Física del Interior Terrestre

Trabajo Práctico 6

Año 2020

---

1. El modelo de acreción considerado en el TP 2 produjo un planeta frío, con una temperatura interna final igual a la temperatura de la nebulosa. A continuación, analizaremos el rol de la producción de calor por decaimiento radiactivo en el estado térmico del planeta.

   a) Demostrar que en el caso de un modelo con simetría esférica la ecuación del calor para el estado estacionario está dada por

   $$\frac{d}{dr}(r^2 q(r)) = r^2 a(r), \tag{1}$$

   donde $q(r)$ es el flujo de calor en el planeta debido a la fuente de calor radiogénico $a(r)$ [1, pag 176].

   b) Si consideramos una Tierra formada por un núcleo y un manto y asumimos que los isótopos radiactivos térmicamente significativos (^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th y ^{40}K) se encuentran uniformemente distribuidos en el manto y el núcleo, de modo que las cantidades totales son las que se encuentran actualmente, determinar $q(r)$. Suponer que un 70 por ciento del total de los isótopos radiactivos se encuentran en el manto y el resto en el núcleo, y considerar que $q(0) = 0$. Tomar que el radio del planeta es $R = 6370$ Km y que el contacto manto-núcleo se da a los 3480 km.

Tabla 1. Elementos radiactivos térmicamente importantes. Valores actuales. [1]

Isótopo	E (MeV)	λ (1/año)	M (Kg)
^{238}U	47.7	1.55×10^{-10}	12.86×10^{16}
^{235}U	43.9	9.85×10^{-10}	0.094×10^{16}
^{232}Th	40.5	4.94×10^{-11}	47.9×10^{16}
^{40}K	0.71	5.54×10^{-10}	7.77×10^{16}

   c) Utilizando la ley de Fourier para el caso de simetría esférica

   $$q(r) = -k\frac{dT}{dr}, \tag{2}$$

   determinar el perfil de temperatura del planeta suponiendo que el coeficiente de conductividad térmica para el manto es igual a 6 W m^{-1} K^{-1} y para el núcleo es igual a 36 W m^{-1} K^{-1}. La suposición de estado estacionario implica que en la superficie terrestre la producción de calor interno está balanceada con la energía que es irradiada al espacio a una tasa dada de acuerdo con la Ley de Stefan-Boltzmann. Considerar además que el coeficiente de emisividad de la ecuación de Stefan-Boltzmann es $\epsilon = 1$, y que el ambiente en el que se encuentra el planeta posee una temperatura $T_0 = 270$ ^{o}K.

[1] Estos valores fueron tomados de Stacey, 2008, "Physics of the Earth", 4th Ed., Crookflied Press.

d) Repetir las partes b) y c) considerando una Tierra homogénea donde los isótopos se encuentran uniformente distribuidos en el planeta con una conductividad térmica $k = 8$ W m^{-1} K^{-1}. Usar para la fuente $a(r)$ una función obtenida adecuadamente para 4×10^9 años atrás.

e) Mencionar cuales son las limitaciones en las hipótesis que asumimos en este ejercicio para determinar la temperatura del interior terrestre. ¿A que pueden deberse las discrepancias entre los valores de temperatura estimados y los que figuran en la literatura?

2. La ecuación de Lindemann,

$$\frac{dT_f}{dP} = 2\frac{T_f}{K_T}\left(\gamma - \frac{1}{3}\right) \tag{3}$$

permite estimar la temperatura de fusión T_f de un material en función de la presión P a la cual está sometido. Determinar la temperatura de fusión para los materiales del interior terrestre en función de la profundidad asumiendo que el planeta posee una densidad constante e igual a 5000Kg m^{-3}, y suponiendo que la incompresibilidad isotérmica $K_T = 500$ GPa, el parámetro de Grüneisen $\gamma = 1$ y $T_f(P = 0) = 1500$ ^{o}K. Para resolver este problema, considerar también que el campo de presión es hidrostático, de modo que

$$\frac{dP}{dr} = \rho g(r) \tag{4}$$

donde $g(r)$ es la aceleración local debido a la gravedad. Comparar los perfiles de temperatura de fusión con las temperaturas determinadas en el ejercicio 1. ¿Que conclusiones se pueden obtener? ¿Se corresponden estos resultados con los que figuran en la literatura?

3. Partiendo del balance de energía encontrar la ecuación de calor para un fluido homogéneo, isótropo e incompresible. Tener en cuenta el transporte de calor por procesos de conducción y convección, y un término fuente [1, pag 310].

4. Utilizar el script '*Box2DConvection.m*' para estudiar el proceso de convección térmica en una capa de fluido. Este script resuelve la convección térmica en estado estacionario para un dominio rectangular en dos dimensiones. Los bordes superior e inferior del dominio se mantienen a temperatura constante (condiciones de borde isotérmicas), mientras que en los bordes laterales el flujo de calor es nulo (condiciones de borde aisladas). Desde el punto de vista mecánico, no existen esfuerzos de corte aplicados sobre el fluido (condiciones de borde de superficie libre) en ninguno de los bordes. La viscosidad y difusividad térmica del fluido se mantienen constantes. El fluido es calentado por debajo, es decir, el calor se suministra en la base de la capa.

a) Graficar la distribución de temperatuta y el campo de velocidades dentro de la capa de fluido. Las dimensiones del dominio son 1000 km de alto por 1000 km de ancho. Considerar que el fluido posee un coeficiente de expansión térmica $\alpha = 2{,}5 \times 10^{-5}$ 1/K, difusividad térmica $\kappa = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ y densidad $\rho = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$. Tomar para la aceleración debida a la gravedad $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Utilizar diferentes viscosidades $\eta = 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}, 10^{24} y\, 10^{25}$ Pa s. La temperatura en el borde superior es $T_2 = 273$ K y en el borde inferior $T_1 = 1273$ K.

b) Analizar el perfil de temperatura en el centro de la capa en función del número de Rayleigh, R_a. En este caso R_a está dado por:

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T h^3 \rho}{\kappa \eta}. \tag{5}$$

¿En qué casos se podría aplicar la teoría de capa límite?

5. En la primer parte del Trabajo Práctico determinamos que el calor radiogénico pudo haber incrementado la temperatura de la Tierra hasta el punto de fusión en algunas regiones. De esta manera, se estima que la Tierra evolucionó por procesos de diferenciación hacia un planeta estratificado durante esta fase de fusión parcial, creando un manto liviano y rico en silicatos y un núcleo más pesado y ferroso. Un enfriamiento rápido por convección habría disminuido velózmente la temperatura del manto por debajo de la temperatura de fusión. La convección habría continuado en el manto por procesos de *creep*, que son caracterizados por viscosidades muy elevadas (viscosidad cinemática $\nu = 10^{18}$ m^{2}s^{-1}). A partir de observaciones sismológicas se sabe que el núcleo externo permanece en estado líquido, y la teoría sugiere que la viscosidad del mismo es baja (tomamos $\nu = 1$ m^{2}s^{-1} para tener en cuenta efectos magnéticos).

   En este ejercicio consideramos la evolución térmica del manto y del núcleo una vez que la temperatura del manto se encuentra por debajo de la temperatura de fusión. Asumimos que las regiones convectivas del núcleo y del manto están caracterizadas por las temperaturas T_c y T_m, respectivamente. El enfriamiento de cada región puede determinarse utilizando la teoría de capa límite, que predice que el flujo de calor (en Wm^{-2}) de una región convectiva puede estimarse mediante

$$q = c_2 k \left(\frac{\alpha g}{\kappa \nu}\right)^{1/3} (\delta T)^{4/3}, \tag{6}$$

   donde δT es el salto de temperatura entre el borde de la región y el interior de la región convectiva, y la constante c_2 está dada por

$$c_2 = \frac{2^{4/3}}{R_{ac}^{1/3}}. \tag{7}$$

   Las propiedades físicas de la región convectiva incluyen el coeficiente de expansión térmica α, la aceleración debido a la gravedad g, la difusividad térmica κ, la conductividad térmica k, la viscosidad cinemática ν, y el número de Rayleigh crítico $R_{ac} \approx 10^3$. En el manto asumimos $\alpha = 1{,}5 \times 10^{-5}$ K^{-1}, $g = 10$ m^{2}s^{-1}, $\kappa = 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}, $k = 6$ WK^{-1}m^{-1}, y $\nu = 10^{18}$ m^{2}s^{-1}. En el núcleo, $\alpha = 1{,}0 \times 10^{-5}$ K^{-1}, $g = 7$ m^{2}s^{-1}, $\kappa = 6 \times 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}, $k = 36$ WK^{-1}m^{-1}, y $\nu = 1$ m^{2}s^{-1}.

   a) Obtener las ecuaciones que describen las temperaturas $T_m(t)$ y $T_c(t)$, teniendo en cuenta la geometría esférica (tomar para la superficie del manto un radio $R_m = 6{,}371 \times 10^6$ m, y para el contacto manto-núcleo $R_c = 3{,}48 \times 10^6$ m). Incluir las posibles contribuciones de calor radiogénico en el manto $a_m(t)$ y en el núcleo $a_c(t)$.

b) Utilizar el script '*ConveccionTierraCapaLimite.m*' para resolver las ecuaciones obtenidas en la parte a). Tomar como condiciones iniciales $T_m(0) = 3500$ K, y $T_c(0) = 4500$ K, donde $t = 0$ se corresponde con 4×10^9 años atrás. Como paso de integracíon tomar $dt = 10^7$ años. Asumir que un 70 % del total de los isótopos radiactivos de U, Th y K que posee la Tierra se encuentra en el manto y tener en cuenta los cambios con el tiempo en la producción de calor radiogénico. Suponer además que el restante 30 % de los isótopos radiactivos se encuentra en la corteza y despreciar la influencia que esta fuente de calor tiene en la evolución térmica del manto y del núcleo (esto no es estrictamente correcto; es una hipótesis del modelo para simplificar el trabajo). Dibujar T_m, T_c y T_m/T_c en función del tiempo.

c) Repetir los cálculos de la parte b) asumiendo un núcleo caliente con $T_c(0) = 5000$ K y luego uno frío con $T_c(0) = 3000$ K. Para la temperatura inicial del manto suponer en ambos casos que $T_m(0) = 3000$ K. Dibujar T_m, T_c y T_m/T_c en función del tiempo y comentar sobre las diferencias y similitudes encontradas.

d) Mencionar cuáles son las limitaciones del modelo propuesto para explicar la evolución térmica de la Tierra ¿Cómo se podria mejorar el mismo?

Referencias

[1] Turcotte, D. L. y G. Schubert, *Geodynamics*, 3ra Ed., Cambridge University Press, 2014.