Física del Interior Terrestre

Trabajo Práctico 2

2020

---

1. La formación y crecimiento de planetas terrestres puede ser estimado mediante la utilización del modelo de acreción de Safronov [1]. Es posible formular un modelo sencillo de acreción haciendo las siguientes supociciones: i) la masa final del planeta (M_p) se encuentra inicialmente distribuida en forma de planetesimales sobre un disco de acreción en forma de anillo, ii) el planeta en formación o protoplaneta, de masa M, se desplaza en una órbita circular de radio a dentro del disco y alrededor del protosol de masa M_s y iii) su crecimiento se debe a las colisiones con los planetesimales que se encuentran distribuidos uniformemente en el disco de acreción y se mueven con una velocidad relativa v respecto al planeta.

   a) Bajo estas hipótesis, demostrar que la tasa a la cual el planeta incorpora masa está dada por

   $$\frac{dM}{dt} = \pi R^2(t)\,(1 + 2\theta)\,\rho_s(t)\,v, \tag{1}$$

   donde R es el radio del planeta al tiempo t, ρ_s es la densidad de planetesimales, y el parámetro θ es núnero de Safronov. Asumiendo que la densidad de planetesimales en el disco es espacialmente constante para cualquier tiempo t, se puede escribir

   $$\rho_s(t) = \frac{M_p - M(t)}{V}, \tag{2}$$

   siendo V el volumen del anillo de radio a, ancho δa y altura δ_z. La velocidad relativa determina el espesor efectivo del anillo de acreción a través de la siguiente expresión

   $$\delta_z = a\left(\frac{v}{v_k}\right), \tag{3}$$

   donde v_k es la velocidad kepleriana. Asumir que el protoplaneta y los planetesimales presentan una densidad de masa ρ_p constante.

   b) Integrar analíticamente la Ec. (1) para encontrar una expresión que relacione el tiempo de formación con la masa del planeta. A partir de esta expresión, encontrar los tiempos de acreción para Venus, La Tierra y Marte. Utilizar los parámetros que se listan en la Tabla 1 y tomar $\theta = 3$ y $M_s = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

Planeta	$\boldsymbol{M}$ [kg]	$\boldsymbol{R}$ [m]	$\boldsymbol{\rho}$ [kg/m^3]	$\boldsymbol{a}$ [m]	$\boldsymbol{\delta a}$ [m]
Venus	$4{,}87 \times 10^{24}$	$6{,}05 \times 10^{6}$	$5{,}25 \times 10^{3}$	$1{,}08 \times 10^{11}$	$4{,}49 \times 10^{10}$
La Tierra	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}37 \times 10^{6}$	$5{,}51 \times 10^{3}$	$1{,}50 \times 10^{11}$	$6{,}34 \times 10^{10}$
Marte	$6{,}42 \times 10^{23}$	$3{,}40 \times 10^{6}$	$3{,}90 \times 10^{3}$	$2{,}28 \times 10^{11}$	$7{,}82 \times 10^{10}$

Tabla 1: Parámetros físicos de los planetas para el modelo de acreción.

2. La temperatura del planeta durante su formación se verá afectada, y su cambio dependerá principlamente de la tasa a la cual crece por acreción, dM/dt. Para poder analizar su evolución térmica con el tiempo, hay que plantear como es el intercambio de energía

entre el protoplaneta y los planetesimales. El aumento de energía del protoplaneta se debe principalmente a la energía cinética de los planetesimales que impactan con el mismo. La variación con el tiempo de esta fracción de energía está dada por

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)^{in}_{EC} = \frac{v_{imp}^2}{2}\frac{dm}{dt}, \tag{4}$$

donde dm es la masa de los planetesimales que impactan con el planeta en el intervalo de tiempo dt. La velocidad de impacto de los planetesimales (v_{imp}) satisface la relación

$$\frac{1}{2}v_{imp}^2 = \frac{GM(t)}{R(t)}\left(1 + \frac{1}{2\theta}\right), \tag{5}$$

donde G es la constante gravitacional. Si los planetesimales tienen una temperatura inicial igual a la temperatura ambiente T_0 de la nebulosa, entonces al impactar con el protoplaneta le transfieren una fracción adicional de energía relacionada con la energía térmica de los planetesimales. Si C_p es el calor específico de los planetesimales, la tasa a la cual esta energía se transfiere al protoplaneta está dada por

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)^{in}_{ET} = C_p T_0 \frac{dm}{dt}. \tag{6}$$

Una parte de la energía entregada por los planetesimales al protoplaneta es almacenada como energía térmica, mientras que el resto es irradiada al espacio. Si suponemos que el calor específico del protoplaneta es igual al calor específico de los planetesimales, y si $T(t)$ es la temperatura (uniforme) del protoplaneta, su energía térmica total está dada por

$$E_T = C_p T(t) M(t). \tag{7}$$

El resto de la energía entregada por los planetesimales es irradiada al espacio a una tasa dada por

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)^{out} = 4\pi R^2(t)\sigma(T_s^4(t) - T_0^4), \tag{8}$$

donde T_s es la temperatura de la superficie del planeta y σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Por simplicidad, asumimos que $T_s(t) = T(t)$.

a) Considerando las suposiciones mencionadas anteriormente, demostrar que la evolución temporal de la temperatura, $T(t)$, del planeta está dada por la siguiente ecuación

$$\frac{dT}{dt} = \frac{G}{C_p R}\left(1 + \frac{1}{2\theta}\right)\frac{dM}{dt} + \frac{T_0 - T}{M}\frac{dM}{dt} - \frac{3\sigma}{R\rho_p C_p}(T^4 - T_0^4). \tag{9}$$

donde dM/dt esta dado por la Ec. (1).

b) Determinar la evolución térmica de Venus, La Tierra y Marte integrando numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales dado por las Ecs. (1) y (9). Considerar las siguientes condiciones iniciales

$$T(0) = T_0 = 300\,\mathrm{K},$$
$$R(0) = 10^5\,\mathrm{m}.$$

Para los cálculos utilizar los mismos valores que en el Ej. (1) y tomar $C_p = 10^3$ J para todos los planetas. Respecto al paso temporal para la integración numérica, tomar $\Delta t = 10^3$ años.

3. El aumento de temperatura de los planetas, calculado a partir del intercambio de energía por las colisiones, requiere tiempos de acreción rápidos para poder exceder la temperatura de fusión y permitir la formación del núcleo por el proceso de diferenciación. Estos tiempos son menores que los que sugieren los modelos de acreción e implica que el calentamiento debido a la acreción no es importante para los planetas. Una posible fuente de energía para alcanzar la temperatura de fusión es la colisión de grandes cuerpos con el planeta durante las últimas etapas del período de acreción.

   a) Demostrar que para una colisión entre un planeta de masa M y un cuerpo de masa γM, el aumento de energía del planeta ΔE debido al intercambio de energía cinética y gravitacional está dado por

   $$\Delta E = M\left\{-\frac{3}{5}GM^{2/3}\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{1/3}\left[1+\gamma^{5/3}-(1+\gamma)^{5/3}\right]+\frac{\gamma GM}{2\theta R}\right\}, \tag{10}$$

   donde G es la constante de gravitación universal, R el radio del planeta, θ es núnero de Safronov y ρ la densidad del planeta y del cuerpo colisionante. Considerar que posterior al impacto ambos cuerpos se fusionan en uno. La energía gravitacional para un planeta esférico en equilibrio hidrostático es

   $$\Omega = -\int_0^M \frac{Gm}{r}dm. \tag{11}$$

   b) Utilizar la Ec. (10) para estimar el incremento de temperatura en el planeta Tierra debido a la colisión con un planeta con $\gamma = 0{,}1$. Para los cálculos utilizar los resultados obtenidos en el Ej. (1) y para los parametros de la Tierra los mismos valores que en los Ejs. (1) y (2).

   c) Una vez que la temperatura del material excede los 1500 K, puede comenzar la fusión del mismo ¿Cómo afectaría el comienzo de la fusión a la evolución térmica del planeta?

Referencias

[1] Safronov, V. S., Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and planets, *NASA Tech. Transl., TTF-677*, 206 pp., 1972.