1.1 – Marche aléatoire d'une puce.

D'ailleurs, les chaînes de markov permettent également de modéliser des situations compliquées dans divers domaines, à l'instar de la biologie, la physique, l'économie et la recherche opérationnelle, et la liste est non exhaustive.

A ce propos, voici un exemple intéressant en sûreté de fonctionnement et gestion de maintenance.

Une machine peut être ou bien en état de fonctionnement, ou bien en état de réparation. On fait l'hypothèse que les temps de fonctionnement et de réparation sont des variables aléatoires indépendantes. De plus, les périodes de fonctionnement et de réparation se succèdent en alternance. Elles se terminent respectivement par une défaillance ou par une remise en service. Le nombre de changements d'état au cours du temps est une chaîne de Markov, et on peut exprimer quelque les indicateurs de performance de la machine en fonction de temps caractéristiques issus de la chaîne de markov.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de ce cours. Considérons le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ défini par une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable E appelé espace d'état, et soit $\mu = (\mu(i))_{i\in E}$ une loi de probabilité sur E. Pour $i \in E$, la notation $X_n = i$ signifie que le processus X est dans l'état i à l'instant n.

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. *On dit que le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret ($n \in N$), à espace d'état E et de loi initiale μ si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 0, \forall i, i_0, \ldots, i_{n-1}, j \in E,\\
&\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)\\
&\mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = \mu(i)
\end{aligned}$$

La probabilité $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$ est appelée probabilité de transition, de la chaîne X, de l'état i à l'état j entre les instants n et $n+1$.

Remarque 1.2.2. *L'indice de la variable aléatoire représentant le temps, X_n traduit l'observation du processus à l'instant n. En particulier, X_0 est l'état initial du processus.*

Remarque 1.2.3. *La propriété markovienne se reformule autrement : L'état futur du processus ne dépend que du passé qu'à travers le présent. De manière plus formelle ; la variable aléatoire X_{n+1} (l'état futur) ne dépend que de la variable aléatoire X_n (l'état présent) et non pas des variables aléatoires $X_0, \ldots, X_{n-1}$ (les états passés).*

Exemple 1 : (Gestion de stock) Un magasin garde en inventaire au plus 5 unités d'un produit, alors que chaque jour la demande est de 0,1,2,3,4 et 5 avec probabilités 5/12, 4/12, 6/12, 7/12,9/12 et 1/12.
Il renouvelle l'inventaire à 5 unités pour le lendemain matin seulement si le nombre

d'unités du produit est inférieur strictement à 2 en fin de journée. Alors le nombre d'unités à la fin de la journée est une chaîne de Markov d'espace d'états 0,1,2,3,4,5.

Exemple 2 : (Sûreté de fonctionnement) Une papeterie comprend 3 petites machines servant lors de la première phase pour préparer la pâte, fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chacune ayant une fiabilité de 0.92 au cours d'une journée, ce qui revient à dire que sa probabilité de tomber en panne dans cette journée est de 0.8. Il faut une nuit pour réparer une machine qui tombe en panne, mais une seule à la fois peut être réparée. Le nombre de machines en état de fonctionnement au début d'une journée est une chaîne de Markov d'espace d'état 0,1,2,3.

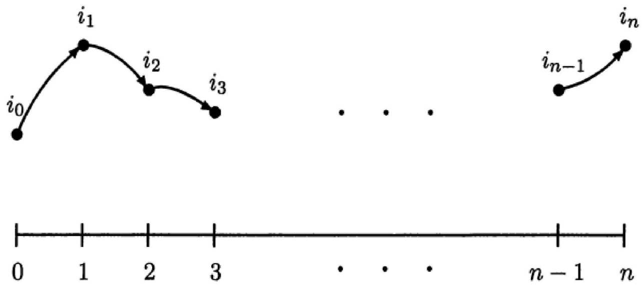

FIGURE 1.2 – Illustration de transitions de l'instant 0 à l'instant n .

Définition 1.2.4. *La chaîne de Markov X est dite homogène dans le temps si et seulement si la probabilité $\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$ est indépendante du temps n. Dans ce cas on note $K(i,j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = j)$ (ou tout simplement $p_{i,j}$), et la matrice ainsi obtenue $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène X.*

Remarque 1.2.5. *Une chaîne de Markov à temps discret et homogène X est caractérisée par le triplet (E, μ, K), où E est son espace d'état, $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ est sa loi initiale, $\mu(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$, et $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$ est sa matrice de transition.*

Remarque 1.2.6. *Pour tout état i fixé dans E, $\{K(i,j), j \in E\}$ est une loi de probabilité sur E. Les lignes de la matrice de transitions sont done des lois de probabilité sur E.*

Notations : On note $X \sim (E, \mu, K)$ pour désigner une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n \geq 0}$ à temps discret, à espace d'état E, de loi initiale $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$, et de matrice de transition $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$.

1.3 Graphe de transition

On représente généralement une chaîne de Markov par son graphe de transition, graphe orienté et évalué dont les sommets sont les états de la chaîne de Markov (éléments de E) et les arcs sont les transitions possibles entre états ; autrement dit sont des flèches dont les valeurs sont les coefficients de la matrice K ; les arcs de valeurs nulles ne sont pas dessinés, et on dit qu'il existe un arc de i vers j si et seulement si $P_{ij} > 0$; on associe alors à cet arc le poids K_{ij} (voir figure 1.3). La somme des poids des arcs sortants de tout sommet doit donc être égale à 1, par définition.

Remarque 1.3.1. *Une matrice possédant c'est deux propriétés $p_{i,j} \geq 0$ et $\Sigma p_{i,j} = 1$ est dite matrice stochastique.*

Proposition 1. *Soit P une matrice stochastique. Alors P admet comme valeur propre 1 et un vecteur associé à cette valeur propre est* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. Calcul immédiat. □

Considérons l'exemple suivant :

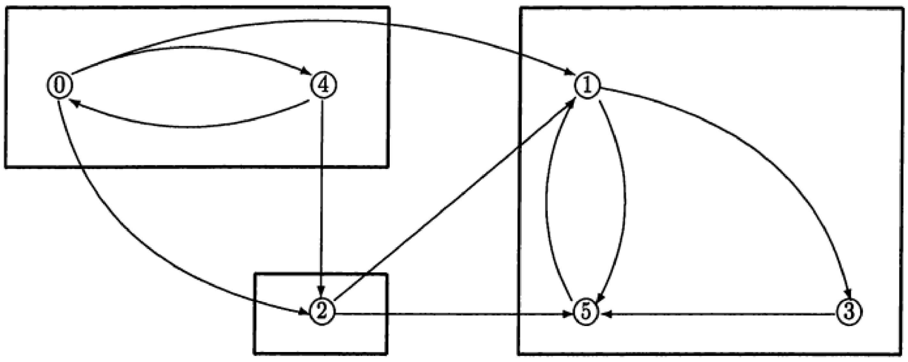

FIGURE 1.3 – Graphe de transition à 6 états.

dont la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3.2. *On dit qu'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est irréductible si et seulement si*

$$\forall i, j \in E, \quad \exists m \in N^* \quad K^{(m)}(i,j) > 0$$

où $K^{(m)}(i,j)$ est l'entrée (i,j) de la matrice K^m. Cela représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en m transitions. Nous avons donc pour tout $i, j \in E$,

$$K^{(m)}(i,j) = \sum_{i_1, \ldots, i_{m-1} \in E} K(i, i_1) K(i_1, i_2) \cdots K(i_{m-1}, j)$$

Proposition 2. *Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu_0, K)$. Alors $\forall n \geq 0, \forall i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu_0(i_0) K(i_0, i_1) K(i_1, i_2) \cdots K(i_{n-1}, i_n) \tag{1.1}$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n. La propriété est vraie pour $n = 0$ par définition de μ_0. Supposons la vraie au rang $n-1$. Distinguons deux cas :

(i) Si $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = 0$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}} = 0$, et donc

$$\mu_0(\{i_0\}) P_{i_0, i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} = 0.$$

Or $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} = 0$ et la propriété est vraie dans ce cas.
(ii) Si maintenant $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
&P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_n\} \\
&\quad = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} \\
&\quad = P\left(X_n = i_n \mid \bigcap_{0 \leq j \leq n-1} \{X_j = i_j\}\right) P\left(\bigcap_{0 \leq j \leq n-1} \{X_j = i_j\}\right) \\
&\quad = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\} \mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}} \\
&\quad = \mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}, \\
&\quad = \mu_0(i_0) K(i_0, i_1) K(i_1, i_2) \cdots K(i_{n-1}, i_n)
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

□

On peut généraliser cette égalité :

$$\mathbb{P}(X_r = i_r, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu(i_r) K(i_r, i_1) K(i_1, i_2) \cdots K(i_{n-1}, i_n) \tag{1.2}$$

théorème 1.3.3. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$*, pour tout* $m \geq 1$*, pour tout* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m} \in \{1, \ldots, N\}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+m} = x_{n+m}, \ldots,\right. & \left. X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right] \\ & = \mathbb{P}\left[X_m = x_{n+m}, \ldots, X_1 = x_{n+1} \mid X_0 = x_n\right]\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition des probabilités conditionnelles et la proposition précédente on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+m} = x_{n+m}, \ldots,\right. & \left. X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right] = \\ & = \frac{\mathbb{P}\left[X_{n+m} = x_{n+m}, \ldots, X_0 = x_0\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right]} \\ & = \frac{\mu_0\left(x_0\right) K\left(x_0, x_1\right) \ldots K\left(x_{n+m-1}, x_{n+m}\right)}{\mu_0\left(x_0\right) K\left(x_0, x_1\right) \ldots K\left(x_{n-1}, x_n\right)}, \text{ d'après la proposition précédente} \\ & = K\left(x_n, x_{n+1}\right) \ldots K\left(x_{n+m-1}, x_{n+m}\right) \\ & = \frac{\mathbb{P}\left[X_m = x_{n+m}, \cdots, X_0 = x_n\right]}{\mathbb{P}\left[X_0 = x_n\right]}, \text{ d'après la proposition précédente} \\ & = \mathbb{P}\left[X_m = x_{n+m}, \ldots, X_1 = x_{n+1} \mid X_0 = x_n\right].\end{aligned}$$

□

Proposition 3. *Soit une chaîne de Markov homogène* $X \sim (E, \mu, K)$*. Alors*

$$\forall m > 0, \quad \mathbb{P}\left(X_m = j\right) = \sum_{i \in E} \mu(i) K^{(m)}(i, j), \quad \forall j \in E$$

Démonstration. Voir TP 1. □

Proposition 4. *Soit une chaîne de Markov homogène* $X \sim (E, \mu, K)$*. Alors* $\forall n \geq 0, \forall m > 0, \forall i, j \in E$*,*

$$\mathbb{P}\left(X_{n+m} = j / X_n = i\right) = \mathbb{P}\left(X_m = j / X_0 = i\right) = K^{(m)}(i, j)$$

Démonstration. Voir TP 1. □

théorème 1.3.4. *(Equation de* ***Chapman-Kolmogorov****) Soit* X *une chaîne de Markov d'espace d'états* E*, de mésure initiale* μ_0 *et de matrice de transition* K*. Alors on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$K^{(n)} = K^n$$

où $K^{(n)}$ *est la matrice de transition en* n *pas.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $K^{(0)} = K^0 = \mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)
\end{aligned}$$

D'une part X est une chaîne de Markov, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k)$$

d'autre part X est homogène, donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = p_{kj}$. D'où

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

Ainsi

$$K^{(n+1)} = K^{(n)} \times K$$

On en déduit le résultat par hypothèse de récurrence. □

Proposition 5. *Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Nous avons alors les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :*

$$\forall m \geq 2, \forall 0 < r < m, \forall i, j \in E, \quad K^{(m)}(i, j) = \sum_{k \in E} K^{(m-r)}(i, k) K^{(r)}(k, j)$$

Démonstration. Voir TP 1. □

Exercice : Dépenses énergétiques, d'après le livre "Exercices de probabilité" Cottrel

Supposons qu'on dispose de deux systèmes de chauffage, l'un de base l'autre d'appoint. On dira que l'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité 1/2 ; par contre si l'on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et l'on passe à l'état 1 avec probabilité 3/4.
Soit X_n l'état du système au jour numéro n ; on admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

1. Déterminer la matrice de transition et son graphe.
2. On pose $p_n = \mathbb{P}[X_n = 1]$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim_{n \to \infty} p_n$?
3. On suppose que l'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se retrouve dans l'état 1 avec probabilité $\frac{3}{5}$ alors il en est de même les jours qui suivent.

Corrigé

1. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $E = \{1,2\}$. Sa matrice de transition $P = (p(x,y))$ est de taille 2×2 et d'après les hypothèses de l'énoncé, elle est donnée par :
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. D'après la formule des probabilités totales et conditionnelles,
$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] &= \mathbb{P}[X_{n+1} = 1, X_n = 1] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 1, X_n = 2] \\ &= \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1]\mathbb{P}[X_n = 1] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2]\mathbb{P}[X_n = 2] \\ &= p(1,1)p_n + p(2,1)(1-p_n), \quad \text{car } \mathbb{P}[X_n = 2] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 1] \\ &= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n. \end{aligned}$$
On peut se ramener à une suite géométrique en soustrayant de l'équation ci-dessus la solution de l'équation $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$, soit $x = \frac{3}{5}$.
$$\begin{aligned} p_n - \frac{3}{5} &= -\frac{1}{4}\left(p_{n-1} - \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right), \end{aligned}$$
d'où
$$p_n = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right).$$
et
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{5}.$$

3. On cherche $\mathbb{P}[X_{n+7} = 1 \mid X_n = 1] = \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1]$. Supposer que l'on est dans l'état 1 le dimanche revient à supposer que $\mathbb{P}[X_0 = 1] = 1 = p_0$ (et donc $\mathbb{P}[X_0 = 2] = 0$). Donc,
$$\begin{aligned} p_7 = \mathbb{P}[X_7 = 1] &= \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1]\mathbb{P}[X_0 = 1] + \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 2]\mathbb{P}[X_0 = 2] \\ &= \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1]. \end{aligned}$$
On cherche donc p_7. D'après la question précédente,
$$p_7 = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^7 \left(p_0 - \frac{3}{5}\right) \approx \frac{3}{5}.$$

4. La relation de récurrence établie sur (p_n) nous dit que si $p_{n-1} = \frac{3}{5}$ alors $p_n = \frac{3}{5}$.

1.4 Classification des états

La classification des états permet une description de la chaîne de Markov, ainsi que son comportement à long terme.

Définition 1.4.1. *Soit $x \in E$ un état. Le temps d'atteinte de x, noté T_x, est le premier instant où x est visité après le départ. Par convention, le temps d'atteinte est infini si nous n'atteignons jamais x :*

$$\forall \omega \in \Omega, T_x(\omega) = \begin{cases} \inf\{n > 0 \mid X_n(\omega) = x\} & \text{si un tel entier existe} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la chaîne part de l'état x lui-même, nous employons plutôt le terme de temps de retour.

Définition 1.4.2. *Un état $x \in E$ est dit récurrent si*

$$P_x[T_x < +\infty] = 1.$$

L'état x est dit transient ou transitoire sinon, c'est-à-dire quand

$$P_x[T_x < +\infty] < 1, \text{autrement dit, } P_x[T_x = \infty] > 0.$$

Remarque 1.4.3. *Autrement dit, Un état i est récurrent si*

$$f_{ii} = \Pr(\text{retour à } i \mid \text{départ de } i) = 1.$$

Sinon ($f_{ii} < 1$), alors l'état est transient.

Définition 1.4.4. *Soit une chaîne de Markov et x un état récurrent. Alors x est dit récurrent positif si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, il est dit récurrent nul si $\mathbb{E}_x(T_x) = \infty$.*

Remarque 1.4.5. *Un état récurrent i est récurrent nul si*

$$\mu_i = \mathbb{E}(\text{temps de premier retour à } i \mid \text{départ de } i) = \infty.$$

Sinon ($\mu_i < \infty$), alors l'état est récurrent positif. Ici, le temps est mesuré en nombre de transitions.

Définition 1.4.6. *La période $d(i)$ d'un état i est définie par*

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : \Pr(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\} = \text{pgcd}\{n \geq 1 : K_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Par convention, $d(i) = 0$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

> **Définition 1.4.7.** *Un état récurrent positif apériodique est dit ergodique. et si $K_{ii} = 1$, l'état i est dit absorbant.*

Exemple :

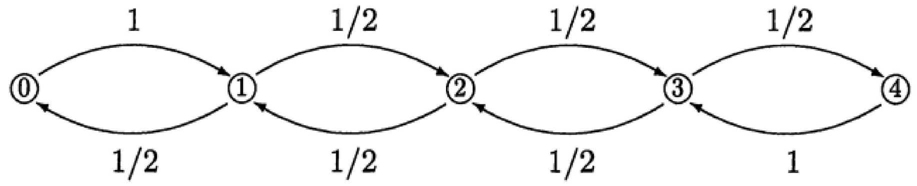

FIGURE 1.4 – Exemple pour la classification des états.

Dans l'exemple de la figure 1.4, l'état 2 est récurrent, car la probabilité de non retour à cet état est nulle.
De plus, $d(2) = 2$, car on retourne à 2 à partir de 2 avec une probabilité strictement positive seulement en $2k$ pas, pour $k \geq 1$.

> **théorème 1.4.8.** *Un état i est récurrent si et seulement si*
>
> $$\sum_{n\geq 1} K_{ii}^{(n)} = \infty.$$
>
> *Sinon, il est transient, et alors nécessairement $\lim_{n\to\infty} K_{ii}^{(n)} = 0$.*
> *(b) Un état récurrent i est récurrent nul si et seulement si*
>
> $$\lim_{n\to\infty} K_{ii}^{(n)} = 0.$$
>
> *Sinon, il est récurrent positif.*

Démonstration. Conséquence du théorème ergodique : à venir. □

1.5 Communication des classes

> **Définition 1.5.1.** *Soient deux états i et j. On dit que i conduit à j ou que j est accessible depuis i, noté $i \to j$, si :*
>
> $$\exists n \in \mathbb{N}, K_{i,j}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i] > 0.$$
>
> *Cette relation signifie que, partant de i, nous avons une probabilité non nulle d'atteindre j après n transitions.*
> *Nous dirons que i communique avec j, noté $i \leftrightarrow j$, si chacun des états i et j est accessible depuis l'autre, c'est-à-dire $i \to j$ et $j \to i$.*

Proposition 6. *La relation de communication $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La relation est refléxive : $i \leftrightarrow i$, puisque $K_{ii}^{(0)} = 1 > 0$;

— Elle est symétrique : $j \leftrightarrow i$ si $i \leftrightarrow j$, par définition de la relation ;

— Elle est de plus transitive : $i \leftrightarrow k$ si $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$, puisqu'alors $K_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)} > 0$ pour certains $m, n \geq 0$, et donc par les équation de Chapman-Kolmogorov :

$$K_{ik}^{(r+m)} = \sum_{n \geq 0} K_{ij}^{(n)} K_{jk}^{(m)} \geq K_{ij}^{(n)} K_{jk}^{(m)} > 0.$$

□

Proposition 7. *Soient deux états i et j qui communiquent, alors i et j sont soit tous les deux récurrents, soit tous les deux transients. De plus, i et j ont la même période.*

Définition 1.5.2. — *Les états E de la chaîne peuvent être partitionnés en classes d'équivalence appelées classes irréductibles. Si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est dite irréductible.*

— *La relation d'accessibilité s'étend aux classes : une classe d'équivalence C' est accessible depuis une classe C, noté $C \to C'$, si*

$$\forall (x, x') \in C \times C', \ x \to x'.$$

— *Une classe d'équivalence C est dite fermée si, pour tout x, y, tels que $(x \in C \text{ et } x \to y) \Rightarrow y \in C$.*

Remarque 1.5.3. *Il résulte de la proposition 7 que les éléments de la même classe sont de même nature, et pour ceci, elle sera qualifiée de récurente, positive ou nulle, ou bien transiente en fonction de la classification de ses éléments. De plus, on peut montrer que toute classe récurrente est fermée, et que toute chaîne irréductible sur un ensemble d'états fini est récurrente positive.*

Exemple

Reprenons l'exemple de la page 8 :

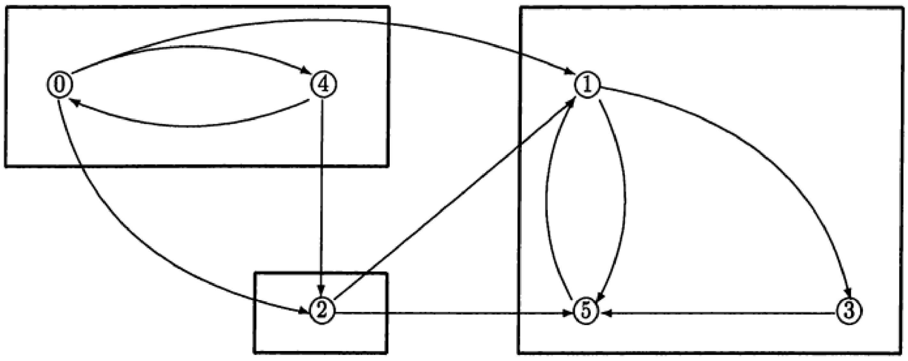

Figure 1.5 – Exemple de classes de communication

Au vu de ce qui précède, on constate que :
- {2} est transiente.
- {0,4} est transiente.
- {1,3,5} est récurrente positive.

1.6 théorème ergodique

Dans cette partie, on aborde la notion de mesure invariante permettant de caractériser la chaîne de Markov à long terme. Le théorème central est le théorème ergodique. Cette partie est fortement inspirée de [1] et vous y trouvez toutes les démonstrations.

théorème 1.6.1. *(Théorème ergodique)*
(a) Dans tous les cas sauf peut-être dans celui où j est un état récurrent positif périodique, on a

$$\lim_{n\to\infty} K_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

où

$$f_{ij} = \Pr(\textit{visite de } j \mid \textit{départ de } i)$$

et

$$\mu_j = \mathbb{E}(\textit{temps de premier retour à } j \mid \textit{départ de } j).$$

(b) Dans tous les cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Définition 1.6.2. *(loi stationnaire ou invariante). Une suite finie ou infinie dénombrable $\pi = (\pi_j)$ est appelée une distribution stationnaire pour une chaîne irréductible, donc avec une seule classe d'états, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\pi_j > 0$ *pour tout* j ;
2. $\sum_i \pi_i = 1$;
3. $\pi_j = \sum_i \pi_i K_{ij}$ *pour tout* j, *c'est-à-dire* $\pi = \pi K$ *en notation matricielle.*

théorème 1.6.3. *Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire* (π_j) *si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas, la distribution stationnaire est unique et donnée par* $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$ *pour tout état* j, *où* $\mu_j = \mathbb{E}(\textit{temps de premier retour à } j \mid \textit{départ de } j)$.

Remarque 1.6.4. *Toute chaine de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente positive.*

théorème 1.6.5. *Soit* (X_n) *une chaîne de Markov irréductible et apériodique alors* P^n *converge vers la matrice dont tous les lignes sont constantes égales à* μ, *en particulier quel que soit la loi de* X_0, X_n *converge en loi vers* μ.

Démonstration. La preuve se base sur Perron-Frobenius en utilisant le fait que la matrice de transition admet 1 comme unique valeur propre de module 1. □

Remarque 1.6.6. *Remarquons que la condition de matrice stochastique irréductible n'est pas suffisante pour cette conclusion. Par exemple, si l'on considère la matrice stochastique irréductible*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors, $A^{2n} = \mathrm{I}_2$ *et* $A^{2n+1} = A$. *Par conséquent, la suite* $(A^n)_n$ *ne converge pas (mais les deux suites extraites* $(A^{2n})_n$ *et* $(A^{2n+1})_n$ *convergent). On remarque que dans ce cas,*

$$\text{PGCD}\left\{n \in \mathbb{N}, [A^n]_{i,i} > 0\right\} = 2.$$

Exemple : Gestion de maintenance

Un appareil peut être soit en réparation (état 0), soit en état de fonctionnement bon, moyen ou mauvais (états 1, 2 ou 3, respectivement). Si l'appareil est dans l'état 1 (bon) ou l'état 2 (moyen) un jour donné, le jour suivant, il peut soit rester dans le même état, soit passer à un état de fonctionnement inférieur, c'est-à-dire 2 ou 3, respectivement. Lorsque l'appareil est en mauvais état de fonctionnement (état 3), il est envoyé en réparation le lendemain, puis remis en bon état (état 1) le jour suivant. Les différents états et les transitions possibles sont illustrés dans la figure 1.6

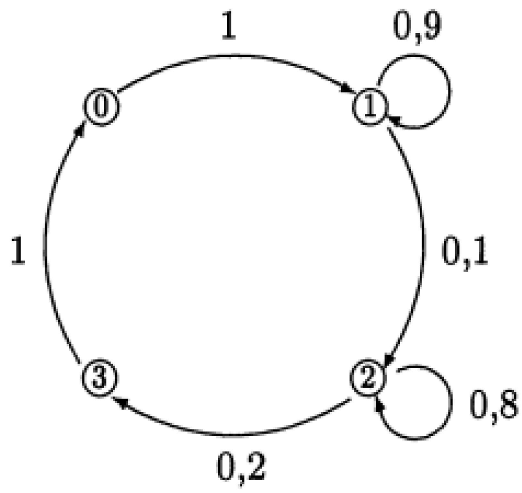

Figure 1.6 – Exemple de gestion de maintenance

Voici la matrice de transition pour l'état de l'appareil (0, 1, 2 ou 3) d'un jour au suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les états communiquent entre eux, et donc la chaîne est irréductible. Puisque le nombre d'états est fini, la chaîne est récurrente positive. De plus, $P_{11} = 0,9 > 0$, ce qui implique que la chaîne est apériodique, donc ergodique. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

où $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\} = \pi$ satisfait $\pi = \pi P$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_3, \\ \pi_1 = \pi_0 + 0,9\pi_1, \\ \pi_2 = 0,1\pi_1 + 0,8\pi_2, \\ \pi_3 = 0,3\pi_2, \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

On a alors $\pi_0 + 10\pi_0 + 5\pi_0 + \pi_0 = 1$, d'où $\pi_0 = \frac{1}{17}$. C'est la proportion moyenne de jours à long terme que l'appareil passe en réparation. De plus, $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = 17$ est le nombre moyen de jours qu'un appareil nouvellement réparé fonctionne avant de retourner en réparation.