MOHAMMED VI POLYTECHNIC UNIVERSITY

EMINES School of Industrial Management

Chaînes de Markov : Exemples et applications.

ECH-CHAMMAKHY Mohammed

Education fellow
Mathématiques

Encadré par :
DECREUSEFOND Laurent

A tous les malheureux, où qu'ils se trouvent, aux âmes accablées par la dépression, aux malades atteints du cancer (que Dieu les guérisse), à ceux emprisonnés injustement, et notamment à nos frères palestiniens, qui font face à une profonde injustice ; espérons que la guerre prend fin et que l'eau de rivière retrouve son cours !

Mohammed ECH-CHAMMAKHY

Table des matières

Introduction

Ce cours est destiné aux étudiants en deuxième année en cycle d'ingénieurs dans une école généraliste.

Il s'agit d'une introduction aux processus stochastiques qui a comme préalable la connaissance des notions de probabilités discrètes et les principaux résultats sur les variables aléatoires, notamment la notion d'indépendance et de conditionnement.

On se focalise principalement sur les chaînes de Markov à temps discret, et le point central est le théorème ergodique permettant de décrire le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov à l'aide de la distribution stationnaire.

Le choix des exemples et exercices permet d'établir un lien avec les autres modules.

Les travaux pratiques sont issus de deux textes de modélisation de l'agrégation des mathématiques externe au Maroc.

La partie Projet a pour vocation d'encourager l'étudiant à choisir un thème en lien avec les chaînes de Markov et avec un domaine « d'ingénierie » de son intérêt.

Prérequis

— Algèbre linéaire.
— Probabilités discrètes.
— Conditionnement.
— Indépendance.
— Programmation avec Python.

Objectifs

— Découvrir des applications des chaînes de Markov liées à l'ingénierie.
— Savoir démontrer quelques propriétés élémentaires sur les chaînes de Markov.
— Classer les états d'une chaîne de Markov sur des exemples concrets.
— Simuler numériquement une chaîne de Markov.
— Valider numériquement des résultats théoriques.

1 Chaînes de Markov

1.1 Introduction

Un processus stochastique est tout simplement un modèle aléatoire dépendant du temps. Lorsque l'espace d'états est fini, ou même dénombrable, on est dans le cadre des chaînes de Markov à temps discret. Il existe également des chaînes de Markov à temps continu, mais cela ne fait pas l'objet de ce cours.

Considérons une puce se trouvant à l'origine à l'instant initial. A chaque unité de temps, on lance une pièce de monnaie. Si l'on obtient 'face' (respectivement 'pile') notre puce se déplace d'une unité vers la gauche (respectivement à droite). Si on note par X_n la variable aléatoire décrivant la position de notre puce au bout de n lancers, en supposant qu'on a répété l'expérience énormément de fois, de manière indépendante et dans les mêmes conditions, alors le processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ est une chaîne de Markov, qu'on qualifie de marche aléatoire.

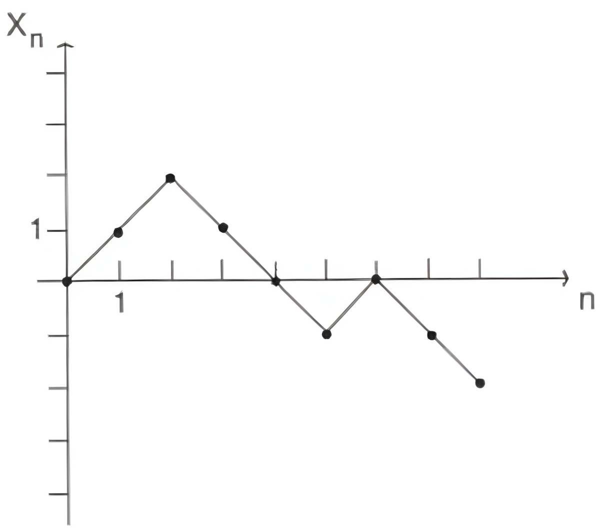

FIGURE 1.1 – Marche aléatoire d'une puce.

D'ailleurs, les chaînes de markov permettent également de modéliser des situations compliquées dans divers domaines, à l'instar de la biologie, la physique, l'économie et la recherche opérationnelle, et la liste est non exhaustive.

A ce propos, voici un exemple intéressant en sûreté de fonctionnement et gestion de maintenance.

Une machine peut être ou bien en état de fonctionnement, ou bien en état de réparation. On fait l'hypothèse que les temps de fonctionnement et de réparation sont des variables aléatoires indépendantes. De plus, les périodes de fonctionnement et de réparation se succèdent en alternance. Elles se terminent respectivement par une défaillance ou par une remise en service. Le nombre de changements d'état au cours du temps est une chaîne de Markov, et on peut exprimer quelque les indicateurs de performance de la machine en fonction de temps caractéristiques issus de la chaîne de markov.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de ce cours. Considérons le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ défini par une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable E appelé espace d'état, et soit $\mu = (\mu(i))_{i\in E}$ une loi de probabilité sur E. Pour $i \in E$, la notation $X_n = i$ signifie que le processus X est dans l'état i à l'instant n.

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. *On dit que le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret ($n \in N$), à espace d'état E et de loi initiale μ si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, \forall i, i_0, \ldots, i_{n-1}, j \in E,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$
$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu(i)$$

La probabilité $\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$ est appelée probabilité de transition, de la chaîne X, de l'état i à l'état j entre les instants n et $n+1$.

Remarque 1.2.2. *L'indice de la variable aléatoire représentant le temps, X_n traduit l'observation du processus à l'instant n. En particulier, X_0 est l'état initial du processus.*

Remarque 1.2.3. *La propriété markovienne se reformule autrement : L'état futur du processus ne dépend que du passé qu'à travers le présent. De manière plus formelle ; la variable aléatoire X_{n+1} (l'état futur) ne dépend que de la variable aléatoire X_n (l'état présent) et non pas des variables aléatoires $X_0, \ldots, X_{n-1}$ (les états passés).*

Exemple 1 : (Gestion de stock) Un magasin garde en inventaire au plus 5 unités d'un produit, alors que chaque jour la demande est de 0,1,2,3,4 et 5 avec probabilités 5/12, 4/12, 6/12, 7/12,9/12 et 1/12.
Il renouvelle l'inventaire à 5 unités pour le lendemain matin seulement si le nombre

d'unités du produit est inférieur strictement à 2 en fin de journée. Alors le nombre d'unités à la fin de la journée est une chaîne de Markov d'espace d'états 0,1,2,3,4,5.

Exemple 2 : (Sûreté de fonctionnement) Une papeterie comprend 3 petites machines servant lors de la première phase pour préparer la pâte, fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chacune ayant une fiabilité de 0.92 au cours d'une journée, ce qui revient à dire que sa probabilité de tomber en panne dans cette journée est de 0.8. Il faut une nuit pour réparer une machine qui tombe en panne, mais une seule à la fois peut être réparée. Le nombre de machines en état de fonctionnement au début d'une journée est une chaîne de Markov d'espace d'état 0,1,2,3.

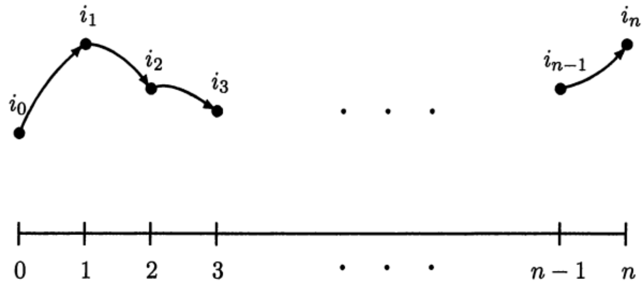

FIGURE 1.2 – Illustration de transitions de l'instant 0 à l'instant n .

Définition 1.2.4. *La chaîne de Markov X est dite homogène dans le temps si et seulement si la probabilité $\mathbb{P}(X_{n+1} = j/X_n = i)$ est indépendante du temps n. Dans ce cas on note $K(i, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j/X_n = j)$ (ou tout simplement $p_{i,j}$), et la matrice ainsi obtenue $K = (K(i, j))_{i,j\in E}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène X.*

Remarque 1.2.5. *Une chaîne de Markov à temps discret et homogène X est caractérisée par le triplet (E, μ, K), où E est son espace d'état, $\mu = (\mu(i))_{i\in E}$ est sa loi initiale, $\mu(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$, et $K = (K(i, j))_{i,j\in E}$ est sa matrice de transition.*

Remarque 1.2.6. *Pour tout état i fixé dans E, $\{K(i, j), j \in E\}$ est une loi de probabilité sur E. Les lignes de la matrice de transitions sont done des lois de probabilité sur E.*

Notations : On note $X \sim (E, \mu, K)$ pour désigner une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geq 0}$ à temps discret, à espace d'état E, de loi initiale $\mu = (\mu(i))_{i\in E}$, et de matrice de transition $K = (K(i, j))_{i,j\in E}$.

1.3 Graphe de transition

On représente généralement une chaîne de Markov par son graphe de transition, graphe orienté et évalué dont les sommets sont les états de la chaîne de Markov (éléments de E) et les arcs sont les transitions possibles entre états ; autrement dit sont des flèches dont les valeurs sont les coefficients de la matrice K ; les arcs de valeurs nulles ne sont pas dessinés, et on dit qu'il existe un arc de i vers j si et seulement si $P_{ij} > 0$; on associe alors à cet arc le poids K_{ij} (voir figure 1.3). La somme des poids des arcs sortants de tout sommet doit donc être égale à 1, par définition.

Remarque 1.3.1. *Une matrice possédant c'est deux propriétés $p_{i,j} \geq 0$ et $\Sigma p_{i,j} = 1$ est dite matrice stochastique.*

Proposition 1. *Soit P une matrice stochastique. Alors P admet comme valeur propre 1 et un vecteur associé à cette valeur propre est* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. Calcul immédiat. □

Considérons l'exemple suivant :

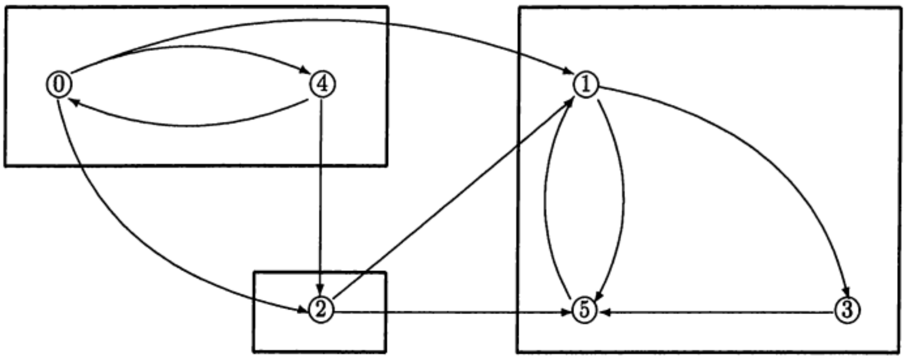

FIGURE 1.3 – Graphe de transition à 6 états.

dont la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3.2. *On dit qu'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est irréductible si et seulement si*

$$\forall i, j \in E, \quad \exists m \in N^* \quad K^{(m)}(i,j) > 0$$

où $K^{(m)}(i,j)$ est l'entrée (i,j) de la matrice K^m. Cela représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en m transitions. Nous avons donc pour tout $i, j \in E$,

$$K^{(m)}(i,j) = \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}\in E} K(i,i_1) K(i_1,i_2) \cdots K(i_{m-1},j)$$

Proposition 2. *Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu_0, K)$. Alors $\forall n \geq 0, \forall i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu_0(i_0) K(i_0,i_1) K(i_1,i_2) \cdots K(i_{n-1},i_n) \tag{1.1}$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n. La propriété est vraie pour $n = 0$ par définition de μ_0. Supposons la vraie au rang $n-1$. Distinguons deux cas :

(i) Si $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = 0$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}} = 0$, et donc

$$\mu_0(\{i_0\}) P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} = 0.$$

Or $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} = 0$ et la propriété est vraie dans ce cas.

(ii) Si maintenant $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
&P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_n\} \\
&\qquad = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} \\
&\qquad = P\left(X_n = i_n \mid \bigcap_{0\leq j\leq n-1} \{X_j = i_j\}\right) P\left(\bigcap_{0\leq j\leq n-1} \{X_j = i_j\}\right) \\
&\qquad = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\} \mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}} \\
&\qquad = \mu_0(\{i_0\}) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}, \\
&\qquad = \mu_0(i_0) K(i_0,i_1) K(i_1,i_2) \cdots K(i_{n-1},i_n)
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

□

On peut généraliser cette égalité :

$$\mathbb{P}(X_r = i_r, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu(i_r) K(i_r,i_1) K(i_1,i_2) \cdots K(i_{n-1},i_n) \tag{1.2}$$

théorème 1.3.3. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *pour tout* $m \geq 1$, *pour tout* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m} \in \{1, \ldots, N\}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+m}=x_{n+m},\ldots,\right. & \left. X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\right] \\ & =\mathbb{P}\left[X_m=x_{n+m},\ldots,X_1=x_{n+1} \mid X_0=x_n\right]\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition des probabilités conditionnelles et la proposition précédente on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+m}=x_{n+m},\ldots,\right. & \left. X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\right]= \\ & =\frac{\mathbb{P}\left[X_{n+m}=x_{n+m},\ldots,X_0=x_0\right]}{\mathbb{P}\left[X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\right]} \\ & =\frac{\mu_0\left(x_0\right)K\left(x_0,x_1\right)\ldots K\left(x_{n+m-1},x_{n+m}\right)}{\mu_0\left(x_0\right)K\left(x_0,x_1\right)\ldots K\left(x_{n-1},x_n\right)},\ \text{d'après la proposition précédente} \\ & =K\left(x_n,x_{n+1}\right)\ldots K\left(x_{n+m-1},x_{n+m}\right) \\ & =\frac{\mathbb{P}\left[X_m=x_{n+m},\cdots,X_0=x_n\right]}{\mathbb{P}\left[X_0=x_n\right]},\ \text{d'après la proposition précédente} \\ & =\mathbb{P}\left[X_m=x_{n+m},\ldots,X_1=x_{n+1} \mid X_0=x_n\right].\end{aligned}$$

□

Proposition 3. *Soit une chaîne de Markov homogène* $X \sim (E, \mu, K)$. *Alors*

$$\forall m>0, \quad \mathbb{P}\left(X_m=j\right)=\sum_{i\in E}\mu(i)K^{(m)}(i,j), \quad \forall j\in E$$

Démonstration. A faire en TD. □

Proposition 4. *Soit une chaîne de Markov homogène* $X \sim (E, \mu, K)$. *Alors* $\forall n \geq 0, \forall m > 0, \forall i, j \in E$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+m}=j/X_n=i\right)=\mathbb{P}\left(X_m=j/X_0=i\right)=K^{(m)}(i,j)$$

Démonstration. A faire en TD. □

théorème 1.3.4. *(Equation de* ***Chapman-Kolmogorov****) Soit* X *une chaîne de Markov d'espace d'états* E, *de mésure initiale* μ_0 *et de matrice de transition* K. *Alors on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$K^{(n)}=K^n$$

où $K^{(n)}$ *est la matrice de transition en* n *pas.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $K^{(0)} = K^0 = \mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)
\end{aligned}$$

D'une part X est une chaîne de Markov, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k)$$

d'autre part X est homogène, donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = p_{kj}$. D'où

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

Ainsi

$$K^{(n+1)} = K^{(n)} \times K$$

On en déduit le résultat par hypothèse de récurrence. □

Proposition 5. *Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Nous avons alors les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :*

$$\forall m \geq 2, \forall 0 < r < m, \forall i, j \in E, \quad K^{(m)}(i,j) = \sum_{k\in E} K^{(m-r)}(i,k) K^{(r)}(k,j)$$

Démonstration. A faire en TD. □

Exercice : Dépenses énergétiques, d'après le livre "Exercices de probabilité" Cottrel

Supposons qu'on dispose de deux systèmes de chauffage, l'un de base l'autre d'appoint. On dira que l'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité $1/2$; par contre si l'on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et l'on passe à l'état 1 avec probabilité $3/4$.
Soit X_n l'état du système au jour numéro n ; on admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

1. Déterminer la matrice de transition et son graphe.
2. On pose $p_n = \mathbb{P}[X_n = 1]$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim_{n\to\infty} p_n$?
3. On suppose que l'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se retrouve dans l'état 1 avec probabilité $\frac{3}{5}$ alors il en est de même les jours qui suivent.

Corrigé

1. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $E = \{1, 2\}$. Sa matrice de transition $P = (p(x, y))$ est de taille 2×2 et d'après les hypothèses de l'énoncé, elle est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. D'après la formule des probabilités totales et conditionnelles,

$$p_{n+1} = \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] = \mathbb{P}[X_{n+1} = 1, X_n = 1] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 1, X_n = 2]$$
$$= \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1]\mathbb{P}[X_n = 1] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2]\mathbb{P}[X_n = 2]$$
$$= p(1,1)p_n + p(2,1)(1 - p_n), \quad \text{car } \mathbb{P}[X_n = 2] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 1]$$
$$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}(1 - p_n)$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n.$$

On peut se ramener à une suite géométrique en soustrayant de l'équation ci-dessus la solution de l'équation $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$, soit $x = \frac{3}{5}$.

$$p_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4}\left(p_{n-1} - \frac{3}{5}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right),$$

d'où

$$p_n = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right).$$

et

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{5}.$$

3. On cherche $\mathbb{P}[X_{n+7} = 1 \mid X_n = 1] = \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1]$. Supposer que l'on est dans l'état 1 le dimanche revient à supposer que $\mathbb{P}[X_0 = 1] = 1 = p_0$ (et donc $\mathbb{P}[X_0 = 2] = 0$). Donc,

$$p_7 = \mathbb{P}[X_7 = 1] = \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1]\mathbb{P}[X_0 = 1] + \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 2]\mathbb{P}[X_0 = 2]$$
$$= \mathbb{P}[X_7 = 1 \mid X_0 = 1].$$

On cherche donc p_7. D'après la question précédente,

$$p_7 = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^7 \left(p_0 - \frac{3}{5}\right) \approx \frac{3}{5}.$$

4. La relation de récurrence établie sur (p_n) nous dit que si $p_{n-1} = \frac{3}{5}$ alors $p_n = \frac{3}{5}$.

1.4 Classification des états

La classification des états permet une description de la chaîne de Markov, ainsi que son comportement à long terme.

Définition 1.4.1. *Soit $x \in E$ un état. Le temps d'atteinte de x, noté T_x, est le premier instant où x est visité après le départ. Par convention, le temps d'atteinte est infini si nous n'atteignons jamais x :*

$$\forall \omega \in \Omega, T_x(\omega) = \begin{cases} \inf\{n > 0 \mid X_n(\omega) = x\} & \textit{si un tel entier existe} \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Si la chaîne part de l'état x lui-même, nous employons plutôt le terme de temps de retour.

Définition 1.4.2. *Un état $x \in E$ est dit récurrent si*

$$P_x[T_x < +\infty] = 1.$$

L'état x est dit transient ou transitoire sinon, c'est-à-dire quand

$$P_x[T_x < +\infty] < 1, \textit{autrement dit, } P_x[T_x = \infty] > 0.$$

Remarque 1.4.3. *Autrement dit, Un état i est récurrent si*

$$f_{ii} = \Pr(\textit{retour à } i \mid \textit{départ de } i) = 1.$$

Sinon ($f_{ii} < 1$), alors l'état est transient.

Définition 1.4.4. *Soit une chaîne de Markov et x un état récurrent. Alors x est dit récurrent positif si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, il est dit récurrent nul si $\mathbb{E}_x(T_x) = \infty$.*

Remarque 1.4.5. *Un état récurrent i est récurrent nul si*

$$\mu_i = \mathbb{E}(\textit{temps de premier retour à } i \mid \textit{départ de } i) = \infty.$$

Sinon ($\mu_i < \infty$), alors l'état est récurrent positif. Ici, le temps est mesuré en nombre de transitions.

Définition 1.4.6. *La période $d(i)$ d'un état i est définie par*

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : \Pr(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\} = \text{pgcd}\{n \geq 1 : K_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Par convention, $d(i) = 0$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

Définition 1.4.7. *Un état récurrent positif apériodique est dit ergodique. et si $K_{ii} = 1$, l'état i est dit absorbant.*

Exemple :

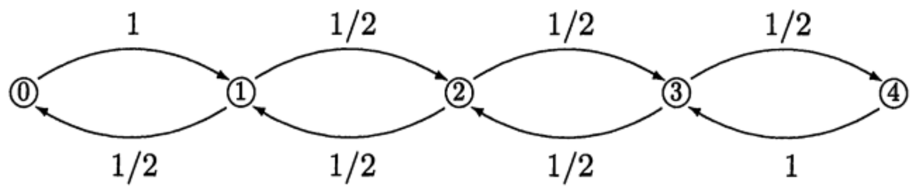

FIGURE 1.4 – Exemple pour la classification des états.

Dans l'exemple de la figure 1.4, l'état 2 est récurrent, car la probabilité de non retour à cet état est nulle.
De plus, $d(2) = 2$, car on retourne à 2 à partir de 2 avec une probabilité strictement positive seulement en $2k$ pas, pour $k \geq 1$.

théorème 1.4.8. *Un état i est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 1} K_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Sinon, il est transient, et alors nécessairement $\lim_{n\to\infty} K_{ii}^{(n)} = 0$.
(b) Un état récurrent i est récurrent nul si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} K_{ii}^{(n)} = 0.$$

Sinon, il est récurrent positif.

Démonstration. Conséquence du théorème ergodique : à venir. □

1.5 Communication des classes

Définition 1.5.1. *Soient deux états i et j. On dit que i conduit à j ou que j est accessible depuis i, noté $i \to j$, si :*

$$\exists n \in \mathbb{N}, K_{i,j}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i] > 0.$$

Cette relation signifie que, partant de i, nous avons une probabilité non nulle d'atteindre j après n transitions.
Nous dirons que i communique avec j, noté $i \leftrightarrow j$, si chacun des états i et j est accessible depuis l'autre, c'est-à-dire $i \to j$ et $j \to i$.

Proposition 6. *La relation de communication $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La relation est refléxive : $i \leftrightarrow i$, puisque $K_{ii}^{(0)} = 1 > 0$;

- Elle est symétrique : $j \leftrightarrow i$ si $i \leftrightarrow j$, par définition de la relation ;
- Elle est de plus transitive : $i \leftrightarrow k$ si $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$, puisqu'alors $K_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)} > 0$ pour certains $m, n \geq 0$, et donc par les équation de Chapman-Kolmogorov :

$$K_{ik}^{(r+m)} = \sum_{n \geq 0} K_{ij}^{(n)} K_{jk}^{(m)} \geq K_{ij}^{(n)} K_{jk}^{(m)} > 0.$$

□

Proposition 7. *Soient deux états i et j qui communiquent, alors i et j sont soit tous les deux récurrents, soit tous les deux transients. De plus, i et j ont la même période.*

Définition 1.5.2.
- *Les états E de la chaîne peuvent être partitionnés en classes d'équivalence appelées classes irréductibles. Si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est dite irréductible.*
- *La relation d'accessibilité s'étend aux classes : une classe d'équivalence C' est accessible depuis une classe C, noté $C \to C'$, si*

$$\forall (x, x') \in C \times C',\ x \to x'.$$

- *Une classe d'équivalence C est dite fermée si, pour tout x, y, tels que $(x \in C \text{ et } x \to y) \Rightarrow y \in C$.*

Remarque 1.5.3. *Il résulte de la proposition 7 que les éléments de la même classe sont de même nature, et pour ceci, elle sera qualifiée de récurente, positive ou nulle, ou bien transiente en fonction de la classification de ses éléments. De plus, on peut montrer que toute classe récurrente est fermée, et que toute chaîne irréductible sur un ensemble d'états fini est récurrente positive.*

Exemple

Reprenons l'exemple de la page 8 :

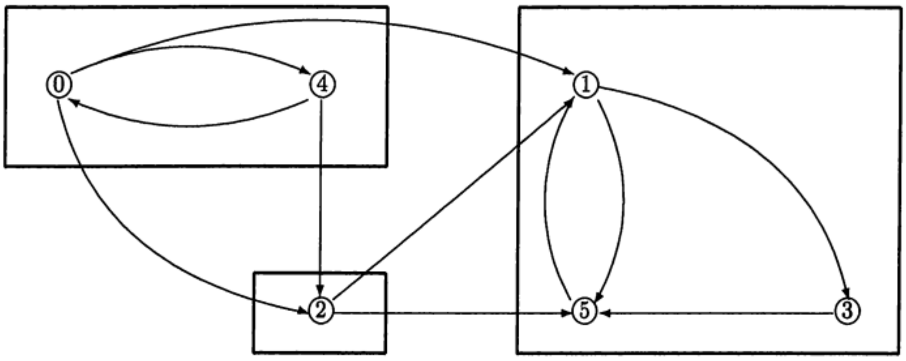

FIGURE 1.5 – Exemple de classes de communication

Au vu de ce qui précède, on constate que :
- $\{2\}$ est transiente.
- $\{0,4\}$ est transiente.
- $\{1,3,5\}$ est récurrente positive.

1.6 théorème ergodique

Dans cette partie, on aborde la notion de mesure invariante permettant de caractériser la chaîne de Markov à long terme. Le théorème central est le théorème ergodique. Cette partie est fortement inspirée de [1] et vous y trouvez toutes les démonstrations.

théorème 1.6.1. *(Théorème ergodique)*
(a) Dans tous les cas sauf peut-être dans celui où j est un état récurrent positif périodique, on a

$$\lim_{n\to\infty} K_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

où

$$f_{ij} = \Pr(\textit{visite de } j \mid \textit{départ de } i)$$

et

$$\mu_j = \mathbb{E}(\textit{temps de premier retour à } j \mid \textit{départ de } j).$$

(b) Dans tous les cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} K_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Définition 1.6.2. *(loi stationnaire ou invariante). Une suite finie ou infinie dénombrable* $\pi = (\pi_j)$ *est appelée une distribution stationnaire pour une chaîne irréductible, donc avec une seule classe d'états, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\pi_j > 0$ *pour tout* j *;*
2. $\sum_i \pi_i = 1$ *;*
3. $\pi_j = \sum_i \pi_i K_{ij}$ *pour tout* j, *c'est-à-dire* $\pi = \pi K$ *en notation matricielle.*

théorème 1.6.3. *Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire* (π_j) *si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas, la distribution stationnaire est unique et donnée par* $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$ *pour tout état* j, *où* $\mu_j = \mathbb{E}(\textit{temps de premier retour à } j \mid \textit{départ de } j)$.

Remarque 1.6.4. *Toute chaine de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente positive.*

théorème 1.6.5. *Soit* (X_n) *une chaîne de Markov irréductible et apériodique alors* P^n *converge vers la matrice dont tous les lignes sont constantes égales à* μ, *en particulier quel que soit la loi de* X_0, X_n *converge en loi vers* μ.

Démonstration. La preuve se base sur Perron-Frobenius en utilisant le fait que la matrice de transition admet 1 comme unique valeur propre de module 1. □

Remarque 1.6.6. *Remarquons que la condition de matrice stochastique irréductible n'est pas suffisante pour cette conclusion. Par exemple, si l'on considère la matrice stochastique irréductible*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors, $A^{2n} = \mathrm{I}_2$ *et* $A^{2n+1} = A$. *Par conséquent, la suite* $(A^n)_n$ *ne converge pas (mais les deux suites extraites* $(A^{2n})_n$ *et* $(A^{2n+1})_n$ *convergent). On remarque que dans ce cas,*

$$\mathrm{PGCD}\left\{n \in \mathbb{N}, [A^n]_{i,i} > 0\right\} = 2.$$

Exemple : Gestion de maintenance

Un appareil peut être soit en réparation (état 0), soit en état de fonctionnement bon, moyen ou mauvais (états 1, 2 ou 3, respectivement). Si l'appareil est dans l'état 1 (bon) ou l'état 2 (moyen) un jour donné, le jour suivant, il peut soit rester dans le même état, soit passer à un état de fonctionnement inférieur, c'est-à-dire 2 ou 3, respectivement. Lorsque l'appareil est en mauvais état de fonctionnement (état 3), il est envoyé en réparation le lendemain, puis remis en bon état (état 1) le jour suivant. Les différents états et les transitions possibles sont illustrés dans la figure 1.6

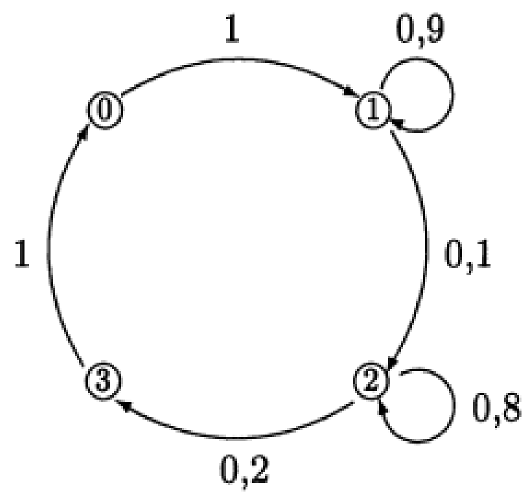

FIGURE 1.6 – Exemple de gestion de maintenance

Voici la matrice de transition pour l'état de l'appareil (0, 1, 2 ou 3) d'un jour au suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les états communiquent entre eux, et donc la chaîne est irréductible. Puisque le nombre d'états est fini, la chaîne est récurrente positive. De plus, $P_{11} = 0,9 > 0$, ce qui implique que la chaîne est apériodique, donc ergodique. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

où $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\} = \pi$ satisfait $\pi = \pi P$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_3, \\ \pi_1 = \pi_0 + 0,9\pi_1, \\ \pi_2 = 0,1\pi_1 + 0,8\pi_2, \\ \pi_3 = 0,3\pi_2, \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

On a alors $\pi_0 + 10\pi_0 + 5\pi_0 + \pi_0 = 1$, d'où $\pi_0 = \frac{1}{17}$. C'est la proportion moyenne de jours à long terme que l'appareil passe en réparation. De plus, $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = 17$ est le nombre moyen de jours qu'un appareil nouvellement réparé fonctionne avant de retourner en réparation.

2 TD

2.1

Une unité de production comprend deux machines-outils qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine-outil a une fiabilité de 0,9 au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est de 0,1. Il faut une nuit pour réparer une machine-outil qui tombe en panne, mais une seule à la fois peut être réparée.

(a) Quelle est la matrice de transition pour le nombre de machines-outils en état de fonctionnement au début d'une journée ?

(b) S'il faut deux nuits pour réparer une machine-outil, quels états peut-on considérer pour avoir une chaîne de Markov et quelle est sa matrice de transition ?

2.2

Déterminer les classes d'états transientes, récurrentes nulles, récurrentes positives, périodiques (dans ce cas donner leur période) et ergodiques de la chaîne de Markov sur les états $0, 1, \ldots$, dont la matrice de transition est :

$$(a) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier brièvement vos affirmations.

2.3

Une chaîne de Markov sur trois états, disons 0, 1 et 2, a comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type ; (b) la matrice de transition en n pas ; (c) la limite de cette matrice lorsque n tend vers l'infini. *Suggestion.* Diagonaliser la matrice de transition.

2.4

Supposons que, d'une génération à la suivante, les familles changent de groupe de revenu (bas, moyen, élevé) selon une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Comment devraient se répartir les familles dans les trois groupes de revenu après un grand nombre de générations ?

2.5

On considère la matrice de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifiez que Y est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
2. Quelle est la particularité de la matrice Q ?
3. Montrez que la mesure invariante de la chaîne est la mesure uniforme sur $\{0,1\}^3$ et que le temps moyen de retour en un état est 2^3.

2.6

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1,2\}$, dont la matrice de transition P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

où $0 < p, q < 1$.

1. Classifier les états de cette chaîne.
2. Déterminer la probabilité stationnaire.
3. En déduire l'espérance du temps de retour dans l'état 1 sachant qu'elle est partie de l'état 1.

3 | TP

3.1 File d'attente

3.1.1 Enoncé

L'énoncé Le corrigé

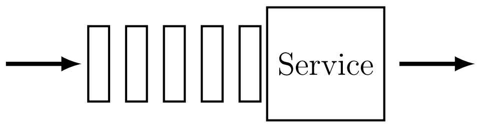

FIGURE 3.1 – File d'attente

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et pas de client avec une probabilité $1 - p$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité $q \in]0, 1[$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1 - q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n+1$). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant n, il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le d´epart d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées. On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant n par la variable X_n. Si on note A_n (resp. D_n) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant n " (resp. "Départ d'un client à l'instant n ") et si $\bar{A}_n$ et $\bar{D}_n$ sont respectivement les événements complémentaires de A_n et B_n, alors X_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

— Si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = \mathbf{1}_{(A_{n+1})}$

— Si $X_n \geq 1$

alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} = & X_n \mathbf{1}_{\left((A_{n+1} \cap D_{n+1}) \cup \left(\bar{A}_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1}\right)\right)} + (X_n + 1)\, \mathbf{1}_{\left(A_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1}\right)} + \\ & + (X_n - 1)\, \mathbf{1}_{\left(\bar{A}_{n+1} \cap D_{n+1}\right)}, \end{aligned}$$

avec, pour un événement E, $\mathbf{1}_{(E)} = 1$ si E est réalisé et $\mathbf{1}_{(E)=0}$ si E n'est pas réalisé. Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé. On montre que $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état $\mathbb{N}$, et de matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq+\bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\bar{p} = 1-p$ et $\bar{q} = 1-q$. On montre, sous des conditions sur p et q, que la chaîne X possède une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_i)_{i\in N}$. Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

1. Etudier la classification des états de la chaîne X du modèle proposé.
2. Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante π pour la chaîne du modèle proposé.
3. Expliciter π, quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
4. Définir le temps moyen de séjour de la chaîne X dans un état donné
5. Expliquer la formulation de Xn+1 en fonction de Xn (donnée dans le texte)
6. Tracer le graphe de transition de la chaîne X
7. Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
8. Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne X.
9. Est-ce que la chaîne récurrente ?
10. Justifier l'existence et l'unicité de loi stationnaire
11. Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante : la capacité du système est limitée (à tout instant n, on ne peut avoir plus de K clients dans le système).
12. Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne X de l'instant $n = 0$ à l'instant $n = 100$ en supposant que X démarre dans l'état 0 , pour $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{4}$.
13. En générant 100000 trajectoires de X démarrant dans l'état 0 , calculer une approximation de π_2. On traitera le cas $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$.
14. On suppose maintenant que le système est de capacité finie K. Dans ce cas l'espace d'état de X devient $\{0, 1, \dots, K\}$. Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimité.
15. Tronquer la matrice de transition P en supprimant les lignes $i > K$ et les colonnes $j > K$, puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.
16. En prenant $K = 3$ (dans toute la suite), expliciter la loi stationnaire π.
17. Générer une trajectoire de longueur $n = 1000$ et calculer les quantités $\hat{p}_j(n)$, pour $j = 0, 1, \dots, K$, définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_k=j)}$$

18. Comparer graphiquement les π_j avec les $\hat{p}_j(n)$ pour les valeurs de n : 100,1000 et 10000 . On traitera les cas $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$
19. Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.
20. Calculer le temps moyen de retour à un état du système.

3.1.2 Quelques simulations obtenues

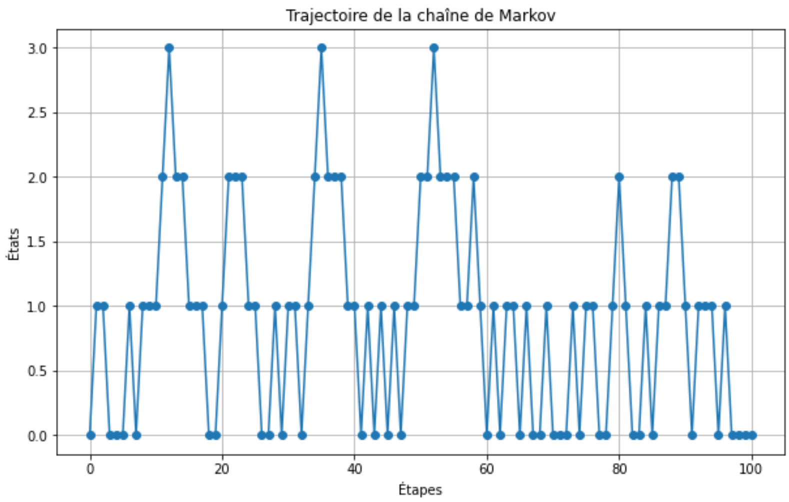

FIGURE 3.2 – Simulation d'une trajectoire de la chaîne de Markov.

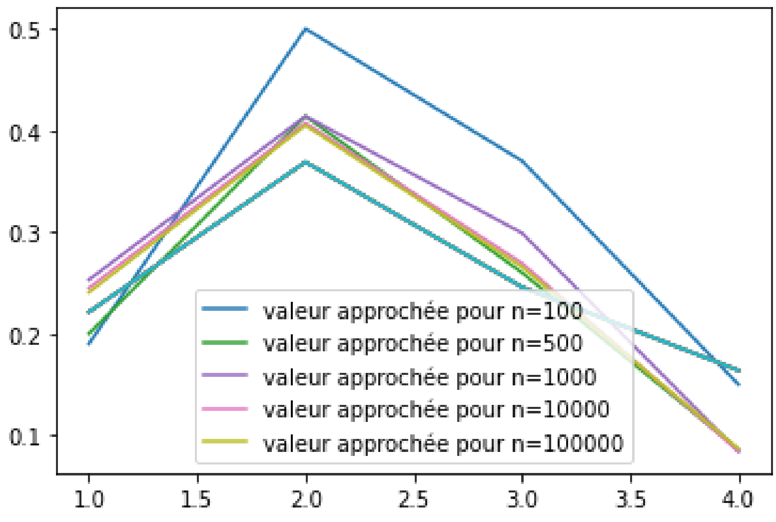

FIGURE 3.3 – Valeurs approchées pour la mesure invariante

3.2 Urnes et particules

L'objectif de ce TP est de modéliser la diffusion de molécules gazeuses entre deux compartiments séparés par une cloison poreuse.

Deux urnes A et B contiennent au total a billes. Les urnes correspondent aux compartiments et les billes aux molécules. À chaque instant il y a tirage au hasard d'une bille, qui est alors changée d'urne.

3.2.1 Le modèle microscopique

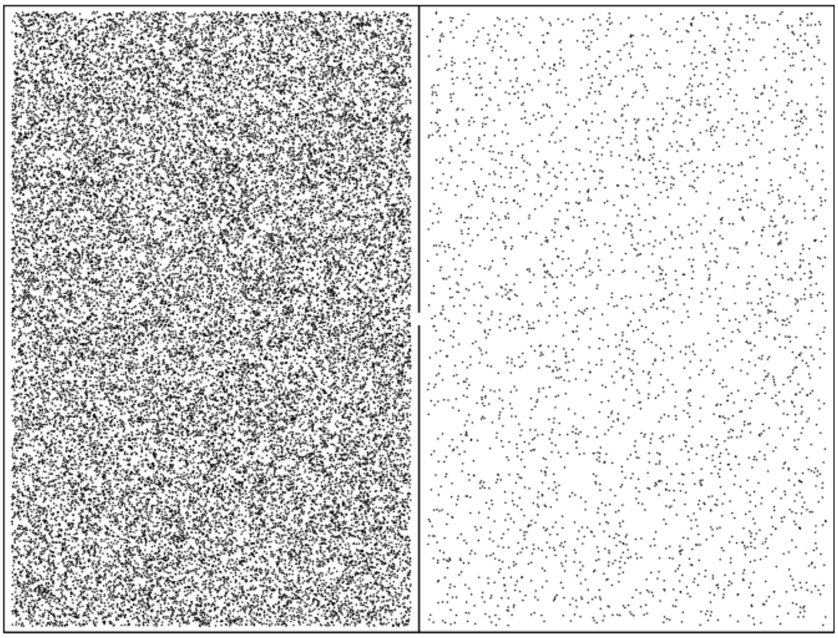

FIGURE 3.4 – Répartition des molécules dans les deux urnes

Pour une configuration de a boules, on associe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_a)$ où :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la particule } i \text{ appartient à } A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des configurations possibles est $\mathcal{F} = \{0,1\}^a$.

On note $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont voisines, c'est-à-dire si elles ne diffèrent que d'une seule coordonnée.

On considère (Y_n) une chaîne de Markov avec espace d'états $\mathcal{F}$ dont la matrice de transition est :

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tous } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{F} = \{0,1\}^a = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_a) \mid \text{pour tout } i = 1, \dots, a, x_i \in \{0,1\}\}$$

Questions

1. Pour $a = 2$, choisissez la bonne matrice de transition parmi :

a.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tracez le graphe de transition correspondant à la matrice de transition choisie.
3. Justifiez que Y est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
4. Quelle est la particularité de la matrice Q ?
5. Montrez que la mesure invariante de la chaîne est la mesure uniforme sur $\mathcal{F}$ et que le temps moyen de retour en un état $x \in \mathcal{F}$ est 2^a.

3.2.2 L'urne d'Ehrenfest

Observer l'évolution de la chaîne Y nécessiterait de déterminer la position de chaque particule, ce qui est pratiquement impossible. Toutefois, il est possible de mesurer la pression, proportionnelle au nombre de particules présentes dans l'urne A. Pour simplifier certaines expressions, nous considèrerons parfois le cas où a est pair. Dans ce cas, la lettre b désignera toujours $a/2$.

Définition de la matrice de transition

À la chaîne de Markov Y, on associe le processus $(X_n)_n$ à valeurs dans $E = \{0, 1, \dots, a\}$, où X_n est la somme des coordonnées de Y_n.

On admet que le processus $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur E avec la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & (a-1)/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a & 0 & (a-2)/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (a-1)/a & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la chaîne est irréductible, récurrente et périodique de période 2.
2. Montrez que sa mesure invariante est la loi binomiale $\mathcal{B}(a, 1/2)$.

Espérance et variance

La pression au temps n dans l'urne A est de l'ordre de $P_n = X_n/a$. Nous nous intéressons ici aux deux premiers moments de cette variable aléatoire.

1. Posons $\alpha = 1 - 2/a$ et $\beta = 1 - 4/a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrez que :
$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n$$
2. Montrez que :
$$\mathrm{Var}(P_n) = \frac{1}{4a} + \left(\mathrm{Var}(X_0) - \frac{1}{4a}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^n - \alpha^{2n}\right)$$

3.2.3 Temps de retour

On définit le temps T_{ii} de premier retour en i de la manière suivante :
$$T_{ii} = \inf\{n > 1 \mid X_n = i \mid X_0 = i\}$$
1. Considérez $b = 10000$. Calculez et interprétez les résultats pour :
$$\mathbb{E}(T_{00}) = 220000 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_{bb}) \approx 100\sqrt{\pi}$$

3.2.4 Aspect numérique

1. Simuler numériquement le nombre de boules dans l'urne A.
2. Vérifier numériquement la valeur de l'espèrance calculée dans la partie 3.2.2.
3. Tracer numériquement la fréquence des cas où l'urne A contient i boules au bout de n étapes.

3.2.5 Quelques simulations obtenues

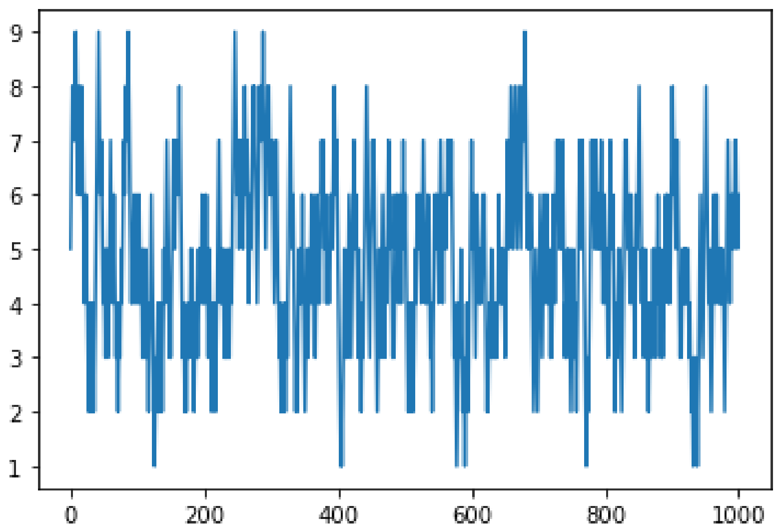

FIGURE 3.5 – Simulation du nombre de boules dans l'urne A

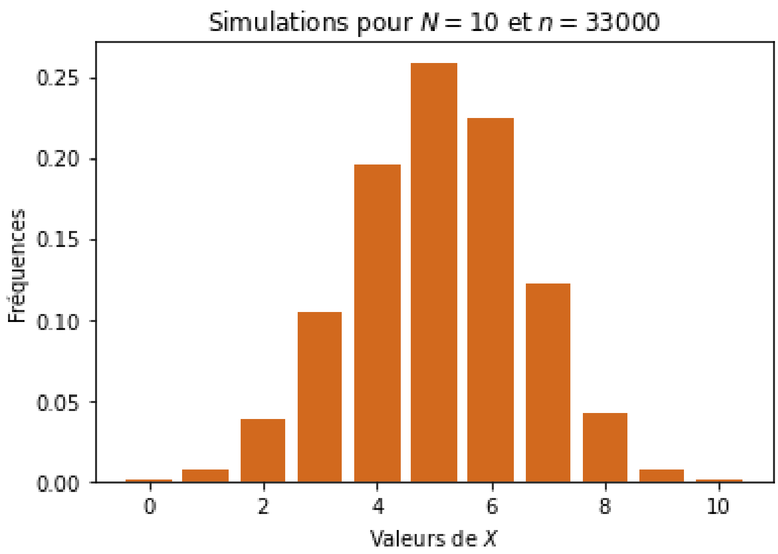

FIGURE 3.6 – Représentation des fréquences de la quetsion 3.

4 Examen

Considérons $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ pour un p fixé dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous définissons $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Les variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentent une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire $T(x)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par :

$$T(x) = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = x\},$$

qui représente le temps de première atteinte en x, avec la convention que $\inf \varnothing = +\infty$. *Naturellement, $T(0) = 0$ et pour $x > 0$, $T(x) \geq 1$. Sauf indication contraire, x désigne un entier fixé $x \geq 0$.*

1. Prouvez que pour tout $k \geq 1, T(x)^{-1}(\{k\})$ appartient à la tribu $\sigma(X_1, \dots, X_k)$. Ainsi, T est une variable aléatoire discrète.
2. Pour $k \geq 1$, montrez que $\mathbb{P}(T(1) = k \text{ et } X_1 = -1) = (1 - p)\mathbb{P}(T(1) = k - 1)$.
3. Soit $(x, k, a, b) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$, montrez que :
$$\mathbb{P}[T(x + k) = a + b \mid T(x) = a] = \mathbb{P}[T(k) = b] \times \mathbb{P}[T(x) = a].$$
4. Pour $x \geq 1$, établissez que $\mathbb{P}(T(x) < +\infty) = \mathbb{P}(T(1) < +\infty)^x$. *Indication : Utilisez une récurrence et écrivez :*
$$\mathbb{P}(T(x + 1) < +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T(x) = k \text{ et } T(x + 1) < +\infty).$$
5. Pour $t \in [0, 1]$, définissez $g(t) = \mathbb{E}(t^{T(1)})$. *Supposons que $t^{+\infty} = 1$ et $t^{+\infty} = 0$ pour $t \in [0, 1]$. Quelle est la valeur de $g(1)$? La fonction génératrice généralisée g est-elle continue en 1 ?*
6. Montrez que $g(t) = t\left(p + (1 - p)\mathbb{E}(t^{T(2)})\right)$ pour $t \in [0, 1[$, en utilisant $t^{T(1)} = t^{T(1)}\mathbf{1}_{X_1=1} + t^{T(1)}\mathbf{1}_{X_1=-1}$.
7. Prouvez que pour $t \in [0, 1[, \mathbb{E}(t^{T(2)}) = \left(\mathbb{E}(t^{T(1)})\right)^2 = (g(t))^2$. *Indication : Inspirez-vous de la question 2.*
8. Déterminez $g(t)$ pour $t \in [0, 1]$.
9. Calculez $\mathbb{P}(T(x) < +\infty)$ pour $x = 1$ puis pour $x \in \mathbb{Z}$.

5 | Projet

Dand le cadre de l'approche pédagogique "Learning by doing", et afin de cultiver l'aspect créatif chez l'étudiant, il serait demandé de réaliser un projet, individuellement ou en groupe, autour des applications de chaînes de Markov, avec une partie numérique, en s'inspirant des thématiques suivantes :

5.1 Processus de Poisson : Gestion du Capital d'un Casino

Les processus de Poisson sont utilisés pour modéliser des événements se produisant de manière aléatoire au fil du temps. Une application pertinente est la gestion du capital d'un casino, où les gains et les pertes peuvent être modélisés comme des processus de Poisson.

5.2 Files d'Attente

Si le TP1 avait pour objectif d'étudier un modèle simple d'une file d'attente dans un guichet, l'étudiant pourra s'intéresser à des systèmes plus complexes et s'aventurer dans la théorie des files d'attentes en cherchant à optimiser des temps caractéristiques à l'instar du temps d'attente moyen.

5.3 Gestion de Stock avec les Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov peuvent être utilisées également pour la gestion de stock à variable aléatoire en vue d'une optimisation des commandes.

5.4 Résolution de Systèmes Linéaires par les Chaînes de Markov

Dans certains cas, la résolution de systèmes linéaires par des chaînes de Markov peut s'avérer plus puissante que l'utilisation des méthodes déterministes.

5.5 Martingales

Les martingales sont des processus stochastiques qui ont beaucoup d'applications, comme le modèle de Wright-Fisher en génétique des populations.

5.6 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien est un exemple de processus stochastique continu, il est très utile notamment en finance pour modéliser l'évolution des prix des actions.

5.7 Planning et Evaluation

Planning

Activité	**Nombre d'heures**
Rappels sur les probabilités	3h
Cours sur les chaînes de Markov	9h
TD	3h
TP1	6h
TP2	6h
Examen	2h

Évaluation

Élément	**Pourcentage**
TP	30%
Projet	30%
Examen	40%

Remarque 5.7.1.

1) Le livrable du projet est un rapport rédigé en Latex, aux environs de 20 à 40 pages, avec un code python bien commenté, à envoyer 3 ou 4 semaines après l'affectation des sujets.

2) Les rapports des TP sont à rendre à la fin de la séance, mais en cas de négociation, on pourra tolérer que ce soit pour la fin de la semaine

Bibliographie

[1] Sabin lessard, *Processus stochastiques, cours et exercices corrigés*. ellipses.

[2] Djalil Chafaï, Florent Malrieu, *Recueil de Modèles Aléatoires*. Springer.

[3] Béatrice de Tilière, *Chaines de Markov.*

[4] Ahlam Ouardi, *Introduction aux processus stochastiques.*

[5] Lefebvre, Mario, *processus stochastiques appliqués*. Hermann

[6] T. Dugardin, M. Rezzouk, *Exercices de mathématiques Centrale-Supelec, Mines-Ponts, École Polytechnique et ENS*. Dunod

Liens utiles :

— Problème de Scrutin
— Simulation par Matlab
— Programmation python
— Processus de naissance et de mort