Física del Interior Terrestre

Trabajo Práctico 7

Año 2020

La teoría de la viscoelasticidad lineal permite modelar el comportamiento de materiales cuya respuesta a la aplicación de esfuerzos y deformaciones es variable en el tiempo. Como se puede deducir del nombre se trata de la combinación de una respuesta elástica y una viscosa. El objetivo principal de esta teoría es encontrar ecuaciones constitutivas que relacionen el esfuerzo y la deformación. A diferencia de la elasticidad lineal, la dependencia del tiempo hace que aparezcan las derivadas temporales del esfuerzo y de la deformación en la descripción del comportamiento del material. En este trabajo práctico estudiaremos 3 fenómenos particulares que exhiben los materiales con comportamiento viscoelástico,

- Fluencia o "*creep*", deformación debida a la aplicación de un esfuerzo constante en el tiempo.
- Relajación de los esfuerzos debido a la aplicación de una deformación constante en el tiempo.
- Histéresis en la curva esfuerzo-deformación

1. Para describir el comportamiento viscoelástico a través de leyes constitutivas se utilizan diversos modelos matemáticos. Entre los más comunes se encuentran el modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voigt y el de Zener o "*sólido lineal estándar*" que combina los dos modelos anteriores (Fig. 1). Todos estos modelos descomponen el esfuerzo y la deformación en dos términos, uno que representa los efectos elásticos y otro que representa los efectos viscosos, siendo estos modelos, interpretables en términos de resortes y amortiguadores. El amortiguador representa la disipación de energía en forma de calor mientras que el resorte representa la energía almacenada en el cuerpo.

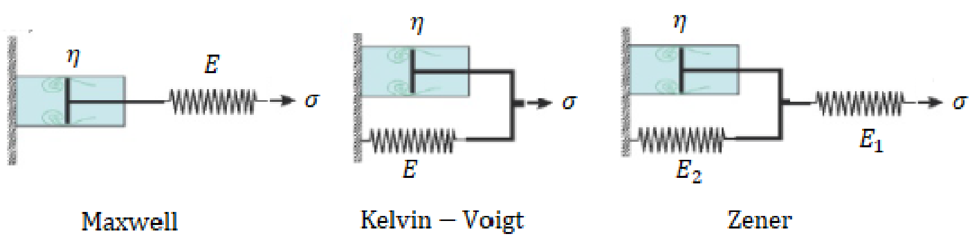

Figura 1: Representación esquemática de diferentes modelos para materiales viscoelásticos.

a) Demostrar que para los modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt y Zener las leyes constitutivas están dada por

$$\sigma + \frac{\eta}{E}\frac{d\sigma}{dt} = \eta\frac{d\epsilon}{dt} \tag{1}$$

$$\sigma = E\epsilon + \eta\frac{d\epsilon}{dt} \tag{2}$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2}\frac{d\epsilon}{dt} \tag{3}$$

respectivamente. En las ecuaciones anteriores, σ es el esfuerzo, ϵ es la deformación, E, E_1 y E_2 son los módulos elásticos que caracterizan a los resortes y η es la viscosidad que caracteriza al amortiguador.

b) Encontrar como varía la deformación con el tiempo para los 3 modelos en el caso de ser sometidos a un esfuerzo σ_0 constante en el tiempo (Ensayo de fluencia o "*creep*").

c) Encontrar como varía el esfuerzo con el tiempo en deformación para los 3 modelos en el caso de ser sometidos a una deformación ϵ_0 constante en el tiempo (Test de relajación).

d) Considerar un material con un módulo elástico $E = 200$ MPa y una viscosidad $\eta = 25$ GPa·hr es comprimido con una tensión igual 10 MPa durante 100 horas. Calcular la deformación luego de 50, 150 y 300 horas utilizando los modelos de Maxwell y de Kelvin-Voigt.

2. Otra forma de estudiar el comportamiento de un material viscoelástico es modelando su respuesta a perturbaciones oscilatorias, en los cuales es sometido a un esfuerzo (deformación) sinusoidal a una frecuencia dada. La deformación (esfuerzo) resultante, aunque desplazada un ángulo de fase, mantiene la misma frecuencia. Este comportamiento está caracterizado por el módulo dinámico $E^*(\omega)$ definido como

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon(\omega)} \tag{4}$$

Esta es una función compleja que puede separarse en una parte real y otra imaginaria

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + i\, E''(\omega) \tag{5}$$

donde E' es el módulo de almacenamiento o modulo elástico y E'' es el módulo de pérdida o módulo viscoso. Encontrar las expresiones de E^*, E' y E'' para los modelos Maxwell, Kelvin-Voigt y Zener y analizar su comportamiento en función de ω. Graficar las curvas de E' y E'' considerando $E = E_1 = 21{,}6$ GPa, $E_1 = 29{,}4$ GPa y $\eta = 0{,}14$ GPa·s.

b) La pérdida de energía en un material viscoelástico puede caracterizarse mediante el factor de calidad Q, cuya inversa Q^{-1}, es denominada factor de disipación y está dada por

$$Q^{-1} = \frac{E''}{E'} \tag{6}$$

Considerando la aplicación de una deformocaion sinusoidal $\epsilon(t) = \epsilon_a e^{i\omega t}$ y asumiendo que el esfuerzo resultante es de la forma $\sigma(t) = \sigma_a e^{i(\omega t+\delta)}$ demostrar que

$$tg(\delta) = Q^{-1} \tag{7}$$

donde δ representa el desfase existente entre el esfuerzo y la deformación. Graficar el factor de disipación en función de ω para los 3 modelos utilizando los parámetros del inciso anterior.